



MARMARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



ANALİTİK FONKSİYONLAR SINIFLARINDA İNTEGRAL OPERATÖRLERİ

FATMA ORTAÇ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Matematik Anabilim Dalı
Teorik Matematik Programı

DANIŞMAN
Prof. Dr. Ahmet DERNEK

İSTANBUL, 2013



MARMARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



ANALİTİK FONKSİYONLAR SINIFLARINDA İNTEGRAL OPERATÖRLERİ

FATMA ORTAÇ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Matematik Anabilim Dalı
Teorik Matematik Programı

DANIŞMAN
Prof. Dr. Ahmet DERNEK

İSTANBUL, 2013

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam boyunca benden yardımını, desteğini, sabrını, bilgisini esirgemeyen değerli hocam sayın Prof. Dr. Ahmet Dernek'e, Yar. Doç. Dr. Gülsen Kürem'e ve diğer hocalarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca bugünlere gelmemde büyük pay sahibi olan, benden desteklerini esirgemeyen değerli anneme, babama, sevgili kardeşlerime ve yüksek lisans eğitimim boyunca bana yardımcı olan Fatih Erbay'a, Rabia Yaşar'a, Gözde Aydın'a, Fatih Hunutlu'ya ve diğer dostlarıma teşekkür ederim.

OCAK, 2013

Fatma ORTAÇ

İÇİNDEKİLER

	SAYFA
TEŞEKKÜR	i
İÇİNDEKİLER	ii
ÖZET	iii
ABSTRACT	iv
1. GİRİŞ VE AMAÇ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	3
2.1. Yalınkat Fonksiyonlar	3
2.2. Subordinasyon Prensibi	6
3. ÖZEL SINIFLAR	9
3.1. Pozitif Reel Kısma Sahip Fonksiyonlar	9
3.2. S Sınıfı	11
3.2.1. Yıldızlı fonksiyonlar	16
3.2.2. Konveks fonksiyonlar	19
3.2.3. Konvekse yakın fonksiyonlar	21
4. İNTEGRAL OPERATÖRLERİ	23
4.1. Birinci Tür İntegral Operatörü Altında Özel Fonksiyon Sınıflarının İncelenmesi	24
4.2. İkinci Tür İntegral Operatörü Altında Özel Fonksiyon Sınıflarının İncelenmesi	33
4.3. Üçüncü Tür İntegral Operatörü Altında Özel Fonksiyon Sınıflarının İncelenmesi	39
4.3.1. Genelleştirilmiş integral operatörleri	41
4.3.2. Ters problem	45
4.3.3. Genelleştirilmiş integral operatörü için ters problemlerin incelenmesi	52
4.4. Bazı İntegral Operatörleri	60
4.5. Türev Operatörü ile Tanımlanan İntegral Operatörleri	66
4.5.1. Al-Oboudi türev operatörü ile tanımlanan integral operatörü	67
4.5.2. Al-Oboudi türev operatörü ile tanımlanan özel sınıflar	70
5. SON DEĞERLENDİRMELER VE ÖNERİLER	75
KAYNAKLAR	76
ÖZGEÇMİŞ	

ÖZET

ANALİTİK FONKSİYONLAR SINIFLARINDA İNTEGRAL OPERATÖRLERİ

Biernacki, normalize edilmiş analitik ve yalınkat fonksiyonların bazı integral operatörleri altında yine yalınkat olduğunu iddia etmiştir. Fakat bu iddianın doğru olmadığı karşıt örnekle ispatlanmıştır. Biernacki'nin bu çalışması, analitik fonksiyon sınıflarında, integral operatörlerin özelliklerinin araştırılmasında önemli bir rol oynamıştır.

Bu tezin ilk bölümünde giriş ve amaç verilmiştir. İkinci bölümde yalınkat fonksiyon tanımı verilip bazı özellikler tanıtılmaktadır. Ayrıca bir yalınkatlık kriteri olan Schwarzian türev kavramı ve Subordinasyon tanımı verilip özellikleri incelenmiştir. Üçüncü bölümde bazı özel sınıfların tanımları verilmiştir. Tanımı verilen sınıflar arasında pozitif reel kısma sahip, normalize edilmiş yalınkat ve analitik, yıldızlı, konveks ve konvekse yakın fonksiyon sınıfları vardır. Ayrıca bu sınıflarının birbiriyle olan ilişkileri de incelenmiştir. Dördüncü bölümde öncelikle birinci, ikinci, üçüncü tür ve genelleştirilmiş integral operatörlerinin tanımları ve özellikleri verilmiştir. Ayrıca üçüncü bölümde verilen özel fonksiyon sınıflarından alınan fonksiyonların integral operatörleri altında hangi sınıflara ait olduğu incelenmiştir. Üçüncü tür ve genelleştirilmiş integral operatörleri için ters problem incelenmiştir.

Son olarak dördüncü bölümde son yıllarda çalışılan integral operatörleri ve Al-Oboudi türev operatörü ile verilen integral operatörünün tanımları verilip özellikleri incelenmiştir.

OCAK, 2013

Fatma ORTAÇ

ABSTRACT

INTEGRAL OPERATOR ON ANALYTIC FUNCTIONS CLASSES

Biernacki claimed that S class functions are closed under the integral operator given by Alexander. However this claim has been proven to be false by a counter example. Biernacki's work has played an important role in the investigation of properties of integral operators on analytic function classes.

In the first part of this thesis an introduction is done and the aim of this work is given. In the second part the definition of univalent function is given and some of its elementary properties are presented. Moreover Schwarzian derivative and Subordination concept are defined as criteria of univalence and their properties are studied. In the third part some special classes of functions are defined. These are respectively classes of functions having positive real parts, of normalized univalent and analytic functions, of starlike functions, of convex and nearly convex functions. Additionally the relations among these classes are investigated. In the fourth part properties of generalized integral operators of first, second, third kind are given. Moreover the appartenance of functions taken from the special function classes in the third section under integral operators is investigated. Also the inverse problem is taken into consideration for the third kind and generalized integral operator.

Finally in the fourth part, properties of integral operator which are studied in recent years and the integral operator given by Al-Oboudi differential operator are examined.

JANUARY, 2013

Fatma ORTAÇ

1 GİRİŞ VE AMAÇ

Birim dairede analitik olan fonksiyonlar yardımı ile tanımlı integral operatörlerinin incelenmesi uzun yıllara dayanır. Günümüze kadar integral operatörleri birçok matematikçinin ilgi alanı olmuş ve çok sayıda araştırma yapılmıştır. Farklı biçimlerdeki operatörler ile tanımlı $I(f) = F(z)$ fonksiyonunun özel sınıflara ait olmasının gerekli koşulları araştırılmıştır. Başlangıcı Biernacki tarafından yapılmış olup günümüze kadar uzanmaktadır.

1960 yılında Biernacki, Alexander tarafından verilen

$$F(z) = \int_0^z \frac{f(\xi)}{\xi} d\xi$$

ile tanımlanan fonksiyonun birim dairede yalınkat olduğu tahmininde bulunmuştur. Fakat bu iddianın doğru olmadığı karşıt örnekle ispatlanmıştır. Bu çalışma analitik fonksiyon sınıflarında, integral operatörlerinin özelliklerinin araştırılmasında önemli bir rol oynamıştır. Analitik fonksiyon sınıflarında integral operatörlerinin özelliklerinin araştırılmasında en çok kullanılan integraller aşağıdaki gibidir:

Birinci tür integral operatörü, $L_1(z) = \int_0^z \left(\frac{f(\xi)}{\xi} \right)^\alpha d\xi \quad f \in H(D), \alpha \in \mathbb{R}$

İkinci tür integral operatörü, $L_2(z) = \int_0^z [f'(\xi)]^\alpha d\xi \quad f \in H(D), \alpha \in \mathbb{R}$

$\gamma_i > 0, f_i \in A, i \in \{1, 2, \dots, n\}$ olmak üzere birinci tür integral operatörü D. Breaz ve N. Breaz tarafından

$$F_n[f](z) = \int_0^z \left(\frac{f_1(t)}{t} \right)^{\gamma_1} \dots \left(\frac{f_n(t)}{t} \right)^{\gamma_n} dt$$

biçiminde tanımlanarak genelleştirilmiştir.[6]

Fonksiyonun türevi ile verilen ikinci tür integral operatörü D. Breaz, S. Owa ve N. Breaz tarafından

$$F_{\gamma_1, \dots, \gamma_n}[f](z) = \int_0^z [f'_1(t)]^{\gamma_1} \dots [f'_n(t)]^{\gamma_n} dt$$

şeklinde genelleştirilmiştir.[7]

Son yıllarda birinci tür integral operatöründe f fonksiyonu yerine, Salagean, Al-Oboudi gibi matematikçiler tarafından tanımlanan farklı $D^\lambda f(z)$ türev operatörleri yardımıyla yeni integral operatörleri tanımlanarak temel problemler incelenmektedir.

Birim dairede analitik ve yalınkat fonksiyonların alt sınıflarına ait fonksiyonlar cinsinden tanımlanan integral operatörlerinin yalınkatlık problemini incelemek, karmaşık analizde önemli bir yer tutar. Ayrıca, ters integral operatörleri ile tanımlanan fonksiyonların hangi koşullar altında yalınkat olduğunu incelemek (ters problem), kompleks diferansiyel denklemlerin çözümlerinin yalınkatlık problemini çözmek anlamındadır. Bu tezin amacı özel sınıflardaki integral operatörleri üzerindeki çalışmalara katkı sağlamak ve yeni çalışmalara yardımcı olmaktır.

2 TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Yalınkat Fonksiyonlar

Sonlu kompleks düzlem $\mathbb{C}$, kompleks düzlemde birim daire

$$D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\},$$

birim dairenin sınırı

$$\partial D = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

ve $z_0 \in \mathbb{C}$ merkezli r yarıçaplı daireyi $D(z_0, r) = D(r)$ ile gösterilir. Boştan farklı herhangi iki ayrık ve açık kümenin birleşimi olarak yazılamayan kümelere bağlantılı küme denir. Boştan farklı, açık, bağlantılı kümeye bölge denir.

Tanım 2.1 *Kompleks değişkenli ve kompleks değerli f fonksiyonu $z_0 \in \mathbb{C}$ noktasının bir komşuluğunda tanımlı olsun.*

a) *Eğer $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ limiti varsa f fonksiyonu z_0 noktasında türevlenebilirdir, denir. Bu limit değeri $f'(z_0)$ ile gösterilir ve $f'(z_0)$ sayısına f fonksiyonun z_0 noktasındaki türevi denir.*

b) *f fonksiyonu bir z_0 noktasının belli bir $D(z_0, r)$ komşuluğundaki tüm noktalarda türevlenebiliyorsa f fonksiyonu z_0 noktasında analitiktir denir.*

c) *Eğer f fonksiyonu bir A kümesinin bütün noktalarında analitikse, f , A üzerinde analitiktir denir.*

d) *f fonksiyonu $\mathbb{C}$ nin tüm noktalarında analitikse, f fonksiyonuna tam fonksiyon denir.*

Tanım 2.2 *Bir $B \subset \mathbb{C}$ bölgesinde analitik ve bire-bir olan fonksiyona B de yalınkat fonksiyon denir.*

D de analitik olan fonksiyonların sınıfı,

$$H(D) = \{f : D \text{ de analitik}\},$$

Normalize edilmiş analitik fonksiyonların sınıfı,

$$A = \left\{ f : f \in H(D), f(0) = 0 \text{ ve } f'(0) = 1 \right\}$$

D de yalınkat olan analitik fonksiyonların sınıfı,

$$H_U(D) = \{ f : f \in H(D) \text{ ve } f \text{ yalınkat} \}$$

ile gösterilir.

Tanım 2.3 (Yerel yalınkatlık) $w = f(z)$, z_0 da analitik olsun. f fonksiyonunun z_0 da yerel yalınkat olması için gerek ve yeter koşul, $f'(z_0) \neq 0$ olmasıdır. Bu takdirde f fonksiyonu z_0 ın komşuluğunda bire-birdir.[11]

Örnek 2.1 $f(z) = z^2$ fonksiyonu $B = \left\{ z : 1 < |z| < 2, 0 < \arg z < \frac{3\pi}{2} \right\}$ bölgesinde yerel yalınkattır.

TEMEL ÖZELLİKLER

$f \in H_U(B)$ olsun.

1. $g(z)$ fonksiyonu bir G bölgesinde yalınkat ve $f(B) = \{f(z) : z \in B\} \subset G$ ise $g \circ f$ bileşke fonksiyonu da yalınkattır:

f bire-bir olduğundan, $z_1, z_2 \in B$ ve $z_1 \neq z_2$ ise $f(z_1) \neq f(z_2)$ dir. $g(z)$, G bölgesinde bire-bir olduğu için $f(z_1) \neq f(z_2)$ iken $g(f(z_1)) \neq g(f(z_2))$ olur. $g \circ f$ nin analitikliğini gösterelim:

$$T = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(f(z)) - g(f(z_0))}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(f(z)) - g(f(z_0))}{f(z) - f(z_0)} \cdot \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

$w = f(z)$ dersek $w_0 = f(z_0)$ ve $f(z)$ nin sürekliliğinden $z \rightarrow z_0$ iken $w \rightarrow w_0$ olur.

Buradan da,

$$T = g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0)$$

bulunur.

2. $f(z) \neq 0$ olmak üzere $\frac{1}{f(z)}$ nin yalınkat olması için gerek ve yeter koşul, $f(z)$ nin yalınkat olmasıdır:

$\frac{1}{f(z)}$ yalınkat olsun. $g(z) = \frac{1}{z}$ yalınkat fonksiyonunu gözönüne alalım. Bu hâlde, $g\left(\frac{1}{f(z)}\right) = f(z)$ bileşke fonksiyonu da yalınkattır.

$f(z)$ yalınkat olsun. $g(f(z)) = \frac{1}{f(z)}$ bileşke fonksiyonu da yalınkattır.

3. z_0 , $f(z)$ yalınkat fonksiyonu için bir kutup noktası ise, $\frac{1}{f(z)}$ fonksiyonu z_0 noktasının bir komşuluğunda analitik ve yalınkattır:

$f(z)$ yalınkat fonksiyonu için z_0 noktası bir kutup noktası olduğundan $\frac{1}{f(z_0)} = 0$ dır. Bu hâlde, z_0 noktası $\frac{1}{f(z)}$ fonksiyonunun bir sıfır noktasıdır ve bu noktanın uygun bir komşuluğunda $\frac{1}{f(z)}$ fonksiyonu bire-birdir.

Tanım 2.4 (**Schwarzian Türev**) $w = f(z)$ D de analitik bir fonksiyon olmak üzere

$$\{w, z\} = \left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)' - \frac{1}{2} \left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2 = \frac{f'''(z)}{f'(z)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2$$

ifadesine, $w = f(z)$ fonksiyonun Schwarzian türevi denir.[24]

Teorem 2.1 [21] $w = f(z)$ fonksiyonunun D de yalınkat olması için gerek koşul,

$$|\{w, z\}| \leq \frac{6}{(1 - |z|^2)^2} \quad (2.1)$$

ve yeter koşul

$$|\{w, z\}| \leq \frac{2}{(1 - |z|^2)^2} \quad (2.2)$$

olmasıdır.

Teorem 2.2 [23] $f(z) = \exp[\mu \log(1 - z)]$ biçiminde tanımlanan fonksiyon, yalnız ve ancak,

$$|\mu + 1| \leq 1 \text{ veya } |\mu - 1| \leq 1$$

ise, D de yalınkattır.

2.2 Subordinasyon Prensipleri

Yar.Teorem 2.1 (*Schwarz Lemması*) : $f \in H(D)$, $f(0) = 0$ ve her $z \in D$ için $|f(z)| \leq 1$ olsun. Bu takdirde, $z \in D$ noktaları için $|f(z)| \leq |z|$ ve $|f'(0)| \leq 1$ dir. Eşitlik durumu $\theta \in R$ olmak üzere $f(z) = e^{i\theta} z$ için gerçekleşir.

Tanım 2.5 $f, g \in H(D)$ olsun. Eğer $f(z) = g(k(z))$ olacak biçimde Schwarz lemmasının koşullarını gerçekleyen bir $k(z)$ fonksiyonu varsa, $f(z)$ fonksiyonu $g(z)$ fonksiyonuna subordinedir, denir ve $f \prec g$ ile gösterilir [22].

Özellik 1. $f \prec g$ ise $f(D) \subset g(D)$ ve $f(0) = g(0)$ dir:

$f \prec g$ olsun. Tanım 2.5 gereği $f(z) = g(k(z))$ olacak biçimde Schwarz lemmasının koşullarını gerçekleyen bir $k(z)$ fonksiyonu vardır. $z_1 \in k(D)$ olsun. O halde $z_1 = k(z)$ olacak biçimde bir $z \in D$ vardır. $z \in D_z$ için

$$|z_1| = |k(z)| < 1 \text{ ve } |z_1| \in D_w$$

dir. O hâlde, $k(D)$ için, $k(D) \subset D$ ve buradan $f(D) = g(k(D)) \subset g(D)$ elde edilir. Diğer taraftan, $k(0) = 0$ olduğundan, $f(0) = g(k(0)) = g(0)$ dir.

Özellik 2. $f \prec g$ ise $\max_{|z| \leq r} |f(z)| \leq \max_{|z| \leq r} |g(z)|$ dir.

$f \prec g$ olsun. Bu durumda Tanım 2.5. gereği $f(z) = g(k(z))$ olacak şekilde Schwarz lemmasının koşullarını gerçekleyen, $|k(z)| \leq |z| < 1$ dir. $z_1 \in k(D(r))$ alalım. Bu durumda $z_1 = k(z)$ olacak biçimde bir $z \in D(r)$ vardır. Buradan,

$$|z_1| = |k(z)| < r \text{ ve } k(D(r)) \subset D(r)$$

gerçeklenir. $f(z) = g(k(z))$ olduğundan, $f(D(r)) \subset g(D(r))$ ve maksimum prensibinden,

$$\max_{|z| \leq r} |f(z)| \leq \max_{|z| \leq r} |g(z)| \quad (0 \leq |z| = r < 1)$$

eşitliği elde edilir.

Yar.Teorem 2.2 $g \in H_U(D)$ olsun. Yalnız ve ancak $f(D) \subset g(D)$ ve $f(0) = g(0)$ ise $f \prec g$ dir. [22]

İspat: $g \in H_U(D)$, $f(D) \subset g(D)$ ve $f(0) = g(0)$ olsun. $w = g(z)$ fonksiyonu D de yalınkat olduğundan, $g^{-1}(w)$ fonksiyonu $g(D)$ bölgesinde analitiktir. $f(D) \subset g(D)$ olduğundan, $g^{-1}(w)$ fonksiyonu $f(D)$ alt bölgesinde de analitiktir. f ve g^{-1} fonksiyonları analitik olduğundan $k(z) = g^{-1}(f(z)) = (g^{-1} \circ f)(z)$ biçiminde tanımlanan $k(z)$ fonksiyonu da analitik ve $|k(z)| \leq 1$ olur. Ayrıca $f(0) = g(0)$ olduğundan,

$$k(0) = g^{-1}(f(0)) = g^{-1}(g(0)) = 0$$

gerçeklenir ve böylece $k(z)$ fonksiyonu Schwarz lemmasının koşullarını sağlar. Bu biçimde tanımlanan $k(z)$ fonksiyonu için $f(z) = g(k(z))$ ve $f \prec g$ dir.

Tersine $g \in H_U(D)$, olmak üzere $f \prec g$ olsun. Bu takdirde $f(z) = g(k(z))$ olacak şekilde Schwarz lemmasının koşullarını gerçekleyen bir $k(z)$ fonsiyonu vardır. Buradan $|k(z)| \leq |z| < r$ elde edilir. $z_1 \in k(D(r))$ olsun. $z_1 = k(z)$ olacak şekilde $z \in D(r)$ vardır. Bu nedenle $|z_1| = |k(z)| \leq |z| < r$ dir. Bu halde, $z_1 \in D(r)$ ve $k(D(r)) \subset D(r)$ dir. $g(z)$ fonksiyonu D de yalınkat olduğundan,

$$f(D(r)) = g(k(D(r))) \subset g(D(r)) \text{ ve } r \rightarrow 1 \text{ iken } f(D) \subset g(D)$$

dir. Ayrıca, $f(0) = g(k(0)) = g(0)$ olur. ■

3 ÖZEL SINIFLAR

3.1 Pozitif Reel Kısma Sahip Fonksiyonlar

D de analitik ve $p(0) = 1$, $\operatorname{Re}\{p(z)\} > 0$, $(|z| < 1)$ koşullarını gerçekleyen $p(z)$ fonksiyonuna pozitif reel kısma sahip fonksiyon denir. Bu fonksiyonların sınıfı P ile gösterilir.

Yar.Teorem 3.1 *Yalnız ve ancak $p(z) \prec \frac{1+z}{1-z}$ ise $p \in P$ dir.[22]*

İspat: $p(z) \prec \frac{1+z}{1-z}$ olsun. Subordinasyon tanımından Schwarz lemmasının koşullarını gerçekleyen bir $k(z)$ fonksiyonu, $p(z) = \frac{1+k(z)}{1-k(z)}$ olacak biçimde vardır. $z = 0$ için $p(0) = 1$ ve $k(z) : D_z \rightarrow D_w$ olduğundan, $k(z) \neq 1$ ve $p(z)$ fonksiyonu D de analitiktir. Bu hâlde,

$$p(z) = \frac{1+k(z)}{1-k(z)} \cdot \frac{\overline{1-k(z)}}{\overline{1-k(z)}} = \frac{1-|k(z)|^2 - 2i\operatorname{Im}\{k(z)\}}{|1-k(z)|^2}$$

ve

$$\operatorname{Re}\{p(z)\} = \frac{1-|k(z)|^2}{|1-k(z)|^2} > 0$$

gerçeklenir. Bu nedenle, $p \in P$ dir.

