BAZI TÜRETİLMİŞ GRAFLARIN KOMŞULUK MATRİSLERİ VE STATÜ İNDEKSLERİ

Berke ÖZMEN

T.C.
BURSA ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI TÜRETİLMİŞ GRAFLARIN KOMŞULUK MATRİSLERİ VE STATÜ İNDEKSLERİ

Berke ÖZMEN

Aysun YURTTAŞ GÜNEŞ
(I.Danışman)

İsmail Naci CANGÜL
(II. Danışman)

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA – 2025

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BAZI TÜRETİLMİŞ GRAFLARIN KOMŞULUK MATRİSLERİ VE STATÜ İNDEKSLERİ

Berke ÖZMEN

Bursa Uludağ Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Aysun YURTTAŞ GÜNEŞ
İkinci Danışman: Prof. Dr. İsmail Naci CANGÜL (Bursa Uludağ Üniversitesi)

Bu tezde bazı türetilmiş grafların komşuluk, bitişiklik ve mesafe matrisleri elde edilmiş ve bu matrisler yardımıyla grafların statü indeks hesaplamaları ele alınmıştır.

Bu tez üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, graflarla ilgili temel tanımlara, grafların kullanım alanlarına, graf türlerine ve grafların matrislerine yer verilmiştir. İkinci bölümde, grafların komşuluk, bitişiklik ve mesafe matrisleri arasındaki dönüşümler yardımıyla S_1 ve S_2 statü indeks hesapları verilmiştir. Üçüncü bölümde ise graf türlerinin çekirdek, gölge ve görüntü graflarının ve graf işlemlerinin komşuluk matrisleri bulunmuştur.

Anahtar Kelimeler: çekirdek graf, gölge graf, görüntü graf, statü indeks
2025, IIIV+50 sayfa

ABSTRACT

Master Thesis
ADJACENCY MATRICES AND STATUS INDICES OF SOME DERIVED GRAPHS

Berke ÖZMEN

Bursa Uludağ University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Üyesi Aysun YURTTAŞ GÜNEŞ
Second Supervisor: Prof. Dr. İsmail Naci CANGÜL (Bursa Uludağ University)

In this thesis, neighborhood, adjacency and distance matrices of some derived graphs are obtained and status index calculations of graphs are discussed with the help of these matrices.

This thesis consists of three parts. In the first part, basic definitions about graphs, usage areas of graphs, graph types and graph matrices are given. In the second part, S1 and S2 status index calculations are given with the help of transformations between neighborhood, adjacency and distance matrices of graphs. In the third part, neighborhood matrices of core, shadow and image graphs of graph types and graph operations are found.

Keywords: kernel graph, shadow graph, image graph, status index
2025, IIIV+ 50 pages

ÖNSÖZ ve TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanma sürecinde bana her zaman destek olan, sabırlarını ve anlayışlarını esirgemeyen aileme en derin şükranlarımı sunarım. Özellikle zorlu zamanlarda yanımda olarak bana güç verdiler ve bu başarıya ulaşmamda büyük bir rol oynadılar. Onların sevgisi ve desteği olmasaydı, bu yolculuğu tamamlamak çok daha zor olurdu.

Ayrıca, tez sürecim boyunca bilgi ve deneyimlerini benimle paylaşan, yol gösteren ve her aşamada bana rehberlik eden danışmanım Doç. Dr. Aysun YURTTAŞ GÜNEŞ'e, akademik çevremdeki hocalarım Prof. Dr. İsmail Naci CANGÜL'e ve Doç. Dr. Hacer ÖZDEN AYNA'ya içten teşekkürlerimi sunarım. Onların değerli katkıları ve yapıcı eleştirileri, bu çalışmanın daha nitelikli bir hale gelmesine büyük ölçüde katkı sağlamıştır.

Bunun yanı sıra, arkadaşlarım Duygu Köse'ye ve Yasin Balseven'e ve çalışma arkadaşlarıma da teşekkür etmek isterim. Motivasyonumu yüksek tutmamda, bana ilham vermede ve her zaman yanımda olarak bu süreci daha keyifli hale getirmede büyük payları var. Onların dostlukları ve desteği, bu zorlu süreçte beni ayakta tutan önemli bir güç kaynağı oldu.

Son olarak, bu tezin tamamlanmasında doğrudan veya dolaylı olarak katkısı bulunan herkese minnettarlığımı ifade etmek isterim. Her birinizin desteği ve katkısı, bu başarıya ulaşmamda büyük bir anlam taşıyor. Hepinize sonsuz teşekkürler.

Berke Özmen

…/…/2025

SİMGELER ve KISALTMALAR

Simgeler	**Açıklama**
n	Köşe sayısı
m	Kenar sayısı
$V(G)$	G grafının köşe kümesi
$E(G)$	G grafının kenar kümesi
$G = (V, E)$	G Graf
$\|V(G)\|$	G grafının mertebesi
$\|E(G)\|$	G grafının boyutu
(u, v)	G grafının komşu noktaları
$\mathrm{d}(u, v)$	G grafının noktalarının en kısa uzaklığı
$deg(v_n)$	G grafının derecesi
N_n	n köşeli boş graf
P_n	n köşeli yol graf
C_n	n köşeli çevre graf
K_n	n köşeli tam graf
$K_{n,m}$	İki parçalı tam graf
S_n	n köşeli yıldız graf
W_n	n köşeli tekerlek graf
$T_{r,s}$	Larva grafı
L_n	Merdiven grafı
$W_{n,m}$	Yel değirmeni grafı
$D_{r,s}$	Dostluk grafı
P	Petersen grafı
T_n	Taç grafı
$I_{m\times n}$	m×n birim matris
$J_{m\times n}$	m×n tüm girdileri 1 olan matris
$0_{m\times n}$	m×n tüm girdileri 0 olan matris

Kısaltmalar	**Açıklama**
A	Bitişiklik matrisi
B	Bitişiklik matris
D	Mesafe matrisi
M_1	Birinci Zagreb İndeksi
M_2	İkinci Zagreb İndeksi
W	Wiener İndeksi
S_1	Statü birinci indeksi
S_2	Statü ikinci indeksi
S	Statü matrisi
S	Statü dizisi
deg	Derece dizisi
d	Grafın çapı

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER DİZİNİ

ÇİZELGELER DİZİ Nİ

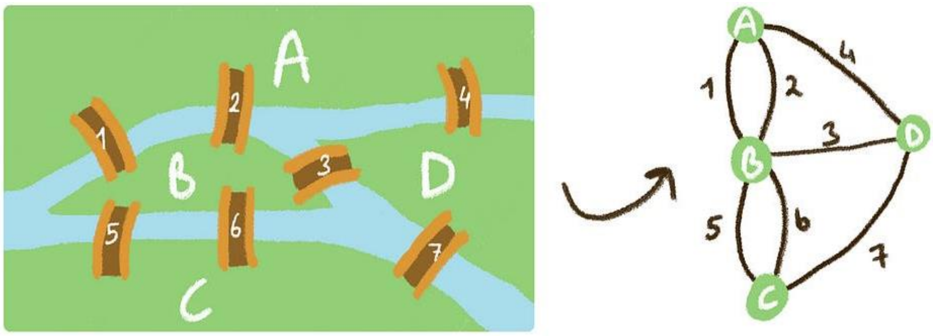
1. GRAFLARA GİRİŞ

Graflarla ilgili serüven, 1736 yılında matematiğin büyük ustalarından Leonhard Euler'in, Königsberg kasabasının sakin sularında yedi köprüyle örülü bir adacık olan Kneigh'in etrafında dönüp dolaşıp başlangıç noktasına geri dönebilir mi sorusuyla başladı.

Şekil 1.1 Königsberg efsanevi yedi köprüsü

Şekil 1.1'de görülen Königsberg ve onun efsanevi yedi köprüsü, sadece bir coğrafyanın değil, aynı zamanda matematik dünyasının da sınırlarını zorluyordu. Euler, bu sorunu bir matematik şölenine dönüştürerek graf teorini temelini atmıştı. Pregel Nehri'nin bu köprülerle bölünen dört bölgeyi aşıp, yedi köprüyü birer kez geçerek başlangıç noktasına dönebilme sorusu sadece Königsberg sakinlerini değil, tüm matematik dünyasını büyülemiştir. Euler'in simgelerle dokuduğu bu matematiksel hikâye, Graf Teori'nin kapılarını aralayarak, matematiksel düşüncenin sınırlarını genişletti. Biggs, Lloyd ve Wilson (1986), bu büyülü anıyı hatırlatarak Euler'in bu serüvenle başlattığı matematiksel devrimi vurguladı.

Bilgisayar bilimleri, ağ tasarımı, ulaşım planlaması gibi birçok alanda Graf Teori'nin izleri görülebilir. Euler'in bu efsanevi hikayesi, matematiğin sadece bir problem çözme aracı olmanın ötesinde bir keşif ve sanat alanı olduğunu vurgulayarak, matematik dünyasına kattığı derinlikle hatırlanmaktadır.

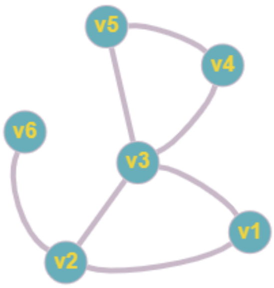


Şekil 1.2. Königsberg'in yedi köprüsü grafı

1.1. Graf ile İlgili Temel Kavramlar

1.1.1. Köşe ve kenar

G = (V, E) ikilisine graf denir. Bir grafta köşe kümesi $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ olmak üzere $|V(G)| = n$ sayısına grafın mertebesi, kenar kümesi $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ olmak üzere $|E(G)| = m$ sayısına grafın boyutu denilir.



Şekil 1.3 Bir grafın temsili

1.1.2. Derece ve omega invaryant

Bir G grafında bir köşeye komşu olan köşelerin sayısına o köşenin derecesi denilir ve $deg(v_i)$ ile ifade edilir. Bir G grafının köşe derecelerinin toplamı kenarının sayısının iki katına eşittir (Euler, 1736). Yani

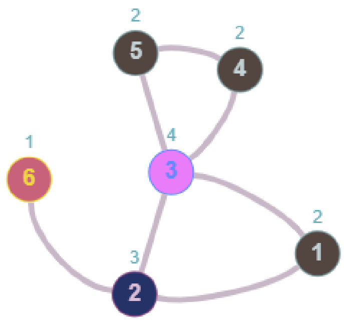
$$2m = \sum_{v_i \in V} deg(v_i) \tag{1.1}$$

olur. $D = \{1^{(a_1)}, 2^{(a_2)}, 3^{(a_3)}, \dots, \Delta^{(a_\Delta)}\}$, ifadesi derece dizisi olarak tanımlanır. Sırasıyla her dereceden kaç tane eleman olduğunu belirtir. Grafın en büyük köşe derecesine grafın maksimum derecesi denir ve Δ ile gösterilir. Omega invaryantı ve devir (yüz) sayısı (Delen, 2019)

$$\Omega(G) = a_3 + 2a_4 + 3a_5 + \cdots + (\Delta - 2)a_\Delta - a_1 = 2(m - n) \tag{1.2}$$

$$r = \frac{\Omega(G)}{2} + c \tag{1.3}$$

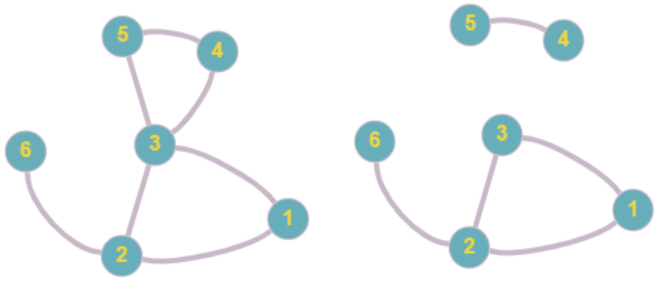
şeklinde verilir. Burada c sayısı grafın bileşen sayısıdır.



