

**GENELLEŞTİRİLMİŞ STRUVE FONKSİYONLARININ
GEOMETRİK ÖZELLİKLERİ**

Nihat YAĞMUR

**Doktora Tezi
Matematik Ana Bilim Dalı
Prof. Dr. Halit ORHAN
2013
Her hakkı saklıdır**

**ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

DOKTORA TEZİ

**GENELLEŞTİRİLMİŞ STRUVE FONKSİYONLARININ
GEOMETRİK ÖZELLİKLERİ**

Nihat YAĞMUR

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

**ERZURUM
2013**

Her hakkı saklıdır



T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



TEZ ONAY FORMU

GENELLEŞTİRİLMİŞ STRUVE FONKSİYONLARININ GEOMETRİK ÖZELLİKLERİ

Prof. Dr. Halit ORHAN danışmanlığında, Nihat YAĞMUR tarafından hazırlanan bu çalışma 31/10/2013 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Ana Bilim Dalı'nda doktora tezi olarak **oybirliği** ile kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Fatih NURAY

İmza :

Üye : Prof. Dr. Halit ORHAN

İmza :

Üye : Prof. Dr. Ahmet IŞIK

İmza :

Üye : Doç. Dr. Kürşat AKBULUT

İmza :

Üye : Doç. Dr. Hükmi KIZILTUNÇ

İmza :

Yukarıdaki sonucu onaylıyorum

Prof. Dr. İhsan EFEOĞLU
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

Doktora Tezi

GENELLEŞTİRİLMİŞ STRUVE FONKSİYONLARININ GEOMETRİK ÖZELLİKLERİ

Nihat YAĞMUR

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Halit ORHAN

Bu tezde öncelikle Struve ve modifiye edilmiş Struve fonksiyonlarını ihtiva eden genelleştirilmiş Struve fonksiyonu elde edilmiştir. Daha sonra bu fonksiyonun $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ birim diskinde ünivalentlik, yıldızlılık, konvekslik, konvekse yakınlık, α mertebeden yıldızlılık, α mertebeden konvekslik ve α mertebeden konvekse yakınlık gibi geometrik özellikleri incelenmiştir. Ayrıca genelleştirilmiş Struve fonksiyonunun, $\mathcal{H}^\mu$ Hardy uzayına ait olma şartları belirlenmiştir.

2013, 104 sayfa

Anahtar Kelimeler: Analitik fonksiyon, Ünivalent fonksiyon; Yıldızlı, Konveks ve Konvekse yakın fonksiyon; Struve fonksiyonu, Modifiye edilmiş Struve fonksiyonu, Hardy uzayı.

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

GEOMETRIC PROPERTIES OF GENERALIZED STRUVE FUNCTIONS

Nihat YAĞMUR

Ataturk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Halit ORHAN

In this thesis firstly generalized Struve functions which involves Struve and modified Struve functions were obtained. Then the geometric properties of generalized Struve functions; such as univalence, starlikeness, convexity, close-to-convexity, starlikeness of order α , convexity of order α and close-to-convexity of order α in the unit disk $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ were studied. Furthermore, the conditions for generalized Struve functions' belonging to the Hardy space $\mathcal{H}^u$ were determined.

2013, 104 pages

Keywords: Analytic function, Univalent function; Starlike, Convex, Close-to-convex function; Struve function, Modified Struve function, Hardy space.

TEŞEKKÜR

Doktora tezi olarak sunduğum bu çalışma Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde yapılmıştır.

Bana bu konuyu veren ve çalışmalarım boyunca yardımlarını esirgemeyen saygıdeğer hocam Sayın Prof. Dr. Halit ORHAN'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Tezimin hazırlanışında yakın ilgi ve desteğini gördüğüm Sayın Prof. Dr. Ahmet IŞIK'a ve Sayın Doç. Dr. Kürşat AKBULUT'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Tezin yazımı sırasında yardımlarını esirgemeyen çalışma arkadaşım Arş. Gör. Murat ÇAĞLAR'a şükranlarımı sunarım.

Çalışmalarım boyunca kendilerinden görmüş olduğum destek ve güvenden dolayı sevgili eşime ve aileme teşekkür ederim.

Nihat YAĞMUR

Eylül 2013

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
SİMGELER DİZİNİ.....	v
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vii
1. GİRİŞ	1
2. KURAMSAL TEMELLER	7
2.1. Genel Kavramlar	7
2.2. Analitik ve Ünivalent Fonksiyonlar	10
2.3. Normalize Edilmiş Ünivalent Fonksiyonlar	17
3. MATERYAL ve YÖNTEM	29
3.1. Gama Fonksiyonu.....	29
3.2. Hipergeometrik Fonksiyonlar.....	31
3.3. Bessel Fonksiyonları	35
3.4. Struve Fonksiyonları	38
3.5. Analitik Fonksiyonların Geometrik Özellikleri ile İlgili Tanım ve Teoremler	43
3.6. Hardy Uzayı.....	48
4. ARAŞTIRMA BULGULARI	51
4.1. Struve Fonksiyonlarının Genelleştirilmesi	51
4.2. Genelleştirilmiş Struve Fonksiyonları için Bazı Eşitsizlikler	57
4.3. Genelleştirilmiş Struve Fonksiyonlarının Ünivalentliği, Yıldızlılığı ve Konveksliği.....	62
4.4. Genelleştirilmiş Struve Fonksiyonlarının Konvekse Yakınlığı.....	71
4.5. Genelleştirilmiş Struve Fonksiyonlarının α Mertebeden Yıldızlılığı ve α Mertebeden Konveksliği	77
4.6. Genelleştirilmiş Struve Fonksiyonlarının Hardy Uzayı	88
5. TARTIŞMA ve SONUÇ	97
KAYNAKLAR	101
ÖZGEÇMİŞ	105

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{C}$	: Kompleks düzlem
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^+$	: Pozitif reel sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	: $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{N}_0$	: $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$
$\emptyset$	: Boş küme
I	: İndis kümesi
$\mathbb{U}_r$	: $\{z \in \mathbb{C} : z < r < 1\}$ şeklindeki açık disk
$\mathbb{U}$	: $\{z \in \mathbb{C} : z < 1\}$ açık birim disk
$\partial\mathbb{U}$	: $\{z \in \mathbb{C} : z = 1\}$ birim çember
$\mathcal{A}$	: $\mathbb{U}$ birim diskinde tanımlı $f(z) = z + \sum_{n \geq 2} a_n z^n$ şeklindeki analitik fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{S}$	: $\mathcal{A}$ ya ait ünivalent fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{S}^*$	: $\mathcal{A}$ ya ait yıldızlı fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{S}^*(\alpha)$	: $\mathcal{A}$ ya ait α mertebeden yıldızlı fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{C}$	: $\mathcal{A}$ ya ait konveks fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{C}(\alpha)$	: $\mathcal{A}$ ya ait α mertebeden konveks fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{K}$	: $\mathcal{A}$ ya ait konvekse yakın fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{K}(\alpha)$	: $\mathcal{A}$ ya ait α mertebeden konvekse yakın fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{P}$	: Caratheodory fonksiyonların sınıfı
Ω	: Schwarz fonksiyonların sınıfı
$\arg f(z)$	: $f(z)$ fonksiyonunun argümanı
$\operatorname{Re} f(z)$	: $f(z)$ fonksiyonunun reel kısmı
$\operatorname{Im} f(z)$	: $f(z)$ fonksiyonunun imajiner kısmı
$(a)_n$	: Pochhammer (veya Apell) sembolü

$\Gamma(z)$	: Gama fonksiyonu
$F(a,b;c;z)$	: Gauss hipergeometrik fonksiyonu
${}_qF_r(a_1,...,a_q;b_1,...b_r;z)$	: Genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyon
$J_p(z)$	: Bessel fonksiyonu
$I_p(z)$	: Modifiye edilmiş Bessel fonksiyonu
$j_p(z)$	: Küresel Bessel fonksiyonu
$i_p(z)$	: Modifiye edilmiş Küresel Bessel fonksiyonu
$H_p(z)$	: Struve fonksiyonu
$L_p(z)$	: Modifiye edilmiş Struve fonksiyonu
$w_p(z)$	: Genelleştirilmiş Struve fonksiyonu
$g_p(z)$	: Genelleştirilmiş ve normalize edilmiş Struve fonksiyonu
$\mathcal{H}^\mu$	: Hardy uzayı

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. Koebe fonksiyonu altında birim diskin görüntüsü.....	19
Şekil 2.2. Konvekse yakın bölge	25
Şekil 3.1. $f(z) = z + \frac{1}{2}z^2$ fonksiyonu altında birim diskin görüntüsü	46
Şekil 3.2. $f(z) = z + \frac{1}{2}z^2$ fonksiyonu altında $ z < \frac{1}{2}$ diskinin görüntüsü.....	46
Şekil 4.1. $\mathcal{H}_{-1/2}(\sqrt{z}) = \frac{\sin \sqrt{z}}{\sqrt{z}}$ fonksiyonu altında birim diskin görüntüsü.....	70
Şekil 4.2. $h_{-1/2}(z) = \sqrt{z} \sin \sqrt{z}$ fonksiyonu altında birim diskin görüntüsü	70
Şekil 4.3. $\frac{zf'(z)}{f(z)} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{z} \cos \sqrt{z}}{\sin \sqrt{z}} \right)$ fonksiyonu altında birim diskin görüntüsü	85
Şekil 4.4. $g(z) = \sin z$ fonksiyonu altında birim diskin görüntüsü	86

1. GİRİŞ

Geometrik fonksiyonlar teorisi, ilk olarak G. Bernard Riemann'ın 1851 yılında kompleks düzlemin bir $\mathcal{D} \subsetneq \mathbb{C}$ alt bölgesini, $\mathcal{D}_1$ bölgesi üzerine resmeden bir f analitik fonksiyonunun varlığını gösteren ve adına “Riemann dönüşüm teoremi” denilen teoremiyle ortaya çıkmıştır. Fakat bu teorem, 20. yüzyılın başlarına kadar bazı araştırmacılara göre kullanışlı olmadığından bazı araştırmacılara göre de önemi fazla anlaşılamadığından teoride pek fazla uygulama alanı bulamamıştır. 1907 yılında meşhur matematikçilerden biri olan Koebe'nin, bu teoremi hem analitik hem de ünivalent (yalıncat) fonksiyonlar için

“Kompleks düzlemin $\mathcal{D} \subsetneq \mathbb{C}$ basit bağlantılı alt bölgesini $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ diski üzerine resmeden f analitik ve ünivalent fonksiyonu vardır. Ayrıca $\forall z_0 \in \mathcal{D}$ için $f(z_0) = 0$ ve $f'(z_0) > 0$ şartlarını sağlayan bir tek analitik ve ünivalent fonksiyon vardır.”

biçiminde ifade etmesi geometrik fonksiyonlar teorisine yeni bir boyut kazandırmıştır. Koebe'nin bu teoreminde f analitik ve ünivalent fonksiyonunun tanım kümesi olan $\mathcal{D}$ yerine $\mathbb{U}$ birim diski ve $f(z_0) = 0$, $f'(z_0) > 0$ şartları yerine de $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ biçimindeki normalleştirme aksiyomları alınırsa, $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ normalize edilmiş fonksiyonu elde edilir. Bu tipteki analitik fonksiyonların kümesi $\mathcal{A}$, bu kümede tanımlı ünivalent fonksiyonların kümesi de $\mathcal{S}$ ile gösterilecektir. 1914 yılında alan teoreminin Gronwall tarafından ispatı ve 1916 yılında Bieberbach'ın ortaya koyduğu normalize edilmiş fonksiyonlar için katsayı tahmini ve bu tahminin sonuçları, geometrik fonksiyonlar teorisi için yeni bir dönemin de başlangıcı olmuştur.

Bieberbach'ın $f \in \mathcal{S}$ fonksiyonu için $n = 2, 3, \dots$ olmak üzere $|a_n| \leq n$ tahmininin ispatı birçok matematikçiyi uzun yıllar uğraştırmıştır. $|a_2| \leq 2$ eşitsizliğinin doğruluğu ilk defa 1916 yılında Bieberbach tarafından alan teoreminin bir sonucu olarak gösterilmiştir. Bunu takiben Löewner, 1923 yılında kendi bulduğu ve parametrik metod olarak

isimlendirdiği bir metodla $|a_3| \leq 3$ eşitsizliğini, 1955 yılında Garabedian ve Schiffer, Grunsky eşitsizliklerini kullanarak $|a_4| \leq 4$ eşitsizliğini, 1968 yılında Pederson (1969 yılında Ozawa) $|a_6| \leq 6$ ve 1972 yılında da Pederson ve Schiffer $|a_5| \leq 5$ eşitsizliğini ispatlamışlardır. Nihayet Bieberbach tahmini, Löwner teorisi ve genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonlar kullanılarak 1986 yılında L. De-Branges tarafından ispat edilmiş ve probleme son nokta konulmuştur. Problemin tamamen çözülmüş olması bu alanda çalışılacak problemlerin tükenmesi anlamına gelmemiş, tam aksine bu çözüm, ünivalent fonksiyonlar teorisini daha da zenginleştirmiştir. Çağımızın önde gelen matematikçilerine yetmiş yıl meydan okuyan bu problemin çözülmüş olması bu alanda bir takım yeni problemlerin ortaya çıkmasına zemin oluşturmuştur. Bu sahada çalışan matematikçiler, problemi ünivalent fonksiyonların değişik alt sınıflarına taşımış ve bu alt sınıflar üzerinde çalışmalarını sürdürmüşlerdir.

Hipergeometrik fonksiyonların, geometrik fonksiyonlar teorisindeki bazı problemlerin çözümünde etkin bir rol oynaması dikkatlerin bu fonksiyonlar üzerine yoğunlaşmasına sebep olmuştur.

$a \neq 0$, $(a)_0 = 1$ ve $n \geq 1$ için $(a)_n = a(a+1)\dots(a+n-1)$ ifadesi Pochhammer (Apell) sembolü olarak bilinmektedir. $a, b, c \in \mathbb{C}$ ve $c \neq 0, -1, -2, \dots$ olmak üzere,

$$F(a, b; c; z) = {}_2F_1(a, b; c; z) = \sum_{n \geq 0} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!}, \quad |z| < 1$$

fonksiyonu $z(1-z)w''(z) + (c - (a+b+1)z)w'(z) - abw(z) = 0$ ikinci mertebeden hipergeometrik diferansiyel denkleminin bir özel çözümü olup bu fonksiyona Gauss hipergeometrik fonksiyonu denir. Bu fonksiyon yaklaşık olarak iki asır önce L. Euler' in çalışmalarında görülse de daha sonra C.F. Gauss tarafından sistematik olarak sunulmuştur. (Daha fazla bilgi için (Dutka 1984) ve (Kampe de Fériet 1937) çalışmalarına bakılabilir). Bu fonksiyonun özellikleri ilk olarak L. Fuchs, E.E. Kummer, B. Riemann, H.A. Schwarz ve F. Klein tarafından araştırılmıştır. Gauss hipergeometrik fonksiyonlarının ünivalentliği ve yıldızlılığı, 1961 yılında E.P. Merkes ve W.T. Scott tarafından incelenmiştir. 1984 yılında B.C. Carlson ve D.B. Shaffer,

hipergeometrik fonksiyonlar sınıfının α mertebeden konveks ve α mertebeden yıldızlı fonksiyonlarından oluşan alt sınıflarını tanımlamışlardır.

$q, r \geq 1$ şartını sağlayan birer tamsayı, $a_1, a_2, \dots, a_q; b_1, b_2, \dots, b_r$ birer kompleks sayı ve her $k \in \{1, 2, \dots, r\}$ için $b_k \neq 0, -1, -2, \dots$, olmak üzere

$${}_qF_r(a_1, \dots, a_q; b_1, \dots, b_r; z) = \sum_{n \geq 0} \frac{(a_1)_n \dots (a_q)_n}{(b_1)_n \dots (b_r)_n} \frac{z^n}{n!},$$

fonksiyonuna genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyon denmektedir. Bu fonksiyonun bir özel hali olan ve 1837 yılında Kummer tarafından tanımlanan aşağıdaki fonksiyon, Kummer (confluent) hipergeometrik fonksiyonu olarak isimlendirilmektedir.

$${}_1F_1(a; c; z) = \Phi(a; c; z) = \sum_{n \geq 0} \frac{(a)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!}, \quad |z| < 1$$

Son yıllarda genelleştirilmiş hipergeometrik, Gauss hipergeometrik, Kummer hipergeometrik fonksiyonlarının geometrik özellikleri birçok yazar tarafından araştırılmıştır.

Bunlardan bazıları şu şekildedir: 1986 yılında S. Ruscheweyh ve V. Singh, $a > 0$, $c = a + 1$, $-1 \leq \rho b \leq 1 + \rho a$ şartları altında $z \mapsto zF(a, b; c; \rho z)$ fonksiyonunun yıldızlılık mertebesini bulmuştur. 1987 yılında S. Owa ve H.M. Srivastava, Jack lemmasını kullanarak genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonların geometrik özelliklerini, 1990 yılında S.S. Miller ve P.T. Mocanu, diferansiyel subordinasyon metodunu kullanarak belirli hipergeometrik fonksiyonların lokal ünivalentliğini, yıldızlılığını ve konveksliğini araştırmıştır. 1993 yılında H. Silverman, Gauss hipergeometrik fonksiyonlarının yıldızlılığını ve konveksliğini; Choi *et al.* (1996), S.S. Miller ve P.T. Mocanu'nun sonuçlarının bazı genelleştirmelerini ve genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonlar ile analitik fonksiyonların Hardy uzaylarının birleşimini içeren uygulamalarını vermiştir. 1998 yılında S. Ponnusamy ve M. Vuorinen yine S.S. Miller ve P.T. Mocanu'nun sonuçlarının bazı genelleştirmelerini ile Gauss ve Kummer hipergeometrik fonksiyonlarının konvekse yakınlık şartlarını elde etmiştir. 2002 ve

2007 yıllarında R. Küstner $z \mapsto F(a, b; c; z)$ hipergeometrik fonksiyonlarının konveksliği ile $z \mapsto zF(a, b; c; z)$ (shifted hipergeometrik) fonksiyonlarının yıldızlılığını a, b, c reel parametrelerine göre incelemiştir.

Bu fonksiyonların geometrik özellikleri ilginç olmakla birlikte, yazarlar bu fonksiyonları geometrik fonksiyonlar teorisinin diğer birçok probleminin çözümünde de kullanmıştır. Örneğin, Choi *et al.* (2005), normalize edilmiş Gauss hipergeometrik fonksiyonların yıldızlılığını kullanarak alfa mertebeden konveks fonksiyonların Alexander dönüşümü için norm tahmininde bulunmuştur. Son yıllarda hipergeometrik fonksiyonlar üzerine yapılan çalışmalardan bazıları (Owa and Srivastava 1987; Ponnusamy and Sabapathy 1997; Dziok and Srivastava 1999; Ponnusamy and Ronning 1999; Dziok and Srivastava 2003; Liu and Srivastava 2004; Orhan and Güneş 2009; Orhan and Raducanu 2009; Orhan and Raducanu 2010) biçiminde sıralanabilir.

Hipergeometrik fonksiyonların bir özel hali olan fonksiyon çeşitlerinden biri de Bessel fonksiyonudur. Bu fonksiyon ilk olarak 1732 yılında D. Bernoulli tarafından tanımlanmıştır. Fakat ismini F.W. Bessel (1784-1846) den almaktadır. Bessel, bu fonksiyonu Kepler'in "aynı yerçekim ivmesi altında hareket eden farklı üç kütlenin hareketini hesaplama" problemini çözme sonucunda elde etmiştir.

Bessel fonksiyonu, p reel ya da kompleks bir sayı ve $z \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$z^2 w''(z) + zw'(z) + (z^2 - p^2)w(z) = 0$$

ikinci mertebeden Bessel diferansiyel denkleminin bir özel çözümü olup, bu çözüm

$$J_p(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(p+n+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+p} \text{ şeklindedir. Bu fonksiyona } p \text{ mertebeden birinci}$$

tür Bessel fonksiyonu denir. Ayrıca modifiye edilmiş Bessel fonksiyonu, küresel Bessel fonksiyonu ve modifiye edilmiş küresel Bessel fonksiyonu çeşitleri mevcuttur. $J_p(z)$

Bessel fonksiyonu, hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden

$$J_p(z) = \frac{1}{\Gamma(p+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^p {}_0F_1\left(p+1; \frac{-z^2}{4}\right)$$

biçiminde yazılabilir. Bessel fonksiyonlarının ünivalentliği ilk olarak R.K. Brown tarafından 1960 yılında çalışılmıştır. Aynı yıl E. Kreyszig ve J. Todd tarafından Bessel fonksiyonlarının ünivalentlik yarıçapı bulunmuştur. V. Selinger, 1995 de normalize edilmiş Bessel fonksiyonlarının geometrik özelliklerini araştırmıştır. 2008 yılında Arpad Baricz, yukarıda ifade edilen dört çeşit Bessel fonksiyonunu genelleştirerek bu fonksiyonların geometrik özelliklerini incelemiştir. Geometrik fonksiyonlar teorisinde Bessel fonksiyonları ile ilgili çalışmalar halen devam etmekte olup son zamanlarda yapılan çalışmalardan bazıları şunlardır: (Baricz 2008a; Szasz and Kupan 2009; Andras and Baricz 2009; Baricz and Ponnusamy 2010; Frasin 2010; Baricz and Frasin 2010; Prajapat 2011; Deniz *et.al* 2011).

Bessel fonksiyonlarının fizik ve uygulamalı matematikte birçok uygulaması olduğu gibi, ikinci mertebeden

$$z^2 w''(z) + zw'(z) + (z^2 - p^2)w(z) = \frac{4(z/2)^{p+1}}{\sqrt{\pi}\Gamma(p+1/2)}$$

homojen olmayan Bessel diferansiyel denkleminin bir özel çözümü olan ve aynı zamanda hipergeometrik fonksiyonlarının diğer bir özel hali olan

$$\begin{aligned} H_p(z) &= \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+3/2)\Gamma(p+n+3/2)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+p+1} \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}\Gamma(p+3/2)} \left(\frac{z}{2}\right)^{p+1} {}_1F_2\left(1; \frac{3}{2}, p+\frac{3}{2}; -\frac{z^2}{4}\right) \end{aligned}$$

Struve fonksiyonunun da su ve yüzey dalgaları, kararlı olmayan hal aerodinamiği, elektrodinamik, optik kırınım, titreşen bir disk üzerindeki sıvı basıncı dağılımı gibi uygulamaları mevcuttur. Struve fonksiyonu, Rus matematikçi ve gökbilimci Karl Hermann Struve tarafından 1882 yılında tanımlanmıştır. Bu fonksiyon, 1911 yılında J. W. Nicholson tarafından

$$L_p(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{\Gamma(n+3/2)\Gamma(p+n+3/2)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+p+1}$$

biçiminde modifiye edilmiş ve literatürde ismi modifiye edilmiş Struve fonksiyonu olarak geçmektedir.

Sunulan bu tez genel olarak beş ana başlık altında toplanmıştır.

Tezin giriş kısmında tez konusu ile ilgili geçmişten günümüze yapılan çalışmalar, tarihi bir seyir içerisinde sunulmuştur.

Kuramsal temeller olarak adlandırılan ikinci bölümde, tezde geçen temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Materyal ve yöntem olarak adlandırılan üçüncü bölümde, gama fonksiyonu, hipergeometrik fonksiyonlar ve Bessel fonksiyonlarından söz edilmiştir. Daha sonra, Struve, modifiye edilmiş Struve fonksiyonu ve bunlarla ilgili rekürens (yineleme) bağıntıları verilmiştir. Son olarak, analitik fonksiyonların geometrik özellikleri ile ilgili bazı tanım ve teoremlerin yanı sıra, Hardy uzayı ve ilgili teoremlerden bahsedilmiştir.

Araştırma bulguları olan dördüncü bölümde, Struve ve modifiye edilmiş Struve fonksiyonlarının her ikisini birden ihtiva eden genelleştirilmiş Struve fonksiyonu elde edilmiştir. Daha sonra bu fonksiyonun $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ birim diskinde ünivalentlik, yıldızlılık, konvekslik, konvekse yakınlık, α mertebeden yıldızlılık, α mertebeden konvekslik ve α mertebeden konvekse yakınlık gibi geometrik özellikleri incelenmiştir. İlave olarak bu fonksiyonun Hardy uzayına ait olma şartları belirlenmiştir. Böylece bilinen yöntemlerle, ünivalentliğinin ve geometrik özelliklerinin test edilmesi zor olan $f(z) = \cos \sqrt{z}$, $g(z) = \cosh \sqrt{z}$, $h(z) = \sqrt{z} \sin \sqrt{z}$, $r(z) = \sqrt{z} \sinh \sqrt{z}$, $s(z) = \frac{1 - \cos \sqrt{z} - \sqrt{z} \sin \sqrt{z}}{z}$, $t(z) = \frac{1 - \cosh \sqrt{z} + \sqrt{z} \sinh \sqrt{z}}{z}$ gibi trigonometrik fonksiyonları içeren fonksiyonların $\mathbb{U}$ da geometrik özellikleri daha basit bir biçimde test edilebilecektir.

Beşinci bölümde ise, çalışmamızda elde ettiğimiz sonuçlar verilmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Genel Kavramlar

Bu bölümde, araştırmamızda ihtiyaç duyduğumuz temel kavramlar verilmiştir.

Tanım 2.1.1 (Komşuluk): $z_0 \in \mathbb{C}$ noktası verilsin. $D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ kümesine z_0 merkezli r yarıçaplı açık disk veya z_0 noktasının r komşuluğu denir. $\overline{D(z_0, r)} = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$ kümesine z_0 merkezli r yarıçaplı kapalı disk, $\partial D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$ kümesine z_0 merkezli r yarıçaplı çember ve $\tilde{D}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < r\} = D(z_0, r) - \{z_0\}$ kümesine de z_0 noktasının delinmiş komşuluğu denir.

Tanım 2.1.2 (İç nokta): $B \subset \mathbb{C}$ herhangi bir küme ve $z_0 \in B$ olsun. z_0 noktasının uygun bir r komşuluğu tamamen B kümesine ait ise yani $D(z_0, r) \subset B$ olacak biçimde bir $r > 0$ sayısı varsa z_0 noktasına B kümesinin bir iç noktası denir.

Tanım 2.1.3 (Açık ve Kapalı küme): Her noktası iç nokta olan kümeye açık küme, tümleyeni açık olan kümeye ise kapalı küme denir. $r > 0$ olmak üzere $D(z_0, r)$ diski bir açık küme ve $\overline{D(z_0, r)}$ kümesi de kapalı kümedir.

Tanım 2.1.4 (Bağlantılılık): $B \subset \mathbb{C}$ alt kümesi verilsin. B kümesi boş olmayan, ayrık ve açık iki kümenin birleşimi olarak gösterilemiyorsa, B kümesine bağlantılıdır denir. Yani $B \subseteq Y \cup Z$, $B \cap Z \neq \emptyset$ ve $B \cap Y \neq \emptyset$, $B \cap Y \cap Z = \emptyset$ olacak biçimde Y ve Z gibi boş olmayan iki açık küme bulunamıyor ise, B kümesine bağlantılı küme denir. Bağlantılı olmayan kümeye ise bağlantısız küme denir. Örneğin; $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$ bağlantılı, $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi ise bağlantısız bir kümedir.

Tanım 2.1.5 (Bölge): Kompleks düzlemde boş olmayan, açık ve bağlantılı kümeye bölge denir. Eğer küme kapalı ise özel olarak ona da kapalı bölge denir.

Tanım 2.1.6 (Basit bağlantılı küme): $B, \mathbb{C}$ de bir bölge olsun. Eğer B bölgesindeki her basit kapalı eğrinin içi tamamen B de kalıyorsa B bölgesine basit bağlantılı bölge denir. Başka bir ifadeyle tümleyeni bağlantılı olan bölgenin kendisi basit bağlantılıdır. Basit bağlantılı olmayan bölgeye ise çok bağlantılı bölge adı verilir.

Tanım 2.1.7 (Süreklilik): $B \subset \mathbb{C}$ olmak üzere $f : B \rightarrow \mathbb{C}$ bir fonksiyon ve $z_0 \in B$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısı ve $|z - z_0| < \delta$ şartını sağlayan her $z \in B$ için $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta = \delta(\varepsilon, z_0) > 0$ sayısı varsa, f fonksiyonu z_0 noktasında süreklidir denir.

Eğer f fonksiyonu $z_0 \in B$ noktasında sürekli değilse f ye bu noktada süreksizdir denir. $f : B \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonunun $z_0 \in B$ noktasında süreksiz olması için gerekli ve yeterli şart $\forall \delta > 0$ için $\exists \varepsilon > 0$ vardır öyle ki $|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| \geq \varepsilon$ olacak şekilde $\exists z \in B$ olmasıdır.

Tanım 2.1.8 (Mutlak süreklilik): $[a, b] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu verilsin. $\{(x_k, y_k)\}_k$ ailesi de $[a, b]$ aralığının ayrık ve açık, sonlu bir alt ailesi olsun. Her $\varepsilon > 0$ ve (x_k, y_k) aralıklarının sonlu her kümesi için

$$\sum_{k=1}^n |y_k - x_k| < \delta$$

şartı sağlandığında

$$\sum_{k=1}^n |f(y_k) - f(x_k)| < \varepsilon$$

olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı varsa, f fonksiyonuna $[a, b]$ aralığında mutlak süreklidir denir. Eğer her $r > 0$ sayısı ve her $x \in [a, b]$ için, f fonksiyonu $D(x, r)$ komşuluğunda mutlak sürekli ise f ye $[a, b]$ aralığında yerel mutlak süreklidir denir (Heil 2007).

Önerme 2.1.9: Mutlak sürekli her f fonksiyonu sürekli. Fakat bu önermenin tersinin doğru olması gerekmez.

Örnek 2.1.10:

(i) $f(x) = \sin x$ ve $f(x) = x + |x|$ fonksiyonları sonlu aralıklarda mutlak sürekli.

(ii)
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \text{ ise,} \\ x \sin(\pi/x), & x \neq 0 \text{ ise} \end{cases}$$

funksiyonu $[0,1]$ aralığında sürekli fakat mutlak sürekli değildir. Bunu göstermek için

$\sum_{k=1}^n x_k > 1$ olması kaydıyla $x_k = \frac{2}{4k+1}$ ve $y_k = \frac{2}{4k}$ alalım.

$$\sum_{k=1}^n |y_k - x_k| = \sum_{k=1}^n \left| \frac{2}{4k} - \frac{2}{4k+1} \right| < \delta$$

olması için $\delta > 0$ sayısı ne olursa olsun, $\varepsilon = 1/2$ seçilirse

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |f(y_k) - f(x_k)| &= \sum_{k=1}^n \left| \frac{2}{4k} \sin \frac{4k\pi}{2} - \frac{2}{4k+1} \sin \frac{(4k+1)\pi}{2} \right| \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{2}{4k+1} = \sum_{k=1}^n x_k > 1 > \varepsilon \end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla f fonksiyonu $[0,1]$ aralığında mutlak sürekli değildir.

Tanım 2.1.11 (Dizi): Tanım kümesi pozitif tam sayılar olan fonksiyonlara dizi denir.

Tanım 2.1.12 (Normlu uzay): X , F cismi üzerinde tanımlı bir vektör uzayı olsun.

$\| \cdot \| : X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun $x \in X$ deki değeri $\|x\|$ ile gösterilsin. Bu fonksiyon için,

(i) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$,

(ii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ ($\alpha \in F$) ve

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (üçgen eşitsizliği)

şartları sağlanıyorsa $\| \cdot \|$ fonksiyonuna X üzerinde bir norm denir. Üzerinde norm tanımlanmış X uzayına normlu uzay adı verilir ve genellikle $(X, \| \cdot \|)$ ikilisi ile gösterilir.