Tersine, $p \in P$ olsun. $g(z) = \frac{1+z}{1-z}$ fonksiyonunu alalım. $g(0) = 1 = p(0)$ dir. $w \in p(D)$ olsun. Bu hâlde $w = p(z)$ gerçeklenmek üzere bir $z \in D$ vardır. Bu tür z ler için $\operatorname{Re}\{w\} = \operatorname{Re}\{p(z)\} > 0$ dir. Buna göre $w = g(z_1)$ olacak biçimde bir $z_1 \in D$ vardır. $w \in g(D)$ ve $p(D) \subset g(D)$, $p(0) = g(0)$ olduğundan, $p \prec g$ dir. ■

Yar.Teorem 3.2 *$p \in P$ ise $\frac{1-|z|}{1+|z|} \leq |p(z)| \leq \frac{1+|z|}{1-|z|}$ ve $|p'(0)| \leq 2$ dir.[22]*

İspat: $p \in P$ olduğundan $p(z) \prec \frac{1+z}{1-z}$ dir ve $p(z) = \frac{1+k(z)}{1-k(z)}$ olacak biçimde Schwarz lemmasının koşullarını gerçekleyen bir $k(z)$ fonksiyonu vardır. Bu hâlde,

$$|p(z)| = \left| \frac{1+k(z)}{1-k(z)} \right| \leq \frac{1+|k(z)|}{1-|k(z)|} \leq \frac{1+|z|}{1-|z|} \quad (3.1)$$

dir. $p(z)$ sıfırsız bir fonksiyon olduğundan, $\frac{1}{p(z)}$ analitik ve $\operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{p(z)} \right\} > 0$ dır. Bu nedenle, $\frac{1}{p} \in P$ olur. O hâlde, eşitsizlik $\frac{1}{p(z)}$ için gerçekleşir:

$$\frac{1}{|p(z)|} \leq \frac{1+|z|}{1-|z|}$$

ve

$$|p(z)| \geq \frac{1-|z|}{1+|z|} \quad (3.2)$$

dir. (3.1) ve (3.2) eşitsizliklerinden,

$$\frac{1-|z|}{1+|z|} \leq |p(z)| \leq \frac{1+|z|}{1-|z|}$$

elde edilir. Öte yandan,

$$p'(z) = \frac{k'(z)[1-k(z)] + k'(z)[1+k(z)]}{(1-k(z))^2} = \frac{2k'(z)}{(1-k(z))^2}$$

olduğundan, $p'(0) = 2|k'(0)| \leq 2$ bulunur. ■

Teorem 3.1 $f(z) = 1 + a_1z + a_2z^2 + \dots$ fonksiyonu D de analitik ve $f \in P$ ise,

$$\left| \frac{f'(z)}{f(z)} \right| \leq \frac{2}{1-r^2}$$

dir. [20]

İspat: $\varphi(z) = \frac{f\left(\frac{z+z_0}{1+\bar{z}_0z}\right) - f(z_0)}{f\left(\frac{z+z_0}{1+\bar{z}_0z}\right) + \overline{f(z_0)}}$ olsun. $\varphi(z)$ dönüşümü de D de analitik ve

Schwarz lemmasının koşullarını gerçekler. $z = 0$ için $\varphi(0) = 0$ ve

$$\varphi'(0) = \frac{(1-|z_0|^2)f'(z_0)}{f(z_0) + \overline{f(z_0)}} = \frac{(1-|z_0|^2)f'(z_0)}{2\operatorname{Re}\{f(z_0)\}}$$

olur. $\varphi(z)$ Schwarz lemmasının koşullarını gerçeklediğinden,

$$|\varphi'(0)| = \left| \frac{(1-|z_0|^2)f'(z_0)}{2\operatorname{Re} f(z_0)} \right| \leq 1$$

dir. Bu hâlde,

$$(1-|z_0|^2) \left| f'(z_0) \right| \leq 2|\operatorname{Re} f(z_0)| \leq 2|f(z_0)|$$

ve

$$\left| \frac{f'(z_0)}{f(z_0)} \right| \leq \frac{2}{1 - |z_0|^2}$$

elde edilir. $z_0 \in D$ keyfi bir nokta olduğundan ,

$$\left| \frac{f'(z)}{f(z)} \right| \leq \frac{2}{1 - r^2} \quad |z| = r < 1$$

dir. ■

3.2 S Sınıfı

Birim dairede analitik, yalınkat ve normalize edilmiş fonksiyonların oluşturduğu sınıf S ile gösterilir.

$$S = H_U(D) \cap A = \left\{ f : f \in H_U(D) , f(0) = f'(0) - 1 = 0 \right\}$$

$f \in S$ ise $f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$ biçimindedir.

S sınıfına ait bir fonksiyon örneği olarak, Koebe fonksiyonu verilebilir.

$$k(z) = \frac{z}{(1 - z)^2} = z + 2z^2 + 3z^3 + \dots$$

Koebe fonksiyonu birim daireyi, başlangıç noktası $-\frac{1}{4}$ olup sonsuza uzanan ışın hariç tüm düzleme resmeder.

$$k(z) : D \rightarrow \mathbb{C} \setminus \left\{ -\infty < \operatorname{Re} w < -\frac{1}{4}, \operatorname{Im} w = 0 \right\}$$

biçimindedir.

$$1) f(z) = z \quad f : D \rightarrow D$$

$$2) f(z) = \frac{z}{1 - z} \quad f : D \rightarrow \operatorname{Re} w > -\frac{1}{2}$$

$$3) f(z) = \frac{z}{1 - z^2} \quad f : D \rightarrow \mathbb{C} - \left\{ -\infty < \operatorname{Re} w < -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} < \operatorname{Re} w < \infty \right\}$$

fonksiyonları S sınıfına aittir.

Uyarı 3.1 S sınıfındaki herhangi iki fonksiyonun toplamının bu sınıfa ait olması gerekmez.

Örneğin, $f(z) = \frac{z}{1-z} \in S$ ve $g(z) = \frac{z}{1+iz} \in S$ alalım. $(f+g)'(0) = 2$ dir. $z = 0$ noktasındaki 1' den farklı olduğu için $f+g$, S ye ait değildir.

S Sınıfının Özellikleri

- 1) Eşlenik : $f \in S$ ise $g(z) = \overline{f(\bar{z})} = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots \in S$ dir.
- 2) Döndürme : $f \in S$ ise $g(z) = e^{-i\theta} f(e^{i\theta} z) \in S$ dir.
- 3) Dilatasyon : $f \in S$ ise $(0 < r < 1)$ olmak üzere $g(z) = r^{-1} f(rz) \in S$ dir.
- 4) Alınmayan Değer Dönüşümü : $f \in S$, $f(z) \neq \omega$ ise $g(z) = \frac{\omega f}{\omega - f} \in S$ dir.

S sınıfındaki en önemli fonksiyon Koebe fonksiyonu rotasyonlarıdır.

Yar.Teorem 3.3 (Bieberbach Tahmini) $f \in S$ ise, $|a_n| \leq n$ dir. Eşitlik sadece Koebe fonksiyonu ve rotasyonları için gerçekleşir. Bu tahmin 1985 yılında Louis de Branges tarafından ispatlanmıştır.[11]

Teorem 3.2 (Disk Otomorfizması) $f \in S$ olsun. Bu takdirde,

$$h(\zeta) = \frac{f\left(\frac{\zeta + z_0}{1 + \bar{z}_0 \zeta}\right) - f(z_0)}{(1 - |z_0|^2) f'(z_0)}$$

biçiminde tanımlanan $h(\zeta)$ fonksiyonu S sınıfına aittir.

İspat: $f \in S$ ise $f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$, $(|z| < 1)$ biçimindedir.

$z = T(\zeta) = \frac{\zeta + z_0}{1 + \bar{z}_0 \zeta}$ dönüşümünü göz önüne alalım. Bu hâlde,

$$T : |\zeta| < 1 \rightarrow |z| < 1 \text{ ve } \zeta = 0 \rightarrow z = z_0$$

dir. $f(z) = f\left(\frac{\zeta + z_0}{1 + \bar{z}_0 \zeta}\right) = g(\zeta)$ diyelim. Doğrusal dönüşüm analitikliği ve yalınkatlığı koruduğu için $g(\zeta)$, D_ζ da analitik ve yalınkattır. $g(\zeta)$ fonksiyonunun Maclaurin açılımını bulalım. Öncelikle katsayıları hesaplayalım:

$\zeta = 0$ için $g(0) = f(z_0)$ ve

$$g'(\zeta) = \left[\frac{1 - |z_0|^2}{(1 + \bar{z}_0 \zeta)^2} \right] f'\left(\frac{\zeta + z_0}{1 + \bar{z}_0 \zeta}\right)$$

olur. $\zeta = 0$ için $g'(0) = (1 - |z_0|^2)f'(z_0)$,

$$g''(\zeta) = \left[\frac{1 - |z_0|^2}{(1 + \bar{z}_0\zeta)^2} \right]^2 f''\left(\frac{\zeta + z_0}{1 + \bar{z}_0\zeta}\right) + \left[\frac{(1 - |z_0|^2)(-2\bar{z}_0)}{(1 + \bar{z}_0\zeta)^3} \right] f'\left(\frac{\zeta + z_0}{1 + \bar{z}_0\zeta}\right)$$

olduğundan, $\zeta = 0$ için $g''(0) = (1 - |z_0|^2)^2 f''(z_0) - 2f'(z_0)\bar{z}_0(1 - |z_0|^2)$ olur. Benzer biçimde diğer katsayılar hesaplanırsa,

$$\begin{aligned} g(\zeta) &= g(0) + g'(0)\zeta + \frac{1}{2!}g''(0)\zeta^2 + \dots \\ &= f(z_0) + (1 - |z_0|^2)f'(z_0)\zeta + \frac{1}{2!} [(1 - |z_0|^2)^2 f''(z_0) - 2f'(z_0)\bar{z}_0(1 - |z_0|^2)] \zeta^2 + \dots \end{aligned}$$

elde edilir. Normalizasyonu sağlamak için bir $h(\zeta)$ fonksiyonu tanımlayalım:

$$h(\zeta) = \frac{g(\zeta) - f(z_0)}{(1 - |z_0|^2)f'(z_0)} = \zeta + \left[\frac{(1 - |z_0|^2)}{2} \frac{f''(z_0)}{f'(z_0)} - \bar{z}_0 \right] \zeta^2 + \dots \quad |\zeta| < 1 \quad (3.3)$$

olsun. $h(\zeta)$ fonksiyonu için $h(0) = 0$ ve $h'(0) = 1$ olduğundan, $h \in S$ dir. ■

Yar.Teorem 3.4 $f \in S$ ise, $\left| z \frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{2|z|^2}{1 - |z|^2} \right| \leq \frac{4|z|}{1 - |z|^2}$ dir.[22]

İspat: (3.3) deki h fonksiyonu için, $h(\zeta) = \zeta + h'(0)\zeta^2 + \dots \in S$ dir. S sınıfına ait fonksiyonlar için Bieberbach tahminine göre $|a_2| \leq 2$ olduğundan, $|h'(0)| \leq 2$ dir. O hâlde (3.3) ten,

$$\begin{aligned} \left| \frac{(1 - |z_0|^2)}{2} \frac{f''(z_0)}{f'(z_0)} - \bar{z}_0 \right| &\leq 2 \\ \left| \frac{f''(z_0)}{f'(z_0)} - \frac{2\bar{z}_0}{1 - |z_0|^2} \right| &\leq \frac{4}{1 - |z_0|^2} \\ \left| \frac{z_0 f''(z_0)}{f'(z_0)} - \frac{2|z_0|^2}{1 - |z_0|^2} \right| &\leq \frac{4|z_0|}{1 - |z_0|^2} \end{aligned}$$

elde edilir. z_0 keyfi olduğundan $z_0 = z$ yazılarak,

$$\left| \frac{z f''(z)}{f'(z)} - \frac{2|z|^2}{1 - |z|^2} \right| \leq \frac{4|z|}{1 - |z|^2} \quad (0 < |z| < 1)$$

elde edilir. ■

Teorem 3.3 $f \in S$ ise, $|z| = r < 1$ için

$$\begin{aligned}
(a) \quad & \frac{1-r}{(1+r)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+r}{(1-r)^3} \\
(b) \quad & \frac{r}{(1+r)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{(1-r)^2} \\
(c) \quad & \frac{1-r}{(1+r)} \leq \left| \frac{zf'(z)}{f(z)} \right| \leq \frac{1+r}{1-r}
\end{aligned}$$

eşitsizlikleri gerçekleşir.[11]

İspat: (3.3) deki h fonksiyonu için, $h(\zeta) = \zeta + h'(0)\zeta^2 + \dots \in S$ dir.Yar.Teorem

3.4 te ifade edilen,

$$\left| z \frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{2|z|^2}{1-|z|^2} \right| \leq \frac{4|z|}{1-|z|^2}$$

eşitsizliğinden,

$$-\frac{4|z|}{1-|z|^2} \leq \operatorname{Re} \left\{ z \frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{2|z|^2}{1-|z|^2} \right\} \leq \frac{4|z|}{1-|z|^2}$$

veya

$$\frac{2|z|(|z|-2)}{1-|z|^2} \leq \operatorname{Re} \left\{ z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right\} \leq \frac{2|z|(|z|+2)}{1-|z|^2} \quad (3.4)$$

elde edilir. $\log f(z)$ fonksiyonunu göz önüne alalım:

$$\frac{\partial \log f'(z)}{\partial \log z} = \frac{\partial \log f'(z)}{\partial z} \frac{1}{\frac{\partial \log z}{\partial z}}$$

ve $z = re^{i\theta}$, $r < 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ için $dz = e^{i\theta} dr$ olduğundan,

$$\frac{\partial \log z}{\partial z} = \frac{\partial(\log r + i\theta)}{\partial r} \frac{1}{\frac{\partial z}{\partial r}} = \frac{1}{r} \frac{1}{e^{i\theta}} = \frac{1}{r} e^{-i\theta}$$

ve

$$\frac{\partial \log f'(z)}{\partial \log z} = \frac{f''(z)}{f'(z)} \frac{1}{\frac{1}{r} e^{-i\theta}} = \frac{zf''(z)}{f'(z)}$$

gerçeklenir. Buna göre,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} \left\{ z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right\} &= \operatorname{Re} \left\{ \frac{\partial \log f'(z)}{\partial \log z} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{\partial \log f'(z)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial z} \frac{1}{\frac{\partial \log z}{\partial z}} \right\} \\
&= \operatorname{Re} \left\{ \frac{r \partial \log f'(z)}{\partial r} \right\} = r \frac{\partial}{\partial r} \log |f'(z)|
\end{aligned}$$

dir.(3.4) ten

$$\frac{2r^2 - 4r}{1 - r^2} \leq r \frac{\partial}{\partial r} \log |f'(z)| \leq \frac{2r^2 + 4r}{1 - r^2}$$

ve

$$\frac{2r - 4}{1 - r^2} \leq \frac{\partial}{\partial r} \log |f'(z)| \leq \frac{2r + 4}{1 - r^2}$$

elde edilir. Buradan ,

$$\begin{aligned} \int_0^r \frac{2r - 4}{1 - r^2} dr &\leq \int_0^r \frac{\partial}{\partial r} \log |f'(z)| dr \leq \int_0^r \frac{2r + 4}{1 - r^2} dr \\ \log \left\{ \frac{1 - r}{(1 + r)^3} \right\} &\leq \log |f'(z)| \leq \log \left\{ \frac{1 + r}{(1 - r)^3} \right\} \\ \frac{1 - r}{(1 + r)^3} &\leq |f'(z)| \leq \frac{1 + r}{(1 - r)^3} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (a) şıkki ispatlanmış olur. Diğer taraftan, $|f'(z)| : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^+$ ve (a) bağıntısı gereği

$$|f'(z)| \leq \frac{1 + r}{(1 - r)^3}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} |f(z)| &\leq \int_0^r |f'(\rho e^{i\theta})| d\rho \\ &\leq \int_0^r \frac{1 + \rho}{(1 - \rho)^3} d\rho = \frac{r}{(1 - r)^2} \end{aligned}$$

dir. Benzer işlemle $|f(z)|$ için bir alt sınır bulunabilir. Bu amaçla, $|z| = r$ çemberi üzerinde, görüntüsü başlangıç noktasına en yakın olan bir nokta seçelim. Bu noktanın görüntüsünü $w = 0$ başlangıç noktasına uzanan bir ışınla birleştirelim. Bu hâlde doğru boyunca;

$$\begin{aligned} |f(z)| &= \int_L |f'(z)| |dz| = \int_L |dw| \\ &\geq \int_0^r \frac{1 - r}{(1 + r)^3} dr = \frac{r}{(1 + r)^2} \end{aligned}$$

olur. O hâlde,

$$\frac{r}{(1 + r)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{(1 - r)^2}$$

elde edilir. Böylece (b) şıkkı ispatlanmış olur. Öte yandan, $h(\zeta) = \zeta + h'(0)\zeta^2 + \dots \in S$ olduğundan, $\zeta = -z_0$ için

$$h(-z_0) = \frac{f\left(\frac{-z_0+z_0}{1-\bar{z}_0 z_0}\right) - f(z_0)}{(1-|z_0|^2)f'(z_0)} = -\frac{1}{1-|z_0|^2} \frac{f(z_0)}{f'(z_0)}$$

elde edilir ve (b) ile verilen eşitsizlik $-h(-z_0)$ için yazılırsa:

$$\frac{|z_0|}{(1+|z_0|)^2} \leq |-h(-z_0)| \leq \frac{|z_0|}{(1-|z_0|)^2}$$

$$\frac{|z_0|}{(1+|z_0|)^2} \leq \left| \frac{1}{(1-|z_0|^2)} \frac{f(z_0)}{f'(z_0)} \right| \leq \frac{|z_0|}{(1-|z_0|)^2}$$

ve

$$\frac{|z_0|(1-|z_0|^2)}{(1+|z_0|)^2} \leq \left| \frac{f(z_0)}{f'(z_0)} \right| \leq \frac{|z_0|(1-|z_0|^2)}{(1-|z_0|)^2}$$

çıkar. Buradan

$$\frac{1-|z_0|}{|z_0|(1+|z_0|)} \leq \left| \frac{f'(z_0)}{f(z_0)} \right| \leq \frac{1+|z_0|}{|z_0|(1-|z_0|)}$$

ve z_0 keyfi olduğundan

$$\frac{1-r}{1+r} \leq \left| \frac{zf'(z)}{f(z)} \right| \leq \frac{1+r}{1-r}$$

elde edilir. ■

Teorem 3.4 (Koebe Örtülüş Teoremi) $f \in S$ ise, $\{w : |w| < \frac{1}{4}\} \subset f(D)$ dir. [11]

İspat: $c \notin f(D)$ olsun. Bu takdirde $c \neq 0$ dır.

$$h(z) = \frac{cf(z)}{c-f(z)} = z + \left(a_2 + \frac{1}{c}\right)z^2 + \dots$$

olacaktır. O hâlde $h(z) \in H_u(D)$ dir. $h(0) = h'(0) - 1 = 0$ olduğundan $h \in S$ dir.

Bieberbach tahmininden $\left|a_2 + \frac{1}{c}\right| \leq 2$ ve

$$\left|\frac{1}{c}\right| - |a_2| \leq \left|a_2 + \frac{1}{c}\right| \leq 2 \Rightarrow \left|\frac{1}{c}\right| \leq 2 + |a_2| \Rightarrow |c| \geq \frac{1}{4}$$

olur. $|a_2| = 2$ için eşitlik gerçekleşir ve bu sonuç Koebe fonksiyonunun rotasyonları için gerçekleşir. ■

3.2.1 Yıldızlı fonksiyonlar

Tanım 3.1 (*Yıldızlı Bölge*): $E \subset \mathbb{C}$ olsun. Her $w \in E$ ve $0 \leq t \leq 1$ için $tw \in E$ ise, E ye orjine göre yıldızlı bölge denir.[22]

Yar.Teorem 3.5 $f(z)$ ve $g(z)$ fonksiyonları, D de analitik, $f(0) = g(0) = 0$ ve g fonksiyonu altında birim dairenin görüntüsü, orjine göre yıldızlı ve çok yapraklı bir bölge olsun. Bu takdirde,

$$\frac{f'}{g'} \in P \text{ ise } \frac{f}{g} \in P$$

dir.[16]

İspat: P sınıfının özelliğinden, $p \in P$ ise

$$\left| p(z) - \frac{1+r^2}{1-r^2} \right| \leq \frac{2r}{1-r^2}, \quad (|z| < r < 1) \quad (3.5)$$

dir. Öte yandan, $0 < r < 1$ için $(1-r)^2 > 0$ ve $2r < 1+r^2$ olduğundan, (3.5) yerine daha kaba olan ,

$$\left| p(z) - \frac{1+r^2}{1-r^2} \right| \leq \frac{1+r^2}{1-r^2}, \quad (|z| < r < 1)$$

eşitsizliği kullanılabilir. Bu durumda,

$$p \in P \text{ ise } |p(z) - a(r)| < a(r) \quad (|z| < r < 1)$$

gerçeklenecek biçimde bir $a(r) > 0$ sayısı vardır. O halde, $\frac{f'}{g'} \in P$ için

$$\left| \frac{f'(z)}{g'(z)} - a(r) \right| < a(r)$$

eşitsizliğini sağlayan bir $a(r) > 0$ sayısı vardır. $z \in D(0, r)$ noktası için $|A(z)| < a(r)$ olacak biçimde

$$A(z) = \frac{f'(z)}{g'(z)} - a(r)$$

seçelim. $z_0 \in D$ sabit bir nokta, D nin $g(z)$ altındaki görüntüsünde 0 ile $g(z_0)$ noktasını birleştiren doğru parçası L ve 0 ile z_0 noktasını birleştiren doğru parçası L^{-1} olsun.

Ayrıca $z \in L^{-1}$ için $r = \max |z|$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} |f(z_0) - a(r)g(z_0)| &= \left| \int_{L^{-1}} (f'(t) - a(r)g'(t)) dt \right| \\ &= \left| \int_{L^{-1}} g'(t)A(t)dt \right| < a(r) \int_{L^{-1}} |g'(t)| dt \end{aligned}$$

olur. $u = g(t)$ dersek, $du = g'(t)dt$, $t = 0$ için $u = g(0)$ ve $t = z_0$ için $u = g(z_0)$ olur ve

$$|f(z_0) - a(r)g(z_0)| < a(r) |g(z_0)| \rightarrow \left| \frac{f(z_0)}{g(z_0)} - a(r) \right| < a(r)$$

bulunur. Bu nedenle, $\frac{f}{g} \in P$ dir. ■

Tanım 3.2 $f(z) = a_1z + \dots$ fonksiyonu D de yalınkat ve $f(D)$ başlangıç noktasına göre yıldızlı ise, $f(z)$ ye yıldızlı fonksiyon denir. $f(z) = z + a_2z^2 + \dots$ açılımına sahip yıldızlı fonksiyonların sınıfı S^* ile gösterilir.

Örnek 3.1 $k(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ orjine göre yıldızlı bir fonksiyondur.

