34944

ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK MERTEBEDEN REGLE YÜZEYLER ÜZERİNE

Ayşe ALTIN

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez .09../.08../1994 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından (......90.....) not takdir edilerek oybirliği / oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU
Danışman

Prof.Dr.Arif SABUNCUOĞLU
Üye

Prof.Dr.Necmettin TANRIÖVER
Üye

ÖZET

Doktora Tezi
YÜKSEK MERTEBEDEN REGLE YÜZEYLER ÜZERİNE

Ayşe ALTIN
Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU
1994, Sayfa: 65
Jüri: Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU
Prof. Dr. Arif SABUNCUOĞLU
Prof. Dr. Necmettin TANRIÖĞER

Dört bölümden oluşan bu çalışmada birinci bölümü girişe, ikinci bölümü çalışmamız için gerekli olan temel kavramlara ayırdık.

Üçüncü bölümde, E^3 ve E^n de regle yüzeyin tanımlarını ve regle yüzeye ilişkin temel kavramları verdik.

Dördüncü bölüm çalışmanın orijinal kısmıdır. Burada E^n de (k+1)-boyutlu kapalı regle yüzeyler için açılım uzunluğu ve açılım açısı için yeni tanımlar verdik ve bu büyüklükleri hesapladık. Ayrıca n = 3 özel halinin daha önce hesaplananlarla aynı olduğunu gösterdik. H. Frank ve O. Giering'in verdiği açılım açıları ile burada hesap ettiğimiz açılım açısı arasındaki bağıntıyı açıkladık.

ANAHTAR KELİMELER: Öklid uzayı, regle yüzeyler, kapalı regle yüzeyler, kapalı regle yüzeylerde açılım açısı, kapalı regle yüzeylerde açılım uzunluğu.

ABSTRACT

Ph.D. Thesis
ON RULED SURFACES OF HIGHER ORDER

Ayşe ALTIN
Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU
1994, Page: 65
Jury: Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU
Prof. Dr. Arif SABUNCUOĞLU
Prof. Dr. Necmettin TANRIÖĞER

This thesis is composed of four chapters. The first chapter is devoted to introduction.

In the second chapter, we recall some basic concepts which will be used in the next chapters.

In the third chapter, we present the fundemental material for the ruled surfaces in E^3 and E^n.

The fourth chapter, in which we have given some new definitions of the pitch and the angle of pitch of a closed ruled surface of dimension (k+1) in E^n, is the original part of our work. By using these new definitions we have calculated the pitch and angle of pitch of a closed ruled surface of dimension (k+1) in E^n. Besides we have shown that for the special case when n = 3, our results coincides with the ones known in the literature.

We also expressed the relations between the angle of pitches given by H. Frank and O. Giering and the ones we have obtained in this chapter.

KEY WORDS: Euclidean space, ruled surface, closed ruled surface, pitch, angle of pitch.

TEŞEKKÜR

Bana bu çalışmayı veren ve çalışmalarım boyunca yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen sayın hocam Prof. Dr. H. Hilmi Hacısalihoğlu'na en derin saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

A^T	A matrisinin transpozu
E^n	n-boyutlu Öklid uzayı
$GL(n+1, \mathbb{R})$	(n+1)-boyutlu genel lineer grup
I_n	$n \times n$ tipindeki birim matris
$O(n)$	$n \times n$ tipindeki ortogonal matris
$\mathbb{R}$	Reel sayılar cismi
$\mathbb{R}^n$	n-boyutlu reel standart vektör uzayı
$\mathbb{R}^m n$	$m \times n$ tipindeki reel matrisler cümlesi
$T_p(E^n)$	$p \in E^n$ noktasındaki tanjant uzay
∇f	$f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ nın gradiyenti

1. GİRİŞ

Miroslav Juza'nın çalışması ile daha 1960 yıllarında ortaya atılan genelleştirilmiş regle yüzeyler teorisi üzerinde son yıllarda yapılan çalışmalar oldukça yoğundur. İki Alman matematikçi H. Frank ve O. Giering 1982 yılında E^n de basit kapalı bir C^2-(k+1) boyutlu regle yüzey için, birbirine ikişer ikişer dik k-adet ana doğrunun oluşturduğu yüzeyler için k-adet açılım açısı ve k-adet açılım uzunluğu hesapladılar (Arch. Math. Vol. 38, 106-115, 1982). Bu hesaplamalar E^3 deki bir kapalı regle yüzeyin açılım açısının ve açılım uzunluğunun doğrudan genellemesi görünümü arzetmemektedir. Bu nedenle bu çalışmaya gerek duyduk.

Biz bu çalışmada E^n de (k+1)-boyutlu kapalı regle yüzeyler için açılım uzunluğu ve açılım açısını tanımladık ve hesapladık.

H. Frank ve O. Giering'in koşulları altında bizim hesap ettiğimiz n vektörü yerine a_{k+m+1} vektörü alınırsa onların hesap ettiği m-adet açılım açısının integrantı, $\dot{a}_{k+m+1}$ in bileşenleri olarak karşımıza çıkar.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde temel kavramları vereceğiz.

2.1. Öklid Uzayı

Reel sayılar cümlesi $\mathbb{R}$ ile gösterilmek üzere,

$$\mathbb{R}^n = \{(p_1, p_2, \ldots, p_n) \mid p_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \ldots, n\}$$

eşitliği ile belirli $\mathbb{R}^n$ cümlesinde toplama işlemini,

$$\begin{aligned} +: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n, \quad P = (p_1, p_2, \ldots, p_n), \; Q = (q_1, q_2, \ldots, q_n) \\ (P, Q) &\to P + Q = (p_1 + q_1, p_2 + q_2, \ldots, p_n + q_n) \end{aligned} \tag{2.1}$$

eşitliği ile ve skalar ile çarpma işlemini de

$$\begin{aligned} . : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ (t, P) &\to tP = (tp_1, tp_2, \ldots, tp_n) \end{aligned} \tag{2.2}$$

eşitliği ile tanımlayalım. Bu işlemlere göre $\mathbb{R}^n$ cümlesi $\mathbb{R}$ cismi üstünde n-boyutlu bir vektör uzayıdır.

$\mathbb{R}^n$ cümlesinde bir P elemanını gözönüne alalım.

$$P = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$$

biçimindedir. $\mathbb{R}^n$ nin vektör uzayı yapısını gözönüne almadığımız zaman P ye "$\mathbb{R}^n$ nin bir noktası" diyeceğiz. $\mathbb{R}^n$ cümlesini bir vektör uzayı olarak gözönüne alırsak P bir vektördür.

Şimdi,

$$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$
$$(P, S) \quad \to S\text{-}P$$

fonksiyonunu gözönüne alalım. f nin tanım cümlesi olan $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ çarpım cümlesindeki $\mathbb{R}^n$ yi noktalar cümlesi, f nin değer cümlesi olan $\mathbb{R}^n$ yi vektör uzayı olarak düşünelim. Buna göre f fonksiyonu, nokta ikililerini vektörlere dönüştüren bir fonksiyondur. Bundan dolayı,

$$f(P, S) = \overrightarrow{PS}$$

yazacağız ve $\overrightarrow{PS}$ yi "$\overrightarrow{PS}$ vektörü" diye okuyacağız.

Yukarıda tanımladığımız f fonksiyonunun aşağıdaki iki önermeyi doğruladığı kolayca gösterilebilir.

(1) Her $P, S, T \in \mathbb{R}^n$ için

$$f(P, S) + f(S, T) = f(P, T) \quad \text{yani} \quad \overrightarrow{PS} + \overrightarrow{ST} = \overrightarrow{PT}$$

dir.

(2) $\mathbb{R}^n$ cümlesinde bir P noktası tesbit edildiğinde ve $\mathbb{R}^n$ vektör uzayında bir α vektörü verildiğinde,

$$\overrightarrow{PS} = \alpha$$

olacak biçimde $\mathbb{R}^n$ de bir ve yalnız bir S noktası vardır.

$\mathbb{R}^n$ cümlesinde seçilen sabit bir P noktası için,

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ S &\to \overrightarrow{PS} \end{aligned}$$

fonksiyonunun, $\mathbb{R}^n$ cümlesi ile $\mathbb{R}^n$ vektör uzayı arasında birebir eşleme olduğu kolayca gösterilebilir.

$P = (p_1, p_2, ..., p_n)$ ve $Q = (q_1, q_2, ..., q_n)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} <,> : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ (P, Q) &\to <P, Q> = \sum_{i=1}^{n} p_i q_i \end{aligned} \tag{2.3}$$

eşitliği ile tanımlanan fonksiyon $\mathbb{R}^n$ vektör uzayında bir iç çarpımdır. Bu iç çarpıma $\mathbb{R}^n$ vektör uzayının standart iç çarpımı veya Öklid iç-çarpımı denir.

$$\begin{aligned} \| \; \| : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ P &\to \|P\| = \sqrt{<P, P>} \end{aligned} \tag{2.4}$$

fonksiyonu $\mathbb{R}^n$ uzayında bir normdur. Buna göre $\mathbb{R}^n$ vektör uzayı normlu vektör uzayıdır.

$$\begin{aligned} d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ (P, Q) &\to d(P, Q) = \|Q - P\| \end{aligned} \tag{2.5}$$

fonksiyonu $\mathbb{R}^n$ uzayı üstünde bir metriktir. Buna göre $\mathbb{R}^n$ cümlesi bir metrik uzaydır.

Tanım 2.1.1. Yukarıda tanımlanan d metriğiyle birlikte $\mathbb{R}^n$ uzayına Öklid uzayı denir ve E^n ile gösterilir.

Her metrik uzay bir topolojik uzay olduğundan E^n topolojik uzaydır.

n-boyutlu E^n Öklid uzayının her bir P noktasının

$$P = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$$

biçiminde olduğunu gördük.

$$\begin{aligned} x_i : E^n &\to \mathbb{R} \\ P &\to x_i(P) = x_i(p_1, p_2, \ldots, p_n) = p_i \end{aligned}$$

fonksiyonuna, i-yinci koordinat fonksiyonu denir. E^n uzayında n-tane koordinat fonksiyonu vardır. Bu koordinat fonksiyonlarının cümlesi olan $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ cümlesine, E^n uzayının Öklidiyen koordinat sistemi denir.

Tanım 2.1.2. U, E^n uzayının açık bir alt cümlesi olmak üzere, U nun bir a noktasında,

$$f : U \to \mathbb{R}$$

fonksiyonunun k-yıncı basamağa kadar kısmi türevleri varsa ve k-yıncı basamaktan kısmi türevler sürekli ise f fonksiyonuna a noktasında k-yıncı basamaktan diferensiyellenebilir veya a noktasında C^k-sınıfından bir fonksiyondur, denir.

Tanım 2.1.3. U, E^n uzayının açık bir alt cümlesi ve

$$f : U \to E^m, \qquad f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$$

olsun. $1 \le i \le m$ için f_i fonksiyonlarının her biri C^k-sınıfından ise f fonksiyonu C^k-sınıfından bir fonksiyondur, denir.

2.2. Tanjant Uzay

$p \in E^n$ olmak üzere, $\{(p, v) : v \in \mathbb{R}^n\}$ cümlesini kısaca $T_p(E^n)$ ile gösterelim. Bu cümlede toplama işlemini,

$$\begin{aligned} + : T_p(E^n) \times T_p(E^n) &\to T_p(E^n) \\ ((p, v), (p, \omega)) &\to (p, v) + (p, \omega) = (p, v+\omega) \end{aligned} \tag{2.6}$$

ve skalar ile çarpma işlemini

$$\begin{aligned} . : \mathbb{R} \times T_p(E^n) &\to T_p(E^n) \\ (t, (p, v)) &\to t(p, v) = (p, tv) \end{aligned} \tag{2.7}$$

eşitlikleriyle tanımlayalım. $T_p(E^n)$ cümlesinin $\mathbb{R}$ cismi üstünde bir vektör uzayı olduğu kolayca gösterilebilir. Bu vektör uzayına E^n nın p noktasındaki tanjant uzayı denir. Bu uzayın vektörlerine de p noktasındaki tanjant vektörler denir. (p, v) tanjant vektörü çoğu kez v_p biçiminde yazılır ve p noktasında v vektörü diye söylenir.

Tanım 2.2.1. U, E^n uzayının açık bir alt cümlesi olsun. U nun her bir p noktasına, p noktasında bir tanjant vektör karşılık getiren bir fonksiyona U üstünde bir vektör alanı denir.

Başka bir deyişle,

$$X : U \to \bigcup_{p \in U} T_p(E^n)$$

fonksiyonu için,

$$\forall p \in U, \; X(p) \in T_p(E^n)$$

oluyorsa X fonksiyonuna U üstünde bir vektör alanı denir.

Tanım 2.2.2. U, E^n nin açık bir alt cümlesi, X ve Y, U üstünde vektör alanları olsunlar.

X ve Y vektör alanlarının toplamı, $\forall p \in U$ noktasında,

$$(X + Y)(p) = X_p + Y_p$$

eşitliğiyle tanımlanır. $t \in \mathbb{R}$ için, t ile X vektör alanın çarpımı,

$$(tX)(p) = t\,X(p)$$

ile tanımlanır.

f, U dan $\mathbb{R}$ ye bir fonksiyon olmak üzere, f fonksiyonu ile Y vektör alanının çarpımı

$$(fY)(p) = f(p)\;Y(p)$$

eşitliği ile tanımlanır.

U üstünde bir vektör alanı genel olarak,

$$Y = \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

biçimindedir. Burada f_i, U dan $\mathbb{R}$ ye bir fonksiyondur. f_i fonksiyonlarının tümü C^r-sınıfından ise Y vektör alanı da C^r-sınıfındandır.