Şekil 1.4 Şekil 1.3'deki grafın derece temsili

1.1.3. Basit bağlantılı ve bağlantısız graf

Bir grafta bir köşeden diğer köşeye mutlaka bir patika çizilebilirse bağlantılıdır aksi halde iki veya daha fazla ayrık graftan oluşur.



Şekil 1.5 Şekil 1.3'deki grafın bağlantılı ve bağlantısız temsili

1.1.4. Yönlendirilmiş ve yönlendirilmemiş graflar

V'deki farklı köşelerin sıralı ikililerinden elde edilen kenarlara yönlü kenar denilir. Kenarları yönlü olan grafa yönlü graf adı verilir. Bir yönlü grafta farklı u ve v her bir köşe ikilisi (u.v) ve (v,u) kenarlarından sadece birisi yönlü bir kenar ise bu grafa aynı zamanda yönlendirilmiş graf denir.

Şekil 1.6 Şekil 1.3'deki grafın yönlendirilmiş temsili

1.1.5. Patika, ağaç ve devir grafları

Patika grafı bir köşeden diğer köşeye uzanan bir yoldur. Bu yolda tekrar aynı köşeden geçilmez. Devir grafı verilen başlangıç ve bitiş köşelerinin aynı olduğu patika grafıdır. Devir grafı içermeyen graflara ağaç denir.

Şekil 1.7 Şekil 1.3'deki grafın üzerindeki patika, devir ve bir ağaç grafı

1.1.6. Uzaklık

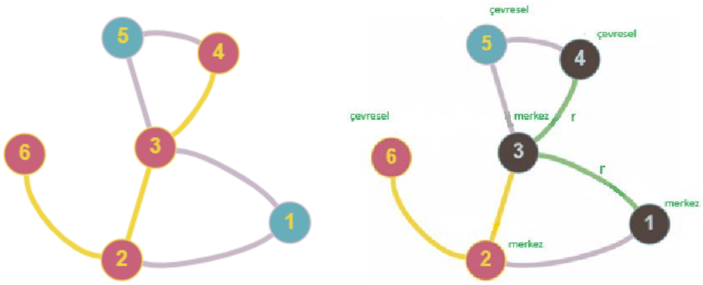
Bir G grafında u ve v köşesi arasında farklı patikalar bulunabilir. Bu patikalardan en kısa olanın uzunluğuna u,v köşeleri arasındaki uzaklık denir ve $d(u, v)$ ile gösterilir.

1.1.7. Çap, yarıçap ve merkez

Bir G grafının merkezi, diğer noktalara olan en kısa toplam yol uzunluğunun en küçük olduğu noktalardır. Bir grafın yarıçapı, grafın genel yapısı ve noktalar arasındaki bağlantıların uzunluklarına bağlı olarak değişir.

Bir grafın köşeleri arasındaki uzaklıkların en büyüğüne G'nin çapı denir ve *çap(G)* veya *d(G)* ile gösterilir. Graf teorisinde "yarıçap", bir grafın merkezinden en uzak noktaya olan en kısa yolun uzunluğunu ifade eder. Yani, bir grafın yarıçapı, graf içindeki herhangi bir nokta ile merkezi nokta arasındaki en kısa yolun uzunluğudur.

Özetle, bir grafın yarıçapı, grafın merkezi köşesinden en uzak köşeye olan en kısa yolun uzunluğunu ifade eder ve grafın topolojik özelliklerini anlamak için kullanılır.
Çap ve yarıçap, bir grafın "genişliği" veya "uzaklığı" hakkında fikir veren ölçütlerdir.

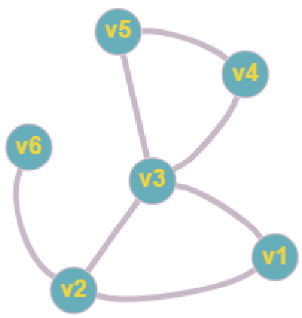


Şekil 1.8 Şekil 1.3’teki grafın merkez, çap ve yarıçapı

1.1.8. Komşuluk matrisi

A(G), komşuluk matrisi graf içindeki köşeler arasındaki bağlantıların ilişkilerini gösterir. Bir A_{nxn} kare matrisinin (i,j) bileşeni, i. köşe ile j. köşe arasında bir kenar varsa, matrisin (i,j) ve (j,i) bileşenleri 1 olur; aksi halde, her ikisi de 0 olur:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & ; i.\, köşe, j.\, köşe\ ile\ bağlıysa \\ 0 & ; i.\, köşe, j.\, köşe\ ile\ bağlı\ \ değilse \end{cases}$$



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

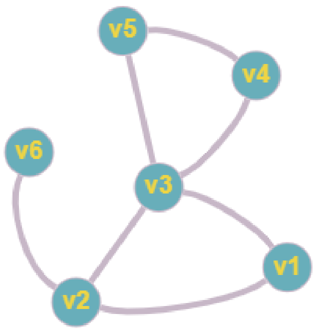
Çizelge 1.1. Şekil 1.3’deki grafın komşuluk matrisi

1.1.9. Derece matrisi

Derece matrisi köşegeni grafın dereceleri olan bir matristir ve deg(G) ile gösterilir. Bir komşuluk matrisinin her bir sütunun elemanları toplamı ile G grafının derece dizisinin d_i elemanları elde edilir ve d derece dizisi oluşturulur. Yani,

$$d = \{d_1 d_2, d_3, \ldots, d_i\}\,, a_{i,j} \in A(G)\ ise\ d_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \tag{1.4}$$

olur. Örneğin d=(2,3,4,2,2,1)   derece dizisi olan grafın derece matrisi aşağıdaki gibidir:



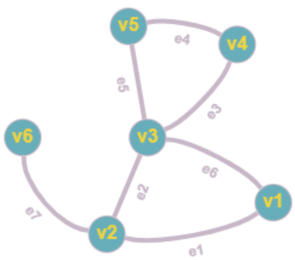
$$\begin{array}{c} \text{Deg(G)} \\ \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Çizelge 1.2 Şekil 1.3'deki grafın derece dizisinin derece matrisi

1.1.10. Bitişiklik matrisi

B(G) bitişiklik matrisi, G grafının kenarları ve köşeleri arasındaki bağlantılarını gösteren matristir. Bir $B_{\mathrm{m\,x\,n}}$ matrisinin (i,j) bileşeni, i. kenar ile j. köşe arasında bir bağlantı varsa, matrisin (i,j) ve (j,i) bileşenleri 1 olur; aksi halde, her ikisi de 0 olur:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & ; i.\,kenar\ j.\,köşeye\ bağlıysa \\ 0 & ; i.\,kenar\ j.\,köşeye\ \ bağlı\ \ değilse \end{cases}$$



$$\begin{array}{c} \text{B} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

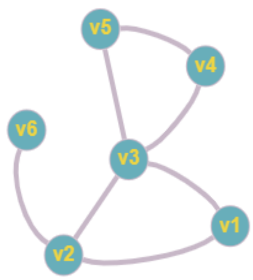
Çizelge 1.3 Şekil 1.3'deki grafın bitişiklik matrisi

1.1.11. Laplace matrisi

L(G), Laplace matrisi derece matrisinin komşuluk matrisiyle arasındaki farka eşittir. Aynı zamanda bitişiklik matrisinin transpozu ile kendisinin çarpımı olarak da ifade edilir: (Chung, 1992)

$$L = D - A \tag{1.5}$$

$$L = B^T B \tag{1.6}$$

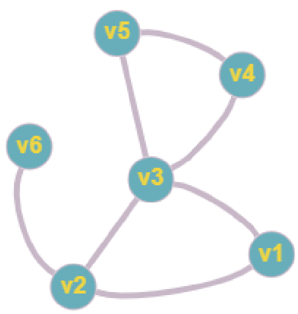


$$\begin{array}{c} L \\ \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Çizelge 1.4 Şekil 1.3'deki grafın Laplace matrisi

1.1.12. Mesafe matrisi

D(G) mesafe matrisi, G grafının her bir köşesinin diğer köşelere uzaklıklarını gösteren matristir. $D_{ij} = d(v_i, v_j)$ ile gösterilir.



$$\begin{array}{c} D \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Çizelge 1.5 Şekil 1.3'deki grafın mesafe matrisi

1.1.13. Statü

Bir v köşesinin statüsü σ(v), v köşesinin tüm köşelere uzaklıkları toplamıdır. Statü ayrıca, her bileşeni mesafe matrisinde karşılık gelen kolonun bileşenleri toplamı olarak da tanımlanır (F. Harary, 1959):

$$\sigma(v) = \sum_{u \in V(G)} d(v,u) \tag{1.7}$$

S_1 statü indeksi, kenarlar üzerinden her bir kenarı oluşturan köşelerin statülerinin toplamının toplamıdır:

$$S_1 = \sum_{uv \in E(G)} \sigma(u) + \sigma(v) \tag{1.8}$$

S_2 statü indeksi, kenarlar üzerinden her bir kenarı oluşturan köşelerin statülerinin çarpımının toplamıdır:

$$S_2 = \sum_{uv \in E(G)} \sigma(u).\sigma(v) \tag{1.9}$$

Bu tezin amacı grafların birinci ve ikinci statü indekslerinin hesaplanmasıdır. Ayrıca çekirdek, gölge ve görüntü graflarının mesafe matrisleri verilecektir. Bu matrisler verildiğinde grafın nasıl elde edileceği üzerinde durulacaktır.

2. GRAF HESAPLAMALARI İÇİN YARDIMCI ÖZELLİKLER

2.1. Bazı Temel Kavramlar

Bu kısımda ileride kullanılacak olan bazı temel kavramlar verilecektir.

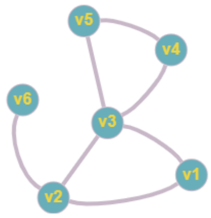
2.1.1. Hadamard çarpımı

Hadamard çarpımı $\circ$ ile gösterilir. $A = [a_{ij}]\ ve\ B = [b_{ij}]$, m×n boyutlu matris olmak üzere A ∘ B $= [a_{ij}b_{ij}]_{m\times n}$ olarak tanımlanan ikili işlemdir. Birimi J olarak gösterilir tüm bileşenleri 1 olan m×n boyutlu matristir ve bir matrisin her bir bileşeni 0'dan farklı ise Hadamard tersi vardır ve bu matris, her bir bileşeni kendisinin çarpma işlemine göre tersini barındıran matristir. Ayrıca birleşme ve değişme özelliğine sahiptir. Sıfır matrisi tüm elemanları 0 olan matristir (Horn, 2011). Cebirsel özellikleri aşağıdaki gibidir:

$$A \circ B = B \circ A$$
$$A \circ (B \circ C) = (A \circ B) \circ C$$
$$A \circ (B + C) = (A + B) \circ C$$
$$A \circ J = A$$
$$A \circ 0 = 0$$
$$A \circ \hat{A} = J$$

2.1.2. Statü dizisi

σ statü dizisi, elemanları tüm köşelerin statüleri olan dizidir. Köşelerin statüleri $\sigma = \{\sigma(v_1), \sigma(v_2), \sigma(v_3), \ldots, \sigma(v_n)\}$ şeklinde ifade edilir.



$$\begin{array}{c} D \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

σ= {8 7 6 9 9 11}

Çizelge 2.1 Şekil 1.3'deki grafın mesafe matrisi ve statü dizisi

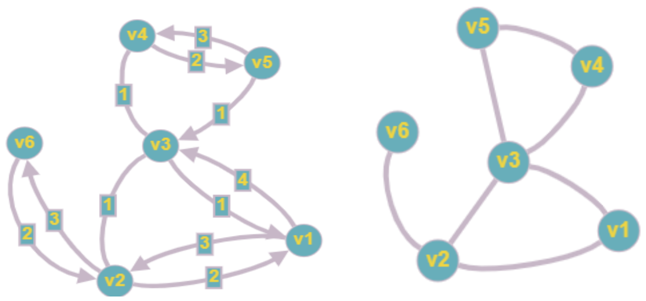
Mesafe matrisinin her bir kolonunun toplamı her bir köşenin statüsünü verecektir.