Tanım 2.1.13 (Cauchy Dizisi ve Tamlık): $X = (X, \| \cdot \|)$ bir normlu uzay ve (x_n) bu uzayda bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $m, n > n_0$ olduğunda

$$\|x_m - x_n\| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon)$ sayısı varsa (x_n) dizisine Cauchy dizisi denir. X deki her Cauchy dizisi yakınsak (yani $x_n \rightarrow x \in X$) ise $(X, \| \cdot \|)$ normlu uzayına tam normlu uzay veya Banach uzayı adı verilir.

X in normlu reel veya kompleks vektör uzay oluşuna göre Banach uzayına, reel veya kompleks Banach uzayı denir.

2.2. Analitik ve Ünivalent Fonksiyonlar

Bu kısımda analitik ve ünivalent fonksiyon kavramları tanıtılacak ve bu fonksiyonlar yardımıyla bazı tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.2.1 (Analitik fonksiyon): $B \subset \mathbb{C}$ olmak üzere $f : B \rightarrow \mathbb{C}$ bir fonksiyon ve z_0 , B nin bir iç noktası olsun. Eğer

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

limiti varsa f fonksiyonu z_0 noktasında diferansiyellenebilir (veya türevlenebilir) denir. Bu limitin değeri $f'(z_0)$ veya $\frac{df}{dz}(z_0)$ ile gösterilir ve buna f fonksiyonunun z_0 noktasındaki türevi adı verilir. f fonksiyonu, z_0 noktasında ve bu noktanın uygun bir

komşuluğundaki her noktada diferansiyellenebilirse f fonksiyonuna z_0 noktasında analitiktir denir.

f fonksiyonu bir $B \subset \mathbb{C}$ bölgesinin her noktasında analitik ise f ye B bölgesinde analitik fonksiyon adı verilir. $\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesinde analitik olan fonksiyona ise tam fonksiyon denir.

$z = x + iy$ olmak üzere $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ kompleks değişkenli kompleks değerli fonksiyonu analitik ise

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \quad \text{ve} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y)$$

olarak ifade edilen Cauchy-Riemann denklemlerini sağlar.

Tanım 2.2.2 (Eğri): $[a, b] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere, $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ tanımlı sürekli fonksiyona $\mathbb{C}$ de bir eğri denir. Burada $\gamma(a)$ ve $\gamma(b)$ noktalarına sırasıyla eğrinin başlangıç ve bitiş noktaları adı verilir.

Bir γ eğrisi için, $\gamma(a) = \gamma(b)$ ise γ eğrisine kapalı eğri denir. Uç noktaları hariç, kendi kendini kesmeyen eğrilere basit eğri, hem basit hem de kapalı eğrilere de basit kapalı eğri veya Jordan eğrisi denir. Jordan eğrisi düzlemi Jordan eğrisinin içi ve dışı olmak üzere iki bölgeye ayırır. Jordan eğrisinin içine Jordan bölgesi denir.

γ eğrisi, $[a, b]$ kapalı aralığında türevlenebilir olsun. Eğer $[a, b]$ kapalı aralığında γ' türevi sürekli ve sıfırdan farklı ise γ eğrisine düzgün eğri denir. t , a dan b ye artarken, buna karşılık gelen $\gamma(t)$ değerlerinin $\gamma(a)$ dan $\gamma(b)$ ye doğru sıralanması eğrinin yönünü belirtir. Kapalı bir eğrinin yönü pozitif veya negatiftir. Kapalı olmayan eğriler için başlangıç noktasından bitiş noktasına doğru sıralama yön olarak alınır.

Kompleks fonksiyonlar teorisinde, analitik fonksiyonlar için önemli bir yere sahip olan Cauchy-Türev formülü aşağıdaki gibidir.

Teorem 2.2.3 (Cauchy-Türev Formülü): f , pozitif yönlü basit kapalı γ eğrisi içinde ve üzerinde analitik bir fonksiyon ve z_0 bu eğrinin içinde bir nokta ise $n = 0, 1, 2, \dots$ için

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

dir (Ponnusamy and Silverman 2006).

Cauchy-Türev formülünün en önemli sonuçlarından biri şudur: f , bir bölgede analitik bir fonksiyon ise bu bölgede her mertebeden türevi vardır ve bu türevler de o bölgede analiktir. Bu durumda f analitik fonksiyonu z_0 noktasında

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n, \quad a_n = f^{(n)}(z_0)/n! \quad (2.1)$$

şeklinde bir Taylor açılımına sahiptir.

Tanım 2.2.4: f fonksiyonu z_0 noktasında analitik değilse z_0 noktasına f fonksiyonunun singüler (tekil) noktası denir.

$z = z_0$, f fonksiyonunun singüler noktası ise bu durumda f , z_0 merkezli bir kuvvet serisine elbette açılmaz. Buna rağmen bir $z = z_0$ çıkarılmış singüler nokta civarında f yi $(z - z_0)$ ın hem pozitif hem de negatif tam sayı kuvvetlerini bulunduran ve Laurent serisi olarak isimlendirilen bir seri ile gösterebiliriz.

Tanım 2.2.5: (i) f fonksiyonunun analitik olduğu $B(R_1; R_2) = \{z : R_1 < |z - z_0| < R_2\}$ halka bölgesindeki

$$f(z) = \sum_{n \geq 1} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} + \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$$

serisine, f fonksiyonunun z_0 noktası civarındaki Laurent serisi denir.

(ii) $\sum_{n \geq 1} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$ serisine Laurent serisinin esas kısmı, $\sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$ serisine de Laurent serisinin analitik kısmı denir.

Singüler noktalar; ayrık singüler nokta ve ayrık olmayan singüler nokta diye iki kısma ayrılır.

Tanım 2.2.6: (i) z_0 , f fonksiyonunun bir singüler noktası olsun. Eğer f fonksiyonu z_0 noktasının delinmiş bir $\tilde{D}(z_0, r)$ komşuluğunda analitik oluyorsa z_0 noktasına f fonksiyonunun ayrık singüler noktası denir.

(ii) z_0 , f fonksiyonunun bir singüler noktası olsun. Eğer f fonksiyonu z_0 noktasının her $\tilde{D}(z_0, r)$ delinmiş komşuluğunda en az bir singüler noktaya sahipse z_0 noktasına f fonksiyonunun ayrık olmayan singüler noktası denir.

Ayrık singüler noktaların uygun bir delinmiş komşuluğunda fonksiyon analitik olup Laurent serisine açılabilir. Bu seri göz önüne alınarak ayrık singüler noktalar; kaldırılabilir singüler nokta, kutup noktası ve esas singüler nokta diye sınıflandırılır. Biz burada sadece kutup noktasından bahsedeceğiz.

Tanım 2.2.7 (Kutup noktası): z_0 , f fonksiyonunun bir ayrık singüler noktası olsun. Bu noktanın uygun bir delinmiş komşuluğundaki Laurent serisini göz önüne alalım. Bu serinin esas kısmında sonlu sayıda terim varsa z_0 noktasına f fonksiyonunun kutup noktası denir. Serinin esas kısmında paydadaki $(z - z_0)$ ın en büyük kuvveti 1 ise z_0 noktasına f nin basit kutup noktası (veya basit kutbu) adı verilir.

Tanım 2.2.8 (Meromorf fonksiyon): Bir f fonksiyonunun bir B bölgesindeki singüler noktaları sadece kutup noktaları ise f fonksiyonuna B bölgesinde meromorf fonksiyon denir.

Örneğin; $f(z) = \frac{e^z}{z}$ fonksiyonu $\mathbb{C}$ de bir meromorf fonksiyondur.

Bir analitik fonksiyonun tanım bölgesini daha büyük bir bölgeye genişletme işlemi çoğunlukla analitik devam olarak bilinmektedir. Analitik devam, bir D bölgesinde analitik bir f fonksiyonunun hangi şartlarda daha geniş bir bölgede analitik olan F fonksiyonuyla ifade edilebileceğini gösterir. Bu ise aşağıda verilmiştir.

Tanım 2.2.9 (Analitik devam): B ve D , kompleks düzlemde iki bölge ve $B \subset D$ olsun. Ayrıca f fonksiyonu B bölgesinde, F fonksiyonu ise D bölgesinde analitik ve her $z \in B$ için $f(z) = F(z)$ olsun. Bu durumda F fonksiyonuna f nin D bölgesine analitik devamı denir. Bir fonksiyonun analitik devamı, eğer varsa tektir.

Örnek 2.2.10: $|z| < 1$ için $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ serisi, $F(z) = \frac{1}{1-z}$ fonksiyonuna yakınsar.

$F(z)$ fonksiyonu $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ de analitiktir ve $|z| < 1$ diskinde $f(z) = F(z)$ dir. Bu durumda $F(z)$ fonksiyonu, $f(z)$ fonksiyonunun $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ bölgesine analitik devamıdır.

Teorem 2.2.11 (Maksimum Prensibi): f , $B \subset \mathbb{C}$ bölgesinde sabit olmayan analitik bir fonksiyon olsun. Bu durumda $|f(z)|$, B bölgesinde maksimum değer alamaz (Ponnusamy and Silverman 2006).

Sonuç 2.2.12: B sınırlı bir bölge ve sabit olmayan f fonksiyonunda bu bölgenin sınırında sürekli ve içinde analitik olsun. Bu durumda $|f(z)|$, maksimum değerini B bölgesinin sınırında alır (Ponnusamy and Silverman 2006).

Maksimum prensibinin önemli sonuçlarından birisi Schwarz lemmasıdır.

Lemma 2.2.13 (Schwarz lemması): f fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskinde analitik ve $f(0) = 0$ olsun. Eğer $\mathbb{U}$ birim diskinde $|f(z)| \leq 1$ ise bu durumda $|f'(0)| \leq 1$ ve

$|f(z)| \leq |z|$ dır. Eşitlik sadece $\theta \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(z) = e^{i\theta} z$ fonksiyonu için sağlanır. (Ponnusamy and Silverman 2006).

Lemma 2.2.14 (Genelleştirilmiş Schwarz lemması): f , $\mathbb{U}_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ diskinde analitik ve M bir sabit olmak üzere $|f(z)| < M$ olsun. Eğer f , $z=0$ için m den daha büyük mertebeden (katlıkları dahil) bir tek sifıra sahipse bu durumda

$$|f(z)| \leq \frac{M}{R^m} |z|^m, \quad (z \in \mathbb{U}_R)$$

eşitsizliği gerçekleşir. Eşitlik sadece $\theta \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(z) = e^{i\theta} (M/R^m) z^m$ fonksiyonu için sağlanır (Ponnusamy and Silverman 2006).

Tanım 2.2.15 (Ünivalent fonksiyon): f , $B \subset \mathbb{C}$ bölgesinde tanımlı bir fonksiyon olsun. Her $z_1, z_2 \in B$ için $f(z_1) = f(z_2)$ olması sadece $z_1 = z_2$ olmasını gerektiriyorsa (veya $z_1 \neq z_2$ olduğunda $f(z_1) \neq f(z_2)$ gerçekleşiyorsa) f fonksiyonuna B bölgesinde ünivalent (yalnıkat veya schlicht) fonksiyon denir (Duren 1983).

Eğer f , z_0 noktasının bir komşuluğunda ünivalent ise f ye yerel ünivalent fonksiyon denir.

Teorem 2.2.16: Analitik bir f fonksiyonunun z_0 noktasında yerel ünivalent olması için gerekli ve yeterli şart $f'(z_0) \neq 0$ olmasıdır (Duren 1983).

Ayrıca $f'(z_0) \neq 0$ şartı, $f(z)$ fonksiyonunun ünivalentliği için gerekli fakat yeterli değildir. Yani f analitik fonksiyonu ünivalent ise $f'(z_0) \neq 0$ olur. Bu ifadenin tersi her zaman doğru değildir. Bir kümede yerel ünivalent olan analitik fonksiyonların, bu kümede ünivalent olması gerekmez.

Örnek 2.2.17: (i) $f(z) = z^2$ fonksiyonu $B = \{z : 0 < |z| < 1, 0 \leq \arg z < 2\pi\}$ bölgesinde yerel ünivalent olmasına rağmen ünivalent değildir. Gerçekten $f(z) = z^2$ fonksiyonu, B bölgesinde analitik ve her $z_0 \in B$ için $f'(z_0) \neq 0$ sağlandığından yerel ünivalenttir. Fakat

$$f\left(\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\right) = f\left(-\frac{1}{2} - i\frac{1}{2}\right) = i\frac{1}{2}$$

olduğundan $f(z) = z^2$ fonksiyonu B bölgesinde ünivalent değildir. Eğer $C = \{z \in \mathbb{C} : (\operatorname{Re}\{z\} - 1)^2 + \operatorname{Im}\{z\}^2 < 1/4\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 < 1/4\}$ bölgesi alınırsa $f(z) = z^2$ fonksiyonu C bölgesinde ünivalent ve dolayısıyla yerel ünivalent olur.

(ii) $f(z) = e^{kz}$ fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskinde $|k| > \pi$ için yerel ünivalent fakat ünivalent değildir. Gerçekten $f(z) = e^{kz}$ fonksiyonu, $\mathbb{U}$ da analitik ve $|k| > \pi$ olmak üzere her $z_0 \in \mathbb{U}$ için $f'(z) = ke^{kz} \neq 0$ olduğundan yerel ünivalenttir. Fakat $k = 2\pi$ için

$$f\left(\frac{1}{2}i\right) = f\left(-\frac{1}{2}i\right) = -1$$

olduğundan $f(z) = e^{kz}$ fonksiyonu $\mathbb{U}$ diskinde ünivalent değildir.

Eğer $B \subset \mathbb{C}$ bölgesinde f analitik fonksiyonu yerel ünivalent ise, bu durumda $z \in B$ noktasında $f'(z)$ türevi, f nin yerel geometrik davranışını belirler. $|f'(z)|$ ve $\arg f'(z)$ değerleri sırasıyla yerel büyüme (uzunluklar için) ve yerel dönme etkenleridir. Buna ilaveten, $f : B \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analitik dönüşümünün Jacobian determinanı $Jf(z) = |f'(z)|^2$ ile verilmektedir. Jacobian determinantının $|f'(z)|^2$ ifadesine eşit olduğu, Cauchy-Riemann denklemlerinden kolayca görülür. Böylece Teorem 2.2.16 dan analitik fonksiyonlar için Jacobian determinantının sıfırdan farklı olması, yerel ünivalentlik için gerek ve yeter şarttır.

Tanım 2.2.18 (Konform dönüşüm): Eğer bir dönüşüm, belli bir z_0 noktasından geçen iki düzgün eğri arasındaki açının büyüklüğünü ve yönünü koruyorsa, bu dönüşüme z_0 noktasında konformdur denir. Eğer bir f fonksiyonu, bir $B \subset \mathbb{C}$ bölgesinin tüm noktalarında konform ise, f fonksiyonu B bölgesinde konformdur denir.

Teorem 2.2.19: f fonksiyonunun analitik olduğu her z noktasında $f'(z) \neq 0$ şartı sağlanıyorsa, f fonksiyonu konformdur (Duren 1983).

Dolayısıyla bir bölgede analitik ve ünivalent bir fonksiyon konformdur. En önemli konform dönüşümlerden biri Möbius dönüşümüdür. Bu dönüşüm; a, b, c, d kompleks sabitler olmak üzere

$$w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad-bc \neq 0$$

genişletilmiş kompleks düzlemi $(\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\})$ kendi üzerine konform olarak resmeder.

z -düzlemindeki $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ ($\mathcal{D} \neq \mathbb{C}$) bölgesini, w -düzlemindeki $\mathcal{D}_1$ bölgesi üzerine resmeden f analitik fonksiyonunun varlığı ilk olarak 1851 yılında Riemann tarafından aşağıdaki teoremle verilmiştir.

Teorem 2.2.20 (Riemann Dönüşüm Teoremi): Kompleks düzlemin her $\mathcal{D} \subsetneq \mathbb{C}$ basit bağlantılı bölgesi konform olarak $\mathbb{U}$ birim diski üzerine resmedilir. Ayrıca, $z_0 \in \mathcal{D}$ olmak üzere $f(z_0) = 0$ ve $f'(z_0) > 0$ şartlarını sağlayan ve $\mathcal{D}$ yi $\mathbb{U}$ birim diski üzerine resmeden bir tek konform dönüşüm vardır (Duren 1983).

2.3. Normalize Edilmiş Ünivalent Fonksiyonlar

Analitik olarak, bir ünivalent fonksiyon sıfırdan farklı türeve sahip iken; geometrik olarak da basit eğrileri basit eğrilere dönüştürür. Hem analitik hem de ünivalent

fonksiyon ise basit bağlantılı bölgeleri basit bağlantılı bölgelere dönüştürür. Riemann dönüşüm teoremine göre, $\mathbb{C}$ den farklı herhangi iki basit bağlantılı bölge konform olarak denk olduğundan keyfi bölgelerde tanımlı f analitik fonksiyonu yerine $\mathbb{U}$ da tanımlı analitik fonksiyonlarla işlem yapılacaktır. $f(0)=0$, $f'(0)=1$ şartlarını sağlayan

$$f(z) = z + \sum_{n \geq 2} a_n z^n, \quad (z \in \mathbb{U}) \quad (2.2)$$

biçimindeki fonksiyona normalize edilmiş analitik fonksiyon denir. Bu türdeki fonksiyonların oluşturduğu sınıf $\mathcal{A}$ ile gösterilir. $\mathcal{A}$ sınıfına ait olup da ünivalent olan fonksiyonların sınıfı ise $\mathcal{S}$ ile gösterilir.

$\mathcal{S}$ sınıfına ait bazı fonksiyon örnekleri aşağıda verilmiştir:

(i) $w = f(z) = \frac{z}{1-z} = z + z^2 + z^3 + \dots$ fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskini $\{w = u + iv : \operatorname{Re}\{w\} > -1/2\}$ kümesine resmeder.

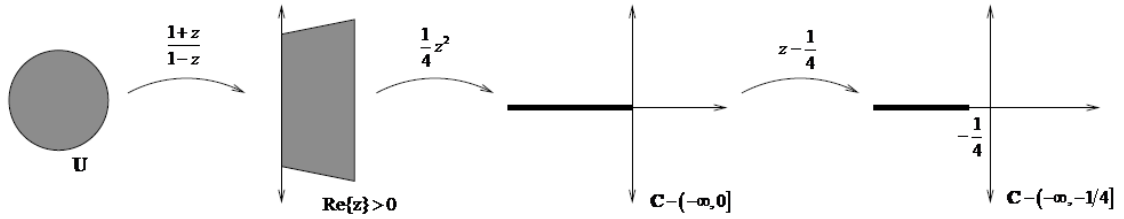
(ii) $g(z) = \frac{z}{1-z^2} = z + z^3 + z^5 + \dots$ fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskini $\mathbb{C} - \{(-\infty, -1/2] \cup (1/2, \infty)\}$ bölgesi üzerine resmeder.

(iii) $f(z) = \frac{1}{2} L \log \left(\frac{1+z}{1-z} \right)$ fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskini $\left\{ \frac{-\pi}{4} < \operatorname{Im}(z) < \frac{\pi}{4} \right\}$ sonsuz şeridi üzerine resmeder.

Çalışmanın tümünde $\operatorname{Log}(z)$ için logaritmanın esas dalı kullanılmıştır. Yani $\operatorname{Log}(z) = \ln|z| + i\theta$ olup $\theta \in (-\pi, \pi]$ dir.

(iv) $k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + 3z^3 + \dots$ Koebe fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskini $\mathbb{C} - (-\infty, -1/4]$ kümesi üzerine resmeder. Bunu göstermek için

$k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = \frac{1}{4} \left(\frac{1+z}{1-z} \right)^2 - \frac{1}{4}$ biçiminde yazalım. $\frac{1+z}{1-z}$ nin $\mathbb{U}$ birim diskini sağ yarı düzlem üzerine konform olarak resmettiği göz önünde tutularak



Şekil 2.1. Koebe fonksiyonu altında birim diskin görüntüsü

biçiminde geometrik olarak gösterilebilir.

Ayrıca şunu da belirtelim ki, $\mathcal{S}$ sınıfına ait iki fonksiyonun toplamı $\mathcal{S}$ sınıfına ait olmayabilir.

Örneğin;

$$f_1(z) = \frac{z}{1-z} \text{ ve } f_2(z) = \frac{z}{1+iz}$$

fonksiyonları $\mathcal{S}$ sınıfına ait olmasına rağmen

$$f_1'(z) = \frac{1}{(1-z)^2} \text{ ve } f_2'(z) = \frac{1}{(1+iz)^2}$$

türevlerinden

$$f_1'(z) + f_2'(z) = \frac{2 - 2(1-i)z}{(1-z)^2(1+iz)^2}$$

elde edilir. Buradan $z = \frac{1+i}{2} \in \mathbb{U}$ noktasında $f_1'(z) + f_2'(z) = 0$ olduğu görülür.

Dolayısıyla $f_1(z) + f_2(z) \notin \mathcal{S}$ dir. Bununla beraber $\mathcal{S}$ sınıfındaki birçok özellik bazı dönüşümler altında korunur.

Teorem 2.3.1: $f \in \mathcal{S}$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur (Duren 1983):

(i) Eşlenik alma: $g(z) = \overline{f(\bar{z})} = z + \bar{a}_2 z^2 + \dots$ ise, $g \in \mathcal{S}$ dir.

(ii) Döndürme (Rotasyon): $\theta \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$g(z) = e^{-i\theta} f(e^{i\theta} z) = z + \sum_{n \geq 2} a_n e^{i(n-1)\theta} z^n, \quad (z \in \mathbb{U})$$

fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfına aittir.

(iii) Genişleme (Dilation): $0 < r < 1$ olmak üzere

$$g(z) = r^{-1} f(rz) = z + \sum_{n \geq 2} a_n r^{n-1} z^n, \quad (z \in \mathbb{U})$$

fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfına aittir.

(iv) Disk otomorfizmi (Koebe veya Bieberbach dönüşümü): $z_0 \in \mathbb{U}$ olmak üzere

$$g(z) = \frac{f\left(\frac{z+z_0}{1+\bar{z}_0 z}\right) - f(z_0)}{(1-|z_0|^2)f'(z_0)}, \quad (z \in \mathbb{U})$$

fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfına aittir.

(v) Değer bölgesi dönüşümü (Range transformation): ψ fonksiyonu $f(\mathbb{U})$ da ünivalent ve $\psi(0) = 0$, $\psi'(0) = 1$ şartını gerçekleyen bir fonksiyon ise $\psi \circ f \in \mathcal{S}$ dir.

(vi) Çıkarılmış değer dönüşümü (Omitted-value transformation): $w \notin f(\mathbb{U})$ olsun. Bu durumda

$$g(z) = \frac{f(z)}{1 - f(z)/w}, \quad (z \in \mathbb{U})$$

fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfına aittir.

(vii) n . kök dönüşümü: Eğer $n = 2, 3, \dots$ ise

$$g(z) = \sqrt[n]{f(z^n)} = z + \frac{a_2}{n} z^{n+1} + \frac{1}{2n^2} (2na_3 - (n-1)a_2^2) z^{2n+1} + \dots, \quad (z \in \mathbb{U})$$

fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfına aittir.

$\mathcal{S}$ sınıfından olmayıp fakat geometrik fonksiyonlar teorisinde bir takım problemlerin çözümünde önemli rol oynayan fonksiyonlar da mevcuttur. Aşağıda bunların birkaçından bahsedilmiştir.

Tanım 2.3.2: $\mathbb{U}$ da $p(0)=1$, $\operatorname{Re} p(z) > 0$ şartlarını sağlayan $p(z) = 1 + \sum_{n \geq 1} c_n z^n$ şeklindeki fonksiyonların oluşturduğu sınıfa Caratheodory sınıfı veya $\mathcal{P}$ sınıfı denir (Duren 1983).

$z \in \mathbb{U}$ olmak üzere $p(z) = (1+z)/(1-z)$ fonksiyonu $\mathcal{P}$ sınıfına ait olup, bu fonksiyon $\mathbb{U}$ birim diskini sağ yarı düzlem üzerine resmeden bir konform dönüşümdür. $\mathcal{P}$ sınıfına ait bir fonksiyonun ünivalent olması gerekmez. Örneğin; $f(z) = 1 + z^n$ fonksiyonu $\mathcal{P}$ sınıfına ait olmasına rağmen $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ için ünivalent değildir.

Tanım 2.3.3: $\mathbb{U}$ birim diskinde $\phi(0)=0$ ve $|\phi(z)| < 1$ şartlarını sağlayan analitik fonksiyonların oluşturduğu sınıfa Schwarz fonksiyonlarının sınıfı denir ve Ω ile gösterilir (Graham and Kohr 2003).

Bunların yanı sıra, $\mathcal{P}$ sınıfı ile Schwarz fonksiyonları arasında aşağıda olduğu gibi önemli bir bağ vardır:

$$p(z) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow p(z) = \frac{1+\phi(z)}{1-\phi(z)}, \quad \phi(z) \in \Omega.$$

$\mathcal{P}$ sınıfı ile ilişkili olan, $\mathcal{S}$ nin önemli alt sınıfları aşağıda verilmiştir.

Tanım 2.3.4: $B \subset \mathbb{C}$ kümesi verilsin. B kümesindeki sabit bir w_0 noktasını her $w \in B$ noktasına birleştiren doğru parçası tamamen B kümesinde kalıyorsa, B ye w_0 noktasına göre yıldızıl küme denir. w_0 noktası özel olarak orijin seçilirse, bu kümeye orijine göre yıldızıl küme veya kısaca yıldızıl küme adı verilir. Eğer bir f fonksiyonu,

$\mathbb{U}$ birim diskini $f(z_0) = w_0$ noktasına göre bir yıldızıl kümeye resmediyorsa, f fonksiyonuna z_0 noktasına göre yıldızıl fonksiyon denir. f fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskini orijine göre yıldızıl bir kümeye resmediyorsa, f fonksiyonuna kısaca yıldızıl fonksiyon denir. Normalize edilmiş yıldızıl fonksiyonların sınıfı $\mathcal{S}^*$ ile gösterilir (Graham and Kohr 2003).

Yıldızıl fonksiyonların yukarıdaki geometrik tanımını analitik olarak ifade eden teorem aşağıdaki gibidir.

Teorem 2.3.5: $f \in \mathcal{A}$ olmak üzere

$$f \in \mathcal{S}^* \Leftrightarrow \frac{zf'(z)}{f(z)} \in \mathcal{P}$$

olur. $\forall f \in \mathcal{S}^*$ için $|a_n| \leq n$ eşitsizliği yazılır. Burada $(n = 2, 3, \dots)$ şeklindedir (Pommerenke 1975).

Lemma 2.3.6: $\varphi \in \mathcal{S}^*$ olsun. Bu durumda z_0 , $\mathbb{U}$ diskinde sabit bir nokta olmak üzere

$$\psi(z) = \frac{zz_0\varphi\left(\frac{z+z_0}{1+z\bar{z}_0}\right)}{\varphi(z_0)(z+z_0)(1+z\bar{z}_0)}$$

biçiminde tanımlanan ψ fonksiyonu da $\mathcal{S}^*$ sınıfındadır. (Libera and Ziegler 1972).

Örneğin; $k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} \in \mathcal{S}^*$ dir.

Tanım 2.3.7: $B \subset \mathbb{C}$ kümesi verilsin. Her $w_1, w_2 \in B$ için w_1 noktasını w_2 noktasına birleştiren doğru parçası tamamen B içinde kalıyorsa (başka bir ifadeyle B , her noktasına göre yıldızıl ise) B ye konveks küme denir. Eğer bir f fonksiyonu, $\mathbb{U}$ birim diskini konveks bir kümeye resmediyorsa f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir. Normalize edilmiş konveks fonksiyonların sınıfı $\mathcal{C}$ ile gösterilir (Duren 1983).

Konveks fonksiyonları analitik olarak ifade eden teorem aşağıda verilmiştir.

Teorem 2.3.8: $f \in \mathcal{A}$ olmak üzere

$$f \in \mathcal{C} \Leftrightarrow 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \in \mathcal{P}$$

dir. $\forall f \in \mathcal{C}$ için $|a_n| \leq 1$ eşitsizliği yazılır. Burada $(n = 2, 3, \dots)$ şeklindedir (Pommerenke 1975).

Konveks ve yıldızlı fonksiyonlar arasında $f \in \mathcal{C} \Leftrightarrow zf' \in \mathcal{S}^*$ biçiminde bir bağıntı mevcuttur. Bu bağıntı Alexander (1915) tarafından bir teorem olarak ifade edilmiştir.

Alexander teoremi ve Lemma 2.3.6 kullanılarak aşağıdaki yardımcı teorem ifade edilebilir.

Lemma 2.3.9: $\varphi_* \in \mathcal{C}$ olsun. $z_0, \mathbb{U}$ da sabit bir nokta olmak üzere

$$\psi'_*(z) = \frac{\varphi'_*\left(\frac{z+z_0}{1+\overline{z}z_0}\right)}{\varphi'_*(z_0)(1+\overline{z}z_0)^2}$$

biçiminde tanımlanan ψ_* fonksiyonu da $\mathcal{C}$ sınıfındadır (Libera and Ziegler 1972).

Örneğin; $f(z) = \frac{1}{2} \text{Log} \left(\frac{1+z}{1-z} \right) \in \mathcal{C}$ dir. Bu tür örnekleri çoğaltmak mümkündür.

Teorem 2.3.10: f , konveks bir D bölgesinde bir analitik fonksiyon olsun. Eğer her $z \in D$ ve bazı $\gamma \in \mathbb{R}$ için

$$\text{Re} \left(e^{i\gamma} f'(z) \right) > 0$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, f , D de ünivalenttir (Alexander 1915; Noshiro 1934-1935; Warschawski 1935).

Teorem 2.3.10 un önemli sonuçlarından biri, $\mathcal{S}$ sınıfının

$$\mathcal{R} = \{f \in \mathcal{A} : \operatorname{Re}(f'(z)) > 0, z \in \mathbb{U}\} \quad (2.3)$$

biçiminde tanımlanan yeni bir alt sınıfının ortaya çıkmasıdır. Bu sınıf üzerine ilk sistematik çalışma, MacGregor (1962) tarafından yapılmıştır.

Alexander-Noshiro-Warschawski ünivalentlik kriterinin bir genelleştirilmesi, Ozaki ve Kaplan tarafından aşağıdaki teoremle verilmiştir.

Teorem 2.3.11: f fonksiyonu bir $D \subset \mathbb{C}$ bölgesinde analitik olsun. $g(D)$ konveks olacak şekilde $\forall z \in D$ için

$$\operatorname{Re} \left[\frac{f'(z)}{g'(z)} \right] > 0$$

şartını sağlayan, D de analitik ve ünivalent bir g fonksiyonunun varlığını kabul edelim. Bu takdirde f fonksiyonu D de ünivalenttir (Ozaki 1935; Kaplan 1952).

Teorem 2.3.11 de $\phi(z) = z$ alınırsa, Teorem 2.3.10 un $\gamma = 0$ için olan özel durumu elde edilir.

Tanım 2.3.12: $f : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{C}$ analitik bir fonksiyon olsun. Her $z \in \mathbb{U}$ için

$$\operatorname{Re} \left[\frac{f'(z)}{g'(z)} \right] > 0$$

eşitsizliği sağlanacak biçimde $\mathbb{U}$ da konveks bir g fonksiyonu varsa veya (Alexander gerektirmesi kullanılarak)

$$\operatorname{Re} \left[\frac{zf'(z)}{h(z)} \right] > 0$$

olacak şekilde $\mathbb{U}$ da yıldızlı bir h fonksiyonu varsa f ye $\mathbb{U}$ da konvekse yakın fonksiyon (ya da sadece *konvekse yakın*) denir. Normalize edilmiş konvekse yakın fonksiyonların sınıfı $\mathcal{K}$ ile gösterilir (Graham and Kohr 2003).