U üstünde bütün diferensiyellenebilir vektör alanlarının cümlesi $\chi(U)$ ile gösterilir. Bu cümle $\mathbb{R}$ cismi üstünde bir vektör uzayıdır.

Tanım 2.2.3. $T_p(E^n)$ in cebirsel duali

$$T_p^*(E^n) = \left\{ v_p^* \mid v_p^* : T_p(E^n) \xrightarrow{\text{lineer}} \mathbb{R} \right\}$$

dir. Bu cümle $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayıdır. Bu uzaya E^n in $p \in E^n$ noktasındaki kotanjant uzayı denir.

E^n nin tanjant uzaylarının birleşim cümlesi yardımıyla tanımlanan vektör alanı kavramına paralel olarak, kotanjant uzaylarının birleşim cümlesi yardımıyla 1-formlar tanımlanır.

Tanım 2.2.4. (1-form) E^n in $p \in E^n$ noktasındaki kotanjant uzayı $T_p^*(E^n)$ olsun. Buna göre, bir

$$\omega : E^n \to \bigcup_{p \in E^n} T_p^*(E^n)$$

fonksiyonu için,

$$\pi \circ \omega : E^n \xrightarrow{\text{özdeşlik}} E^n$$

olacak şekilde bir,

$$\pi : \bigcup_{p \in E^n} T_p^*(E^n) \to E^n$$

fonksiyonu mevcut ise ω ya E^n üstünde bir 1-form denir.

E^n üstünde 1-formların cümlesi $\chi^*(E^n)$ ile gösterilir. $\chi^*(E^n)$, $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayıdır.

2.3. Eğri

Tanım 2.3.1. I, $\mathbb{R}$ nın açık bir aralığı olmak üzere, diferensiyellenebilir bir

$\alpha : I \to E^n$

fonksiyonuna E^n de bir eğri denir.

$$\alpha : I \to E^n$$
$$t \to \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \ldots, \alpha_n(t))$$

biçimindedir. Buradaki α_i fonksiyonları I dan $\mathbb{R}$ ye diferensiyellenebilen fonksiyonlardır. E^n nin koordinat fonksiyonları $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ise

$$\alpha_i = x_i \circ \alpha$$

dır.

Tanım 2.3.2.

$$\alpha : I \to E^n$$

bir eğri olsun. $\forall t \in I$ için α nın $\alpha(t)$ noktasındaki

$$\dot{\alpha}(t) = \frac{d\alpha}{dt}\Big|_t = \left(\frac{d\alpha_1}{dt}\Big|_t, \frac{d\alpha_2}{dt}\Big|_t \ldots, \frac{d\alpha_n}{dt}\Big|_t\right) \tag{2.8}$$

vektörüne eğrinin hız vektörü denir ve $(\alpha(t), \dot{\alpha}(t))$ ikilisi bir tanjant vektördür, bu vektör kısaca $\dot{\alpha}(t)$ ile gösterilir.

2.4. Manifold

Tanım 2.4.1. M bir topolojik uzay olsun. Aşağıdaki önermeler doğru ise M, n-boyutlu bir topolojik manifolddur, denir.

(1) M Hausdorff uzayıdır.

(2) M nin her bir p noktasının, E^n nin bir U' açık alt cümlesine homeomorf olan bir U komşuluğu vardır.

(3) M nin sayılabilir bir açık bazı vardır.

M, n-boyutlu bir topolojik manifold olsun. $p \in M$ olmak üzere, p nin öyle bir U komşuluğu vardır ki U, E^n uzayının bir U′ açığına homeomorfdur. Bu homeomorfizmi φ ile gösterelim. (U, φ) ikilisine M manifoldu için bir koordinat komşuluğu denir.

E^n uzayının Öklidiyen koordinat fonksiyonları $x_1, x_2, \ldots, x_n$ olsun.

$$u_i = x_i \circ \varphi \quad , \quad 1 \leq i \leq n$$

diyelim. $\forall\, q \in U$ için, $u_i(q) = x_i(\varphi(q))$ $1 \leq i \leq n$ olur. Bu durumda $\varphi(q)$ noktası,

$$\varphi(q) = (u_1(q), u_2(q), \ldots, u_n(q))$$

biçimindedir. $u_1(q), u_2(q), \ldots, u_n(q)$ sayılarına, q noktasının (U, φ) koordinat komşuluğuna göre koordinatları ve $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ cümlesine de M nin U açığı üstünde bölgesel koordinat sistemi denir.

φ fonksiyonu homeomorfizm olduğundan bire-bir ve örten bir fonksiyondur. φ ve φ^{-1} süreklidir. Buna göre, q noktasının koordinatları (U, φ) koordinat komşuluğunun verilmesiyle tek olarak belirlidir.

V, q noktasını kapsayan başka bir komşuluk olmak üzere, M nin başka bir (V, φ_1) koordinat komşuluğunu gözönüne alalım. φ ve φ_1 homeomorfizm olduklarından

$$\varphi_1 \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \varphi_1(U \cap V)$$

fonksiyonu da homeomorfizmdir.

Tanım 2.4.2. M bir topolojik manifold, $\{ (U_\alpha, \varphi_\alpha) \}$ koordinat komşuluklarının bir ailesi olsun. Aşağıdaki önermeler doğru ise bu aileye M manifoldu üstünde diferensiyellenebilir bir yapıdır, denir.

(1) $\{ U_\alpha \}$ ailesi M yi örter. Başka bir deyişle,

$$M = \bigcup_{\alpha} U_\alpha$$

dir.

(2) Her α, β için, $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ ve $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ fonksiyonları sırasıyla, $\varphi_\beta\,(U_\alpha \cap U_\beta)$ ve $\varphi_\alpha\,(U_\alpha \cap U_\beta)$ üzerinde difeomorfizmdirler.

(3) (V, φ), M için bir koordinat komşuluğu olmak üzere her $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ koordinat komşuluğu için,

$$\varphi \circ \varphi_\alpha^{-1} \quad \text{ve} \quad \varphi_\alpha \circ \varphi^{-1}$$

fonksiyonları diffeomorfizm ise, $(V, \varphi) \in \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ dır.

M manifoldu üstünde bir diferensiyellenibilir yapı varsa bu manifolda C^∞-manifold veya kısaca diferensiyellenebilir manifold denir.

Bundan sonra "Manifold" deyince diferensiyellenebilen bir manifold anlaşılacaktır. Ayrıca "koordinat komşuluğu" deyince de diferensiyellenebilir yapının bir elemanı anlaşılacaktır.

Tanım 2.4.3. (Alt manifold): M bir k-manifold ve $\overline{M}$ de bir n-manifold olsun. $\forall p \in M$ noktası için $\overline{M}$ de bir $(\overline{U}, \varphi)$ ve M de bir (U, φ) koordinat komşuluğu mevcut ve

$$U = \{m \in \overline{U} \mid \overline{x}_{k+1}(m) = \ldots = \overline{x}_n(m) = 0\}$$

ise M ye $\overline{M}$ nin bir alt manifoldu denir. Burada $\{\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n\}$ koordinat sistemi $\overline{U}$ de ve $\{x_1 = \overline{x}_1|_u, \ldots, x_k = \overline{x}_k|_u\}$ da U daki koordinat sistemidir.

Bu tanıma göre $M \subseteq \overline{M}$ ve $k \leq n$ dır.

Tanım 2.4.4. E^n, n-boyutlu Öklid uzayında (n-1)-boyutlu bir yüzey, veya (n-1)-yüzey diye E^n deki boş olmayan bir M cümlesine denir, öyle ki bu M cümlesi

$$M = \left\{ \begin{array}{l} x \in U \subset E^n \;\middle|\; f: U \xrightarrow{\text{dif.bilir}} \mathbb{R},\ U \text{ bir açık alt cümle} \\ \qquad\qquad\qquad\quad x \longrightarrow f(x) = C \end{array} \right\}$$

$\nabla f\big|_P \neq 0,\ \forall p \in M$ biçiminde tanımlanır. E^2 de bir 1-yüzeye düzlemsel eğri denir. E^3 de bir 2-yüzeye ekseriya sadece yüzey denir. E^n de bir (n-1)-yüzey, n > 3 olması halinde daha çok bir hiperyüzey olarak adlandırılır.

Manifoldlar olarak her bir M hiperyüzeyi bir (n-1)-manifolddur ve dolayısıyla $\forall p \in M$ noktasında M nin bir tanjant uzayı $T_P(M)$ tanımlı olup (n-1)-boyutlu bir vektör uzayıdır. Bu tanjant uzay $T_P(E^n)$ tanjant uzayının bir alt uzayıdır. Ayrıca $T_P(M)$ nın sadece M ye bağlı olduğunu, M yı tanımlamada kullanılan f fonksiyonundan bağımsız olduğunu da belirtmek gerekir. Gerçekten $T_P(M)$ vektör uzayını E^n in tamamen M de yatan parametre eğrilerinin P noktasındaki hız vektörleriyle karakterize edebiliriz. Eğer M yi tanımlamada kullanılan differensiyellenebilir fonksiyon f ise $C \in \mathbb{R}$ bir sabit olmak üzere f (x) = C, $\forall x \in M$, ayrıca $\nabla f\big|_P \neq 0,\ \forall p \in M$ dir. M nin tanımından bu şekilde bir fonksiyon vardır, hem de bu şekildeki f fonksiyonları birden çok olabilir. Her bir f fonksiyonu için $T_P(M) = \left[\nabla f\big|_P\right]^{\perp}$ olarak belirtilebilir.

Tanım 2.4.5. (Manifold için parametrizasyon):V, E^n uzayının açık bir alt cümlesi ve

$$\varphi : V \longrightarrow M$$

fonksiyonu V den φ (V) ye bir diffeomorfizm olsun. φ (V) = U diyelim. (U, φ^{-1}), M manifoldu için bir koordinat komşuluğudur. (φ, V) ikilisine M manifoldu için bir parametrizasyon denir.

2.5. E^n de Hareketler

Tanım 2.5.1. (E^n de izometri):E^n de uzaklık fonksiyonu d olmak üzere

$$f : E^n \longrightarrow E^n$$

fonksiyonu için

$$d\left(f(x), f(y) \right) = d(x, y) \quad , \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

ise f fonksiyonuna E^n in bir izometrisi denir (Hacısalihoğlu, 1980).

E^n in bütün izometrilerinin cümlesi R (n) ile gösterilir. Bu cümlenin dönüşümlerin bileşke işlemine göre bir grup olduğu ve $f \in R(n)$ ise f izometrisinin birebir ve örten olduğu açıktır.

$$R(n) = \left\{ f \,\middle|\, f : E^n \longrightarrow E^n \quad , \quad d\left(f(x), f(y) \right) = d(x, y);\ x, y \in E^n \right\}$$

Tanım 2.5.2. (E^n de dönme):

$$f_0 : E^n \longrightarrow E^n$$

dönüşümü $O \in E^n$ için $f_0(O) = O$ ve $x \neq O$ olmak üzere $\forall x \in E^n$ için $x \longrightarrow f_0(x)$ biçiminde tanımlanan bir izometri ise f_0 fonksiyonuna O etrafında bir dönme denir.

E^n de O etrafında dönmelerin cümlesi $R_0(n)$ ile gösterilir. Bu cümle bileşke işlemine göre bir gruptur. Bu grup R (n) in bir alt grubudur.

$$R_0(n) = \{ f_0 \mid f_0 \in R(n),\ f_0(O) = O \}$$

Teorem 2.5.3. E^n de

$$< X, Y > = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad , \quad X, Y \in E^n$$

Öklid iç çarpımını koruyan ortogonal grup O (n) ile O = (0, ..., 0) noktasını sabit bırakan dönme grubu R_0 (n) eşlenebilir.

Teorem 2.5.3. ifadesinden, herhangi bir $f_0 \in R_0(n)$ dönmesinin E^n deki bir X noktasının f_0 altındaki görüntüsü Y olmak üzere;

$$Y = AX \quad , \quad A \in O(n)$$

biçiminde ifade edilebileceği anlaşılmaktadır.

Tanım 2.5.4. (E^n de öteleme): E^n de bir f izometrisi, $\forall X \in E^n$ için

$$f(X) = X + h$$

olacak şekilde bir $h \in E^n$ noktası var ise f ye E^n nin h ile belirtilen bir ötelemesi denir.

E^n deki bütün ötelemelerin cümlesi T (n) ile gösterilir. Bu cümle dönüşümlerin bileşke işlemine göre değişimli gruptur. Bu grup R (n) in bir altgrubudur.

E^n in bir izometrisi, $R_0 \in R_0(n)$ ve T, $T' \in T(n)$ olmak üzere,

$$f = T \circ R_0 \quad \text{veya} \quad f = R_0 \circ T'$$

biçiminde ifade edilebilir.

Tanım 2.5.5. (Genel hareket): T′, $T \in T(n)$ ve $R_0 \in R_0(n)$ olmak üzere,

$$T \circ R_0 \quad \text{ve} \quad R_0 \circ T'$$

biçimindeki izometrilere genel izometri veya genel hareket denir.

E^n in bütün genel izometrilerinin grubu R (n) ile gösterilir.

Teorem 2.5.6. R (n) grubu, $\forall R \in R\,(n)$ için

$$R = \begin{bmatrix} & & & c_1 \\ & a_{ij} & & \vdots \\ & & & c_n \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad [a_{ij}] \in O(n) \quad , \quad 1 \leq i, j \leq n \tag{2.9}$$

biçiminde, (n + 1) × (n + 1)-tipinde reel ve regüler matrislerin grubu GL (n + 1, IR) nin bir alt grubu olarak ifade edilebilir.