2.1.3. Signum matrisi

δ(A) veya sgn A ile gösterilen signum matrisi, bir A matrisinin a_{ij} elemanının değerine basit sgn fonksiyonu uygulayarak elde edilen matristir. Bu sayede ağırlıklı ve yönlü olan bir graf matrisi, ağırlıksız ve yönsüz graf matrisine dönüşecektir. Sonuç olarak $\delta(A) = [sgn(a_{ij})]$ olacaktır (Thomas, 2020):

$$\delta(A) = \begin{cases} 1\,;\ a_{ij} > 0 \\ 0\,;\ a_{ij} = 0 \\ -1\,;\ a_{ij} < 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

Bu tezde yönlü olmayan, ağırlıksız, basit, bağlantılı graflarla çalışılacaktır. Dolayısıyla böyle grafların komşuluk, bitişiklik ve mesafe matrislerinin bileşenleri 0 ya da pozitif sayılar olacaktır. Örneğin:



Şekil 2.1 Yönlendirilmiş ve ağırlıklı graf ve onun signum grafı

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \delta(A) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

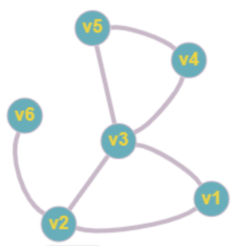
Çizelge 2.2 Şekil 2.1'deki grafın ağırlık matrisinin signum matrisi

2.1.4. Bitişiklik matrisi yardımıyla komşuluk matrisi hesabı

Bir G grafının bitişiklik matrisi biliniyorsa bu matristen faydalanarak Laplace matrisi bulunur ve bu sayede komşuluk matrisi aşağıdaki şekilde hesaplanır.
Burada yapılan işlem ilk olarak bitişiklik matrisi ve transpozunu çarparak Laplace matrisini bulmak, sonra da Laplace matrisinden derece matrisini çıkarmaktır:

$$BB^T = L \tag{2.2}$$

$$L - deg(G) = A \tag{2.3}$$



$$\overset{B}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \times \overset{B^T}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} = \overset{L}{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

$$\overset{L}{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} - \overset{deg(G)}{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} = \overset{A}{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}$$

Çizelge 2.3 Şekil 1.3'deki grafın bitişiklik matrisi ile komşuluk matrisi hesabı

2.1.5. Komşuluk matrisi yardımıyla mesafe matrisi hesabı

Komşuluk matrisinden mesafe matrisine ulaşmak için ilk bilinmesi gereken grafın çapı olacaktır. Bir grafın çapı bulunurken herhangi iki köşesi arasındaki uzaklık bulunacağından bu sayede mesafe matrisi de elde edilir.

Bir matrisin kuvvetlerini A^n ile gösterirsek bu matrisin signum matrisi $\delta(A^n)$ olacaktır. Burada en büyük kuvveti d=n olarak kabul edilirse bu sayede mesafe matrisi şu şekilde hesaplanır (Thomas, 2020):

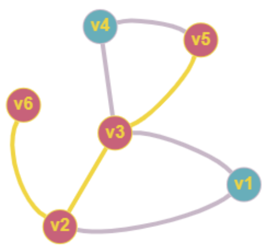
$$D_n = \delta(A^n) - \delta[\delta(A^n) \circ \delta(A^{n-1}) + \delta(A^n) \circ \delta(A^{n-2}) + \cdots + \delta(A^n) \circ \delta(A^1) + \delta(A^n) \circ \delta(A^0)] \quad (2.4)$$

D_n matrisi, A matrisinin en büyük kuvvetinin signum matrisinin kendinden önceki kuvvetlerinin signum matrisleriyle Hadamard çarpımlarının toplamını alarak ve son olarak da yine en büyük kuvvetli A signum matrisinden çıkarılmasıyla elde edilir (Thomas, 2020):

$$D = d.D_d + (d-1).D_{d-1} + (d-2)D_{d-2} + \cdots + 2.D_2 + 1.D_1$$

$$D = \sum_{n=1}^{d} n.D^n \quad (2.5)$$

D_n matrisleri kendi indisi kadar çarpılır ve daha sonra tümü toplanırsa D mesafe matrisi elde edilir.



Şekil 2.2 Bir grafın çapı

Yukarıdaki şekilde verilen G grafı ele alınırsa bu grafın çapı $d = 3\ olacaktır.$

$$
\begin{array}{cccc}
 & A^n & \delta(A^n) & D^n \\
n=1 &
\begin{bmatrix} 0&1&1&0&0&0\\ 1&0&1&0&0&1\\ 1&1&0&1&1&0\\ 0&0&1&0&1&0\\ 0&0&1&1&0&0\\ 0&1&0&0&0&0 \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} 0&1&1&0&0&0\\ 1&0&1&0&0&1\\ 1&1&0&1&1&0\\ 0&0&1&0&1&0\\ 0&0&1&1&0&0\\ 0&1&0&0&0&0 \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} 0&1&1&0&0&0\\ 1&0&1&0&0&1\\ 1&1&0&1&1&0\\ 0&0&1&0&1&0\\ 0&0&1&1&0&0\\ 0&1&0&0&0&0 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccc}
n=2 &
\begin{bmatrix} 2&1&1&1&1&1\\ 1&3&1&1&1&0\\ 1&1&4&1&1&1\\ 1&1&1&2&1&0\\ 1&1&1&1&2&0\\ 1&0&1&0&0&1 \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} 1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&0\\ 1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&0\\ 1&1&1&1&1&0\\ 1&0&1&0&0&1 \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} 0&0&0&1&1&1\\ 0&0&0&1&1&0\\ 0&0&0&0&0&1\\ 1&1&0&0&0&0\\ 1&1&0&0&0&0\\ 1&0&1&0&0&0 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

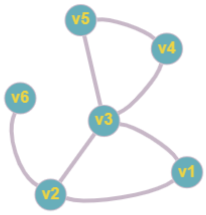
$$
\begin{array}{ccccc}
 & & & & D \\
d=n=3 &
\begin{bmatrix} 2&4&5&2&2&1\\ 4&2&6&2&2&3\\ 5&6&4&5&5&1\\ 2&2&5&2&3&1\\ 2&2&5&3&2&1\\ 1&3&1&1&1&0 \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} 1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&0 \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&1&1&0 \end{bmatrix} &
\begin{bmatrix} 0&1&1&2&2&2\\ 1&0&1&2&2&1\\ 1&1&0&1&1&2\\ 2&2&1&0&1&3\\ 2&2&1&1&0&3\\ 2&1&2&3&3&0 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

$$D = 1.D_1 + 2.D_2 + 3.D_3$$

Çizelge 2.4 Şekil 1.3’deki grafın mesafe matrisi hesabı

2.1.6. Mesafe matrisi yardımıyla komşuluk matrisinin hesabı

“Yukarıdaki işlemler ile elde edilen bir mesafe matrisinden komşuluk matrisine nasıl dönülebilir?” sorusu akıllara gelebilir. Tek yapılması gereken D mesafe matrisinin bileşenleri 1 olan değerlerinin komşuluk matrisinin elemanları olduğunun görülmesidir. O halde D matrisinin 1 dışındaki tüm elemanları sıfır yapılmalıdır.



$$\begin{array}{cc} \text{D} & \text{A} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Çizelge 2.5 Şekil 1.3'teki grafın mesafe ve komşuluk matrisi

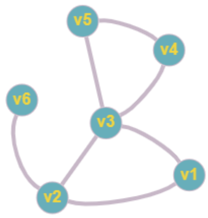
2.1.7. Birinci ve ikinci statü indekslerinin hesaplanması

Bu indeksleri hesaplamak için ilk olarak simetriden faydalanarak mesafe matrisinin satırları toplamıyla statü dizisi σ elde edilir. İkinci aşama olarak σ ile B bitişiklik matrisinin her B_j, j=1, 2, …, n kolonuyla Hadamard çarpımı yapılıp yeni bir S matrisi elde edilir:

$$\sigma \circ B_j = s_j \tag{2.6}$$

Bu $S = (s_1, s_2, s_3, \dots, s_n)$ matrisi yardımıyla S_1 ve S_2 aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{array}{cc} \text{D} & \sigma \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} & \begin{vmatrix} 8 \\ 7 \\ 6 \\ 9 \\ 9 \\ 11 \end{vmatrix} \end{array}$$



$$\begin{array}{ccc} \text{B} & \sigma & \text{S} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{vmatrix} 8 \\ 7 \\ 6 \\ 9 \\ 9 \\ 11 \end{vmatrix} & \begin{bmatrix} 8 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 6 & 6 & 6 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{bmatrix} \end{array}$$

Çizelge 2.6 Şekil 1.3'deki grafın S matrisi ile statü dizisi hesabı

S_1 birinci statü indeksi, tüm komşu olan köşelerin statülerinin toplamını oluşturan bir s_1 dizisi tanımlanırsa, bu dizinin elemanlarının toplamıdır. Bunun için S matrisinin sütunlarının toplamıyla s_1 dizisi elde edilir. Bu s_1 dizisinin elemanları toplanarak S_1 birinci statü indeksi elde edilir.

$$S = \begin{bmatrix} 8 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 6 & 6 & 6 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{bmatrix}$$

$$s1= \{15 \;\; 14 \;\; 13 \;\; 15 \;\; 15 \;\; 18 \;\; 18\} \qquad S1=108$$

Çizelge 2.7 Şekil 1.3’deki grafın S_1 statü indeksi hesabı

S_2 ikinci statü indeksi, tüm komşu olan köşelerin statülerinin çarpımını oluşturan bir s_2 dizisi tanımlanırsa, bu dizinin elemanlarının toplamıdır. Bunun için S matrisi yardımıyla $S' = S + (J - B)$ matrisi elde edilir. Bu sayede matristeki 0 değerleri 1 olarak alınır. Sonra sütun çarpımıyla s_2 dizisi elde edilir. Ardından s_2 dizisinin elemanları toplanarak S_2 elde edilir. Şekil 1.3’deki graf ele alınırsa,

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 8 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 6 & 6 & 6 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{bmatrix} \qquad S' = S + (J-B) = \begin{bmatrix} 8 & 8 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 7 & 1 & 7 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & 6 & 6 & 6 & 6 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 9 & 1 & 9 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 9 & 9 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 11 \end{bmatrix}$$

$$s_2 = \{56 \quad 48 \quad 42 \quad 54 \quad 54 \quad 81 \quad 77\} \qquad S_2=412$$

Çizelge 2.8 Şekil 1.3’deki grafın S_2 statü indeksi hesabı

2.1.8. Wiener indeksi

Bir G grafının Wiener indeksi W(G), graf üzerindeki herhangi iki u, v köşesinin arasındaki uzaklıkların toplamıdır. Aynı zamanda köşelerin statülerinin toplamının yarısı olarak da ifade edilebilir (H. Wiener):

$$\mathrm{W(G)} = \sum_{u,v \in V(G)} d(u,v) = \frac{1}{2} \sum_{u \in V(G)} \sigma(u) \tag{2.7}$$

2.1.9. Birinci ve ikinci Zagreb indeksleri

Bir G grafının birinci Zagreb indeksi M_1, graftaki köşelerin derecelerinin karelerinin toplamı veya her bir kenarı oluşturan köşelerin derecelerinin toplamının toplamıdır. (I. Gutman, N. Trinajstic, 1972)

$$M_1(G) = \sum_{u \in V(G)} d(u)^2 = \sum_{uv \in E(G)} d(u) + d(v) \tag{2.8}$$

Ayrıca bitişiklik matrisinin sütunları B_j ile derece dizisi Hadamard çarpımı yapılırsa oluşan sütunlar ile yeni bir M matrisi oluşturulursa M matrisinin sütun toplamı yapılarak m_1 dizisi ve bu dizinin elemanlarının toplamıyla da M_1 birinci Zagreb indeksi bulunabilir. Örneğin:

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{B} & & \mathrm{d} & & \mathrm{D} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \circ & \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix} & \rightarrow & \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 4 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

m_1 ={5 6 7 6 6 4 4} M_1=38

Çizelge 2.9 Şekil 1.3'deki grafın birinci Zagreb indeksi

Bir grafın ikinci Zagreb indeksi M_2, graftaki kenarları oluşturan köşelerin derecelerinin çarpımlarının toplamıdır: (I. Gutman, N. Trinajsti´c, 1972)

$$M_2(G) = \sum_{uv \in E(G)} d(u)d(v) \tag{2.9}$$

Ayrıca bitişiklik matrisinin sütunları B_j ile derece dizisi Hadamard çarpımı yapılırsa ve oluşan sütunlar ile yeni bir M matrisi oluşturulursa M'= M-(J-B) matrisinin sütunları toplamıyla m_2 dizisi ve bu dizinin elemanları toplamıyla da M_2 ikinci Zagreb indeksi bulunabilir.

$$\begin{array}{ccccccc} B & & d & & M & & M' \\ \begin{bmatrix} 1&1&0&0&0&0&0 \\ 1&0&1&0&0&0&1 \\ 0&1&1&1&1&0&0 \\ 0&0&0&1&0&1&0 \\ 0&0&0&0&1&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix} & \circ & \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix} & \rightarrow & \begin{bmatrix} 2&2&0&0&0&0&0 \\ 3&0&3&0&0&0&3 \\ 0&4&4&4&4&0&0 \\ 0&0&0&2&0&2&0 \\ 0&0&0&0&2&2&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix} & \rightarrow & \begin{bmatrix} 2&2&1&1&1&1&1 \\ 3&1&3&1&1&1&3 \\ 1&4&4&4&4&1&1 \\ 1&1&1&2&1&2&1 \\ 1&1&1&1&2&2&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1 \end{bmatrix} \end{array}$$

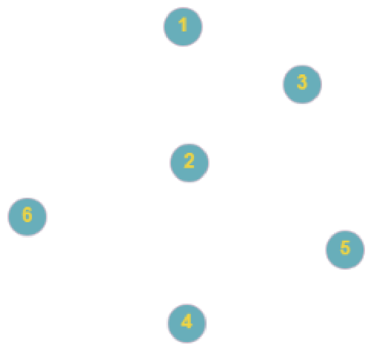
m_2 ={9 10 11 10 10 8 8} M_2=49

Çizelge 2.10 Şekil 1.3'deki grafın ikinci Zagreb indeks

3. ÖZEL GRAFLAR VE STATÜ İNDEKSLERİ

3.1. Sıfır grafı

N_n sıfır grafı, kenar kümesi boş küme olan graftır. (∞, iki köşe arasında bağlantı olmadığını belirtir.)



Şekil 3.1 Sıfır grafı

$$
\begin{array}{ccc}
A(N) & B(N) & D(N) \\
\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
& \emptyset &
\begin{bmatrix} 0 & \infty, & \infty, & \infty, & \infty, & \infty \\ \infty, & 0 & \infty, & \infty, & \infty, & \infty \\ \infty, & \infty, & 0 & \infty, & \infty, & \infty \\ \infty, & \infty, & \infty, & 0 & \infty, & \infty \\ \infty, & \infty, & \infty, & \infty, & 0 & \infty \\ \infty, & \infty, & \infty, & \infty, & \infty, & 0 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Çizelge 3.1 Şekil 3.1’deki grafın komşuluk, bitişiklik ve mesafe matrisleri

3.2. Patika grafı

P_n patika grafı, $i = 1, 2, \ldots ,n$ için birbirinden farklı v_i köşelerinin $v_i v_{i+1}$ şeklinde birleşmesiyle oluşan graftır. Bu graf n köşeye ve $n-1$ kenara sahiptir. v_1 ve v_n köşelerine patika grafının uç köşeleri, kenar sayısına da uzunluğu denir. Bu tez çalışmasında patika grafı için köşe sayısı en az iki alınacaktır.

Şekil 3.2 Patika grafı

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0&0\\1&0&1&0&0&0\\0&1&0&1&0&0\\0&0&1&0&1&0\\0&0&0&1&0&1\\0&0&0&0&1&0\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\1&1&0&0&0\\0&1&1&0&0\\0&0&1&1&0\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}\quad D=\begin{bmatrix}0&1&2&3&4&5\\1&0&1&2&3&4\\2&1&0&1&2&3\\3&2&1&0&1&2\\4&3&2&1&0&1\\5&4&3&2&1&0\end{bmatrix}$$

$\sigma = \{15 \quad 11 \quad 9 \quad 9 \quad 11 \quad 15\}$

Çizelge 3.2 Şekil 3.12'deki patika grafının komşuluk, bitişiklik ve mesafe matrisleri

Bir P_n patika grafının birinci ve ikinci statü indeksleri (Yalnaik1, 2016):

$$\sigma_{S(P_n)}(v_i) = \frac{i(i-1)}{2} + \frac{(n-1-i)(n-i)}{2}$$

$$S_1(P_n) = \sum_{i=1}[\sigma(v_i) + \sigma(v_{i+1})] = \frac{1}{3}[n(n-1)(2n-1)]$$

$$S_2(P_n) = \sum_{i=1}^{n-1} \sigma(v_i)\sigma(v_{i+1})$$

$$= \frac{(n-1)(n^4-n^2)}{4} - \frac{n(n-1)(n^3-n)}{2} + \frac{n(n-1)(2n-1)(2n^2-1)}{6}$$
$$- \frac{n^3(n-1)^2}{2} + \frac{1}{30}[6(n-1)^5 + 15(n-1)^4$$
$$+ 10(n-1)^3 - (n-1)] \quad (2.10)$$

3.3. Devir grafı

C_n devir grafı, patika grafındaki uç köşelerin bir kenarla birleştirilmesi sonucu oluşan grafa denilir. Bu grafın kenar ve köşe sayısı birbirine eşittir. Her bir köşenin derecesi 2'dir. Köşe sayısının 1 ve 2 olduğu durumlarda devir grafı, patika grafı ile aynıdır. Bu tez çalışmasında devir grafı için köşe sayısı en az üç alınacaktır. Bir C_n devir grafının birinci ve ikinci statü indeksleri,

$$\sigma(C_n) = \frac{n^2 + \frac{(-1)^n - 1}{2}}{4}$$

n tek ise;

$$S_1(C_n) = \sum_{u,v\epsilon E(S(C_n))} \sigma_u + \sigma_v = \frac{n^3 - n}{2}$$

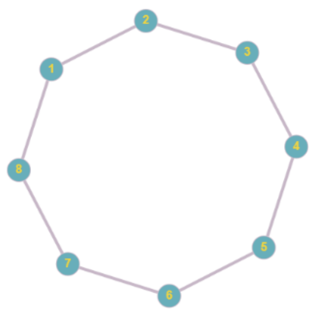
$$S_2(C_n) = \sum_{u,v\epsilon E(C_n)} \sigma_u . \sigma_v = \left(\frac{n^2 - 1}{4}\right)^2 . n$$

n çift ise;

$$S_1(C_n) = \sum_{u,v\epsilon E(S(C_n))} \sigma_u + \sigma_v = \frac{n^3}{2}$$

$$S_2(C_n) = \sum_{u,v\epsilon E(C_n)} \sigma_u . \sigma_v = \frac{n^5}{16} \qquad (2.11)$$

ile hesaplanır.



Şekil 3.3 Devir grafı

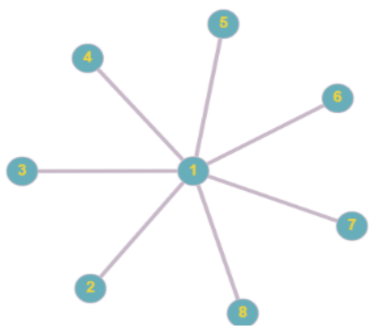
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma = \{16 \;\; 16 \;\; 16 \;\; 16 \;\; 16 \;\; 16 \;\; 16 \;\; 16\}$$

Çizelge 3.3 Şekil 3.3'deki devir grafının komşuluk, bitişiklik ve mesafe matrisleri

3.4. Yıldız grafı

S_n yıldız grafı, merkezdeki bir köşenin $n-1$ tane köşe ile birleştirilmesiyle oluşan grafa denilir. Bu grafta kenar sayısı, köşe sayısının bir eksiğidir. Bu tez çalışmasında yıldız grafı için köşe sayısı en az iki alınacaktır.



Şekil 3.4 Yıldız grafı

Yıldız gafının komşuluk, bitişiklik ve mesafe matrisleri aşağıda verilmiştir:

$$
\begin{array}{ccc}
A & B & D \\
\begin{bmatrix}
0&1&1&1&1&1&1&1\\
1&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0
\end{bmatrix}
&
\begin{bmatrix}
1&1&1&1&1&1&1\\
1&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&1
\end{bmatrix}
&
\begin{bmatrix}
0&1&1&1&1&1&1&1\\
1&0&2&2&2&2&2&2\\
1&2&0&2&2&2&2&2\\
1&2&2&0&2&2&2&2\\
1&2&2&2&0&2&2&2\\
1&2&2&2&2&0&2&2\\
1&2&2&2&2&2&0&2\\
1&2&2&2&2&2&2&0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

σ= {7 13 13 13 13 13 13 13}

Çizelge 3.4 Şekil 3.4'daki devir grafının komşuluk, bitişiklik ve mesafe matrisleri

Bir S_n yıldız grafının birinci ve ikinci statü indeksleri,

$$\sigma_{S(S_n)}(v_0) = n - 1$$

$$\sigma_{S(S_n)}(v_1) = 2n-1$$

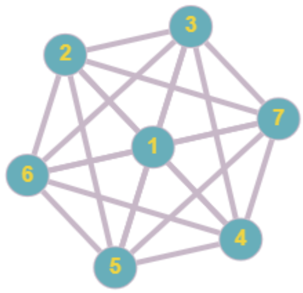
$$S_1(S_n) = \sum_{u,v\epsilon E(S_n)} \sigma_u + \sigma_v = 3n^2 - 5n + 2$$

$$S_2(S_n) = \sum_{u,v\epsilon E(S_n)} \sigma_u . \sigma_v = 2n^3 - 5n^2 + 4n \qquad (2.12)$$

ile hesaplanır.

3.5. Tam grafı

K_n tam graf, her bir köşesinin diğer tüm köşelerle komşu olduğu graftır. Her köşe n-1 tane kenara komşudur.



Şekil 3.5 Tam graf

$$
\begin{array}{ccc}
A & B & D \\
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0
\end{bmatrix}
&
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{bmatrix}
&
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

$$\sigma = \{6 \;\; 6 \;\; 6 \;\; 6 \;\; 6 \;\; 6 \;\; 6\}$$

Çizelge 3.5 Şekil 3.5’deki tam grafın komşuluk, bitişiklik ve mesafe matrisleri

Bir K_n tam grafının birinci ve ikinci Statü indeksleri:

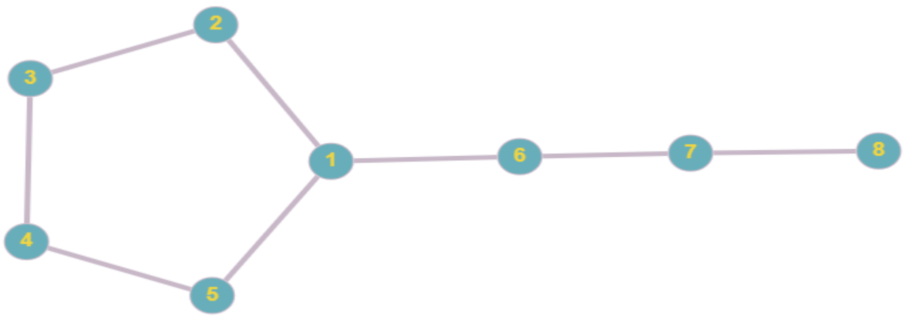
$$\sigma_{K_n}(v) = n - 1$$

$$S_1(K_n) = \sum_{u,v \epsilon E(K_n)} \sigma_u + \sigma_v = \left(n + \frac{n(n-3)}{2}\right)(2n-2)$$

$$S_2(K_n) = \sum_{u,v \epsilon E(K_n)} \sigma_u . \sigma_v = 2n^3 \qquad (2.13)$$

3.6. Larva grafı

$T_{r,s}$ larva grafı, devir grafı ile patika grafının ortak bir köşede birleştirilmesi ile oluşan grafa denir. Devir grafının uzunluğu r, patika grafının uzunluğu da s olmak üzere larva grafı r + s tane köşe ve kenara sahiptir.