Örneğin; $f(z) = \frac{z - z^2/2}{(1-z)^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{z}{1-z} + \frac{z}{(1-z)^2} \right)$ fonksiyonu konvekse yakın olmasına

rağmen yıldızıl değildir. Gerçekten, $g(z) = \frac{z}{1-z}$ konveks fonksiyonu için

$\operatorname{Re} \left[\frac{f'(z)}{g'(z)} \right] = \operatorname{Re} \left[\frac{1}{1-z} \right] > 0$ olduğundan f , $\mathbb{U}$ da konvekse yakındır. Ancak

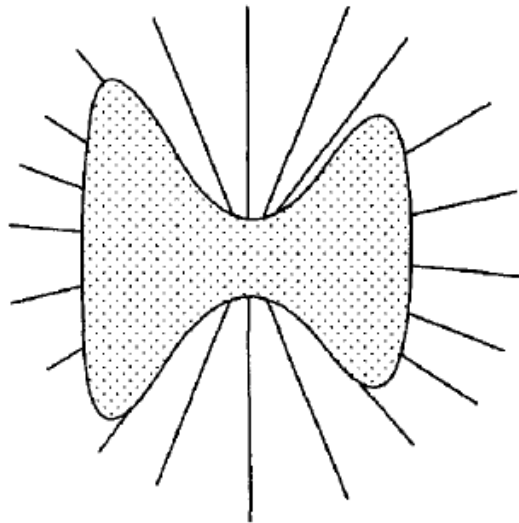
$\operatorname{Re} \left[\frac{zf'(z)}{f(z)} \right] = \operatorname{Re} \left[\frac{2}{(1-z)(2-z)} \right]$ olup bu ifade, $z = 0,7 + 0,7i$ için sıfırdan küçüktür. Bu

da f nin $\mathbb{U}$ da yıldızıl olmadığını gösterir.

Lewandowski (1958, 1960) konvekse yakın fonksiyonları geometrik olarak aşağıdaki teoremle vermiştir.

Teorem 2.3.13: f fonksiyonu bir $D \subset \mathbb{C}$ bölgesinde analitik ve ünivalent olsun. Bu durumda f nin konvekse yakın olması için gerek ve yeter şart $\mathbb{C} \setminus f(D)$ bölgesinin, başlangıç noktaları hariç ayrık kapalı yarı doğruların birleşiminden oluşmasıdır.

Bu durum aşağıdaki şekilde ifade edilmiştir.



Şekil 2.2. Konvekse yakın bölge

Her konveks fonksiyon yıldızıldır, her yıldızıl fonksiyon konvekse yakındır ve her konvekse yakın fonksiyon ise ünivalenttir. Dolayısıyla bu fonksiyon sınıfları arasında $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}^* \subset \mathcal{K} \subset \mathcal{S}$ biçiminde bir kapsama bağıntısı vardır.

Tanım 2.3.14: $f : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{C}$ analitik bir fonksiyon ve $0 \leq \alpha < 1$ olsun.

i) Her $z \in \mathbb{U}$ için $f(0) = 0$, $f'(0) \neq 0$ ve

$$\operatorname{Re} \left[\frac{zf'(z)}{f(z)} \right] > \alpha$$

ise f ye α mertebeden yıldızıl fonksiyon denir.

ii) Her $z \in \mathbb{U}$ için $f'(0) \neq 0$ ve

$$\operatorname{Re} \left[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right] > \alpha$$

ise f ye α mertebeden konveks fonksiyon denir. Normalize edilmiş α mertebeden yıldızıl fonksiyonların sınıfı $\mathcal{S}^*(\alpha)$ ile, normalize edilmiş α mertebeden konveks fonksiyonların sınıfı $\mathcal{C}(\alpha)$ ile gösterilir. Bu sınıflar arasında $f \in \mathcal{C}(\alpha) \Leftrightarrow zf' \in \mathcal{S}^*(\alpha)$ Alexander tipi bir gerektirme vardır.

iii) Her $z \in \mathbb{U}$ için $f'(0) \neq 0$ ve

$$\operatorname{Re} \left(\frac{f'(z)}{g'(z)} \right) > \alpha$$

olacak biçimde $\mathbb{U}$ da konveks bir g fonksiyonu varsa f ye α mertebeden konvekse yakın fonksiyon (veya g ye göre α mertebeden konvekse yakın fonksiyon) denir. Normalize edilmiş α mertebeden konvekse yakın fonksiyonların sınıfı $\mathcal{K}(\alpha)$ ile gösterilir (Graham and Kohr 2003; Baricz 2008b).

Ünivalent fonksiyonlar teorisinde önemli olan ve yukarıda tanımlarını verdiğimiz temel sınıfların küme gösterimleri aşağıdaki şekilde sıralanabilir:

$$\mathcal{A} = \left\{ f : f(z) = z + \sum_{n \geq 2} a_n z^n \text{ ve } f(z), \mathbb{U} \text{ da analitik} \right\},$$

$$\mathcal{S} = \{f \in \mathcal{A} : f(z), \mathbb{U} \text{ da ünivalent (yalıncat) ve } f(0) = 0, f'(0) = 1\},$$

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^* &= \{f \in \mathcal{A} : f(z), \mathbb{U} \text{ da yıldızlı}\} \\ &= \left\{ f \in \mathcal{A} : \forall z \in \mathbb{U} \text{ için } \operatorname{Re} \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right) > 0 \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \{f \in \mathcal{A} : f(z), \mathbb{U} \text{ da konveks}\} \\ &= \left\{ f \in \mathcal{A} : \forall z \in \mathbb{U} \text{ için } \operatorname{Re} \left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) > 0 \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= \{f \in \mathcal{A} : f(z), \mathbb{U} \text{ da konvekse yakın}\} \\ &= \left\{ f \in \mathcal{A} : \forall z \in \mathbb{U} \text{ için } \operatorname{Re} \left(\frac{f'(z)}{g'(z)} \right) > 0 \text{ olacak şekilde } g \in \mathcal{C} \text{ vardır} \right\}, \end{aligned}$$

$\alpha \in [0,1)$ olmak üzere:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^*(\alpha) &= \{f \in \mathcal{A} : f(z), \mathbb{U} \text{ da } \alpha \text{ mertebeden yıldızlı}\} \\ &= \left\{ f \in \mathcal{A} : \forall z \in \mathbb{U} \text{ için } \operatorname{Re} \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right) > \alpha \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(\alpha) &= \{f \in \mathcal{A} : f(z), \mathbb{U} \text{ da } \alpha \text{ mertebeden konveks}\} \\ &= \left\{ f \in \mathcal{A} : \forall z \in \mathbb{U} \text{ için } \operatorname{Re} \left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) > \alpha \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(\alpha) &= \{f \in \mathcal{A} : f(z), \mathbb{U} \text{ da } \alpha \text{ mertebeden konvekse yakın}\} \\ &= \left\{ f \in \mathcal{A} : \forall z \in \mathbb{U} \text{ için } \operatorname{Re} \left(\frac{f'(z)}{g'(z)} \right) > \alpha \text{ olacak şekilde } g \in \mathcal{C} \text{ vardır} \right\}. \end{aligned}$$

Ayrıca her $z \in \mathbb{U}$ için $\left| \frac{zf'(z)}{f(z)} - 1 \right| < 1 - \alpha$ şartını sağlayan fonksiyonların sınıfını $\mathcal{S}_1^*(\alpha)$

ile göstereceğiz. Bu sınıf $\mathcal{S}^*(\alpha)$ sınıfının alt sınıfıdır ve $zf' \in \mathcal{S}_1^*(\alpha)$ ise f fonksiyonu $\mathcal{C}_1(\alpha)$ sınıfındandır diyeceğiz. $\mathcal{S}_1^*(\alpha)$ sınıfının katsayı sınırları ve diğer özellikler için Eenigenburg (1972) ve Silverman (1978) tarafından yapılan çalışmalara bakılabilir.

Geometrik fonksiyonlar teorisinde önemli bir yeri olan Hadamard çarpımını tanımlayalım.

Tanım 2.3.15: $f, g \in \mathcal{A}$ fonksiyonları

$$f(z) = z + \sum_{n \geq 2} a_n z^n \text{ ve } g(z) = z + \sum_{n \geq 2} b_n z^n$$

şeklinde verilsin. f ve g fonksiyonlarının Hadamard çarpımı (ya da konvülasyonu)

$$(f * g)(z) = z + \sum_{n \geq 2} a_n b_n z^n = (g * f)(z)$$

şeklinde tanımlanır. Burada "*" Hadamard çarpımını gösterir (Duren 1983).

Bu çarpım altında analitik fonksiyonların bir takım özellikleri korunabilmektedir.

Örneğin;

- (i) $f, g \in \mathcal{K} \Rightarrow f * g \in \mathcal{K}$ dir,
- (ii) $f \in \mathcal{K}$ ve $g \in \mathcal{C} \Rightarrow f * g \in \mathcal{C}$ dir,
- (iii) $f \in \mathcal{K}$ ve $g \in \mathcal{S}^* \Rightarrow f * g \in \mathcal{S}^*$ dir.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu başlık altında tezin temel kısmının oluşturulmasında kullanılacak tanım ve teoremlerin yanı sıra konunun anlaşılmasını kolaylaştıracak örnekler verilmiştir.

Bu bölüme hipergeometrik fonksiyonlar başta olmak üzere özel fonksiyonlar içerisinde çok önemli bir yere sahip olan Gama fonksiyonu ile başlayalım.

3.1. Gama Fonksiyonu

Tanım 3.1.1: $\text{Re } z > 0$ olmak üzere

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad (3.1)$$

fonksiyonuna gama fonksiyonu denir. Bu tanımda geçen integral ikinci tür Euler integrali olarak bilinmektedir.

Tanım 3.1.1, analitik devam vasıtasıyla $\text{Re } z < 0$ için aşağıdaki biçimde genişletilebilir.

(3.1) ile verilen fonksiyon

$$\Gamma(z) = \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt + \int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad (3.2)$$

biçiminde iki integralin toplamı olarak yazılabilir. Bu integraller ayrı ayrı

$P(z) = \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt$ ve $Q(z) = \int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$ şeklinde iki fonksiyon olarak göz önüne alınırsa

$P(z)$ fonksiyonu $\text{Re } z > 0$ yarı düzleminde analitik ve $Q(z)$ nin ise tam fonksiyon olduğu görülür. Dolayısıyla $\Gamma(z) = P(z) + Q(z)$ fonksiyonu $\text{Re } z > 0$ yarı düzleminde analitik olur.

$P(z)$ fonksiyonundaki e^{-t} ifadesi kuvvet serisine açılırsa,

$$P(z) = \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt = \int_0^1 t^{z-1} dt \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k!} t^k \quad (3.3)$$

elde edilir. Burada

$$\int_0^1 |t^{z-1}| dt \sum_{k \geq 0} \left| \frac{(-1)^k}{k!} t^k \right| = \int_0^1 t^{x-1} dt \sum_{k \geq 0} \frac{t^k}{k!} = \int_0^1 e^t t^{x-1} dt < \infty$$

olup bu da bu integralin yakınsak olduğunu gösterir. Böylece (3.3) ifadesi terim terime integrallenirse

$$\begin{aligned} P(z) &= \int_0^1 t^{z-1} dt \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k!} t^k = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^1 t^{k+z-1} dt \\ &= \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{z+k} \end{aligned} \quad (3.4)$$

bulunur. Bu durumda (3.4) serisinin $z = 0, -1, -2, \dots$ noktalarında basit kutba sahip ve $\operatorname{Re} z > 0$ için $P(z)$ integrali ile aynı olduğu görülür. Dolayısıyla (3.4) serisi $P(z)$ nin analitik devamıdır. $Q(z)$ fonksiyonu tam fonksiyon olduğundan $\Gamma(z)$ fonksiyonu $z = 0, -1, -2, \dots$ noktalarında basit kutba sahip olan meromorf bir fonksiyon olur.

$\Gamma(z)$ nin tüm kompleks düzlem için tanımı

$$\Gamma(z) = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{z+k} + \int_1^\infty e^{-t} t^{z-1} dt, \quad z \neq 0, -1, -2, \dots$$

biçiminde verilebilir.

Gama fonksiyonu ile ilgili bazı özellikler,

- $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$,
- $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$, $z \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$,
- $2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma(z+1/2) = \sqrt{\pi}\Gamma(2z)$

şeklinde sıralanabilir. Ayrıca $n = 0, 1, 2, \dots$ için

- $\Gamma(n+1) = n!$

eşitliği ve $n = 1, 2, \dots$ için

$$\bullet \quad \Gamma(n+1/2) = \frac{1.3.5...(2n-1)}{2^n} \sqrt{\pi}$$

eşitliği vardır. $z = 1/2$ özel değeri için

$$\Gamma(1/2) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{-1/2} dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$$

elde edilir. Elbette gama fonksiyonunun özellikleri bunlarla sınırlı değildir. Ancak tezde kullanılan özelliklerinden bahsedilmiştir.

Tanım 3.1.2 (Pochhammer (Apell) sembolü): Γ , gama fonksiyonunu göstermek üzere $n \in \mathbb{N}_0$, $a \in \mathbb{C}$ ve $a \neq 0, -1, -2, \dots$ olması durumunda

$$(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ a(a+1)\dots(a+n-1), & n \neq 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Eğer a ve $a+n$ negatif tamsayı ise $(a)_n = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Gamma(a+n+t)}{\Gamma(a+t)}$ formülü geçerlidir.

Pochhammer sembolü için $(a)_{n+1} = (a+n)(a)_n$ eşitliği her zaman sağlanır.

3.2. Hipergeometrik Fonksiyonlar

Matematikteki elementer fonksiyonların birçoğu hipergeometrik fonksiyonlardan ya da hipergeometrik fonksiyonların birbirine oranından elde edilebilir. c_{n+1}/c_n , oranı n nin bir rasyonel fonksiyonu ise, $\sum c_n$ ifadesi bir hipergeometrik seri belirtir. Ayrıca matematik ve fizikteki elementer olmayan fonksiyonların çoğu da yine hipergeometrik seri olarak ifade edilebilmektedir. Bu bölüm, hipergeometrik fonksiyon ve genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonlara ayrılmıştır.

Tanım 3.2.1: $a, b, c \in \mathbb{C}$, $c \neq 0, -1, -2, \dots$ ve $(a)_n$, Pochhammer sembolü olmak üzere

$$F(a, b; c; z) = {}_2F_1(a, b; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!}, \quad |z| < 1 \quad (3.5)$$

fonksiyonu $z(1-z)w''(z) + (c - (a+b+1)z)w'(z) - abw(z) = 0$ ikinci mertebeden hipergeometrik diferansiyel denkleminin bir özel çözümü olup bu fonksiyona Gauss hipergeometrik fonksiyonu adı verilir.

Bu fonksiyon, L.Euler tarafından yaklaşık iki asır önce çalışılmıştır. Daha sonra C.F. Gauss'un bu seri üzerinde yeniden çalışmaya başlaması bu fonksiyona olan ilgiyi arttırmıştır.

a, b değişkenlerinin negatif tamsayı ya da sıfır olması durumunda yukarıdaki diferansiyel denklemin çözümü bir polinom olur ve dolayısıyla bu çözüm tüm düzlemde analitik olur. Diğer değerler için ise (3.5) serisi mutlak yakınsaktır.

Gauss hipergeometrik fonksiyonunun bazı özellikleri;

- $\operatorname{Re}(c-a-b) > 0$, $\operatorname{Re} c > 0$, $\operatorname{Re}(c-a) > 0$ ve $\operatorname{Re}(c-b) > 0$ olması durumunda

$$\lim_{z \rightarrow 1} F(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}$$

dir,

- $\operatorname{Re} a > 0$, $\operatorname{Re} b > 0$, $\operatorname{Re}(a+b) > 0$ ve $\operatorname{Re}(c-a-b) = 0$ ise

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{F(a, b; a+b; z)}{\operatorname{Log}(1-z)} = -\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$$

dir,

- $\operatorname{Re}(c-a-b) < 0$, $\operatorname{Re} a > 0$, $\operatorname{Re} b > 0$ ve $\operatorname{Re} c > 0$ için

$$\lim_{z \rightarrow 1} (1-z)^{a+b-c} F(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$$

biçiminde verilebilir.

Gauss hipergeometrik fonksiyonunda a, b, c nin uygun değerleri için aşağıdaki ifadeler elde edilebilir:

- $F(1, 1; 2; -z) = \frac{1}{z} \text{Log}(1+z),$
- $F(a, b; b; z) = \frac{1}{(1-z)^a},$
- $F\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}; z^2\right) = \frac{1}{2z} \text{Log}\left(\frac{1+z}{1-z}\right),$
- $F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; z^2\right) = \frac{1}{z} \arcsin z,$
- $F\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}; -z^2\right) = \arccos z,$
- $F\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}; -z^2\right) = \frac{1}{z} \arctan z.$

Ayrıca $|z| < 1$ olmak üzere aşağıda verilen ve sırasıyla $\mathcal{E}(z)$ ve $\mathcal{K}(z)$ ile gösterilen birinci ve ikinci tr Legendre eliptik integralleri de Gauss hipergeometrik fonksiyonunun birer özel durumudur.

$$\mathcal{E}(z) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-z^2 \sin^2 \theta} d\theta = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-z^2 t^2}{1-t^2}} dt = \frac{\pi}{2} F\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; z^2\right)$$

$$\mathcal{K}(z) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-z^2 \sin^2 \theta}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-z^2 t^2)}} = \frac{\pi}{2} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; z^2\right).$$

Tanım 3.2.2: $q, r \geq 1$ şartını sağlayan birer tamsayı, $a_1, a_2, \dots, a_q; b_1, b_2, \dots, b_r$ birer kompleks sayı ve her $k \in \{1, 2, \dots, r\}$ için $b_k \neq 0, -1, -2, \dots$, olmak üzere

$${}_q F_r(a_1, \dots, a_q; b_1, \dots, b_r; z) = \sum_{n \geq 0} \frac{(a_1)_n \dots (a_q)_n}{(b_1)_n \dots (b_r)_n} \frac{z^n}{n!} \quad (3.6)$$

fonksiyonuna genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonu denir.

(3.6) serisi $q < r+1$ için $\mathbb{C}$ de, $q = r+1$ için ise $|z| < 1$ de mutlak yakınsaktır. Bu seride özel olarak $q = 2$, $r = 1$, $a_1 = a$, $a_2 = b$ ve $b_1 = c$ alınırsa (3.5) serisi elde edilir ve bu durum ${}_2F_1(a, b; c; z)$ veya kısaca $F(a, b; c; z)$ ile gösterilir. Ayrıca $a_1 + a_2 + \dots + a_{r+1} = b_1 + b_2 + \dots + b_r$ olması durumunda ${}_{r+1}F_r(a_1, \dots, a_{r+1}; b_1, \dots, b_r; z)$ serisine dengelenmiş (balanced) seri denir.

${}_qF_r$ genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonu, aynı zamanda

$$\left[z \frac{d}{dz} \left[\left(z \frac{d}{dz} + b_1 - 1 \right) \dots \left(z \frac{d}{dz} + b_r - 1 \right) \right] - z \left(z \frac{d}{dz} + a_1 \right) \dots \left(z \frac{d}{dz} + a_q \right) \right] w = 0$$

diferansiyel denkleminin bir çözümüdür.

Hipergeometrik fonksiyonların Bieberbach tahmininin çözümünde önemli bir rol oynaması bu tür fonksiyonlara olan ilgiyi artırmıştır. Daha ayrıntılı bilgi için (Almkvist and Berndt 1988; Anderson *et al.* 1997; Andrews 1999) çalışmalarına bakılabilir.

Parametrelerin özel seçimiyle genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonundan elde edilen bazı fonksiyonlar,

- ${}_qF_q(a_1, \dots, a_q; a_1, \dots, a_q; z) = e^z$, $q \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$,
- ${}_1F_0(-a; z) = (1-z)^a$,
- ${}_0F_1\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}z^2\right) = \cos z$,
- $z {}_0F_1\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{4}z^2\right) = \sin z$,
- $z {}_2F_1(1, 1; 2; z) = \text{Log}(1-z)$,
- $\text{Erf}(z) = \int_0^z e^{-t^2} dt = z {}_1F_1\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -z^2\right) = ze^{-z^2} {}_1F_1\left(1; \frac{3}{2}; z^2\right)$

şeklinde sıralanabilir.

Öte yandan $a, c \in \mathbb{C}$ ve $c \neq 0, -1, -2, \dots$ olmak üzere

$${}_1F_1(a; c; z) = \Phi(a; c; z) = \sum_{n \geq 0} \frac{(a)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!}, \quad |z| < 1$$

fonksiyonuna Kummer (confluent) hipergeometrik fonksiyonu denir. Bu fonksiyon 1837 yılında Kummer tarafından tanımlanmış olup

$$zw''(z) + (c - z)w'(z) - aw = 0$$

biçimindeki Kummer diferansiyel denkleminin bir özel çözümüdür.

3.3. Bessel Fonksiyonları



Friedrich Wilhelm Bessel

Bessel fonksiyonu, hipergeometrik fonksiyonlardan elde edilen bir fonksiyon olup, ismini Alman gökbilimci ve matematikçi olan F.W. Bessel (22 Temmuz 1784 – 17 Mart 1846) den almaktadır. Bu fonksiyon her ne kadar bu isimle anılsa da ilk kez 1732 yılında D. Bernoulli tarafından tanımlanmıştır. Bernoulli sıfır mertebeden Bessel fonksiyonunu, salınım problemlerinin çözümünde kullanmıştır. L. Euler, 1764 yılında mertebesi tamsayı olan Bessel fonksiyonunu, gerilmiş zar titreşimlerinin analizinde kullanmıştır. L. Rayleigh, 1878 yılında Bessel fonksiyonlarını incelemiş ve bu fonksiyonların Laplace fonksiyonlarının özel hali olduğunu göstermiştir. Bessel, Kepler'in "aynı yerçekimi altındaki üç parçacığın hareketini hesaplama" problemi üzerindeki çalışmasının sonucunda kendi adıyla anılan Bessel fonksiyonunu elde etmiştir. 1824 yılında Bessel, "gezegenlerde karşılıklı çekim kuvvetleri sebebiyle oluşan düzensizlik" problemi üzerinde yaptığı çalışmalarda da aynı fonksiyonu kullanmıştır. Bu fonksiyonların fizikte dalga yayılımı ve statik potansiyelleri gibi birçok uygulaması vardır.

Tanım 3.3.1: p , reel ya da kompleks bir sayı ve $z \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$z^2 w''(z) + zw'(z) + (z^2 - p^2)w(z) = 0 \quad (3.7)$$

biçimindeki ikinci mertebeden homojen diferansiyel denklemin Bessel diferansiyel denklemi denir. Bu denklemin bir özel çözümü olan

$$J_p(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(p+n+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+p} \quad (3.8)$$

fonksiyonuna p mertebeden birinci tür Bessel fonksiyonu denir.

Modifiye edilmiş Bessel diferansiyel denklemi ise

$$z^2 w''(z) + zw'(z) - (z^2 + p^2)w(z) = 0 \quad (3.9)$$

biçimindedir. Bu diferansiyel denklemin bir özel çözümü, her $z \in \mathbb{C}$ için

$$I_p(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n! \Gamma(p+n+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+p} \quad (3.10)$$

şeklinde olup bu fonksiyona modifiye edilmiş Bessel fonksiyonu adı verilir.

Bunlara ek olarak

$$z^2 w''(z) + 2zw'(z) + [z^2 - p(p+1)]w(z) = 0 \quad (3.11)$$

diferansiyel denklemin küresel Bessel diferansiyel denklemi ve

$$z^2 w''(z) + 2zw'(z) - [z^2 + p(p+1)]w(z) = 0 \quad (3.12)$$

diferansiyel denklemin ise modifiye edilmiş küresel Bessel diferansiyel denklemi adı verilmektedir. (3.11) diferansiyel denkleminin bir özel çözümü, her $z \in \mathbb{C}$ için

$$j_p(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{p+\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(p+n+3/2)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+p} \quad (3.13)$$

olur. Bu fonksiyona küresel Bessel fonksiyonu denmektedir. Aynı şekilde (3.12) diferansiyel denkleminin bir özel çözümü, her $z \in \mathbb{C}$ için

$$i_p(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} I_{p+\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n! \Gamma(p+n+3/2)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+p} \quad (3.14)$$

olup bu fonksiyona modifiye edilmiş küresel Bessel fonksiyonu denir.

Yukarıda tanımları verilen Bessel fonksiyonları, hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden,

- $J_p(z) = \frac{(z/2)^p}{\Gamma(p+1)} {}_0F_1\left(p+1; -\frac{z^2}{4}\right),$
- $I_p(z) = \frac{(z/2)^p}{\Gamma(p+1)} {}_0F_1\left(p+1; \frac{z^2}{4}\right),$
- $j_p(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} \frac{(z/2)^{p+\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(p+\frac{3}{2}\right)} {}_0F_1\left(p+\frac{3}{2}; -\frac{z^2}{4}\right),$
- $i_p(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} \frac{(z/2)^{p+\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(p+\frac{3}{2}\right)} {}_0F_1\left(p+\frac{3}{2}; \frac{z^2}{4}\right)$

biçiminde ifade edilebilir. Bu dört çeşit Bessel fonksiyonunu ihtiva eden genelleştirilmiş Bessel fonksiyonu, Baricz (2008b) tarafından elde edilmiştir. Bu fonksiyon

$$w(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-c)^n}{n! \Gamma\left(n + p + \frac{b+1}{2}\right)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+p} \quad (3.15)$$

biçiminde olup,

$$z^2 w''(z) + bz w'(z) + [cz^2 - p^2 + (1-b)p] w(z) = 0 \quad (3.16)$$

diferansiyel denkleminin bir özel çözümüdür. Gerçekten (3.16) ve (3.15) de sırasıyla

- $b = c = 1$ yazılırsa (3.7) denklemi ve (3.8) fonksiyonu,
 - $b = -c = 1$ yazılırsa (3.9) denklemi ve (3.10) fonksiyonu,
 - $b-1 = c = 1$ yazılırsa (3.11) denklemi ve $2j_p / \sqrt{\pi}$ fonksiyonu,
 - $b-1 = -c = 1$ yazılırsa (3.12) denklemi ve $2i_p / \sqrt{\pi}$ fonksiyonu
- elde edilir.

Bessel ve modifiye edilmiş Bessel fonksiyonlarında p nin özel değerleri için aşağıdaki fonksiyonlar elde edilebilir:

$$J_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos z, \quad (3.17)$$

$$J_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin z, \quad (3.18)$$

$$J_{3/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left(\frac{\sin z}{z} - \cos z \right), \quad (3.19)$$

$$I_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cosh z, \quad (3.20)$$

$$I_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sinh z, \quad (3.21)$$

$$I_{3/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left(\cosh z - \frac{\sinh z}{z} \right). \quad (3.22)$$

Böylece bu çalışmanın özünü oluşturan Struve fonksiyonu ve bu fonksiyonun değişik özelliklerinden bahsedebiliriz.

3.4. Struve Fonksiyonları



Karl Hermann Struve

Struve fonksiyonu, Rus gökbilimci olan Karl Hermann Struve (3 Ekim 1854 – 12 Ağustos 1920) tarafından 1882 yılında tanımlanmıştır. Fakat modifiye edilmiş Struve fonksiyonu, 1911 yılında J.W. Nicholson tarafından tanımlanmıştır. Bu fonksiyonların fizikte; su ve yüzey dalgaları, kararlı olmayan hal aerodinamiği, elektrodinamik, potansiyel teori, optik kırınım ve titreşen bir disk üzerindeki sıvı basıncı dağılımı gibi birçok uygulaması mevcuttur. Struve fonksiyonları, Bessel fonksiyonları ile yakın ilişkilidir.

Tanım 3.4.1: p , reel ya da kompleks bir sayı ve $z \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$z^2 w''(z) + zw'(z) + (z^2 - p^2)w(z) = \frac{4(z/2)^{p+1}}{\sqrt{\pi}\Gamma(p+1/2)} \quad (3.23)$$

biçimindeki ikinci mertebeden homojen olmayan diferansiyel denkleminin bir özel çözümü olan

$$H_p(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+3/2)\Gamma(p+n+3/2)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+p+1} \quad (3.24)$$

fonksiyonuna Struve fonksiyonu denir (Watson 1944; Zhang 1996). (3.23) denkleminin homojen kısmı Bessel diferansiyel denklemdir. Ayrıca Struve fonksiyonu, hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden

$$H_p(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}\Gamma(p+3/2)} \left(\frac{z}{2}\right)^{p+1} {}_1F_2\left(1; \frac{3}{2}, p+\frac{3}{2}; \frac{-z^2}{4}\right)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Tanım 3.4.2: p , reel ya da kompleks bir sayı ve $z \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} L_p(z) &= -ie^{-ip\pi/2} H_p(iz) \\ &= -i \left(\cos \frac{\pi}{2} - i \sin \frac{\pi}{2} \right)^p \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+3/2)\Gamma(p+n+3/2)} \left(\frac{iz}{2}\right)^{2n+p+1} \\ &= (-i)^{p+1} \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n (i)^{2n+p+1}}{\Gamma(n+3/2)\Gamma(p+n+3/2)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+p+1} \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{\Gamma(n+3/2)\Gamma(p+n+3/2)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+p+1} \end{aligned} \quad (3.25)$$

fonksiyonuna modifiye edilmiş Struve fonksiyonu denir. Bu fonksiyon

$$z^2 w''(z) + zw'(z) - (z^2 + p^2)w(z) = \frac{4(z/2)^{p+1}}{\sqrt{\pi}\Gamma(p+1/2)} \quad (3.26)$$

diferansiyel denkleminin bir özel çözümüdür.

$p = n + \frac{1}{2}$ ve n , negatif olmayan bir tamsayı olması durumunda Struve fonksiyonu,

Bessel fonksiyonu cinsinden

$$H_{-(n+1/2)}(z) = (-1)^n J_{n+1/2}(z) \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (3.27)$$

şeklinde yazılabilir. Bu, Struve fonksiyonunun elementer fonksiyonlar cinsinden ifade edilebilir olduğunu göstermektedir. Örneğin,

$$H_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin z, \quad (3.28)$$

$$H_{-3/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left(\cos z - \frac{\sin z}{z} \right), \quad (3.29)$$

$$H_{-5/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left[\left(\frac{3}{z^2} - 1 \right) \sin z - \frac{3}{z} \cos z \right] \quad (3.30)$$

olur.

Ayrıca Struve fonksiyonunun türevi kullanılarak

$$\frac{d}{dz} \left[z^{-p} H_p(z) \right] = \frac{1}{\sqrt{\pi} 2^p \Gamma(p + 3/2)} - z^{-p} H_{p+1}(z), \quad (3.31)$$

$$\frac{d}{dz} \left[z^p H_p(z) \right] = z^p H_{p-1}(z) \quad (3.32)$$

biçiminde eşitlikler elde edilebilir.

(3.31) eşitliğinin $p = 0$ özel değeri için

$$H'_0(z) = \frac{2}{\pi} - H_1(z) \quad (3.33)$$

ifadesi bulunur.