Teorem 2.5.6 nın ifadesine göre, herhangi bir $R \in R\,(n)$ genel izometrisi altındaki E^n deki bir X noktasının görüntüsü Y olmak üzere

$$Y = AX + C, \quad A \in O(n), \quad C \in T(n) \tag{2.10}$$

biçiminde ifade edilebilir.

E^n, n-boyutlu Öklid uzayının izometrilerinden biri f olsun. E^n deki iki $\{x_1', x_2', ..., x_n'\}$, $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ Öklid koordinat sistemine göre f nin matrisel ifadesi $A \in O(n)$ ve $C \in IR_1^n$ olmak üzere

$$\begin{bmatrix} X' \\ \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & C \\ & \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

şeklindedir. $A \in O(n)$ olduğundan det A = ± 1 dir. Eğer det A = 1 ise f hareketine direkt hareket, det A = -1 ise karşıt hareket adı verilir. Hareket denince daha çok direkt hareketleri anlayacağız.

Tanım 2.5.6. (Çatı alanı): E^3 Öklid uzayında birer vektör alanı V_1, V_2, V_3 olsun. Eğer $\forall p \in E^3$ noktası için $\{V_1, V_2, V_3\}$ sistemi p-noktasındaki $T_p(E^3)$ tanjant uzayının bir bazı ise bu vektör alanı üçlüsüne E^3 de bir çatı alanı denir.

Tanım 2.5.7. E^3 de bir ortonormal $\{e_1, e_2, e_3\}$ çatı alanı verildiğinde,

$$\forall p \in E^3 \text{ için } \det\left[e_1(p), e_2(p), e_3(p)\right] = 1$$

ise bu çatı alanına pozitif olarak yönlendirilmiştir denir (Hacısalihoğlu, 1982).

E^3 de iki çatı alanı $\{e_1, e_2, e_3\}$ ve $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ olsun. A ortogonal bir matris olmak üzere bu iki çatı arasında

$$\underbrace{\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}}_{E} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{e}_1 \\ \bar{e}_2 \\ \bar{e}_3 \end{bmatrix}}_{\bar{E}}$$

$$E = A\bar{E} \tag{2.12}$$

bağıntısı vardır. Bu çatı alanlarından $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ ü sabit tutup $\{e_1, e_2, e_3\}$ ün değişimini incelemek istersek, (2.12) den,

$$dE = dA\bar{E} + Ad\bar{E}$$

$$d\bar{E} = 0$$

olduğundan

$$dE = dA\overline{E} \tag{2.13}$$

olur. A ortogonal matris olduğundan

$$AA^T = I_3$$

dır.

$$dAA^T + AdA^T = O$$

olup

$$\omega = dAA^T \tag{2.14}$$

alınırsa,

$$\omega + \omega^T = O$$

veya

$$\omega = -\omega^T$$

olup ω antisimetrik bir matristir. Bu matrisin bileşenleri birer 1-formdurlar. (2.12), (2.13), (2.14) yardımıyla

$$dE = \omega E \tag{2.15}$$

elde edilir. Bunu matris formunda yazarsak,

$$\begin{bmatrix} de_1 \\ de_2 \\ de_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O & \omega_{12} & \omega_{13} \\ -\omega_{12} & O & \omega_{23} \\ -\omega_{13} & -\omega_{23} & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} \tag{2.16}$$

olur.

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & j & k \end{pmatrix}$ ve $\omega_{ij} = \omega_k$ olmak üzere

$$\omega_{23} = \omega_1 \quad , \quad \omega_{13} = -\omega_2 \quad , \quad \omega_{12} = \omega_3$$

alınırsa ω matrisi

$$\omega = \begin{bmatrix} O & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & O & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & O \end{bmatrix} \tag{2.17}$$

şeklinde olur. ω matrisinin ω_1, ω_2, ω_3 elemanlarına E^3 Öklid uzayındaki $\{e_1, e_2, e_3\}$ çatı alanı için bağ formları adı verilir.

$$\omega = dAA^T$$

burada $\omega = [\omega_{ij}]$ ve $A = [a_{ij}]$; $i, j = 1, 2, 3$

$$\omega_{ij} = \sum_{k=1}^{3} da_{ik}\, a_{kj}^T$$

biçimindedir (Hacısalihoğlu, 1982).

2.6. Çizgiler Uzayında Hareketler

E^3 Öklid uzayındaki 1-parametreli hareketlerde E^3 ün doğruları regle yüzeyler teorisi için önemlidir. Doğrular E^3 ün lineer nokta cümleleridir. Bu yüzden E^3 Öklid uzayını yalnızca doğrulardan meydana gelmiş bir uzay olarak düşünecek ve bunu belirtmek için de E^3 e çizgiler uzayı adını vereceğiz (Hacısalihoğlu, 1982).

Uzayda hareketin gözlenebilmesi için bir referans noktasına ihtiyaç vardır. Bu noktanın sabit veya aynı noktada bulunan gözleyiciye göre sabit olduğu farzedilir. Bu noktayı $O \in E^3$ ile gösterelim ve hareketi inceleyebilmek için ortonormal bir

$$\{ e_1 (o), e_2 (o), e_3 (o) \}$$

sistemini tesbit edelim. Ayrıca bu uzayda bütün noktaların sabit kaldığı, yani, hareket etmediği farz edilerek bu halde E^3 uzayına sabit çizgiler uzayı denir ve H' ile gösterilir. Yani

$$H' = Sp \{ \bar{e}_1 (o), \bar{e}_2 (o), \bar{e}_3 (o) \} \tag{2.18}$$

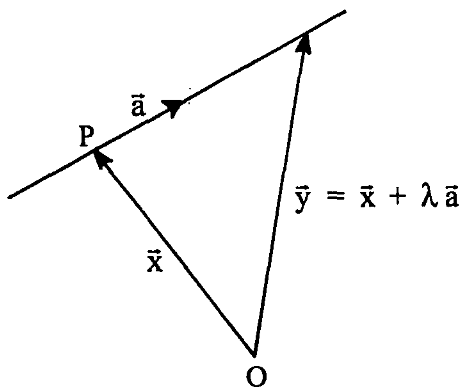
dır.

Diğer taraftan "O" noktasına göre hareketli bir P noktasını ve bu noktaya sıkı bir şekilde bağlı olan ortonormal bir $\{ e_1 (p), e_2 (p), e_3 (p) \}$ sistemini düşünelim. Yani

$$H = Sp \{ e_1 (p), e_2 (p), e_3 (p) \} \tag{2.19}$$

olsun.

Çizgiler uzayında artık, noktaların hareketi yerine doğruların hareketi alınabilir. Bu sebeple uzayın en basit elemanı olarak yönlü doğruyu alıyoruz. Hareketli bir P noktasının $\overrightarrow{OP}$ yervektörü ve bu noktaya yerleştirilen bir $\vec{a}$ vektörü ile belirlenen doğrunun parametrik denklemi



Şekil 1.1.

$$y = x + \lambda a \tag{2.20}$$

şeklindedir. P noktasının doğru üzerinde keyfi bir nokta olması halinde $\wedge$ vektörel çarpımı göstermek üzere,

$$a^* = x \wedge a = y \wedge a \tag{2.21}$$

vektörel momentini kullanarak doğruyu (a, a^*) çifti ile belirleyebiliriz. a ve a^* vektörlerinin bileşenlerine normlanmış Plücker doğru koordinatları denir.

Çizgiler uzayında hareketi üç gruba ayıracağız.

(1) (a, a^*) doğrusunun H′ sabit uzayına göre hareketi

(2) (a, a^*) doğrusunun H hareketli uzayına göre hareketi

(3) H hareketli uzayının H′ sabit uzayına göre hareketi. Bunu H/H′ ile göstereceğiz (Hacısalihoğlu, 1982).

H/H′ hareketini O noktası etrafında bir dönme ve O noktasına göre bir öteleme olmak üzere iki kısma ayırmak mümkündür.

Eğer sabit ve hareketli çizgiler uzayında iki Öklid koordinat sistemi, sırasıyla, $\{x_1', x_2', x_3'\}$ ve $\{x_1, x_2, x_3\}$ ise

$$X' = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \tag{2.22}$$

olmak üzere (2.11) den dolayı H/H′ uzay hareketini matris formunda

$$\begin{bmatrix} X' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & C \\ O & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ I \end{bmatrix} \tag{2.23}$$

şeklinde gösterebiliriz, burada $A \in O(3)$, $C \in \mathbb{R}_1^3$ şeklindedir.

Tanım 2.6.1. (Bir parametreli uzay hareketi) H/H' uzay hareketinin

$$\begin{bmatrix} A & C \\ O & 1 \end{bmatrix}$$

matrisinde dönmeye karşılık gelen $A \in O(3)$ ve ötelemeye karşılık gelen $C \in \mathbb{R}_1^3$ matrisleri

$$A = A(t) \tag{2.24}$$

$$C = C(t) \tag{2.25}$$

olacak şekilde bir tek reel t-parametrisinin diferensiyellenebilir fonksiyonları iseler H/H' uzay hareketine bir parametreli uzay hareketi denir.

Bundan sonra H/H' ile bir parametreli uzay hareketini anlayacağız.

Tanım 2.6.2. H/H' uzay hareketini belirleyen $A \in O(3)$ ve $C \in \mathbb{R}_1^3$ matrisleri $\forall t \in \mathbb{R}$ için,

$$A(t+p) = A(t) \tag{2.26}$$

$$C(t+p) = C(t) \tag{2.27}$$

olacak şekilde periyodik iseler H/H' uzay hareketine kapalı, aksi halde açık hareket denir.

H/H' hareketinin değişimini incelemek için, (2.12) den dolayı

$$E = A\overline{E} \quad , \quad A \in O(3)$$

ve (2.13) den dolayı

$$dE = (dA)\overline{E}$$

dır. Ayrıca

$$\overline{E} = A^T E \tag{2.28}$$

olacağından

$$dE = (dA)A^T E$$

bulunur. $\omega = (dA)A^T$ matrisi kullanılarak (2.15) den

$$dE = \omega E$$

olur.

Şimdi de hareketli uzayda bir (a, a^*) doğrusunu düşünelim. a birim doğrultman vektörünü

$$\forall p \in H \quad \text{için} \quad a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} \tag{2.29}$$

olmak üzere,

$$a = a^T E$$

şeklinde yazalım. Doğrunun hareketinin değişimini incelemek için diferensiyel alırsak,

$$da = da^T E + a^T dE \tag{2.30}$$

bulunur. Ayrıca (2.15) den dolayı

$$da = da^T E + a^T \omega E$$

$$da = (da + \omega^T a)^T E \tag{2.31}$$

elde edilir. $(\bar{a}, \bar{a}^*)$ doğrusu H hareketli uzayında sabit bir doğru ise

$$da = O \tag{2.32}$$

olacağından

$$da = a^T \omega E \tag{2.33}$$

bulunur. Eğer ω matrisinin (2.17) deki ifadesinden bir ω vektörünü

$$\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \tag{2.34}$$

şeklinde alacak olursak (2.33) ifadesi

$$da = \omega \wedge a \tag{2.35}$$

şeklinde yazılabilir. Burada ∧ vektörel çarpımdır. Diferensiyel geometrideki Darbaux dönme vektörünün rolünü oynayan ω vektörüne H / H' hareketinin ani Pfaff vektörü (diferensiyel vektör) denir (Hâcısalihoğlu, 1982).

Tanım 2.6.3. $\alpha : I \longrightarrow E^3$ kapalı bir eğri olsun. Bir ortonormal $\{e_1, e_2, e_3\}$ çatı alanı eğriye sıkı bir şekilde bağlı ve ayrıca $\forall t \in I$ için $\alpha(t)$ noktasındaki hareketli çizgiler uzayı

$$H = Sp\{e_1, e_2, e_3\}_{\alpha(t)} \tag{2.36}$$

olsun, H / H' uzay hareketindeki ($\vec{\omega}$ Pfaff) vektörünün α eğrisi boyunca eğrisel integraliyle belirtilen

$$D = \oint \omega \tag{2.37}$$

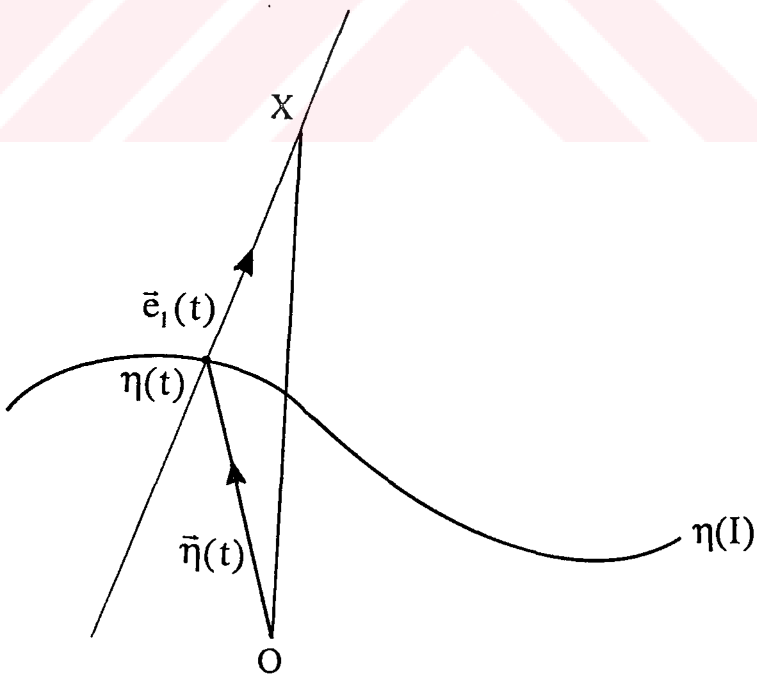
vektörüne H / H' hareketinin Steiner dönme vektörü denir (Hacısalihoğlu, 1982).