Şekil 3.6 Larva grafı

$$
A = \begin{bmatrix} 0&1&0&0&1&1&0&0\\ 1&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&1&0&0&0\\ 1&0&0&1&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&1&0 \end{bmatrix}
\quad
B = \begin{bmatrix} 1&0&0&1&0&1&0&0\\ 1&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix}
\quad
D = \begin{bmatrix} 0&1&2&2&1&1&2&3\\ 1&0&1&2&2&2&3&4\\ 2&1&0&1&2&3&4&5\\ 2&2&1&0&1&3&4&5\\ 1&2&2&1&0&2&3&4\\ 1&2&3&3&2&0&1&2\\ 2&3&4&4&3&1&0&1\\ 3&4&5&5&4&2&1&0 \end{bmatrix}
$$

$\sigma = \{\ 12 \quad 15 \quad 18 \quad 18 \quad 15 \quad 14 \quad 18 \quad 24\}$

Çizelge 3.6 Şekil 3.6'deki larva grafının komşuluk, bitişiklik ve mesafe matrisleri

Bir $T_{r,s}$ larva grafının birinci ve ikinci statü indeksleri

$$\sigma(v_0) = \frac{r^2}{4} + \frac{s(s+1)}{2}$$

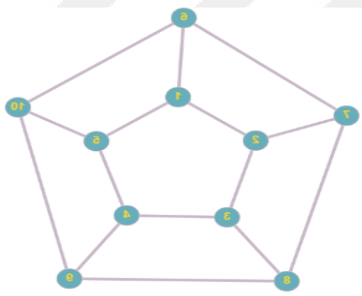
$$\sigma(v_{r_i}) = \frac{r^2}{4} + i.s + \frac{(s)(s+1)}{2} \; ; i = 1,2,3 \dots {}^{r}/_{2}$$

$$\sigma\left(v_{s_j}\right) = \frac{r^2}{4} + j \cdot r + \frac{(s-j)(s-j+1)}{2} + \frac{j(j-1)}{2}; j = 1,2,3 \dots s \tag{2.14}$$

ile hesaplanır.

3.7. Merdiven grafı

L_n merdiven grafı, bir devir grafının aynı devir grafı ile aynı köşelerin birer kenar oluşturmasıyla ortaya çıkan graftır. Başka bir deyişle, iki n-genin karşılıklı birer köşelerinden birleştirilmesiyle elde edilir. Bu grafın köşe sayısı $2n$, kenar sayısı ise $3n$ ile hesaplanır.



Şekil 3.7 Merdiven grafı

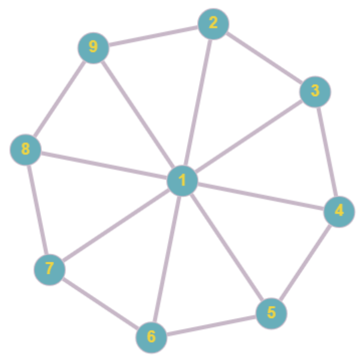
$$\begin{array}{c} \text{A} \\ \begin{bmatrix} 0&1&0&0&1&1&0&0&0&0 \\ 1&0&1&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&1&0&1&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&1&0&1&0&0&0&1&0 \\ 1&0&0&1&0&0&0&0&0&1 \\ 1&0&0&0&0&0&1&0&0&1 \\ 0&1&0&0&0&1&0&1&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&1&0&1&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&1&0&1 \\ 0&0&0&0&1&1&0&0&1&0 \end{bmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{B} \\ \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1 \\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0 \\ 1&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{D} \\ \begin{bmatrix} 0&1&2&2&1&1&2&3&3&2 \\ 1&0&1&2&2&2&1&2&3&3 \\ 2&1&0&1&2&3&2&1&2&3 \\ 2&2&1&0&1&3&3&2&1&2 \\ 1&2&2&1&0&2&3&3&2&1 \\ 1&2&3&3&2&0&1&2&2&1 \\ 2&1&2&3&3&1&0&1&2&2 \\ 3&2&1&2&3&2&1&0&1&2 \\ 3&3&2&1&2&2&2&1&0&1 \\ 2&3&3&2&1&1&2&2&1&0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$\sigma = \{ \; 17 \;\; 17 \;\; 17 \;\; 17 \;\; 17 \;\; 17 \;\; 17 \;\; 17 \;\; 17 \;\; 17 \; \}$

Çizelge 3.7 Şekil 3.7’daki merdiven grafının komşuluk, bitişiklik ve mesafe matrisleri

3.8. Tekerlek grafı

W_n tekerlek grafı, $n \geq 3$ olmak üzere devir grafının bütün köşeleriyle bağlantısı olacak şekilde yeni bir köşe eklenmesi ile tekerlek grafı oluşur. n köşe ve $2n-2$ tane kenara sahiptir. Komşuluk matrisi için merkez nokta çıkarıldığında devir grafı elde edildiği görülür.



Şekil 3.8 Tekerlek grafı

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

σ { 8 13 13 13 13 13 13 13 13 }

Çizelge 3.8 Şekil 3.8'deki tekerlek grafının komşuluk, bitişiklik ve mesafe matrisleri

Bir W_n tekerlek grafının birinci ve ikinci statü indeksleri

$$\sigma_{W_n}(v_1) = n - 1$$
$$\sigma_{W_n}(v_2) = 2n - 5$$

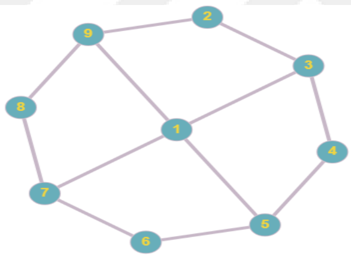
$$S_1(W_n) = \sum_{uv\epsilon E(W_n)} \sigma_u + \sigma_v = 9n^2 - 25n + 16$$

$$S_2(W_n) = \sum_{uv\epsilon E(W_n)} \sigma_u . \sigma_v = 26n - 33n^2 + 57n - 30 \qquad (2.15)$$

ile hesaplanır.

3.9. Çark grafı

G_n çark grafı, tekerlek grafının devir üzerindeki kenarların üzerine birer köşe eklenmesiyle elde edilir. Çark grafının komşuluk matrisi incelenirse ilk satır sütunda ardışık 0,1 elemanları görülür. Geri kalan girdiler devir grafının komşuluk matrisidir.



Şekil 3.9 Çark grafı

$$
A = \begin{bmatrix}
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{bmatrix}
\quad
B = \begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\quad
D = \begin{bmatrix}
0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\
2 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 2 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 3 & 2 \\
2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 3 \\
1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\
2 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\
1 & 3 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\
2 & 2 & 3 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 2 & 3 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0
\end{bmatrix}
$$

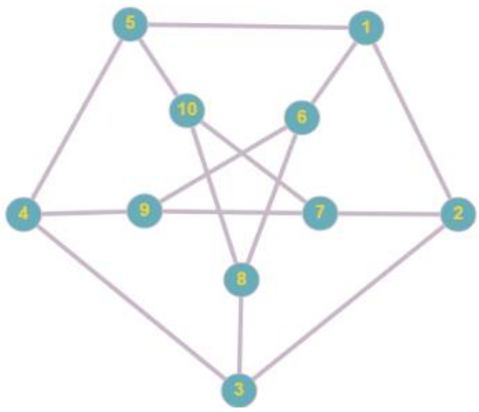
$\sigma = \{ \ 12 \ \ 18 \ \ 15 \ \ 18 \ \ 15 \ \ 18 \ \ 15 \ \ 18 \ \ 15 \ \}$

Çizelge 3.9 Şekil 3.9'daki çark grafının komşuluk, bitişiklik ve mesafe matrisleri

3.10. Petersen grafı

P(G) Petersen grafı özel bir graftır. Petersen grafının komşuluk matrisi, bir devir grafının komşuluk matrisi ile bu devir grafının birim matrisle toplamının bir J matrisinden çıkarılması yardımıyla hesaplanabilir. J-I yerine K tam grafının komşuluk matrisi alınabilir:

$$A(P(G)) = \begin{bmatrix} \mathrm{A}(\,C_n) & I_n \\ I_n & J_n - I_n - A(C_n) \end{bmatrix} \tag{2.16}$$



Şekil 3.10 Petersen graf

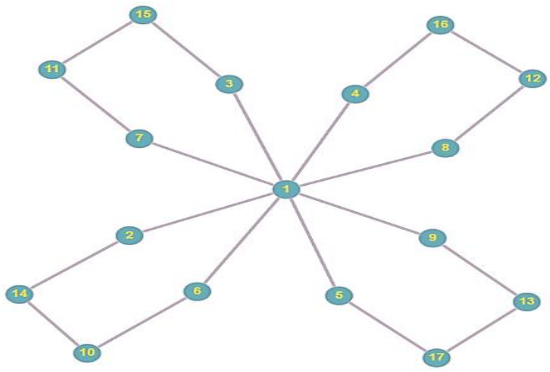
$$\begin{array}{ccc} \text{A} & \text{B} & \text{D} \\ \begin{bmatrix} 0&1&0&0&1&1&0&0&0&0 \\ 1&0&1&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&1&0&1&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&1&0&1&0&0&0&1&0 \\ 1&0&0&1&0&0&0&0&0&1 \\ 1&0&0&0&0&0&0&1&1&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0&1&1 \\ 0&0&1&0&0&1&0&0&0&1 \\ 0&0&0&1&0&1&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&1&1&0&0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 1&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0&1&2&2&1&1&2&2&2&2 \\ 1&0&1&2&2&2&1&2&2&2 \\ 2&1&0&1&2&2&2&1&2&2 \\ 2&2&1&0&1&2&2&2&1&2 \\ 1&2&2&1&0&2&2&2&2&1 \\ 1&2&2&2&2&0&2&1&1&2 \\ 2&1&2&2&2&2&0&2&1&1 \\ 2&2&1&2&2&1&2&0&2&1 \\ 2&2&2&1&2&1&1&2&0&2 \\ 2&2&2&2&1&2&1&1&2&0 \end{bmatrix} \end{array}$$

σ= { 15 15 15 15 15 15 15 15 15 15 }

Çizelge 3.10 Şekil 3.10'deki Petersen grafının komşuluk, bitişiklik ve mesafe matrisleri

3.11. Dostluk grafı

$D_{r,s}$ dostluk grafı, r tane C_s devir grafının tek bir ortak noktada birleşmesiyle oluşur.