Struve fonksiyonunun rekürens (yineleme) bağıntıları aşağıdaki şekildedir:

$$H_{p-1}(z) + H_{p+1}(z) = \frac{2p}{z} H_p(z) + \frac{(z/2)^p}{\sqrt{\pi} \Gamma(p + 3/2)}, \quad (3.34)$$

$$H_{p-1}(z) - H_{p+1}(z) = 2H'_p(z) - \frac{(z/2)^p}{\sqrt{\pi}\Gamma(p+3/2)}, \quad (3.35)$$

$$H_{p-1}(z) - \frac{p}{z}H_p(z) = H'_p(z). \quad (3.36)$$

Yukarıda ifade edilen (3.28), (3.29) ve (3.34) eşitliklerinden aşağıdaki bağıntılar yazılabilir:

$$H_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} (1 - \cos z), \quad (3.37)$$

$$H_{3/2}(z) = \sqrt{\frac{z}{2\pi}} \left(1 + \frac{2}{z^2}\right) - \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left(\sin z + \frac{\cos z}{z}\right). \quad (3.38)$$

$p = n + \frac{1}{2}$ ve n , negatif olmayan bir tamsayı olması durumunda modifiye edilmiş

Struve fonksiyonu, $I_p(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n! \Gamma(p+n+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+p}$ modifiye edilmiş Bessel fonksiyonu cinsinden

$$L_{-(n+1/2)}(z) = I_{n+1/2}(z) \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (3.39)$$

biçiminde yazılır. $L_{-(n+1/2)}(z)$ modifiye edilmiş Struve fonksiyonu da elementer fonksiyonlar cinsinden ifade edilebilir. Örneğin,

$$L_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sinh z, \quad (3.40)$$

$$L_{-3/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left(\cosh z - \frac{\sinh z}{z} \right), \quad (3.41)$$

$$L_{-5/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left[\left(1 + \frac{3}{z^2}\right) \sinh z - \frac{3}{z} \cosh z \right] \quad (3.42)$$

biçiminde yazılır.

İlave olarak

$$\frac{d}{dz} \left[z^{-p} L_p(z) \right] = \frac{1}{\sqrt{\pi} 2^p \Gamma(p+3/2)} + z^{-p} L_{p+1}(z), \quad (3.43)$$

$$\frac{d}{dz} \left[z^p L_p(z) \right] = z^p L_{p-1}(z) \quad (3.44)$$

ifadeleri de vardır.

(3.43) eşitliğinden $p = 0$ özel değeri için

$$L'_0(z) = \frac{2}{\pi} + L_1(z) \quad (3.45)$$

eşitliği yazılır.

Benzer olarak modifiye edilmiş Struve fonksiyonunun rekürens bağıntıları aşağıdaki şekilde verilebilir:

$$L_{p-1}(z) - L_{p+1}(z) = \frac{2p}{z} L_p(z) + \frac{(z/2)^p}{\sqrt{\pi} \Gamma(p+3/2)}, \quad (3.46)$$

$$L_{p-1}(z) + L_{p+1}(z) = 2L'_p(z) - \frac{(z/2)^p}{\sqrt{\pi} \Gamma(p+3/2)}, \quad (3.47)$$

$$L_{p-1}(z) - \frac{p}{z} L_p(z) = L'_p(z). \quad (3.48)$$

Yukarıda verilen (3.40), (3.41) ve (3.46) eşitliklerinden istifade edilerek

$$L_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} (\cosh z - 1), \quad (3.49)$$

$$L_{3/2}(z) = \sqrt{\frac{z}{2\pi}} \left(1 - \frac{2}{z^2} \right) - \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left(\sinh z - \frac{\cosh z}{z} \right) \quad (3.50)$$

bağıntıları yazılabilir.

3.5. Analitik Fonksiyonların Geometrik Özellikleri ile İlgili Tanım ve Teoremler

Aşağıda Struve fonksiyonlarının geometrik özelliklerini incelemeye kullanılacak tanım ve teoremler verilmiştir.

Teorem 3.5.1: $f : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{C}$ analitik bir fonksiyon ve $\alpha \in [0,1)$ olmak üzere $g : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu $g(z) = z[f'(z)]^{1/(1-\alpha)}$ biçiminde verilsin. Bu durumda $f \in C(\alpha)$ olması için gerek ve yeter şart $g \in S^*(\alpha)$ olmasıdır. Ayrıca $f \in C(\alpha) \Leftrightarrow zf' \in S^*(\alpha)$ dır (Jack 1971).

Lemma (Jack Lemması) 3.5.2: f fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskinde $f(0)=0$ şartını sağlayan sabit olmayan, analitik bir fonksiyon olsun. Eğer $|f(z)|$, $|z|=r \in [0,1)$ çemberinin üzerindeki bir z_0 noktasında maksimum değer alıyorsa, $z_0 f'(z_0) = mf'(z_0)$ olacak şekilde bir $m \geq 1$ reel sayısı vardır (Jack 1971).

Teorem 3.5.3: $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{C}$ kompleks düzlemde bir küme, $z \in \mathbb{U}$, $\rho, \sigma, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ için $\mu + \sigma \leq 0$ ve $\sigma \leq -(1+\rho^2)/2$ şartları altında $\psi : \mathbb{C}^3 \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu $\psi(\rho i, \sigma, \mu + \nu i; z) \notin \mathcal{D}$ uygunluk şartını sağlasın. Eğer $h, \mathbb{U}$ da analitik, $h(0)=1$ ve her $z \in \mathbb{U}$ için $\psi(h(z), zh'(z), z^2 h''(z); z) \in \mathcal{D}$ ise her $z \in \mathbb{U}$ için $\operatorname{Re} h(z) > 0$ dır. Özel olarak $\psi : \mathbb{C}^2 \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$ olursa $\rho, \sigma \in \mathbb{R}$ ve $\sigma \leq -(1+\rho^2)/2$ olmak üzere uygunluk şartı, her $z \in \mathbb{U}$ için $\psi(\rho i, \sigma; z) \notin \mathcal{D}$ biçiminde olur (Miller and Mocanu 1987, 2000).

Örnek 3.5.4: (i) $\mathcal{D} = \{x + yi : x > 0, x^2 + y^2 < 1\}$ kümesi ve $\psi : \mathbb{C}^3 \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu, $\psi(r, s, t; z) = r^2 + s + t$ biçiminde verilsin. ψ fonksiyonu $\mathcal{D}$ kümesi için uygunluk şartını sağlar. Gerçekten

$$\begin{aligned} \psi(\rho i, \sigma, \mu + \nu i; z) &= (\rho i)^2 + \sigma + \mu + \nu i \\ &= -\rho^2 + \sigma + \mu + \nu i \end{aligned}$$

olup, $\operatorname{Re} \psi(\rho i, \sigma, \mu + \nu i; z) = -\rho^2 + \sigma + \mu$ dir. $\mu + \sigma \leq 0$ olduğu göz önüne alınırsa $\operatorname{Re} \psi(\rho i, \sigma, \mu + \nu i; z) \leq 0$ olur. Bu da $\psi(\rho i, \sigma, \mu + \nu i; z) \notin \mathcal{D}$ olduğunu gösterir.

(ii) $\varphi: \mathbb{C}^3 \times \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu, $\varphi(r, s, t; z) = rs + st + rt + z$ şeklinde olsun. φ fonksiyonu, $\mathbb{U}$ için uygunluk şartını sağlamaz. Çünkü

$$\varphi(\rho i, \sigma, \mu + \nu i; x + yi) = \sigma\mu - \rho\nu + x + (\rho\sigma + \sigma\nu + \rho\mu + y)i$$

olup, $\rho = \mu = \nu = 0$, $\sigma = -1/2$ alınırsa $\varphi(0, -1/2, 0; x + yi) = x + yi \in \mathbb{U}$ dur.

Teorem 3.5.5: $f(z) = z + \sum_{n \geq 2} a_n z^n$ fonksiyonu $\mathbb{U}$ da analitik ve $a_1 = 1$, her $n \geq 2$ için $a_n \geq 0$ olsun. Eğer $\{na_n - (n+1)a_{n+1}\}_{n \geq 1}$ ile $\{na_n\}_{n \geq 1}$ dizileri azalan ise f , $\mathbb{U}$ da yıldızlıdır (Fejer 1936).

Teorem 3.5.6: $c_1 = 1$ olmak üzere $g(z) = \sum_{n \geq 1} c_n z^{n-1}$ fonksiyonu $\mathbb{U}$ da analitik ve her $n \geq 2$ için $c_n \geq 0$ olsun. Eğer $\{c_n\}_{n \geq 1}$ dizisi konveks ve azalan (yani her $n \geq 1$ için $c_n - 2c_{n+1} + c_{n+2} \geq 0$ ve $c_n - c_{n+1} \geq 0$) ise her $z \in \mathbb{U}$ için $\operatorname{Re} g(z) > 1/2$ dir (Fejer 1936).

Teorem 3.5.7: $f(z) = z + \sum_{n \geq 2} a_n z^n$ fonksiyonu $\mathbb{U}$ da analitik ve $1 \geq 2a_2 \geq \dots \geq na_n \geq \dots \geq 0$ veya $1 \leq 2a_2 \leq \dots \leq na_n \leq \dots \leq 2$ ise f fonksiyonu $g(z) = -\operatorname{Log}(1-z)$ fonksiyonuna göre konvekse yakındır (Ozaki 1935).

Örnek 3.5.8: $f(z) = \frac{z}{1-z} = z + \sum_{n \geq 2} z^n$ fonksiyonu Teorem 3.5.7 nin şartlarını sağlar.

Dolayısıyla f , $g(z) = -\operatorname{Log}(1-z)$ fonksiyonuna göre konvekse yakındır. Gerçekten

$$f'(z) = \frac{1}{(1-z)^2}, \quad g'(z) = \frac{1}{1-z} \text{ ve } g \text{ konveks bir fonksiyon olup, her } z \in \mathbb{U} \text{ için}$$

$$\operatorname{Re} \left(\frac{f'(z)}{g'(z)} \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{1-z} \right) > 0 \text{ dir. Bu da } f \text{ nin konvekse yakın olduğunu ifade eder.}$$

Teorem 3.5.9: $g(z) = z + \sum_{n \geq 2} b_{2n-1} z^{2n-1}$ tek fonksiyonu $\mathbb{U}$ da analitik ve $1 \geq 3b_3 \geq \dots \geq (2n-1)b_{2n-1} \geq \dots \geq 0$ veya $1 \leq 3b_3 \leq \dots \leq (2n-1)b_{2n-1} \leq \dots \leq 2$ ise g fonksiyonu $\mathbb{U}$ da ünivalenttir (Ozaki 1935).

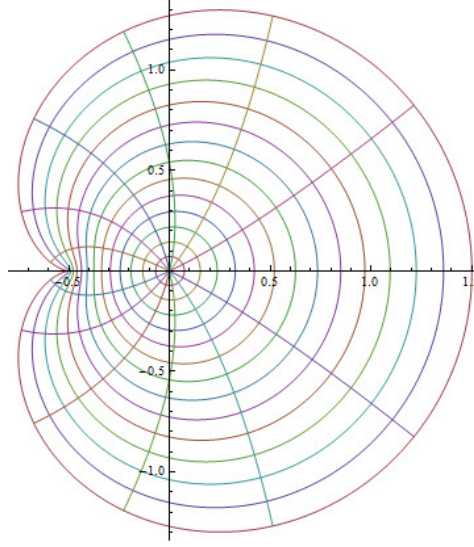
Sonuç 3.5.10: Teorem 3.5.9 un şartları altında verilen g fonksiyonu, $h(z) = \frac{1}{2} \text{Log} \left(\frac{1+z}{1-z} \right)$ fonksiyonuna göre konvekse yakındır (Ponnusamy and Vuorinen 1998).

Teorem 3.5.11: M , $\cos M = M$, ($M \approx 0.73909$) eşitliğini sağlayan pozitif bir sayı olmak üzere, $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonu $\left| \frac{zf'(z)}{f(z)} - 1 \right| < M$ şartını sağlıyorsa $\text{Re } f'(z) > 0$ dır (Xanthopoulos 1993).

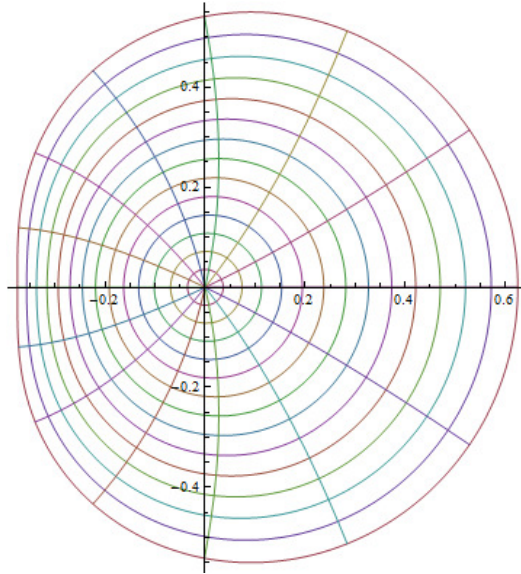
Teorem 3.5.12: $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonu $\forall z \in \mathbb{U}$ için $\left| \frac{f(z)}{z} - 1 \right| < 1$ şartını sağlıyorsa $|z| < \frac{1}{2}$ diskinde yıldızl ve dolayısıyla ünivalenttir (MacGregor 1963).

Teorem 3.5.13: $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonu $\forall z \in \mathbb{U}$ için $|f'(z) - 1| < 1$ şartını sağlıyorsa $|z| < \frac{1}{2}$ diskinde konvektir (MacGregor 1964).

Örneğin; $f(z) = z + \frac{1}{2} z^2$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu fonksiyon $\mathbb{U}$ da konveks olmamasına rağmen $|z| < \frac{1}{2}$ diskinde konvektir. İddiamızı aşağıdaki şekiller de (Şekil 3.1 ve Şekil 3.2) doğrulamaktadır. Bunu analitik olarak görmek mümkündür. $f'(z) = 1 + z$ olup $\forall z \in \mathbb{U}$ için $|f'(z) - 1| < 1$ eşitsizliği sağlanır.



Şekil 3.1. $f(z) = z + \frac{1}{2} z^2$ fonksiyonu altında birim diskin görüntüsü



Şekil 3.2. $f(z) = z + \frac{1}{2} z^2$ fonksiyonu altında $|z| < \frac{1}{2}$ diskinin görüntüsü

Teorem 3.5.14: $0 \leq \alpha < 1$ olmak üzere, $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonu $\forall z \in \mathbb{U}$ için $|zf''(z)| < \frac{1-\alpha}{4}$

şartını sağlıyorsa $\operatorname{Re} f'(z) > \frac{1+\alpha}{4}$ dır (Owa *et al.* 2002).

Teorem 3.5.15: $\alpha \in [0, 1/2]$, $\beta \geq 0$ ve her $z \in \mathbb{U}$ olmak üzere $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonu için

$$\left| \frac{zf'(z)}{f(z)} - 1 \right|^{1-\beta} \cdot \left| \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right|^\beta < (1-\alpha)^{1-2\beta} (1-3\alpha/2 + \alpha^2)^\beta$$

eşitsizliği gerçekleşiyor ise f , $\mathcal{S}^*(\alpha)$ sınıfına aittir (Owa and Srivastava 1987).

Teorem 3.5.16: $\alpha \in [0,1)$ olmak üzere $f(z) = z + \sum_{n \geq 2} a_n z^n$ fonksiyonu için,

a) $\sum_{n \geq 2} (n-\alpha) |a_n| \leq 1-\alpha$ ise $f \in \mathcal{S}_1^*(\alpha)$ dır,

ve

b) $\sum_{n \geq 2} n(n-\alpha) |a_n| \leq 1-\alpha$ ise $f \in \mathcal{C}_1(\alpha)$ dır

ifadeleri doğrudur (Silverman 1975).

Teorem 3.5.17: $\alpha \in [0,1)$, $a_n \geq 0$ olmak üzere $f(z) = z - \sum_{n \geq 2} a_n z^n$ fonksiyonu verilsin.

a) $f \in \mathcal{S}_1^*(\alpha)$ olması için gerek ve yeter şart $\sum_{n \geq 2} (n-\alpha) |a_n| \leq 1-\alpha$,

ve

b) $f \in \mathcal{C}_1(\alpha)$ olması için gerek ve yeter şart $\sum_{n \geq 2} n(n-\alpha) |a_n| \leq 1-\alpha$

olmasıdır (Merkes *et al.* 1962; Silverman 1975).

Tanım 3.5.18: $l(z) = -L \log(1-z) = \sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n}$ ve $m(z) = \frac{z}{1-z} = \sum_{n \geq 1} z^n$ fonksiyonları göz

önüne alınsın. $f(z) = z + \sum_{n \geq 2} a_n z^n$ fonksiyonunun $\Lambda: \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{C}$ Alexander dönüşümü

$$\Lambda[f](z) = \int_0^z \frac{(f * m)(t)}{t} dt = \int_0^z \frac{f(t)}{t} dt = z + \sum_{n \geq 2} \frac{a_n}{n} z^n = (f * l)(z)$$

şeklinde tanımlanır.

3.6. Hardy Uzayı



Godfrey Harold Hardy

Hardy uzayı, birim diskte analitik fonksiyonların bir uzayı olup 1923 yılında Frigyes Riesz tarafından tanımlanmıştır. Fakat ismini 1877–1947 yılları arasında yaşamış ingiliz matematikçi G.H. Hardy'nin 1915 yılında yayınlanmış bir makalesinden almaktadır. Bu uzayın analizde, özellikle kontrol teori ve saçılım teorisinde birçok uygulaması mevcuttur.

Tanım 3.6.1: $\mathcal{H}$, $\mathbb{U}$ da tanımlı analitik fonksiyonların bir ailesini gösterebilir. Ayrıca $\mu \in (0, \infty]$, $r \in [0, 1)$ olmak üzere $f \in \mathcal{H}$ için

$$M_\mu(r, f) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^\mu d\theta \right)^{1/\mu}, & 0 < \mu < \infty \\ \max_{|z| \leq r} |f(z)|, & \mu = \infty \end{cases}$$

olsun. Eğer $\{M_\mu(r, f) : r \in [0, 1)\}$ kümesi sınırlı ise f fonksiyonu $\mathcal{H}^\mu$ Hardy uzayına aittir denir.

$1 \leq \mu \leq \infty$ olması durumunda $\mathcal{H}^\mu$ uzayı, $\|f\|_\mu = \lim_{r \rightarrow 1^-} M_\mu(r, f)$ normuyla bir Banach uzayı olur. Ayrıca $\mathcal{H}^\infty$, $\mathcal{H}$ sınıfına ait ve $\mathbb{U}$ da sınırlı fonksiyonların kümesidir. $0 < \mu \leq \nu \leq \infty$ olduğunda $\mathcal{H}^\nu \subseteq \mathcal{H}^\mu$ dir (Duren 1970).

$0 \leq \alpha < 1$ olmak üzere, Baricz (2008b) tarafından Hardy uzayı ile bağlantılı olan,

$$\mathcal{P}(\alpha) = \{f \in \mathcal{H} : f(0) = 1, \exists \eta \in \mathbb{R} \text{ öyle ki her } z \in \mathbb{U} \text{ için } \operatorname{Re}[e^{i\eta} f(z)] > \alpha\}$$

ve $\mathcal{R}(\alpha) = \{f \in \mathcal{A} : f' \in \mathcal{P}(\alpha)\}$ yani

$$\mathcal{R}(\alpha) = \{f \in \mathcal{A} : \exists \eta \in \mathbb{R} \text{ öyle ki her } z \in \mathbb{U} \text{ için } \operatorname{Re}[e^{i\eta} f'(z)] > \alpha\}$$

sınıfları tanımlanmıştır. $\eta = 0$ için $\mathcal{P}(\alpha)$ ve $\mathcal{R}(\alpha)$ sınıfları sırasıyla $\mathcal{P}_0(\alpha)$ ve $\mathcal{R}_0(\alpha)$;

$\alpha = 0$ için $\mathcal{P}_0(\alpha)$ ve $\mathcal{R}_0(\alpha)$ sınıfları ise sırasıyla $\mathcal{P}$ ve $\mathcal{R}$ ile gösterilmiştir. $\mathcal{P}$ ve $\mathcal{R}$ ile gösterilen sınıflar sırasıyla Tanım 2.3.2 ve Tanım 2.3.10 da verilen sınıflardır.

İki kümenin Hadamard çarpımı aşağıdaki biçimde verilir.

Tanım 3.6.2: A ve B , $\mathcal{H}$ nin boş olmayan iki alt kümesi olsun. A ile B nin Hadamard çarpımı $A * B$ ile gösterilir ve $A * B = \{f * g : f \in A \text{ ve } g \in B\}$ biçiminde ifade edilir.

Teorem 3.6.3: $\alpha, \beta < 1$ ve $\gamma = 1 - 2(1 - \alpha)(1 - \beta)$ olmak üzere $\mathcal{P}_0(\alpha) * \mathcal{P}_0(\beta) \subset \mathcal{P}_0(\gamma)$ dır (Stankiewicz and Stankiewicz 1986).

Teorem 3.6.4: $\alpha, \beta < 1$ ve $\gamma = 1 - 2(1 - \alpha)(1 - \beta)$ olmak üzere $\mathcal{R}(\alpha) * \mathcal{R}_0(\beta) \subset \mathcal{R}(\gamma)$ (veya buna denk olarak $\mathcal{P}(\alpha) * \mathcal{P}_0(\beta) \subset \mathcal{P}(\gamma)$) dır (Ponnusamy 1998).

Teorem 3.6.5: $\alpha \in [0, 1)$ olmak üzere $\mu, \nu \in \mathbb{C}$ ve $\gamma \in \mathbb{R}$ için eğer $f \in \mathcal{C}(\alpha)$ fonksiyonu

$$f(z) = \begin{cases} \mu + \nu z(1 - ze^{i\gamma})^{2\alpha-1}, & \alpha \neq 1/2 \\ \mu + \nu \operatorname{Log}(1 - ze^{i\gamma}), & \alpha = 1/2 \end{cases}$$

biçiminde yazılamıyorsa aşağıdaki ifadeler doğrudur:

a) $f' \in \mathcal{H}^{\delta + \frac{1}{2(1-\alpha)}}$ olacak şekilde bir $\delta = \delta(f) > 0$ sayısı vardır.

b) Eğer $\alpha \in [0, 1/2)$ ise $f \in \mathcal{H}^{\tau + \frac{1}{1-2\alpha}}$ olacak şekilde bir $\tau = \tau(f) > 0$ sayısı vardır.

c) Eğer $\alpha \geq 1/2$ ise $f \in \mathcal{H}^\infty$ dur (Eenigenburg and Keogh 1970).

Teorem 3.6.6: $\mathbb{U}$ da analitik olan bir f fonksiyonunun $|z| \leq 1$ kapalı birim diskinde sürekli ve $|z|=1$ çemberi üzerinde mutlak sürekli olması için gerekli ve yeterli şart $f' \in \mathcal{H}^1$ olmasıdır. Eğer $f' \in \mathcal{H}^1$ ise bu durumda

$$\frac{d}{d\theta} f(e^{i\theta}) = ie^{i\theta} \lim_{r \rightarrow 1} f'(re^{i\theta})$$

eşitliği vardır (Duren 1970).

Teorem 3.6.7: f , $\mathbb{U}$ da analitik ve ünivalent bir fonksiyon olsun. Bu durumda her $p < 1/2$ için $f \in \mathcal{H}^p$ dir (Duren 1970).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde, çalışmamızda elde edilen bulgulara yer verilmiştir.

İlk olarak Struve ve modifiye edilmiş Struve fonksiyonlarının ikisini birden ihtiva eden genelleştirilmiş Struve fonksiyonu elde edilmiştir. Daha sonra genelleştirilen bu fonksiyon için önemli sayılan bazı eşitsizlikler bulunmuştur. Bunlara ilave olarak anılan fonksiyonun; ünivalentliği, yıldızlılığı, konveksliği, konvekse yakınlığı, α mertebeden yıldızlılığı ve α mertebeden konveksliği gibi birtakım geometrik özellikleri incelenmiştir. Son olarak da genelleştirilmiş Struve fonksiyonunun, Hardy uzayına ait olma şartları belirlenmiştir.

4.1. Struve Fonksiyonlarının Genelleştirilmesi

b, c, d_1, d_2, d_3, p birer kompleks sabit, $Q(z)$ analitik bir fonksiyon ve $d = d_1 p^2 + d_2 p + d_3$ olmak üzere ikinci mertebeden

$$z^2 w''(z) + b z w'(z) + [c z^2 + d] w(z) = Q(z), \quad (z \in \mathbb{C}) \quad (4.1)$$

diferansiyel denklemi göz önüne alınsın. Serilerle çözüm yöntemi kullanılarak, bu denklemin her $n \geq 0$ için $a_n \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$w(z) = z^p \left(\sum_{n \geq 0} a_n z^n \right) \quad (4.2)$$

biçiminde bir özel çözümü vardır. (4.2) serisi (4.1) denkleminde yerine yazılıp gerekli işlemler yapıldığında

$$Q(z) = [p(p+b-1)+d]a_0 z^p + [(p+1)(p+b)+d]a_1 z^{p+1} \quad (4.3)$$

fonksiyonu ve her $n \geq 2$ için

$$n(n+2p+b-1)a_n + [(d_1+1)p^2 + (b+d_2-1)p + d_3]a_n = -ca_{n-2} \quad (4.4)$$

rekürens bağıntısı elde edilir.

$d_1 = -1$, $d_2 = 1-b$ ve $d_3 = 0$ olarak alınırsa (4.4) bağıntısı, her $n \geq 2$ için

$$n(n+2p+b-1)a_n = -ca_{n-2} \quad (4.5)$$

olarak yazılır ve (4.3) ile ifade edilen fonksiyon $Q(z) = a_1(2p+b)z^{p+1}$ biçimine gelir.

Bu durumda (4.1) diferansiyel denklemi,

$$z^2 w''(z) + bz w'(z) + [cz^2 - p^2 + (1-b)p] w(z) = a_1(2p+b)z^{p+1} \quad (4.6)$$

olur. a_0 ve a_1 birer sabit katsayı olmak üzere, (4.5) rekürens bağıntısı kullanılarak (4.6) diferansiyel denkleminin bir özel çözümü,

$$w(z) = a_0 \sum_{n \geq 0} \frac{(-c/4)^n \Gamma\left(p + \frac{b+1}{2}\right)}{n! \Gamma\left(n + p + \frac{b+1}{2}\right)} z^{2n+p} + a_1 \sum_{n \geq 0} \frac{(-c/4)^n \Gamma(3/2) \Gamma\left(p + \frac{b+2}{2}\right)}{\Gamma(n+3/2) \Gamma\left(n + p + \frac{b+2}{2}\right)} z^{2n+p+1} \quad (4.7)$$

olduğu görülür.

$$a_0 = \left[2^p \Gamma\left(p + \frac{b+1}{2}\right) \right]^{-1} \text{ ve } a_1 = 0 \text{ alınırsa (4.6) diferansiyel denklemi}$$

$$z^2 w''(z) + bz w'(z) + [cz^2 - p^2 + (1-b)p] w(z) = 0 \quad (4.8)$$

ve (4.7) eşitliği ise

$$w(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-c)^n}{n! \Gamma\left(n + p + \frac{b+1}{2}\right)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+p} \quad (4.9)$$

şeklinde yazılır. (4.8) diferansiyel denklemi genelleştirilmiş Bessel diferansiyel denklemi ve (4.9) daki $w(z)$ fonksiyonu da genelleştirilmiş Bessel fonksiyonudur. Bu fonksiyonun geometrik özellikleri Baricz (2008a) tarafından detaylı olarak incelenmiştir.

$$\text{Eğer } a_0 = 0 \text{ ve } a_1 = \left[2^p \sqrt{\pi} \Gamma\left(p + \frac{b+2}{2}\right) \right]^{-1} \text{ alınırsa (4.6) denklemi homojen olmayan}$$

$$z^2 w''(z) + bz w'(z) + [cz^2 - p^2 + (1-b)p] w(z) = \frac{4(z/2)^{p+1}}{\sqrt{\pi} \Gamma(p+b/2)} \quad (4.10)$$

diferansiyel denklemi haline gelir ve (4.7) eşitliği,

$$w_{p,b,c}(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-c)^n}{\Gamma(n+3/2)\Gamma\left(n+p+\frac{b+2}{2}\right)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+p+1} \quad (4.11)$$

biçiminde olur. Bu seri yakınsak bir seri olduğundan çözüm anlamlıdır. (4.10) diferansiyel denkleminde genelleştirilmiş Struve diferansiyel denklemi ve (4.11) deki $w_{p,b,c}(z)$ fonksiyonuna da genelleştirilmiş Struve fonksiyonu denir. Gerçekten, (4.10) ve (4.11) de $b=c=1$ alınır sırasıyla (3.23) diferansiyel denklemi ve (3.24) özel çözümü (Struve fonksiyonu) bulunur; $b=1, c=-1$ alınır sırasıyla (3.26) diferansiyel denklemi ve (3.25) özel çözümü (yani modifiye edilmiş Struve fonksiyonu) elde edilir.

$w_{p,b,c}(z)$ fonksiyonu kullanılarak, normalize edilmiş

$$u_{p,b,c}(z) = 2^p \sqrt{\pi} \Gamma\left(p+\frac{b+2}{2}\right) z^{\frac{-p-1}{2}} w_{p,b,c}(\sqrt{z}) \quad (4.12)$$

fonksiyonu elde edilebilir. Bu durumda her $n \geq 0$ için

$$b_n = \frac{(-c/4)^n \Gamma(3/2) \Gamma\left(p+\frac{b+2}{2}\right)}{\Gamma(n+3/2) \Gamma\left(n+p+\frac{b+2}{2}\right)} \quad (4.13)$$

olmak üzere

$$u_{p,b,c}(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots + b_n z^n + \dots$$

olur. Pochhammer sembolü kullanılarak ve $\kappa = p + (b+2)/2 \neq 0, -1, -2, \dots$ olmak üzere $u_{p,b,c}(z)$ fonksiyonu aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$u_{p,b,c}(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-c/4)^n}{(3/2)_n (\kappa)_n} z^n. \quad (4.14)$$

Bu durumda (4.13) eşitliği, her $n \geq 0$ için $b_n = \frac{(-c/4)^n}{(3/2)_n (\kappa)_n}$ şeklinde olur. $u_{p,b,c}(z)$

fonksiyonu analitik olup

$$4z^2 u''(z) + 2(2p+b+3)z u'(z) + (cz+2p+b)u(z) = 2p+b \quad (4.15)$$

diferansiyel denklemini sağlar.

Ayrıca $u_{p,b,c}(z)$ fonksiyonu, hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden

$$u_{p,b,c}(z) = {}_1F_2\left(1; \frac{3}{2}, \kappa; \frac{-cz}{4}\right)$$

şeklinde yazılır. Aksi söylenmedikçe, kısa olması açısından $w_{p,b,c}(z)$ ve $u_{p,b,c}(z)$ fonksiyonları, sırasıyla $w_p(z)$ ve $u_p(z)$ sembolleriyle gösterilecektir.

Önerme 4.1.1: b, c, p birer kompleks sabit, $\kappa = p + (b + 2)/2 \neq 1, 0, -1, -2, \dots$ ve $z \in \mathbb{C}$ olmak üzere, genelleştirilmiş Struve fonksiyonu için,

$$(i) \quad zw_{p-1}(z) + czw_{p+1}(z) = (2\kappa - 3)w_p(z) + \frac{2(z/2)^{p+1}}{\sqrt{\pi}\Gamma(\kappa)},$$

$$(ii) \quad zw'_p(z) + (p + b - 1)w_p(z) = zw_{p-1}(z),$$

$$(iii) \quad zw'_p(z) + czw_{p+1}(z) = pw_p(z) + \frac{2(z/2)^{p+1}}{\sqrt{\pi}\Gamma(\kappa)},$$

$$(iv) \quad \left[z^{-p}w_p(z) \right]' = -cz^{-p}w_{p+1}(z) + \frac{1}{2^p\sqrt{\pi}\Gamma(\kappa)},$$

$$(v) \quad u_p(z) + 2zu'_p(z) + \frac{c}{2\kappa}zu_{p+1}(z) = 1$$

eşitlikleri vardır (Orhan and Yağmur 2013).