3. REGLE YÜZEYLER

Bu bölümde E^3 ve E^n de regle yüzeyin tanımlarını ve regle yüzeylere ilişkin temel kavramları vereceğiz.

3.1. E^3 de Regle Yüzeyler

Tanım 3.1.1. $M \subset E^3$ yüzeyi verilsin. Her $p \in M$ noktasında, E^3 ün M de kalan bir doğrusu var ise M ye bir regle yüzey ve $p \in M$ noktasından geçen ve M de kalan doğruya da M nin bir doğrultmanı denir. Bütün doğrultultmanların her birini birer noktada kesen eğriye regle yüzeyin dayanak eğrisi adı verilir (Şekil 3.1). Doğrultman doğrusu yerine çoğu zaman regle yüzeyin ana doğrusu denir. Ana doğrular birer yönlü doğrulardır. Dolayısı ile bunların her biri üzerinde bir doğrultman vektörü vardır.



Şekil 3.1.

Dayanak eğrisi $\eta : I \longrightarrow E^3$ olan ve $\eta(t)$ de $e_1(t)$ doğrultman vektörü bilinen regle yüzeyin herhangi bir noktasının yer vektörü

$$\vec{OX} = \eta(t) + v\, e_1(t) \quad , \quad v \in \mathbb{R}$$

dir.

E^3 uzayında M regle yüzeyi için bir parametrizasyon

$$\begin{aligned} \varphi : I \times \mathbb{R} &\longrightarrow E^3 \\ (t, v) &\longrightarrow \varphi(t, v) = \eta(t) + v\, e_1(t) \end{aligned}$$

dir.

Tanım 3.1.2. Bir $\varphi(t, v)$ regle yüzeyinin anadoğrularının her birini dik olarak kesen eğriye regle yüzeyin bir ortogonal yörüngesi denir.

3.2. E^n de Regle Yüzey

Tanım 3.2.1. E^n uzayında bir

$$\begin{aligned} \eta : I &\longrightarrow E^n \\ t &\longrightarrow \eta(t) \end{aligned}$$

eğrisinin her $\eta(t)$ noktasında tanımlı

$$\{e_1(t), e_2(t), \ldots, e_k(t)\}$$

ortonormal vektör alanları sistemi verilmiş olsun.

dır. e_ν vektör alanının η eğrisi boyunca türevi $\dot{e}_\nu$ ile gösterilirse (3.1) den

$$<\dot{e}_\nu, e_\mu> + <e_\nu, \dot{e}_\mu> = 0 \tag{3.2}$$

elde edilir. E^n uzayının $\eta(t)$ noktasındaki tanjant uzayı $T_{\eta(t)}(E^n)$ olmak üzere

$$\{e_1(t), e_2(t), ..., e_k(t)\}$$

cümlesi $T_{\eta(t)}(E^n)$ uzayının k-boyutlu bir alt vektör uzayını gerer. Bu alt vektör uzayını $E_k(t)$ ile gösterelim.

$$M = \bigcup_{t\in I} E_k(t) \tag{3.3}$$

cümlesi E^n uzayının (k+1)-boyutlu bir alt manifoldudur. Bu manifold için bir parametrizasyon,

$$\begin{aligned} &\varphi : I \times \mathbb{R}^k \longrightarrow E^n \\ &(t, v_1, ..., v_k) \longrightarrow \varphi(t, v_1, ..., v_k) = \eta(t) + \sum_{i=1}^{k} v_i \, e_i(t) \end{aligned} \tag{3.4}$$

olup

$$\text{rank}\,(\varphi_t, \varphi_{v1}, ..., \varphi_{vk}) = \text{rank}\left(\dot{\eta}(t) + \sum_{i=1}^{k} v_i \, \dot{e}_i(t), e_1(t), ..., e_k(t)\right) = k+1$$

ise M manifolduna E^n de (k+1)-boyutlu regle yüzey, $E_k(t)$ uzayına $\eta(t)$ noktasındaki doğrultman uzayı, η eğrisine de regle yüzeyin dayanak eğrisi denir (Frank und Giering, 1976).

$$Sp\,\{e_1(t), ..., e_k(t), \dot{e}_1(t), ..., \dot{e}_k(t)\} \tag{3.5}$$

alt vektör uzayına M nin $E_k(t)$ ye göre asimtotik demeti denir ve A(t) ile gösterilir. A(t) nin boyutu $o \le m \le k$ olmak üzere, k+m biçimindedir. A(t) uzayı $E_k(t)$ yi kapsayan bir alt vektör uzayıdır. Bu uzayın

$$\{e_1, e_2, \ldots, e_k, a_{k+1}, \ldots, a_{k+m}\} \qquad o \le m \le k \tag{3.6}$$

biçiminde ortonormal bir bazı bulunabilir.

$$\dot{e}_\nu = \sum_{\mu=1}^{k} \alpha_{\nu\mu} e_\mu + \sum_{\ell=1}^{m} \sigma_{\nu\ell} a_{k+\ell}$$

yazılabileceği açıktır. (3.2) den dolayı

$$\alpha_{\nu\mu} = -\alpha_{\mu\nu}$$

olur (Frank und Giering, 1976).

Teorem 3.2.2. Doğrultman uzaylarının başlangıç $\{e_1(t_0), e_2(t_0), \ldots, e_k(t_0)\}$ bazının verilmesi,

$$< e_i(t), e_j(t) > = \delta_{ij} \quad \text{ve} \quad < e_i'(t), e_j(t) > = 0, \qquad i, j = 1, 2, \ldots, k \tag{3.7}$$

şartını sağlayan $\{e_1(t), e_2(t), \ldots, e_k(t)\}$ bazını tek olarak belirler. (Juza, M. 1962)

Teorem 3.2.3. M, (k+1)-boyutlu bir regle yüzey olsun. Her $t \in I$ için $E_k(t)$ uzayının öyle bir $\{e_1(t), e_2(t), \ldots, e_k(t)\}$ bazı bulunabilir ki, bu baz için

$$\begin{aligned} \dot{e}_\nu &= \sum_{\mu=1}^{k} \alpha_{\nu\mu} e_\mu + K_\nu a_{k+\nu} \qquad 1 \le \nu \le m,\ K_\nu > 0 \\ \dot{e}_\nu &= \sum_{\mu=1}^{k} \alpha_{\nu\mu} e_\mu \qquad m < \nu \le k \end{aligned} \tag{3.8}$$

dir (Frank und Giering, 1976).

$\{e_1(t), \ldots, e_k(t)\}$ bazı, M nin A(t) asimtotik demetinin

$\{e_1(t), e_2(t), \ldots, e_k(t), a_{k+1}(t), \ldots, a_{k+m}(t)\}$

bazını tek olarak belirler. Bu teoremdeki $\{e_1(t), e_2(t), \ldots, e_k(t)\}$ bazına $E_k(t)$ nin doğal taşıyıcı bazı denir.

M yüzeyinin sabit bir p noktasını gözönüne alalım.

$$p = \varphi(t, \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k)$$

ise p noktasındaki teğet uzayının bir bazı

$$\left\{\dot{\eta}(t) + \sum_{i=1}^{k} \nu_i \dot{e}_i(t), e_1(t), e_2(t), \ldots, e_k(t)\right\} \tag{3.9}$$

dır. t sabit tutularak ν_i sayıları değiştirilirse, p noktaları $E_k(t)$ uzayının noktalarını tarar.

$$Sp\,\{\dot{\eta}(t), \dot{e}_1(t), \dot{e}_2(t), \ldots, \dot{e}_k(t), e_1(t), e_2(t), \ldots, e_k(t)\} \tag{3.10}$$

uzayına M nin $E_k(t)$ ye göre teğetsel demeti diyeceğiz ve T(t) ile göstereceğiz.

$$k+m \leq \text{boy}\, T(t) \leq k+m+1 \qquad o \leq m \leq k \tag{3.11}$$

olduğu kolayca görülebilir. Daha açık bir anlatımla ya boy T(t) = k+m ya da boy T(t) = k+m+1 dir. Şimdi bu iki durumu ayrı ayrı inceleyelim.

$t \in I$ için boy T(t) = k+m ise M nin $\eta(t)$ dayanak eğrisinin hız vektörü A(t) uzayının içindedir. Yani,

$$\dot{\eta}(t) = \sum_{\nu=1}^{k} \xi_\nu e_\nu + \sum_{\ell=1}^{m} \eta_\ell a_{k+\ell} \tag{3.12}$$

biçimindedir. Herhangi bir P(t) dayanak eğrisi, $\eta(t)$ eğrisine bağlı olarak

$$P(t) = \eta(t) + \sum_{i=1}^{k} \nu_i(t)\, e_i(t) \tag{3.13}$$

biçiminde yazılabilir. Buradan,

$$\dot{P}(t) = \dot{\eta}(t) + \sum_{i=1}^{k} \left[\dot{\nu}_i(t)\, e_i(t) + \nu_i(t)\, \dot{e}_i(t)\right] \tag{3.14}$$

bulunur. (3.12) den dolayı

$$\dot{P}(t) = \left(\sum_i^k \xi_i e_i(t) + \sum_\ell^m \eta_\ell\, a_{k+\ell}(t)\right) + \sum_i^k \left[\dot{\nu}_i(t)\, e_i(t) + \nu_i(t)\, \dot{e}_i(t)\right] \tag{3.14}$$

bulunur. (3.8) eşitliklerine göre, $\ell = 1, 2, ..., m$ için

$$\dot{e}_\ell = \sum_\mu^k \alpha_{\ell\mu} e_\mu + K_\ell a_{k+\ell}$$

ve $\rho = 1, 2, ..., k\text{-}m$ için

$$\dot{e}_{m+\rho} = \sum_\mu^k \alpha_{(m+\rho)\mu} e_\mu$$

olduğunu biliyoruz. Buna göre (3.14) eşitliğinden

$$\dot{P}(t) = \sum_i^k (\xi_i + \dot{\nu}_i)\, e_i + \sum_i^k \nu_i \left(\sum_\mu^k \alpha_{i\mu} e_\mu + K_i a_{k+i}\right) + \sum_\ell^m \eta_\ell\, a_{k+\ell}$$

$$= \sum_i^k \left(\xi_i + \dot{\nu}_i + \sum_\mu^k \alpha_{\mu i} \nu_\mu\right) e_i + \sum_i^m \nu_i K_i a_{k+i} + \sum_\ell^m \eta_\ell\, a_{k+\ell}$$

$$= \sum_{i}^{k}\left(\xi_i + \dot{\nu}_i + \sum_{\mu}^{k}\nu_\mu \alpha_{\mu i}\right)e_i + \sum_{\ell}^{m} (K_\ell \nu_\ell + \eta_\ell)\, a_{k+\ell} \tag{3.15}$$

bulunur.

$$K_\ell \nu_\ell + \eta_\ell = 0 \quad , \quad (\ell = 1, 2, \ldots, m) \tag{3.16}$$

olacak biçimindeki P(t) noktaları için P(t) vektörü $E_k(t)$ nın içindedir. $K_1, K_2, \ldots, K_m$ sayılarının sıfırdan farklı olduğunu biliyoruz. Buna göre (3.16) denklemlerinden,

$$\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m$$

skalarları tek olarak bulunur. Geriye kalan k-m tane değişken keyfi olarak seçilebilir. Buna göre, belirli bir t için (3.16) denklemlerini sağlayan P(t) noktalarının cümlesi $E_k(t)$ içinde k-m boyutlu bir $K_{k-m}(t)$ alt uzayı oluşturur. Bu uzaya, M nin $E_k(t)$ içindeki boğaz uzayı denir (Frank und Giering, 1976).

Şimdi T(t) nin boyutunun k+m+1 olduğunu varsayalım. Bu durumda

$$\dot{\eta}(t) \notin Sp\,\{e_1, e_2, \ldots, e_k, a_{k+1}, \ldots, a_{k+m}\}$$

dir.

$$\{e_1, e_2, \ldots, e_k, a_{k+1}, \ldots, a_{k+m}, a_{k+m+1}\}$$

cümlesi T(t) nin ortonormal bir bazı olacak biçimde bir a_{k+m+1} birim vektörü, işareti dışında, tek olarak belirlidir. $\eta_{k+1} \neq 0$ olmak üzere,

$$\dot{\eta}(t) = \sum_{i}^{k}\xi_i e_i + \sum_{\ell}^{m}\eta_\ell\, a_{k+\ell} + \eta_{m+1}\, a_{k+m+1} \tag{3.17}$$

yazılabilir. Bu durumda,

$$\dot{P}(t) = \sum_{i}^{k}\left(\dot{v}_i + \sum_{\mu}^{k}\alpha_{\mu i}v_\mu + \xi_i\right)e_i + \sum_{\ell}^{m}(\eta_\ell + K_\ell v_\ell)\,a_{k+\ell} + \eta_{m+1}\,a_{k+m+1} \qquad (3.18)$$

olur. $\ell = 1, 2, \ldots, m$ için elde edilen m tane

$$K_\ell v_\ell + \eta_\ell = 0$$

lineer denklemi ile tanımlanan k-m boyutlu $Z_{k-m}(t)$ uzayına M nin $E_k(t)$ içindeki merkez uzayı denir (Sabuncuoğlu, 1982).

