

DÜZLEMSEL ÇİZGELERİN 2-UZAKLI RENKLENDİRMESİ**ELİF ARAS****YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI****DANIŞMAN
DOÇ. DR. ZAKİR DENİZ****DÜZCE, 2025**

T.C.
DÜZCE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

DÜZLEMSEL ÇİZGELERİN 2-UZAKLI RENKLENDİRMESİ

Elif ARAS tarafından hazırlanan tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından Düzce Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Doç. Dr. Zakir DENİZ
Düzce Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Zakir DENİZ
Düzce Üniversitesi

Doç. Dr. İzzetin DEMİR
Düzce Üniversitesi

Dr. Öğr. Üyesi Hakan GÜLER
Kastamonu Üniversitesi

Tez Savunma Tarihi: 22 Nisan 2025

BEYAN

Bu tez çalışmasının kendi çalışmam olduğunu, tezin planlanmasından yazımına kadar bütün aşamalarda etik dışı davranışımın olmadığını, bu tezdeki bütün bilgileri akademik ve etik kurallar içinde elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara kaynak gösterdiğimi ve bu kaynakları da kaynaklar listesine aldığımı, yine bu tezin çalışılması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını beyan ederim.

22 Nisan 2025

Elif ARAS

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmam süresince bana yol gösteren, değerli bilgi ve deneyimlerini paylaşarak rehberlik eden, sabır ve anlayışıyla her adımda yanımda olan kıymetli danışman hocam Doç.Dr. Zakir Deniz'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Bu sürecin her aşamasında bana sağladığı destek, motivasyon ve yönlendirmeler sayesinde bu çalışmayı tamamlayabildim. Kendisine, üzerimdeki emeği ve akademik gelişimime olan katkıları için minnettarım.

Yüksek Lisans eğitimim esnasında 2210-A Genel Yurt İçi Yüksek Lisans Burs Programı ile beni maddi olarak destekleyen TÜBİTAK'a teşekkürlerimi sunarım.

Bu tez çalışmam boyunca bana sonsuz destek veren, her zaman yanımda olan ve sevgileriyle bana güç katan canım aileme en derin teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, her zaman yanımda olan, benimle bu sürecin sevinçlerini ve zorluklarını paylaşan sevgili arkadaşlarıma da teşekkür ederim. Bu tez, ailem ve dostlarımin varlığıyla daha özel ve anlamlı hale geldi. Hepinize sonsuz teşekkürler.

22 Nisan 2025

Elif ARAS

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ŞEKİL LİSTESİ	vi
SİMGELER	vii
ÖZET	viii
ABSTRACT	ix
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	3
3. DÜZLEMSEL ÇİZGELER VE RENKLENDİRME	6
3.1. DÜZLEMSEL ÇİZGELER.....	6
3.2. RENKLENDİRME	8
4. DEŞARJ METODU	10
5. DÜZLEMSEL ÇİZGELERİN 2-UZAKLI RENKLENDİRMESİ...	13
6. SONUÇ.....	31
7. KAYNAKLAR.....	32
ÖZGEÇMİŞ.....	34

ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 2.1. Köşelerin derecesi ve komşusu.....	3
Şekil 2.2. Sırasıyla P_5 , C_5 ve K_5 çizgeleri.....	4
Şekil 2.3. $\chi(G) = 4$ olacak şekilde bir G çizgesinin köşe renklendirmesi.	5
Şekil 2.4. Bir G çizgesinin 2-uzaklı renklendirmesi.....	5
Şekil 3.1. Düzlemsel çizge	6
Şekil 3.2. $ V =6$, $ E =9$, $ F =5$ olan bir düzlemsel çizge.....	7

SİMGELER

$V(G)$	G çizgesinin köşelerinin kümesi
$E(G)$	G çizgesinin kenarlarının kümesi
$F(G)$	G çizgesinin yüzlerinin kümesi
$\Delta(G)$	G çizgesinin maksimum derecesi
$\delta(G)$	G çizgesinin minimum derecesi
$d_G(v)$	v köşesinin G çizgesindeki derecesi
$ad(G)$	G çizgesinin ortalama derecesi
$N(v)$	v köşesinin komşularının kümesi
$\chi_2(G)$	G çizgesinin 2 uzaklı köşe kromatik sayısı
$n_i(v)$	v köşesinin i dereceli komşularının sayısı
$g(G)$	G çizgesinin çevrimi
k - köşe	k dereceye sahip köşeleri tanımlar
k^- - köşe	k dereceye sahip veya daha az dereceye sahip köşeleri tanımlar
k^+ - köşe	k dereceye sahip veya daha fazla dereceye sahip köşeleri tanımlar
$k(d)$ -köşe	d tane 2 dereceli komşuya sahip k dereceli köşeleri tanımlar
$ G $	G çizgesinin köşe sayısı
$\mu(v)$	v köşesinin başlangıç yükü
$\mu^*(v)$	yük dağılımı sonrası v köşesinin son yükü
$\mu(f)$	f yüzünün başlangıç yükü
$\mu^*(f)$	yük dağılımı sonrası f yüzünün son yükü

ÖZET

DÜZLEMSEL ÇİZGELERİN 2-UZAKLI RENKLENDİRMESİ

Elif ARAS

Düzce Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi
Danışman: Doç. Dr. Zakir DENİZ
Nisan 2025, 33 sayfa

Bir çizgede, komşu köşelerin farklı renk alması koşuluyla yapılan tüm köşelerin renklendirmesine köşe renklendirme denir. 2-uzaklı renklendirme ise, yalnızca komşu köşelerin değil, aynı zamanda ortak bir komşuya sahip olan (birbirine 2-uzaklıkta bulunan) köşelerin de farklı renk almasıyla oluşturulan bir renklendirme türüdür. Bir G çizgesinin 2-uzaklı renklendirmesinde kullanılan en az renk sayısına çizgenin 2-uzaklı renklendirme sayısı denir ve $\chi_2(G)$ ile gösterilir. Çizgenin çevrim parametresi, içerdiği en kısa döngünün uzunluğuna karşılık gelmektedir. Meşhur Dört Renk Teoremi'ne göre, bir düzlemsel çizgenin klasik köşe renklendirmesi için 4 renk yeterlidir. Ancak, 2-uzaklı renklendirme söz konusu olduğunda bu sayı çok daha büyük değerlere ulaşabilmektedir. Bu çalışmada, çevrim parametresi en az 5 olan düzlemsel çizgeler ele alınmış ve maksimum derece $\Delta(G) \geq 12$ olduğunda, $\chi_2(G) \leq \Delta(G) + 5$ olduğu ispatlanmıştır. Elde edilen bu sonuç, literatürde Zhu ve Bu [4] tarafından elde edilen sonucu iyileştirmektedir.

Anahtar sözcükler: Renklendirme, uzaklık, maksimum derece.

ABSTRACT

THE 2-DISTANCE COLORING OF PLANAR GRAPHS

Elif ARAS

Düzce University
Graduate School, Department of Mathematics
Master's Thesis
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Zakir DENİZ

April 2025, 33 pages

A vertex coloring of a graph refers to an assignment of colors to all vertices such that adjacent vertices receive different colors. 2-distance coloring is a type of coloring in which not only adjacent vertices but also vertices that are at a distance of 2 (i.e., those sharing a common neighbor) receive different colors. The minimum number of colors required for a 2-distance coloring of a graph G is called the 2-distance chromatic number and is denoted by $\chi_2(G)$. The girth of a graph corresponds to the length of its shortest cycle. According to the famous Four Color Theorem, 4 colors are sufficient for the classical vertex coloring of a planar graph. However, for 2-distance coloring, this number can be significantly larger. In this study, we consider planar graphs with girth at least 5, and we prove that $\chi_2(G) \leq \Delta(G) + 5$ when the maximum degree $\Delta(G) \geq 12$. This result improves upon the previously known result by Zhu and Bu [4].