Teorem 3.5 $f(z)$ analitik fonksiyonunun D de yıldızlı olması için gerekli ve yeterli koşul,

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} \in P$$

olmasıdır. ([11], s 42)

Yar. Teorem 3.6 $f \in S^*$ olsun. Bu takdirde, $H(z) = z^{p-1}f(z)$ fonksiyonu D de p -değerli yıldızlıdır. ($p = 1, 2, 3, \dots$) [4]

İspat: $H(z) = z^{p-1}f(z)$ olsun. Her iki tarafın logaritmik türevi alınıp düzenlenirse,

$$\frac{zH'(z)}{H(z)} = p - 1 + \frac{zf'(z)}{f(z)}$$

elde edilir. $f \in S^*$ olduğundan,

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{zH'(z)}{H(z)} \right\} = p - 1 + \operatorname{Re} \left\{ \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} > p - 1 \geq 0$$

ve $H \in S^*$ dir. Öte yandan, $H(z) = z^{p-1}f(z) = z^p + a_2z^{p+1} + \dots$ fonksiyonu $z = 0$ da p . mertebeden sıfıra sahip olduğu için argüman prensibine göre,

$$\begin{aligned}\Delta(\arg H) &= (p-1)\Delta(\arg z) + \Delta(\arg f) \\ &= 2\pi(p-1) + 2\pi = 2p\pi\end{aligned}$$

dir. O hâlde, $H(z)$ fonksiyonu p -değerli yıldızlıdır. ■

Yar.Teorem 3.7 $f(z)$ ve $g(z)$ fonksiyonları D de analitik olsun ve $g(z)$ fonksiyonu D yi çok yapraklı bir yıldızlı bölgeye resmetsin. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $g(0) = f(0) = 0$ ve $\operatorname{Re} \left\{ e^{i\beta} \frac{zf'(z)}{g'(z)} \right\} > \alpha$, ($|z| < 1$) ise,

$$\operatorname{Re} \left\{ e^{i\beta} \frac{f(z)}{g(z)} \right\} > \alpha \quad (|z| < 1)$$

dir.[4]

Yar.Teorem 3.8 $f \in S^*$ ve $g(z) = \int_0^z H(t)dt = \int_0^z t^{p-1}f(t)dt$ olsun. Bu hâlde, $g \in S_{p+1}^*$ dir. ($p = 1, 2, \dots$) [4]

İspat: $f \in S^*$ olduğundan Yar.Teorem 3.6 gereği $\operatorname{Re} \left\{ \frac{zH'(z)}{H(z)} \right\} > p-1$ dir. O hâlde, $g(z) = \int_0^z H(t)dt$ eşitliğinde her iki tarafın logaritmik türevi alınır

$$\frac{zg'(z)}{g(z)} = \frac{zH(z)}{\int_0^z H(t)dt}$$

elde edilir. Buradan,

$$\frac{(zg'(z))'}{g'(z)} = 1 + \frac{zH'(z)}{H(z)}$$

ve

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{(zg'(z))'}{g'(z)} \right\} = 1 + \operatorname{Re} \left\{ \frac{zH'(z)}{H(z)} \right\} > p > 0$$

eşitsizliğinden $\frac{(zg'(z))'}{g'(z)} \in P$ dir. Yar.Teorem 3.5 ten $\frac{zg'(z)}{g(z)} \in P$ gerçekleşir. Teorem 3.5. gereği $g \in S^*$ olur. $zg'(z) = zH(z)$ olduğundan $zg'(z) \in S_{p+1}^*$ dir. ■

Tanım 3.3 $f \in A$ olsun. $0 \leq \alpha < 1$ için

$$\operatorname{Re} \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right) > \alpha \quad (z \in D)$$

koşulunu sağlayan $f(z)$ fonksiyonuna α mertebeden yıldızıldır denir. Bu sınıf $S^*(\alpha)$ ile gösterilir.

3.2.2 Konveks fonksiyonlar

Tanım 3.4 $B \subset \mathbb{C}$ olsun. $0 \leq t \leq 1$ olmak üzere her $z_1, z_2 \in B$ için $tz_1 + (1-t)z_2 \in B$ ise B bölgesine konveks bölge denir. [22]

Tanım 3.5 $f(z) = a_1z + \dots$ fonksiyonu D de yalınkat ve $f(D)$ bölgesi konveks ise, $f(z)$ ye konveks fonksiyon denir. $f(z) = z + a_2z^2 + \dots$ açılımına sahip konveks fonksiyonların sınıfı K ile gösterilir.

Teorem 3.6 $f(z)$ analitik fonksiyonunun D de konveks olması için gerek ve yeter koşul,

$$1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \in P$$

olmasıdır. ([11], s 42)

Uyarı 3.2 Koebe fonksiyonu yıldızıl bir fonksiyon olmasına rağmen konveks değildir.

Tanım 3.6 $f \in A$ olsun. $0 \leq \alpha < 1$ için

$$\operatorname{Re} \left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) > \alpha \quad (z \in D)$$

koşulunu sağlayan $f(z)$ fonksiyonuna α mertebeden konvektir denir. Bu sınıf $K(\alpha)$ ile gösterilir.

Teorem 3.7 (Alexander Teoremi) $f(z)$ analitik fonksiyonunun D de konveks olması için gerek ve yeter koşul, $zf'(z)$ fonksiyonunun D de yıldızıl olmasıdır.[11]

İspat: $f \in K$ olsun. $g(z) = zf'(z)$ diyelim. Her iki tarafın logaritmik türevi alınıp düzenlenirse,

$$\operatorname{Re} \left\{ 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{zg'(z)}{g(z)} \right\} > 0$$

gerçeklenir. Teorem 3.5 gereği $g(z) = zf'(z)$ yıldızlıdır.

Tersine, $g(z) = zf'(z)$ yıldızlı olsun.

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{zg'(z)}{g(z)} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{z(zf'(z))'}{zf'(z)} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} > 0$$

elde edilir. Teorem 3.6. gereği f konvektir. ■

Teorem 3.8 $f(z)$ analitik fonksiyonunun D de α mertebeden konveks olması için gerek ve yeter koşul, $zf'(z)$ fonksiyonunun D de α mertebeden yıldızlı olmasıdır.

İspat: $f \in K(\alpha)$ olsun. $g(z) = zf'(z)$ diyelim. Her iki tarafın logaritmik türevi alınıp düzenlenirse,

$$\operatorname{Re} \left\{ 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{zg'(z)}{g(z)} \right\} > \alpha$$

olur. Buradan $g(z) = zf'(z) \in S^*(\alpha)$ dır.

Tersine, $g(z) = zf'(z) \in S^*(\alpha)$ olsun.

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{zg'(z)}{g(z)} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{z(zf'(z))'}{zf'(z)} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} > \alpha$$

elde edilir. Buradan $f \in K(\alpha)$ dır ■

Teorem 3.9 $f(z) = z + a_2z^2 + \dots \in K$ ise $\operatorname{Re} \left\{ \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} > \frac{1}{2}$ dir.[11]

Uyarı 3.3 K sınıfına ait her fonksiyon S^* sınıfına aittir. Fakat tersi her zaman doğru değildir. Karşıt örnek olarak Koebe fonksiyonu verilebilir. Buradan $K \subset S^* \subset S$ olduğu görülür.

3.2.3 Konvekse yakın fonksiyonlar

Tanım 3.7 D de analitik olan $f(z)$ fonksiyonu için,

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{zf'(z)}{g(z)} \right\} > 0$$

olacak biçimde bir $g \in S^*$ fonksiyonu varsa, $f(z)$ fonksiyonuna konvekse yakın denir. Konvekse yakın fonksiyonların sınıfını C veya bulunan $g \in S^*$ fonksiyonu için $C(g)$ ile gösterilir.

Sonuç 3.1 D de analitik olan $f(z)$ fonksiyonu için

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{f'(z)}{h'(z)} \right\} > 0 \text{ veya } \left| \operatorname{Arg} \frac{f'(z)}{h'(z)} \right| < \frac{\pi}{2}$$

olacak biçimde bir $h \in K$ fonksiyonu varsa, $f(z)$ fonksiyonu konvekse yakındır.

İspat: $h \in K$ ise $zh'(z) \in S^*$ dir. Bu hâlde tanımdan,

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{zf'(z)}{zh'(z)} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{f'(z)}{h'(z)} \right\} > 0$$

dir. $\operatorname{Arg} \frac{f'(z)}{h'(z)} = \varphi$ olsun. $\operatorname{Re} \left\{ \frac{f'(z)}{h'(z)} \right\} > 0$ olduğundan,

$$\cos \varphi = \frac{\operatorname{Re} \left\{ \frac{f'(z)}{h'(z)} \right\}}{\left| \frac{f'(z)}{h'(z)} \right|} > 0 \Rightarrow \left| \operatorname{Arg} \frac{f'(z)}{h'(z)} \right| < \frac{\pi}{2}$$

olur. ■

4 İNTEGRAL OPERATÖRLERİ

Bu bölümde, bir $B \subset \mathbb{C}$ bölgesinde tanımlı analitik fonksiyonların $H(B)$ sınıfında tanımlanmış integral operatörlerini tanımlayacağız. Bu operatörler, yalınkat fonksiyonlar teorisinde bazı özelliklerin incelenmesinde önemli bir araçtır.

Biernacki, $f \in S$ olmak üzere,

$$F(z) = \int_0^z \frac{f(t)}{t} dt$$

biçiminde tanımlanan F fonksiyonunun S sınıfına ait olduğunu göstermeye çalışmıştır. Biernacki'nin bu iddiasının yanlış olduğunu Krzyz ve Lewandowski aşağıdaki örnekle ispatlamıştır:

$$f(z) = \frac{z}{(1 - iz)^{1-i}}$$

olmak üzere; her iki tarafın logaritmik türevi alınıp düzenlenirse;

$$\operatorname{Re} \left[e^{\frac{\pi i}{4}} \frac{zf'(z)}{f(z)} \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1 - |z|^2}{|1 - iz|^2} > 0$$

elde edilir. Bu nedenle, f fonksiyonu $\frac{\pi}{4}$ -spirallike ve yalınkattır [11]. $f(z)$ fonksiyonu $F(z)$ de yerine yazılırsa,

$$F(z) = \int_0^z e^{(i-1)\log(1-it)} dt = \exp \{i \log(1 - iz)\} - 1$$

elde edilir.

$$z_1 = i \frac{e^{2\pi} - 1}{e^{2\pi} + 1} \text{ ve } z_2 = -z_1 \text{ olsun. } |z_1| = |z_2| < 1 \text{ ve } z_1, z_2 \in D \text{ dir.}$$

$$F(z_1) = \exp \left\{ i \log \left(\frac{2e^{2\pi}}{e^{2\pi} + 1} \right) \right\} - 1 = F(z_2)$$

olduğundan, F bire-bir değildir.

Biernacki'nin elde ettiği bu olumsuz sonuç, yalınkat fonksiyonların teorisinde İntegral Operatörler ile çalışmaların başlatılmasında önemli bir rol oynamıştır.

4.1 Birinci Tür İntegral Operatörü Altında Özel Fonksiyon Sınıflarının İncelenmesi

Bir $f \in H(B)$ fonksiyonu için Biernacki (1960) tarafından tanımlanan,

$$L_1(f) = F_\alpha(z) = \int_0^z \left(\frac{f(t)}{t} \right)^\alpha dt, \quad F'_\alpha(0) = 1$$

integral operatörü birinci tür integral operatörü olarak adlandırılır.

Yar.Teorem 4.1 $g \in K$ ve $h \in K$ olsun. $0 \leq \alpha \leq 1$ ve $0 \leq \beta \leq 1$ için,

$$H(z) = \int_0^z \left(\frac{g(t)}{t} \right)^\alpha \left(\frac{h(t)}{t} \right)^\beta dt \in K$$

olur.[10]

İspat: $g \in K$ ve $h \in K$, $H(z) = \int_0^z \left(\frac{g(t)}{t} \right)^\alpha \left(\frac{h(t)}{t} \right)^\beta dt$ olsun. Bu takdirde,

$$H'(z) = \left(\frac{g(z)}{z} \right)^\alpha \left(\frac{h(z)}{z} \right)^\beta$$

olur. Her iki tarafın logaritmik türevi alınrsa,

$$1 + \frac{zH''(z)}{H'(z)} = \alpha \frac{zg'(z)}{g(z)} + \beta \frac{zh'(z)}{h(z)} + 1 - \alpha - \beta$$

elde edilir. Sonuç 3.1. gereği

$$\operatorname{Re} \left\{ 1 + \frac{zH''(z)}{H'(z)} \right\} = \alpha \operatorname{Re} \left\{ \frac{zg'(z)}{g(z)} \right\} + \beta \operatorname{Re} \left\{ \frac{zh'(z)}{h(z)} \right\} + 1 - \alpha - \beta > 1 - \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$$

dir. O hâlde, $0 \leq \alpha \leq 1$ ve $0 \leq \beta \leq 1$ için $H \in K$ olur. ■

Teorem 4.1 $f \in S$ ve $g \in K$ olsun. $f(z)$ fonksiyonu $h \in K$ fonksiyonuna göre konvekse yakın ise, $0 \leq \alpha \leq 1$ ve $0 \leq \beta \leq 1$ için $F(z) = \int_0^z \left(\frac{f(t)}{t} \right)^\alpha \left(\frac{g(t)}{t} \right)^\beta dt$ fonksiyonu $H(z) = \int_0^z \left(\frac{h(t)}{t} \right)^\alpha \left(\frac{g(t)}{t} \right)^\beta dt$ fonksiyonuna göre konvekse yakındır.[10]

İspat: $F(z)$ ve $H(z)$ fonksiyonlarının tanımından

$$F'(z) = \left(\frac{f(z)}{z} \right)^\alpha \left(\frac{g(z)}{z} \right)^\beta, \quad H'(z) = \left(\frac{h(z)}{z} \right)^\alpha \left(\frac{g(z)}{z} \right)^\beta$$

ve

$$\frac{F'(z)}{H'(z)} = \left(\frac{f(z)}{h(z)} \right)^\alpha > 0$$

elde edilir. $f \in C(h)$ olduğundan,

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{f'(z)}{h'(z)} \right\} > 0 \quad (z \in D)$$

ve $h \in K \subset S^*$ olduğundan, Yar.Teorem 3.5 ten,

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{f(z)}{h(z)} \right\} > 0 \quad (z \in D)$$

elde edilir. $0 \leq \alpha \leq 1$ için,

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{F'(z)}{H'(z)} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \left(\frac{f(z)}{h(z)} \right)^\alpha \right\} > 0$$

elde edilir. O hâlde, $H \in K$ olmak üzere Yar.Teorem 3.5 ten,

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{F(z)}{H(z)} \right\} > 0$$

olur. Buna göre, $F(z)$ fonksiyonu $H(z)$ fonksiyonuna göre konvekse yakındır. ■

Sonuç 4.1 $f \in S$ ve $h \in K$ olsun. $f(z)$ fonksiyonu $h \in K$ fonksiyonuna göre konvekse yakın ise, $0 \leq \alpha \leq 1$ ve $0 \leq \beta \leq 1$ için $F(z) = \int_0^z \left(\frac{f(t)}{t} \right)^\alpha dt$ fonksiyonu, $H(z) = \int_0^z \left(\frac{h(t)}{t} \right)^\alpha dt$ fonksiyonuna göre konvekse yakındır.

İspat: $g(z) = z \in K$ fonksiyonu için Teorem 4.1 den açıktır. ■

Teorem 4.2 $f \in S$ ve $F(z) = \int_0^z \left(\frac{f(t)}{t} \right)^\alpha dt$ olsun. Bu takdirde, $0 \leq \alpha \leq \frac{\sqrt{5}-2}{4}$ için $F \in S$ dir.[10]

İspat: $F(z) = \int_0^z \left(\frac{f(t)}{t} \right)^\alpha dt$ olsun. Bu hâlde,

$$F'(z) = \left(\frac{f(z)}{z} \right)^\alpha$$

elde edilir ve her iki tarafın logaritmik türevi alınırsa,

$$\frac{F''(z)}{F'(z)} = \frac{\alpha}{z} \left[\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1 \right] \quad (4.1)$$

elde edilir. $f \in S$ için Teorem 3.3 ten,

$$\left| \frac{zf'(z)}{f(z)} \right| \leq \frac{1+r}{1-r} \quad (|z| = r) \quad (4.2)$$

gerçeklenir. $h(z) = \frac{F''(z)}{F'(z)}$ fonksiyonu $|z| \leq r < 1$ de analitiktir ve bundan dolayı $\bar{D}(0, r)$ içindeki maksimum değerini sınırdan alır. O hâlde,

$$\begin{aligned} \max_{|z| \leq r} \left| \frac{F''(z)}{F'(z)} \right| &= \alpha \max_{|z| \leq r} \left| \frac{1}{z} \left[\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1 \right] \right| \\ &\leq \frac{\alpha}{r} \max_{|z| \leq r} \left[\left| \frac{zf'(z)}{f(z)} \right| + 1 \right] \\ &\leq \frac{\alpha}{r} \left(\frac{1+r}{1-r} + 1 \right) \\ &= \frac{2\alpha}{r(1-r)} \end{aligned}$$

elde edilir. $0 < r < 1$ için $\sup \varphi(r) = \sup \frac{1}{r(1-r)} = \varphi\left(\frac{1}{2}\right) = 4$ olur. O hâlde,

$$\left| \frac{F''(z)}{F'(z)} \right| \leq 8\alpha \leq \frac{8\alpha}{1-r^2} \quad \left(|z| \leq \frac{1}{2} \right)$$

dir. $\frac{1}{2} \leq |z| = r \leq 1$ için (4.1) ve (4.2)den

$$\begin{aligned} \left| \frac{F''(z)}{F'(z)} \right| &= \frac{\alpha}{r} \left| \frac{zf'(z)}{f(z)} - 1 \right| \leq 2\alpha \left[\left| \frac{zf'(z)}{f(z)} \right| + 1 \right] \\ &\leq \frac{4\alpha}{1-r} = \frac{4\alpha(1+r)}{1-r^2} \leq \frac{8\alpha}{1-r^2} \quad \left(\frac{1}{2} \leq r \leq 1 \right) \end{aligned}$$

elde edilir ve buradan,

$$\left| \frac{F''(z)}{F'(z)} \right| \leq \frac{8\alpha}{1-r^2} \quad (0 \leq r < 1)$$

çıkar. Yar.Teorem 4.4. ten

$$\left| \left(\frac{F''(z)}{F'(z)} \right)' \right| \leq \frac{32\alpha}{(1-r^2)^2}$$

dir. $F(z)$ fonksiyonunun Schwarzian türevinden,

$$|\{F, z\}| = \left| \left(\frac{F''(z)}{F'(z)} \right)' - \frac{1}{2} \left(\frac{F''(z)}{F'(z)} \right)^2 \right| \leq \left| \left(\frac{F''(z)}{F'(z)} \right)' \right| + \frac{1}{2} \left| \frac{F''(z)}{F'(z)} \right|^2 \leq \frac{32\alpha^2 + 32\alpha}{(1-r^2)^2}$$

elde edilir. Teorem 2.1 den $F(z)$ nin yalınkat olması için, $32\alpha^2 + 32\alpha \leq 2$ olması yeterlidir. Bu, $0 \leq \alpha \leq \frac{\sqrt{5}-2}{4}$ için gerçekleşir. ■

Teorem 4.3 $f \in K$ ve $F(z) = \int_0^z \left(\frac{f(t)}{t} \right)^\alpha dt$ olsun. Bu takdirde, $0 \leq \alpha \leq \sqrt{5} - 2$ için $F \in S$ dir.[20]

İspat: $f \in K$ olduğundan, $\operatorname{Re} \left\{ \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} > \frac{1}{2}$ dir. $h(z) = 2 \left[\frac{zf'(z)}{f(z)} - \frac{1}{2} \right]$ olsun. $h(z)$ fonksiyonu $\in H(D)$, $h(0) = 1$ ve $h \in P$ dir. Bu hâlde,

$$\frac{1}{2} [h(z) - 1] = \frac{zf'(z)}{f(z)} - 1$$

Yar.Teorem 4.6. dan

$$|h(z) - 1| = 2 \left| \frac{zf'(z)}{f(z)} - 1 \right| \leq \frac{2r}{1-r} \quad (|z| \leq r < 1)$$

ve bu eşitsizlikten

$$\left| \frac{zf'(z)}{f(z)} - 1 \right| \leq \frac{r}{1-r} = \frac{r(1+r)}{1-r^2} < \frac{2r}{1-r^2} \quad (|z| \leq r < 1)$$

elde edilir. O hâlde, (4.1) ve yukarıdaki eşitsizlikten

$$\left| \frac{F''(z)}{F'(z)} \right| = \left| \frac{\alpha}{z} \left[\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1 \right] \right| \leq \frac{2\alpha}{1-r^2}$$

olur. Yar.Teorem 4.4 dan ve $F(z)$ nin Schwarzian türevinden,

$$|\{F, z\}| = \left| \left(\frac{F''(z)}{F'(z)} \right)' - \frac{1}{2} \left(\frac{F''(z)}{F'(z)} \right)^2 \right| \leq \left| \left(\frac{F''(z)}{F'(z)} \right)' \right| + \frac{1}{2} \left| \frac{F''(z)}{F'(z)} \right|^2 \leq \frac{2\alpha^2 + 8\alpha}{(1-r^2)^2}$$

çıkar. Teorem 2.1 den $F(z)$ nin yalınkat olması için $2\alpha^2 + 8\alpha \leq 2$ olması yeterlidir.

Bu, $0 \leq \alpha \leq \sqrt{5} - 2$ için gerçekleşir ve $F \in S$ dir. ■

Teorem 4.4 $f \in S^*$ ise $-\frac{1}{2} \leq \alpha \leq \frac{3}{2}$ için $F(z) = \int_0^z \left(\frac{f(t)}{t} \right)^\alpha dt \in C$ dir. Ayrıca, $\alpha \notin \left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ ise $F \notin S$ ye karşılık bir $f \in S^*$ vardır.[18]

İspat: $F \in C$ olması için gerek ve yeter koşulun,

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \operatorname{Re} \left[1 + re^{i\theta} \frac{F''(re^{i\theta})}{F'(re^{i\theta})} \right] d\theta > -\pi \quad (0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq 2\pi)$$

olduğu Kaplan tarafından ispatlandı(s.48, [11]). $F(z) = \int_0^z \left(\frac{f(t)}{t} \right)^\alpha dt$ olsun. Buradan, $F'(z) = \left(\frac{f(z)}{z} \right)^\alpha$ olur. Her iki tarafın logaritmik türevi alınıp düzenlenirse,

$$1 + \frac{zF''(z)}{F'(z)} = \alpha \frac{zf'(z)}{f(z)} - \alpha + 1 \quad (4.3)$$

elde edilir. Bu hâlde, $f \in S^*$ olduğundan $\alpha \geq 0$ için

$$\begin{aligned} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \operatorname{Re} \left[1 + re^{i\theta} \frac{F''(re^{i\theta})}{F'(re^{i\theta})} \right] d\theta &= \alpha \int_{\theta_1}^{\theta_2} \operatorname{Re} \left[1 + re^{i\theta} \frac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})} \right] d\theta + \int_{\theta_1}^{\theta_2} (1 - \alpha) d\theta \\ &> (1 - \alpha)(\theta_2 - \theta_1) \end{aligned}$$

dir. $0 \leq \alpha \leq \frac{3}{2}$ için $-\frac{1}{2} \leq 1 - \alpha \leq 1$ olur. Dolayısıyla Kaplan teoreminden $F \in C$ dir.

$-\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 0$ için; $\operatorname{Re} \left\{ \frac{f(z)}{z} \right\}^\alpha > 0$ olduğundan, $\operatorname{Re} F'(z) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{f(z)}{z} \right\}^\alpha > 0$ dir.