İspat: (i) Öncelikle $w_{p-1}(z) + w_{p+1}(z)$ toplamı hesaplanırsa,

$$\begin{aligned} w_{p-1}(z) + w_{p+1}(z) &= \sum_{n \geq 0} \frac{(-c)^n}{\Gamma(n + 3/2)\Gamma\left(n + p + \frac{b}{2}\right)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+p} \\ &\quad + \sum_{n \geq 0} \frac{(-c)^n}{\Gamma(n + 3/2)\Gamma\left(n + p + \frac{b+4}{2}\right)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+p+2} \\ &= \frac{1}{\Gamma(3/2)\Gamma(\kappa-1)} \left(\frac{z}{2}\right)^p \\ &\quad + \sum_{n \geq 1} \left[\frac{(-c)^n}{\Gamma(n + 3/2)\Gamma(\kappa+n-1)} + \frac{(-c)^{n-1}}{\Gamma(n + 1/2)\Gamma(\kappa+n)} \right] \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+p} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2\kappa-3}{z} \left[\frac{2}{\Gamma(3/2)\Gamma(\kappa-1)(2\kappa-3)} \left(\frac{z}{2}\right)^{p+1} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{n \geq 0} \frac{(-c)^n}{\Gamma(n+3/2)\Gamma(\kappa+n)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+p} \right] \\
&\quad + \sum_{n \geq 0} \frac{(-c)^n (1-c)}{\Gamma(n+3/2)\Gamma(\kappa+n+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+p+2}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlikten

$$w_{p-1}(z) + w_{p+1}(z) = \frac{2\kappa-3}{z} \left[\frac{2}{\Gamma(3/2)\Gamma(\kappa-1)(2\kappa-3)} \left(\frac{z}{2}\right)^{p+1} + w_p(z) \right] + (1-c)w_{p+1}(z)$$

yazılır. Bu ise $zw_{p-1}(z) + czw_{p+1}(z) = (2\kappa-3)w_p(z) + \frac{2(z/2)^{p+1}}{\sqrt{\pi}\Gamma(\kappa)}$ ifadesine denktir.

(ii) Birinci kısma benzer olarak $w_{p-1}(z) - w_{p+1}(z)$ toplamı hesaplanırsa,

$$\begin{aligned}
w_{p-1}(z) - w_{p+1}(z) &= \sum_{n \geq 0} \frac{(-c)^n}{\Gamma(n+3/2)\Gamma\left(n+p+\frac{b}{2}\right)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+p} \\
&\quad - \sum_{n \geq 0} \frac{(-c)^n}{\Gamma(n+3/2)\Gamma\left(n+p+\frac{b+4}{2}\right)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+p+2} \\
&= \frac{1}{\Gamma(3/2)\Gamma(\kappa-1)} \left(\frac{z}{2}\right)^p \\
&\quad + \sum_{n \geq 1} \left[\frac{(-c)^n (\kappa+n-1) + (-c)^{n-1} (n+1/2)}{\Gamma(n+3/2)\Gamma(\kappa+n)} \right] \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+p} \\
&= w'_p(z) + \frac{(p+b-1)}{z} w_p(z) - w_{p+1}(z)
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Bu eşitlik düzenlenirse istenen bulunur.

(iii) (i) ve (ii) deki ifadeler taraf tarafa toplanıp ve $\kappa = p + (b+2)/2$ olduğu da göz önünde bulundurulursa,

$$zw_p'(z) + (p+b-1)w_p(z) + czw_{p+1}(z) = (2p+b-1)w_p(z) + \frac{2(z/2)^{p+1}}{\sqrt{\pi}\Gamma(\kappa)}$$

ifadesi elde edilir. Bir takım düzenlemelerden sonra

$$zw_p'(z) + czw_{p+1}(z) = pw_p(z) + \frac{2(z/2)^{p+1}}{\sqrt{\pi}\Gamma(\kappa)}$$

eşitliği elde edilir.

(iv) (iii) deki rekürens bağıntısı kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \left[z^{-p}w_p(z) \right]' &= z^{-2p} \left[z^p w_p'(z) - pz^{p-1}w_p(z) \right] \\ &= z^{-p-1} \left[zw_p'(z) - pw_p(z) \right] \\ &= z^{-p-1} \left[-czw_{p+1}(z) + \frac{2(z/2)^{p+1}}{\sqrt{\pi}\Gamma(\kappa)} \right] \\ &= -cz^{-p}w_{p+1}(z) + \frac{1}{2^p \sqrt{\pi}\Gamma(\kappa)} \end{aligned}$$

olduğu görülür. Bu ise istenen eşitliktir.

(v) (4.12) deki ifadeden

$$w_p(z) = \frac{z^{p+1}}{2^p \sqrt{\pi}\Gamma(\kappa)} u_p(z^2) \quad (4.16)$$

elde edilir. Bu durumda

$$w_{p+1}(z) = \frac{z^{p+2}}{2^{p+1} \sqrt{\pi}\Gamma(\kappa+1)} u_{p+1}(z^2) \quad (4.17)$$

olur. Ayrıca (4.16) ifadesinin her iki tarafı z^{-p} ile çarpılıp z ye göre türevi alınırsa

$$\left[z^{-p}w_p(z) \right]' = \frac{1}{2^p \sqrt{\pi}\Gamma(\kappa)} \left[zu_p(z^2) \right]' \quad (4.18)$$

bulunur. (4.17) ve (4.18) ifadeleri (iv) de yerine yazılırsa,

$$\frac{1}{2^p \sqrt{\pi}\Gamma(\kappa)} \left[zu_p(z^2) \right]' = \frac{-cz^2}{2^{p+1} \sqrt{\pi}\Gamma(\kappa+1)} u_{p+1}(z^2) + \frac{1}{2^p \sqrt{\pi}\Gamma(\kappa)}$$

olur. $\Gamma(\kappa+1) = \kappa\Gamma(\kappa)$ olduğu göz önüne alınıp gerekli sadeleşmeler yapılsa

$$\left[zu_p(z^2) \right]' = \frac{-cz^2}{2\kappa} u_{p+1}(z^2) + 1 \quad (4.19)$$

eşitliği elde edilir. Bu ifadeden

$$u_p(z^2) + 2z^2 u_p'(z^2) = \frac{-cz^2}{2\kappa} u_{p+1}(z^2) + 1 \quad (4.20)$$

olduğu görülür. Son olarak (4.20) eşitliğinde z^2 yerine z yazılırsa istenen elde edilir.

4.2. Genelleştirilmiş Struve Fonksiyonları için Bazı Eşitsizlikler

$$(4.14) \text{ ifadesinden} \quad u_p(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-c/4)^n}{(3/2)_n (\kappa)_n} z^n = 1 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots + b_n z^n + \dots \text{ olduğu}$$

bilinmektedir. Konuyla ilgili teoremlerin uygulanabilmesi için fonksiyonun $\mathcal{A}$ sınıfından olması gerekir. Dolayısıyla $u_p(z)$ fonksiyonu z ile çarpılırsa,

$$g_p(z) = zu_p(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-c/4)^n}{(3/2)_n (\kappa)_n} z^{n+1} = z + b_1 z^2 + b_2 z^3 + \dots + b_n z^{n+1} + \dots$$

biçiminde $\mathcal{A}$ nın bir üyesi elde edilmiş olur.

Lemma 4.2.1: $b, p \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{C}$, $\kappa = p + (b+2)/2$ ve $\kappa > \frac{|c|}{2}$ olmak üzere $u_p : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{C}$

fonksiyonu için,

- (i) $\frac{6\kappa - 2|c|}{6\kappa - |c|} \leq |u_p(z)| \leq \frac{6\kappa}{6\kappa - |c|},$
- (ii) $\frac{|c|(2\kappa - |c|)}{3\kappa(4\kappa - |c|)} \leq |u_p'(z)| \leq \frac{2|c|}{3(4\kappa - |c|)},$
- (iii) $|zu_p''(z)| \leq \frac{|c|^2}{4\kappa(4\kappa - |c|)}$

eşitsizlikleri yazılır (Yağmur and Orhan 2013a).

İspat: (i) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ üçgen eşitsizliği ve

$$(3/2)_n \geq (3/2)^n, (\kappa)_n \geq (\kappa)^n, (n \in \mathbb{N}) \quad (4.21)$$

eşitsizliklerinin yanısıra $z \in \mathbb{U}$ olduğu da göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} |u_p(z)| &= \left| 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{(-c/4)^n}{(3/2)_n (\kappa)_n} z^n \right| \\ &\leq 1 + \sum_{n \geq 1} \left(\frac{|-c/4|}{3\kappa/2} \right)^n \\ &= 1 + \frac{|c|}{6\kappa} \sum_{n \geq 1} \left(\frac{|c|}{6\kappa} \right)^{n-1} \\ &= \frac{6\kappa}{6\kappa - |c|}, \quad \left(\kappa > \frac{|c|}{6} \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$ ters üçgen eşitsizliği ve (4.21) deki ifadeler kullanılırsa,

$$\begin{aligned} |u_p(z)| &= \left| 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{(-c/4)^n}{(3/2)_n (\kappa)_n} z^n \right| \\ &\geq 1 - \sum_{n \geq 1} \left(\frac{|-c/4|}{3\kappa/2} \right)^n \\ &= 1 - \frac{|c|}{6\kappa} \sum_{n \geq 1} \left(\frac{|c|}{6\kappa} \right)^{n-1} \\ &= \frac{6\kappa - 2|c|}{6\kappa - |c|}, \quad \left(\kappa > \frac{|c|}{6} \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Hipotezde $\kappa > \frac{|c|}{2}$ olduğundan, son ifade pozitifdir.

(ii) (i) şıkında verilen üçgen eşitsizliği ve

$$(3/2)_n \geq 3n/2, (\kappa)_n \geq (\kappa)^n, (n \in \mathbb{N}) \quad (4.22)$$

ifadeleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
|u'_p(z)| &= \left| \sum_{n \geq 1} \frac{n(-c/4)^n}{(3/2)_n (\kappa)_n} z^{n-1} \right| \\
&\leq \frac{2}{3} \sum_{n \geq 1} \left(\frac{|c|}{4\kappa} \right)^n \\
&\leq \frac{2}{3} \frac{|c|}{4\kappa} \sum_{n \geq 1} \left(\frac{|c|}{4\kappa} \right)^{n-1} \\
&= \frac{2|c|}{3(4\kappa - |c|)}, \quad \left(\kappa > \frac{|c|}{4} \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde ters üçgen eşitsizliği ve (4.22) deki ifadeler kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
|u'_p(z)| &= \left| \sum_{n \geq 1} \frac{n(-c/4)^n}{(3/2)_n (\kappa)_n} z^{n-1} \right| \\
&\geq \frac{|c|}{6\kappa} - \frac{2}{3} \left(\frac{|c|}{4\kappa} \right)^2 \sum_{n \geq 2} \left(\frac{|c|}{4\kappa} \right)^{n-1} \\
&= \frac{|c|(2\kappa - |c|)}{3\kappa(4\kappa - |c|)}, \quad \left(\kappa > \frac{|c|}{4} \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu da aynı biçimde pozitiftir.

(iii) Üçgen eşitsizliği ve

$$(3/2)_n \geq n(n-1), \quad (\kappa)_n \geq (\kappa)^n, \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (4.23)$$

ifadeleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
|zu''_p(z)| &= \left| \sum_{n \geq 2} \frac{n(n-1)(-c/4)^n}{(3/2)_n (\kappa)_n} z^{n-1} \right| \\
&\leq \frac{|c|}{4\kappa} \sum_{n \geq 2} \left(\frac{|c|}{4\kappa} \right)^{n-1} \\
&= \frac{|c|^2}{4\kappa(4\kappa - |c|)}, \quad \left(\kappa > \frac{|c|}{4} \right)
\end{aligned}$$

yazılır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Lemma 4.2.2: $b, p \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{C}$, $\kappa = p + (b+2)/2$ ve $\kappa > \frac{|c|}{4}$ olmak üzere $g_p : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{C}$

fonksiyonu için,

- (i) $\left| g_p'(z) - \frac{g_p(z)}{z} \right| \leq \frac{2|c|}{3(4\kappa - |c|)},$
- (ii) $\left| \frac{zg_p'(z)}{g_p(z)} - 1 \right| \leq \frac{|c|(6\kappa - |c|)}{3(4\kappa - |c|)(3\kappa - |c|)},$
- (iii) $|g_p'(z) - 1| \leq \frac{4|c|}{3(4\kappa - |c|)},$
- (iv) $|zg_p''(z)| \leq \frac{2|c|}{4\kappa - |c|},$
- (v) $\frac{12\kappa - 7|c|}{3(4\kappa - |c|)} \leq |g_p'(z)| \leq \frac{12\kappa + |c|}{3(4\kappa - |c|)}$

eşitsizlikleri yazılır (Orhan and Yağmur 2013).

İspat: $g_p(z) = z + \sum_{n \geq 1} \frac{(-c/4)^n}{(3/2)_n (\kappa)_n} z^{n+1}$ ve dolayısıyla $g_p'(z) = 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{(n+1)(-c/4)^n}{(3/2)_n (\kappa)_n} z^n$

olduğuna göre;

(i) Üçgen eşitsizliği ve (4.22) eşitsizlikleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
 \left| g_p'(z) - \frac{g_p(z)}{z} \right| &= \left| \sum_{n \geq 1} \frac{n(-c/4)^n}{(3/2)_n (\kappa)_n} z^n \right| \\
 &\leq \sum_{n \geq 1} \frac{|-c/4|^n}{3\kappa^n / 2} \\
 &= \frac{2|c|}{34\kappa} \sum_{n \geq 1} \left(\frac{|c|}{4\kappa} \right)^{n-1} \\
 &= \frac{2|c|}{3(4\kappa - |c|)}, \quad \left(\kappa > \frac{|c|}{4} \right)
 \end{aligned}$$

bulunur.

(ii) $g_p(z) = zu_p(z)$ olduğundan, Lemma 4.2.1 in (i) kısmından

$$\frac{6\kappa - 2|c|}{6\kappa - |c|} \leq \left| \frac{g_p(z)}{z} \right| \quad (4.24)$$

olur. Lemma 4.2.2 nin (i) kısmındaki eşitsizlik ile (4.24) eşitsizliğinin birleştirilmesiyle

$$\left| \frac{zg'_p(z)}{g_p(z)} - 1 \right| \leq \frac{|c|(6\kappa - |c|)}{3(4\kappa - |c|)(3\kappa - |c|)}$$

ifadesi elde edilir.

(iii) Üçgen eşitsizliği ve

$$(3/2)_n \geq 3(n+1)/4, (\kappa)_n \geq (\kappa)^n, (n \in \mathbb{N}) \quad (4.25)$$

eşitsizlikleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned} |g'_p(z) - 1| &= \left| \sum_{n \geq 1} \frac{(n+1)(-c/4)^n}{(3/2)_n (\kappa)_n} z^n \right| \\ &\leq \frac{4}{3} \frac{|c|}{4\kappa} \sum_{n \geq 1} \left(\frac{|c|}{4\kappa} \right)^{n-1} \\ &= \frac{4|c|}{3(4\kappa - |c|)}, \quad \left(\kappa > \frac{|c|}{4} \right) \end{aligned}$$

bulunur.

(iv) Üçgen eşitsizliği ve

$$(3/2)_n \geq \frac{n(n+1)}{2}, (\kappa)_n \geq (\kappa)^n, (n \in \mathbb{N}) \quad (4.26)$$

eşitsizlikleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned} |zg''_p(z)| &= \left| \sum_{n \geq 1} \frac{n(n+1)(-c/4)^n}{(3/2)_n (\kappa)_n} z^n \right| \\ &\leq 2 \frac{|c|}{4\kappa} \sum_{n \geq 1} \left(\frac{|c|}{4\kappa} \right)^{n-1} = \frac{2|c|}{4\kappa - |c|}, \quad \left(\kappa > \frac{|c|}{4} \right) \end{aligned}$$

olur.

(v) Üçgen eşitsizliği ve (4.25) eşitsizlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} |g'_p(z)| &= \left| 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{(n+1)(-c/4)^n}{(3/2)_n (\kappa)_n} z^n \right| \\ &\leq 1 + \frac{4}{3} \frac{|c|}{4\kappa} \sum_{n \geq 1} \left(\frac{|c|}{4\kappa} \right)^{n-1} \\ &= \frac{12\kappa + |c|}{3(4\kappa - |c|)}, \quad \left(\kappa > \frac{|c|}{4} \right) \end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde ters üçgen eşitsizliği ve (4.25) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} |g'_p(z)| &= \left| 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{(n+1)(-c/4)^n}{(3/2)_n (\kappa)_n} z^n \right| \\ &\geq 1 - \frac{4}{3} \frac{|c|}{4\kappa} \sum_{n \geq 1} \left(\frac{|c|}{4\kappa} \right)^{n-1} \\ &= \frac{12\kappa - 7|c|}{3(4\kappa - |c|)}, \quad \left(\kappa > \frac{|c|}{4} \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

4.3. Genelleştirilmiş Struve Fonksiyonlarının Ünivalentliği, Yıldızlılığı ve Konveksliği

Bu bölümde, $\mathbb{U}$ birim diskinde g_p ve u_p fonksiyonlarının geometrik özelliklerinden ünivalent, yıldızlı ve konveks olma şartları belirlenecek.

Teorem 4.3.1: $\beta \geq 0$ ve b_n , (4.13) deki gibi olsun. $b_1 > 0$ olmak üzere

$$\left| u'_p(z) - b_1 \right|^{1-\beta} \left| \frac{z u''_p(z)}{u'_p(z)} \right|^\beta < (b_1)^{1-\beta} \left(\frac{1}{2} \right)^\beta \quad (4.27)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa u_p fonksiyonu $\mathbb{U}$ da ünivalenttir.

İspat: $h: \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu $h(z) = (u_p(z) - 1)/b_1$ biçiminde tanımlansın. Bu durumda (4.27) eşitsizliğinden

$$|h'(z) - b_1|^{1-\beta} \left| \frac{zh''(z)}{h'(z)} \right|^\beta < \left(\frac{1}{2} \right)^\beta \quad (4.28)$$

elde edilir. Ayrıca $f: \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu $f(z) = h'(z) - 1$ olarak tanımlanırsa f fonksiyonu $\mathbb{U}$ da analitik ve $f(0) = 0$ olur. O halde (4.28) den

$$|f(z)|^{1-\beta} \left| \frac{zf'(z)}{1+f(z)} \right|^\beta < \left(\frac{1}{2} \right)^\beta \quad (4.29)$$

ifadesi veya bu ifadeye denk olan

$$|f(z)| \left| \frac{zf'(z)}{f(z)} \frac{1}{1+f(z)} \right|^\beta < \left(\frac{1}{2} \right)^\beta$$

eşitsizliği bulunur. Şimdi $\max \{|f(z)| : |z| \leq |z_0|\} = |f(z_0)| = 1$ olacak şekilde bir $z_0 \in \mathbb{U}$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda Jack lemmasından $z_0 f'(z_0) / f(z_0) = m \geq 1$ yazılabilir ve dolayısıyla

$$|f(z_0)| \left| \frac{z_0 f'(z_0)}{f(z_0)} \frac{1}{1+f(z_0)} \right|^\beta \geq \left(\frac{m}{2} \right)^\beta \geq \left(\frac{1}{2} \right)^\beta \quad (4.30)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik, (4.29) ve aynı zamanda (4.27) eşitsizlikleriyle çelişir. O halde $|f(z)| = |h'(z) - 1| < 1$ dir. Bu ise her $z \in \mathbb{U}$ için $\operatorname{Re} h'(z) > 0$ olması anlamına gelir. Buradan $\operatorname{Re} [u'_p(z)/b_1] > 0$ olur. $b_1 > 0$ olduğundan $\operatorname{Re} u'_p(z) > 0$ elde edilir. Bu durumda Teorem 2.3.10 dan u_p fonksiyonu $\mathbb{U}$ da ünivalenttir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.3.1 de $\beta = 0$ ve $\beta = 1$ özel değerleri için aşağıdaki iki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.3.2: $b_1 > 0$ olmak üzere u_p fonksiyonu, her $z \in \mathbb{U}$ için $|u'_p(z) - b_1| < b_1$ eşitsizliğini sağlıyorsa $\mathbb{U}$ da ünivalenttir.

Sonuç 4.3.3: $b_1 > 0$ olmak üzere her $z \in \mathbb{U}$ için u_p fonksiyonu, $|zu_p''(z)/u_p'(z)| < 1/2$ eşitsizliğini sağlıyorsa $\mathbb{U}$ da ünivalenttir.

Teorem 4.3.4: $b, c, p \in \mathbb{R}$, $\kappa = p + (b+2)/2$ ve $\kappa \geq \frac{5 + \sqrt{1+2c^2}}{8}$ ise her $z \in \mathbb{U}$ için $\operatorname{Re} u_p(z) > 0$ dır (Orhan and Yağmur 2013).

İspat: $c = 0$ için $u_p(z) = 1$ olduğu açıktır, dolayısıyla $\operatorname{Re} u_p(z) > 0$ dır. Şimdi ise $c \neq 0$ ve $\kappa \geq \frac{5 + \sqrt{1+2c^2}}{8}$ olduğunu kabul edelim. Ayrıca $h = u_p$ olsun. Teorem 3.5.3 ü kullanarak $\operatorname{Re} u_p(z) > 0$ olduğunu göstereceğiz. u_p fonksiyonu (4.15) diferansiyel denklemini sağladığından

$$4z^2 h''(z) + 2(2p + b + 3)zh'(z) + (cz + 2p + b)h(z) - 2p - b = 0$$

olur. Eğer $\psi(r, s, t; z) = 4t + 2(2p + b + 3)s + (cz + 2p + b)r - 2p - b = 0$ ve $\mathcal{D} = \{0\}$ alınırsa her $z \in \mathbb{U}$ için $\psi(h(z), zh'(z), z^2 h''(z); z) \in \mathcal{D}$ olur. $x, y \in \mathbb{R}$, $z = x + iy$ olmak üzere her $\rho, \sigma, \mu, v \in \mathbb{R}$ için

$$\operatorname{Re} \psi(\rho i, \sigma, \mu + vi; x + iy) = 4(\mu + \sigma) + 2(2\kappa - 1)\sigma - c\rho y - 2(\kappa - 1)$$

elde edilir. $\rho, \sigma, \mu, v \in \mathbb{R}$ sayıları $\mu + \sigma \leq 0$ ve $\sigma \leq -(1 + \rho^2)/2$ şartlarını sağlasın.

$\kappa > \frac{1}{2}$ olduğundan

$$\operatorname{Re} \psi(\rho i, \sigma, \mu + vi; x + iy) \leq -(2\kappa - 1)\rho^2 - c\rho y - (4\kappa - 3)$$

olur. $Q_1(\rho) = -(2\kappa - 1)\rho^2 - c\rho y - (4\kappa - 3)$ olsun. Bu durumda $Q_1(\rho)$ fonksiyonu her $\rho \in \mathbb{R}$ için negatif olur. Çünkü $Q_1(\rho)$ in diskriminantı

$$\Delta = c^2 y^2 - 4(2\kappa - 1)(4\kappa - 3) < c^2 - 4(2\kappa - 1)(4\kappa - 3) \leq 0, \quad y \in (-1, 1)$$

dır. Sonuç olarak ψ fonksiyonu Teorem 3.5.3 deki uygunluk şartını sağlamış olur. O halde her $z \in \mathbb{U}$ için $\operatorname{Re} h(z) = \operatorname{Re} u_p(z) > 0$ dır.

Teorem 4.3.4, kompleks değişkenler için aşağıdaki biçimde genişletilebilir.

Teorem 4.3.5: $b, c, p \in \mathbb{C}$, $\kappa = p + (b+2)/2$ ve $\operatorname{Re} \kappa \geq \frac{5 + \sqrt{1+2|c|^2}}{8}$ ise her $z \in \mathbb{U}$ için $\operatorname{Re} u_p(z) > 0$ dır.

İspat: Bir önceki teoremin ispatına benzer olarak yapılabilir. $c = 0$ için $u_p(z) = 1$ olup $\operatorname{Re} u_p(z) > 0$ dır. $c \neq 0$ ve $\kappa \geq \frac{5 + \sqrt{1+2c^2}}{8}$ olduğunu kabul edelim. Ayrıca $h = u_p$ olsun. u_p fonksiyonu (4.15) diferansiyel denklemini sağladığından

$$4z^2 h''(z) + 2(2p + b + 3)zh'(z) + (cz + 2p + b)h(z) - 2p - b = 0$$

olur. Yine $\psi(r, s, t; z) = 4t + 2(2p + b + 3)s + (cz + 2p + b)r - 2p - b = 0$ ve $\mathcal{D} = \{0\}$ alınırsa her $z \in \mathbb{U}$ için $\psi(h(z), zh'(z), z^2 h''(z); z) \in \mathcal{D}$ olur. $x, y, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $z = x + iy$ ve $c = c_1 + ic_2$ olmak üzere her $\rho, \sigma, \mu, v \in \mathbb{R}$ için

$$\operatorname{Re} \psi(\rho i, \sigma, \mu + vi; x + iy) = 4(\mu + \sigma) + 2(2\operatorname{Re} \kappa - 1)\sigma - (c_1 y + c_2 x)\rho - 2(\operatorname{Re} \kappa - 1)$$

elde edilir. $\rho, \sigma, \mu, v \in \mathbb{R}$ sayıları $\mu + \sigma \leq 0$ ve $\sigma \leq -(1 + \rho^2)/2$ şartlarını sağlasın.

$\operatorname{Re} \kappa > \frac{1}{2}$ olduğundan

$$\operatorname{Re} \psi(\rho i, \sigma, \mu + vi; x + iy) \leq -(2\operatorname{Re} \kappa - 1)\rho^2 - (c_1 y + c_2 x)\rho - (4\operatorname{Re} \kappa - 3)$$

olur. $Q_1(\rho) = -(2\operatorname{Re} \kappa - 1)\rho^2 - (c_1 y + c_2 x)\rho - (4\operatorname{Re} \kappa - 3)$ olsun. Bu durumda $Q_1(\rho)$ fonksiyonu her $\rho \in \mathbb{R}$ için negatif olur. Çünkü $Q_1(\rho)$ in diskriminantı

$$\begin{aligned} \Delta &= (c_1 y + c_2 x)^2 - 4(2\operatorname{Re} \kappa - 1)(4\operatorname{Re} \kappa - 3) \\ &\leq |c|^2 |z|^2 - 4(2\operatorname{Re} \kappa - 1)(4\operatorname{Re} \kappa - 3) \\ &< |c|^2 - 4(2\operatorname{Re} \kappa - 1)(4\operatorname{Re} \kappa - 3) \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

dır. Dolayısıyla ψ fonksiyonu Teorem 3.5.3 deki uygunluk şartını sağlamış olur. O halde her $z \in \mathbb{U}$ için $\operatorname{Re} h(z) = \operatorname{Re} u_p(z) > 0$ dır.

Teorem 4.3.6: $b, p \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{C}$, $\kappa = p + (b+2)/2$ olmak üzere g_p fonksiyonu için aşağıdaki ifadeler doğrudur:

- (i) M , $\cos M = M$, ($M \approx 0.73909$) eşitliğini sağlayan pozitif bir sayı ve $\kappa > \frac{7M+2+\sqrt{M^2+12M+4}}{24M}|c|$ ise her $z \in \mathbb{U}$ için $\operatorname{Re} g'_p(z) > 0$ dır. Bu durumda $g_p(z)$, $\mathbb{U}$ da ünivalenttir,
- (ii) $\kappa > \frac{9+\sqrt{17}}{24}|c|$ ise $g_p(z)$, $\mathbb{U}$ da yıldızlıdır,
- (iii) $\kappa > \frac{13}{12}|c|$ ise $g_p(z)$, $\mathbb{U}$ da konvektir,
- (iv) $\kappa > \frac{1}{3}|c|$ ise $g_p(z)$, $|z| < 1/2$ diskinde yıldızlıdır,
- (v) $\kappa > \frac{7}{12}|c|$ ise $g_p(z)$, $|z| < 1/2$ diskinde konvektir (Orhan and Yağmur 2013).

İspat: (i) Lemma 4.2.2 nin (ii) kısmından $\kappa > \frac{7M+2+\sqrt{M^2+12M+4}}{24M}|c|$ için

$$\left| \frac{zg'_p(z)}{g_p(z)} - 1 \right| \leq \frac{|c|(6\kappa - |c|)}{3(4\kappa - |c|)(3\kappa - |c|)} < M$$

olur. Teorem 3.5.11 den $\operatorname{Re} g'_p(z) > 0$ dır. Noshiro-Warschawski teoreminden $g_p(z)$, $\mathbb{U}$ da ünivalenttir.

(ii) Lemma 4.2.2 nin (ii) kısmından $\kappa > \frac{9+\sqrt{17}}{24}|c|$ için

$$\left| \frac{zg'_p(z)}{g_p(z)} - 1 \right| \leq \frac{|c|(6\kappa - |c|)}{3(4\kappa - |c|)(3\kappa - |c|)} < 1$$

eşitsizliği yazılır. Bu ise $g_p(z)$ fonksiyonunun $\mathcal{S}_1^*(0)$ sınıfına ait (yani yıldızlı) olduğunu gösterir.

(iii) Lemma 4.2.2 nin (iv) ve (v) kısımlarının birleşiminden

$$\left| \frac{zg_p''(z)}{g_p'(z)} \right| \leq \frac{6|c|}{12\kappa - 7|c|}$$

elde edilir. Bu ifade $\kappa > \frac{13}{12}|c|$ için

$$\left| \frac{zg_p''(z)}{g_p'(z)} \right| < 1$$

haline dönüşür. Bu da $g_p(z)$ nin $\mathbb{U}$ da konveks olduğunu ifade eder.

(iv) $g_p(z) = zu_p(z)$ olduğundan, Lemma 4.2.1 in (i) kısmının ispatında kullanılan metotla

$$\left| \frac{g_p(z)}{z} - 1 \right| \leq \frac{|c|}{6\kappa - |c|}, \quad \left(\kappa > \frac{1}{6}|c| \right)$$

olduğu gösterilebilir. Bu ifade $\kappa > \frac{1}{3}|c|$ için

$$\left| \frac{g_p(z)}{z} - 1 \right| \leq \frac{|c|}{6\kappa - |c|} < 1$$

olduğundan Teorem 3.5.12 den $g_p(z)$ nin $|z| < 1/2$ diskinde yıldızlı olduğu görülür.

(v) Lemma 4.2.2 nin (iii) kısmından $\kappa > \frac{7}{12}|c|$ için

$$\left| g_p'(z) - 1 \right| \leq \frac{4|c|}{3(4\kappa - |c|)} < 1$$

olur. Bu durumda Teorem 3.5.13 den $g_p(z)$, $|z| < 1/2$ diskinde konvektir.

Teorem 4.3.4 ve Teorem 4.3.6 da $b = c = 1$ alınırsa Struve fonksiyonu için aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.3.7: $H_p(z)$, Struve fonksiyonu olmak üzere $\mathcal{H}_p : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu, $\mathcal{H}_p(z) = 2^p \sqrt{\pi} \Gamma(p+3/2) z^{-p-1} H_p(z)$ şeklinde tanımlansın. Bu fonksiyon normalize edilmiş Struve fonksiyonudur. Bu durumda, normalize edilmiş Struve fonksiyonu için,

- (i) $p \geq \frac{-7+\sqrt{3}}{8}$ ise her $z \in \mathbb{U}$ için $\operatorname{Re} \mathcal{H}_p(z^{1/2}) > 0$ dır,
- (ii) M , $\cos M = M$, ($M \approx 0.73909$) eşitliğini sağlayan pozitif bir sayı ve $p > \frac{-29M + \sqrt{M^2 + 12M + 4}}{24M} \approx -1,00184$ ise her $z \in \mathbb{U}$ için $\operatorname{Re} \left[z \mathcal{H}_p(z^{1/2}) \right]' > 0$ dır.