Keywords: Coloring, distance, maximum degree.

1. GİRİŞ

Çizge teorisi, matematiğin temel taşlarından biri olup, köşe ve kenarlardan oluşan yapılarla ilgilenen bir disiplindir. İlk olarak 18. yüzyılda Leonhard Euler tarafından Königsberg Köprüleri problemi ile ortaya atılmış ve o zamandan bu yana, pek çok farklı bilim dalında uygulama alanı bulmuştur. Özellikle bilgisayar bilimi, biyoloji, sosyal ağlar ve lojistik gibi alanlarda geniş bir kullanım sahası olan çizge teorisi, karmaşık ilişkileri ve yapıları modellemek için etkili bir araç sunmaktadır.

Özel bir çizge sınıfı olan düzlemsel çizgeler, bir düzlem üzerinde kenarları kesişmeden çizilebilen çizgelerdir. Düzlemsel çizgeler, planlama ve ağ tasarımı gibi pratik problemlerin çözümünde kritik bir rol oynar. Bu bağlamda, düzlemsel çizgelerle ilgili pek çok önemli teorem ve özellik geliştirilmiştir. Örneğin, Euler'in çokyüzlü teoremi ve Kuratowski'nin teoremi, düzlemsel çizgelerin yapısal özelliklerini anlamamızı sağlar.

Dört Renk Teoremi, düzlemde çizilmiş herhangi bir haritanın, komşu bölgeler aynı renkte olmayacak şekilde en fazla dört renkle boyanabileceğini ifade eden önemli bir matematiksel sonuçtur. İlk olarak 1852 yılında Francis Guthrie tarafından ortaya atılan bu problem, 1976'da Appel ve Haken tarafından bilgisayar destekli bir ispatla çözülerek matematik tarihinde bir dönüm noktası olmuştur. Çizge renklendirme, bir çizgedeki köşelerin veya kenarların belirli kurallara uygun şekilde boyanması işlemidir. En yaygın kullanılan türü köşe renklendirmesi olup, burada birbirine komşu olan köşeler farklı renkler alacak şekilde renklendirilir. Bu tezde, düzlemsel çizgelerin renklendirilmesi incelenecek olup, Dört Renk Teoremi'nin temel ilkeleri ve bu bağlamdaki uygulamaları ele alınacaktır.

Çizge renklendirme teorisinin önemli dallarından biri olan 2-uzaklı renklendirme, bir çizgenin komşu olmayan ancak en fazla iki uzaklıktaki köşelerinin aynı renge sahip olmamasını gerektirir. Bu tür renklendirme problemleri, özellikle ağ tasarımı ve frekans atama gibi alanlarda büyük önem taşımaktadır. Wegner savı ise belirli sınırlamalar altında düzlemsel çizgelerin 2-uzaklı kromatik sayısı hakkında önemli tahminler sunarak bu

alandaki çalışmalar için temel bir çerçeve oluşturur. Bu tezde, düzlemsel çizgelerin 2-uzaklı renklendirilmesi ele alınarak, Dört Renk Teoremi ile olan bağlantıları ve Wegner savı doğrultusunda elde edilen sonuçlar incelenecektir.

Bir G çizgesinin 2-uzaklı renklendirmesi için gerekli en az renk sayısına çizgenin 2-uzaklı renklendirme sayısı denir ve $\chi_2(G)$ ile gösterilir. Çizgenin çevrim parametresi, içerdiği en kısa döngünün uzunluğuna karşılık gelmektedir ve $g(G)$ ile ifade edilmektedir.

Wegner [15], 1977 yılında şu iddiayı ortaya atmıştır: Her G düzlemsel çizgesi için $\Delta(G)$ maksimum derece olmak üzere

$$\chi_2(G) \leq \begin{cases} 7 & \text{eğer } \Delta(G) = 3 \text{ ise,} \\ \Delta(G) + 5 & \text{eğer } 4 \leq \Delta(G) \leq 7 \text{ ise,} \\ \frac{3\Delta(G)}{2} + 1 & \text{eğer } \Delta(G) \geq 8 \text{ ise,} \end{cases}$$

sağlanır.

Thomassen [14], bu varsayımın $\Delta = 3$ olan düzlemsel çizgeler için geçerli olduğunu kanıtlamıştır. Ancak, $\Delta \geq 4$ olan düzlemsel çizgeler için hala açık bir sorudur. Üst sınırlar için, van den Heuvel ve McGuinness [9], $\chi_2(G) \leq 2\Delta + 25$ olduğunu ortaya koymuş, Molloy ve Salavatipour [13] ise $\chi_2(G) \leq \lceil \frac{5}{3}\Delta \rceil + 78$ olduğunu kanıtlamıştır. Kısa döngü içermeyen düzlemsel çizgeler için, Bu ve Zhu [3], $g(G) \geq 5$ ve $\Delta \geq 15$ iken $\chi_2(G) \leq \Delta + 5$ olduğunu ortaya koymuşlardır. Bu tezde, Bu ve Zhu'nun [4] sonucunu şu şekilde geliştiriyoruz; G düzlemsel çizgesinde $g(G) \geq 5$ ve $\Delta(G) \geq 12$ iken $\chi_2(G) \leq \Delta + 5$ dir.

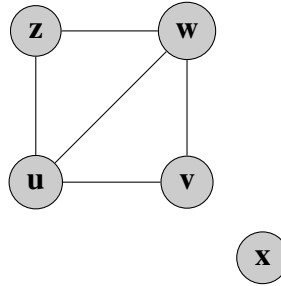
Bölüm 5'te elde edilen sonuçlar [2] çalışmasına dayanmaktadır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Burada, bu çalışma boyunca kullanılacak bazı temel tanım ve kavramlara yer verilmiştir. V sonlu bir küme ve $E, V \times V$ nin çoklu bir alt kümesi olmak üzere, $G = (V, E)$ ikilisine bir çizge denir. Burada G nin köşelerinin kümesi $V(G)$ ve G nin kenarlarının kümesi $E(G)$ ile adlandırılır. Bir (u, v) kenarını kısaca uv şeklinde gösteririz. Bir G çizgesinin kenar sayısı $\|G\|$ ve köşe sayısı $|G|$ ile gösterilir.

Bir G çizgesinde u köşesi için uu şeklinde gösterilen her bir kenara bukle (loop) denir. Eğer $E(G)$ de uv kenarları arasında birden fazla kopya varsa bu kenarlara u ve v köşeleri arasındaki katlı kenarlar denir. Bir G çizgesinde eğer bukle veya katlı kenar yok ise basit çizge olarak adlandırılır. Bu çalışma boyunca sadece basit çizgeler üzerinden ilerlenecektir.

G çizgesine ait bir kenarın iki uç noktasına komşu köşeler denir. Bir $G = (V, E)$ çizgesi ve $v \in V$ için $N_G(v) = \{u \in V : uv \in E\}$ kümesine v 'nin komşuları kümesi denir. $|N_G(v)|$ sayısına v 'nin derecesi denir ve $d(v)$ ile gösterilir.



$$N_G(u) = \{z, w, v\}, N_G(z) = \{u, w\}, d(v) = 2, d(x) = 0$$

Şekil 2.1. Köşelerin derecesi ve komşusu

Bir $G = (V, E)$ çizgesinde, G nin minimum derecesi $\delta(G) = \min\{d(v) : v \in V\}$ ve maksimum derecesi $\Delta(G) = \max\{d(v) : v \in V\}$ şeklinde ifade edilir.