O hâlde, $F \in C$ dir. $\alpha \notin \left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right]$ ve $f(z) = \frac{z}{(1-z)^2} \in S^*$ olsun. Bu hâlde,

$$F'(z) = \frac{1}{(1-z)^{2\alpha}} \text{ ve } F(z) = -\frac{1}{1-2\alpha}(1-z)^{1-2\alpha}$$

dir. $F(z)$ nin D de yalınkat olması için gerek ve yeter koşul,

$$h(z) = (1-z)^{1-2\alpha}$$

fonksiyonunun D de yalınkat olmasıdır. Teorem 2.2 den $h(z)$ nin yalınkat olması için gerek ve yeter koşul,

$$|1 - 2\alpha - 1| \leq 1 \text{ veya } |1 - 2\alpha + 1| \leq 1$$

olmasıdır. Buradan da,

$$|1 - 2\alpha - 1| \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$$

veya

$$|1 - 2\alpha + 1| \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \alpha \leq \frac{3}{2}$$

bulunur. Bu, $\alpha \notin \left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right], \alpha \neq \frac{1}{2}$ olması ile çeliştiği için ve $h \notin S$ ve dolayısıyla $F \notin S$

dir. $\alpha = \frac{1}{2}$ için $F(z) = -\ln(1-z)$ ve $F \in S$ dir. ■

Teorem 4.5 $f \in K$ ise $-1 \leq \alpha \leq 3$ için $F(z) = \int_0^z \left(\frac{f(t)}{t} \right)^\alpha dt \in C$ dir. Ayrıca, $\alpha \notin [-1, 3]$ ise $F \notin S$ ye karşılık bir $f \in K$ vardır.[18]

İspat: $f \in K$ için

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} > \frac{1}{2}$$

dir. $0 \leq \alpha \leq 2$ ve (4.3) dan

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left\{ 1 + \frac{zF''(z)}{F'(z)} \right\} &= \alpha \operatorname{Re} \left\{ \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} + 1 - \alpha \\ &> \frac{\alpha}{2} + 1 - \alpha = 1 - \frac{\alpha}{2} > 0 \end{aligned}$$

olduğundan, $F \in K \subset C$ dir

$2 \leq \alpha \leq 3$ için $-\frac{1}{2} \leq 1 - \frac{\alpha}{2} \leq 0$ ve

$$\begin{aligned} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \operatorname{Re} \left[1 + re^{i\theta} \frac{F''(re^{i\theta})}{F'(re^{i\theta})} \right] d\theta &= \alpha \int_{\theta_1}^{\theta_2} \operatorname{Re} \left[1 + re^{i\theta} \frac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})} \right] d\theta + \int_{\theta_1}^{\theta_2} (1 - \alpha) d\theta \\ &> \alpha \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{2} d\theta + \int_{\theta_1}^{\theta_2} (1 - \alpha) d\theta \\ &= \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) (\theta_2 - \theta_1) \end{aligned}$$

olduğundan, $\left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) (\theta_2 - \theta_1) > -\pi$ ve $F \in C$ dir.

$f \in K$ için, $\operatorname{Re} \left\{ \frac{z}{f(z)} \right\} > 0$ dir. $-1 \leq \alpha \leq 0$ için,

$\operatorname{Re} F'(z) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{f(z)}{z} \right\}^\alpha = \operatorname{Re} \left\{ \frac{z}{f(z)} \right\}^{-\alpha} > 0$ olduğundan, $F \in C$ dir.

$\alpha \notin [-1, 3]$ ve $f(z) = \frac{z}{1-z} \in K$ olsun. Bu hâlde,

$$F'(z) = \frac{1}{(1-z)^\alpha} \text{ ve } F(z) = -\frac{1}{1-\alpha}(1-z)^{1-\alpha}$$

dir. $F(z)$ nin D de yalınkat olması için gerek ve yeter koşul,

$$h(z) = (1-z)^{1-\alpha}$$

fonksiyonunun D de yalınkat olmasıdır. Teorem 2.2 den $h(z)$ nin yalınkat olması için gerek ve yeter koşul,

$$|1 - \alpha - 1| \leq 1 \text{ veya } |1 - \alpha + 1| \leq 1$$

olmasıdır. Buradan,

$$|1 - \alpha - 1| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \alpha \leq 1$$

veya

$$|1 - \alpha + 1| \leq 1 \Rightarrow 1 \leq \alpha \leq 3$$

bulunur. Bu, $\alpha \notin [-1, 3], \alpha \neq 1$ olması ile çeliştiği için ve $h \notin S$ ve $F \notin S$ dir. $\alpha = 1$ için $F(z) = -\ln(1 - z)$ ve $F \in S$ dir. ■

Yar.Teorem 4.2 $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ ve $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$ fonksiyonları D de analitik, $g(z)$ fonksiyonu yalınkat ve orjine göre yıldızlı olsun. D nin $\frac{f'}{g'}$ dönüşümü altındaki konveks zarfı H ile gösterilirse, $\frac{f}{g} \in H, (z \in D)$ dir.

İspat: $w = g(z)$ ve $z = \psi(w) = g^{-1}(w)$ olsun. Bu hâlde, $f(z) = f(\psi(w)) = h(w)$ diyelim.

$$\begin{aligned} \frac{f(z)}{g(z)} &= \frac{h(w)}{w} = \frac{1}{w} \int_0^w h'(t) dt \\ &= \frac{1}{w} \int_0^w f'(\psi(t)) \psi'(t) dt \\ &= \frac{1}{w} \int_0^w \frac{f'(\psi(t))}{g'(\psi(t))} dt \end{aligned}$$

$t = re^{i\phi}$ dersek, $dt = e^{i\phi} dr$ ve $t = 0$ için $r = 0$, $t = w$ için $r = \rho$ olur. O hâlde,

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{1}{\rho} \int_0^\rho \frac{f'(\psi(re^{i\phi}))}{g'(\psi(re^{i\phi}))} dr$$

dir. ■

Yar.Teorem 4.3 $f_1, f_2 \in P$ olsun. $0 \leq t_1, t_2$ ve $t_1 + t_2 \leq 1$ için $f = [f_1]^{t_1} [f_2]^{t_2} \in P$ dir.

İspat: $f_1 \in P$ ise $f_1 = r_1 e^{i\theta_1}, 0 < r_1 < \infty$ ve $-\frac{\pi}{2} \leq \theta_1 \leq \frac{\pi}{2}$ dir. Benzer biçimde, $f_2 \in P$ ise $f_2 = r_2 e^{i\theta_2}, 0 < r_2 < \infty$ ve $-\frac{\pi}{2} \leq \theta_2 \leq \frac{\pi}{2}$ dir. Bu hâlde,

$$f = \beta e^{i\varphi} = r_1^{t_1} r_2^{t_2} e^{i(t_1\theta_1 + t_2\theta_2)}$$

olduğundan,

$$0 < \beta = r_1^{t_1} r_2^{t_2} < \infty \text{ ve } -\frac{\pi}{2}(t_1 + t_2) \leq \varphi = t_1\theta_1 + t_2\theta_2 \leq \frac{\pi}{2}(t_1 + t_2)$$

elde edilir. $0 \leq t_1 + t_2 \leq 1$ için $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ ve $f \in P$ dir. ■

Teorem 4.6 $f \in C$ ise $-\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$ için $F(z) = \int_0^z \left(\frac{f(t)}{t} \right)^\alpha dt \in C$ dir.[18]

İspat: $f \in C$ için

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{f'(z)}{\phi'(z)} \right\} > 0$$

olacak biçimde bir $\phi \in K$ vardır.

$0 \leq \alpha \leq 1$ ve $\phi \in K$ için

$$\Phi(z) = \int_0^z \left(\frac{\phi(t)}{t} \right)^\alpha dt$$

olsun. Bu hâlde,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left\{ 1 + \frac{z\Phi''(z)}{\Phi'(z)} \right\} &= \alpha \operatorname{Re} \left\{ \frac{z\phi'(z)}{\phi(z)} \right\} + 1 - \alpha \\ &> 1 - \frac{\alpha}{2} \geq 0 \end{aligned}$$

ve $\Phi \in K$ dir. Yar.Teorem 4.2.den

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{F'(z)}{\Phi'(z)} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{f(z)}{\phi(z)} \right\}^\alpha > 0$$

ve $F \in C$ dir.

$-\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 0$ için

$$\Phi(z) = e^{-i(1+\alpha)\beta} \int_0^z \left(\frac{\phi(t)}{t} \right)^{1+2\alpha} dt, \quad \beta = \operatorname{Arg}\phi'(0)$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu hâlde,

$$\Phi'(z) = e^{-i(1+\alpha)\beta} \left[\frac{\phi(z)}{z} \right]^{1+2\alpha}$$

dir. Her iki tarafın logaritmik türevi alınıp düzenlenirse

$$1 + \frac{z\Phi''(z)}{\Phi'(z)} = (1 + 2\alpha) \frac{z\phi'(z)}{\phi(z)} - 2\alpha$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\left\{1 + \frac{z\Phi''(z)}{\Phi'(z)}\right\} &= (1 + 2\alpha)\operatorname{Re}\left\{\frac{z\phi'(z)}{\phi(z)}\right\} - 2\alpha \\ &> (1 + 2\alpha)\frac{1}{2} - 2\alpha > \frac{1}{2} - \alpha\end{aligned}$$

ve $\Phi \in K$ dır. Bu hâlde,

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{F'(z)}{\Phi'(z)}\right\} = \operatorname{Re}\left\{\left[\frac{f(z)}{\phi(z)}\right]^\alpha \left[e^{i\beta}\frac{z}{\phi(z)}\right]^{1+2\alpha}\right\}$$

dir. Yar.Teorem 4.3 ve $\phi \in K$ için $\operatorname{Re}\left\{\frac{z}{\phi(z)}\right\} > 0$ olduğundan, $\operatorname{Re}\left\{\frac{F'(z)}{\Phi'(z)}\right\} > 0$ dir.

■

4.2 İkinci Tür İntegral Operatörü Altında Özel Fonksiyon Sınıflarının İncelenmesi

$f \in H(B)$ fonksiyonu için,

$$L_2(f) = f_\alpha(z) = \int_0^z [f'(t)]^\alpha dt, \quad f'_\alpha(0) = 1$$

şeklinde tanımlanan integral operatörü ikinci tür integral operatörü olarak adlandırılır.

Yar.Teorem 4.4 $f(z) \in H(D)$ ve $|f(z)| \leq \frac{C}{(1-r^2)}$ ise, $|f'(z)| \leq \frac{4C}{(1-r^2)^2}$ dir. [10]

İspat: Cauchy integral formülünden, $\gamma : |\zeta| = \rho$ ve $\rho^2 = \frac{(1+r^2)}{2}$ olmak üzere,

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z)^2}$$

dir. Bu durumda,

$$\begin{aligned} |f'(z)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z)^2} \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \frac{|f(\zeta)| |d\zeta|}{|\zeta-z|^2} \\ &\leq \frac{C}{2\pi(1-\rho^2)} \int_{|\zeta|=\rho} \frac{|d\zeta|}{|\zeta-z|^2} \\ &= \frac{C\rho}{2\pi(1-\rho^2)} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|\zeta-z|^2} \\ &= \frac{C\rho}{2\pi(1-\rho^2)(\rho^2-r^2)} \int_0^{2\pi} \frac{\rho^2-r^2}{|\zeta-z|^2} d\theta \end{aligned}$$

ve $(1-\rho^2)(\rho^2-r^2) = \frac{(1-r^2)^2}{4}$, $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\rho^2-r^2}{|\zeta-z|^2} d\theta = 1$ ve $0 < \rho < 1$ olduğundan,

$$|f'(z)| \leq \frac{4C}{(1-r^2)^2}$$

elde edilir. ■

Yar.Teorem 4.5 Bir $f(z)$ analitik fonksiyonunun D de yalınkat olması için gerek koşul

$$\left| \frac{f''(z)}{f'(z)} \right| \leq \frac{6}{1-|z|^2}$$

yeter koşul

$$\left| \frac{f''(z)}{f'(z)} \right| \leq \frac{2(\sqrt{5}-2)}{1-|z|^2}$$

olmasıdır.[20]

İspat: $f \in S$ olsun. Bu hâlde Yar. Teorem 3.4. gereği, $\left| \frac{zf''(z)}{f'(z)} - \frac{2|z|^2}{1-|z|^2} \right| \leq \frac{4|z|}{1-|z|^2}$, ($|z| < 1$) dir. Disk otomorfizmasından sabit bir $\xi \in D$ için

$$F(z) = \frac{f\left(\frac{z+\xi}{1+\bar{\xi}z}\right) - f(\xi)}{(1-|\xi|^2)f'(\xi)} = z + A_2(\xi)z^2 + \dots \in S$$

dir. Yar. Teorem 3.3. gereği $|A_2(\xi)| \leq 2$ dir. Buradan,

$$A_2(\xi) = \frac{1}{2} \left\{ (1-|\xi|^2) \frac{f''(\xi)}{f'(\xi)} - 2\bar{\xi} \right\}$$

olduğundan,

$$|A_2(\xi)| = \frac{1}{2} \left| (1-|\xi|^2) \frac{f''(\xi)}{f'(\xi)} - 2\bar{\xi} \right| \leq 2$$

ve

$$\left| \frac{f''(\xi)}{f'(\xi)} - \frac{2\bar{\xi}}{1-|\xi|^2} \right| \leq \frac{4}{1-|\xi|^2}$$

olur. Buradan,

$$\begin{aligned} \left| \frac{f''(\xi)}{f'(\xi)} \right| &\leq \frac{4}{1-|\xi|^2} + \frac{2|\xi|}{1-|\xi|^2} \\ &\leq \frac{6}{1-|\xi|^2} \quad |\xi| < 1 \end{aligned}$$

bulunur. Yeterliliği göstermek için $F(z) = \frac{f''(z)}{f'(z)}$ fonksiyonunu göz önüne alalım.

$|F(z)| \leq \frac{C}{(1-r^2)}$ ise, Yar. Teorem 4.4. ten $|F'(z)| \leq \frac{4C}{(1-r^2)^2}$ dir. Schwarzian türev tanımından,

$$\begin{aligned} |\{f, z\}| &= \left| \left(\frac{f''(z)}{f'(z)} \right)' - \frac{1}{2} \left(\frac{f''(z)}{f'(z)} \right)^2 \right| \\ &\leq \left| \left(\frac{f''(z)}{f'(z)} \right)' \right| + \frac{1}{2} \left| \frac{f''(z)}{f'(z)} \right|^2 \\ &\leq \frac{1}{(1-r^2)^2} \left(4C + \frac{C^2}{2} \right) \end{aligned}$$

elde edilir. (2.2) uyarınca $\left(4C + \frac{C^2}{2}\right) \leq 2$ olması yeterlidir. Bu, $0 \leq C \leq 2(\sqrt{5} - 2)$ için gerçekleşir. Buradan da,

$$\left| \frac{f''(z)}{f'(z)} \right| \leq \frac{C}{(1-r^2)} \leq \frac{2(\sqrt{5}-2)}{(1-r^2)}$$

bulunur. ■

Teorem 4.7 $f(z) \in H(D)$ olsun. $0 \leq |\alpha| \leq \frac{\sqrt{5}-2}{3}$ eşitsizliğini gerçekleyen her $\alpha \in \mathbb{C}$ için $[f'(z)]^\alpha$ fonksiyonu D de yalınkat olan bir fonksiyonun türevidir.[20]

İspat: $f_\alpha(z) = \int_0^z [f'(t)]^\alpha dt$ olsun. Bu hâlde,

$$f'_\alpha(z) = [f'(z)]^\alpha$$

dir. Üstteki eşitlikte her iki tarafın logaritmik türevi alınırsa,

$$\frac{f''_\alpha(z)}{f'_\alpha(z)} = \alpha \frac{f''(z)}{f'(z)} \quad (4.4)$$

elde edilir. $f_\alpha(z)$ fonksiyonunun Schwarzian türevinden,

$$\begin{aligned} |\{f_\alpha, z\}| &= \left| \left(\frac{f''_\alpha(z)}{f'_\alpha(z)} \right)' - \frac{1}{2} \left(\frac{f''_\alpha(z)}{f'_\alpha(z)} \right)^2 \right| \\ &\leq \left| \left(\frac{f''_\alpha(z)}{f'_\alpha(z)} \right)' \right| + \frac{1}{2} \left| \frac{f''_\alpha(z)}{f'_\alpha(z)} \right|^2 \end{aligned}$$

ve (4.4) ten

$$|\{f_\alpha, z\}| \leq |\alpha| \left| \left(\frac{f''(z)}{f'(z)} \right)' \right| + \frac{|\alpha|^2}{2} \left| \frac{f''(z)}{f'(z)} \right|^2$$

elde edilir. Yar.Teorem 4.4 ve Yar. Teorem 4.5 birlikte göz önüne alınırsa

$$|\{f_\alpha, z\}| \leq \frac{24|\alpha| + 18|\alpha|^2}{(1-r^2)^2}$$

olur. Bu, $0 \leq |\alpha| \leq \frac{\sqrt{5}-2}{3}$ için gerçekleşir ve $f_\alpha \in H_u(D)$ dir. ■

Teorem 4.8 $f \in S$ ise $0 \leq \alpha \leq \frac{2-\sqrt{3}}{3}$ için $f_\alpha \in S$ dir.[20]

İspat: $f_\alpha(z) = \int_0^z [f'(t)]^\alpha dt$ olsun. Schwarzian türev tanımı ve (4.4) eşitliğinden,

$$\begin{aligned}\{f_\alpha, z\} &= \left(\frac{f_\alpha''(z)}{f_\alpha'(z)} \right)' - \frac{1}{2} \left(\frac{f_\alpha''(z)}{f_\alpha'(z)} \right)^2 = \alpha \left(\frac{f''(z)}{f'(z)} \right)' - \frac{\alpha^2}{2} \left(\frac{f''(z)}{f'(z)} \right)^2 \\ &= \alpha \left(\frac{f''(z)}{f'(z)} \right)' - \frac{\alpha^2}{2} \left(\frac{f''(z)}{f'(z)} \right)^2 - \frac{\alpha}{2} \left(\frac{f''(z)}{f'(z)} \right)^2 + \frac{\alpha}{2} \left(\frac{f''(z)}{f'(z)} \right)^2 \\ &= \alpha \{f, z\} + \frac{1}{2} \alpha (1 - \alpha) \left(\frac{f''(z)}{f'(z)} \right)^2\end{aligned}$$

ve buradan

$$|\{f_\alpha, z\}| \leq \alpha |\{f, z\}| + \frac{1}{2} \alpha (1 - \alpha) \left| \frac{f''(z)}{f'(z)} \right|^2$$

olur. Üsteki eşitsizlikte Nehari'nin sonucu ve Yar.Teorem 4.5 in ilk eşitsizliği uygulanırsa,

$$|\{f_\alpha, z\}| \leq \frac{6\alpha + 18\alpha(1 - \alpha)}{(1 - r^2)^2}$$

elde edilir. $f_\alpha(z)$ nin yalınkat olması için $-18\alpha^2 + 24\alpha \leq 2$ olması yeterlidir. Bu $0 \leq \alpha \leq \frac{2 - \sqrt{3}}{3}$ için gerçekleşir ve $f_\alpha \in S$ dir. ■

Teorem 4.9 $f \in S$ ve konvekse yakın olsun. Bu takdirde, $0 \leq \alpha \leq 1$ için $f_\alpha(z)$ fonksiyonu S sınıfına ait ve konvekse yakındır.[23]

İspat: $f \in C$ ise $p \in P$ ve $g \in K$ ($z \in D$) olmak üzere

$$f'(z) = p(z) \cdot g'(z)$$

biçiminde yazılabilir. O hâlde,

$$f_\alpha'(z) = [f'(z)]^\alpha = [p(z)]^\alpha [g'(z)]^\alpha = [p(z)]^\alpha (g_\alpha'(z))$$

dir. $p \in P$ olduğundan, $0 \leq \alpha \leq 1$ için $[p]^\alpha \in P$ dir. Gerçekten,

$$p(z) = re^{i\theta}, 0 \leq r \leq \infty \text{ ve } \frac{-\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

olsun. Bu hâlde,

$$[p(z)]^\alpha = r^\alpha e^{i\alpha\theta} = \rho e^{i\varphi}, \frac{-\pi\alpha}{2} < \varphi = \alpha\theta < \frac{\pi\alpha}{2}$$

olur. Şimdi $g_\alpha \in K$ olduğunu gösterelim: $g \in K$ olduğundan

$$\operatorname{Re} \left\{ 1 + \frac{zg''(z)}{g'(z)} \right\} > 0 \quad (z \in D)$$

dir.

$$g'_\alpha(z) = [g'(z)]^\alpha$$

olduğundan her iki tarafın logaritmik türevi alınırsa,

$$\frac{g''_\alpha(z)}{g'_\alpha(z)} = \alpha \frac{g''(z)}{g'(z)}$$

$$1 + \frac{zg''_\alpha(z)}{g'_\alpha(z)} = 1 + \alpha \frac{zg''(z)}{g'(z)} + \alpha - \alpha$$

ve

$$\operatorname{Re} \left\{ 1 + \frac{zg''_\alpha(z)}{g'_\alpha(z)} \right\} = 1 - \alpha + \alpha \operatorname{Re} \left\{ 1 + \frac{zg''(z)}{g'(z)} \right\} > 1 - \alpha \geq 0 \quad (z \in D, 0 \leq \alpha \leq 1)$$

elde edilir. O hâlde, $g_\alpha \in K$ dir. Böylece $[p]^\alpha \in P$ ve $g_\alpha \in K$, ($z \in D$) için

$$f'_\alpha(z) = [p(z)]^\alpha (g'_\alpha(z)) \quad (0 \leq \alpha \leq 1)$$

olduğundan $f_\alpha \in C$ dir. ■

Yar.Teorem 4.6 $f(z) = 1 + a_1z + a_2z^2 + \dots$ biçiminde tanımlanan fonksiyon D de analitik ve $f \in P$ olsun. Bu takdirde,

$$|f(z) - 1| \leq \frac{2r}{1-r} \quad (|z| \leq r < 1)$$

dir. [20]

İspat: $f \in P$ olduğundan,

$$\frac{1-|z|}{1+|z|} \leq |f(z)| \leq \frac{1+|z|}{1-|z|}$$

gerçeklenir ve Schwarz lemmasının koşullarını gerçekleyen bir $w(z)$ fonksiyonu için

$$f(z) = \frac{1+w(z)}{1-w(z)}$$

dir. O hâlde,

$$|w(z)| = \left| \frac{f(z) - 1}{f(z) + 1} \right| \leq |z| \leq r \quad (|z| \leq r < 1)$$

ve

$$|f(z) - 1| \leq \left| \frac{2w(z)}{1 - w(z)} \right| \leq \frac{2|z|}{1 - |z|} \leq \frac{2r}{1 - r}$$

olur. ■

Teorem 4.10 $f \in K$ olsun. Bu hâlde, $0 \leq \alpha \leq \frac{7 - \sqrt{33}}{8}$ için $f_\alpha \in S$ dir.[20]

İspat: $f \in K$ olduğundan, $h(z) = zf'(z) \in S^*$ olur. Her iki tarafın logartimik türevi alınırsa,

$$\frac{f''(z)}{f'(z)} = \frac{1}{z} \left[\frac{zh'(z)}{h(z)} - 1 \right]$$

elde edilir. $h \in S^*$ olduğundan, $\operatorname{Re} \left\{ \frac{zh'(z)}{h(z)} \right\} > 0$ dir. Yar.Teorem 4.6 dan, $|z| \leq r < 1$ için,

$$\left| \frac{f''(z)}{f'(z)} \right| = \frac{1}{|z|} \left| \frac{zh'(z)}{h(z)} - 1 \right| \leq \frac{1}{r} \frac{2r}{1 - r} = \frac{2(1 + r)}{1 - r^2} \leq \frac{4}{1 - r^2} \quad (4.5)$$

elde edilir. Bu hâlde,

$$\{f_\alpha, z\} = \alpha \{f, z\} + \frac{1}{2} \alpha (1 - \alpha) \left(\frac{f''(z)}{f'(z)} \right)^2$$

ve

$$|\{f_\alpha, z\}| \leq \alpha |\{f, z\}| + \frac{1}{2} \alpha (1 - \alpha) \left| \frac{f''(z)}{f'(z)} \right|^2$$

olduğunu biliyoruz. (2.1) ve (4.5) den,

$$|\{f_\alpha, z\}| \leq \frac{6\alpha}{(1 - r^2)^2} + \frac{8\alpha(1 - \alpha)}{(1 - r^2)^2} = \frac{14\alpha - 8\alpha^2}{(1 - r^2)^2}$$

elde edilir. O hâlde, Teorem 2.1 den $14\alpha - 8\alpha^2 \leq 2$ olması yeterlidir. Bu eşitsizlik, $0 \leq \alpha \leq \frac{7 - \sqrt{33}}{8}$ için gerçekleşir ve $f_\alpha \in S$ dir. ■

4.3 Üçüncü Tür İntegral Operatörleri Altında Özel Fonksiyon Sınıflarının İncelenmesi

Bu bölümde Libera (1965) tarafından,

$$L_3(f) = F(z) = \frac{2}{z} \int_0^z f(t) dt$$

biçiminde tanımlanan üçüncü tür integral operatörünün özelliklerini inceleyeceğiz.