E^n de bir C^1-(k+1) regle yüzeyinin her $E_k(t) \subset M$ doğuranı için doğal taşıyıcı bazı verilebilir ve bunlar ortonormal bir çatı alanına

$$\{e_1, \ldots, e_k, a_{k+1}, \ldots, a_{k+m}, a_{k+m+1}, \ldots, a_n\} \qquad (3.19)$$

tamamlanabilir. $k+1 \le i \le n$ olmak üzere a_i lerin uygun seçimiyle bu bir sağ çatı olarak alınabilir. Bundan sonraki işlemlerde böyle alındığını varsayacağız.

Aşağıda M bir $C^2-(k+1)$ regle yüzey, Ω, C^1-(k-m-1) merkezi regle yüzey ve $\eta(t)$, M nin ve Ω nın C^1- dayanak eğrisi olsun. Eğer (3.19) daki cümle bir baz ise aşağıdaki denklemler geçerlidir (Frank und Giering, 1982).

$$\left\{\begin{array}{l}
\dot{e}_\sigma = \alpha_\sigma^\nu . e_\nu + K^\sigma a_{k+\sigma} \qquad (K^\sigma > O) \\
\dot{e}_{m+\rho} = \alpha_{m+\rho}^\nu e_\nu \\
\dot{a}_{k+\sigma} = -K_\sigma e_\sigma + G_\sigma^\ell a_{k+\ell} + \omega_\sigma a_{k+m+1} + \gamma_\sigma^\lambda a_{k-m-\lambda} \\
\dot{a}_{k+m+1} = \qquad -\omega^\ell a_{k+\ell} \qquad -\beta_\lambda a_{k+m-\lambda} \\
\dot{a}_{k+m+\xi} = \omega_\xi^\ell a_{k+\ell} + \beta^\xi a_{k+m+1} + \beta_\xi^\lambda a_{k+m-\xi} \\
\quad \alpha_\nu^\mu = -\alpha_\mu^\nu \quad , \quad G_\sigma^\ell = -G_\ell^\sigma \qquad \beta_\xi^\lambda = -\beta_\lambda^\xi \\
\quad \omega_\xi^\sigma = -\gamma_\sigma^\xi \qquad (1 \le \ell,\ \sigma \le m,\ 1 \le \mu,\ \nu \le k,\ 1 \le \rho \le k-m,\ 2 \le \lambda,\ \xi \le n-k-m) \\
\dot{\eta} = \delta^\nu e_\nu + \eta^{m+1} a_{k+m+1} \quad (\eta^{m+1} \neq 0)
\end{array}\right. \tag{3.20}$$

(Frank and Giering, 1982) e göre merkezi regle yüzey Ω nın $(\Omega \subset M)$ her C^1-dayanak eğrisi $\eta(t)$ için m-adet C^1-ana doğru yüzeyi $\sum_\eta^\sigma \subset M$ $(1 \le \sigma \le m)$ dikkate alınabilir ve bunlar

$$\eta(t) + v e_\sigma(t) \quad , \quad (t, v) \in I \times \mathbb{R} \tag{3.21}$$

ile verilirler. Her $E_k(t_0) \subset M$ doğuranında, m ana doğru yüzeylerinin doğuranları ikişer-ikişer ortogonaldır. Bunun için kısaca şöyle diyoruz. $\sum_\eta^\sigma$ ana doğru yüzeyleri $\eta(t)$ boyunca ikişer ikişer ortogonaldır.

Tanım 3.2.3. E^n de (k+1)-boyutlu regle yüzey

$$\varphi(t, v_1, v_2, \ldots, v_k) = \eta(t) + \sum_{i=1}^{k} v_i e_i(t)$$

olsun. Eğer $p>0$ reel sayısı için

$$\eta(t+p) = \eta(t)$$

şartı sağlanıyorsa φ ye (k+1)-boyutlu kapalı regle yüzey denir.

$\eta(t+p) = \eta(t)$ şartını sağlayan $p>0$ sayılarından en küçüğüne kapalı regle yüzeyin periyodu denir.

Tanım 3.2.4. Kapalı bir $C^2-(k+1)$ regle yüzeyi M ye $(M \subset E^n)$ eğer şu şartlar sağlanıyorsa basit-kapalıdır denir.

a) M nin A(t) asimptot demetlerinin boyutu olan k+m $(m \leq k)$ her $t \in \mathbb{R}$ için sabittir. (Bu özellik bu durumda $Z_{k-m}(t) \subset \Omega \subset M$ merkez uzayları için de doğrudur).

b) $o \leq t \leq p$ kapalı periyot aralığı açık bir I aralığı içine öyle yatırılabilir ki, I üzerinde $E_k(t)$ nin p periyodik C^1-doğal taşıyıcı bazı $\{e_1(t), \ldots, e_k(t)\}$ mevcut olur (Frank und Giering, 1982).

4. E^n DE (k+1)-BOYUTLU KAPALI REGLE YÜZEYLER İÇİN AÇILIM AÇISI VE AÇILIM UZUNLUĞU

Bu bölümde E^n de (k+1)-boyutlu kapalı regle yüzeyler için açılım uzunluğu ve açılım açısını tanımlayıp hesapladıktan sonra, n = 3 halinin daha önce hesaplananlarla aynı olduğunu gösterdik. H. Frank O. Giering'in verdiği açılım açıları ile burada hesap ettiğimiz açılım açısı arasındaki bağıntıyı açıkladık.

4.1. E^n de (k+1)-Boyutlu Kapalı Regle Yüzeyler İçin Açılım Uzunluğu

E^3 de kapalı regle yüzeyler için açılım uzunluğu

Teorem 4.1.1. M, E^3 de bir regle yüzey olsun. M nin her noktasından bir tek ortogonal yörünge geçer.

İspat. M regle yüzey için bir parametrizasyon

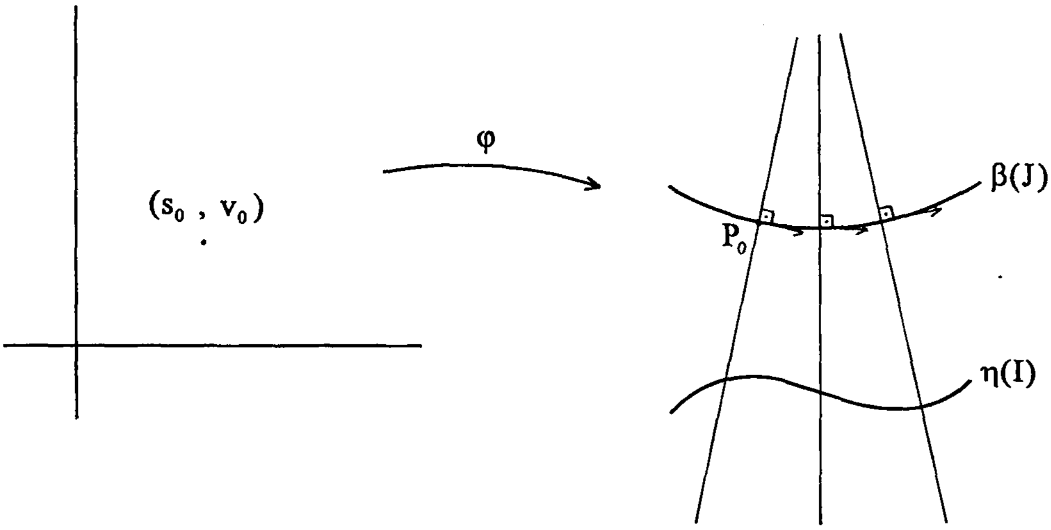
$$\begin{aligned} \varphi : I \times \mathbb{R} &\longrightarrow E^3 \\ (t, v) &\longrightarrow \varphi(t, v) = \eta(t) + v\, e(t) \end{aligned}$$

olsun. Ortogonal yörünge

$$\begin{aligned} \beta : J &\to M \\ s &\to \beta(s) = \eta(s) + f(s)e(s) \end{aligned} \tag{4.1.}$$

şeklindedir. J, I nın içinde değilse bir öteleme ile J yi I nın içine yatırabiliriz. Yani $J \subset I$ olarak alabiliriz.

Şimdi $\varphi(s_0, v_0) = P_0$ noktasından bir tek ortogonal yörünge geçtiğini gösterelim.



Şekil 4.1.

(4.1) in türevini alırsak

$$\beta'(s) = \eta'(s) + f'(s)e(s) + f(s)e'(s) \tag{4.2}$$

olur. $\beta(J)$ eğrisi her noktada e(s) ye dik olduğundan

$$<\beta'(s)\ ,\ e(s)> \ = 0 \tag{4.3}$$

olur. (4.2.) den bu denklem

$$<\eta'(s) + f'(s)e(s) + f(s)e'(s)\ ,\ e(s)> \ = 0$$

olur. İç çarpımın bilineerlik özelliğinden

$$<\eta'(s)\ ,\ e(s)> \ + \ f'(s)<e(s)\ ,\ e(s)> \ + \ f(s)<e'(s)\ ,\ e(s)> \ = \ 0 \tag{4.4}$$

dır.

$$<e(s)\ ,\ e(s)> \ =1 \qquad \text{ve} \qquad <e'(s)\ ,\ e(s)> \ =0$$

olduğundan (4.4) denklemi

$$<\eta'(s)\ ,\ e(s)> \ + \ f'(s)=0$$

olur. Buradan

$$f(s)=-\int<\eta'(s)\ ,\ e(s)> \ ds \ + \ C \tag{4.5}$$

bulunur.

$$-\int<\eta'(s)\ ,\ e(s)> \ ds=F(s) \tag{4.6}$$

dersek

$$f(s)=F(s) \ + \ C \tag{4.7}$$

olur. C keyfi seçildiğinden (4.3) koşulunu sağlayan bir çok eğri vardır. Bu eğrilerden P_0 noktasından geçeni bulmak istiyoruz. Buna göre

$$P_0=\eta(s) \ + \ (F(s)+C)e(s)$$

olacak biçimde bir s sayısının bulunmasını istiyoruz.

$$P_0 = \eta(s_0) + v_0 e(s_0)$$

olduğundan

$$\eta(s_0) + v_0 e(s_0) = \eta(s) + f(s)e(s)$$

olur. Buradan

$$\eta(s_0) = \eta(s) \quad \text{ve} \quad v_0 = f(s)$$

bulunur. I aralığını η nın bire-bir olduğu bir aralık seçersek $s = s_0$ bulunur. $v_0 = f(s)$ eşitliğindende

$$f(s_0) = F(s_0) + C$$

ve buradanda

$$C = f(s_0) - F(s_0)$$

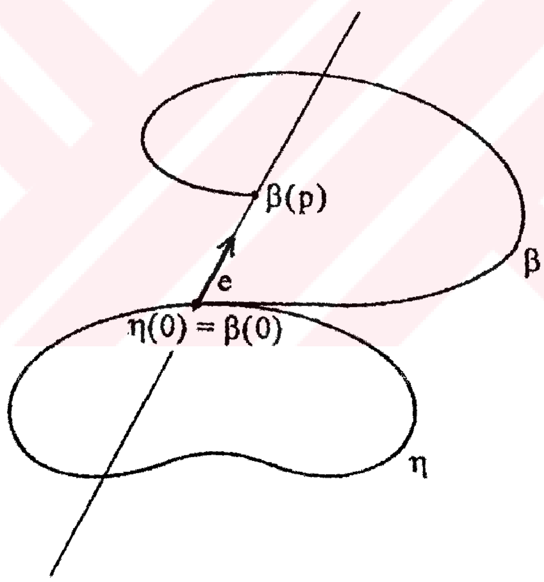
bulunur. Sonuç olarak P_0 noktasından geçen bir ve yalnız bir ortogonal yörünge vardır. Bu ortogonal yörünge her doğrultmanı keseceğinden

$$J = I$$

olmak zorundadır.

M regle yüzeyinin η dayanak eğrisinin tanım aralığını 0 noktasını kapsayacak şekilde seçebiliriz. Bundan böyle M regle yüzeyinden söz edildiğinde böyle seçtiğimizi varsayacağız.

Tanım 4.1.2. M, E^3 de kapalı bir regle yüzey ve M nin $\eta(0)$ noktasındaki birim doğrultman vektörü e olsun. Daha açık olarak $e(0) = e$ diyelim. η nın periyodu p, $\eta(0)$ dan geçen ortogonal yörünge β olsun. $\beta(0)$ ve $\beta(p)$ noktaları arasındaki uzaklığa M nin açılım uzunluğu denir (Şekil 4.2).



Şekil 4.2.

Teorem 4.1.1. deki P_0 noktası yerine $\eta(0)$ noktası seçildiğinde $v_0 = 0$ dolayısıyla $f(0) = 0$ olur. Buna göre

$$C = -F(0) \tag{4.8}$$

(4.7) den

$$f(p) = F(p) + C$$

olur. (4.8) den

$$f(p) = F(p) - F(0)$$

ve

$$f(p) - f(0) = F(p) - F(0)$$

bu ise (4.6) dan

$$f(p) - f(0) = -\int_0^p \langle \eta'(s), e(s) \rangle \, ds$$

bulunur.

$$\beta(0) = \eta(0) + f(0)e(0), \quad \beta(p) = \eta(p) + f(p)e(p) \text{ ve } \eta(p) = \eta(0)$$

olduğundan $\beta(p)$ ve $\beta(0)$ noktaları arasındaki uzaklık

$$| f(p) - f(0) | = | -\int_0^p \langle \eta'(s), e(s) \rangle \, ds | \tag{4.9}$$

olur. Bu uzaklığı L_0 ile gösterirsek

$$L_0 = | -\int_0^p \langle \eta'(s), e(s) \rangle \, ds |$$

dir. Aynı işlemleri bir t noktasından başlatarak yaparsak

$$L_t = \left| \; - \int_t^{t+p} < \eta'(s) \, , \, e(s) > ds \; \right|$$

olur.