Tanım 2.1. Bir $G = (V, E)$ çizgesinde $V' \subseteq V$ ve $E' \subseteq E$ olacak şekilde $H = (V', E')$ çizgesine G çizgesinin bir alt çizgesi denir ve $H \subseteq G$ ile gösterilir. Herhangi bir $S \subseteq V(G)$

için, $G[S] = (S, E \cap (S \times S))$ çizgesine G çizgesinin S tarafından indirgenmiş bir alt çizgesi denir. H çizgesi G çizgesinin bir indirgenmiş alt çizgesi ise $H \leq G$ ile gösterilir. H, G nin alt çizgesi olmak üzere,

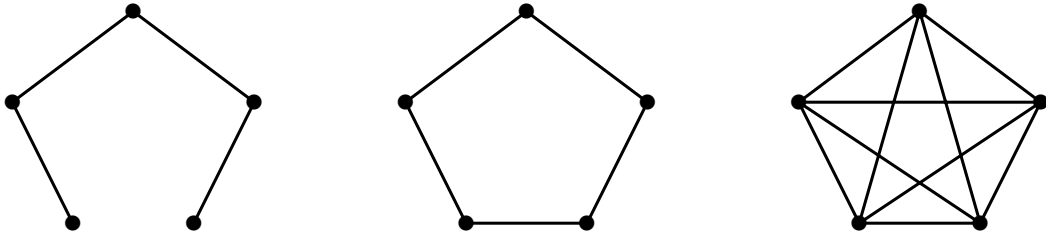
$$G - H = G[V(G) - V(H)],$$

$$G \setminus H = (V(G), E(G) - E(H))$$

olarak tanımlanır.

$S \subseteq V(G)$ olmak üzere, $G[V - S]$ indirgenmiş alt çizgesi için kısaca $G - S$ gösterimi kullanılacaktır. Ayrıca bir $u \in V(G)$ için $G - \{u\}$ çizgesi kısaca $G - u$ ile gösterilir.

Tanım 2.2. Köşe kümesi $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ve kenar kümesi $E = \{v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n\}$ şeklinde tanımlanan bir $G = (V, E)$ çizgesi n -yol çizgesi (ya da $v_1 - v_n$ yolu) olarak adlandırılır ve bu çizge P_n ile gösterilir. Bir n -yol çizgesinin kenar sayısına bu yol çizgesinin uzunluğu denir. Dolayısıyla P_n çizgesi $n - 1$ uzunluktadır. $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ve $E = \{v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n, v_nv_1\}$ olacak şekilde tanımlanan $G = (V, E)$ çizgesine ise n -döngü denir ve bu çizge C_n ile gösterilir. Köşelerinin hepsi birbirine komşu olan n köşeli bir çizge n -tam çizge olarak adlandırılır ve K_n ile gösterilir. Şekil 2.2 çizgesinde bazı özel çizge örnekleri verilmiştir.

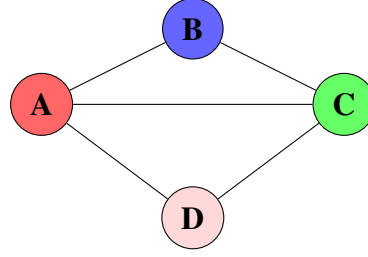


Şekil 2.2. Sırasıyla P_5 , C_5 ve K_5 çizgeleri.

Tanım 2.3. G çizgesinde $u, v \in V(G)$ köşeleri için mevcut olan en kısa $u - v$ yolunun uzunluğuna u ile v köşeleri arasındaki uzaklık denir ve bu sayı $d_G(u, v)$ ile gösterilir.

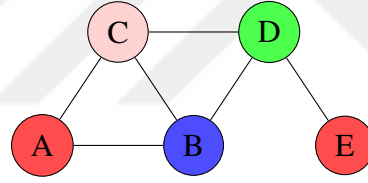
Tanım 2.4. Bir G çizgesi için $uv \in E(G)$ iken $\kappa(u) \neq \kappa(v)$ olacak şekilde tanımlanan $\kappa : V(G) \rightarrow [k]$ örten fonksiyonuna G nin (köşelerinin) k -renklendirmesi denir. G çizgesinin k -renklendirmesi varsa G çizgesi k -renklendirilebilirdir denir. G çizgesini k -renklendirilebilir yapan en küçük k pozitif tam sayısına G nin kromatik sayısı denir ve

bu sayı $\chi(G)$ ile gösterilir.



Şekil 2.3. $\chi(G) = 4$ olacak şekilde bir G çizgesinin köşe renklendirmesi.

G çizgesinde birbirine uzaklığı en fazla 2 olan köşeler farklı renge sahip olacak şekilde yapılan renklendirmeye 2-uzaklı renklendirme denir. Bir G çizgesinin 2-uzaklı renklendirmesi için gereken minimum renk sayısına G nin 2-uzaklı kromatik sayısı denir ve $\chi_2(G)$ ile gösterilir.



Şekil 2.4. Bir G çizgesinin 2-uzaklı renklendirmesi

Tanım 2.5. Bir $v \in V$ köşesi için:

- $d(v) = k$ ise v ye k -dereceli köşe,
- $d(v) \leq k$ ise v ye k^- -dereceli köşe,
- $d(v) \geq k$ ise v ye k^+ -dereceli köşe denir.

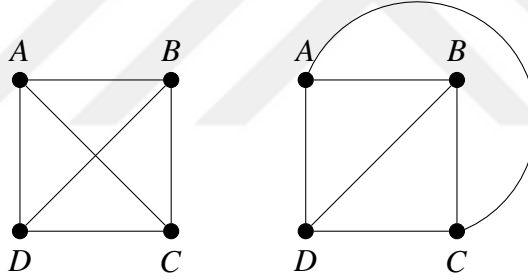
Ayrıca, bir G çizgesinde bulunan k dereceli köşenin d dereceli komşularının sayısı $k(d)$ -köşe ile gösterilir.

3. DÜZLEMSEL ÇİZGELER VE RENKLENDİRME

3.1. DÜZLEMSEL ÇİZGELER

Düzlemsel çizgeler, çizge teorisinin önemli bir sınıfı olup, bir çizgenin düzlem üzerinde, kenarları kesişmeden çizilebilme özelliğiyle tanımlanır. Düzlemsel çizgelerin kökeni, Leonhard Euler'in 18. yüzyıldaki çalışmalarına kadar uzanır. Euler, 1750 yılında çokyüzlüler (polyhedra) üzerinde çalışırken, bu tür çizgelerin temel özelliklerini ve matematiksel yapılarını incelemiştir.

Düzlem üzerine kenarları kesişmeden çizilebilen çizgeler düzlemsel çizge olarak adlandırılır.



Şekil 3.1. Düzlemsel çizge

Şekil 3.1 de bulunan ilk çizge 4 köşe ve 6 kenarı bulunan çizge, ikinci çizgedeki gibi bir düzlem üzerine kenarları kesişmeyecek biçimde çizilebilir. Böylece bu bir düzlemsel çizge olur.

Bir düzlemsel çizgede kenarlarla sınırlandırılmış her kapalı bölgeye yüz denir ve G çizgesinin yüzleri kümesi $F(G)$ ile gösterilir.

Önerme 3.1. $K_{3,3}$ ve K_5 düzlemsel çizge değildir.