Şekil 3.11 Dostluk grafı

A

$$\begin{bmatrix}
0&1&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0
\end{bmatrix}$$

B

$$\begin{bmatrix}
1&1&0&0&0&1&1&0&0&0&1&1&0&0&0&1&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0
\end{bmatrix}$$

D

$$\begin{bmatrix}
0&1&1&2&2&1&2&2&1&1&2&2&1&1&1&2&2\\
1&0&2&1&2&2&3&3&2&2&3&3&2&2&2&3&3\\
1&2&0&2&1&2&3&3&2&2&3&3&2&2&2&3&3\\
2&1&2&0&1&3&4&4&3&3&4&4&3&3&3&4&4\\
2&2&1&1&0&3&4&4&3&3&4&4&3&3&3&4&4\\
1&2&2&3&3&0&1&2&2&2&3&3&2&2&2&3&3\\
2&3&3&4&4&1&0&1&2&3&4&4&3&3&3&4&4\\
2&3&3&4&4&2&1&0&1&3&4&4&3&3&3&4&4\\
1&2&2&3&3&2&2&1&0&2&3&3&2&2&2&3&3\\
1&2&2&3&3&2&3&3&2&0&1&2&2&2&2&3&3\\
2&3&3&4&4&3&4&4&3&1&0&1&2&3&3&4&4\\
2&3&3&4&4&3&4&4&3&2&1&0&1&3&3&4&4\\
1&2&2&3&3&2&3&3&2&2&2&1&0&2&2&3&3\\
1&2&2&3&3&2&3&3&2&2&3&3&2&0&2&2&1\\
1&2&2&3&3&2&3&3&2&2&3&3&2&2&0&1&2\\
2&3&3&4&4&3&4&4&3&3&4&4&3&2&1&0&1\\
2&3&3&4&4&3&4&4&3&3&4&4&3&1&2&1&0
\end{bmatrix}$$

$\sigma = \{24 \quad 36 \quad 36 \quad 48 \quad 48 \quad 36 \quad 48 \quad 48 \quad 36 \quad 36 \quad 48 \quad 48 \quad 36 \quad 36 \quad 36 \quad 48 \quad 48\}$

Çizelge 3.11 Şekil 3.11’deki dostluk grafının komşuluk, bitişiklik ve mesafe matrisleri

Birinci statü indeksi,

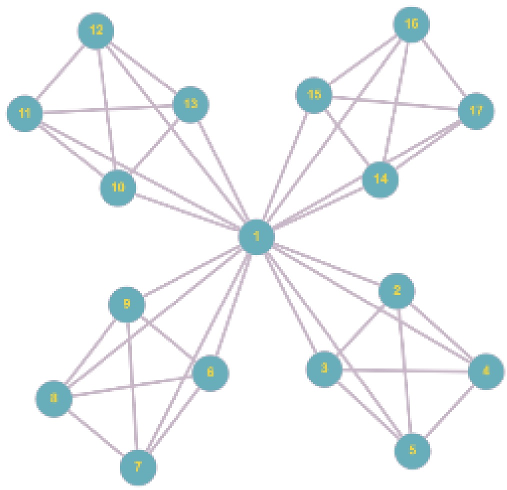
$$\sigma(v_i) = \frac{m.(n^2-1)}{4} + 4(n-1)(m-1) \cdot i$$

$$S_1(D_{r,s}) = \sum_{uv\epsilon E(D_{r,s})} \sigma_u + \sigma_v = \sigma_{v\in C_s}(v).(2rs - s - r + 1) \quad (2.17)$$

ile hesaplanır.

3.12. Yel değirmeni grafı

W_n^m yel değirmeni grafı, m tane K_n tam grafın bir noktada birleşmesiyle oluşur. *n*-1 ve *mn* dereceli iki tip noktaya sahiptir. K_n komşuluk matrisiyle ilişkisi ve köşelerinin statü hesabı aşağıda verildiği gibidir:



Şekil 3.12 Yel değirmeni grafı

$$\sigma_{W_n^m}(v_1) = m(n-1)$$

$$\sigma_{W_n^m}(v_2) = 2nm - 2m - n + 1$$

$$W_n^m = G_1 x G_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & A & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & A & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & A \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

A

$$\begin{bmatrix}
0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&0&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&1&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&1&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&1&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&1&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&1\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&1\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0
\end{bmatrix}$$

D

$$\begin{bmatrix}
0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&0&1&1&1&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2\\
1&1&0&1&1&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2\\
1&1&1&0&1&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2\\
1&1&1&1&0&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2\\
1&2&2&2&2&0&1&1&1&2&2&2&2&2&2&2&2\\
1&2&2&2&2&1&0&1&1&2&2&2&2&2&2&2&2\\
1&2&2&2&2&1&1&0&1&2&2&2&2&2&2&2&2\\
1&2&2&2&2&1&1&1&0&2&2&2&2&2&2&2&2\\
1&2&2&2&2&2&2&2&2&0&1&1&1&2&2&2&2\\
1&2&2&2&2&2&2&2&2&1&0&1&1&2&2&2&2\\
1&2&2&2&2&2&2&2&2&1&1&0&1&2&2&2&2\\
1&2&2&2&2&2&2&2&2&1&1&1&0&2&2&2&2\\
1&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&0&1&1&1\\
1&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&1&0&1&1\\
1&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&1&1&0&1\\
1&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&1&1&1&0
\end{bmatrix}$$ ile

B

$$\begin{bmatrix}
1&0&0&0&1&0&1&0&1&0&0&1&0&1&1&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&1&1&1&1&0&0&0&1&1&0&0&0&0&1\\
1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{bmatrix}$$

$\sigma = \{16\ \ 28\ \ 28\ \ 28\ \ 28\ \ 28\ \ 28\ \ 28\ \ 28\ \ 28\ \ 28\ \ 28\ \ 28\ \ 28\ \ 28\ \ 28\ \ 28\}$

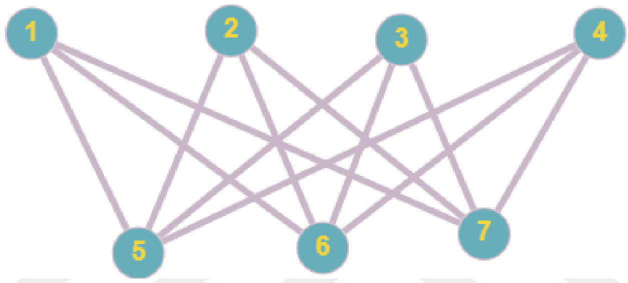
Çizelge 3.12 Şekil 3.12’deki yel değirmeni grafının komşuluk, bitişiklik ve mesafe matrisleri

3.13. İki parçalı tam grafı

$K_{n,m}$ iki parçalı tam graf, V_1, V_2 iki köşe kümesi olmak üzere V_1'deki her bir köşenin V_2'deki her bir köşeyle birleştirilmesiyle elde edilir. İki parçalı tam grafın komşuluk matrisi

$$A(K_{n,m}(G)) = \begin{bmatrix} 0_{n\times m} & J_{n\times m} \\ J_{n\times m} & 0_{n\times m} \end{bmatrix} \tag{2.19}$$

ile verilebilir.



,

Şekil 3.13 İki parçalı tam graf

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\quad
B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\quad
D = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$\sigma = \{9 \ \ 9 \ \ 9 \ \ 9 \ \ 8 \ \ 8 \ \ 8\}$

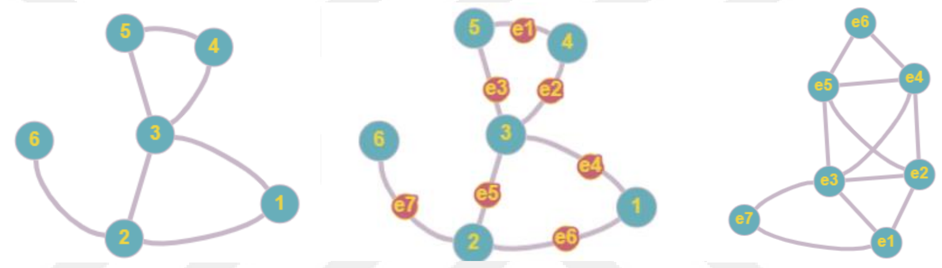
Çizelge 3.13 Şekil 3.13'deki iki parçalı tam grafının komşuluk, bitişiklik ve mesafe matrisleri

4. TÜRETİLMİŞ GRAFLAR

Bu bölümde, türetilmiş grafların bilinen graf matrislerini kullanarak komşuluk matrislerinin nasıl elde edilebileceği verilecektir.

4.1.1. Doğru grafı

L(G) doğru grafı, bir grafın kenarlarını köşe kabul ederek G grafında birbirine komşu olan kenarların L(G) de komşu köşeler kabul edildiği graftır (Skiena, 1990).



Şekil 4.1 Şekil 1.3’deki grafın doğru grafı

Şekil 1.3’deki grafın doğru grafının komşuluk matrisi

$$L(G) = B^T B - 2I \qquad (3.1)$$

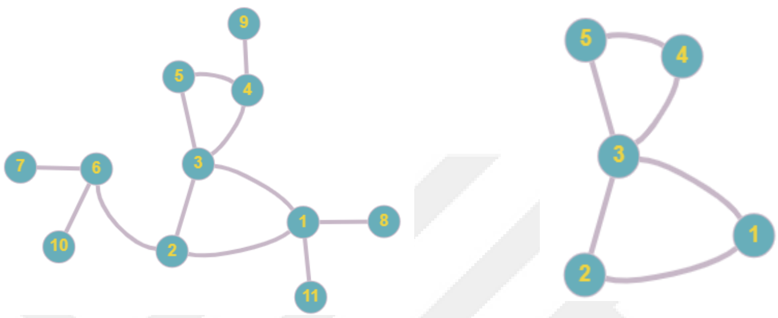
ile bulunur.

$$\overset{B^T}{\begin{bmatrix} 1&1&0&0&0&0\\ 1&0&1&0&0&0\\ 0&1&1&0&0&0\\ 0&0&1&1&0&0\\ 0&0&1&0&1&0\\ 0&0&0&1&1&0\\ 0&1&0&0&0&1 \end{bmatrix}} \text{x} \overset{B}{\begin{bmatrix} 1&1&0&0&0&0&0\\ 1&0&1&0&0&0&1\\ 0&1&1&1&1&0&0\\ 0&0&0&1&0&1&0\\ 0&0&0&0&1&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix}} - \overset{2I}{\begin{bmatrix} 2&0&0&0&0&0\\ 0&2&0&0&0&0\\ 0&0&2&0&0&0\\ 0&0&0&2&0&0\\ 0&0&0&0&2&0\\ 0&0&0&0&0&2 \end{bmatrix}} = \overset{L(G)}{\begin{bmatrix} 0&1&1&0&0&0&1\\ 1&0&1&1&1&0&0\\ 1&1&0&1&1&0&1\\ 0&1&1&0&1&1&0\\ 0&1&1&1&0&1&0\\ 0&0&0&1&1&0&0\\ 1&0&1&0&0&0&0 \end{bmatrix}}$$

Çizelge 4.1 Doğrusal grafın komşuluk matrisi hesabı

4.1.2. Çekirdek grafı

K(G) çekirdek grafı, bir grafın köşelerinin derecelerinin minimum 2 dereceli olacak şekilde indirgenmesi ile elde edilir. Yani, bir dereceli köşelerin graftan çıkarılmasıyla elde edilen graftır. Eğer hala sallanan kenar kalırsa bunlar da silinir. Bu işleme sallanan kenar kalmayana kadar devam edilir.