Bu durumda $z \mathcal{H}_p(z^{1/2})$, $\mathbb{U}$ da ünivalenttir,

- (iii) $p \geq \frac{-27+\sqrt{17}}{24}$ ise $z \mathcal{H}_p(z^{1/2})$, $\mathbb{U}$ da yıldızlıdır,
 - (iv) $p \geq -5/12$ ise $z \mathcal{H}_p(z^{1/2})$, $\mathbb{U}$ da konvektir,
 - (v) $p \geq -7/6$ ise $z \mathcal{H}_p(z^{1/2})$, $|z| < 1/2$ diskinde yıldızlıdır,
 - (vi) $p \geq -11/12$ ise $z \mathcal{H}_p(z^{1/2})$, $|z| < 1/2$ diskinde konvektir
- ifadeleri yazılır.

Teorem 4.3.4 ve Teorem 4.3.6 da $b=1$, $c=-1$ alınırsa, modifiye edilmiş Struve fonksiyonu için aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.3.8: $L_p(z)$, modifiye edilmiş Struve fonksiyonu olmak üzere $\mathcal{L}_p : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu, $\mathcal{L}_p(z) = 2^p \sqrt{\pi} \Gamma(p+3/2) z^{-p-1} L_p(z)$ şeklinde tanımlansın. Bu fonksiyon normalize ve modifiye edilmiş Struve fonksiyonudur. Bu durumda normalize ve modifiye edilmiş Struve fonksiyonu için,

- (i) $p \geq \frac{-7+\sqrt{3}}{8}$ ise her $z \in \mathbb{U}$ için $\operatorname{Re} \mathcal{L}_p(z^{1/2}) > 0$ dır,

(ii) M , $\cos M = M$, ($M \approx 0.73909$) eşitliğini sağlayan pozitif bir sayı ve $p > \frac{-29M + \sqrt{M^2 + 12M + 4}}{24M} \approx -1,00184$ ise her $z \in \mathbb{U}$ için $\operatorname{Re} \left[z \mathcal{L}_p \left(z^{1/2} \right) \right]' > 0$ dır.

Bu durumda $z \mathcal{L}_p \left(z^{1/2} \right)$, $\mathbb{U}$ da ünivalenttir,

(iii) $p \geq \frac{-27 + \sqrt{17}}{24}$ ise $z \mathcal{L}_p \left(z^{1/2} \right)$, $\mathbb{U}$ da yıldızlıdır,

(iv) $p \geq -5/12$ ise $z \mathcal{L}_p \left(z^{1/2} \right)$, $\mathbb{U}$ da konvektir,

(v) $p \geq -7/6$ ise $z \mathcal{L}_p \left(z^{1/2} \right)$, $|z| < 1/2$ diskinde yıldızlıdır,

(vi) $p \geq -11/12$ ise $z \mathcal{L}_p \left(z^{1/2} \right)$, $|z| < 1/2$ diskinde konvektir

ifadeleri doğrudur.

Örnek 4.3.9: Sonuç 4.3.7 de $p = -1/2$ alınırsa

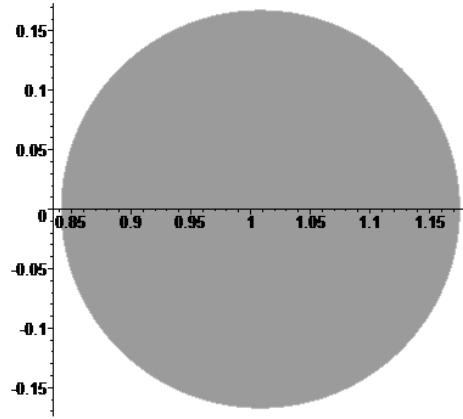
$\mathcal{H}_{-1/2}(\sqrt{z}) = 2^{-1/2} \sqrt{\pi} z^{-1/4} H_{-1/2}(\sqrt{z}) = \frac{\sin \sqrt{z}}{\sqrt{z}}$ elde edilir. $p = -1/2 > \frac{-7 + \sqrt{3}}{8}$

olduğundan $\operatorname{Re} \mathcal{H}_{-1/2}(z^{1/2}) = \operatorname{Re} \left[\frac{\sin \sqrt{z}}{\sqrt{z}} \right] > 0$ dır. Ayrıca MAPLE 17 programı

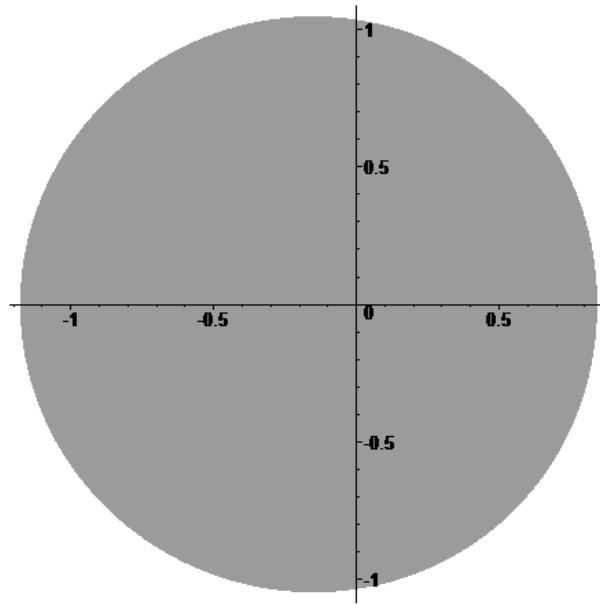
kullanılarak $\mathbb{U}$ birim diskinin $\mathcal{H}_{-1/2}(z^{1/2})$ dönüşümü altındaki görüntüsü (Şekil 4.1) bu

iddiayı doğrulamaktadır. Yine $p = -1/2 > \frac{-27 + \sqrt{17}}{24}$ olduğundan

$h_{-1/2}(z) = z \mathcal{H}_{-1/2}(z^{1/2}) = \sqrt{z} \sin \sqrt{z}$ fonksiyonu, Şekil 4.2 de de görüldüğü gibi $\mathbb{U}$ birim diskinde yıldızlı ve dolayısıyla ünivalenttir.



Şekil 4.1. $\mathcal{H}_{-1/2}(\sqrt{z}) = \frac{\sin \sqrt{z}}{\sqrt{z}}$ fonksiyonu altında birim diskin görüntüsü



Şekil 4.2. $h_{-1/2}(z) = \sqrt{z} \sin \sqrt{z}$ fonksiyonu altında birim diskin görüntüsü

4.4. Genelleştirilmiş Struve Fonksiyonlarının Konvekse Yakınlığı

Bu bölümde, Ozaki ve Fejer teoremleri kullanılarak g_p ve u_p fonksiyonlarının, $f_1, f_2 : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{C}$ olmak üzere

$$f_1(z) = -\text{Log}(1-z), \quad f_2(z) = \frac{1}{2} \text{Log}\left(\frac{1+z}{1-z}\right),$$

konveks fonksiyonlarına göre $\mathbb{U}$ birim diskinde konvekse yakın olma şartları belirlenmiştir.

Teorem 4.4.1: $b, p \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{C}$, $\kappa = p + (b+2)/2$ ve $\alpha \in [0,1)$ olsun. Bu durumda $\kappa > \frac{\alpha+9}{4(1-\alpha)}|c|$ ise her $z \in \mathbb{U}$ için $g_p(z) \in \mathcal{K}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)$ ve $\text{Re } g_p'(z) > \frac{1+\alpha}{2}$ dir (Orhan and Yağmur 2013).

İspat: $\kappa > \frac{\alpha+9}{4(1-\alpha)}|c|$ ise Lemma 4.2.2 nin (iv) kısmından $|zg_p''(z)| \leq \frac{2|c|}{4\kappa - |c|} < \frac{1-\alpha}{4}$

dır. Bu durumda Teorem 3.5.14 den $\text{Re } g_p'(z) > \frac{1+\alpha}{2}$ dır. Bu da $g_p(z) \in \mathcal{K}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)$ olduğunu gösterir.

Teorem 4.4.2: $b, c, p \in \mathbb{R}$, $c < 0$, $\kappa = p + (b+2)/2$ ise aşağıdaki ifadeler doğrudur:

- (i) $\kappa \geq -c/3$ ise $g_p(z)$ fonksiyonu, f_1 e göre konvekse yakındır ve dolayısıyla $\mathbb{U}$ da ünivalenttir.
- (ii) $\kappa \geq -c/2$ ise $z \rightarrow zu_p(z^2)$ fonksiyonu, f_2 ye göre konvekse yakındır ve dolayısıyla $\mathbb{U}$ da ünivalenttir (Orhan and Yağmur 2013).

İspat: (i) $b_n = \frac{(-c/4)^n}{(3/2)_n (\kappa)_n}$ olmak üzere

$g_p(z) = zu_p(z) = \sum_{n \geq 0} b_n z^{n+1} = z + b_1 z^2 + b_2 z^3 + \dots + b_n z^{n+1} + \dots$ olduğu bilinmektedir. Açıkça

$2b_1 = -c/(3\kappa) \leq 1$ ve her $n \geq 2$ için $b_{n-1} > 0$ dır. $(\kappa)_n = (\kappa + n - 1)(\kappa)_{n-1}$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$b_n = -\frac{c}{2(2n+1)(\kappa+n-1)} b_{n-1}$$

yazılır. Teorem 3.5.7 kullanılarak $g_p(z)$ fonksiyonunun $f_1(z) = -\text{Log}(1-z)$ ye göre konvekse yakın olduğu gösterilecektir. O yüzden $\{nb_{n-1}\}_{n \geq 1}$ dizisinin azalan bir dizi olduğunu göstermek gerekir. Basit bir hesaplamayla

$$nb_n - (n+1)b_n = \left[n + \frac{c(n+1)}{2(2n+1)(\kappa+n-1)} \right] b_{n-1}$$

bulunur. Bu ifade, $U_1(n) = 4n^3 + 2(2\kappa-1)n^2 + (2\kappa-2+c)n + c$ denilirse

$$nb_n - (n+1)b_n = \frac{U_1(n)}{2(2n+1)(\kappa+n-1)} b_{n-1}$$

şeklinde yazılabilir. $n^3 \geq 3n^2 - 3n + 1$ ve $n^2 \geq 2n - 1$ eşitsizlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned} U_1(n) &\geq (4\kappa+10)n^2 + (2\kappa-14+c)n + c + 4 \\ &\geq (10\kappa+6+c)n - 4\kappa + c - 6 \\ &\geq U_1(1) = 6\kappa + 2c \geq 0 \end{aligned}$$

olduğu görülür. Çünkü $4\kappa+10 > 0$ ve $10\kappa+6+c > 0$ oldukları hipotezden biliniyor. Dolayısıyla her $n \geq 1$ için $nb_n - (n+1)b_n \geq 0$ olur. Bu ise $\{nb_{n-1}\}_{n \geq 1}$ dizisinin azalan bir dizi olduğunu gösterir. Teorem 3.5.7 den $g_p(z)$ fonksiyonu f_1 fonksiyonuna göre konvekse yakındır. Her konvekse yakın fonksiyon ünivalent olduğundan $g_p(z)$ fonksiyonu da ünivalenttir.

$$(ii) \quad b_n = \frac{(-c/4)^n}{(3/2)_n (\kappa)_n} \quad \text{olmak} \quad \text{üzere} \quad zu_p(z^2) = z + b_1 z^3 + b_2 z^5 + \dots + b_{n-1} z^{2n-1} + \dots$$

biçimindedir. Açıkça $3b_1 = -c/(2\kappa) \leq 1$ ve her $n \geq 2$ için $b_{n-1} > 0$ dır. $\{(2n-1)b_{n-1}\}_{n \geq 2}$ dizisinin azalan bir dizi olduğunu göstereceğiz. Bunun için $(2n-1)b_{n-1} - (2n+1)b_n > 0$ eşitsizliğinin sağlandığını göstermek gerekir.

$$(2n-1)b_{n-1} - (2n+1)b_n = \left[2n-1 + \frac{c(2n+1)}{2(2n+1)(\kappa+n-1)} \right] b_{n-1}$$

olduğu kolayca görülebilir. $U_2(n) = 8n^3 + 8(\kappa-1)n^2 + 2(c-1)n - 2(\kappa-1) + c$ denilirse

$$(2n-1)b_{n-1} - (2n+1)b_n = \frac{U_2(n)}{2(2n+1)(\kappa+n-1)} b_{n-1}$$

olur. Ayrıca $n^3 \geq 3n^2 - 3n + 1$ ve $n^2 \geq 2n - 1$ eşitsizlikleri kullanıldığında

$$\begin{aligned} U_2(n) &\geq 8(\kappa+2)n^2 + 2(c-13)n - 2(\kappa-5) + c \\ &\geq 2(8\kappa+c+3)n - 2(5\kappa+3) + c \\ &\geq U_2(1) = 3(2\kappa+c) \geq 0 \end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla $\{(2n-1)b_{n-1}\}_{n \geq 2}$ dizisi azalan bir dizidir. Bu durumda istenen, Sonuç 3.5.10 dan elde edilir.

Sonuç 4.4.3: Teorem 4.4.2 de $b=1$, $c=-1$ alınırsa aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

- (i) $p \geq -7/6$ ise $z\mathcal{L}_p(z^{1/2})$ fonksiyonu, f_1 e göre konvekse yakındır,
- (ii) $p \geq -1$ ise $z\mathcal{L}_p(z)$ fonksiyonu, f_2 ye göre konvekse yakındır.

Teorem 4.4.4: $b, c, p \in \mathbb{R}$, $c < \frac{91 - \sqrt{11353}}{8} \approx -1,9438$, $\kappa = p + (b+2)/2$ ve

$$\kappa \geq \lambda(c) = \frac{-(20c+29) + \sqrt{160c^2 - 3640c - 6839}}{120} \quad \text{ise} \quad g_p \quad \text{fonksiyonunun} \quad \Lambda[g_p]$$

Alexander dönüşümü, $\mathbb{U}$ da yıldızıl ve f_1 fonksiyonuna göre konvekse yakındır.

Ayrıca her $z \in \mathbb{U}$ için $\operatorname{Re} u_p(z) > 1/2$ dir (Orhan and Yağmur 2013).

İspat: $b_n = \frac{(-c/4)^n}{(3/2)_n (\kappa)_n}$ olmak üzere g_p fonksiyonu $g_p(z) = zu_p(z) = z + \sum_{n \geq 2} b_{n-1} z^n$

biçiminde yazılabilir. Her $n \geq 1$ için $A_n = \frac{b_{n-1}}{n} = \frac{(-c/4)^{n-1}}{n(3/2)_{n-1} (\kappa)_{n-1}}$ olarak alındığında,

g_p fonksiyonunun $\Lambda[g_p]$ Alexander dönüşümü $\Lambda[g_p](z) = \sum_{n \geq 1} A_n z^n$ şeklinde olur.

Açıkça $A_1 = 1$ dir. Çünkü

$$\lambda(c) = \frac{-(20c+29) + \sqrt{160c^2 - 3640c - 6839}}{120} \quad (4.31)$$

olmak üzere c negatif ve $\kappa \geq \lambda(c) \geq -c/6 > 0$ dir. Ayrıca her $n \geq 2$ için $A_n \geq 0$ dir.

Şimdi $\{nA_n\}_{n \geq 1}$ dizisinin azalan olduğunu gösterelim. $(\kappa)_n = (\kappa+n-1)(\kappa)_{n-1}$ eşitliği göz önüne alınırsa,

$$(n+1)A_{n+1} = -\frac{cn}{2(2n+1)(\kappa+n-1)} A_n \quad (4.32)$$

ifadesi elde edilir. $U_3(n) = 4n^2 + 2(2\kappa-1)n + 2\kappa - 2 + c$ olarak alınır ve (4.32) kullanılırsa

$$nA_n - (n+1)A_{n+1} = -\frac{nU_3(n)}{2(2n+1)(\kappa+n-1)} A_n,$$

olur. $n^2 \geq 2n-1$ ve $6\kappa > -c$ olduğundan

$$\begin{aligned} U_3(n) &\geq (4\kappa+6)n + 2\kappa - 6 + c \\ &\geq U_3(1) = 6\kappa + c > 0 \end{aligned}$$

yazılır. Bu ise $nA_n > (n+1)A_{n+1}$ olması demektir. Yani $\{nA_n\}_{n \geq 1}$ dizisi azalandır.

Şimdi $\{nA_n - (n+1)A_{n+1}\}_{n \geq 1}$ dizisinin azalan olduğunu göstereceğiz.

$$D_1 = 16\kappa^2 + 48\kappa + 8c - 20, \quad D_2 = 32\kappa^2 + 8\kappa c - 8\kappa + 12c - 12,$$

$$D_3 = 12\kappa^2 + 12\kappa c - 12\kappa + c^2 + 32$$

ve her $n \geq 1$ için

$$U_4(n) = 16n^4 + (\kappa+16)n^3 + D_1n^2 + D_2n + D_3$$

olsun. Ayrıca $B_n = nA_n - (n+1)A_{n+1}$ olarak yazılırsa

$$B_n - B_{n+1} = -\frac{nU_4(n)}{4(2n+1)(2n+3)(\kappa+n)(\kappa+n-1)} A_n$$

olur. Amacımız $U_4(n) > 0$ olduğunu göstermektir. $n^4 \geq 4n^3 - 6n^2 + 4n - 1$ eşitsizliği göz önüne alınırsa,

$$U_5(n) = (\kappa + 80)n^3 + (D_1 - 96)n^2 + (D_2 + 64)n + D_3 - 16$$

olmak üzere $U_4(n) \geq U_5(n)$ eşitsizliği elde edilir. $\kappa > 0$ olduğundan $\kappa + 80 > 0$ dır. Bu durumda $n^3 \geq 3n^2 - 3n + 1$ eşitsizliği kullanılırsa,

$$D_4 = 16\kappa^2 + 51\kappa + 8c + 124, \quad D_5 = 32\kappa^2 + 8\kappa c - 11\kappa + 12c - 188,$$

$$D_6 = 12\kappa^2 + 12\kappa c - 11\kappa + c^2 + 96$$

ve

$$U_6(n) = D_4 n^2 + D_5 n + D_6$$

olmak üzere $U_5(n) \geq U_6(n)$ olur. $D_4 = 0$ denkleminin büyük kökü

$$\left[-51 + \sqrt{-5335 - 512c} \right] / 32 \text{ olup } \kappa \geq \lambda(c) > \left[-51 + \sqrt{-5335 - 512c} \right] / 32 \text{ olduğundan}$$

$D_4 > 0$ dır. Bu durumda $n^2 \geq 2n - 1$ eşitsizliğinin kullanılmasıyla

$$D_7 = 2D_4 + D_5, \quad D_8 = D_6 - D_4$$

ve

$$U_7(n) = D_7 n + D_8$$

olmak üzere $U_6(n) \geq U_7(n)$ eşitsizliği elde edilir. Aynı şekilde

$$D_7 = 64\kappa^2 + (91 + 8c)\kappa + 28c + 60 = 0$$

denkleminin büyük kökü

$$\kappa_c = \frac{-(8c + 91) + \sqrt{64c^2 - 5712c - 7079}}{128}$$

olup $\kappa \geq \lambda(c) > \kappa_c$ dır. O halde $D_7 > 0$ dır. Bu durumda $U_7(n) \geq U_7(1)$ ve

$$U_7(1) = D_4 + D_5 + D_6 = 60\kappa^2 + (20c + 29)\kappa + c^2 + 20c + 32$$

elde edilir. $U_7(1) = 0$ denkleminin büyük kökü $\lambda(c)$ ve $\kappa \geq \lambda(c) > 0$ olduğundan

$$U_4(n) \geq U_5(n) \geq U_6(n) \geq U_7(n) \geq U_7(1) > 0$$

eşitsizlik zinciri elde edilmiş olur. Bu ise $B_n - B_{n+1} > 0$ olduğunu gösterir. Dolayısıyla $\{nA_n - (n+1)A_{n+1}\}_{n \geq 1}$ dizisi azalan bir dizidir. Teorem 3.5.5 den $\Lambda[g_p]$ Alexander dönüşümü $\mathbb{U}$ da yıldızlıdır.

$\{nA_n\}_{n \geq 1}$ dizisi azalan ve $2A_2 = b_1 = -c/(6\kappa) < 1$ olduğundan Teorem 3.5.7 den $\Lambda[g_p]$ Alexander dönüşümü, f_1 fonksiyonuna göre konvekse yakındır.

$\operatorname{Re} u_p(z) > 1/2$ olduğunu göstermek için Teorem 3.5.6'yı kullanacağız. Teorem 3.5.6 da $g(z) = u_p(z)$ olarak alınırsa her $n \geq 1$ için $C_n = b_{n-1} = nA_n$ olup $\{C_n\}_{n \geq 1}$ dizisi azalandır. Ayrıca her $n \geq 1$ için $C_n - 2C_{n+1} + C_{n+2} = B_n - B_{n+1} > 0$ dir. Dolayısıyla $u_p(z)$, Teorem 3.5.6'nın şartlarını sağladığından her $z \in \mathbb{U}$ için $\operatorname{Re} u_p(z) > 1/2$ dir.

Sonuç 4.4.5: $b, c, p \in \mathbb{R}$, $c < \frac{91 - \sqrt{11353}}{8} \approx -1,9438$, $\kappa = p + (b+2)/2$ ve $\kappa \geq \lambda(c) - 1$

ise

$$f(z) = \int_0^z \frac{1 - u_p(t) - 2tu_p'(t)}{t} dt$$

fonksiyonu her $z \in \mathbb{U}$ için ünivalenttir.

İspat: Teorem 4.4.4 den $\kappa \geq \lambda(c)$ için g_p nin Alexander dönüşümü olan $\int_0^z u_p(t) dt$ nin

f_1 fonksiyonuna göre konvekse yakın olduğunu biliyoruz. Bu durumda $\kappa \geq \lambda(c) - 1$

için $\int_0^z u_{p+1}(t) dt$ integrali, f_1 fonksiyonuna göre konvekse yakın olur ve dolayısıyla

ünivalenttir. Önerme 4.1.1 in (v) kısmından

$$\int_0^z u_{p+1}(t) dt = \frac{2\kappa}{c} \int_0^z \frac{1 - u_p(t) - 2tu_p'(t)}{t} dt = \frac{2\kappa}{c} f(z)$$

elde edilir. $\frac{2\kappa}{c}f(z)$ ünivalent olduğundan $f(z)$ de $\mathbb{U}$ da ünivalenttir. Çünkü ünivalent bir fonksiyonun sıfırdan farklı bir katsayıyla çarpımı, ünivalentliğini değiştirmez. Böylece ispat tamamlanır.

4.5. Genelleştirilmiş Struve Fonksiyonlarının α Mertebeden Yıldızlılığı ve α Mertebeden Konveksliği

Bu bölümde w_p , u_p ve g_p fonksiyonlarının $\mathbb{U}$ birim diskinde α mertebeden yıldızlı ve α mertebeden konveks olma şartları belirlenmiştir.

Teorem 4.5.1: $b, c, p \in \mathbb{R}$, $\kappa = p + (b+2)/2$ ve $\alpha \in [0, 2 - \sqrt{2}]$ olmak üzere,

$$\kappa \geq \frac{3\alpha^2 - 10\alpha + 5 + (1-\alpha)\sqrt{(1-\alpha)^2 + c^2(\alpha^2 - 4\alpha + 2)}}{4(\alpha^2 - 4\alpha + 2)}$$

ise her $z \in \mathbb{U}$ için $\operatorname{Re} u_p(z) > \alpha$ dır (Orhan and Yağmur 2013).

İspat: $c = 0$ için $u_p(z) = 1$ olduğu açıktır, dolayısıyla her $z \in \mathbb{U}$ için $\operatorname{Re} u_p(z) > \alpha$ dır.

Şimdi ise $c \neq 0$ ve $\kappa \geq \frac{3\alpha^2 - 10\alpha + 5 + (1-\alpha)\sqrt{(1-\alpha)^2 + c^2(\alpha^2 - 4\alpha + 2)}}{4(\alpha^2 - 4\alpha + 2)}$ olduğunu

kabul edelim. Ayrıca $h: \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonunu

$$h(z) = \frac{u_p(z) - \alpha}{1 - \alpha}$$

şeklinde tanımlayalım. u_p fonksiyonu (4.15) diferansiyel denklemini sağladığından h fonksiyonu,

$$4z^2 h''(z) + 2(2p + b + 3)zh'(z) + (cz + 2p + b)\left(h(z) + \frac{\alpha}{1 - \alpha}\right) - \left(\frac{2p + b}{1 - \alpha}\right) = 0 \quad (4.33)$$

diferansiyel denklemini sağlar.

Eğer $\psi(r, s, t; z) = 4t + 2(2p + b + 3)s + (cz + 2p + b)\left(r + \frac{\alpha}{1-\alpha}\right) - \left(\frac{2p+b}{1-\alpha}\right)$ ve $\mathcal{D} = \{0\}$

alınırsa (4.33) den her $z \in \mathbb{U}$ için $\psi(h(z), zh'(z), z^2 h''(z); z) \in \mathcal{D}$ olur. Teorem 3.5.3 ü kullanarak her $z \in \mathbb{U}$ için $\operatorname{Re} h(z) > 0$ olduğunu göstereceğiz. $x, y \in \mathbb{R}$, $z = x + iy$ olmak üzere her $\rho, \sigma, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ için,

$$\operatorname{Re} \psi(\rho i, \sigma, \mu + \nu i; x + iy) = 4(\mu + \sigma) + 2(2\kappa - 1)\sigma - c\rho y + (cx + 2\kappa - 2)\frac{\alpha}{1-\alpha} - \frac{2(\kappa - 1)}{1-\alpha}$$

elde edilir. $\rho, \sigma, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ sayıları $\mu + \sigma \leq 0$ ve $\sigma \leq -(1 + \rho^2)/2$ şartlarını sağlasın.

$\kappa > \frac{1}{2}$ olduğundan

$$\operatorname{Re} \psi(\rho i, \sigma, \mu + \nu i; x + iy) \leq -(2\kappa - 1)\rho^2 - c\rho y - (2\kappa - 1) + (cx + 2\kappa - 2)\frac{\alpha}{1-\alpha} - \frac{2(\kappa - 1)}{1-\alpha}$$

olur. $Q_1(\rho) = -(2\kappa - 1)\rho^2 - c\rho y - (2\kappa - 1) + (cx + 2\kappa - 2)\frac{\alpha}{1-\alpha} - \frac{2(\kappa - 1)}{1-\alpha}$ olsun. Bu

durumda $Q_1(\rho)$ fonksiyonu her $\rho \in \mathbb{R}$ için negatif olur. Çünkü $Q_1(\rho)$ nin diskriminantı

$$\Delta_1 = c^2 y^2 - 4(2\kappa - 1)\left(-(2\kappa - 1) + (cx + 2\kappa - 2)\frac{\alpha}{1-\alpha} - \frac{2(\kappa - 1)}{1-\alpha}\right)$$

olup $x^2 + y^2 < 1$ ($|z| < 1$) olduğundan

$$\Delta_1 < c^2(1 - x^2) - 4(2\kappa - 1)^2 + 4(2\kappa - 1)(cx + 2\kappa - 2)\frac{\alpha}{1-\alpha} - \frac{8(2\kappa - 1)(\kappa - 1)}{1-\alpha}$$

yazılır. $Q_2(x) = c^2(1 - x^2) - 4(2\kappa - 1)^2 + 4(2\kappa - 1)(cx + 2\kappa - 2)\frac{\alpha}{1-\alpha} - \frac{8(2\kappa - 1)(\kappa - 1)}{1-\alpha}$

olarak alınırsa $Q_2(x) \leq 0$ dır. Çünkü $Q_2(x)$ in diskriminantı,

$$\Delta_2 = 4c^2 \left[4(2\kappa - 1)^2 \frac{\alpha^2}{(1-\alpha)^2} - 4(2\kappa - 1)(4\kappa - 3) + c^2 \right]$$

olup $\Delta_2 < 0$ olması için gerek ve yeter şart

$\kappa \geq \frac{3\alpha^2 - 10\alpha + 5 + (1-\alpha)\sqrt{(1-\alpha)^2 + c^2(\alpha^2 - 4\alpha + 2)}}{4(\alpha^2 - 4\alpha + 2)}$ olmasıdır. Sonuç olarak Teorem

3.5.3 den her $z \in \mathbb{U}$ için $\operatorname{Re} h(z) = \operatorname{Re} \left[\frac{1}{1-\alpha} (u_p(z) - \alpha) \right] > 0$ olur. Dolayısıyla her $z \in \mathbb{U}$ için $\operatorname{Re} u_p(z) > \alpha$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.5.2: Teorem 4.5.1 de $\alpha = 0$ alınırsa Teorem 4.3.4 elde edilir.

Teorem 4.5.3: $\alpha \in [0, 1/2]$ olmak üzere u_p fonksiyonu, her $z \in \mathbb{U}$ için

$$\left| \frac{zu'_p(z)}{u_p(z)} \right| < 1 - \alpha \quad (4.34)$$

şartını sağlıyorsa $g_p \in \mathcal{S}^*(\alpha)$ dır (Yağmur and Orhan 2013a).

İspat: $g_p(z) = zu_p(z)$ olduğundan (4.34) eşitsizliği

$$\left| \frac{zg'_p(z)}{g_p(z)} - 1 \right| < 1 - \alpha \quad (4.35)$$

haline gelir. Teorem 3.5.15 de $\beta = 0$ alınmasıyla $g_p \in \mathcal{S}^*(\alpha)$ olduğu görülür.

Teorem 4.5.4: $\alpha \in [0, 1/2]$ olmak üzere u_p fonksiyonu, her $z \in \mathbb{U}$ için

$$\left| \frac{zu''_p(z)}{u'_p(z)} \right| < \frac{1 - 3\alpha/2 + \alpha^2}{1 - \alpha} \quad (4.36)$$

şartını sağlıyorsa 1 noktasına göre α mertebeden yıldızlıdır (Yağmur and Orhan 2013a).

İspat: $h: \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu $h(z) = [u_p(z) - 1]/b_1$ biçiminde tanımlansın. Bu durumda $h \in \mathcal{A}$ olur ve $\alpha \in [0, 1/2]$ için

$$\left| \frac{zh''_p(z)}{h'_p(z)} \right| = \left| \frac{zu''_p(z)}{u'_p(z)} \right| < \frac{1 - 3\alpha/2 + \alpha^2}{1 - \alpha} \quad (4.37)$$

eşitsizliği sağlanır. Teorem 3.5.15 de $\beta=1$ alınırsa $h \in \mathcal{S}^*(\alpha)$ olur. $u_p(z) = b_1 h(z) + 1$ olduğundan u_p fonksiyonu, 1 noktasına göre α mertebeden yıldızlı olduğu görülür.

Teorem 4.5.5: $\alpha \in [0, 1/2]$ olmak üzere her $z \in \mathbb{U}$ için

$$\left| \frac{zu'_{p+1}(z)}{u_{p+1}(z)} \right| < 1 - \alpha \quad (4.38)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa $2g'_p - u_p$ fonksiyonu, 1 noktasına göre α mertebeden yıldızlıdır (Yağmur and Orhan 2013a).

İspat: (4.38) eşitsizliğinin sağlanması durumunda Teorem 4.5.3 den $g_{p+1} \in \mathcal{S}^*(\alpha)$ olur.

Önerme 4.1.1 in (v). kısmından $u_p(z) + 2zu'_p(z) = -\frac{c}{2\kappa} zu_{p+1}(z) + 1$ elde edilir. Buradan

$$2g'_p(z) - u_p(z) = -\frac{c}{2\kappa} g_{p+1}(z) + 1 \text{ olur. } g_{p+1} \in \mathcal{S}^*(\alpha) \text{ olduğundan } 2g'_p - u_p \text{ fonksiyonu,}$$

1 noktasına göre α mertebeden yıldızlı olur.