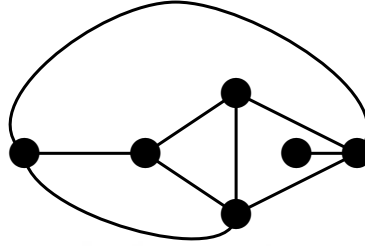
Teorem 3.2 (Euler Formülü). Düzlemsel bir G çizgesi için,

$$|V(G)| - |E(G)| + |F(G)| = 2$$

sağlanır.

Basitlik açısından $V(G)$, $E(G)$ ve $F(G)$ yerine sırasıyla V , E ve F kullanılacaktır.

Euler formülü düzlemsel bir çizgede köşe, kenar ve yüz sayıları arasındaki ilişkiyi belirten bir ifadedir. Şekil 3.2 de, düzlemsel G çizgesi için $V - E + F = 2$ olduğu görülür.



Şekil 3.2. $|V|=6$, $|E|=9$, $|F|=5$ olan bir düzlemsel çizge.

Buradan hareketle, düzlemsel bir çizge için maksimum kenar sayısı $|E|$ aşağıdaki gibi hesaplanır.

Lemma 3.3. Bir G çizgesi bağlantılı düzlemsel çizge ve $|V| \geq 2$ ise buradan, $|E| \leq 3|V| - 6$.

İspat. Çizgedeki her yüz en az 3 kenarlı bir üçgensel bölgedir. Böylece her yüz en az 3 kenara sahiptir, ancak her kenar iki yüz tarafından sayılır. O yüzden toplam kenar sayısı:

$$2|E| \geq 3|F|.$$

Euler Teoremi'ni kullanarak: $|V| - |E| + |F| = 2$ olduğu için:

$$|F| = |E| - |V| + 2$$

Bunu $2|E| \geq 3|F|$ eşitsizliğinde yerine koyarsak:

$$|E| \geq 3(|E| - |V| + 2)$$

$$2|E| \geq 3|E| - 3|V| + 6$$

$$3|V| - 6 \geq |E|$$

elde edilir. □

Bir $G = (V, E)$ çizgesi için ortalama derece $ad(G)$, şu şekilde hesaplanır:

$$ad(G) = \frac{2 |E|}{|V|}$$

Euler formülü kullanılarak düzlemsel çizgelerin ortalama derecesinin 6'dan küçük olduğunu gösterebiliriz.

Lemma 3.4. Herhangi bir düzlemsel çizge G için, $ad(G) < 6$ 'dır.

İspat. Düzlemsel bir çizge G için Euler formülü aşağıdaki gibidir:

$$|V| - |E| + |F| = 2.$$

Düzlemsel çizgelerde her yüzün en az üç kenarı olduğu için, kenar ve yüz arasındaki ilişki şu şekildedir: $2|E| \geq 3|F|$.

Bu eşitsizliği Euler formülünde yerine koyarsak: $|V| - |E| + \frac{2|E|}{3} \leq 2$.

Bunu düzenlersek: $|V| - \frac{|E|}{3} \leq 2$.

Her iki tarafı $|V|$ açısından düzenlersek: $|E| \leq 3|V| - 6$.

Ortalama derece tanımı gereği: $ad(G) = \frac{2|E|}{|V|}$.

Üstteki eşitsizliği yerine koyarsak:

$$ad(G) \leq \frac{2 \times (3|V| - 6)}{|V|} = \frac{6|V| - 12}{|V|} = 6 - \frac{12}{|V|}$$

Burada $|V| \geq 3$ olduğu için, $\frac{12}{|V|} > 0$ ve dolayısıyla $ad(G) < 6$. □

3.2. RENKLENDİRME

Çizge teorisinde, bir çizgenin köşe renklendirmesi, komşu köşelerin farklı renklere boyanmasıdır. Amaç, mümkün olan en az sayıda renkle tüm köşeleri renklendirmektir.

Düzlemsel çizgelerin köşe renklendirmesi, çizge teorisinin temel konularından biridir ve birçok önemli teoremle ilişkilidir.

Teorem 3.5 (Dört Renk Teoremi). [1] Her düzlemsel çizge 4 renk ile renklendirilebilir.

İlk olarak 1852 yılında Francis Guthrie tarafından önerilmiş ve daha sonra birçok matematikçi tarafından ispatlanmaya çalışılmıştır. 1879'da, Alfred Kempe [10] bir kanıt sundu ancak kanıtın daha sonra yanlış olduğu anlaşıldı. 1976'da Kenneth Appel ve Wolfgang Haken [1], bilgisayar destekli bir kanıtla teoremi ispatladılar. Bu, bilgisayarların matematiksel ispatlarda ilk kez kullanılması nedeniyle oldukça önemli bir gelişmeydi. Dört Renk Teoremi, harita tasarımı, grafik çizimleri ve ağ optimizasyonu gibi birçok alanda uygulanmaktadır. Aynı zamanda matematiksel görselleştirme ve problem çözmede önemli bir araçtır. Düzlemsel çizgelerin köşe renklendirmesi ve Dört Renk Teoremi, çizge teorisinin hem teorik hem de pratik açıdan önemli ve zengin konularındandır. Düzlemde çizilmiş her harita, en fazla dört renk kullanılarak boyanabilir, öyle ki hiçbir komşu (ortak bir kenar paylaşan) bölgede aynı renk kullanılamaz.

4. DEŞARJ METODU

Deşarj Metodu, çizge teorisinde 100 yıldan uzun süredir kullanılmaktadır. En ünlü uygulaması, düzlem üzerine çizilebilen çizgelerin kromatik sayısının en fazla 4 olduğunu belirten Dört Renk Teoremi'nin ispatıdır. Deşarj metodu, köşe yüklerinin yeniden dağıtılmasını sağlayarak küresel bir sınıra ulaşmayı mümkün kılar. Örneğin, her bir köşe başlangıçta derecesine eşit bir "yük" ile başlayabilir. Eğer ortalama derecenin b 'den küçük olması, seyrek yerel yapılandırmalardan oluşan belirli bir S kümesinde bir yapılandırmanın varlığını zorunlu kılıyorsa, bu yapılandırmaların yokluğunun, yükün (deşarj metodu aracılığıyla) taşınmasına izin verdiğini ve her köşedeki son yükün en az b olduğunu gösteririz. Bu durum, ortalama derecenin b olmasını gerektiren hipotezi ihlal eder.

Deşarj metodunda incelenen çizgedeki her ögeye (örneğin, her yüz, düğüm veya kenar) belirli bir "yük" atanır. Bu yük, genellikle o ögenin derecesine ya da diğer özelliklerine göre belirlenir. Örneğin, düzlemsel çizge ispatlarında her yüz için $d(f) - 6$ gibi bir yük ataması yapılabilir; burada $d(f)$ yüzün çevresindeki kenar sayısını ifade eder. Ayrıca, $l(f)$ değeri de bir f yüzünün uzunluğunu (kenar sayısını) ifade etmektedir. Başlangıçta verilen yükler, belirli yerel kurallara göre komşu ögeler arasında "deşarj" edilir (yani yük transferi yapılır). Bu kurallar, her ögenin komşularıyla nasıl etkileşime girdiğini belirler. Amaç, yerel yapıdaki yük dağılımını dengeleyerek, belirli ögelerin "fazla" ya da "eksik" yük taşıdığını gösterebilmektir. Deşarj işlemi sırasında toplam yük (başlangıçtaki toplam yük) değişmez. Yani, yapılan tüm yerel transferlere rağmen, çizgedeki tüm ögelerin toplam yükü sabit kalır. Yereldeşarj kurallarını uyguladıktan sonra, her ögenin son yükünün belirli bir alt sınırın altında olması beklenir. Eğer bu durum Euler formülü veya başlangıç varsayımlarıyla çelişiyorsa, o zaman varsayılan minimal karşı örneğin var olamayacağı sonucuna varılır.