Şekil 4.2 Bir grafın çekirdeği

$$
A:\;
\begin{array}{c}
\left[\begin{array}{ccccccccccc}
0&1&1&0&0&0&0&1&0&0&1\\
1&0&1&0&0&1&0&0&0&0&0\\
1&1&0&1&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&1&0&0&0&1&0&0\\
0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&1&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{array}\right]
\begin{array}{c}4\\3\\4\\3\\2\\3\\1\\1\\1\\1\\1\end{array}
\\[6pt]
\begin{array}{ccccccccccc}4&3&4&3&2&3&1&1&1&1&1\end{array}
\end{array}
\rightarrow
A':\;
\begin{array}{c}
\left[\begin{array}{cccccc}
0&1&1&0&0&0\\
1&0&1&0&0&1\\
1&1&0&1&1&0\\
0&0&1&0&1&0\\
0&0&1&1&0&0\\
0&1&0&0&0&0
\end{array}\right]
\begin{array}{c}2\\3\\4\\2\\2\\1\end{array}
\\[6pt]
\begin{array}{cccccc}2&3&4&2&2&1\end{array}
\end{array}
\rightarrow
K(G)=A'':\;
\begin{array}{c}
\left[\begin{array}{ccccc}
0&1&1&0&0\\
1&0&1&0&0\\
1&1&0&1&1\\
0&0&1&0&1\\
0&0&1&1&0
\end{array}\right]
\begin{array}{c}2\\2\\4\\2\\2\end{array}
\\[6pt]
\begin{array}{ccccc}2&2&4&2&2\end{array}
\end{array}
$$

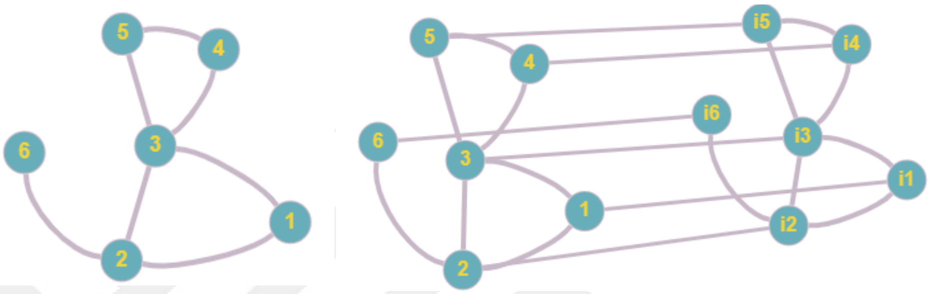
Çizelge 4.2 Çekirdek grafın komşuluk matrisi hesabı

Çekirdek grafının hesabı komşuluk matrisi hesabı yapılırken grafın komşuluk matrisin alt ve yan toplamalarında (derece dizisi) 1 olan satır ve sütun silinir. Bu işlem tekrarlanırsa sonuçta dereceleri 1’den büyük olan çekirdek grafının komşuluk matrisine ulaşılabilir.

Ayrıca matrisin sütun sırası derece değerlerini büyükten küçüğe sıralanırsa işlem basitçe son satır ve sütunları silmek olarak belirtilebilir.

4.1.3. Görüntü grafı

Im(G) görüntü grafı, bir grafın kendisi ve kopyası alınarak köşelerin kendi kopyalarıyla birleştirilmesiyle elde edilir.



Şekil 4.3 Görüntü grafı

Şekil 3.3'deki görüntü grafının komşuluk matrisi:

$$
\begin{array}{c}
A \\
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

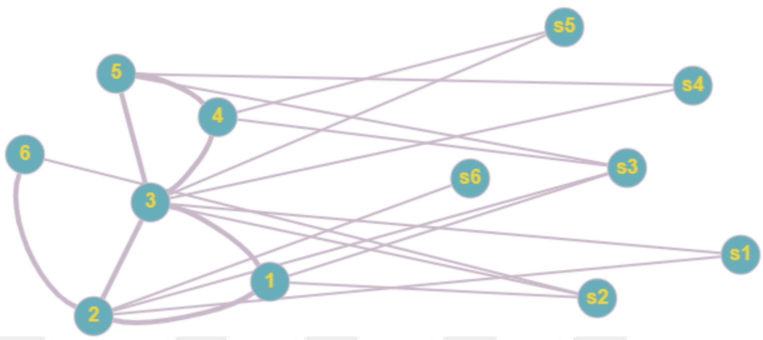
Çizelge 4.3 Görüntü grafın komşuluk matrisi

$$
A(Im(G)) = \begin{bmatrix} A(G) & I_{n\times n} \\ I_{n\times n} & A(G) \end{bmatrix} \tag{3.2}
$$

ile hesaplanır.

4.2. Gölge grafı

Sh(G) gölge grafı, bir grafın kendisi ile kenarları silinmiş olan kopyası alınıp grafın köşelerinin kenarsız kopyasında kendi komşularına denk gelen köşeler ile birleştirilmesiyle elde edilir.



Şekil 4.4 Gölge grafı

Şekil 3.4'deki gölge grafın komşuluk matrisi,

$$A(Sh(G)) = \begin{bmatrix} A(G) & A(G) \\ A(G) & 0_{n\times n} \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

A

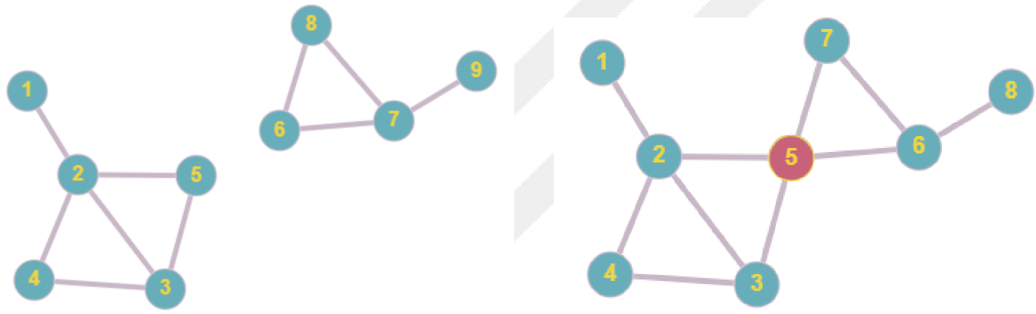
0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0
1	0	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1
1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0
0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0
0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0
1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Çizelge 4.4 Gölge grafın komşuluk matris

4.3. Graflarda işlemler

4.3.1. Köşe birleşimi

G_1 ve G_2 graflarının bir köşesini ortak kullanarak elde edilir. Bu işlem $G_1 \cap G_2$ ile gösterilsin. Herhangi bir karışıklığa yol açmamak için birleştirilecek noktaların ardışık indisli olmasına dikkat edilmelidir. Bu işlem ile edilen grafın komşuluk matrisini bulurken iki grafın da komşuluk matrisleri hesaplanıp G_1 matrisinin son satır ve sütün bileşeni ile G_2 matrisinin ilk satır ve sütün bileşeni denk gelecek şekilde birleştirilip kalan bileşenleri 0 ile doldurulur.



Şekil 4.5 Bir köşede birleştirilmiş graf

$A(G_1)$

0	1	0	0	0
1	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	0	0

$A(G_2)$

0	1	1	0
1	0	1	1
1	1	0	0
0	1	0	0

$A(\boldsymbol{G_1} \cap \boldsymbol{G_2})$

0	1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	0	0
0	1	0	1	1	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	1	0
0	0	0	0	1	0	1	1
0	0	0	0	1	1	0	0
0	0	0	0	0	1	0	0

Çizelge 4.5 Bir köşede birleştirilmiş grafın komşuluk matrisi

Şimdi bu iki matris yardımıyla $G_1 \cap G_2$ grafının mesafe matrisi hesaplanabilir. Burada iki grafın mesafe matrislerine ihtiyaç duyulacaktır. Bunlar elde edildikten sonra komşuluk matrisini elde etmede kullanılan aşamalar aynen uygulanacaktır. G_1 matrisin son sütunu ile G_2 matrisinin ilk satırını toplam tablosu oluşturacak şekilde kullanılsın. Son olarak bulunan toplam tablosunun sonucu bir T matrisi ile gösterilip T matrisi, transpozu ve 0 matrisleri yerine yerleştirilir.

D(G_1)

0	1	2	2	2
1	0	1	1	1
2	1	0	1	1
2	1	1	0	2
2	1	1	2	0

D(G_2)

0	1	1	2
1	0	1	1
1	1	0	2
2	1	2	0

D($\boldsymbol{G_1} \cap \boldsymbol{G_2}$)

0	1	2	2	2	0	0	0
1	0	1	1	1	0	0	0
2	1	0	1	1	0	0	0
2	1	1	0	2	0	0	0
2	1	1	2	0	1	1	2
0	0	0	0	1	0	1	1
0	0	0	0	1	1	0	2
0	0	0	0	2	1	2	0

Toplam Tablosu

2	3	3	4
1	2	2	3
1	2	2	3
2	3	3	4
0	1	1	2

T

3	3	4
2	2	3
2	2	3
3	3	4

T^T

3	2	2	3
3	2	2	3
4	3	3	4

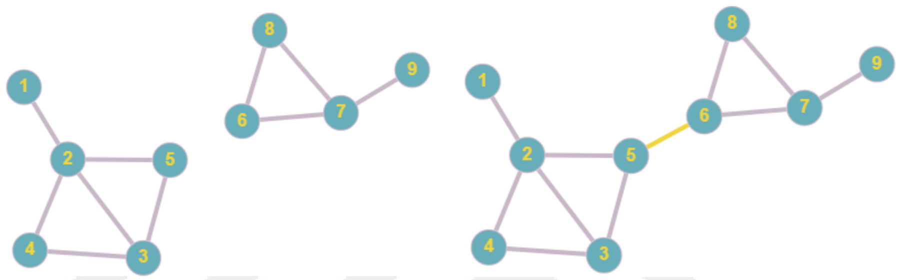
D

0	1	2	2	2	3	3	4
1	0	1	1	1	2	2	3
2	1	0	1	1	2	2	3
2	1	1	0	2	3	3	4
2	1	1	2	0	1	1	2
3	2	2	3	1	0	1	1
3	2	2	3	1	1	0	2
4	3	3	4	2	1	2	0

Çizelge 4.6 Bir köşede birleştirilmiş grafın mesafe matrisi

4.3.2. Köprü ekleme

G_1 ve G_2 graflarının arasında bir köprü oluşturacak şekilde yeni bir kenar eklenerek elde edilir. $A(G_1 \cdots G_2)$ ile gösterilsin. Bu iki grafın bir kenar ile birleştirilecek köşeleri ardışık şekilde indislenmelidir. İki grafın komşuluk matrisleri bulunup bunları aşağıda verilecek şekilde bir bağlantısız grafın komşuluk matrisi oluşturulur. Ardından birleştirilen ardışık köşelerin komşu olduğunu göstermek için 1 elemanları eklenir.



Şekil 4.6 İki grafın köprü ile birleştirilmesi

$$A(G_1) = \begin{bmatrix} 0&1&0&0&0\\ 1&0&1&1&1\\ 0&1&0&1&1\\ 0&1&1&0&0\\ 0&1&1&0&0 \end{bmatrix} \qquad A(G_2) = \begin{bmatrix} 0&1&1&0\\ 1&0&1&1\\ 1&1&0&0\\ 0&1&0&0 \end{bmatrix}$$

$$A(G_1 U G_2) = \begin{bmatrix} 0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&1&1&1&0&0&0&0\\ 0&1&0&1&1&0&0&0&0\\ 0&1&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&1&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&1&1\\ 0&0&0&0&0&1&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0 \end{bmatrix} \rightarrow A(G_1 \cdots G_2) = \begin{bmatrix} 0&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&1&1&1&0&0&0&0\\ 0&1&0&1&1&0&0&0&0\\ 0&1&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&1&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&1&1&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&1&1\\ 0&0&0&0&0&1&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0 \end{bmatrix}$$

Çizelge 4.7 Bir köprü ile birleştirilmiş grafın komşuluk matrisi

Şimdi elde edilen grafın mesafe matrisi kolayca hesap edilebilir. Bunun için iki grafın mesafe matrisini elde ettikten sonra bu grafları bağlantısız iki graf mesafe matrisi şeklinde bir mesafe matrisi oluşturulacaktır. G_1 grafının mesafe matrisinin son sütünü ile G_2 grafının mesafe matrisinin ilk satırının her elemanın bir fazlasını alarak toplam tablosu oluşturulacaktır. Son olarak bulunan toplam tablosunun sonucu bir T matrisi ile gösterilip T matrisi, transpozu ve 0 matrisleri yerine yerleştirilecektir:

D(G₁)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

D(G₂)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc} & 0 & 1 & 1 & 2 \\ + & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 2 & 2 & 3 \end{array}$$

D(G₁UG₂)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

D(G₁···G₂)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 4 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 3 & 4 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 3 & 4 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 3 & 4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 4 & 5 & 3 & 2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 3 & 4 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ + & 1 & 2 & 2 & 3 \end{array}$$

T

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

T^T

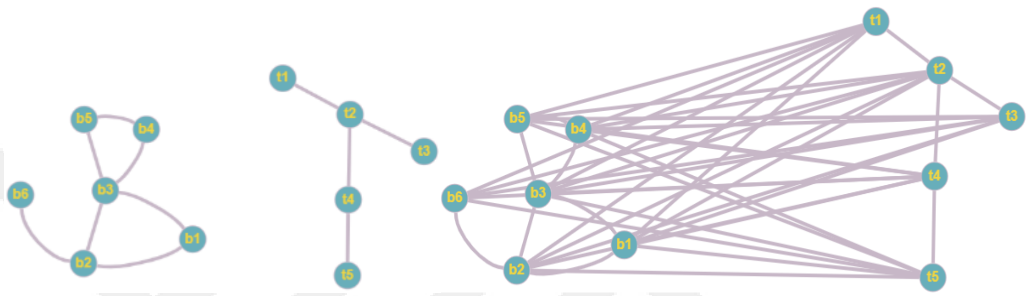
$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 3 & 4 & 2 \\ 5 & 4 & 4 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Çizelge 4.8 Bir köprü ile birleştirilmiş grafın mesafe matrisi

4.3.3. Toplama

G_1 ve G_2 graflarının toplamı, köşe kümesi $V_1 \cup V_2$ ve kenar kümesi hem G_1 ve G_2 graflarının kenarlarını hem de G_1 grafındaki her bir köşe ile G_2 grafındaki köşelerin birleştirilmesiyle oluşan kenarların oluşturduğu graftır. G_1+G_2 ile gösterilir.