Yar.Teorem 4.7 $f \in S^*$ ise $H(z) = \int_0^z f(t) dt \in S_2^*$ dir.[16]

İspat: $D(z) = zH'(z) = zf(z)$ ve $N(z) = H(z)$ diyelim. $D(z) = zf(z)$ her iki tarafın logaritmik türevi alınırsa,

$$\frac{zD'(z)}{D(z)} = 1 + \frac{zf'(z)}{f(z)}$$

elde edilir. $f \in S^*$ olduğundan,

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{zD'(z)}{D(z)} \right\} = 1 + \operatorname{Re} \left\{ \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} > 1 > 0 \quad (z \in D)$$

ve $D \in S^*$ dir. Diğer taraftan, $D(z) = zH'(z) = zf(z)$ olduğundan,

$$\frac{D'(z)}{N'(z)} = 1 + \frac{zf'(z)}{f(z)}$$

ve buradan,

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{D'(z)}{N'(z)} \right\} = 1 + \operatorname{Re} \left\{ \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} > 1 > 0 \quad (z \in D)$$

bulunur. O hâlde, $\frac{D'}{N'} \in P$ dir. Yar.Teorem 3.5 ten $\frac{N'(0)}{D'(0)} \neq 1$ olmasına rağmen $\frac{N}{D} \in P$ ve

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{zH'(z)}{H(z)} \right\} > 0$$

olur. Bununla birlikte, harmonik fonksiyonlar için ortalama değer teoreminden,

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{Re} \left\{ \frac{re^{i\theta} H'(re^{i\theta})}{H(re^{i\theta})} \right\} d\theta = 2\pi \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} \left\{ \frac{re^{i\theta} H'(re^{i\theta})}{H(re^{i\theta})} \right\} d\theta$$

$$2\pi \left\{ \frac{zH'(z)}{H(z)} \right\}_{z=0} = 4\pi \quad (|z| \leq r < 1)$$

elde edilir ve $H \in S_2^*$ dir[13]. Öte yandan, $H'(z) = f(z)$ olduğundan, her iki tarafın logaritmik türevi alınıp düzenlenirse,

$$\operatorname{Re} \left\{ 1 + \frac{zH''(z)}{H'(z)} \right\} = 1 + \operatorname{Re} \left\{ \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} > 0$$

elde edilir. O hâlde, $H \in K$ dir. ■

Teorem 4.11 $f \in S^*$ ise $F(z) = \frac{2}{z} \int_0^z f(t)dt \in S^*$ dir.[16]

İspat: $F(z) = \frac{2}{z} \int_0^z f(t)dt$ için her iki tarafın logaritmik türevi alınıp düzenlenirse,

$$\frac{zF'(z)}{F(z)} = \frac{zf(z) - \int_0^z f(t)dt}{\int_0^z f(t)dt}$$

olur. Yar.Teorem 4.7 den,

$$\frac{zF'(z)}{F(z)} = \frac{zH'(z) - H(z)}{H(z)}$$

dir. Pay ve paydanın türevleri oranından,

$$\frac{[zF'(z)]'}{F'(z)} = \frac{H'(z) + zH''(z) - H'(z)}{H'(z)} = \frac{zH''(z)}{H'(z)} = \frac{zf'(z)}{f(z)}$$

elde edilir. $f \in S^*$ ve Yar.Teorem 3.5 ten, $F \in S^*$ dir. ■

Sonuç 4.2 $f \in S^*$ ise $F(z) = \int_0^z \frac{2}{t^2} \left[\int_0^t f(w)dw \right] dt \in S^*$ ile tanımlanan $F \in K$ dir.

Gerçekten, $zF'(z) = \frac{2}{z} \int_0^z f(t)dt$ ve Teorem 4.11 den $zF'(z) \in S^*$ ve $F \in K$ dir.

Teorem 4.12 $f \in K$ ise $F(z) = \frac{2}{z} \int_0^z f(t)dt \in K$ dir.[16]

İspat: $f \in K$ olsun. Bu hâlde, $g(z) = zf'(z) \in S^*$ dir. Teorem 4.11 den $G(z) = \frac{2}{z} \int_0^z g(t)dt$ ile tanımlanan $G \in S^*$ dir.

$$G(z) = \frac{2}{z} \int_0^z tf'(t)dt = \frac{2}{z} \left[zf(z) - \int_0^z f(t)dt \right]$$

$$z \left[\frac{2}{z}f(z) - \frac{2}{z^2} \int_0^z f(t)dt \right] = zF'(z)$$

olur. Buradan $G(z) = zF'(z) \in S^*$ ve $F \in K$ dir. ■

Sonuç 4.3 $f \in K$, $F(z) = \frac{2}{z} \int_0^z f(t)dt$ ve $h(z) = 2f(z) - F(z)$ ise $h \in S^*$ dir.

İspat: $f \in K$ olsun. Bu hâlde,

$$h(z) = 2f(z) - \frac{2}{z} \int_0^z f(t)dt = z \left[\frac{2}{z}f(z) - \frac{2}{z^2} \int_0^z f(t)dt \right] = zF'(z)$$

ve $f \in K$ olduğundan, Teorem 4.12 den $F \in K$ olur. O hâlde, $h(z) = zF'(z) \in S^*$ dir. ■

Teorem 4.13 $f \in C(g)$, $F(z) = \frac{2}{z} \int_0^z f(t)dt$ ve $G(z) = \frac{2}{z} \int_0^z g(t)dt$ olsun. Bu hâlde $F \in C(G)$ dir.[16]

İspat: $f \in C(g)$ ise $\frac{zf'(z)}{g(z)} \in P$ olacak biçimde bir $g \in K$ vardır. Ayrıca

$$\frac{zF'(z)}{G(z)} = \frac{z \left[\frac{2}{z}f(z) - \frac{2}{z^2} \int_0^z f(t)dt \right]}{\frac{2}{z} \int_0^z g(t)dt} = \frac{zf(z) - \int_0^z f(t)dt}{\int_0^z g(t)dt}$$

olur.

$$\frac{zf(z) - \int_0^z f(t)dt}{\int_0^z g(t)dt} = \frac{N(z)}{D(z)} \text{ diyelim.}$$

$$\frac{N'(z)}{D'(z)} = \frac{zf'(z)}{g(z)} \in P$$

ve Yar.Teorem 3.5 ten, $\frac{zF'(z)}{G(z)} \in P$ dir. ■

4.3.1 Genelleştirilmiş integral operatörleri

Bu kısımda, c_i parametrelerinin özel seçimiyle, bir önceki bölümde verilen Teorem 4.11.- Teorem 4.13 ün sonuçlarını içeren $F(c_i; f)$ fonksiyonlarının çok parametrelili bir sınıfı incelenmektedir.

Tanım 4.1 $f, g \in H(D)$ ve $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$ $g(z) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j z^j$ olsun. $f * g$ konvolüsyonu aşağıdaki şekilde tanımlanır [4] :

$$(f * g)(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j b_j z^j$$

Tanım 4.2 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, kompleks sayıların sonsuz bir dizisi olsun. $f \in K$ için

$$E(z) = f(z) * \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n \prec f(z)$$

ise, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisine subordinasyon faktör dizisi denir.[4]

$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ ve $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizileri subordinasyon faktör dizisi ise, $\{b_n c_n\}_{n=1}^{\infty}$ çarpım dizisi de bir subordinasyon faktör dizisidir.

Tanım 4.3 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, kompleks sayıların sonsuz bir dizisi olsun. $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n z^n$ fonksiyonu bir T özelliğine sahip olduğunda, $J(z) = f(z) * \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$ konvolüsyonu da T özelliğine sahip ise, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisine T özelliğini koruyor denir.[4]

Tanım 4.4 $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\mathbb{R}$ de non-negatif bir dizi olsun. Dizinin elemanlarının ardıl farkları sırasıyla, non-negatif ve non-pozitif ise, açık ifadeyle

$$\Delta^k \mu_n = \sum_{m=0}^k (-1)^m c_{k,m} \mu_{n+k-m} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

olmak üzere

$$(-1)^k \Delta^k \mu_n \geq 0 \quad (k, n = 0, 1, 2, \dots)$$

gerçekleniyorsa, $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisine tamamiyle monotonik dizi denir.[4]

Bu tanım, Widder (1946) tarafından $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin $\alpha(t)$, $0 \leq t \leq 1$ için azalmayan ve sınırlı bir fonksiyon olmak üzere,

$$\mu_n = \int_0^1 t^n d\alpha(t) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

gösterilişine sahip olması için gerek ve yeter koşulun, $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin tamamiyle monotonik dizi olması gerektiği ispatlanarak verilmiştir.

Teorem 4.14 $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots \in S^*$ olsun. $c = 1, 2, 3, \dots$ için,

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c+1}{c+n} a_n z^n = (c+1) z^{-c} \int_0^z t^{c-1} f(t) dt \quad (a_1 = 1)$$

ise, $g \in S^*$ dir.[4]

İspat: $J(z) = \int_0^z t^{c-1} f(t) dt$ olsun. Yar.Teorem 3.8 den $J \in S_{c+1}^*$ dir. Bu hâlde,

$$g(z) = (c+1) z^{-c} J(z)$$

olmak üzere,

$$g'(z) = (c+1) [-cz^{-(c+1)} J(z) + z^{-1} f(z)]$$

ve

$$(z^{c+1} g'(z))' = (c+1) z^c f'(z)$$

dir. Buradan,

$$\frac{(z^{c+1} g'(z))'}{J'(z)} = (c+1) \frac{z f'(z)}{f(z)}$$

olur. $f \in S^*$ olduğundan,

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{(z^{c+1} g'(z))'}{J'(z)} \right\} = (c+1) \operatorname{Re} \left\{ \frac{z f'(z)}{f(z)} \right\} > 0$$

bulunur ve Yar.Teorem 3.5 ten,

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{z^{c+1} g'(z)}{J(z)} \right\} > 0$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\frac{z^{c+1} g'(z)}{J(z)} = (c+1) \frac{z g'(z)}{(c+1) z^{-c} J(z)} = (c+1) \frac{z g'(z)}{g(z)}$$

dir. Buna göre,

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{z^{c+1} g'(z)}{J(z)} \right\} = (c+1) \operatorname{Re} \left\{ \frac{z g'(z)}{g(z)} \right\} > 0$$

ve $g \in S^*$ dır. Yar.Teorem 3.8.ve argüman prensibi gereği,

$$\begin{aligned} \Delta(\arg g) &= -c \Delta(\arg z) + \Delta(\arg J) \\ &= -2\pi c + 2\pi(c+1) = 2\pi \end{aligned}$$

bulunur. O hâlde $g(z)$ fonksiyonu yalınkattır. ■

Teorem 4.15 $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots \in K$ olsun. $c = 1, 2, 3, \dots$ için,

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c+1}{c+n} a_n z^n = (c+1) z^{-c} \int_0^z t^{c-1} f(t) dt \quad (a_1 = 1)$$

ise, $g \in K$ dir.[4]

İspat: $g(z) = (c+1) z^{-c} \int_0^z t^{c-1} f(t) dt$ olsun. Buradan,

$$zg'(z) = (c+1) z^{-c} \left[z^c f(z) - c \int_0^z t^{c-1} f(t) dt \right] \quad (4.6)$$

dir. $I(z) = \int_0^z t^c f'(t) dt$ integralini göz önüne alalım. $u = t^c$ ve $dv = f'(t) dt$ dersek, $du = ct^{c-1} dt$ ve $v = f(t)$ olur. Buradan,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^z t^c f'(t) dt \\ &= t^c f(t) \Big|_0^z - c \int_0^z t^{c-1} f(t) dt \\ &= z^c f(z) - c \int_0^z t^{c-1} f(t) dt \end{aligned}$$

elde edilir. O hâlde, (4.6) eşitsizliği,

$$zg'(z) = (c+1) z^{-c} \int_0^z t^{c-1} (t f'(t)) dt$$

biçiminde yazılabilir. $f \in K$ olduğundan, $zf'(z) \in S^*$ dir. O hâlde Teorem 4.14 ten $zg'(z) \in S^*$ ve dolayısıyla $g \in K$ elde edilir. ■

Teorem 4.16 $f \in C(g)$ olsun. $c = 1, 2, 3, \dots$ için $F(z) = (c+1) z^{-c} \int_0^z t^{c-1} f(t) dt$ ve $G(z) = (c+1) z^{-c} \int_0^z t^{c-1} g(t) dt$ ise, $F \in C(G)$ dir. [4]

İspat: $g \in S^*$ için $f \in C(g)$ olduğundan, $\frac{zf'(z)}{g(z)} \in P$ dir.

$$F(z) = (c+1) z^{-c} \int_0^z t^{c-1} f(t) dt \text{ ve } G(z) = (c+1) z^{-c} \int_0^z t^{c-1} g(t) dt$$

olsun. Teorem 4.14 ten $G \in S^*$ dir. Bu hâlde,

$$\begin{aligned} z^{c+1} F'(z) &= (c+1) \left[z^c f(z) - c \int_0^z t^{c-1} f(t) dt \right] \\ [z^{c+1} F'(z)]' &= (c+1) z^c f'(z) \end{aligned} \quad (4.7)$$

ve

$$[z^c G(z)]' = (c+1) z^{c-1} g(z) \quad (4.8)$$

olur. (4.7) ve (4.8) in taraf tarafa oranlanmasıyla,

$$\frac{[z^{c+1} F'(z)]'}{[z^c G(z)]'} = \frac{zf'(z)}{g(z)} \in P$$

bulunur. O hâlde, Yar.Teorem 3.5 ten,

$$\frac{z^{c+1}F'(z)}{z^cG(z)} = \frac{zF'(z)}{G(z)} \in P$$

ve böylece $F \in C(G)$ olur. ■

4.3.2 Ters problem

Yar.Teorem 4.8 $\phi(z)$, D de analitik ve $|\phi(z)| \leq 1$ ise $|\phi'(z)| \leq \frac{1-|\phi(z)|^2}{1-|z|^2}$ dir.

İspat: $\phi(z)$, D de analitik ve $|\phi(z)| \leq 1$ olsun. $|z| < 1$ ve $|\zeta| < 1$ için

$$g(z) = \frac{\phi(z) - \phi(\zeta)}{1 - \overline{\phi(\zeta)}\phi(z)}$$

olacak biçimde bir $g(z)$ fonksiyonu tanımlayalım. $z = \zeta$ için $g(\zeta) = 0$ ve $1 - \overline{\phi(\zeta)}\phi(z) \neq 0$ olduğundan, $g(z) \in H(D)$ dir. O hâlde, maksimum prensibinden,

$$|g(z)| \leq 1 \quad (|z| < 1, |\zeta| < 1)$$

dir. $g(z)$ fonksiyonu yardımıyla,

$$h(z) = \frac{g(z)}{\frac{z-\zeta}{1-\bar{\zeta}z}} = \frac{\phi(z) - \phi(\zeta)}{z - \zeta} \frac{1 - \bar{\zeta}z}{1 - \overline{\phi(\zeta)}\phi(z)}$$

olacak biçimde bir $h(z)$ fonksiyonu tanımlayalım. $|z| = 1$ için $\left| \frac{z - \zeta}{1 - \bar{\zeta}z} \right| = 1$ dir. Maksimum prensibinden, $|z| \leq 1$ için $|h(z)| \leq 1$ olur ve $z = \zeta$ için $h(\zeta) = 0$ dir. Buradan,

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \zeta} |h(z)| &= \lim_{z \rightarrow \zeta} \left| \frac{\phi(z) - \phi(\zeta)}{z - \zeta} \frac{1 - \bar{\zeta}z}{1 - \overline{\phi(\zeta)}\phi(z)} \right| \\ &= \lim_{z \rightarrow \zeta} \left| \frac{\phi(z) - \phi(\zeta)}{z - \zeta} \right| \left| \frac{1 - \bar{\zeta}z}{1 - \overline{\phi(\zeta)}\phi(z)} \right| \leq 1 \end{aligned}$$

ve

$$|\phi'(z)| \leq \frac{1 - |\phi(z)|^2}{1 - |z|^2}$$

elde edilir. ■

Teorem 4.17 $F \in S^*$ ise $|z| < \frac{1}{2}$ için $f(z) = \frac{1}{2} [zF(z)]' \in S^*$ dir. Sonuç kesindir.[17]

İspat: $F \in S^*$ olsun. Bu hâlde, D de analitik ve $|\phi(z)| \leq 1$ olan bir $\phi(z)$ fonksiyonu,

$$\frac{zF'(z)}{F(z)} = \frac{1 - z\phi(z)}{1 + z\phi(z)} \quad (4.9)$$

olacak biçimde vardır. Öte yandan,

$$F(z) = \frac{2}{z} \int_0^z f(t)dt$$

olduğundan, her iki tarafın logaritmik türevi alınırsa,

$$\frac{zF'(z)}{F(z)} = \frac{zf(z) - \int_0^z f(t)dt}{\int_0^z f(t)dt}$$

bulunur. (4.9) eşitliğinden,

$$\frac{zf(z) - \int_0^z f(t)dt}{\int_0^z f(t)dt} = \frac{1 - z\phi(z)}{1 + z\phi(z)} \quad (4.10)$$

ve

$$f(z) = \frac{2}{z(1 + z\phi(z))} \int_0^z f(t)dt \quad (4.11)$$

elde edilir. Bu son ifadede, her iki tarafın logaritmik türevi alınırsa,

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = -1 - \frac{z\phi(z) + z^2\phi'(z)}{1 + z\phi(z)} + \frac{zf(z)}{\int_0^z f(t)dt}$$

ve (4.10) eşitliğinden

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = \frac{-1 - 2z\phi(z) - z^2\phi'(z)}{1 + z\phi(z)}$$

elde edilir. O hâlde,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left\{ \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} &= \operatorname{Re} \left\{ \frac{-1 - 2z\phi(z) - z^2\phi'(z)}{1 + z\phi(z)} \right\} \\ &= \frac{1}{|1 + z\phi(z)|} \operatorname{Re} \left\{ (-1 - 2z\phi(z) - z^2\phi'(z)) \left(1 + \overline{z\phi(z)} \right) \right\} \end{aligned}$$

dir. $f(z)$ nin yıldızlı olduğu bölgeyi bulmak için,

$$\operatorname{Re} \left\{ (-1 - 2z\phi(z) - z^2\phi'(z)) \left(1 + \overline{z\phi(z)} \right) \right\} > 0$$

eşitsizliğinin hangi z ler için gerçekleştiğini göstermek yeterlidir. Bu hâlde,

$$\operatorname{Re} \left\{ z^2\phi'(z) \left(1 + \overline{z\phi(z)} \right) \right\} < \operatorname{Re} \left\{ \left(1 + \overline{z\phi(z)} \right) \right\} - 2 \operatorname{Re} \left\{ z\phi(z) \left(1 + \overline{z\phi(z)} \right) \right\}$$

$$< 1 - \operatorname{Re} \{z\phi(z)\} - 2|z|^2 |\phi(z)|^2$$

ve her $w \in C$ için $-|w| \leq \operatorname{Re} w \leq |w|$ olduğundan,

$$\operatorname{Re} \left\{ z^2 \phi'(z) \left(1 + \overline{z\phi(z)} \right) \right\} \leq |z|^2 |\phi'(z)| (1 + |z| |\phi(z)|)$$

dir. Aynı zamanda Yar.Teorem 4.8 den,

$$\operatorname{Re} \left\{ z^2 \phi'(z) \left(1 + \overline{z\phi(z)} \right) \right\} \leq \frac{|z|^2}{1 - |z|^2} (1 - |\phi(z)|^2) (1 + |z| |\phi(z)|)$$

elde edilir. Bu hâlde (4.9) eşitsizliğinin sağlanması için

$$\frac{|z|^2}{1 - |z|^2} (1 - |\phi(z)|^2) (1 + |z| |\phi(z)|) < 1 - |z| |\phi(z)| - 2|z|^2 |\phi'(z)|^2$$

veya buna denk olarak,

$$2|z|^2 + 2|z| |\phi(z)| (1 - |z|^2) - |z|^2 |\phi'(z)|^2 < 1$$

eşitsizliğinin gerçekleşmesi yeterlidir. Bu durumda, Yar.Teorem 4.8 in koşullarını sağlayan $\phi(z)$ fonksiyonunun $|z| < \frac{1}{2}$ için üstteki eşitsizliği gerçeklediğini gösterelim: $|z| = a$ ve $|\phi(z)| = x$ dersek,

$$p(x) = 2a^2 + 2a(1 - a^2)x - a^2x^2$$

olur. Bu hâlde, $0 \leq a < \frac{1}{2}$ eşitsizliğini gerçekleyen sabit bir a sayısı için $p(x)$ polinomunun $0 \leq x \leq 1$ olmak üzere 1 ile üstten sınırlı olduğunu göstermemiz yeterlidir. Buradan,

$$p'(x) = 2a(1 - a^2) - 2a^2x = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{1 - a^2}{a}$$

bulunur. $0 \leq x \leq 1$ ve $0 \leq a < \frac{1}{2}$ için,

$$0 \leq x_0 = \frac{1 - a^2}{a} \leq 1 \Rightarrow \frac{1 - a^2 - a}{a} \geq 0$$

elde edilir. Bu ise, $0 < a < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ için gerçekleşir. O hâlde, $a < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ve $0 \leq x \leq 1$ için $p'(x) > 0$ dir. Buradan,

$$\max_{x \in [0,1]} p(x) = p(1) = 2a + a^2 - 2a^3 = q(a)$$

ve

$$q'(a) = -6a^2 + 2a + 2 = 0 \Rightarrow a_1 = \frac{1 - \sqrt{13}}{6} \cong -0.4 \text{ ve } a_2 = \frac{1 + \sqrt{13}}{6} \cong 0.9$$

elde edilir. Buna göre, $0 \leq a < \frac{1}{2}$ için, $q'(a) > 0$ olur. Öte yandan,

$$\max_{a \in [0, \frac{1}{2})} q(a) = q\left(\frac{1}{2}\right) > q(a)$$

dir Böylece, $2a + a^2 - 2a^3 < 1$ bulunur. Bu ise, $p(x) < 1$ olduğunu ifade eder.