E^n de (k+1)-boyutlu kapalı regle yüzeyler için açılım uzunluğu

E^3 de yaptığımız işlemleri E^n de (k+1)-boyutlu kapalı regle yüzeyler için yapalım.

Teorem 4.1.3. M, E^n de (k+1)-boyutlu regle yüzey olsun. M nin her noktasından bir tek ortogonal yörünge geçer.

İspat. M regle yüzeyiçin bir parametrizasyon

$$\varphi : \; I \times \mathbb{R}^k \longrightarrow E^n$$
$$(t, v_1, v_2, \ldots, v_k) \longrightarrow \varphi\,(t, v_1, v_2, \ldots, v_k) = \eta(t) + \sum_{i=1}^{k} v_i \, e_i(t)$$

olsun. Ortogonal yörünge

$$\beta : J \to M$$
$$s \to \beta(s) = \eta(s) + \sum_{i=1}^{k} f_i(s)\, e_i(s) \tag{4.10}$$

şeklindedir. (4.10) un türevini alırsak

$$\beta'(s) = \eta'(s) + \sum_{i=1}^{k} f_i'(s)\, e_i(s) + \sum_{i=1}^{k} f_i(s)\, e_i'(s) \tag{4.11}$$

olur. $\beta(J)$ eğrisi $E_k(s)$ doğrultman uzaylarının tümüne dik olduğundan

$$\forall \; j \in \{1,2,\ldots,k\} \quad \text{için} \quad < \beta'(s) \, , \, e_j(s) > \; = \; 0 \tag{4.12}$$

olur. (4.11) i bu denklemde yerine yazarsak

$$< \eta'(s) + \sum_{i=1}^{k} f_i'(s)\, e_i(s) + \sum_{i=1}^{k} f_i(s)\, e_i'(s)\, ,\, e_j(s) > \; = \; 0$$

elde edilir. Bu ise

$$< \eta'(s)\, ,\, e_j(s) > \; + \; \sum_{i=1}^{k} f_i'(s) \; < e_i(s)\, ,\, e_j(s) > \; + \; \sum_{i=1}^{k} f_i(s) \; < e_i'(s)\, ,\, e_j(s) > \; = \; 0$$

dır. (3.7) den $< e_i(s)\, ,\, e_j(s) > \; = \; \delta_{ij}$ ve $< e_i'(s)\, ,\, e_j(s) > \; = \; 0$

olduğundan

$$< \eta'(s)\, ,\, e_j(s) > \; + \; f_j'(s) \; = \; 0$$

olur. Buradan

$$f_j(s) \; = \; -\int < \eta'(s)\, ,\, e_j(s) > \, ds \; + \; C_j$$

buluınur.

$$-\int < \eta'(s)\, ,\, e_j(s) > \, ds \; = \; F_j(s) \qquad (4.13)$$

dersek

$$f_j(s) \; = \; F_j(s) \; + \; C_j \qquad 1 \leq j \leq k \qquad (4.14)$$

olur. C keyfi seçildiğinden (4.12) koşulunu sağlayan bir çok eğri vardır. Bu eğrilerden

$$P_0 = \varphi(s_0\, , v_{10}\, , \ldots , v_{k0}) = \eta(s_0) + \sum_{i=1}^{k} v_{i0}\, e_i(s_0) \tag{4.15}$$

noktasından geçeni bulmak istiyoruz. Buna göre

$$P_0 = \beta(s)$$

olacak şekilde bir s sayısının bulunmasını istiyoruz. (4.10) ve (4.15) i bu denklemde yerine yazarsak

$$\eta(s_0) + \sum_{i=1}^{k} v_{i0}\, e_i(s_0) = \eta(s) + \sum_{i=1}^{k} f_i(s)\, e_i(s)$$

olmalıdır. Buradan

$$\eta(s_0) = \eta(s) \qquad \text{ve} \qquad v_{i0} = f_i(s)$$

elde edilir. Öyleyse

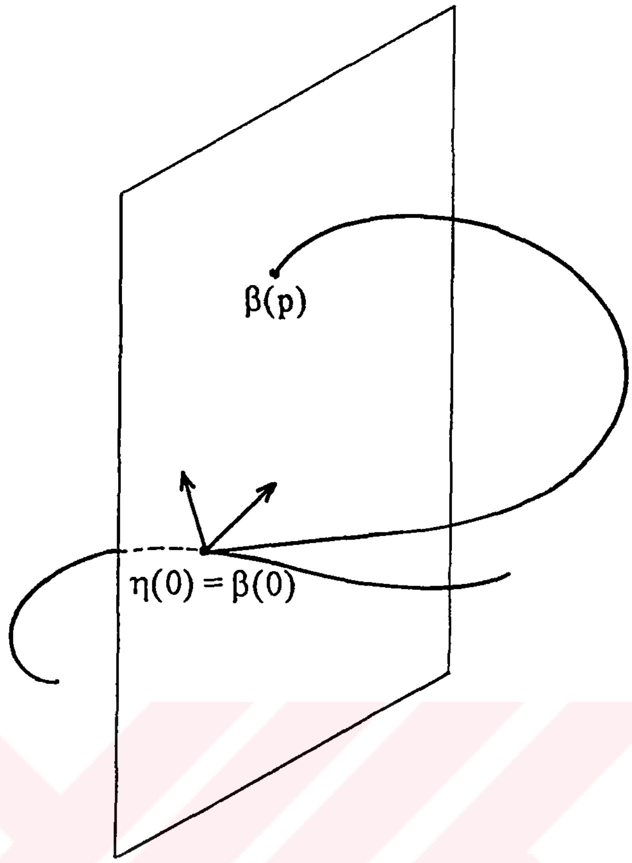
$$s_0 = s \qquad \text{ve} \qquad v_{i0} = f_i(s_0)\, , \qquad 1 \le i \le k$$

bulunur. (4.14) den yararlanarak

$$C_i = f_i(s_0) - F_i(s_0)$$

elde edilir. Sonuç olarak P_0 noktasından geçen bir ve yalnız bir ortogonal yörünge vardır.

Tanım 4.1.4. M, E^n de kapalı bir regle yüzey ve M nin $\eta(0)$ daki çatısı $\{e_1\, , e_2\, , \ldots , e_k\}$ olsun. $\eta(0)$ den geçen ortogonal yörüngeyi β ile gösterelim. $\beta(0)$ ile $\beta(p)$ noktaları arasındaki uzaklığa M nin açılım uzunluğu denir. (Şekil 4.3)



Şekil 4.3.

Teorem 4.2.1.deki P_0 yerine $\eta(0)$ seçildiğinde v_{i0} dolayısıyla $f_{i0} = 0$ olur. Buna göre

$$C_i = -F_i(0)$$

olur. (4.14) den

$$f_i(p) = F_i(p) + C$$

$$f_i(p) = F_i(p) - F_i(0)$$

ve

$$f_i(p) - f_i(0) = F_i(p) - F_i(0)$$

(4.13) den

$$f_i(p) - f_i(0) = -\int_0^p < \eta'(s)\, ,\, e_i(s) > ds \tag{4.16}$$

olur.

$$f_i(p) - f_i(0) = L_i \qquad 1 \leq i \leq k \tag{4.17}$$

dersek L_i ye i-inci ana doğru üzerindeki açılım uzunluğu denir.

$$\overrightarrow{\beta(0)\beta(p)} = L_1 e_1 + L_2 e_2 + \dots + L_k e_k$$

olur. Bu vektörün boyu bize M kapalı regle yüzeyin açılım uzunluğunu verir. Bu açılım uzunluğunu L_0 ile gösterirsek

$$L_0 = \sqrt{L_1^2 + L_2^2 + \dots + L_k^2} \tag{4.18}$$

olur. Açılım uzunluğu (4.16) dan dolayı ortogonal yörüngenin seçilişinden bağımsızdır.

Aynı işlemleri bir t noktasından başlatarak yaparsak (4.16) ve (4.17) den

$$L_i = -\int_t^{t+p} < \eta'(s)\, ,\, e_j(s) > ds\, , \qquad 1 \leq i \leq k \tag{4.19}$$

olur ve

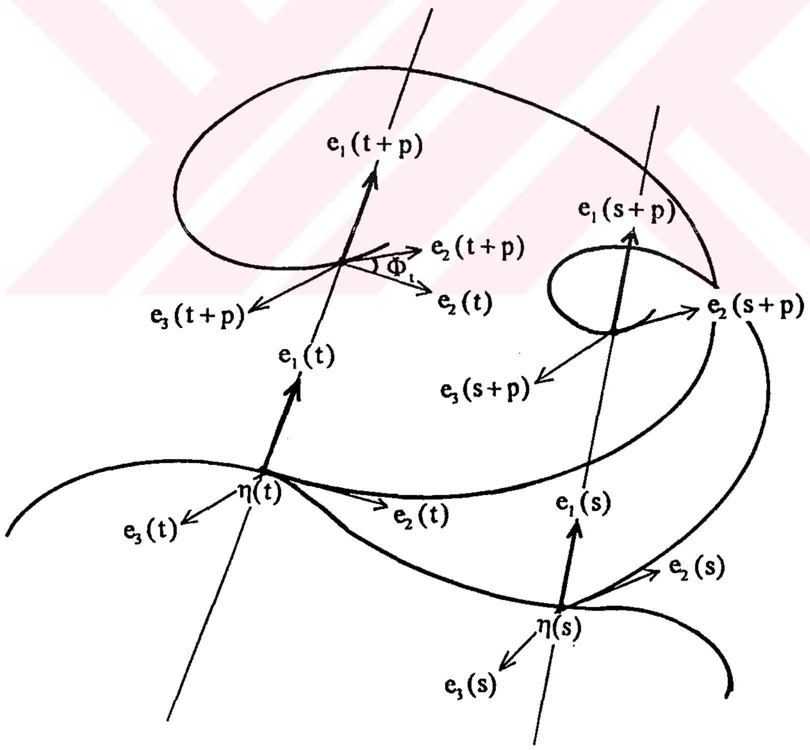
$$L_t = \sqrt{L_1^2 + L_2^2 + \dots + L_k^2}$$

olarak elde edilir.

4.2. E^n de (k+1)-Boyutlu Kapalı Regle Yüzeyler İçin Açılım Açısı

İlk önce E^3 de kapalı regle yüzeyler için açılım açısını tanımlayalım.

Tanım 4.2.1. M, E^3 de kapalı bir regle yüzey olsun. $\eta(t)$ noktasındaki birim doğrultman vektörü $e_1(t)$, $\eta(t)$ noktasındaki ortogonal yörünge β nın birim hız vektörü $e_2(t)$ olsun. Bir periyot sonra $\eta(t+p)$ noktasındaki ortogonal yörüngenin hız vektörü $e_2(t+p)$ olmak üzere $e_2(t)$ ile $e_2(t+p)$ vektörleri arasındaki açıya M nin açılım açısı denir (Şekil 4.4). Bu açıyı Φ_t ile göstereceğiz.



Şekil 4.4.

Her s noktasında $e_3(s)$ ve $e_3(s+p)$ vektörlerini $\{e_1(s)\ ,\ e_2(s)\ ,\ e_3(s)\}$ ve $\{e_1(s+p)\ ,\ e_2(s+p)\ ,\ e_3(s+p)\}$ ortonormal olacak şekilde alalım.

$$\begin{aligned} e_1(s+p) &= \bar{e}_1(s) \\ e_2(s+p) &= \bar{e}_2(s) \\ e_3(s+p) &= \bar{e}_3(s) \end{aligned}$$

ile gösterelim. $e_2(s)$ ile $e_2(s+p)$ arasındaki açıya $\theta(s)$ dersek ve $\{e_1(s)\ ,\ e_2(s)\ ,\ e_3(s)\}$ bazını hareketli, $\{\bar{e}_1(s)\ ,\ \bar{e}_2(s)\ ,\ \bar{e}_3(s)\}$ bazını sabit alırsak bu iki baz arasında şu bağıntılar vardır.

$$\begin{aligned} e_1(s) &= \bar{e}_1(s) \\ e_2(s) &= \cos\theta(s)\,\bar{e}_2(s) - \sin\theta(s)\,\bar{e}_3(s) \\ e_3(s) &= \sin\theta(s)\,\bar{e}_2(s) + \cos\theta(s)\,\bar{e}_3(s) \end{aligned} \tag{4.20}$$