Teorem 4.5.6: $b, c, p \in \mathbb{R}$, $\kappa = p + (b+2)/2$ ve $\alpha \in [0, 1)$ olsun. Bu durumda

$$(i) \quad \kappa > \frac{9 - \alpha + \sqrt{\alpha^2 - 14\alpha + 7}}{24(1 - \alpha)} |c| \text{ ise } g_p \in \mathcal{S}^*(\alpha) \text{ dır,}$$

$$(ii) \quad \kappa > \frac{13 - 7\alpha}{12(1 - \alpha)} |c| \text{ ise } g_p \in \mathcal{C}(\alpha) \text{ dır,}$$

$$(iii) \quad \kappa > \frac{9 - \alpha + \sqrt{\alpha^2 - 14\alpha + 7}}{24(1 - \alpha)} |c| \text{ ve } \alpha \neq 0 \text{ ise } z \rightarrow z^{(1-2\alpha-p)/2\alpha} w_p(z^{1/2\alpha}) \text{ fonksiyonu}$$

$\mathbb{U}$ da yıldızlıdır (Yağmur and Orhan 2013a).

İspat: (i) $\kappa > \frac{9 - \alpha + \sqrt{\alpha^2 - 14\alpha + 7}}{24(1 - \alpha)} |c|$ olsun. Bu durumda Lemma 4.2.2 nin (ii)

kısımından

$$\left| \frac{zg'_p(z)}{g_p(z)} - 1 \right| \leq \frac{|c|(6\kappa - |c|)}{3(4\kappa - |c|)(3\kappa - |c|)} < 1 - \alpha$$

eşitsizliği sağlanır. Bu ise $g_p \in \mathcal{S}^*(\alpha)$ olduğunu gösterir.

(ii) Lemma 4.2.2 nin (iv) ve (v) kısımlarının birleşiminden

$$\left| \frac{zg''_p(z)}{g'_p(z)} \right| \leq \frac{6|c|}{12\kappa - 7|c|}$$

elde edilir. Bu ifade $\kappa > \frac{13-7\alpha}{12(1-\alpha)}|c|$ için

$$\left| \frac{zg''_p(z)}{g'_p(z)} \right| < 1 - \alpha$$

dır. Bu da $g_p \in \mathcal{C}(\alpha)$ olduğunu gösterir.

(iii) $h_p : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu $h_p(z) = z^{(1-2\alpha-p)/2\alpha} w_p(z^{1/2\alpha})$ şeklinde tanımlansın. (4.12)

den $h_p(z) = \frac{1}{2^p \sqrt{\pi} \Gamma(\kappa)} z^{(1-\alpha)/\alpha} u_p(z^{1/\alpha})$ yazılır. Bu durumda

$$\frac{zh'_p(z)}{h_p(z)} = \frac{1}{\alpha} \left[\frac{z^{1/\alpha} g'_p(z^{1/\alpha})}{g_p(z^{1/\alpha})} - \alpha \right] \quad (4.39)$$

elde edilir. (4.39) ifadesi, g_p nin α mertebeden yıldızlı olduğunu ve dolayısıyla h_p nin $\mathbb{U}$ da yıldızlı olduğunu gösterir.

Sonuç 4.5.7: Teorem 4.5.6 nın (i) ve (ii) kısımlarında $\alpha = 0$ alınırsa Teorem 4.3.6 nın sırasıyla (ii) ve (iii) kısımları elde edilir.

Aşağıdaki Teoremin (ii) kısmı, Teorem 4.5.6 (i) kısmında $\alpha = 1/2$ alınması durumunda elde edilen sonuçtan daha iyi bir sonuç verir.

Teorem 4.5.8: $b, p \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{C}$, $\kappa = p + (b+2)/2$ olmak üzere aşağıdakiler doğrudur:

- (i) $\kappa > \frac{7}{8}|c|$ ise u_p fonksiyonu $\mathbb{U}$ da konvektir.
- (ii) $\kappa > \frac{11+\sqrt{41}}{24}|c|$ ise $g_p \in \mathcal{S}^*(1/2)$ dir ve ayrıca $z \rightarrow z^{-p}w_p(z)$ fonksiyonu $\mathbb{U}$ da yıldızlıdır.
- (iii) $\kappa > \frac{11+\sqrt{41}}{24}|c|-1$ ise $2g'_p - u_p$ fonksiyonu her $z \in \mathbb{U}$ için 1 noktasına göre $1/2$ mertebeden yıldızlıdır (Yağmur and Orhan 2013a).

İspat: (i) Lemma 4.2.1 in (ii). ve (iii). kısımlarının kullanılmasıyla

$$\left| \frac{zu_p''(z)}{u_p'(z)} \right| \leq \frac{3|c|}{4(2\kappa - |c|)} \quad (4.40)$$

eşitsizliği elde edilir. $\kappa > (7/8)|c|$ olması durumunda

$$\left| \frac{zu_p''(z)}{u_p'(z)} \right| < 1 \quad (4.41)$$

olur. Bu ise u_p fonksiyonunun $\mathbb{U}$ da konveks olduğunu gösterir.

(ii) $h_p(z) = zu_p(z^2)$ olsun. Bu durumda $g_p(z) = zu_p(z)$ olduğundan

$$h_p(z) = \frac{g_p(z^2)}{z} = 2^p \sqrt{\pi} \Gamma(\kappa) z^{-p} w_p(z) \quad (4.42)$$

ifadesi elde edilir. Buna göre

$$\frac{zh_p'(z)}{h_p(z)} - 1 = 2 \left[\frac{z^2 g_p'(z^2)}{g_p(z^2)} - \frac{1}{2} \right] = 2 \frac{z^2 u_p'(z^2)}{u_p(z^2)} \quad (4.43)$$

olur. O halde

$$\left| \frac{zh_p'(z)}{h_p(z)} - 1 \right| < 1, \quad (z \in \mathbb{U}) \quad (4.44)$$

olması için gerek ve yeter şart

$$\left| \frac{z^2 u'_p(z^2)}{u_p(z^2)} \right| < \frac{1}{2}, \quad (z \in \mathbb{U}) \quad (4.45)$$

olmasıdır. (4.45) eşitsizliğinin sağlanması halinde $g_p(z) = zu_p(z)$ fonksiyonu $1/2$ mertebeden yıldızlı olur.

Lemma 4.2.1 in (i). ve (ii). kısımlarından sırasıyla

$$\frac{6\kappa - 2|c|}{6\kappa - |c|} \leq |u_p(z^2)|, \quad \left(\kappa > \frac{|c|}{3} \right) \quad (4.46)$$

ve

$$|z^2 u'_p(z^2)| \leq \frac{2|c|}{3(4\kappa - |c|)}, \quad \left(\kappa > \frac{|c|}{4} \right) \quad (4.47)$$

eşitsizlikleri elde edilir. (4.46) ve (4.47) eşitsizliklerinin kullanılmasıyla

$$\left| \frac{z^2 u'_p(z^2)}{u_p(z^2)} \right| \leq \frac{|c|(6\kappa - |c|)}{3(3\kappa - |c|)(4\kappa - |c|)}, \quad \left(\kappa > \frac{|c|}{3} \right) \quad (4.48)$$

eşitsizliği bulunur. $\kappa > \frac{11 + \sqrt{41}}{24}|c|$ olması halinde

$$\left| \frac{z^2 u'_p(z^2)}{u_p(z^2)} \right| < \frac{1}{2} \quad (4.49)$$

olur. Bu ise g_p fonksiyonunun $\mathbb{U}$ da $1/2$ mertebeden yıldızlı ve ayrıca $z \rightarrow z^{-p}w_p(z)$ fonksiyonunun ise $\mathbb{U}$ da yıldızlı olduğunu gösterir.

(iii) Teorem 4.5.8 in (ii) kısmından $\kappa > \frac{11 + \sqrt{41}}{24}|c| - 1$ olması halinde g_{p+1} fonksiyonu

$\mathbb{U}$ da $1/2$ mertebeden yıldızlı olur. Önerme 4.1.1 in (v). kısmının kullanılmasıyla

$$2g'_p(z) - u_p(z) = -\frac{c}{2\kappa} g_{p+1}(z) + 1 \quad \text{olduğundan} \quad 2g'_p - u_p \text{ fonksiyonu her } z \in \mathbb{U} \text{ için } 1$$

noktasına göre $1/2$ mertebeden yıldızlı olur. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.5.8 de $b = c = 1$ alınırsa Struve fonksiyonu için aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.5.9: $H_p(z)$, Struve fonksiyonu olmak üzere, $\mathcal{H}_p : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu Sonuç 4.3.7 de verildiği gibi $\mathcal{H}_p(z) = 2^p \sqrt{\pi} \Gamma(p+3/2) z^{-p-1} H_p(z)$, normalize edilmiş Struve fonksiyonu olsun. Bu durumda normalize edilmiş Struve fonksiyonu için aşağıdaki ifadeler doğrudur.

- (i) $p > -5/8$ ise her $z \in \mathbb{U}$ için $\mathcal{H}_p(z^{1/2})$ konvektir,
- (ii) $p > \frac{-25+\sqrt{41}}{24}$ ise $z\mathcal{H}_p(z^{1/2})$ fonksiyonu $\mathbb{U}$ da $1/2$ mertebeden yıldızlı ve ayrıca $z \rightarrow z^{-p} H_p(z)$ fonksiyonu $\mathbb{U}$ da yıldızlıdır,
- (iii) $p > \frac{-49+\sqrt{41}}{24}$ ise $z \rightarrow \mathcal{H}_p(z^{1/2}) + 2z\mathcal{H}'_p(z^{1/2})$ fonksiyonu her $z \in \mathbb{U}$ için 1 noktasına göre $1/2$ mertebeden yıldızlıdır.

Teorem 4.5.8 de $b=1$ ve $c=-1$ alınırsa, modifiye edilmiş Struve fonksiyonu için aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.5.10: $L_p(z)$, modifiye edilmiş Struve fonksiyonu olmak üzere, $\mathcal{L}_p : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu Sonuç 4.3.8 de verildiği gibi $\mathcal{L}_p(z) = 2^p \sqrt{\pi} \Gamma(p+3/2) z^{-p-1} L_p(z)$, normalize ve modifiye edilmiş Struve fonksiyonu olsun. Bu durumda normalize ve modifiye edilmiş Struve fonksiyonu için aşağıdaki ifadeler yazılır.

- (i) $p > -5/8$ ise her $z \in \mathbb{U}$ için $\mathcal{L}_p(z^{1/2})$ konvektir,
- (ii) $p > \frac{-25+\sqrt{41}}{24}$ ise $z\mathcal{L}_p(z^{1/2})$ fonksiyonu $\mathbb{U}$ da $1/2$ mertebeden yıldızlı ve ayrıca $z \rightarrow z^{-p} L_p(z)$ fonksiyonu $\mathbb{U}$ da yıldızlıdır,
- (iii) $p > \frac{-49+\sqrt{41}}{24}$ ise $z \rightarrow \mathcal{L}_p(z^{1/2}) + 2z\mathcal{L}'_p(z^{1/2})$ fonksiyonu her $z \in \mathbb{U}$ için 1 noktasına göre $1/2$ mertebeden yıldızlıdır.

Örnek 4.5.11: (i) Sonuç 4.5.9 un (ii). kısmında $p = -1/2$ alınırsa

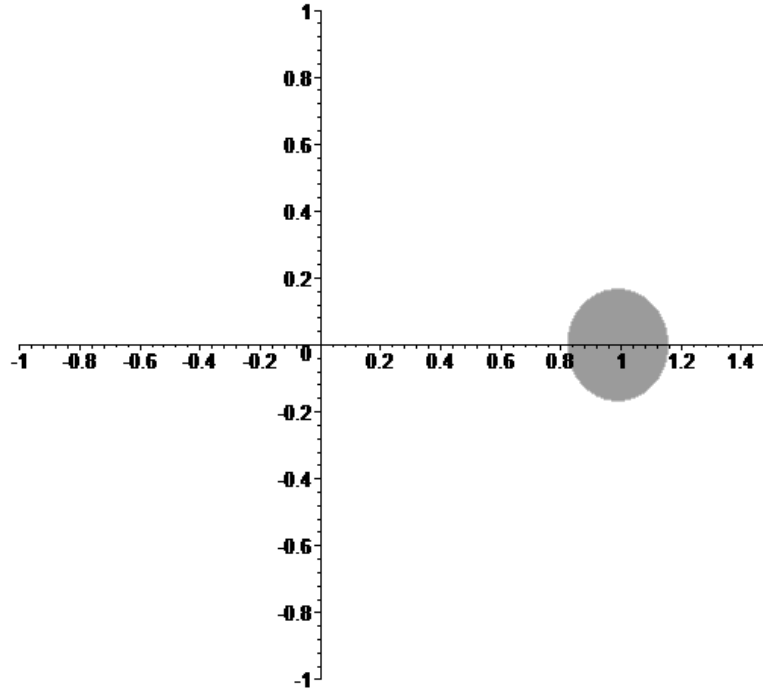
$$z\mathcal{H}_{-1/2}(\sqrt{z}) = 2^{-1/2}\sqrt{\pi}z^{3/4}H_{-1/2}(\sqrt{z}) = \sqrt{z}\sin\sqrt{z} \quad \text{elde edilir.} \quad p = -1/2 > \frac{-25+\sqrt{41}}{24}$$

olduğundan $f(z) = \sqrt{z}\sin\sqrt{z}$ fonksiyonu $\mathbb{U}$ da $1/2$ mertebeden yıldızlıdır. Yani

$$\operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) = \operatorname{Re}\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{z}\cos\sqrt{z}}{\sin\sqrt{z}}\right) > \frac{1}{2} \quad \text{dir. Ayrıca MAPLE 17 programı kullanılarak}$$

$\mathbb{U}$ birim diskinin $\frac{zf'(z)}{f(z)}$ dönüşümü altındaki görüntüsü aşağıda (Şekil 4.3 de) verilmiş

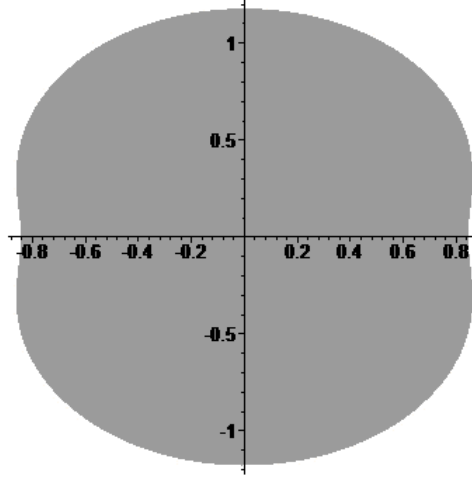
olup bu iddiayı doğrulamaktadır.



Şekil 4.3. $\frac{zf'(z)}{f(z)} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{z}\cos\sqrt{z}}{\sin\sqrt{z}}\right)$ fonksiyonu altında birim diskin görüntüsü

(ii) Yine $p = -1/2 > \frac{-25+\sqrt{41}}{24}$ olduğundan $z^{1/2}H_{-1/2}(z) = \sqrt{2/\pi}\sin z$ fonksiyonu $\mathbb{U}$

birim diskinde yıldızlıdır. Dolayısıyla $g(z) = \sin z$ fonksiyonu da Şekil 4.4 de görüldüğü gibi $\mathbb{U}$ birim diskinde yıldızlıdır.



Şekil 4.4. $g(z) = \sin z$ fonksiyonu altında birim diskin görüntüsü

Teorem 4.5.12: $\alpha \in [0, 1)$, $c < 0$ ve $\kappa > 0$ olmak üzere

$$u_p(1) + \frac{u'_p(1)}{1-\alpha} \leq 2 \quad (4.50)$$

ise $g_p \in \mathcal{S}_1^*(\alpha)$ dır. Ayrıca $\psi(z) = z[2 - u_p(z)] \in \mathcal{S}_1^*(\alpha)$ olması için gerek ve yeter şart (4.50) eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

İspat: $g_p(z) = zu_p(z) = z + \sum_{n \geq 1} b_n z^{n+1}$ olduğundan Teorem 3.5.16 ya göre

$$\sum_{n \geq 2} (n - \alpha) b_{n-1} \leq 1 - \alpha \quad (4.51)$$

eşitsizliğini göstermek yeterlidir. Bunun için

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 2} (n - \alpha) b_{n-1} &= \sum_{n \geq 2} (n - 1) b_{n-1} + \sum_{n \geq 2} (1 - \alpha) b_{n-1} \\ &= \sum_{n \geq 2} \frac{(n-1)(-c/4)^{n-1}}{(3/2)_{n-1}(\kappa)_{n-1}} + (1 - \alpha)[u_p(1) - 1] \\ &= u'_p(1) + (1 - \alpha)[u_p(1) - 1] \end{aligned}$$

yazılır. Bu ifadenin $1 - \alpha$ dan küçük veya $1 - \alpha$ değerine eşit olması için gerek ve yeter şart (4.50) nin sağlanmasıdır. Ayrıca $\psi(z) = z[2 - u_p(z)]$ fonksiyonu

$$\psi(z) = z[2 - u_p(z)] = z - \sum_{n \geq 2} b_{n-1} z^n \quad (4.52)$$

biçiminde yazıldığından Teorem 3.5.17 ye göre (4.50) ifadesi, $\psi(z) \in \mathcal{S}_1^*(\alpha)$ olması için gerek ve yeter şart olur.

Sonuç 4.5.13: $c < 0$ ve $\kappa > 0$ olmak üzere

$$u_{p+1}(1) \leq -\frac{2\kappa}{c} \quad (4.53)$$

ise $g_p \in \mathcal{S}_1^*(1/2)$ dir. Ayrıca $\psi(z) = z[2 - u_p(z)] \in \mathcal{S}_1^*(1/2)$ olması için gerek ve yeter şart (4.53) eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

İspat: $\alpha = 1/2$ için (4.50) eşitsizliği $u_p(1) + 2u'_p(1) \leq 2$ haline gelir. Önerme 4.1.1 in (v). kısmından

$$u_p(1) + 2u'_p(1) = 1 - \frac{c}{2\kappa} u_{p+1}(1) \quad (4.54)$$

elde edilir. Dolayısıyla $u_p(1) + 2u'_p(1) \leq 2$ olması için gerek ve yeter şart $u_{p+1}(1) \leq -\frac{2\kappa}{c}$ olmasıdır. Ayrıca Teorem 4.5.12 nin ispatından $\psi(z) = z[2 - u_p(z)] \in \mathcal{S}_1^*(1/2)$ olması için gerek ve yeter şart elde edilir.

Teorem 4.5.14: $\alpha \in [0, 1)$, $c < 0$ ve $\kappa > 0$ olmak üzere

$$u''_p(1) + (3 - \alpha)u'_p(1) + (1 - \alpha)u_p(1) - 2\alpha \leq 2 \quad (4.55)$$

ise $g_p \in \mathcal{C}_1(\alpha)$ dir. Ayrıca $\psi(z) = z[2 - u_p(z)] \in \mathcal{C}_1(\alpha)$ olması için gerek ve yeter şart (4.55) eşitsizliğinin sağlanmasıdır (Yağmur and Orhan 2013a).

İspat: Teorem 3.5.16 dan

$$\sum_{n \geq 2} n(n - \alpha)b_{n-1} \leq 1 - \alpha \quad (4.56)$$

eşitsizliğinin gösterilmesi yeterlidir. $g_p(z) = zu_p(z)$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 2} n(n - \alpha)b_{n-1} &= \sum_{n \geq 2} n(n - 1)b_{n-1} + (1 - \alpha) \sum_{n \geq 2} nb_{n-1} \\ &= g''_p(1) + (1 - \alpha)[g'_p(1) - 1] \end{aligned}$$

$$= u_p''(1) + (3 - \alpha)u_p'(1) + (1 - \alpha)u_p(1) - 1 + \alpha$$

ifadesi bulunur. Bu ifadenin $1 - \alpha$ dan küçük veya $1 - \alpha$ değerine eşit olması için gerek ve yeter şart (4.55) ifadesinin sağlanmasıdır. Teorem 3.5.16 ya göre (4.55) şartı $\psi \in \mathcal{C}_1(\alpha)$ olması için aynı zamanda gerek şarttır.

Teorem 4.5.15: $c < 0$, $\kappa > 0$ ve $u_p(1) \leq 2$ ise $\int_0^z u_p(t)dt \in \mathcal{S}^*$ dir (Yağmur and Orhan 2013a).

İspat: $\int_0^z u_p(t)dt$ integrali

$$\int_0^z u_p(t)dt = \sum_{n \geq 0} \frac{b_n}{n+1} z^{n+1} = z + \sum_{n \geq 2} \frac{b_{n-1}}{n} z^n \quad (4.57)$$

biçiminde yazılabilir. Teorem 3.5.16, $\alpha = 0$ için uygulanırsa

$$\sum_{n \geq 2} n \frac{b_{n-1}}{n} = \sum_{n \geq 2} b_{n-1} = u_p(1) - 1 \leq 1 \quad (4.58)$$

elde edilir. Bu ise $u_p(1) \leq 2$ demektir.

4.6. Genelleştirilmiş Struve Fonksiyonlarının Hardy Uzayı

Bu kısımda Genelleştirilmiş Struve fonksiyonunun $\mathcal{H}^\mu$ Hardy uzayına ait olma şartları belirlenmiştir.

Teorem 4.6.1: $b, c, p \in \mathbb{R}$, $\kappa = p + (b + 2)/2$ ve $\alpha \in [0, 1)$ olsun. Bu durumda

$$\kappa > \frac{\alpha + 9}{4(1 - \alpha)} |c| \text{ ise}$$

- (i) $\alpha \in [0, 1/2)$ için $g_p \in \mathcal{H}^{1/(1-2\alpha)}$ dır,
- (ii) $\alpha \geq 1/2$ için $g_p \in \mathcal{H}^\infty$ dır (Yağmur and Orhan 2013b)

İspat: Gauss hipergeometrik fonksiyon tanımından

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \sum_{n \geq 0} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!}, \quad |z| < 1$$

yazılır. $\alpha \neq 1/2$ olmak üzere $\mu, v \in \mathbb{C}$ ve $\gamma \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} \mu + \frac{vz}{(1 - ze^{i\gamma})^{1-2\alpha}} &= \mu + vz {}_2F_1(1, 1-2\alpha, 1; ze^{i\gamma}) \\ &= \mu + v \sum_{n \geq 0} \frac{(1-2\alpha)_n}{n!} e^{i\gamma n} z^{n+1} \end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca

$$\begin{aligned} \mu + v \operatorname{Log}(1 - ze^{i\gamma}) &= \mu - vz {}_2F_1(1, 1, 2; ze^{i\gamma}) \\ &= \mu - v \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n+1} e^{i\gamma n} z^{n+1} \end{aligned}$$

olur. Bu durumda g_p nin

$$f(z) = \begin{cases} \mu + vz(1 - ze^{i\gamma})^{2\alpha-1}, & \alpha \neq 1/2 \\ \mu + v \operatorname{Log}(1 - ze^{i\gamma}), & \alpha = 1/2 \end{cases}$$

biçiminde olmadığı görülür. Teorem 4.5.6 (ii) kısmından g_p nin α mertebeden konveks bir fonksiyon olduğu bilinmektedir. Dolayısıyla Teorem 3.6.5 den ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.6.2: $b, c, p \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$, $\kappa = p + (b+2)/2$ ve $\kappa > \frac{13}{12}|c| - 1$ olsun. Bu durumda

$$h_p(z) = 2zu_p(z) - \int_0^z u_p(t) dt \text{ olmak üzere } h_p \in \mathcal{H}^\infty \text{ dır (Yağmur and Orhan 2013b).}$$

İspat: $\kappa > \frac{13}{12}|c| - 1$ olduğundan Teorem 4.3.6 nin (iii) kısmından $g_{p+1}(z) = zu_{p+1}(z) \in \mathcal{C}$

elde edilir. Ayrıca Önerme 4.1.1 in (v). kısmından $u_p(z) + 2zu'_p(z) + \frac{c}{2\kappa} zu_{p+1}(z) = 1$

olduğunu biliyoruz. Bu durumda $g_{p+1} \in \mathcal{C}$ olduğundan $z \rightarrow \frac{2\kappa}{c} [1 - u_p(z) - 2zu'_p(z)]$

fonksiyonu da konvektir. O halde $h(z) = u_p(z) + 2zu'_p(z)$ fonksiyonu da konveks bir

fonksiyon olur. Gauss hipergeometrik fonksiyon gösteriminden $h(z) = u_p(z) + 2zu_p'(z)$ fonksiyonunun, $\mu, v \in \mathbb{C}$ ve $\gamma \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} \mu + \frac{vz}{1 - ze^{i\gamma}} &= \mu + v {}_2F_1(1, 1; 1; ze^{i\gamma}) \\ &= \mu + v \sum_{n \geq 0} e^{i\gamma n} z^{n+1} \end{aligned}$$

şeklinde olmadığını açıkça görebiliriz. Bu durumda Teorem 3.6.5 den $h(z) = u_p(z) + 2zu_p'(z) \in \mathcal{H}^1$ dir. Kısmi integrasyon kullanılarak

$$\begin{aligned} h_p(z) &= \int_0^z [u_p(t) + 2tu_p'(t)] dt \\ &= 2zu_p(z) - \int_0^z u_p(t) dt \end{aligned}$$

yazılır. Bu fonksiyon $\bar{\mathbb{U}} = \mathbb{U} \cup \partial\mathbb{U} = \{z : |z| \leq 1\}$ de sürekli olduğundan Teorem 3.6.6 ya göre $\mathbb{U}$ da sınırlı analitik bir fonksiyondur. O halde $h_p \in \mathcal{H}^\infty$ dur.

Teorem 4.6.3: $b, c, p \in \mathbb{R}$, $\kappa = p + (b+2)/2$, $\kappa > \frac{5 + \sqrt{1+2c^2}}{8}$ ve $f \in \mathcal{R}$ olsun. Bu durumda $zu_p * f$ konvülasyonu $\mathcal{R} \cap \mathcal{H}^\infty$ uzayındadır (Yağmur and Orhan 2013b).

İspat: $h(z) = zu_p(z) * f(z)$ fonksiyonu tanımlansın. Bu durumda $h'(z) = u_p(z) * f'(z)$ olur. Teorem 4.3.4 den $\operatorname{Re} u_p(z) > 0$ olduğu biliniyor. $f \in \mathcal{R}$ olduğundan Teorem 3.6.3 den $h \in \mathcal{R}$ elde edilir. u_p fonksiyonu bir tam fonksiyon olduğundan h fonksiyonu da tamdır. Dolayısıyla h fonksiyonu $\mathbb{U}$ da sınırlı bir fonksiyondur. O halde $h \in \mathcal{R} \cap \mathcal{H}^\infty$ dur.

Teorem 4.6.4: $b, c, p \in \mathbb{R}$, $\kappa = p + (b+2)/2$ ve $\alpha \in [0, 2 - \sqrt{2})$ olmak üzere

$$\kappa \geq \frac{3\alpha^2 - 10\alpha + 5 + (1-\alpha)\sqrt{(1-\alpha)^2 + c^2}(\alpha^2 - 4\alpha + 2)}{4(\alpha^2 - 4\alpha + 2)}$$

olsun. Bu durumda $\alpha_1 < 1$ ve $\gamma = 1 - 2(1 - \alpha_1)(1 - \alpha)$ olmak üzere $f \in \mathcal{R}(\alpha_1)$ ise $zu_p * f \in \mathcal{R}(\gamma)$ dır (Yağmur and Orhan 2013b).

İspat: $h(z) = zu_p(z) * f(z)$ olsun. Bu durumda $h'(z) = u_p(z) * f'(z)$ olur. Teorem 4.5.1 den $u_p \in \mathcal{P}_0(\alpha)$ ve Teorem 3.6.4 den $f' \in \mathcal{P}(\alpha_1)$ olduğu biliniyor. Bu durumda $\gamma = 1 - 2(1 - \alpha_1)(1 - \alpha)$ olmak üzere $h' \in \mathcal{P}(\gamma)$ olur. $h' \in \mathcal{P}(\gamma)$ olması $h \in \mathcal{R}(\gamma)$ olmasına denktir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.6.5: α, b, c, p ve κ sayıları Teorem 4.6.4 ün şartlarını sağlasın. Bu durumda $\alpha_1 = (1 - 2\alpha)/(2 - 2\alpha)$ olmak üzere $f \in \mathcal{R}(\alpha_1)$ ise $zu_p * f \in \mathcal{R}(0)$ dır.

Sonuç 4.6.5 de $\alpha = 0$ alınması durumunda aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.6.6: $b, c, p \in \mathbb{R}$, $\kappa = p + (b + 2)/2$ ve $\kappa > \frac{5 + \sqrt{1 + 2c^2}}{8}$ olsun. Bu durumda $f \in \mathcal{R}(1/2)$ ise $zu_p * f \in \mathcal{R}(0)$ dır.

Lemma 4.6.7: $b, p \in \mathbb{R}$, $\kappa = p + (b + 2)/2$, $c < 0$ ve $\alpha \in [0, 1)$ olmak üzere

$$c_0 = \frac{c}{6(\alpha - 1)},$$

$$c_1 = \frac{-(20c + 29) + \sqrt{160c^2 - 3640c - 6839}}{120}$$

şeklinde verilsin. Ayrıca b_n , $\left(b_n = \frac{(-c/4)^n}{(3/2)_n (\kappa)_n}\right)$, $u_p(z)$ nin n. katsayısını gösterebilirsin. Bu durumda $\kappa \geq \max\{c_0, c_1\}$ ise

$$A_1 = 1, \text{ her } n \geq 2 \text{ için } A_n = \frac{b_{n-1}}{2(1 - \alpha)}$$

biçiminde tanımlanan $\{A_n\}_{n \geq 1}$ dizisi; negatif olmayan, konveks ve azalan bir dizidir (Yağmur and Orhan 2013b).

İspat: Öncelikle $\{A_n\}_{n \geq 1}$ dizisinin azalan bir dizi olduğu gösterilecektir. $A_2 \leq A_1$ ifadesi

$\kappa \geq \frac{c}{12(\alpha-1)}$ ifadesine denk olduğundan $\kappa \geq c_0$ için $A_2 \leq A_1$ dir. Şimdi her $n \geq 2$ için

$A_n - A_{n+1} \geq 0$ ifadesini göstereceğiz. A_n nin tanımından $A_n - A_{n+1} = [b_{n-1} - b_n] / [2(\alpha-1)]$ dir. Dolayısıyla $2(2n+1)(\kappa+n-1)b_n = -cb_{n-1}$ rekürens (yineleme) bağıntısı kullanılırsa

$$A_n - A_{n+1} = \frac{[4n^2 + 2(2\kappa-1)n + \kappa - 1 + c]b_{n-1}}{4(1-\alpha)(2n+1)(\kappa+n-1)}$$

elde edilir.

$M_1(n) = 4n^2 + 2(2\kappa-1)n + \kappa - 1 + c$ ile gösterilsin. $(n-2)^2 \geq 0$ olduğundan $n^2 \geq 4n-4$

tür. Bu durumda $M_1(n) \geq 2(2\kappa+7)n + \kappa - 17 + c$ dir. Ayrıca $n \geq 2$ ve $\kappa > 0$ olduğundan $M_1(n) \geq 9\kappa + 11 + c$ olup bu ifade negatif olmayan bir ifadedir, çünkü

$9\kappa \geq \frac{3c}{2(\alpha-1)} \geq -c - 11$ dir. Sonuç olarak $A_n - A_{n+1} \geq 0$ olduğu yani dizinin azalan bir

dizi olduğu ve aynı zamanda negatif olmadığı gösterilmiş oldu. Şimdi ise dizinin konveks olduğu yani

$$\forall n \geq 1 \text{ için } A_n - 2A_{n+1} + A_{n+2} \geq 0 \quad (4.59)$$

olduğu gösterilecektir.

$0 > \frac{c}{6\kappa(1-\alpha)} \geq -1$ ve $\frac{20\kappa+c+20}{20(\kappa+1)} < 1$ olduğundan $n=1$ için (4.59) eşitsizliği

$$A_1 - 2A_2 + A_3 = 1 + \left[\frac{c}{6\kappa(1-\alpha)} \right] \left[\frac{20\kappa+c+20}{20(\kappa+1)} \right] \geq 0$$

şeklinde olur.