Sonucun kesin olduğunu göstermek için, $F(z) = \frac{z}{(1-z)^2} \in S^*$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu hâlde,

$$f(z) = \frac{1}{2} \left[\frac{z^2}{(1-z)^2} \right]' = \frac{z}{(1-z)^3}$$

ve

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = \frac{1+2z}{1-z} = 0 \Rightarrow z = -\frac{1}{2}$$

olur. Buna göre, $|z| < r$, $r > \frac{1}{2}$ için $f(z)$ fonksiyonu yıldızlı değildir. ■

Teorem 4.18 $F \in K$ ise $|z| < \frac{1}{2}$ için $f(z) = \frac{1}{2} [zF(z)]' \in K$ dir. Sonuç kesindir.[17]

İspat: $f(z) = \frac{1}{2} [zF(z)]'$ olsun. Bu hâlde,

$$2f(z) = F(z) + zF'(z)$$

ve

$$2f'(z) = F'(z) + zF''(z)$$

dir. O hâlde $F \in K$ olduğundan,

$$2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{f'(z)}{F'(z)} \right\} = 2 + \operatorname{Re} \left\{ \frac{zF''(z)}{F'(z)} \right\}$$

ve

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{f'(z)}{F'(z)} \right\} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{Re} \left\{ \frac{zF''(z)}{F'(z)} \right\} \right] > \frac{1}{2} > 0$$

dir. $f(z)$ fonksiyonu $F(z)$ fonksiyonuna göre konvekse yakın ve D de yalınkattır. $F \in K$ olduğundan, $zF'(z) \in S^*$ dir. Buradan,

$$f'(z) = F'(z) + \frac{1}{2} zF''(z)$$

ve

$$zf'(z) = \frac{1}{2} [z(zF'(z))]'$$

dir. O hâlde, önceki teoremden, $zf'(z)$, $|z| < \frac{1}{2}$ için yıldızlıdır ve bu nedenle $f(z)$ fonksiyonu $|z| < \frac{1}{2}$ için konvektir.

Sonucun kesin olduğunu göstermek için, $F(z) = \frac{z}{1-z} \in K$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu hâlde,

$$f(z) = \frac{1}{2} \left[\frac{z^2}{1-z} \right]' = \frac{2z - z^2}{2(1-z)^2}$$

ve

$$1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} = \frac{1+2z}{1-z} = 0 \Rightarrow z = -\frac{1}{2}$$

olur. Buna göre, $|z| < r$, $r > \frac{1}{2}$ için $f(z)$ fonksiyonu konveks değildir. ■

Yar.Teorem 4.9 $f \in P$ ise $|f'(z)| \leq \frac{2 \operatorname{Re} f(z)}{1-|z|^2}$ dir.[17]

İspat: Sıfır noktasını bir z noktasına dönüştürelim:

$$g(\zeta) = f\left(\frac{\zeta+z}{1+\bar{z}\zeta}\right) = f(z) + b_1\zeta + b_2\zeta^2 + \dots$$

olur. $g(\zeta)$ fonksiyonu D de yalınkattır. $f(0) \neq 1$ olduğundan normalize edelim. Bu amaçla,

$$p(\zeta) = \frac{g(\zeta) - i \operatorname{Im} f(z)}{\operatorname{Re} f(z)}$$

tanımlayalım. Bu hâlde, $p(0) = 1$ ve $p \in P$ dir. P sınıfının özelliğinden,

$$|p'(0)| = \left| \frac{g'(0)}{\operatorname{Re} f(z)} \right| \leq 2 \text{ ve } |g'(0)| \leq 2 \operatorname{Re} f(z)$$

olur. Öte yandan,

$$g'(\zeta) = f'\left(\frac{\zeta+z}{1+\bar{z}\zeta}\right) \frac{1-|z|^2}{(1+\bar{z}\zeta)^2}$$

olduğundan,

$$|f'(z)| \leq \frac{2 \operatorname{Re} f(z)}{1-|z|^2}$$

dir. ■

Teorem 4.19 $F \in C$ ise $|z| < \frac{1}{2}$ için $f(z) = \frac{1}{2} [zF(z)]'$ konvekse yakındır. Sonuç kesindir.[17]

İspat: $F \in C$ ve $f(z) = \frac{1}{2} [zF(z)]'$ olsun. Bu hâlde,

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{zF'(z)}{G(z)} \right\} > 0 \quad (z \in D) \quad (4.12)$$

olacak biçimde bir $G \in S^*$ vardır. O hâlde,

$$\frac{zF'(z)}{G(z)} = \frac{zf(z) - \int_0^z f(t)dt}{\int_0^z g(t)dt}$$

dir ve (4.12) dan $p \in P$ olmak üzere,

$$p(z) = \frac{zf(z) - \int_0^z f(t)dt}{\int_0^z g(t)dt}$$

diyelim. Buradan,

$$\begin{aligned} zf(z) &= p(z) \int_0^z g(t)dt + \int_0^z f(t)dt \\ zf'(z) &= p(z)g(z) + |p'(z)| \int_0^z g(t)dt \end{aligned}$$

olur. Yar. Teorem 4.9 ve üstteki eşitlikten dolayı ,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left\{ \frac{zf'(z)}{g(z)} \right\} &= \operatorname{Re} p(z) + \operatorname{Re} \left[p'(z) \frac{\int_0^z g(t)dt}{g(z)} \right] \\ &\geq \operatorname{Re} p(z) - |p'(z)| \left| \frac{\int_0^z g(t)dt}{g(z)} \right| \\ &= \operatorname{Re} p(z) \left[1 - \frac{2}{1 - |z|^2} \left| \frac{\int_0^z g(t)dt}{g(z)} \right| \right] \end{aligned}$$

elde edilir. Öte yandan, $G \in S^*$ olduğundan,

$$\begin{aligned} \frac{zg(z)}{\int_0^z g(t)dt} &= \frac{\frac{1}{2} (z [zG(z)]')}{\frac{1}{2} [zG(z)]} = 1 + \frac{zG'(z)}{G(z)} \\ \operatorname{Re} \left[\frac{zg(z)}{\int_0^z g(t)dt} \right] &= 1 + \operatorname{Re} \left\{ \frac{zG'(z)}{G(z)} \right\} > 1 > 0 \end{aligned}$$

dir. (4.11) den

$$\frac{zg(z)}{\int_0^z g(t)dt} = \frac{2}{1 + z\phi(z)}$$

ve

$$\left| \frac{\int_0^z g(t)dt}{g(z)} \right| = \left| \frac{z + z^2\phi(z)}{2} \right| \leq \frac{1}{2} (|z| + |z|^2)$$

elde edilir. O hâlde,

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{zf'(z)}{g(z)} \right\} \geq \operatorname{Re} p(z) \left[1 - \frac{|z| + |z|^2}{1 - |z|^2} \right] = \operatorname{Re} p(z) \left[\frac{1 - 2|z|}{1 - |z|} \right]$$

dir. Bu durumda üstteki bağıntının sağ tarafı $|z| < \frac{1}{2}$ için pozitiftir ve $f(z)$ fonksiyonu $g(z)$ fonksiyonuna göre konvekse yakındır.

Sonucun kesin olduğunu göstermek için, $F(z) = \frac{z}{(1-z)^2} \in S^* \subset C$ fonksiyonunu göz önüne alalım.

$$f(z) = \frac{1}{2} \left[\frac{z^2}{(1-z)^2} \right]' = \frac{z}{(1-z)^3} \text{ ve } f'(z) = \frac{1+2z}{(1-z)^4}$$

dir. Buradan da,

$$f'(z) = \frac{1+2z}{(1-z)^4} = 0 \Rightarrow z = -\frac{1}{2}$$

olur. Buna göre, $|z| < r$, $r > \frac{1}{2}$ için $f(z)$ fonksiyonu yalınkat değildir ve bu nedenle de konvekse yakın değildir. ■

Teorem 4.20 $f(z) = \frac{1}{2} [zF(z)]'$ ve $\operatorname{Re} F'(z) > 0$, ($z \in D$) olsun. Bu takdirde, $|z| < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ için $\operatorname{Re} f'(z) > 0$ dır. Sonuç kesindir.[17]

İspat: $p(0) = 1$ ve $p \in P$, ($z \in D$) olmak üzere $F'(z) = p(z)$ diyelim. Bu hâlde,

$$2f(z) = F(z) + zF'(z)$$

ve

$$2f'(z) = F'(z) + zF''(z) = 2p(z) + zp'(z)$$

dir. Yar.Teorem 4.9 dan

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Re} \{f'(z)\} &= 2\operatorname{Re} \{p(z)\} + \operatorname{Re} \{zp'(z)\} \geq 2\operatorname{Re} \{p(z)\} - |z| |p'(z)| \\ &\geq 2\operatorname{Re} \{p(z)\} \left[1 - \frac{|z|}{1 - |z|^2} \right] \end{aligned}$$

$$2 \operatorname{Re} \{p(z)\} \left[\frac{1 - |z| - |z|^2}{1 - |z|^2} \right]$$

elde edilir. $p \in P$ olduğundan, üsteki eşitliğin pozitif olabilmesi için

$$\frac{1 - |z| - |z|^2}{1 - |z|^2} > 0$$

olmalıdır. Bu ise, $0 < |z| < \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ için gerçekleşir.

Sonucun kesin olduğunu göstermek için, $F(z) = -z - 2 \log(1 - z)$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu hâlde,

$$f(z) = \frac{1}{2} [-z^2 - 2z \log(1 - z)]' \text{ ve } f'(z) = \frac{1 + z - z^2}{(1 - z)^2}$$

olur. Buradan,

$$f'(z) = \frac{1 + z - z^2}{(1 - z)^2} = 0 \Rightarrow z_1 = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \text{ ve } z_2 = \frac{-\sqrt{5} + 1}{2}$$

olur. Buna göre, $|z| < r$, $r > \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ için $f' \notin P$ dir. ■

4.3.3 Genelleştirilmiş integral operatörü için ters problemlerin incelenmesi

Bu bölümde, bir önceki bölümde bulunan sonuçların $c = 1, 2, 3, \dots$ için genel durumunu inceleyeceğiz.

Teorem 4.21 $F \in S^*$ ve $f(z) = \frac{z^{1-c}}{1+c} [z^c F(z)]'$, $c = 1, 2, 3, \dots$ olsun. Bu takdirde $|z| < r_0$ için $f \in S^*$ dir. Burada,

$$r_0 = \begin{cases} \frac{-2 + \sqrt{3 + c^2}}{c-1} & c > 1 \\ \frac{1}{2} & c = 1 \end{cases}$$

ile tanımlanmıştır. Sonuç kesindir.[5]

İspat: $F \in S^*$ olduğundan, Schwarz lemmasının koşullarını sağlayan bir $w(z)$ fonksiyonu,

$$\frac{zF'(z)}{F(z)} = \frac{z^c f(z) - c \int_0^z t^{c-1} f(t) dt}{\int_0^z t^{c-1} f(t) dt} = \frac{1 - w(z)}{1 + w(z)} \quad (4.13)$$

olacak biçimde vardır. O hâlde,

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{z^{1-c}}{1+c} [z^c F(z)]' = \frac{z^{1-c}}{1+c} [cz^{c-1}F(z) + z^c F'(z)] \\
&= \frac{1}{1+c} \left[c + \frac{zF'(z)}{F(z)} \right] F(z) \\
&= \frac{1}{1+c} \left[c + \frac{1-w(z)}{1+w(z)} \right] (c+1) \int_0^z t^{c-1} f(t) dt \\
&= \frac{c+1+(c-1)w(z)}{(1+w(z))z^c} \int_0^z t^{c-1} f(t) dt
\end{aligned}$$

dir. Bu son ifadede, $\frac{c-1}{c+1} = b$ dersek,

$$f(z) = \frac{(1+bw(z))(c+1)}{(1+w(z))z^c} \int_0^z t^{c-1} f(t) dt$$

olur. Üstteki eşitliğin her iki tarafın logaritmik türevi alınır,

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{bw'(z)}{1+w(z)} - \frac{cz^{c-1}(1+w(z)) + z^c w'(z)}{(1+w(z))z^c} + \frac{z^{c-1}f(z)}{\int_0^z t^{c-1} f(t) dt}$$

ve

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = \frac{bzw'(z)}{1+w(z)} - \frac{c(1+w(z)) + zw'(z)}{1+w(z)} + \frac{z^c f(z)}{\int_0^z t^{c-1} f(t) dt} \quad (4.14)$$

elde edilir. (4.13) ve (4.14) birlikte düşünülmesiyle,

$$\begin{aligned}
\frac{zf'(z)}{f(z)} &= \frac{bzw'(z)}{1+w(z)} - \frac{c(1+w(z)) + zw'(z)}{1+w(z)} + c + \frac{1-w(z)}{1+w(z)} \\
&= \frac{1-w(z)}{1+w(z)} - (1-b) \left[\frac{zw'(z)}{(1+w(z))(1+bw(z))} \right]
\end{aligned}$$

ve

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1-w(z)}{1+w(z)} \right\} - (1-b) \operatorname{Re} \left\{ \frac{zw'(z)}{(1+w(z))(1+bw(z))} \right\}$$

elde edilir. $f(z)$ fonksiyonunun $|z| < r_0$ için yıldızlı olduğunu göstermek, $|z| < r_0$ için

$$(1-b) \operatorname{Re} \left\{ \frac{zw'(z)}{(1+w(z))(1+bw(z))} \right\} < \operatorname{Re} \left\{ \frac{1-w(z)}{1+w(z)} \right\} \quad (4.15)$$

eşitsizliğinin gerçekleştiğini göstermeye denktir. O hâlde,

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{1-w(z)}{1+w(z)} \right\} = \frac{1-|w(z)|^2}{|1+w(z)|^2}$$

ve

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{zw'(z)}{(1+w(z))(1+bw(z))} \right\} \leq \frac{|z| |w'(z)|}{|1+w(z)| |1+bw(z)|}$$

olduğundan, (4.15) eşitsizliğinin gerçekleşmesi için

$$(1-b) \frac{|z| |w'(z)|}{|1+w(z)| |1+bw(z)|} < \frac{1-|w(z)|^2}{|1+w(z)|^2}$$

eşitsizliğinin gerçekleşmesi yeterlidir. Üstteki eşitsizlikten ve Yar.Teorem 4.8. ten

$$\begin{aligned} \frac{(1-b)|z|}{|1+w(z)| |1+bw(z)|} \frac{1-|w(z)|^2}{1-|z|^2} &< \frac{1-|w(z)|^2}{|1+w(z)|^2} \\ \frac{(1-b)|z|}{1-|z|^2} &< \frac{|1+bw(z)|}{|1+w(z)|} \end{aligned} \quad (4.16)$$

elde edilir. Öte yandan,

$$\frac{|1+bw(z)|}{|1+w(z)|} \geq \frac{1+b|w(z)|}{1+|w(z)|}$$

olduğundan, (4.16) eşitsizliğinin gerçekleşmesi için,

$$\frac{(1-b)r}{1-r^2} < \frac{1+br}{1+r}, \quad (|w(z)| \leq |z| = r < 1)$$

eşitsizliğinin gerçekleşmesi yeterlidir. O hâlde, üstteki eşitsizlik,

$$1 - 2(1-b)r - br^2 > 0$$

veya

$$1 + c - 4r - (c-1)r^2 > 0$$

için gerçekleşir. Bu, $0 < r_0 < \frac{-2 + \sqrt{3+c^2}}{c-1}$ için doğrudur.

Özel olarak, $c = 1$ için $0 < r_0 < \frac{1}{2}$ elde edilir.

Her $c = 1, 2, 3, \dots$ için sonucun kesin olduğunu göstermek amacıyla, $F(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ yıldızlı fonksiyonunu gözönüne alalım. Bu hâlde,

$$f(z) = \frac{z^{1-c}}{1+c} \left[\frac{z^{c+1}}{(1-z)^2} \right]' = \frac{1}{1+c} \frac{(c+1)z - (c-1)z^2}{(1-z)^3}$$

dir. Her iki tarafın logaritmik türevi alınırsa,

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = \frac{1+c+4z-(c-1)z^2}{(1-z)[1+c-(c-1)z]}$$

ve

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = \frac{1+c+4z-(c-1)z^2}{(1-z)[1+c-(c-1)z]} = 0 \Rightarrow z = -r_0$$

elde edilir. Buna göre $|z| < r$, $r > r_0$ için $f(z)$ fonksiyonu yıldızlı değildir. ■

Teorem 4.22 $F \in K$ ve $f(z) = \frac{z^{1-c}}{1+c} [z^c F(z)]'$, $c = 1, 2, 3, \dots$ olsun. Bu takdirde $|z| < 1$ için $f(z)$ yalınkat ve $|z| < r_0$ için $f \in K$ dir. Burada,

$$r_0 = \begin{cases} \frac{-2+\sqrt{3+c^2}}{c-1} & c > 1 \\ \frac{1}{2} & c = 1 \end{cases}$$

ile tanımlanmıştır. Sonuç kesindir.[5]

İspat: $F \in K$ ve $f(z) = \frac{z^{1-c}}{1+c} [z^c F(z)]'$ olsun. Bu hâlde,

$$(1+c)f(z) = cF(z) + zF'(z)$$

ve

$$(1+c)f'(z) = (1+c)F'(z) + zF''(z)$$

dir. $F \in K$ olduğundan,

$$(1+c)\frac{f'(z)}{F'(z)} = (1+c) + \frac{zF''(z)}{F'(z)}$$

ve

$$(1+c)\operatorname{Re}\left\{\frac{f'(z)}{F'(z)}\right\} = c + \operatorname{Re}\left\{1 + \frac{zF''(z)}{F'(z)}\right\} > c > 0$$

dir. Bu takdirde, $f(z)$ fonksiyonu $F(z)$ fonksiyonuna göre konvekse yakın ve D de yalınkattır. Öte yandan,

$$zf'(z) = \frac{z^{1-c}}{1+c} [z^c (zF'(z))]'$$

dir. $F \in K$ için $zF'(z) \in S^*$ olduğundan, bir önceki teoremden $|z| < r_0$ için $zf'(z) \in S^*$ ve $f \in K$ dir.

Her $c = 1, 2, 3, \dots$ için sonucun kesin olduğunu göstermek amacıyla, $F(z) = \frac{z}{1-z}$ konveks fonksiyonunu gözöntüne alalım. Bu hâlde,

$$f(z) = \frac{z^{1-c}}{1+c} \left[\frac{z^{c+1}}{1-z} \right]' = \frac{1}{1+c} \frac{(1+c)z - cz^2}{(1-z)^2}$$

ve

$$1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} = \frac{1 + c + 4z - (c-1)z^2}{(1-z)[1 + c - (c-1)z]} = 0 \Rightarrow z = -r_0$$

olur. Buna göre, $|z| < r$, $r > r_0$ için $f(z)$ fonksiyonu konveks değildir. ■

Teorem 4.23 $F(z)$ fonksiyonu $G(z)$ fonksiyonuna göre konvekse yakın,

$$f(z) = \frac{z^{1-c}}{1+c} [z^c F(z)]' \text{ ve } g(z) = \frac{z^{1-c}}{1+c} [z^c G(z)]' , c = 1, 2, 3, \dots$$

olsun. Bu takdirde, $|z| < r_0$ için $f(z)$ fonksiyonu $g(z)$ fonksiyonuna göre konvekse yakındır. Burada

$$r_0 = \begin{cases} \frac{-2+\sqrt{3+c^2}}{c-1} & c > 1 \\ \frac{1}{2} & c = 1 \end{cases}$$

ile tanımlanmıştır. Sonuç kesindir.[5]

İspat: Konvekse yakın fonksiyon tanımından, $G \in S^*$ olmak üzere, $\operatorname{Re} \left\{ e^{i\beta} \frac{zF'(z)}{G(z)} \right\} > 0$ olacak şekilde bir β , $|\beta| < \frac{\pi}{2}$ reel sayısı vardır. Öte yandan, Teorem 4.21 den $|z| < r_0$ için $g \in S^*$ olduğundan, $|z| < r_0$ için $\operatorname{Re} \left\{ e^{i\beta} \frac{zf'(z)}{g(z)} \right\} > 0$ olduğunu göstermemiz yeterlidir.

$F \in C(G)$ olduğundan, $p \in P$ olmak üzere,

$$e^{i\beta} \left[\frac{zF'(z)}{G(z)} \right] = p(z) \cos \beta + i \sin \beta$$

dir. Bu halde,

$$\begin{aligned} e^{i\beta} [zF'(z)] &= p(z) G(z) \cos \beta + i G(z) \sin \beta \\ e^{i\beta} [z^{c+1} F'(z)] &= p(z) z^c G(z) \cos \beta + i z^c G(z) \sin \beta \\ e^{i\beta} [z^{c+1} F'(z)]' &= [p'(z) (z^c G(z)) + p(z) (z^c G(z))'] \cos \beta + i (z^c G(z))' \sin \beta \\ e^{i\beta} \left[\frac{zf'(z)}{g(z)} \right] &= e^{i\beta} \frac{[z^{c+1} F'(z)]'}{[z^c G(z)]'} \\ &= \cos \beta \left[p(z) + p'(z) \frac{z^c G(z)}{(z^c G(z))'} \right] + i \sin \beta \end{aligned} \quad (4.17)$$

elde edilir. (4.17) eşitliğinde, her iki tarafın reel kısımlarının eşitliğinden,

$$\operatorname{Re} \left[e^{i\beta} \frac{zf'(z)}{g(z)} \right] \geq \cos \beta \left[\operatorname{Re} p(z) - |p'(z)| \left| \frac{z^c G(z)}{(z^c G(z))'} \right| \right], \quad (z \in D) \quad (4.18)$$

elde edilir. Öte yandan, Yar.Teorem 4.8 de $\phi(z) = \frac{p(z)-1}{p(z)+1}$ alınırsa,

$$|p'(z)| \leq \frac{2 \operatorname{Re} p(z)}{1 - |z|^2}, \quad (z \in D) \quad (4.19)$$

çıkar. (4.18) dan,

$$\operatorname{Re} \left[e^{i\beta} \frac{zf'(z)}{g(z)} \right] \geq \operatorname{Re} p(z) \left[1 - \frac{2}{1 - |z|^2} \left| \frac{z^c G(z)}{(z^c G(z))'} \right| \right] \cos \beta, \quad (z \in D) \quad (4.20)$$

elde edilir. Ayrıca,

$$M(z) = \frac{z(z^c G(z))'}{z^c G(z)} = c + \frac{zG'(z)}{G(z)}$$

denirse, $G \in S^*$ ve Yar.Teorem 3.2 den,

$$|M(z)| \geq \operatorname{Re} M(z) \geq c + \frac{1 - |z|}{1 + |z|} = \frac{1 + c + (c - 1)|z|}{1 + |z|} \quad (z \in D)$$

ve

$$\left| \frac{z}{M(z)} \right| = \left| \frac{z^c G(z)}{(z^c G(z))'} \right| \leq \frac{|z| + |z|^2}{1 + c + (c - 1)|z|} \quad (4.21)$$

elde edilir. (4.20) ve (4.21) den,

$$\operatorname{Re} \left[e^{i\beta} \frac{zf'(z)}{g(z)} \right] \geq \operatorname{Re} p(z) \left[1 - \frac{2}{1 - |z|^2} \frac{|z| + |z|^2}{1 + c + (c - 1)|z|} \right] \cos \beta, \quad (z \in D)$$

ve $|z| = r$ yazılırsa,

$$\operatorname{Re} \left[e^{i\beta} \frac{zf'(z)}{g(z)} \right] \geq \operatorname{Re} p(z) \left[\frac{1 + c - 4r - (c - 1)r^2}{(1 - r)[1 + c + (c - 1)r]} \right] \cos \beta, \quad (z \in D)$$

elde edilir. Üstteki eşitsizliğin sağ tarafının pozitif olması için, $1 + c - 4r - (c - 1)r^2 > 0$ olmalıdır. Bu $|z| = r < r_0$ için gerçekleşir.