Bu denklemlerin eğri boyunca türevini alırsak

$$\begin{aligned} e_1'(s) &= \bar{e}_1'(s) = 0 \\ e_2'(s) &= (-\sin\theta(s)\,\bar{e}_2(s) - \cos\theta(s)\,\bar{e}_3(s))\,\theta'(s) \\ e_3'(s) &= (\cos\theta(s)\,\bar{e}_2(s) - \sin\theta(s)\,\bar{e}_3(s))\,\theta'(s) \end{aligned}$$

olur. İkinci denklemde (4.19) kullanılarak

$$e_2'(s) = -e_3(s)\,\theta'(s)$$

bulunur. Buradan

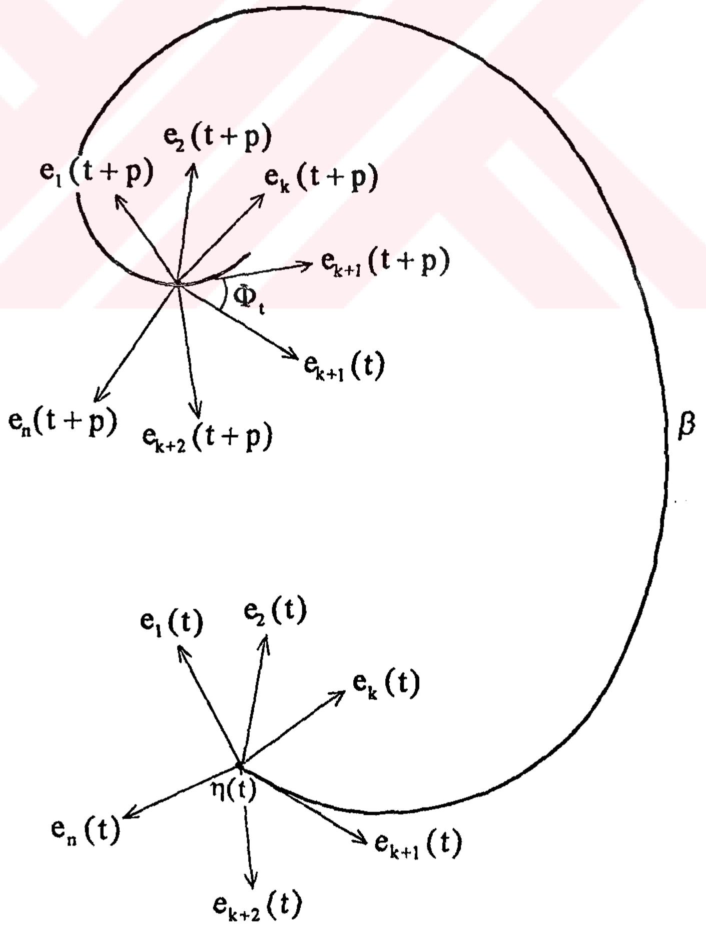
$$< e_2'(s)\ ,\ e_3(s) > \ = -\theta'(s)$$

elde edilir. Buna göre Φ_t açısı

$$\Phi_t = \int_t^{t+p} -d\theta = \int_t^{t+p} \langle e_2'(s) \ , e_3(s) \rangle \ ds \tag{4.21}$$

olarak bulunur.

Tanım 4.2.2. M, E^n de (k+1)-boyutlu kapalı bir regle yüzey ve $\eta(t)$ noktasındaki ana doğruların birim doğrultman vektörleri $e_1(t)$, $e_2(t)$, ... , $e_k(t)$ olsun. $\eta(t)$ noktasından geçen ortogonal yörüngenin birim hız vektörü $e_{k+1}(t)$ olsun. Bir periyot sonra $\eta(t+p)$ noktasındaki ortogonal yörüngenin hız vektörü $e_{k+1}(t+p)$ olmak üzere $e_{k+1}(t)$ ile $e_{k+1}(t+p)$ vektörleri arasındaki açıya M nin açılım açısı denir ve Φ_t ile gösterilir (Şekil 4.5).



Şekil 4.5.

□ (s) noktasındaki ortonormal çatıyı

$\{e_1(s)\ ,\ e_2(s)\ ,\ \dots\ ,\ e_k(s)\ ,\ e_{k+1}(s)\ ,\ e_{k+2}(s)\ ,\ \dots\ ,\ e_n(s)\}$ ile □ $(s+p)$ noktasındaki ortonormal çatıyı ile $\{\bar{e}_1(s)\ ,\ \bar{e}_2(s)\ ,\ \dots\ ,\ \bar{e}_k(s)\ ,\ \bar{e}_{k+1}(s)\ ,\ \bar{e}_{k+2}(s)\ ,\ \dots\ ,\ \bar{e}_n(s)\}$ ile gösterelim. Yazımda kolaylık sağlaması açısından bundan böyle bu çatıları $\{e_1,\ e_2,\ \dots,\ e_n\}$ ve $\{\bar{e}_1,\ \bar{e}_2,\ \dots,\ \bar{e}_n\}$ biçiminde göstereceğiz.

$\{e_1,\ e_2,\ \dots,\ e_n\}$ hareketli çatı ve $\{\bar{e}_1,\ \bar{e}_2,\ \dots,\ \bar{e}_n\}$ sabit çatı olmak üzere $\{e_1,\ e_2,\ \dots,\ e_n\}$ vektörlerini $\{\bar{e}_1,\ \bar{e}_2,\ \dots,\ \bar{e}_n\}$ bazı cinsinden yazarsak,

$$
\begin{cases}
e_1 = \bar{e}_1 \\
e_2 = \bar{e}_2 \\
\vdots \\
e_k = \bar{e}_k \\
e_{k+1} = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{(k+1)i}\bar{e}_i \\
e_{k+2} = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{(k+2)i}\bar{e}_i \\
\vdots \\
e_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ni}\bar{e}_i
\end{cases}
$$

elde edilir.

$\{e_1,\ e_2,\ \dots,\ e_n\}$ ve $\{\bar{e}_1,\ \bar{e}_2,\ \dots,\ \bar{e}_n\}$ bazları ortonormal olduğundan yukarıdaki eşitlikler

$$
\begin{cases}
e_1 = \overline{e}_1 \\
e_2 = \overline{e}_2 \\
\vdots \\
e_k = \overline{e}_k \\
e_{k+1} = \displaystyle\sum_{i=k+1}^{n} a_{(k+1)i}\overline{e}_i \\
e_{k+2} = \displaystyle\sum_{i=k+1}^{n} a_{(k+2)i}\overline{e}_i \\
\vdots \\
e_n = \displaystyle\sum_{i=k+1}^{n} a_{ni}\overline{e}_i
\end{cases}
$$

biçimine girer. Bu eşitlikleri matris çarpımından yararlanarak

$$
\underbrace{\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_k \\ e_{k+1} \\ e_{k+2} \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}}_{E}
=
\underbrace{\begin{bmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & a_{(k+1)(k+1)} & a_{(k+1)(k+2)} & \cdots & a_{(k+1)n} \\
0 & 0 & \cdots & 0 & a_{(k+2)(k+1)} & a_{(k+2)(k+2)} & \cdots & a_{(k+2)n} \\
0 & 0 & \cdots & & & & & \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & & & \\
0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n(k+1)} & a_{n(k+2)} & \cdots & a_{nn}
\end{bmatrix}}_{A}
\underbrace{\begin{bmatrix} \overline{e}_1 \\ \overline{e}_2 \\ \vdots \\ \overline{e}_k \\ \overline{e}_{k+1} \\ \overline{e}_{k+2} \\ \vdots \\ \overline{e}_n \end{bmatrix}}_{\overline{E}}
$$

şeklinde yazabiliriz. Bu eşitliği kısaca

$$
E = A\overline{E} \tag{4.22}
$$

biçiminde yazalım. Buradan

$$dE = (dA)\overline{E} + A\underbrace{d\overline{E}}_{0}$$

$$dE = (dA)\overline{E}$$

elde edilir. Bu eşitlikte (2.28) kullanılarak

$$dE = (dA)A^T E$$

bulunur.

$$(dA)A^T = \omega \qquad (4.23$$

dersek

$$dE = \omega E \qquad (4.24)$$

olur. Buradaki ω matrisi için

$$\omega^T = (dAA^T)^T$$

$$\omega^T = AdA^T$$

eşitliği vardır. A ortogonal olduğundan

$$AA^T = I_n$$

dır. İki tarafın diferansiyelini alarak

$$(dA)A^T + AdA^T = 0$$

$$AdA^T = -(dA)A^T$$

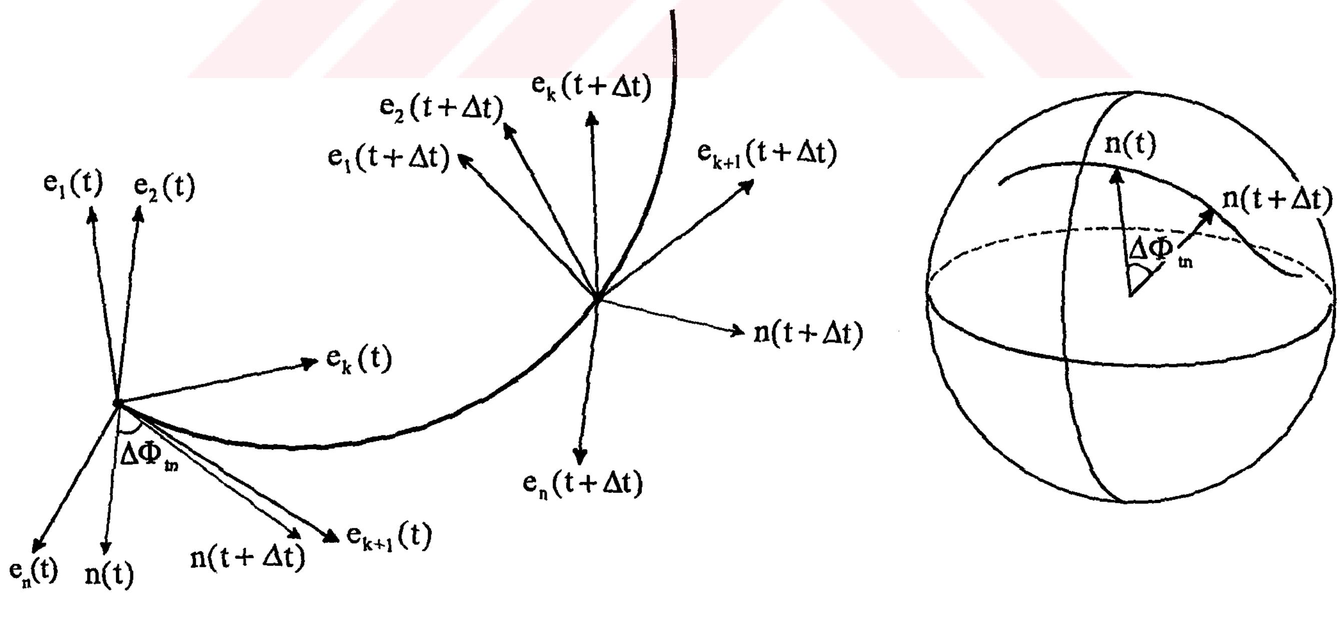
elde edilir. Bu eşitliğin sol tarafı ω^T ve sağ tarafı $-\omega$ olduğundan

$$\omega^T = -\omega$$

bulunur. Bu eşitlik ω matrisinin antisimetrik olduğunu gösterir. Bu matris

$$\omega = \left[\begin{array}{c|cccc} 0 & & & 0 & \\ \hline & 0 & \omega_{(k+1)(k+2)} & \cdots & \omega_{(k+1)n} \\ 0 & -\omega_{(k+1)(k+2)} & 0 & \cdots & \omega_{(k+2)n} \\ & \vdots & & & \\ & -\omega_{(k+1)n} & -\omega_{(k+1)(n-1)} & \cdots & 0 \end{array}\right] \tag{4.25}$$

biçimindedir. Şimdi $\eta(t)$ noktasında bir $n \in Sp\,\{e_{k+1},\ e_{k+2},\ \ldots,\ e_n\}$ vektörünün bir periyot sonra ilk konumu ile yapmış olduğu açıyı hesaplayacağız. Bu açıyı Φ_{tn} ile gösterelim.



Şekil 4.6.

Eğrinin yay elementi s ve n nin küresel göstergesinin yay elementi s_n olmak üzere,

$$\frac{dn}{ds} = \frac{dn}{ds_n} \cdot \frac{ds_n}{ds}$$

dir. Buradan iki tarafın normunu alırsak

$$\left\| \frac{dn}{ds} \right\| = \underbrace{\left\| \frac{dn}{ds_n} \right\|}_{1} \cdot \frac{ds_n}{ds}$$

ve dolayısıyla

$$\left\| \frac{dn}{ds} \right\| = \frac{ds_n}{ds} \qquad (4.26)$$

olur.

$$\frac{\Delta\Phi_{tn}}{\Delta s} = \frac{\Delta\Phi_{tn}}{\Delta s_n} \cdot \frac{\Delta s_n}{\Delta s}$$

eşitliğinin her iki yanına $\Delta s \rightarrow 0$ için limitini alarak

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\Phi_{tn}}{\Delta s} = \underbrace{\lim_{\Delta s_n \rightarrow 0} \frac{\Delta\Phi_{tn}}{\Delta s_n}}_{1} \cdot \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta s_n}{\Delta s}$$

elde edilir. Buradan

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\Phi_{tn}}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta s_n}{\Delta s}$$

bulunur. Öyleyse

$$\frac{d\Phi_{tn}}{ds} = \frac{ds_n}{ds}$$

olur. (4.26) dan

$$\frac{d\Phi_{tn}}{ds} = \left\| \frac{dn}{ds} \right\|$$

dir.

$$d\Phi_{tn} = \left\| \frac{dn}{ds} \right\| ds$$

eşitliğinden

$$\Phi_{tn} = \int_{t}^{t+p} \left\| \frac{dn}{ds} \right\| ds \tag{4.27}$$

dir.

$$n \in Sp\,\{e_{k+1},\, e_{k+2},\, \ldots,\, e_n\}$$

olduğundan

$$n = n_{k+1}e_{k+1} + n_{k+2}e_{k+2} + \ldots + n_n e_n$$

biçimindedir. Bu eşitliği, matris çarpımından yararlanarak

$$n = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & n_{k+1} & n_{k+2} & \ldots & n_n \end{bmatrix}}_{N} \underbrace{\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_k \\ e_{k+1} \\ e_{k+2} \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}}_{E}$$

veya kısaca

$$n = NE$$

olarak yazabiliriz. (4.22) den

$$n = NA\overline{E}$$

olur. İki tarafin diferensiyelini alırsak

$$dn = (dN)A\overline{E} + N(dA)\overline{E} + NA\underbrace{d\overline{E}}_{0}$$

elde edilir.