Not 4.1. Düzlemsel bir G çizgesi ele alalım.

Başlangıç yükü:

$$\mu(v) = d(v) - 6 \quad \forall v \in V(G)$$

$$\mu(F) = 2l(f) - 6 \quad \forall f \in F(G)$$

$$\mu(E) = 0 \quad \forall e \in E(G)$$

Toplam yük durumunu inceleyelim:

$$\begin{aligned} & \sum_{v \in V} \mu(v) + \sum_{f \in F} \mu(f) + \sum_{e \in E} \mu(e) \\ &= \sum_{v \in V} d(v) - 6 + \sum_{f \in F} 2l(f) - 6 \\ &= \sum_{v \in V} d(v) - 6 |V| + 2 \sum_{f \in F} l(f) - 6 |F| \\ &= 2 |E| - 6 |V| + 4 |E| - 6 |F| \\ &= 6 |E| - 6 |V| - 6 |F| \\ &= -6(|V| - |E| + |F|) = -12 \end{aligned}$$

Teorem 4.2. Herhangi bir düzlemsel çizgede $\delta(G) \geq 5$ olduğunda, bu çizgede öyle bir 5-dereceli köşe vardır ki bu köşenin 7^- -komşusu vardır.

İspat. Lemma 3.4 gereğince G nin ortalama derecesi 6'dan küçük olmalıdır. Dolayısıyla, çizgede derecesi en fazla 5 olan köşeler vardır. Ayrıca, $\delta(G) \geq 5$ olduğundan bu çizgede derecesi tam olarak 5 olan en az bir köşe vardır. Kabul edelim ki G de derecesi 5 olan her bir köşenin tüm komşuları 8^+ -köşeler olsun.

Deşarj metodunu kullanacağız. Başlangıç yüklerini şu şekilde tanımlayalım:

- Her köşe v için: $\mu(v) = d(v) - 6$,
- Her yüz f için: $\mu(f) = 2\ell(f) - 6$, burada $\ell(f)$, yüzün çevresindeki kenar sayısıdır,
- Her kenar için yük: 0.

Başlangıç yüklerinin toplamı:

$$\sum_{v \in V} (d(v) - 6) + \sum_{f \in F} (2\ell(f) - 6) = -12$$

Deşarj kuralı: Her 8^+ -dereceli köşe, her bir komşusuna $\frac{1}{4}$ yük gönderir.

İddia. Tüm son yükler negatif değildir.

- **Yüzler:** Her yüz en az 3 kenardan oluşur, yani $\ell(f) \geq 3$. Bu durumda:

$$\mu^*(f) = 2\ell(f) - 6 \geq 0$$

- **Köşeler:**

5-dereceli köşe v : $\mu(v) = 5 - 6 = -1$, ancak her biri en az 8 dereceli olan 5 komşusundan

$$5 \times \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \text{ yük alır.}$$

Bu durumda:

$$\mu^*(v) = -1 + \frac{5}{4} = \frac{1}{4} > 0$$

7-dereceli köşe v : $\mu^*(v) = 7 - 6 = 1 > 0$

8-dereceli köşe v : $\mu(v) = 2$. Bu köşe 8 komşusuna toplam en fazla $8 \times \frac{1}{4} = 2$ yük gönderir:

$$\mu^*(v) = 2 - 2 = 0$$

Sonuç olarak, her köşe, kenar ve yüzün son yükü negatif değildir. Bu da çelişkiye yol açar çünkü başlangıçta toplam yük negatifti (-12). Bu durumda, varsayımımız yanlıştır. Sonuç olarak, bu çizgede öyle bir 5-dereceli köşe vardır ki bu köşenin 7⁻-komşusu vardır. $\square$

5. DÜZLEMSEL ÇİZGELERİN 2-UZAKLI RENKLENDİRMESİ

G çizgesin de birbirine uzaklığı en fazla 2 olan köşeler farklı renge sahip olacak şekilde yapılan renklendirmeye 2-uzaklı renklendirme denir. Bir G çizgesinin 2-uzaklı renklendirmesi için gereken minimum renk sayısına G nin 2-uzaklı kromatik sayısı denir ve bu sayı $\chi_2(G)$ ile gösterilir. Çalışma boyunca herhangi bir G çizgesinin 2-uzaklı renklendirmesi için $\chi_2(G)$ gösterimini kullanılacaktır. 2-uzaklı renklendirme ile ilgili detaylı bilgi için [5] çalışması incelenebilir.

Bir çizgede bulunan en kısa uzunluktaki döngünün (aynı noktadan başlayıp tekrar aynı noktaya dönen, tekrarlayan kenar içermeyen yol) uzunluğu çevrim değerini belirler ve $g(G)$ ile gösterilir.

Herhangi bir çizgenin 2-uzaklı kromatik sayısı için alt sınır şu şekildedir.

Önerme 5.1. Her G basit çizgesi için $\chi_2(G) \geq \Delta(G) + 1$ sağlanır.

İspat. G çizgesinin maksimum dereceli bir köşesi x olsun. x köşesi ve x in G deki komşularından oluşan $N_G[x]$ kümesi 2-uzaklı renklendirmede ve tüm bu komşularının farklı renkler alması gerektiğinden, x 'in komşuları ve 2-uzaklı komşularını da içeren renk kümesi en az $\Delta + 1$ renge ihtiyaç duyulur. Dolayısıyla, $\chi_2(G) \geq \Delta(G) + 1$ sağlanır. $\square$

Sav 5.2 (Wegner Savı). [15] Her G düzlemsel çizgesi için,

$$\chi_2(G) \leq \begin{cases} 7 & \text{eğer } \Delta(G) = 3 \text{ ise,} \\ \Delta(G) + 5 & \text{eğer } 4 \leq \Delta(G) \leq 7 \text{ ise,} \\ \frac{3\Delta(G)}{2} + 1 & \text{eğer } \Delta(G) \geq 8 \text{ ise,} \end{cases}$$

sağlanır.

Thomassen [14] (ayrıca [8]), bu varsayımın $\Delta = 3$ olan düzlemsel çizgeler için geçerli olduğunu kanıtlamıştır. Ancak, $\Delta \geq 4$ olan düzlemsel çizgeler için hala açık bir problemdir. Üst sınırlar için, van den Heuvel ve McGuinness [9], $\chi_2(G) \leq 2\Delta + 5$ olduğunu ortaya

koymuş, Molloy ve Salavatipour [13] ise $\chi_2(G) \leq \lceil \frac{5}{3}\Delta \rceil + 78$ olduğunu kanıtlamıştır. Kısa döngü içermeyen düzlemsel çizgeler için, La ve Montassier [12] detaylı bir tablo ile güncel çalışmaları listelemiştir. Buna göre, Bu ve Zhu [3], $g \geq 6$ olduğunda $\chi_2(G) \leq \Delta + 25$ olduğunu göstermiştir; bu, çevrimi en az altı olan düzlemsel çizgeler için Wegner savını doğrulamaktadır. Son zamanlarda, Deniz [7] bu sonucu geliştirerek $g \geq 6$ ve $\Delta \geq 6$ olduğunda $\chi_2(G) \leq \Delta + 4$ olduğunu göstermiştir. Öte yandan, La [11] ya $g \geq 7$ ve $\Delta \geq 6$ ya da $g \geq 8$ ve $\Delta \geq 4$ olduğunda $\chi_2(G) \leq \Delta + 3$ olduğunu kanıtlamıştır. Çevrimi 5 olan düzlemsel çizgeler için, Deniz [6], $\chi_2(G) \leq \Delta + 7$ olduğunu ve ayrıca $\Delta \geq 10$ olduğunda $\chi \leq \Delta + 6$ olduğunu kanıtlamıştır. Öte yandan, Bu ve Zhu, $\Delta \geq 15$ için $\chi_2(G) \leq \Delta + 5$ olduğunu ortaya koymuşlardır. Bu tezde, Bu ve Zhu'nun [4] sonucu şu şekilde geliştirilmiştir.