Şimdi $n \geq 2$ için (4.59) eşitsizliğinin sağlandığını gösterelim.

$$D_1 = 16\kappa^2 + 48\kappa + 8c - 20, \quad D_2 = 32\kappa^2 + 8\kappa c - 8\kappa + 12c - 12,$$

$$D_3 = 12\kappa^2 + 12\kappa c - 12\kappa + c^2 + 32$$

ve

$$M_2(n) = 16n^4 + (\kappa + 16)n^3 + D_1n^2 + D_2n + D_3$$

ile gösterilirse A_n nin tanımından

$$A_n - 2A_{n+1} + A_{n+2} = \frac{b_{n-1}M_2(n)}{8(1-\alpha)(2n+1)(2n+3)(\kappa+n)(\kappa+n-1)}$$

elde edilir.

Amacımız $M_2(n) > 0$ olduğunu göstermektir. $n^4 \geq 4n^3 - 6n^2 + 4n - 1$ olduğundan

$$M_2(n) \geq (\kappa + 80)n^3 + (D_1 - 96)n^2 + (D_2 + 64)n + D_3 - 16$$

dır. $M_3(n) = (\kappa + 80)n^3 + (D_1 - 96)n^2 + (D_2 + 64)n + D_3 - 16$ ile gösterilsin. $\kappa > 0$ olduğundan n^3 ün katsayısı olan $\kappa + 80$ sayısı pozitifdir. Bu durumda $n^3 \geq 3n^2 - 3n + 1$ eşitsizliği kullanılırsa

$$D_4 = 16\kappa^2 + 51\kappa + 8c + 124, \quad D_5 = 32\kappa^2 + 8\kappa c - 11\kappa + 12c - 188,$$

$$D_6 = 12\kappa^2 + 12\kappa c - 11\kappa + c^2 + 96$$

olmak üzere

$$M_3(n) \geq D_4n^2 + D_5n + D_6$$

olur. $M_4(n) = D_4n^2 + D_5n + D_6$ ile ifade edilsin. $D_4 = 0$ denkleminin büyük kökü

$\kappa_1 = \left[-51 + \sqrt{-5335 - 512c} \right] / 32$ olup $\kappa \geq c_1 > \kappa_1$ olduğundan D_4 de negatif değildir. O

halde $n^2 \geq 2n - 1$ eşitsizliği kullanılırsa $D_7 = 2D_4 + D_5$, $D_8 = D_6 - D_4$ ve

$M_5(n) = D_7n + D_8$ olmak üzere $M_4(n) \geq M_5(n)$ olur.

$D_7 = 2D_4 + D_5 = 64\kappa^2 + (91 + 8c)\kappa + 28c + 60$ olup $D_7 = 0$ denkleminin büyük kökü

$\kappa_c = \frac{-(8c + 91) + \sqrt{64c^2 - 5712c - 7079}}{128}$ dir. Teoremin hipotezinde $\kappa \geq c_1 > \kappa_c$

oldüğundan D_7 negatif değildir. Bu durumda $M_5(n) \geq M_5(1)$ olur. Ayrıca

$$M_5(1) = D_4 + D_5 + D_6 = 60\kappa^2 + (20c + 29)\kappa + c^2 + 20c + 32$$

pozitifdir. Çünkü c_1 , $M_5(1) = 0$ denkleminin büyük kökü olup $\kappa \geq c_1 > 0$ şartını sağlar.

Tüm bu işlemlerin sonucunda $M_2(n) \geq 0$ eşitsizliği elde edilir. Dolayısıyla $\{A_n\}_{n \geq 1}$

dizisi konvektir.

Lemma 4.6.7 kullanılarak aşağıdaki teorem yazılır.

Teorem 4.6.8: $b, p \in \mathbb{R}$, $\kappa = p + (b+2)/2$, $c < 0$ ve $\alpha \in [0, 1)$ olsun. Ayrıca c_0 ve c_1 Lemma 4.6.7 deki şekilde verilsin. Bu durumda $\kappa \geq \max\{c_0, c_1\}$ ise $\operatorname{Re} u_p(z) > \alpha$ dır yani $u_p \in \mathcal{P}_0(\alpha)$ dır (Yağmur and Orhan 2013b).

İspat: A_n , Lemma 4.6.7 deki şekilde olsun. Bu durumda $\operatorname{Re} u_p(z) > \alpha$ ifadesi

$$\operatorname{Re} \left[1 + \sum_{n \geq 2} A_n z^{n-1} \right] > 1/2, \quad z \in \mathbb{U}$$

ifadesine denktir. Hipotez ve Lemma 4.6.7 den, $\{A_n\}_{n \geq 1}$ dizisinin negatif olmayan, konveks ve azalan bir dizi olduğu biliniyor. O halde Teorem 3.5.6 dan $\operatorname{Re} u_p(z) > \alpha$ elde edilir. Bu ise $u_p \in \mathcal{P}_0(\alpha)$ demektir.

Teorem 4.6.9: $b, p \in \mathbb{R}$, $\kappa = p + (b+2)/2$, $c < 0$, $\alpha_1 < 1$ ve $\alpha \in [0, 1)$ olsun. Ayrıca c_0 ve c_1 , Lemma 4.6.7 deki şekilde ve $\kappa \geq \max\{c_0, c_1\}$ olarak verilsin. Bu durumda $\gamma = 1 - 2(1 - \alpha_1)(1 - \alpha)$ olmak üzere $f \in \mathcal{R}(\alpha_1)$ ise $zu_p * f \in \mathcal{R}(\gamma)$ dır (Yağmur and Orhan 2013b).

İspat: Teorem 4.6.8 den $u_p \in \mathcal{P}_0(\alpha)$ olup ispat, Teorem 4.6.4 ün ispatına benzer şekilde yapılabilir.

Sonuç 4.6.10: $\gamma = 0$ olmak üzere Teorem 4.6.9 un şartları sağlansın. Bu durumda $\alpha_1 = (1 - 2\alpha)/(2 - 2\alpha)$ olmak üzere $f \in \mathcal{R}(\alpha_1)$ ise $zu_p * f \in \mathcal{R}(0)$ dır.

Sonuç 4.6.10 da $\alpha = 0$ özel durumunda aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.6.11: $b, p \in \mathbb{R}$, $c < \frac{91 - \sqrt{11353}}{8} \approx -1,9438$ ve c_1 , Lemma 4.6.7 deki şekilde verilsin, ayrıca $\kappa = p + (b+2)/2 > c_1$ olsun. Bu durumda $f \in \mathcal{R}(1/2)$ ise $zu_p * f \in \mathcal{R}(0)$ dır.

İspat: $\alpha = 0$ ve $c < \frac{91 - \sqrt{11353}}{8} \approx -1,9438$ için $c_1 = \max\{c_0, c_1\}$ olur. Dolayısıyla ispatın geriye kalan kısmı Teorem 4.6.4 ün ispatına benzer şekilde yapılabilir.

(4.11) de $b=1$, $c=-1$ alınması durumunda (3.25) deki $L_p(z)$ modifiye edilmiş Struve fonksiyonu elde edilmişti. Ayrıca normalize ve modifiye edilmiş Struve fonksiyonu ise Sonuç 4.3.8 de $\mathcal{L}_p(z) = 2^p \sqrt{\pi} \Gamma(p+3/2) z^{-p-1} L_p(z)$ ile tanımlanmıştı. Şimdi Teorem 4.6.1–4.6.4, 4.6.8, 4.6.9 ve Sonuç 4.6.5, 4.6.6, 4.6.10, 4.6.11 kullanılarak $\mathcal{L}_p(z)$ fonksiyonu için bazı özel durumlar verilecektir.

Sonuç 4.6.12: $L_p(z)$, modifiye edilmiş Struve fonksiyonu olmak üzere $\mathcal{L}_p : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{C}$, $\mathcal{L}_p(z) = 2^p \sqrt{\pi} \Gamma(p+3/2) z^{-p-1} L_p(z)$ normalize ve modifiye edilmiş Struve fonksiyonu için aşağıdaki durumlar sağlanır.

(i) $\alpha \in [0, 1)$ ve $p > \frac{11\alpha - 5}{12(1 - \alpha)}$ olsun. Bu durumda $\alpha \geq 1/2$ ise $z\mathcal{L}_p(z^{1/2}) \in \mathcal{H}^\infty$ dur;

$\alpha \in [0, 1/2)$ ise $z\mathcal{L}_p(z^{1/2}) \in \mathcal{H}^{1/(1-2\alpha)}$ dır.

(ii) $p > \frac{-17}{12}$ ise $2z\mathcal{L}_p(z^{1/2}) - \int_0^z \mathcal{L}_p(t^{1/2}) dt \in \mathcal{H}^\infty$ dur.

(iii) $p > \frac{-7 + \sqrt{3}}{8}$ ve $f \in \mathcal{R}$ olsun. Bu durumda $z\mathcal{L}_p(z^{1/2}) * f(z) \in \mathcal{R} \cap \mathcal{H}^\infty$ dur.

(iv) $\alpha \in [0, 2 - \sqrt{2})$ ve

$$p \geq \frac{-3\alpha^2 + 14\alpha - 7 + (1 - \alpha)\sqrt{2\alpha^2 - 6\alpha + 3}}{4(\alpha^2 - 4\alpha + 2)}$$

olsun. Bu durumda $\alpha_1 < 1$ ve $\gamma = 1 - 2(1 - \alpha_1)(1 - \alpha)$ olmak üzere $f \in \mathcal{R}(\alpha_1)$ ise $z\mathcal{L}_p(z^{1/2}) * f(z) \in \mathcal{R}(\gamma)$ dır; $\alpha_1 = (1 - 2\alpha)/(2 - 2\alpha)$ ve $f \in \mathcal{R}(\alpha_1)$ ise $z\mathcal{L}_p(z^{1/2}) * f(z) \in \mathcal{R}(0)$ dır. Özel olarak ($\alpha = 0$ için) $8p > -7 + \sqrt{3}$ ve $f \in \mathcal{R}(1/2)$ olması durumunda $z\mathcal{L}_p(z^{1/2}) * f(z) \in \mathcal{R}(0)$ olur.

(v) $\alpha \in [0, 1)$ ve $p > \frac{9\alpha - 8}{6(1 - \alpha)}$ olsun. Bu durumda $\alpha_1 < 1$ ve $\gamma = 1 - 2(1 - \alpha_1)(1 - \alpha)$ olmak üzere $f \in \mathcal{R}(\alpha_1)$ ise $z\mathcal{L}_p(z^{1/2}) * f(z) \in \mathcal{R}(\gamma)$ dır. $\gamma = 0$ olması durumunda $\alpha_1 = (1 - 2\alpha)/(2 - 2\alpha)$ ve $f \in \mathcal{R}(\alpha_1)$ ise $z\mathcal{L}_p(z^{1/2}) * f(z) \in \mathcal{R}(0)$ elde edilir. $\alpha = 0$ özel durumunda $p > -4/3$ ve $f \in \mathcal{R}(1/2)$ ise $z\mathcal{L}_p(z^{1/2}) * f(z) \in \mathcal{R}(0)$ dır.

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu araştırmada, ilk olarak Struve ve modifiye edilmiş Struve fonksiyonlarının her

ikisini birden içeren $w_{p,b,c}(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-c)^n}{\Gamma(n+3/2)\Gamma\left(n+p+\frac{b+2}{2}\right)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+p+1}$

genelleştirilmiş Struve fonksiyonu inşa edilmiştir. Daha sonra $w_{p,b,c}(z)$ fonksiyonu

kullanılarak, normalize edilmiş $u_{p,b,c}(z) = 2^p \sqrt{\pi} \Gamma\left(p+\frac{b+2}{2}\right) z^{\frac{-p-1}{2}} w_{p,b,c}(\sqrt{z})$

fonksiyonu elde edilmiş ve konuyla ilgili teoremlerin uygulanabilmesi için fonksiyonun

$\mathcal{A}$ sınıfından olması gerektiğinden $u_{p,b,c}(z)$ fonksiyonu z ile çarpılarak $g_{p,b,c}(z)$

fonksiyonu elde edilmiştir. Son olarak $w_{p,b,c}(z)$, $u_{p,b,c}(z)$ ve $g_{p,b,c}(z)$ fonksiyonlarının

aşağıdaki sonuçlarla verilen geometrik özellikleri bulunmuş ve bu fonksiyonların Hardy uzayına ait olma şartları belirlenmiştir.

Sonuç 5.1: $b, c, p \in \mathbb{R}$, $\kappa = p + (b+2)/2$ ve $\kappa \geq \frac{5 + \sqrt{1+2c^2}}{8}$ ise her $z \in \mathbb{U}$ için

$\operatorname{Re} u_p(z) > 0$ dır.

Sonuç 5.2: $b, p \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{C}$, $\kappa = p + (b+2)/2$ olmak üzere g_p fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlar.

(i) M , $\cos M = M$, ($M \approx 0.73909$) eşitliğini sağlayan pozitif bir sayı ve

$\kappa > \frac{7M+2+\sqrt{M^2+12M+4}}{24M} |c|$ ise her $z \in \mathbb{U}$ için $\operatorname{Re} g'_p(z) > 0$ dir. Bu durumda

$g_p(z)$, $\mathbb{U}$ da ünivalenttir,

(ii) $\kappa > \frac{9+\sqrt{17}}{24} |c|$ ise $g_p(z)$, $\mathbb{U}$ da yıldızlıdır,

(iii) $\kappa > \frac{13}{12} |c|$ ise $g_p(z)$, $\mathbb{U}$ da konvektir,

(iv) $\kappa > \frac{1}{3}|c|$ ise $g_p(z)$, $|z| < 1/2$ diskinde yıldızlıdır,

(v) $\kappa > \frac{7}{12}|c|$ ise $g_p(z)$, $|z| < 1/2$ diskinde konvektir.

Sonuç 5.3: $b, p \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{C}$, $\kappa = p + (b+2)/2$ ve $\alpha \in [0,1)$ olsun. Bu durumda

$\kappa > \frac{\alpha+9}{4(1-\alpha)}|c|$ ise her $z \in \mathbb{U}$ için $g_p(z) \in \mathcal{K}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)$ ve $\operatorname{Re} g'_p(z) > \frac{1+\alpha}{2}$ dir.

Sonuç 5.4: $b, c, p \in \mathbb{R}$, $c < 0$, $\kappa = p + (b+2)/2$ ise aşağıdaki ifadeler doğrudur:

(i) $\kappa \geq -c/3$ ise $g_p(z)$, f_1 fonksiyonuna göre konvekse yakın ve dolayısıyla $\mathbb{U}$ da ünivalenttir.

(ii) $\kappa \geq -c/2$ ise $z \rightarrow zu_p(z^2)$, f_2 fonksiyonuna göre konvekse yakın ve dolayısıyla $\mathbb{U}$ da ünivalenttir.

Sonuç 5.5: $b, c, p \in \mathbb{R}$, $c < \frac{91 - \sqrt{11353}}{8} \approx -1,9438$, $\kappa = p + (b+2)/2$ ve

$\kappa \geq \frac{-(20c+29) + \sqrt{160c^2 - 3640c - 6839}}{120}$ ise g_p fonksiyonunun $\Lambda[g_p]$ Alexander

dönüşümü, $\mathbb{U}$ da yıldızlı ve f_1 fonksiyonuna göre konvekse yakındır. Ayrıca her $z \in \mathbb{U}$ için $\operatorname{Re} u_p(z) > 1/2$ dir.

Sonuç 5.6: $b, c, p \in \mathbb{R}$, $\kappa = p + (b+2)/2$ ve $\alpha \in [0, 2 - \sqrt{2}]$ olmak üzere

$$\kappa \geq \frac{3\alpha^2 - 10\alpha + 5 + (1-\alpha)\sqrt{(1-\alpha)^2 + c^2(\alpha^2 - 4\alpha + 2)}}{4(\alpha^2 - 4\alpha + 2)}$$

ise her $z \in \mathbb{U}$ için $\operatorname{Re} u_p(z) > \alpha$ dir.

Sonuç 5.7: $b, c, p \in \mathbb{R}$, $\kappa = p + (b+2)/2$ ve $\alpha \in [0, 1)$ olsun. Bu durumda

- (i) $\kappa > \frac{9-\alpha+\sqrt{\alpha^2-14\alpha+7}}{24(1-\alpha)}|c|$ ise $g_p \in \mathcal{S}^*(\alpha)$ dır,
- (ii) $\kappa > \frac{13-7\alpha}{12(1-\alpha)}|c|$ ise $g_p \in \mathcal{C}(\alpha)$ dır,
- (iii) $\kappa > \frac{9-\alpha+\sqrt{\alpha^2-14\alpha+7}}{24(1-\alpha)}|c|$ ve $\alpha \neq 0$ ise $z \rightarrow z^{(1-2\alpha-p)/2\alpha} w_p(z^{1/2\alpha})$ fonksiyonu $\mathbb{U}$ da yıldızlıdır.

Sonuç 5.8: $b, p \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{C}$, $\kappa = p + (b+2)/2$ olmak üzere aşağıdakiler doğrudur:

- (i) $\kappa > \frac{7}{8}|c|$ ise u_p fonksiyonu $\mathbb{U}$ da konvektir.
- (ii) $\kappa > \frac{11+\sqrt{41}}{24}|c|$ ise $g_p \in \mathcal{S}^*(1/2)$ dir ve ayrıca $z \rightarrow z^{-p} w_p(z)$ fonksiyonu $\mathbb{U}$ da yıldızlıdır.
- (iii) $\kappa > \frac{11+\sqrt{41}}{24}|c|-1$ ise $2g'_p - u_p$ fonksiyonu her $z \in \mathbb{U}$ için 1 noktasına göre $1/2$ mertebeden yıldızlıdır.

Sonuç 5.9: $b, c, p \in \mathbb{R}$, $\kappa = p + (b+2)/2$ ve $\alpha \in [0, 1)$ olsun. Bu durumda

$$\kappa > \frac{\alpha+9}{4(1-\alpha)}|c| \text{ ise}$$

- (i) $\alpha \in [0, 1/2)$ için $g_p \in \mathcal{H}^{1/(1-2\alpha)}$ dır,
- (ii) $\alpha \geq 1/2$ için $g_p \in \mathcal{H}^\infty$ dur.

Sonuç 5.10: $b, c, p \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$, $\kappa = p + (b+2)/2$ ve $\kappa > \frac{13}{12}|c|-1$ olsun. Bu durumda

$$h_p(z) = 2zu_p(z) - \int_0^z u_p(t)dt \text{ olmak üzere } h_p \in \mathcal{H}^\infty \text{ dur.}$$

Sonuç 5.11: $b, c, p \in \mathbb{R}$, $\kappa = p + (b+2)/2$, $\kappa > \frac{5 + \sqrt{1+2c^2}}{8}$ ve $f \in \mathcal{R}$ olsun. Bu durumda $g_p * f$ konvülasyonu $\mathcal{R} \cap \mathcal{H}^\infty$ uzayındadır.

Sonuç 5.12: $b, c, p \in \mathbb{R}$, $\kappa = p + (b+2)/2$ ve $\alpha \in [0, 2 - \sqrt{2})$ olmak üzere

$$\kappa \geq \frac{3\alpha^2 - 10\alpha + 5 + (1-\alpha)\sqrt{(1-\alpha)^2 + c^2(\alpha^2 - 4\alpha + 2)}}{4(\alpha^2 - 4\alpha + 2)}$$

eşitsizliği verilsin. Bu durumda $\alpha_1 < 1$ ve $\gamma = 1 - 2(1 - \alpha_1)(1 - \alpha)$ olmak üzere $f \in \mathcal{R}(\alpha_1)$ ise $g_p * f \in \mathcal{R}(\gamma)$ dır.

Sonuç 5.13: $b, p \in \mathbb{R}$, $\kappa = p + (b+2)/2$, $c < 0$ ve $\alpha \in [0, 1)$ olsun. Ayrıca c_0 ve c_1

$$c_0 = \frac{c}{6(\alpha - 1)},$$

$$c_1 = \frac{-(20c + 29) + \sqrt{160c^2 - 3640c - 6839}}{120}$$

şeklinde verilsin. Bu durumda $\kappa \geq \max\{c_0, c_1\}$ ise $\operatorname{Re} u_p(z) > \alpha$ dır, yani $u_p \in \mathcal{P}_0(\alpha)$ dır.

Sonuç 5.14: $b, p \in \mathbb{R}$, $\kappa = p + (b+2)/2$, $c < 0$, $\alpha_1 < 1$ ve $\alpha \in [0, 1)$ olsun. Ayrıca c_0 ve c_1 , Sonuç 5.13 deki şekilde ve $\kappa \geq \max\{c_0, c_1\}$ olarak verilsin. Bu durumda $\gamma = 1 - 2(1 - \alpha_1)(1 - \alpha)$ olmak üzere $f \in \mathcal{R}(\alpha_1)$ ise $zu_p * f \in \mathcal{R}(\gamma)$ dır.

KAYNAKLAR

- Alexander, W. J., 1915. Functions which map the interior of the unit circle upon simple regions. *Ann. of Math.*, 17, 12-29.
- Almkvist, G. and Berndt, B.C., 1988. Gauss, Landen, Ramanujan, the arithmetic-geometric mean, ellipses, π , and the Ladies Diary. *Amer. Math. Monthly*, 95, 585-608.
- Anderson, G.D., Vamanamurthy, M.K. and Vuorinen, M., 1997. *Conformal Invariants, Inequalities, and Quasiconformal Maps*. Wiley, New York.
- Andras, S. and Baricz, A., 2009. Monotonicity property of generalized and normalized Bessel functions of complex order. *Comp. Var. and Elliptic Eq.*, 54 (7), 689-696.
- Andrews, G.E., Askey R. and Roy, R., 1999. *Special Functions*. Cambridge University Press.
- Baricz, A., 2008a. Geometric properties of generalized Bessel functions. *Publ. Math. Debrecen*, 73, 155-178.
- Baricz, A., 2008b. Generalized Bessel Functions of the First Kind. Ph.D. thesis. Babeş-Bolyai University, Cluj-Napoca.
- Baricz, A. and Ponnusamy, S., 2010. Starlikeness and convexity of generalized Bessel functions. *Integral Transforms Spec. Funct.*, 21(9), 641-653.
- Baricz, A. and Frasin, B.A., 2010. Univalence of integral operators involving Bessel functions. *Appl. Math. Letters*, 23, 371-376.
- Brown, R.K., 1960. Univalence of Bessel functions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 11(2), 278-283.
- Carlson, B.C. and Shaffer, D.B., 1984. Starlike and prestarlike hypergeometric functions. *SIAM J. Math. Anal.*, 15, 737-745.
- Choi, J.H., Kim, Y.C. and Srivastava, H.M., 1996. Convex and starlike generalized hypergeometric functions associated with the Hardy space. *Complex Variables Theory Appl.*, 31(4), 345-355.
- Choi, J.H., Kim, Y.C., Ponnusamy, S. and Sugawa, T., 2005. Norm estimates for the Alexander transforms of convex functions of order α . *J. Math. Anal. Appl.*, 303(2), 661-668.
- De Branges, L., 1985. A proof of the Bieberbach conjecture. *Acta Math*, 154, 137-152.
- Deniz, E., Orhan, H. and Srivastava, H.M., 2011. Some sufficient conditions for univalence of certain families of integral operators involving generalized Bessel functions. *Taiwanese J. Math.*, 15(2), 883-917.
- Duren, P.L., 1970. *Theory of $\mathcal{H}^p$ Spaces*. Academic Press. New York/London.
- Duren, L. P., 1983. *Univalent Functions*. Springer-Verlag, New York.
- Dutka, J., 1984. The early history of the hypergeometric function. *Arch. Hist. Exact Sci.*, 31, 15-34.
- Dziok, J. and Srivastava, H.M., 1999. Classes of analytic functions associated with the generalized hypergeometric function. *Appl. Math. Comput.*, 103 (1), 1-13.
- Dziok, J. and Srivastava, H.M., 2003. Certain subclasses of analytic functions associated with the generalized hypergeometric function. *Integral Transforms Spec. Funct.*, 14 (1), 7-18.

- Eenigenburg, P.J. and Keogh, F.R., 1970. The Hardy class of some univalent functions and their derivatives. *Michigan Math J.*, 17, 335–346.
- Eenigenburg, P.J., 1972. A class of starlike mappings of the unit disk. *Compositio Math.*, 24, 235–238.
- Fejer, L., 1936. Untersuchungen über Potenzreihen mit mehrfach monotoner Koeffizientenfolge. *Acta Litterarum ac Scientiarum*, 8, 89–115.
- Frasin, B.A., 2010. Sufficient conditions for integral operator defined by Bessel functions. *J. Math. Ineq.*, 4(2), 301–306.
- Graham, I. and Kohr, G., 2003. Geometric function theory in one and higher dimensions. Marcel Dekker, Inc.
- Hardy, G. H., 1915. On the mean value of the modulus of an analytic function. *Proceedings of the London mathematical society series 2*, 14: 269–277.
- Heil, C., 2007. Real Analysis Lecture Notes. <http://people.math.gatech.edu/~heil/6337/fall07/section3.5b.pdf>.
- Jack, I.S., 1971. Functions starlike and convex of order α . *J. London Math. Soc.*, 3(2), 469–474.
- Kampe De Feriet, J., 1937. *La Fonction Hypergeometrique*. Gauthier-Villars, Paris.
- Kaplan, W., 1952. Close to convex schlicht functions. *Michigan Math. J.*, 2(1), 169–185.
- Lewandowski, Z., 1958. Sur l'identite de certaines classes de fonctions univalentes I. *Ann. Univ. Mariae Curie Sklodowska*, 12, 131–146.
- Lewandowski, Z., 1960. Sur l'identite de certaines classes de fonctions univalentes II. *Ann. Univ. Mariae Curie Sklodowska*, 14, 19–46.
- Libera, R. J. and Ziegler, M. R., 1972. Regular functions $f(z)$ for which $zf'(z)$ is α -spiral. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 166, 361–368.
- Liu, J.-L. and Srivastava, H.M., 2004. Classes of meromorphically multivalent functions associated with the generalized hypergeometric function. *Math. Comput. Modelling*, 39 (1), 21–34.
- MacGregor, T. H., 1962. Functions whose derivative has a positive real part. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 104, 532–537.
- MacGregor, T.H. 1963. The radius of univalence of certain analytic functions. II. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 14 (3), 521–524.
- MacGregor, T.H. 1964. A class of univalent functions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 15, 311–317.
- Merkes, E.P. and Scott, W.T., 1961. Starlike hypergeometric functions. *Proc. Amer. Math. Soc.* 12, 885–888.
- Merkes, E.P., Robertson, M.S. and Scott, W.T., 1962. On products of starlike functions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 13, 960–964.
- Miller, S.S. and Mocanu P.T., 1987. Differential subordinations and inequalities in the complex plane. *J. Differential Equations*, 67, 199–211.
- Miller, S.S. and Mocanu P.T., 2000. *Differential Subordinations Theory and Applications*. M. Dekker Inc., New York - Basel.
- Noshiro, K., 1934–1935. On the theory of schlicht functions. *J. Fac. Sci. Hokkaido Imp. Univ. Jap.*, 1(2), 129–155.
- Orhan, H. and Güneş, E., 2009. Neighborhoods and partial sums of analytic functions based on Gaussian hypergeometric functions. *Indian Journal of Mathematics*, 51, (3), 489–510.

- Orhan, H. and Raducanu, D., 2009. Fekete-Szegő problem for strongly starlike functions associated with generalized hypergeometric functions. *Mathematical and Computer Modelling*, 50, 430-438.
- Orhan, H. and Raducanu, D., 2010. On certain subclasses of analytic functions of complex order defined by generalized hypergeometric functions. *Punjab University Journal of Mathematics*, 42, 25-40.
- Orhan H. and Yağmur N., 2013. Geometric properties of generalized Struve functions. *The Scientific Annals of "Al.I. Cuza" University of Iasi* (accepted).
- Owa, S. and Srivastava, H.M., 1987. Univalent and starlike generalized hypergeometric functions. *Canad. J. Math.*, 39(5), 1057–1077.
- Owa, S., Nunokawa, M., Saitoh, H. and Srivastava, H.M., 2002. Close-to-convexity, starlikeness, and convexity of certain analytic functions. *Appl. Math. Letters* 15, 63-69.
- Ozaki, S., 1935. On the theory of multivalent functions. *Sci. Rep. Tokyo Bunrika Daigaku A*, 40(2), 167–188.
- Pommerenke, Ch., 1975. Univalent functions. Vandenhoech and Ruprecht, Göttingen.
- Ponnusamy, S. and Sabapathy, S., 1997. Geometric properties of generalized hypergeometric functions. *Ramanujan J.*, 1(2), 187–210.
- Ponnusamy, S., 1998. Inclusion theorems for convolution product of second order polylogarithms and functions with the derivative in a halfplane. *Rocky Mountain J. Math.*, 28(2), 695–733.
- Ponnusamy, S. and Vuorinen M., 1998. Univalence and convexity properties for confluent hypergeometric functions. *Complex Variables Theory Appl.*, 36, 73–97.
- Ponnusamy S. and Ronning F., 1999. Geometric properties for convolutions of hypergeometric functions and functions with the derivative in a halfplane. *Integral Transforms Spec. Funct.*, 8, 121–138.
- Ponnusamy, S. and Silverman, H., 2006. *Complex variables with Applications*. Birkhäuser, Boston.
- Prajapat, J.K., 2011. Certain geometric properties of normalized Bessel functions. *Appl. Math. Letters*, 24, 2133-2139.
- Silverman H., 1975. Univalent functions with negative coefficients. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 51, 109–116.
- Silverman, H., 1978. Subclasses of starlike functions. *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.*, 23, 1093–1099.
- Stankiewicz, J. and Stankiewicz Z., 1986. Some applications of Hadamard convolutions in the theory of functions. *Ann.Univ. Mariae Curie-Sklodowska*, 40, 251-265.
- Szasz, R. and Kupan, P.A., 2009. About the univalence of the Bessel functions. *Studia Univ. Babeş-Bolyai, Mathematica*, LIV(1).
- Warschawski, S. E., 1935. On the higher derivatives at the boundary in conformal mapping. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 38, 310-340.
- Watson, G.N., 1944. *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Xanthopoulos, X., 1993. Subclasses of starlike functions with $\operatorname{Re} f'(z) > 0$. *Studia Univ. Babeş-Bolyai, Math.* 38(1), 39-47.

- Yağmur, N. and Orhan, H. 2013a. Starlikeness and convexity of generalized Struve functions. *Abstr. Appl. Anal.* Art. ID 954513, 6 pp.
- Yağmur, N. and Orhan, H. 2013b. Hardy space of generalized Struve functions. *Complex variables and elliptic equations*, <http://dx.doi.org/10.1080/17476933.2013.799148>.
- Zhang, S. and Jin, J., 1996. *Computation of Special Functions*. Wiley Interscience Publication, New York.

ÖZGEÇMİŞ

1979 yılında Erzurum’da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Erzurum’da, lise öğrenimini İzmir Aliğa’da tamamladı. Lisans eğitimine 1996 yılında, Ankara Hacettepe Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü’nde başladı. 1 yıl ingilizce hazırlık okudu. Haziran 2001 de mezun oldu. 2005 yılında Erzincan’da kısa dönem olarak askerliğini yaptı. 2001-2009 yılları arasında Milli Eğitim’e bağlı değişik okullarda matematik öğretmeni olarak çalıştı. 2008-2010 yılları arasında Erzincan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim dalında yüksek lisans öğrenimini tamamladı. 2010 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalı, Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim dalında doktora programını kazandı.

2009 yılından beri Erzincan Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü’nde araştırma görevlisi olarak çalışmakta olup, evlidir.