$$dn = (dN)A\overline{E} + N(dA)\overline{E}$$

eşitliğini (2.28) den yararlanarak

$$dn = (dN)AA^{T}E + N(dA)A^{T}E$$

biçiminde yazabiliriz. A ortogonal olduğundan, $AA^{T} = I_n$ dir. Yukarıda bu eşitliği kullanarak

$$dn = (dN)E + N(dA)A^{T}E$$

elde edilir. Bu eşitlikte (4.23) eşitliği kullanılarak

$$dn = (dN + N\omega)\,E \tag{4.28}$$

bulunur. Şimdi $N\omega$ matrisini hesap edelim.

$$N\omega = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & n_{k+1} & n_{k+2} & \dots & n_n \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c|ccccc} 0 & & & 0 & & \\ \hline & 0 & \omega_{(k+1)(k+2)} & \omega_{(k+1)(k+3)} & \cdots & \omega_{(k+1)n} \\ 0 & \omega_{(k+2)(k+1)} & 0 & \omega_{(k+2)(k+3)} & \cdots & \omega_{(k+2)n} \\ & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ & \omega_{n(k+1)} & \omega_{n(k+2)} & \omega_{n(k+3)} & \cdots & 0 \end{array}\right]$$

$$= \left[0 \cdots 0 \ \sum_{i=k+1}^{n} n_i \omega_{ik+1} \ \sum_{i=k+1}^{n} n_i \omega_{ik+2} \ \dots \ \sum_{i=k+1}^{n} n_i \omega_{in} \right]$$

olur. Burada hesaplanan $N\omega$ matrisini (4.28) eşitliğinde yerine koyalım.

$$dn = \left(\left[0 \cdots 0 \ dn_{k+1} \ dn_{k+2} \cdots dn_n \right] + \left[0 \cdots 0 \ \sum_{i=k+1}^{n} n_i \omega_{ik+1} \cdots \sum_{i=k+1}^{n} n_i \omega_{in} \right] \right) \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_k \\ e_{k+1} \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}$$

olur. Buradan

$$dn = \left[0 \cdots 0 \ dn_{k+1} + \sum_{i=k+1}^{n} n_i \omega_{ik+1} \cdots dn_n + \sum_{i=k+1}^{n} n_i \omega_{in} \right] \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_k \\ e_{k+1} \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}$$

ve dolayısıyla

$$dn = \left(dn_{k+1} + \sum_{i=k+1}^{n} n_i \omega_{ik+1}\right) e_{k+1} + \left(dn_{k+2} + \sum_{i=k+1}^{n} n_i \omega_{ik+2}\right) e_{k+2} + \cdots + \left(dn_n + \sum_{i=k+1}^{n} n_i \omega_{in}\right) e_n$$

bulunur.

$$\| dn \| = \sqrt{\left(dn_{k+1} + \sum_{i=k+1}^{n} n_i \omega_{ik+1}\right)^2 + \left(dn_{k+2} + \sum_{i=k+1}^{n} n_i \omega_{ik+2}\right)^2 + \cdots + \left(dn_n + \sum_{i=k+1}^{n} n_i \omega_{in}\right)^2} \qquad (4.29)$$

dır. Bu değeri (4.27) eşitliği olan

$$\Phi_{tn} = \int_{t}^{t+p} \| dn \|$$

da yerine yazarsak Φ_{tn} hesaplanmış olur.

Özel olarak

$$n = e_{k+1}$$

alırsak bu açı bize M regle yüzeyinin $\eta(t)$ noktasındaki açılım açısını verir. Burada

$$dn_{k+1} = dn_{k+2} = \cdots = dn_n = 0 \quad \text{ve} \quad n_{k+1} = 1,\ n_{k+2} = n_{k+3} = \cdots = n_n = 0$$

dır. Buna göre (4.29) dan

$$\| de_{k+1} \| = \sqrt{\omega^2_{(k+1)(k+1)} + \omega^2_{(k+1)(k+2)} + \cdots + \omega^2_{(k+1)n}} \tag{4.30}$$

elde edilir. Burada ω antisimetrik matris olduğundan $\omega_{(k+1)(k+1)} = 0$ dır.

$$\Phi_{te_{k+1}} = \int_t^{t+p} \| de_{k+1} \|$$

olur. Bu açı tanım 4.2.2. deki Φ_t açısıdır. Yani

$$\Phi_t = \int_t^{t+p} \| de_{k+1} \| \tag{4.31}$$

olarak bulunur.

Φ_t değerini (4.24) den de hesap edebiliriz. (4.24) eşitliğini

$$\begin{bmatrix} de_1 \\ de_2 \\ \vdots \\ de_k \\ de_{k+1} \\ de_{k+2} \\ \vdots \\ de_n \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|ccccc} 0 & & & 0 & & \\ \hline & 0 & \omega_{(k+1)(k+2)} & \omega_{(k+1)(k+3)} & \cdots & \omega_{(k+1)n} \\ 0 & \omega_{(k+2)(k+1)} & 0 & \omega_{(k+2)(k+3)} & \cdots & \omega_{(k+2)n} \\ & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & \omega_{n(k+1)} & \omega_{n(k+2)} & \omega_{n(k+3)} & \cdots & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_k \\ e_{k+1} \\ e_{k+2} \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}$$

olarak yazarsak bu eşitlikten (4.30) kolayca elde edilir.

Özel Hal :

Yukarıda yaptığımız işlemleri E^3 uzayında yaparsak

$$n = n_2 e_2 + n_3 e_3$$

olur. Bu eşitliği

$$n = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & n_2 & n_3 \end{bmatrix}}_{N} \underbrace{\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}}_{E}$$

ve kısaca

$$n = NE$$

biçiminde yazalım . (4.28) ile gösterdiğimiz

$$dn = (dN + N\omega) E$$

eşitliği

$$dn = \left(\begin{bmatrix} 0 & dn_2 & dn_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & n_2 & n_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_{23} \\ 0 & \omega_{32} & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}$$

biçimine girer. Buradan

$$dn = (dn_2 + n_3 \omega_{32}) e_2 + (dn_3 + n_2 \omega_{23}) e_3$$

ve

$$\|dn\| = \sqrt{(dn_2 + n_3 \omega_{32})^2 + (dn_3 + n_2 \omega_{23})^2} \tag{4.32}$$

elde edilir.

$$\omega_{32} = -\omega_{23}$$

olduğundan (4.27) eşitliğinden

$$\Phi_{tn} = \int_{t}^{t+p} \sqrt{(dn_2 - n_3\,\omega_{23})^2 + (dn_3 + n_2\,\omega_{23})^2}$$

bulunur. n yerine e_2 yi alırsak

$$n_1 = n_3 = 0 \quad , \quad dn_1 = dn_2 = dn_3 = 0 \ \text{ ve } \ n_2 = 1$$

ve

$$de_2 = oe_2 + \omega_{23}e_3$$

olur. Buradan

$$\|de_2\| = \sqrt{\omega_{23}^2}$$

ve

$$\Phi_{te_2} = \int_{t}^{t+p} |\omega_{23}| \tag{4.33}$$

elde edilir. Böylece tanım 4.2.1. deki Φ_t sayısının yeni bir eşitini vermiş olduk.

(4.20) eşitliğini matris çarpımı olarak yazıp katsayılar matrisine A dersek

$$\omega = (dA)A^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -d\theta \\ 0 & d\theta & 0 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

$$\begin{bmatrix} de_1 \\ de_2 \\ de_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -d\theta \\ 0 & d\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}$$

olur. Buradan

$$\omega_{23} = -d\theta = \langle de_2 , e_3 \rangle$$

ve

$$\Phi_{te_2} = \int_t^{t+p} |-d\theta|$$

dır.

Bu sonuç ile (4.21) deki sonuç arasındaki mutlak değer farklılığı açının her zaman pozitif yönde alınması gerektiğini göstermektedir.

Tanım 4.2.3. E^3 de kapalı C^2-regle yüzeyinin açılım açısı, her t için φnin doğuranlarına dik doğuranları olan bir tors için φnin teğet düzleminin bir periyot sonra ilk konumu ile yaptığı açıdır.

Müller'in verdiği bu tanımı esas alarak H. Frank - O. Giering, E^nde kapalı bir regle yüzey için açılım açılarını hesapladılar.

φ, C^2-merkezi regle yüzeyli m-adet (ikişer ikişer ortogonal) yönlendirilebilen kapalı $\sum_\eta^\sigma$ C^2-ana doğru yüzeyli $(1 \le \sigma \le m)$ basit kapalı ve silindirik olmayan bir C^3-(k+1) regle yüzeyi olsun. Her $E_k(t) \subset \varphi$ doğuranın T(t) teğetsel demeti E^n uzayını gersin

(Boy T(t) = k+m+1=n). Bu halde φ nin refakatçı n-çatısı şöyle yazılabilir.

$$\{e_1(t),\ e_2(t),\ \ldots,\ e_m(t),\ a_{k+1}(t),\ \ldots,\ a_{k+m}(t),\ a_{k+m+1}(t)\ =\ a_n(t)\}\ ,\ m>0\quad .$$

Bu şartlar altında m tane açılım açısı var ve

$$\Phi_\sigma\ =\ \int_0^p \omega_\sigma\,(t)\ dt \qquad\qquad 1\leq\sigma\leq m \tag{4.34}$$

dir. (Frank und Giering 1982). (3.20) yi matris formunda yazarsak

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \vdots \\ \dot{e}_k \\ \dot{a}_{k+1} \\ \dot{a}_{k+2} \\ \vdots \\ \dot{a}_{k+m} \\ \dot{a}_{k+m+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1k} & K_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2k} & 0 & K_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mk} & 0 & 0 & 0 & \cdots & K_m & 0 \\ -K_1 & 0 & \cdots & 0 & G_{11} & G_{12} & G_{13} & \cdots & G_{1m} & \omega_1 \\ 0 & -K_2 & \cdots & 0 & G_{21} & G_{22} & G_{23} & \cdots & G_{2m} & \omega_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -K_m & G_{m1} & G_{m2} & G_{m3} & \cdots & G_{mm} & \omega_m \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -\omega_1 & -\omega_2 & -\omega_3 & \cdots & -\omega_m & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_k \\ a_{k+1} \\ a_{k+2} \\ \vdots \\ a_{k+m} \\ a_{k+m+1} \end{bmatrix}$$

olur. Buradan

$$\dot{a}_{k+m+1}\ =\ -\omega_1 a_{k+1} - \omega_1 a_{k+1}\ -\ \cdots\ -\omega_m a_{k+m}$$

ve

$$\|\dot{a}_{k+m+1}\|\ =\ \sqrt{\omega_1^2\ +\ \omega_2^2\ +\ \cdots\ +\ \omega_m^2}$$

olur. (4.25) eşitliğinden

$$\Phi_{0a_{k+m+1}} = \int_{o}^{p} \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \cdots + \omega_m^2}\ dt$$

olarak bulunur. Bu bize a_{k+m+1} vektörünün bir periyot sonra ilk konumu ile yapmış olduğu açıyı verir. $\dot{a}_{k+m+1}$ vektörünün bileşenleri Frank ve Giering'in (4.34) eşitliği ile buldukları açılım açılarının integrantlarıdır.

KAYNAKLAR

FRANK, H. und GİERİNG, O. 1976. Verallgemeinerte Regelflächen. Math. Zelh. 150, 261-271.

FRANK, H. und GİERİNG, O. 1982. Verallgemeinerte Regelflächen im Großen I. Arch. Math. Vol 38, 106-115.

HACISALİHOĞLU, H. 1980. Yüksek Diferensiyel Geometriye Giriş. Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları.

HACISALİHOĞLU, H. 1982. Diferensiyel Geometri. İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları.

JUZA, M. 1962. Linge de Striction sur une Generalisation a Plusieurs Dimension d'une Surface Reglee. Czechocl. Math. J.12 (87), 143-250.

MÜLLER, H.R. 1951. Über Geschlossene Bewegungsvorgänge Monatsh. Math. 55.206-214.

SABUNCUOĞLU, A. 1982. Genelleştirilmiş Regle Yüzeyler. Doçentlik Tezi, A.Ü. Fen Fakültesi, Ankara.

ÖZGEÇMİŞ

1955 yılında Afyon Bademli'de doğdu. İlkokulu Konya Yunak'ta, ortaokulu Konya Akşehir'de bitirdi. 1975 yılında Ankara İlk Öğretmen Okulu'ndan mezun olduktan sonra 1975-1976 öğretim yılında Yükseliş Koleji ilkokulunda, ilkokul öğretmenliği yaptı. 1976 yılında girdiği Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünden 1980 yılında mezun oldu.

A.Ö.D. Tevfik Fikret Lisesi'nin bursiyeri olarak 1980-1982 yılları arasında Fransa'ya gitti. Fransa'da, Royan C.A.R.E.L. de dil, Besançon'da teknik dil (Langue Scientifique) öğrenimi yaptı. Paris VII Üniversitesi I.R.E.M. (L'institut de recherche pour l'enseignement des mathématiques: Matematik Öğretimi İçin Araştırma Enstitüsü) de pedagoji stajını tamamladıktan sonra Türkiye'ye döndü ve Tevfik Fikret Lisesi'nde matematik öğretmeni olarak göreve başladı. Lisedeki görevine devam ederken, 1985 yılında Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans öğrenimini tamamladı.

1989 yılında Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde araştırma görevlisi olarak göreve başladı. Halen aynı yerde görev yapmaktadır.