Teorem 5.3. G çevrimi en az 5 olan bir düzlemsel çizge olsun. Eğer $\Delta \geq 12$ ise

$$\chi_2(G) \leq \Delta + 5.$$

Bu teoremin ispatını yaparken olmayana ergi ispat yöntemini kullanacağız. G , Teorem 5.3'e minimal bir aksi örnek olsun, yani, G çizgesi, $\Delta + 5$ renk ile hiçbir 2-uzaklı renklendirmeye sahip değildir, ancak G 'nin herhangi bir öz alt çizgesi $\Delta + 5$ renk ile bir 2-uzaklı renklendirmeye sahiptir. Dolayısıyla, minimalite nedeniyle, $G - x$, her $x \in V(G) \cup E(G)$ için $\Delta + 5$ renkle bir 2-uzaklı renklendirmesine sahiptir. Açıkça, G bağlantılıdır ve $\delta(G) \geq 2$ koşulunu sağlar.

Öncelikle G çizgemiz için bazı ön sonuçlar sunulacaktır:

Bir $v \in V(G)$ köşesi için, v 'ye komşu olan i -köşelerin sayısını $n_i(v)$ (sırasıyla, k -komşusuna sahip 2-köşelerin sayısını $n_2^k(v)$) ile gösteririz.

Herhangi bir $u, v \in V(G)$ köşe çifti arasındaki uzaklığı $d(u, v)$ ile gösteririz. Ayrıca,

$$N_i(v) = \{u \in V(G) \mid 1 \leq d(u, v) \leq i\}$$

şeklinde tanımlarız, burada $i \geq 1$ olup, açıkça $N_1(v) = N(v)$ olduğu görülmektedir.

Bir v köşesi için $D(v)$ şu şekilde tanımlanır.

$$D(v) = \sum_{v_i \in N(v)} d(v_i).$$

Bir v köşesi, aşağıdaki koşulu sağlıyorsa *genişletilebilir* olarak adlandırılır:

$$D(v) < \Delta + 5 + \sum_{i=3}^4 n_2^i(v).$$

$e(v)$ ile $N_2(v)$ içindeki genişletilebilir köşelerin sayısını gösteririz. Eğer v ,

$$D(v) < \Delta + 5 + e(v)$$

koşulunu sağlıyorsa, *hafif* olarak adlandırılır; aksi takdirde, *ağır* olarak adlandırılır. Her 4^- -köşeye komşu olan her 2-köşe genişletilebilirdir, dolayısıyla

$$\sum_{i=3}^4 n_2^i(v) \leq e(v)$$

her v köşesi için geçerlidir. Böylece, her genişletilebilir köşe hafif bir köşedir. Bir uvw yolu için, eğer $d(v) = 2$ ise, u ve w zayıf komşu olarak adlandırılır. Bir $3(1)$ -köşesinin 2-köşesinden farklı olan komşularına yıldız komşu denir.

Lemma 5.4. [6] Eğer v hafif bir köşeyse, o zaman v 'nin her komşusu ağır bir köşedir.

Lemma 5.5. [6] Her 5^- -dereceli köşe, bir 2-komşusuna sahipse ağırdır. Özellikle, her 4-dereceli köşe, bir $3(1)$ -komşusuna sahipse ağırdır.

Lemma 5.6. [6] $v \in V(G)$ için, S , $N_2(v)$ içindeki hafif köşelerin kümesi olsun. Eğer v hafif bir köşeye komşu ise, o zaman $D(v) \geq \Delta + 5 + |S|$ olur.

Aşağıdaki sonuçlar, Lemma 5.4, 5.5 ve 5.6'dan kolayca elde edilebilir.

Özellik 5.7. (a) Bir 4^- -dereceli komşusu olan her 2-dereceli köşe hafiftir.

(b) G , bitişik 2-dereceli köşeler içermez.

(c) G , $3(2)$ -, $3(3)$ -, $4(3)$ -, $4(4)$ -, ve $5(5)$ -dereceli köşeler içermez.

(d) Bir $3(1)$ -dereceli köşe, herhangi bir 3-dereceli, $4(1)$ -dereceli, $4(2)$ -dereceli veya hafif 4-dereceli köşeye bitişik olamaz.

Bir xyz yolunu, eğer $5 \leq d(y) \leq 9$, $2 \leq d(x) \leq 3$ ve $2 \leq d(z) \leq 3$ ise, fakir bir yol olarak adlandırıyoruz. Eğer bir fakir yol xyz , bir f yüzünün sınırında yer alıyorsa, y köşesine f -fakir köşe denir. Fakir yol tanımından, bir yüz içindeki bu tür yolların sayısını sınırlayabileceğimiz sonucu çıkar.

Özellik 5.8. Her f yüzü en fazla $\lfloor \frac{l(f)}{2} \rfloor$ tane f -fakir köşeye sahiptir.

Bu bölümün geri kalanında, G 'nin var olmadığını göstermek için yük boşaltma yöntemi uygulanacaktır. Her bir köşe v 'ye $\mu(v) = \frac{3d(v)}{2} - 5$ ve her bir yüz f 'ye $\mu(f) = l(f) - 5$ atanmıştır. Euler formülüne göre, şu sonuca varılacaktır:

$$\sum_{v \in V} \left(\frac{3d(v)}{2} - 5 \right) + \sum_{f \in F} (l(f) - 5) = -10.$$

Sonrasında bazı kurallar sunulacak ve buna göre yükler yeniden dağıtılacaktır. Yük aktarma işlemleri tamamlandıktan sonra, nihai yükler $\mu^*(v)$ ve $\mu^*(f)$ kontrol edilecektir. Eğer $\mu^*(v) \geq 0$ ve $\mu^*(f) \geq 0$ ise, böyle bir karşıt örnek çizge G 'nin var olamayacağı çelişkisine varılacaktır.

Deşarj Kuralları

Aşağıdaki deşarj kuralları uygulanacaktır:

R1: Her 2-dereceli köşe, her komşusundan 1 yük alır.

R2: Her 3(1)-dereceli köşe, her (4-6)-dereceli komşusundan $\frac{1}{2}$ yük; her 7-dereceli komşusundan $\frac{2}{3}$ yük; her 8-dereceli komşusundan $\frac{3}{4}$ yük; her 9-dereceli komşusundan $\frac{5}{6}$ yük alır.

R3: Her hafif 3(0)-dereceli köşe, her bir 3^+ -dereceli komşusundan $\frac{1}{6}$ yük alır.

R4: v ağır bir 3(0)-dereceli köşe olsun, o zaman v her (5-6)-dereceli komşusundan $\frac{1}{6}$ yük; her (7-8)-dereceli komşusundan $\frac{1}{3}$ yük; her 9-dereceli komşusundan $\frac{1}{2}$ yük alır.

R5: v bir 4(1)-dereceli köşe olsun.