Köşe dereceleri hesaplanırsa, her nokta komşularına 1 uzaklıkta iken diğer noktalara karşısındaki grafa gidip geldiğinden uzaklığı 2 olacağı görülür. Basitçe bu grafı oluşturmak için bir komşuluk matrisi oluşturulsun.



Şekil 4.7 İki grafın toplamı

$$
A(G_1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\qquad
A(G_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
A(G_1+G_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}
$$

Çizelge 4.9 İki grafın toplamının komşuluk matrisi

$$Köşe\ sayısı: n_1 + n_2$$

$$Kenar\ sayısı: m_1 + m_2 + n_1 . n_2$$

$$\mathrm{A}(G_1 + G_2) = \begin{bmatrix} G_{1_{n_1 \times m_1}} & J_{n_1 \times m_2} \\ J_{n_2 \times m_1} & G_{2_{n_2 \times m_2}} \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

ile hesaplanır.

4.3.4. Kartezyen çarpım

$G_1 \boxtimes G_2$ kartezyen çarpım grafı $V(G_1 \boxtimes G_2)=V(G_1).V(G_2)$ köşe kümesi üzerinde $\boldsymbol{u}=(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2)$ ve $v=(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2)$ köşelerinin ya birinci bileşenler eşitken ikinci bileşenlerin komşu olması ya da ikinci bileşenler eşitken birinci bileşenlerin komşu olması durumunda iki köşenin bir kenar oluşturmasıyla elde edilen graftır.

Kartezyen çarpım ne kadar karmaşık olsa da aşağıdaki adımları uygulayarak komşuluk matrisi kolayca elde edilebilir. İlk olarak iki grafın komşuluk matrisleri elde edilir. İkinci grafımızda her bir bileşeni incelenir. Eğer, bileşenler köşegen üzerindeyse o bileşen yerine ilk grafın matrisi yazılır. Değilse iki durum vardır: komşuluk değeri 1 ise birim matris o bileşen yerine yazılır, komşuluk değeri 0 ise sıfır matrisi yazılır. Bu matrisler ilk matrisin boyutundadır. Kartezyen çarpımının komşuluk matrisi bu şekilde elde edilir.

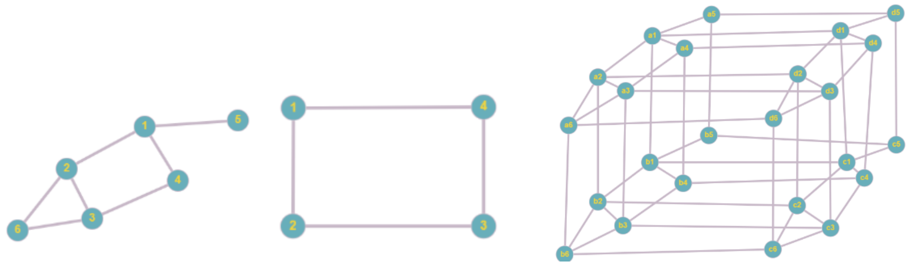
$$Köşe\ sayısı:\ n_1.n_2$$

$$Kenar\ sayısı: n_1.m_2 + m_1.n_2$$

$$\mathrm{a}_{ij} \in G_2\ \ için\ \mathrm{h}_{ij} = \begin{cases} \mathrm{a}_{ij} = 0 & ; \mathrm{h}_{ij} = 0_{n\times m} \\ \mathrm{a}_{ij} = 1 & ; \mathrm{h}_{ij} = I_{n\times m} \\ j = i & ; \mathrm{h}_{ij} = A(G_1) \end{cases}$$

$$A(G_1 \boxtimes G_2) = \begin{bmatrix} \mathrm{h}_{ij} & \cdots & \mathrm{h}_{ij} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{h}_{ij} & \cdots & \mathrm{h}_{ij} \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

Aşağıdaki gösterimden yararlanılabilir:



Şekil 4.8 İki grafın kartezyen çarpımı

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0&1&0&1&1&0\\ 1&0&1&0&0&1\\ 0&1&0&1&0&1\\ 1&0&1&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0\\ 0&1&1&0&0&0 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 0&1&0&1\\ 1&0&1&0\\ 0&1&0&1\\ 1&0&1&0 \end{bmatrix}$$

$$A_1 \boxtimes A_2 = \left[\begin{array}{cccccc|cccccc|cccccc|cccccc}
0&1&0&1&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
1&0&1&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&1&0&1&0&1&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\
1&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\
\hline
1&0&0&0&0&0&0&1&0&1&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&1&0&1&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&1&0&1&0&1&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
\hline
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&1&1&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&1&0&0&1&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&1&0&1&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\
\hline
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&1&1&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&1&0&0&1\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&1&0&1\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&1&0&0&0
\end{array}\right]$$

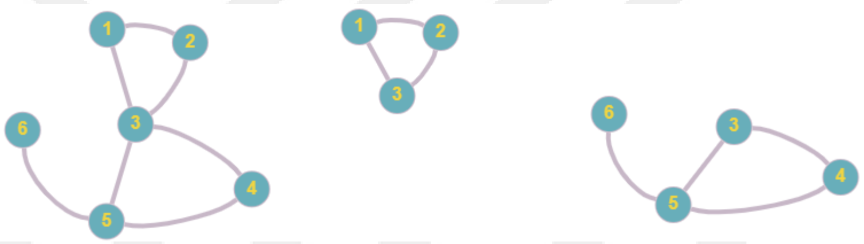
Çizelge 4.10 İki grafın kartezyen çarpımın komşuluk matrisi

A_2 grafı bir harita gibi düşünülebilir. Bu harita sayesinde kartezyen çarpım grafı kolaylıkla elde edebilir.

4.3.5. Simetrik fark

Simetrik fark işlemi “G_1 ve G_2 graflarının köşelerinin oluşturduğu sıralı ikililerin arasında iki bileşeni de kendi grafında komşuysa komşu değildir” olarak tanımlanır.

Bu işlem, basit olarak iki grafın sıralı bir şekilde olmasına dikkat ederek komşuluk matrislerinin farkını bularak elde edilir. Tabii ki köşe sayıları farklı olabileceğinden küçük boyutlu matrise 0 satır ve sütunları ile aynı kare matrise ulaştırıp çıkarma işlemi yapılır. Bağlantısız noktalardan kurtulmak için 0 satır ve sütunlarını silinir. İndisleme farklı olursa tamamen farklı bir graf elde edilir.



Şekil 4.9 Grafların simetrik farkı

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}} - \underset{A'}{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \underset{A-A'}{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}$$

Çizelge 4.11 Grafların simetrik farkının komşuluk matrisi

$$Köşe\ sayısı:\ n_1.n_2$$

$$Kenar\ sayısı: 2.n_1.m_2 + 2.n_2m_1 - 4.m_1.m_2 \tag{3.6}$$

4.3.6. Taç çarpımı

Taç çarpımının hesaplanması için iki grafın komşuluk matrisi kullanılacaktır. Hangi grafın merkezde olduğu önemlidir. Bu grafa birinci graf denilsin. Bu graftaki tüm köşelerin karşısında ikinci graf çizilsin ve tüm köşelerle birleştirilsin. Bu sayede taç grafı çizilmiş olacaktır. Şimdi ikinci grafın komşuluk matrisinin üst ve sol tarafına bir satır ve sütün eklensin ilk bileşen ilk grafın komşuluk matrisi diğer bileşenler birim matris olacak şekilde alınır. Geri kalan matris elemanlarının bileşenleri 1 ise birim matris, 0 ise sıfır matris yazılarak grafın komşuluk matrisi oluşturulur.

Şekil 4.10 Taç çarpımı

$$Köşe\ sayısı:\ n_1 + n_1.n_2$$

$$Kenar\ sayısı:\ m_1 + n_1.(m_2 + n_2)$$

$$\mathrm{a}_{ij} \in G_2\ \ için\ \mathrm{h}_{ij} = \begin{cases} \mathrm{a}_{ij} = 0 & ;\mathrm{h}_{ij} = 0_{n\times m} \\ \mathrm{a}_{ij} = 1 & ;\mathrm{h}_{ij} = I_{n\times m} \end{cases}$$

$$\mathrm{A}(G_1 \mathrm{x} G_2) = \begin{bmatrix} A(G_1) & I & \cdots & \mathrm{I} \\ I & \mathrm{h}_{ij} & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathrm{I} & & \cdots & \mathrm{h}_{ij} \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

A(G_1)

0	0	0	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0

A(G_2)

0	0	1	0
0	0	1	0
1	1	0	1
0	0	1	0

A(G_1 x G_2)

A	I	I	I	I
I	0	0	I	0
I	0	0	I	0
I	I	I	0	I
I	0	0	I	0

A(G_1 x G_2)

0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0
1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0

Çizelge 4.12 Taç çarpımı komşuluk matrisi

5. SONUÇ

Yapılan işlemler excel üzerinden detaylı örneklerle kontrol edilmiştir. Graphonline.ru internet sitesinin sunmuş olduğu algoritmalarla hesaplamalar yapılmış ve excelde kendi kurduğumuz hesaplamalar ile birleştirerek bileşen sayısının artışından doğan karmaşadan sıyrılarak genellemelere ulaşılmıştır. Bu sayede bir grafın komşuluk, bitişiklik, mesafe matrisleri ve derece dizilerinin birbiriyle ilişkileri incelenmiş, statü ve statü indeksleri hesabında kullanımı gösterilmiştir. Çekirdek, gölge, görüntü graf türlerinin genellemelerine bu sayede ulaşılmıştır.

KAYNAKLAR

Chung, F. (1992). Spektral Graf Teorisi, Amerikan Matematik Derneği. ISBN 978-0821803158.

Delen, S. (2019). Omega İnvaryantı, Doktora Tezi, Bursa Uludağ Üniversitesi Fen.

Euler, L. (1736). Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis (http://math.dartmouth.edu/~euler/.

Harary, F. (1959). Status and contrastatus, Sociometry, 22, 23–43.

Wiener, H. (1947). Structural determination of paraffin boiling points, J. Am.

Horn, A. R., Johnson, R. C., (1990). Matrix Analysis.

Gutman, I., Trinajstic, N. (1972). Graph theory and molecular orbitals. Total π-electron energy of alternant hydrocarbons, Chem. Phys. Lett., 17.

Skiena, S. (1990). Line Graph. in Implementing Discrete Mathematics: Combinatorics and Graph Theory with Mathematica. Reading, MA: Addison-Wesley, pp. 128 and 135-139.

Thomas, P. A., Asharafi, A. R. and Bindhu K. (2020). *Distance matrix from adjacency matrix*.

Yalnaik, H. S. (2016). *Status connectivity indices of graphs and its applications.*