Her $c = 1, 2, 3, \dots$ için sonucun kesin olduğunu göstermek amacıyla,

$$F(z) = G(z) = \frac{z}{(1 - z)^2} \in S^* \subset C$$

fonksiyonlarımı göz önüne alalım. Bu halde,

$$\frac{zf'(z)}{g(z)} = \frac{1+c+4z-(c-1)z^2}{(1-z)[1+c-(c-1)z]}$$

dir. Buradan,

$$\frac{zf'(z)}{g(z)} = \frac{1+c+4z-(c-1)z^2}{(1-z)[1+c-(c-1)z]} = 0 \Rightarrow z = -r_0$$

olur. Buna göre, $|z| = r$, $r > r_0$ için $f(z)$ fonksiyonu $g(z)$ fonksiyonuna göre konvekse yakın değildir. ■

Teorem 4.24 $F(z) = z + \dots \in H(D)$, $\operatorname{Re} F'(z) > 0$ ve $f(z) = \frac{z^{1-c}}{1+c} [z^c F(z)]'$,

$c = 1, 2, 3, \dots$ olsun. Bu takdirde $|z| < r_1 = \frac{-1 + \sqrt{2+2c+c^2}}{1+c}$ için $\operatorname{Re} f'(z) > 0$ dır.

Sonuç kesindir.[5]

İspat: $f(z) = \frac{z^{1-c}}{1+c} [z^c F(z)]'$ olsun. Bu takdirde, $p(0) = 1$, $\operatorname{Re} p(z) > 0$ olmak üzere $F'(z) = p(z)$ denirse,

$$(1+c)f(z) = cF(z) + zF'(z)$$

ve

$$(1+c)f'(z) = (1+c)F'(z) + zF''(z) = (1+c)p(z) + zp'(z)$$

olur. Teorem 4.23 ten

$$\begin{aligned} (1+c) \operatorname{Re} f'(z) &= (1+c) \operatorname{Re} p(z) + \operatorname{Re} \{zp'(z)\} \\ &\geq (1+c) \operatorname{Re} p(z) - |z| |p'(z)| \\ &\geq \operatorname{Re} p(z) \left[1+c - \frac{2r}{1-r^2} \right] \\ &= \operatorname{Re} p(z) \left[\frac{1+c-2r-(1+c)r^2}{1-r^2} \right] \end{aligned}$$

elde edilir. Üstteki eşitsizliğin sağ tarafının pozitif olması için,

$$1+c-2r-(1+c)r^2 > 0$$

olmalıdır. Bu, $|z| = r < r_1$ için gerçekleşir.

Her $c = 1, 2, 3, \dots$ için sonucun kesin olduğunu göstermek amacıyla, $F(z) = -z - \log(1 - z)$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu hâlde,

$$F'(z) = -1 + \frac{2}{1 - z} = \frac{1 + z}{1 - z}$$

ve

$$\operatorname{Re} F'(z) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1 + z}{1 - z} \right\} = \frac{1 - |z|^2}{|1 - z|^2} > 0$$

dir. Bu nedenle,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z^{1-c}}{1+c} [z^{c+1} - 2z^c \log(1 - z)]' \\ &= \frac{1}{1+c} \left[\frac{(c+1)z^2 - (c-1)z}{1-z} - 2c \log(1 - z) \right] \end{aligned}$$

ve

$$f'(z) = \frac{1}{1+c} \left[\frac{1+c+2z - (1+c)z^2}{(1-z)^2} \right]$$

olur. Buradan da,

$$f'(z) = \frac{1}{1+c} \left[\frac{1+c+2z - (1+c)z^2}{(1-z)^2} \right] = 0 \Rightarrow z = -r_1$$

olur. Bu hâlde, $|z| < r$, $r > r_1$ için $f'(z) \notin P$ dir. ■

4.4 Bazı İntegral Operatörleri

Bu bölümde $f_i(z) \in A$ ve $\gamma_i > 0$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ olmak üzere D.Breaz ve N.Breaz tarafından verilen

$$F_n[f](z) = \int_0^z \left(\frac{f_1(t)}{t} \right)^{\gamma_1} \dots \left(\frac{f_n(t)}{t} \right)^{\gamma_n} dt$$

integral operatörü ve D.Breaz, S.Owa ve N. Breaz tarafından verilen

$$F_{\gamma_1, \dots, \gamma_n}[f](z) = \int_0^z [f'_1(t)]^{\gamma_1} \dots [f'_n(t)]^{\gamma_n} dt$$

integral operatörü arasındaki ilişki incelenecektir. ([6], [7]) Bu operatörlerin $S^*(\alpha)$ ve $K(\alpha)$ sınıflarındaki özelliklerini incelemek için öncelikle pre-Schwarzian türevi ve operatör normu tanımları verilecektir.

Tanım 4.5 (Düzgün Yerel Yalınkatlık) : $f \in H(D)$ olsun. $\rho \in \mathbb{R}^+$, $a \in D$ olmak üzere f , her $B(a, \rho) = \left\{ z \in D : \left| \frac{z-a}{z-\bar{a}} \right| < \tanh \rho \right\}$ hiperbolik diskinde yalınkat ise f fonksiyonuna düzgün yerel yalınkat fonksiyon denir.

Tanım 4.6 (Pre-Schwarzian türevi): $f \in H(D)$ ve yerel yalınkat olsun.

$$T_f = \frac{f''}{f'}$$

fonksiyonuna f fonksiyonunun pre-Schwarzian türevi denir. T_f fonksiyonun normu aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\|T_f\| = \sup_{z \in D} (1 - |z|^2) |T_f|$$

Yar.Teorem 4.10 f fonksiyonunun D de düzgün yerel yalınkat olması için gerek ve yeter koşul, $T_f = \frac{f''}{f'}$ hiperbolik sınırlı ve $\|T_f\|$ in sonlu olmasıdır [25] .

Becker in yalınkatlık kriterine göre;

$f \in H(D)$ olsun. Eğer $\|T_f\| \leq 1$ ise f yalınkattır.

$f \in H(D)$ ve yerel yalınkat olsun. Eğer $\|T_f\| \leq 2$ ise f sınırlıdır [3].

Yar.Teorem 4.11 $f \in H_u(D)$ ise $\|T_f\| \leq 6$ dir [3].

İspat: Yar.Teorem 4.5 den, f fonksiyonu D de yalınkat ise $\left| \frac{f''(z)}{f'(z)} \right| \leq \frac{6}{1-|z|^2}$ dir.
Buradan

$$\|T_f\| = \sup_{z \in D} (1-|z|^2) \left| \frac{f''}{f'} \right| \leq 6$$

elde edilir. ■

Yar.Teorem 4.12 $\alpha \in [0, 1)$ olsun. $f \in S^*(\alpha)$ olması için gerek ve yeter koşul,
 $g(z) = z \left[\frac{f(z)}{z} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \in S^*$ olmasıdır ($z \in D$).

İspat: $f \in S^*(\alpha)$ ise $\operatorname{Re} \left\{ \frac{zf'}{f} \right\} > \alpha$ dir.

$$g'(z) = \left[\frac{f(z)}{z} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \left\{ 1 + \frac{1}{1-\alpha} \left[\frac{f(z)}{z} \right]^{-1} \left[\frac{zf' - f}{z} \right] \right\}$$

$$\frac{zg'(z)}{g(z)} = 1 + \frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{zf'}{f} - 1 \right)$$

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{zg'}{g} \right\} > 1 + \frac{1}{1-\alpha} (\alpha - 1) = \alpha$$

ve böylece $g \in S^*$ dir.

Tersine $g \in S^*$ olsun. Buradan $\operatorname{Re} \left\{ \frac{zg'}{g} \right\} > \alpha$ olur. Ayrıca

$$\frac{zg'(z)}{g(z)} = 1 + \frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{zf'}{f} - 1 \right)$$

gerçeklenir. Hipotez gereği

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{zg'}{g} \right\} = 1 + \frac{1}{1-\alpha} \left[\operatorname{Re} \left\{ \frac{zf'}{f} \right\} - 1 \right] > \alpha$$

eşitsizliği sağlandığından $\operatorname{Re} \left\{ \frac{zf'}{f} \right\} > \alpha$ elde edilir. Böylece $f \in S^*(\alpha)$ olur. ■

Teorem 4.25 $\alpha \in [0, 1)$ ve $f \in S$ olsun. $\|T_f\| = \sup_{z \in D} (1-|z|^2) |T_f|$ olmak üzere

$$1) \operatorname{Re} \frac{zf'}{f} > \alpha \text{ ise } \|T_f\| \leq 6 - 4\alpha$$

$$2) \operatorname{Re} \left\{ 1 + \frac{zf''}{f'} \right\} > \alpha \text{ ise } \|T_f\| \leq 4(1-\alpha)$$

gerçeklenir [26] .

Teorem 4.26 $f \in H_u(D)$ ve $\Upsilon[f](z) = \int_0^z \frac{f(\zeta)}{\zeta} d\zeta$ Alexander tarafından ve-rilen integral operatörü olsun. $f \in S^*(\alpha) \Leftrightarrow \Upsilon[f] \in K(\alpha)$ dır [2] .

İspat: $f \in S^*(\alpha)$ ve $\Upsilon[f](z) = F(z)$ olsun.

$$\begin{aligned} F'(z) &= \frac{f(z)}{z} \\ \log F'(z) &= \log f(z) - \log z \\ \operatorname{Re} \left\{ 1 + \frac{zF''(z)}{F'(z)} \right\} &= \operatorname{Re} \left\{ \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} > \alpha \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla $F \in K(\alpha)$ dır.

Tersine $F \in K(\alpha)$ olsun.

$$\operatorname{Re} \left\{ 1 + \frac{zF''(z)}{F'(z)} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{zf'}{f} \right\} > \alpha$$

eşitsizliği gerçekleştiğinden $f \in S^*(\alpha)$ olur. ■

$\gamma \in \mathbb{C}$ olmak üzere Kim ve Merkes tarafından verilen lineer olmayan integral operatörü

$$\Upsilon_\gamma[f](z) = \int_0^z \left(\frac{f(\zeta)}{\zeta} \right)^\gamma d\zeta \quad (4.22)$$

biçimindedir.[21]

$f_i(z) \in A$ ve $\gamma_i > 0$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ olmak üzere D.Breaz ve N.Breaz tarafından verilen integral operatörü,

$$F_n[f](z) = \int_0^z \left(\frac{f_1(t)}{t} \right)^{\gamma_1} \dots \left(\frac{f_n(t)}{t} \right)^{\gamma_n} dt \quad (4.23)$$

biçimindedir.[6]

$\gamma \in \mathbb{C}$ ve $f \in A$ olmak üzere Kim, Ponnusamy ve Sugawa tarafından verilen integral operatörü;

$$l_\gamma[f](z) = \int_0^z [f'(t)]^\gamma dt$$

biçimindedir.[14]

Daha sonra D. Breaz, S. Owa ve N. Breaz tarafından fonksiyon türevleri ile verilen integral operatörü;

$$F_{\gamma_1, \dots, \gamma_n}[f](z) = \int_0^z [f'_1(t)]^{\gamma_1} \dots [f'_n(t)]^{\gamma_n} dt \quad (4.24)$$

biçimindedir.[7]

$K(\alpha)$ ve $S^*(\alpha)$ sınıflarında F_n ve $F_{\gamma_1, \dots, \gamma_n}$ arasındaki ilişkiyi gösterelim.

Teorem 4.27 $\gamma_i > 0$, $0 \leq \alpha_i < 1$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ olmak üzere (4.23) ve (4.24) ile verilen integral operatörleri için

$$F_n(S^*) = F_{(1-\alpha_1)\gamma_1, \dots, (1-\alpha_n)\gamma_n}(K)$$

dir.[19]

İspat: $f \in F_n(S^*)$ olsun. O hâlde $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ için

$$f(z) = \int_0^z \left(\frac{g_1(t)}{t} \right)^{\gamma_1} \dots \left(\frac{g_n(t)}{t} \right)^{\gamma_n} dt$$

olacak biçimde $g_i(z) \in S^*(\alpha_i)$ vardır.

$g_i(z) \in S^*(\alpha_i)$ olduğundan Yar. Teorem 4.12'den

$$z \left[\frac{g_i(z)}{z} \right]^{\frac{1}{1-\alpha_i}} = s_i(z) \in S^*$$

dir. Dolayısıyla,

$$f(z) = \int_0^z \left(\frac{s_1(t)}{t} \right)^{(1-\alpha_1)\gamma_1} \dots \left(\frac{s_n(t)}{t} \right)^{(1-\alpha_n)\gamma_n} dt$$

dir. $s_i(z) \in S^* \Leftrightarrow s_i(z) = zu'_i(z)$ olacak biçimde $u_i \in K$ fonksiyonu vardır. Üstteki eşitlikte yerine yazılırsa;

$$f(z) = \int_0^z (u'_1(t))^{(1-\alpha_1)\gamma_1} \dots (u'_n(t))^{(1-\alpha_n)\gamma_n} dt$$

ve böylece

$$f(z) \in F_{(1-\alpha_1)\gamma_1, \dots, (1-\alpha_n)\gamma_n}(K)$$

olur. Sonuç olarak;

$$F_n(S^*) \subset F_{(1-\alpha_1)\gamma_1, \dots, (1-\alpha_n)\gamma_n}(K) \quad (4.25)$$

dir. Tersine , $f \in F_{(1-\alpha_1)\gamma_1, \dots, (1-\alpha_n)\gamma_n}(K)$ alalım. O hâlde, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ için

$$f(z) = \int_0^z (u'_1(t))^{(1-\alpha_1)\gamma_1} \dots (u'_n(t))^{(1-\alpha_n)\gamma_n} dt$$

olacak biçimde $u_i \in K$ vardır. $u_i \in K$ olduğundan $s_i(z) = zu'_i(z) \in S^*$ dir.

$$f(z) = \int_0^z \left(\frac{s_1(t)}{t} \right)^{(1-\alpha_1)\gamma_1} \cdots \left(\frac{s_n(t)}{t} \right)^{(1-\alpha_n)\gamma_n} dt$$

biçiminde yazılabilir. $s_i(z) \in S^*$ olduğundan Yar.Teorem 4.12' den

$$\frac{s_i(z)}{z} = \left[\frac{g_i(z)}{z} \right]^{\frac{1}{1-\alpha_i}}$$

olacak biçimde, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ için $g_i(z) \in S^*(\alpha_i)$ vardır.

$$f(z) = \int_0^z \left(\frac{g_1(t)}{t} \right)^{\gamma_1} \cdots \left(\frac{g_n(t)}{t} \right)^{\gamma_n} dt$$

dir. Böylece $f(z) \in F_n(S^*)$ dir. Buradan da,

$$F_{(1-\alpha)\gamma_1, \dots, (1-\alpha)\gamma_n}(K) \subset F_n(S^*) \quad (4.26)$$

dir. Sonuç olarak (4.25) ve (4.26) den

$$F_n(S^*) = F_{(1-\alpha)\gamma_1, \dots, (1-\alpha)\gamma_n}(K)$$

elde edilir. ■

Teorem 4.26 da $n = 1$ alınırse aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 4.4 $\gamma_1 = \gamma > 0$, $0 \leq \alpha_1 = \alpha < 1$ olmak üzere

$$F_1(S^*) = F_{(1-\alpha)\gamma_1}(K)$$

dir.

Şimdi Pre-Schwarzian türevini ve Teorem 4.25 i ve Becker yalınkatlık kriterini kullanarak $F_{\gamma_1, \dots, \gamma_n}$ integral operatörünün bazı özelliklerini göstereceğiz.

Teorem 4.28 $\gamma_i > 0$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $f_i \in A$ ve $F_{\gamma_1, \dots, \gamma_n}$ fonksiyonu D de yerel yalınkat olsun.

- 1) $\|T_{f_i}\| \leq \frac{1}{\sum_{i=1}^n \gamma_i}$ ise $F_{\gamma_1, \dots, \gamma_n}$ yalınkattır.
- 2) $\|T_{f_i}\| \leq \frac{2}{\sum_{i=1}^n \gamma_i}$ ise $F_{\gamma_1, \dots, \gamma_n}$ sınırlıdır [19].

İspat: $\left\| T_{F_{\gamma_1, \dots, \gamma_n}} \right\| = \sup_{z \in D} (1 - |z|^2) \left| T_{F_{\gamma_1, \dots, \gamma_n}} \right|$ olduğundan,

$$\left\| T_{F_{\gamma_1, \dots, \gamma_n}} \right\| = \sup_{z \in D} (1 - |z|^2) \left| \frac{\left(\int_0^z [f_1'(t)]^{\gamma_1} \dots [f_n'(t)]^{\gamma_n} dt \right)''}{\left(\int_0^z [f_1'(t)]^{\gamma_1} \dots [f_n'(t)]^{\gamma_n} dt \right)'} \right|$$

dir. $F'(z) = [f_1'(z)]^{\gamma_1} \dots [f_n'(z)]^{\gamma_n}$ olmak üzere;

$$\log F'(z) = \gamma_1 \log f_1'(z) + \dots + \gamma_n \log f_n'(z)$$

biçimindedir. $\frac{F''}{F'} = \sum_{i=1}^n \gamma_i \frac{f_i''}{f_i'}$ olur. Böylece,

$$\begin{aligned} \left\| T_{F_{\gamma_1, \dots, \gamma_n}} \right\| &= \sup_{z \in D} (1 - |z|^2) \left| \frac{F''}{F'} \right| \\ &= \sup_{z \in D} (1 - |z|^2) \left| \sum_{i=1}^n \gamma_i \frac{f_i''}{f_i'} \right| \\ &\leq \sup_{z \in D} (1 - |z|^2) \sum_{i=1}^n \gamma_i \left| \frac{f_i''}{f_i'} \right| \\ &= \sum_{i=1}^n \gamma_i \sup_{z \in D} (1 - |z|^2) \left| \frac{f_i''}{f_i'} \right| \\ &= \sum_{i=1}^n \gamma_i \|T_{f_i}\| \end{aligned} \tag{4.27}$$

dir. Eğer $\|T_f\| \leq \frac{1}{\sum_{i=1}^n \gamma_i}$ olursa,

$$\left\| T_{F_{\gamma_1, \dots, \gamma_n}} \right\| \leq \sum_{i=1}^n \gamma_i \frac{1}{\sum_{i=1}^n \gamma_i} = 1$$

gerçeklenir. Böylece $F_{\gamma_1, \dots, \gamma_n}$ yalınkat olur.

Eğer $\|T_f\| \leq \frac{2}{\sum_{i=1}^n \gamma_i}$ olursa,

$$\left\| T_{F_{\gamma_1, \dots, \gamma_n}} \right\| \leq \sum_{i=1}^n \gamma_i \frac{2}{\sum_{i=1}^n \gamma_i} = 2$$

gerçeklenir. Buradan $F_{\gamma_1, \dots, \gamma_n}$ sınırlı olur. ■

Teorem 4.29 $f_i \in S$ ve $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ olsun.

- 1) $f_i \in S^*(\beta_i)$ ise $\left\| T_{F_{\gamma_1, \dots, \gamma_n}} \right\| \leq 2 \sum_{i=1}^n \gamma_i (3 - 2\beta_i)$
- 2) $f_i \in K(\beta_i)$ ise $\left\| T_{F_{\gamma_1, \dots, \gamma_n}} \right\| \leq 4 \sum_{i=1}^n \gamma_i (1 - \beta_i)$ olur [19].

İspat: $\|T_{F_{\gamma_1, \dots, \gamma_n}}\| \leq \sum_{i=1}^n \gamma_i \|T_{f_i}\|$ olduğu (4.27) de gösterildi. Teorem 4.25 gereği $i = 1, 2, \dots, n$ için $f_i \in S^*(\beta_i)$ ise $\|T_{f_i}\| \leq (6 - 4\beta_i)$ dir. Buradan

$$\begin{aligned} \|T_{F_{\gamma_1, \dots, \gamma_n}}\| &\leq \sum_{i=1}^n \gamma_i (6 - 4\beta_i) \\ &= 2 \sum_{i=1}^n \gamma_i (3 - 2\beta_i) \end{aligned}$$

gerçeklenir. Eğer $i = 1, 2, \dots, n$ için

$f_i \in K_i(\beta)$ ise $\|T_{f_i}\| \leq 4(1 - \beta_i)$ dir. O hâlde,

$$\|T_{F_{\gamma_1, \dots, \gamma_n}}\| \leq 4 \sum_{i=1}^n \gamma_i (1 - \beta_i)$$

elde edilir. ■

Sonuç 4.5 $f_i \in S$ ve $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ olsun.

- 1) $f_i \in S^*(\beta)$ ise $\|T_{F_{\gamma_1, \dots, \gamma_n}}\| \leq 2(3 - 2\beta) \sum_{i=1}^n \gamma_i$
- 2) $f_i \in K(\beta)$ ise $\|T_{F_{\gamma_1, \dots, \gamma_n}}\| \leq 4(1 - \beta) \sum_{i=1}^n \gamma_i$ olur.

İspat: Teorem 4.27 de $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_n = \beta$ alınarak gösterilir. ■

Teorem 4.27 de ve Teorem 4.28 de $n = 1$ alınırsa aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

Sonuç 4.6 $\gamma_1 > 0$ ve $f_1 \in A$ olsun. F_{γ_1} in D de yerel yalınkat olduğunu varsayalım.

- 1) $\|T_{f_1}\| \leq \frac{1}{\gamma_1}$ ise F_{γ_1} yalınkattır.
- 2) $\|T_{f_1}\| \leq \frac{2}{\gamma_1}$ ise F_{γ_1} sınırlıdır.