(a) Eğer v , bir 3(1)-dereceli köşeye bitişikse, o zaman v her 6-dereceli komşusundan $\frac{1}{6}$ yük; her 7-dereceli komşusundan $\frac{1}{4}$ yük ; her 8-dereceli komşusundan $\frac{1}{3}$ yük alır.

(b) Eğer v , bir hafif 3(0)-dereceli köşeye bitişikse, o zaman v her (6-8)-dereceli komşusundan $\frac{1}{12}$ yük alır.

R6: Her 4(2)-dereceli köşe, her 6-dereceli komşusundan $\frac{1}{4}$ yük; her (7-8)-dereceli komşusundan $\frac{1}{2}$ yük; her 9-dereceli komşusundan $\frac{3}{4}$ yük alır.

R7: Her $5(2^+)$ -dereceli köşe, her 7-dereceli komşusundan $\frac{1}{4}$ yük; her 8-dereceli komşusundan $\frac{1}{2}$ yük alır.

R8: Her 9-dereceli köşe, 4(2)-dereceli köşe dışında kalan her (4-8)-dereceli komşusuna $\frac{1}{2}$ yük verir.

R9: Her 10^+ -dereceli köşe, her 8^- -dereceli komşusuna 1 yük verir. Özellikle, eğer v bir 12^+ -dereceli köşeyse, v ayrıca her zayıf komşusuna $\frac{1}{12}$ yük gönderir.

R10: Eğer bir 8-dereceli köşe v , iki 8^+ -dereceli köşe u ve w 'ye bitişikse, v köşesi uv veya wv 'yi içeren her yüze $\frac{1}{4}$ yük verir.

R11: Eğer bir 9-dereceli köşe v , bir 9^+ -dereceli köşe u 'ya bitişikse, v köşesi uv 'yi içeren her yüze $\frac{1}{4}$ yük verir.

R12: Eğer bir 10^+ -dereceli köşe v , bir 9^+ -dereceli köşe u 'ya bitişikse, v köşesi uv 'yi içeren her yüze $\frac{1}{2}$ yük verir.

R13: R10-R12 uygulandıktan sonra, Her f yüzü pozitif yükünü, kendisine bitişik olan f -fakir köşelere eşit olarak aktarır.

Not 5.9. f bir 6^+ -yüz olsun. Özellik 5.8'den, f 'nin en fazla $\lfloor \frac{l(f)}{2} \rfloor$ tane f -fakir köşeye sahip olduğu sonucu çıkar. f 'nin k tane fakir olmayan 8^+ -dereceli köşeye bitişik olduğunu varsayalım.

- Eğer $k = 0$ ise, f en fazla $\lfloor \frac{l(f)}{2} \rfloor$ f -fakir köşeye sahiptir ve bu nedenle f , R13'e göre, kendisine bitişik her f -fakir köşeye en az $\frac{1}{3}$ yük gönderir.
- Eğer $k = 1$ ise, f en fazla $\lfloor \frac{l(f)-2}{2} \rfloor$ f -fakir köşeye sahiptir ve bu nedenle f , R13'e göre, kendisine bitişik her f -fakir köşeye en az $\frac{1}{2}$ yük gönderir.
- Eğer $k \geq 2$ ise, f en fazla $\lfloor \frac{l(f)-3}{2} \rfloor$ f -fakir köşeye sahiptir ve bu nedenle f , R13'e göre, kendisine bitişik her f -fakir köşeye en az $\frac{1}{3}$ yük gönderir.

Kontrol: $v \in V(G)$ ve $f \in F(G)$ için $\mu^*(v)$, $\mu^*(f) \geq 0$ olduğu gösterilecektir.

Açıkça, her $f \in F(G)$ için $\mu^*(f) \geq 0$ 'dır, çünkü R13'e göre her yüz, pozitif yükünü kendisine bitişik f -fakir köşelere eşit olarak aktarır.

$d(v) = k$ olan bir $v \in V(G)$ köşesi seçiyoruz. v köşesinin 2-komşularını $x_1, x_2, \dots, x_t$ ile gösteriyoruz, burada $0 \leq n_2(v) = t \leq k$, ve y_i, x_i 'nin v 'den farklı diğer komşusu olsun. $f_1, f_2, \dots, f_k$ ise v 'ye komşu olan yüzler olsun.

(1) $k = 2$ olsun. O zaman $\mu(v) = -2$ olur. Özellik 5.7(b)'ye göre, v köşesi iki 3^+ -dereceli köşeye bitişiktir. R1'in kuralından, v köşesi her bir komşusundan 1 yük alır ve böylece $\mu^*(v) \geq 0$ olur.

(2) $k = 3$ olsun. O zaman $\mu(v) = -\frac{1}{2}$ olur. Özellik 5.7(c)'ye göre, v 'nin en fazla bir 2-dereceli komşusu vardır. İlk olarak, v 'nin bir 2-dereceli komşusu olduğunu varsayalım, bu komşuya x_1 diyelim. v 'nin diğer komşularını w ve z olarak adlandıralım ve $d(w) \leq d(z)$ olsun. Açıkça, x_1 hafif bir köşedir ve bu nedenle, Lemma 5.4'e göre v ağır olmalıdır. Ardından, Lemma 5.5'ten $d(w) + d(z) \geq \Delta + 4 \geq 16$ olduğu sonucu çıkar.

- Eğer $4 \leq d(w) \leq 6$ ise, o zaman z bir 10^+ -dereceli köşedir. Bu durumda, v köşesi R9'a göre z 'den 1 yük ve R2'ye göre w 'den $\frac{1}{2}$ yük alır. Dolayısıyla, v köşesi R1'e göre x_1 'e 1 yük verdikten sonra $\mu^*(v) \geq -\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} - 1 = 0$ olur.

- Eğer w bir 7-dereceli köşe ise, z bir 9^+ -dereceli köşe olur. R2 ve R9 kuralından, v köşesi w 'den $\frac{2}{3}$ yük ve z 'den en az $\frac{5}{6}$ yük alır. Bu durumda, v köşesi R1'e göre x_1 'e 1 yük verdikten sonra $\mu^*(v) \geq -\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{5}{6} - 1 = 0$ olur.

- Eğer w bir 8-dereceli köşe ise, z de bir 8^+ -dereceli köşe olur. R2 ve R9'un kuralıyla, v hem w 'den hem de z 'den en az $\frac{3}{4}$ yük alır. Bu durumda, v köşesi R1'e göre x_1 'e 1 yük verdikten sonra $\mu^*(v) \geq -\frac{1}{2} + 2 \times \frac{3}{4} - 1 = 0$ olur.

Şimdi v 'nin hiç 2-dereceli komşusu olmadığını varsayalım. Eğer v hafif bir köşe ise, Lemma 5.4'e göre v 'nin her bir komşusu ağır olmak zorundadır ve bu nedenle R3 ile her bir komşusundan en az $\frac{1}{6}$ yük alır; dolayısıyla $\mu^*(v) \geq -\frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{6} = 0$ olur. Şimdi v 'nin ağır olduğunu varsayalım. v 'nin komşularını u, w ve z olarak adlandıralım ve $d(u) \leq d(w) \leq d(z)$ olsun. Dikkat edin ki, Lemma 5.5'e göre v 'nin iki hafif 3-komşusu olamaz. Eğer v 'nin hafif bir 3-komşusu yoksa, v 'nin ya bir 9^+ -komşusu ya bir 7^+ -komşusu ve bir 5^+ -komşusu ya da üç tane 5^+ -komşusu olduğu sonucuna varırız. Çünkü $d(u) + d(w) + d(z) \geq \Delta + 5 \geq 17$. Her durumda, v köşesi R4 uygulandığında komşularından toplamda en az $\frac{1}{2}$ alır. Bu nedenle, $\mu^*(v) \geq -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$ olur. Eğer v 'nin hafif bir 3-komşusu varsa, örneğin u , Lemma 5.5'e göre $d(w) + d(z) \geq 15$ elde ederiz. Bu, açıkça v 'nin ya bir

10^+ -komşusu ya bir 6^+ - ve bir 9^+ -komşusu ya da iki 7^+ -komşusu olduğunu gösterir. R4 ve R9 uygulandığında, v köşesi komşularından toplamda en az $\frac{2}{3}$ alır. Dolayısıyla, v köşesi R3 ile u 'ya $\frac{1}{6}$ gönderdikten sonra $\mu^*(v) \geq -\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{6} = 0$ olur.