Sonuç 4.7 $\gamma_1 > 0$ ve $f_1 \in S$ olsun.

- 1) $f_1 \in S^*(\beta_1)$ ise $\|T_{F_{\gamma_1}}\| \leq 2\gamma_1(3 - 2\beta_1)$
- 2) $f_1 \in K(\beta_1)$ ise $\|T_{F_{\gamma_1}}\| \leq 4\gamma_1(1 - \beta_1)$ olur.

4.5 Türev Operatörü ile Tanımlanan İntegral Operatörleri

Bu bölümde Salagean ve Al-Oboudi türev operatörü tanımları verilerek bu türev operatörleriyle tanımlanan integral operatörleri incelenecektir.

Tanım 4.7 $f \in H(D)$ ve $n \in \mathbb{N}_0$ için Salagean türev operatörü aşağıdaki gibi tanımlanır.[1]

- 1) $D^0 f(z) = f(z)$
- 2) $D^1 f(z) = Df(z) = zf'(z)$
- 3) $D^n f(z) = D(D^{n-1}f(z))$

Sonuç 4.8 $k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} nz^n$ için

$$D^n f(z) = \left[\underbrace{(k * k * \dots * k)}_{n \text{ kez}} * f \right] (z) \quad f \in H(D)$$

biçimindedir.

Tanım 4.8 $f \in A$, $\delta \geq 0$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere Al-Oboudi türev operatörü aşağıdaki gibi tanımlanır.[1]

- 1) $D^0 f(z) = f(z)$
- 2) $D^1 f(z) = (1 - \delta)f(z) + \delta zf'(z) = D_\delta f(z)$
- 3) $D^n f(z) = D_\delta(D^{n-1}f(z))$

$$D^n f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} [1 + (k-1)\delta]^n a_k z^k, D^n f(0) = 0$$

biçimindedir. Özel olarak $\delta = 1$ alınırsa Salagean türev operatörü elde edilir.

4.5.1 Al-Oboudi türev operatörü ile tanımlanan integral operatörü

Al-Oboudi türev operatörünü kullanarak bir integral operatörü tanımlayalım.

Tanım 4.9 $f_i \in A$, $n, m \in \mathbb{N}_0$, $\alpha_i \in C$, $1 \leq i \leq m$ olsun. D^n Al-Oboudi türev operatörü olmak üzere;

$$\begin{aligned} I(f_1, \dots, f_m)(z) &: A^m \rightarrow A \\ I(f_1, \dots, f_m)(z) &: = \int_0^z \left(\frac{D^n f_1(t)}{t} \right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{D^n f_m(t)}{t} \right)^{\alpha_m} dt \end{aligned}$$

biçimindedir [8].

Uyarı 4.1 1) $n = 0$, $m = 1$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_m = 0$ ve

$$D^0 f_1(z) := D^0 f(z) = f(z) \in A \text{ için}$$

$$I(f)(z) := \int_0^z \frac{f(t)}{t} dt$$

Alexander integral operatörü olur.

2) $n = 0$, $m = 1$, $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha \in [0, 1]$, $\alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_m = 0$ ve

$$D^0 f_1(z) := D^0 f(z) = f(z) \in S \text{ için}$$

$$I_\alpha(f)(z) := \int_0^z \left(\frac{f(t)}{t} \right)^\alpha dt$$

(4.22) de verilen integral operatörü olur.

3) $n = 0$, $m \in \mathbb{N}_0$, $\alpha_i \in \mathbb{C}$, $1 \leq i \leq m$ ve $D^0 f_i(z) := f_i(z) \in S$ için

$$I(f_1, \dots, f_m)(z) := \int_0^z \left(\frac{f_1(t)}{t} \right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{f_m(t)}{t} \right)^{\alpha_m} dt$$

(4.23) da verilen integral operatörü olur.

Yar.Teorem 4.13 $f \in A$ ve $(1 - |z|^2) \left| \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right| \leq 1$ ise $f \in H_u(D)$ dir.[3]

Teorem 4.30 $f_i \in A$, $n, m \in \mathbb{N}_0$, $\alpha_i \in \mathbb{C}$, $1 \leq i \leq m$ olsun.

$$\left| \frac{z(D^n f_i(z))'}{D^n f_i(z)} - 1 \right| \leq 1 \text{ ve } |\alpha_1| + \dots + |\alpha_m| \leq 1$$

ise $I(f_1, \dots, f_m)(z) \in S$ dir.[8]

İspat: $f_i \in A$, $1 \leq i \leq m$ için,

$$\frac{D^n f_i(z)}{z} = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} [1 + (k-1)\delta]^n a_{k,i} z^{k-1}$$

$$\frac{D^n f_i(z)}{z} \neq 0$$

olur. Ayrıca

$$I'(f_1, \dots, f_m)(z) = \left(\frac{D^n f_1(z)}{z} \right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{D^n f_m(z)}{z} \right)^{\alpha_m}$$

$$\ln I'(f_1, \dots, f_m)(z) = \alpha_1 \ln \frac{D^n f_1(z)}{z} + \dots + \alpha_m \ln \frac{D^n f_m(z)}{z}$$

$$\frac{I''(f_1, \dots, f_m)(z)}{I'(f_1, \dots, f_m)(z)} = \sum_{i=1}^m \alpha_i \left[\frac{(D^n f_i(z))'}{D^n f_i(z)} - \frac{1}{z} \right]$$

$$\left| \frac{zI''(f_1, \dots, f_m)(z)}{I'(f_1, \dots, f_m)(z)} \right| \leq \sum_{i=1}^m |\alpha_i| \left| \frac{z(D^n f_i(z))'}{D^n f_i(z)} - 1 \right|$$

gerçeklenir. $\left| \frac{z(D^n f_i(z))'}{D^n f_i(z)} - 1 \right| \leq 1$ ve $|\alpha_1| + \dots + |\alpha_m| \leq 1$ olduğundan

$$\left| \frac{zI''(f_1, \dots, f_m)(z)}{I'(f_1, \dots, f_m)(z)} \right| \leq \sum_{i=1}^m |\alpha_i| \leq 1$$

ve buradan

$$(1 - |z|^2) \left| \frac{zI''(f_1, \dots, f_m)(z)}{I'(f_1, \dots, f_m)(z)} \right| \leq 1 - |z|^2 \leq 1$$

ve böylece $I(f_1, \dots, f_m)(z) \in S$ elde edilir. ■

Sonuç 4.9 $f_i \in A$, $n, m \in \mathbb{N}_0$, $\alpha_i > 0$, $1 \leq i \leq m$ olsun. Eğer

$$\left| \frac{z(D^n f_i(z))'}{D^n f_i(z)} - 1 \right| \leq 1 \text{ ve } \alpha_1 + \dots + \alpha_m \leq 1$$

ise $I(f_1, \dots, f_m)(z) \in S$ dir. [8]

Teorem 4.31 $f_i \in A$, $n, m \in \mathbb{N}_0$, $\alpha_i \in C$, $1 \leq i \leq m$ olsun. Eğer

- 1) $|D^n f_i(z)| \leq 1$
- 2) $\left| \frac{z^2(D^n f_i(z))'}{(D^n f_i(z))^2} - 1 \right| \leq 1$
- 3) $|\alpha_1| + \dots + |\alpha_m| \leq \frac{1}{3}$ ise $I(f_1, \dots, f_m)(z) \in S$ dir. [8]

İspat: I nin yalınkat olması için $(1 - |z|^2) \left| \frac{zI''(f_1, \dots, f_m)(z)}{I'(f_1, \dots, f_m)(z)} \right| \leq 1$ olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned} (1 - |z|^2) \left| \frac{zI''(f_1, \dots, f_m)(z)}{I'(f_1, \dots, f_m)(z)} \right| &\leq (1 - |z|^2) \sum_{i=1}^m |\alpha_i| \left| \frac{z(D^n f_i(z))'}{D^n f_i(z)} - 1 \right| \\ &\leq (1 - |z|^2) \sum_{i=1}^m \left[|\alpha_i| \left| \frac{z(D^n f_i(z))'}{D^n f_i(z)} \right| + |\alpha_i| \right] \\ &= (1 - |z|^2) \sum_{i=1}^m \left[|\alpha_i| \left| \frac{z^2(D^n f_i(z))'}{(D^n f_i(z))^2} \right| \frac{|D^n f_i(z)|}{|z|} + |\alpha_i| \right] \end{aligned}$$

$|D^n f_i(z)| \leq 1$ ve $D^n f(0) = 0$ olduğundan Schwarz lemmasının koşulları sağlanır.

$|D^n f_i(z)| \leq |z|$ olur.

$$\begin{aligned}
(1 - |z|^2) \left| \frac{z I''(f_1, \dots, f_m)(z)}{I'(f_1, \dots, f_m)(z)} \right| &\leq (1 - |z|^2) \sum_{i=1}^m \left[|\alpha_i| \left| \frac{z^2 (D^n f_i(z))'}{(D^n f_i(z))^2} \right| + |\alpha_i| \right] \\
&\leq (1 - |z|^2) \sum_{i=1}^m \left[|\alpha_i| \left| \frac{z^2 (D^n f_i(z))'}{(D^n f_i(z))^2} - 1 \right| + 2 |\alpha_i| \right] \\
&\leq (1 - |z|^2) \sum_{i=1}^m [|\alpha_i| + 2 |\alpha_i|] \\
&= 3(1 - |z|^2) \sum_{i=1}^m |\alpha_i| \\
&\leq 1 - |z|^2 \\
&\leq 1 \quad (z \in D)
\end{aligned}$$

gerçeklenir. Buradan $I(f_1, \dots, f_m)(z) \in H_u(D)$ olur. Ayrıca $I(f_1, \dots, f_m)(0) = 0$ ve $I'(f_1, \dots, f_m)(0) = 1$ olduğundan normalizasyon koşulunu sağlar. Dolayısıyla $I(f_1, \dots, f_m)(z) \in S$ dir. ■

4.5.2 Al-Oboudi türev operatörü ile tanımlanan özel sınıflar

$S^n(\delta, \alpha)$ sınıfı

Tanım 4.10 $f \in A$ olsun. $0 \leq \alpha < 1$, $\delta \geq 0$, $n \in \mathbb{N}_0$ için D^n , Al-Oboudi türev operatörü olmak üzere;

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{z (D^n f(z))'}{D^n f(z)} \right\} > \alpha \quad (z \in D)$$

koşulunu gerçekleyen f fonksiyonların sınıfı $S^n(\delta, \alpha)$ ile gösterilir [9].

$$1) \ n = 0 \text{ için } \operatorname{Re} \left\{ \frac{z (D^0 f(z))'}{D^0 f(z)} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{z f'(z)}{f(z)} \right\} > \alpha \text{ olur. Buradan,}$$

$$S^0(\delta, \alpha) = S^*(\alpha)$$

gerçeklenir.

$$2) \ \delta = 0 \text{ için } \operatorname{Re} \left\{ \frac{z (D^n f(z))'}{D^n f(z)} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{z f'(z)}{f(z)} \right\} > \alpha \text{ olur. Buradan,}$$

$$S^n(0, \alpha) = S^*(\alpha)$$

gerçeklenir. Böylece

$$S^0(\delta, \alpha) = S^n(0, \alpha) = S^*(\alpha)$$

olduğu elde edilir.

$M^n(\delta, \beta)$ sınıfı

$M^n(\delta, \beta)$ sınıfını tanımlamadan önce $M(\beta)$ ve $N(\beta)$ sınıflarının tanımını verelim.

$f \in A$ ve $\beta > 1$ olmak üzere,

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} < \beta \quad (z \in D)$$

koşulunu gerçekleyen f fonksiyonlarının sınıfı $M(\beta)$ ile gösterilir.

$f \in A$ ve $\beta > 1$ olmak üzere,

$$\operatorname{Re} \left\{ 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} < \beta \quad (z \in D)$$

koşulunu gerçekleyen f fonksiyonlarının sınıfı $N(\beta)$ ile gösterilir.

Tanım 4.11 $f \in A$ olsun. $\beta > 1$, $\delta \geq 0$, $n \in \mathbb{N}_0$ için D^n , Al-Oboudi türev operatörü olmak üzere;

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{z(D^n f(z))'}{D^n f(z)} \right\} < \beta \quad (z \in D)$$

koşulunu gerçekleyen f fonksiyonlarının sınıfı $M^n(\delta, \beta)$ ile gösterilir.

$\delta = 0$ veya $n = 0$ için

$$M^0(\delta, \beta) = M^n(0, \beta) = M(\alpha)$$

eşitliği gerçekleşir.

$S^n(\delta, \alpha)$ sınıfında I_n in bazı özellikleri

Teorem 4.32 $1 \leq i \leq m$, $0 \leq \alpha_i < 1$, $\delta \geq 0$, $n \in \mathbb{N}_0$ için $f_i \in S^n(\delta, \alpha)$ olsun. $k_i > 0$ olmak üzere, eğer

$$\sum_{i=1}^m k_i(1 - \alpha_i) \leq 1$$

ise $\lambda = 1 + \sum_{i=1}^m k_i(\alpha_i - 1)$ için $I_n(f_1, \dots, f_m) \in K(\lambda)$ dir.[9]

İspat: $f_i \in A$, $1 \leq i \leq m$ için Teorem 4.29'un ispatında izlenen yol ile

$$\frac{I_n''(f_1, \dots, f_m)(z)}{I_n'(f_1, \dots, f_m)(z)} = \sum_{i=1}^m k_i \left[\frac{(D^n f_i(z))'}{D^n f_i(z)} - \frac{1}{z} \right]$$

eşitliği elde edilir. Buradan

$$\operatorname{Re} \left\{ 1 + \frac{z I_n''(f_1, \dots, f_m)(z)}{I_n'(f_1, \dots, f_m)(z)} \right\} = \sum_{i=1}^m k_i \operatorname{Re} \left\{ \frac{z (D^n f_i(z))'}{D^n f_i(z)} \right\} - \sum_{i=1}^m k_i + 1$$

bulunur. $f_i \in S^n(\delta, \alpha_i)$ olduğundan

$$\operatorname{Re} \left\{ 1 + \frac{z I_n''(f_1, \dots, f_m)(z)}{I_n'(f_1, \dots, f_m)(z)} \right\} > \sum_{i=1}^m k_i \alpha_i - \sum_{i=1}^m k_i + 1 = 1 + \sum_{i=1}^m k_i (\alpha_i - 1)$$

olur. Buradan $\lambda = 1 + \sum_{i=1}^m k_i (\alpha_i - 1)$ için $I_n(f_1, \dots, f_m) \in K(\lambda)$ olur. ■

Sonuç 4.10 $1 \leq i \leq m$, $0 \leq \alpha < 1$, $\delta \geq 0$, $n \in \mathbb{N}_0$ için $f_i \in S^n(\delta, \alpha)$ olsun. $k_i > 0$ olmak üzere, eğer

$$\sum_{i=1}^m k_i \leq \frac{1}{1 - \alpha}$$

ise $\rho = 1 + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^m k_i$ için $I_n(f_1, \dots, f_m) \in K(\rho)$ dir.

İspat: Teorem 4.31 da $\alpha_1 = \dots = \alpha_m = \alpha$ alınarak elde edilir. ■

Sonuç 4.11 $0 \leq \alpha < 1$, $\delta \geq 0$, $n \in \mathbb{N}_0$ için $f \in S^n(\delta, \alpha)$ olsun. $0 < k \leq \frac{1}{1 - \alpha}$ olmak üzere

$$I_n(f)(z) = \int_0^z \left(\frac{D^n f(t)}{t} \right)^k \in K(1 + k(\alpha - 1))$$

dir.

İspat: Sonuç 4.10 da $m = 1$ ve $k_1 = k$ alınarak elde edilir. ■

$M^n(\delta, \beta)$ sınıfında I_n in bazı özellikleri

Teorem 4.33 $1 \leq i \leq m$, $\beta_i > 1$, $f_i \in M^n(\delta, \beta_i)$ olsun. $k_i > 0$ için $\lambda = 1 + \sum_{i=1}^m k_i (\beta_i - 1)$ olmak üzere $I_n(f_1, \dots, f_m) \in N(\lambda)$ dir. [9]

İspat:

$$\begin{aligned}
1 + \frac{z I_n''(f_1, \dots, f_m)(z)}{I_n'(f_1, \dots, f_m)(z)} &= 1 + \sum_{i=1}^m k_i \left[\frac{z (D^n f_i(z))'}{D^n f_i(z)} - 1 \right] \\
\operatorname{Re} \left\{ 1 + \frac{z I_n''(f_1, \dots, f_m)(z)}{I_n'(f_1, \dots, f_m)(z)} \right\} &= 1 + \sum_{i=1}^m k_i \operatorname{Re} \left\{ \frac{z (D^n f_i(z))'}{D^n f_i(z)} \right\} - \sum_{i=1}^m k_i \\
&< 1 + \sum_{i=1}^m k_i \beta_i - \sum_{i=1}^m k_i = 1 + \sum_{i=1}^m k_i (\beta_i - 1)
\end{aligned}$$

Buradan $\lambda = 1 + \sum_{i=1}^m k_i (\beta_i - 1)$ olmak üzere $I_n(f_1, \dots, f_m) \in N(\lambda)$ olur. ■

Sonuç 4.12 $1 \leq i \leq m, \beta > 1, f_i \in M^n(\delta, \beta)$ olsun. $k_i > 0$ için $\rho = 1 + (\beta - 1) \sum_{i=1}^m k_i$ olmak üzere $I_n(f_1, \dots, f_m) \in N(\rho)$ dir.

İspat: Teorem 4.32. de $\beta_1 = \dots = \beta_m = \beta$ alınarak kolayca görülür. ■

Sonuç 4.13 $\beta > 1, f \in M^n(\delta, \beta)$ olsun. $k > 0$ için $I_n(f)(z) \in N(1 + k(\beta - 1))$ dir.

5 SON DEĞERLENDİRMELER VE ÖNERİLER

Bu çalışmada öncelikle yalınkatlık kavramı ve kriterleri verilerek analitik fonksiyonların özel sınıfları incelendi. Birinci, ikinci, üçüncü tip integral operatörleri ile analitik fonksiyonların birtakım koşullar altında hangi sınıflara ait olduğu gösterildi. Bu integral operatörleri için ters problemler verildi. Ayrıca birinci ve ikinci tür integral operatörünün özel sınıfların genelleştirilmiş hali için incelenmektedir. Bu çalışmada genelleştirilmiş birinci tip integral operatöründe Salegean türev operatörü ve Al-Oboudi türev operatörü ile tanımlanan integral operatörleri ve özellikleri incelendi.

Her geçen gün yeni sınıfların ve integral operatörlerinin bulunması bu konudaki çalışmaların sürdürülebileceğini ortaya koymaktadır. Bundan sonra yapılacak çalışmalarda yeni integral operatörleri ve özel sınıflar bulunarak incelemeler devam ettirilebilir.

- [1] *Al-Oboudi, F.M., On univalent functions defined by a generalized Salagean operator, Int. Journal of Math. and Math. Sciences, vol. 2004, no.27 2004 1429-1436*
- [2] *Alexander, J.W., Functions which map the interior of the unit circle upon simple regions, Ann. of Math, 17 1915 12-22*
- [3] *Becker, J., Lownersche differentialgleichung und quasikonform fortstzbare schlichte funktionen, J. Reine Angew, Math. 255, 1972 23-43*
- [4] *Bernardi, S.D., Convex and starlike univalent functions, Trans. Amer. Math. Soc. 135, 1969 429-446*
- [5] *Bernardi, S.D., The radius of univalence of certain analytic functions, Proc. Amer. Math. Soc. 24, 1969 312-318*
- [6] *Breaz, D., Breaz N., Two integral operators, Studia Universitatis Babes-Bolyai, Mathematica, 47:3 2002 13-19*
- [7] *Breaz, D., Owa, S. ve Breaz, N., A new integral univalent operator, Acta Universitatis Apulensis, 16 2008 11-16*
- [8] *Bulut, S., Sufficient Conditions for Univalence of an Integral Operator Defined by Al-Oboudi Differential Operator, J. inequal. Appl., Art.ID. 957042 2008 1-5*
- [9] *Bulut, S., Some Properties for Integral Operator Defined By Al-Oboudi Differential Operator, J. inequal. Appl., Math. 9:4 Art. 115 2008*
- [10] *Causey, W.M., The close-to-convexity and univalence of an integral, Math. Zeitschr. 99, 1967 207-212*

- [11] *Duren, P.L., Univalent Functions, Springer Verlag, New York Inc. 1966*
- [12] *Goodman, A.W., Univalent Functions, Vols. I,II. Mariner Publishing Comp., Tampa Florida, 1983*
- [13] *Goodman, A.W., On the Schwarz Christoffel Transformation and p-valent functions, Trans. Amer. Math. Soc. 68, 1950 204-223*
- [14] *Kim, Y.J., ve Merkes, E.P., On an integral of powers of a spirallike function, Kyungpook Math. J. 12 1972 249-253*
- [15] *Kim, Y.C., Ponnusamy, S., Sugawa, Mapping properties of nonlinear integral operators and pre-Schwarzian derivatives, J. Math. Anal. Appl., 299 2004 433-447*
- [16] *Libera, R.J., Some classes of regular univalent functions, Proc. Amer. Math. Soc., 16, 1965 755-758*
- [17] *Livingston, A.E., On the radius of univalence of certain analytic functions, Proc. Amer. Math. Soc., 27, 1966 352-357*
- [18] *Merkes, E.P. ve Wright, D.J., On the univalence of a certain integral, Proc. Amer. Math. Soc., 27, 1971 97-100*
- [19] *Mohammed, A. ve Darus, M., New properties for certain integral operators, Int. Journal of Math. Analysis, Vol. 4, 2010 2101-2109*
- [20] *Nunokawa, M. Math. Zeitschr., 104, 1968 394-404*
- [21] *Nehari, Z., The Schwarzian Derivative and schlicht functions Bull. Amer. Math. Soc.55, 1949 545-551*
- [22] *Pommerenke, Ch., Univalent Functions, Vandenhoeck and Ruprecht in Göttingen, 1975*

- [23] Royster, W.C., *On the univalence of a certain integral*, *Michigan Math. Journal*, 12, **1965** 385-387.
- [24] Schober, G., *Univalent Functions, Selected Topics Lecture Notes in Math. Vol. 478*, Springer Verlag, Berlin-New York **1975**
- [25] Yamashita, S., *Almost locally univalent functions*, *Monatsh. Math.* 81 **1976** 235-240
- [26] Yamashita, S., *Norm estimates for functions starlike or convex of order α* , *Hokkaido Math. J.* 28 **1999** 217-230

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Fatma ORTAÇ
Doğum Yeri ve Tarihi : Samsun / 17.05.1987
Yabancı Dili : İngilizce
E-Posta : fatmaortacc@gmail.com

Öğrenim Durumu

Derece	Bölüm/Program	Üniversite/Lise	Mezuniyet Yılı
Lise	Fen-Matematik	Y.D.A. Samsun 19 Mayıs Lisesi	2005
Üniversite	Matematik	İstanbul Üniversitesi	2010

İş Deneyimi

Yıl	Firma/Kurum	Görevi
2012	Borusan Lojistik	Stajyer