(3) $k = 4$ olduğunu varsayalım. v 'nin başlangıç yükü $\mu(v) = 1$ 'dir. Özellik 5.7(c)'ye göre, v 'nin en fazla iki tane 2-dereceli komşusu vardır. Lemma 5.5'e göre, v 'nin bir 2-dereceli komşusu varsa ağırdır.

$n_2(v) = 0$ olsun. Özellik 5.7 (d)'ye göre, v 'nin en fazla üç tane 3(1)-komşusu olabilir; dahası, aynı nedenle, v 'nin bir 3(1)-komşusu varsa ağırdır. Eğer v 'nin en fazla bir tane 3(1)-komşusu varsa, R2 ile 3(1)-komşusuna $\frac{1}{2}$ ve R3 ile her bir hafif 3(0)-komşusuna $\frac{1}{6}$ gönderdikten sonra $\mu^*(v) \geq 1 - \frac{1}{2} - 3 \times \frac{1}{6} \geq 0$ olur. Şimdi v 'nin tam olarak iki 3(1)-komşusu olduğunu varsayalım. Eğer v 'nin hafif bir 3(0)-komşusu yoksa, R2 ile her bir 3(1)-komşusuna $\frac{1}{2}$ gönderdikten sonra $\mu^*(v) \geq 1 - 2 \times \frac{1}{2} \geq 0$ olur. Eğer v 'nin hafif bir 3(0)-komşusu varsa, Lemma 5.6'ya göre v 'nin ayrıca bir 11^+ -komşusu da olacaktır. Bu durumda, R9 ile 11^+ -komşusundan 1 alır ve R2-R3 ile her bir 3-komşusuna en fazla $\frac{1}{2}$ gönderir, dolayısıyla $\mu^*(v) \geq 1 + 1 - 3 \times \frac{1}{2} > 0$ olur. Son olarak, v 'nin tam olarak üç 3(1)-komşusu olduğunu varsayalım. v ağır olduğundan ve $N_2(v)$ 'de üç genişletilebilir köşe (3(1)-köşelerinin 2-komşuları) bulunduğundan, v 'nin bir 11^+ -komşusu olduğu sonucuna varırız. Bu durumda, v köşesi R9 ile 11^+ -komşusundan 1 alır ve R2-R3'e göre her bir 3-komşusuna en fazla $\frac{1}{2}$ gönderir. Böylece, $\mu^*(v) \geq 1 + 1 - 3 \times \frac{1}{2} > 0$ olur.

$n_2(v)=1$ olsun. İlk olarak, v 'nin 3(1)-komşusu olmadığını varsayalım. Eğer v 'nin hafif bir 3(0)-komşusu yoksa, R1 ile x_1 'e 1 gönderdikten sonra $\mu^*(v) \geq 1 - 1 = 0$ olur. Bu nedenle v 'nin hafif bir 3(0)-komşusu olduğunu varsayalım. Lemma 5.5' e göre v ağır olduğundan, v 'nin en fazla iki hafif 3(0)-komşusu olabilir. Eğer v 'nin tam olarak bir hafif 3(0)-komşusu varsa, v 'nin ya bir 9^+ -komşusu ya da iki 6^+ -komşusu vardır. Her iki durumda da, R5(b), R8 ve R9 ile v köşesi 6^+ -komşularından toplamda en az $\frac{1}{6}$ alır. Dolayısıyla, R1 ile x_1 'e 1 ve R3 ile hafif 3(0)-komşusuna $\frac{1}{6}$ gönderdikten sonra $\mu^*(v) \geq 1 + \frac{1}{6} - 1 - \frac{1}{6} = 0$ olur. Öte yandan, v iki hafif 3(0)-komşusuna bitişikse, Lemma 5.6'ya göre v 'nin ayrıca bir 12^+ -komşusu z vardır. Bundan, v 'nin R9 ile z 'den 1 aldığı sonucu çıkar ve R1 ile x_1 'e 1, R3 ile her bir hafif 3(0)-komşusuna $\frac{1}{6}$ gönderdikten sonra $\mu^*(v) \geq 1 + 1 - 1 - 2 \times \frac{1}{6} > 0$ olur. Şimdi v 'nin tam olarak bir 3(1)-komşusu olduğunu varsayalım. v 'nin

2- ve 3(1)-dereceli komşularından farklı olan komşularını w ve z olarak adlandıralım. Lemma 5.5'e göre v ağır olduğundan, $d(w) + d(z) \geq \Delta + 2 \geq 14$ olur. Eğer v 'nin hafif bir 3(0)-komşusu yoksa, Lemma 5.6'ya göre v 'nin ya bir 6^+ -komşusu ve bir 8^+ -komşusu ya da iki 7^+ -komşusu veya bir 9^+ -komşusu vardır. Burada x_1 'in v 'nin hafif bir komşusu olduğunu hatırlıyoruz. Her durumda, R5(a), R8 ve R9 ile v köşesi 6^+ -komşularından toplamda en az $\frac{1}{2}$ alır. Dolayısıyla $\mu^*(v) \geq 1 + \frac{1}{2} - 1 - \frac{1}{2} = 0$ olur; burada v köşesi R1 ile x_1 'e 1 ve R2 ile 3(1)-komşusuna $\frac{1}{2}$ gönderir. Eğer v 'nin hafif bir 3(0)-komşusu varsa, Lemma 5.6'ya göre v 'nin 12^+ -komşusu vardır. Bu durumda v köşesi R9 ile 12^+ -komşularından 1 alır ve R1 ile x_1 'e 1, R2 ile 3(1)-komşusuna $\frac{1}{2}$ R3 ile hafif 3(0)-komşusuna $\frac{1}{6}$ gönderir. Böylece $\mu^*(v) \geq 1 + 1 - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{6} > 0$ olur. Son olarak, v 'nin iki 3(1)-komşusu olduğunu varsayalım. Lemma 5.6'ya göre v 'nin bir 12^+ -komşusu z vardır. Bu durumda v köşesi R9 ile z 'den 1 alır ve R1 ile x_1 'e 1, R2 ile her bir 3(1)-komşusuna $\frac{1}{2}$ gönderir. Dolayısıyla $\mu^*(v) \geq 1 + 1 - 1 - 2 \times \frac{1}{2} = 0$ olur.

$n_2(v) = 2$ olsun. Özellik 5.7(d)'ye göre v 'nin 3(1)-komşusu yoktur. v ağır olduğundan, Lemma 5.6'ya göre v 'nin ya bir 6-komşusu ve bir 9^+ -komşusu, ya iki 7^+ -komşusu, ya da bir 10^+ -komşusu vardır. Her durumda, v köşesi R6 ve R9 ile 6^+ -komşularından toplamda en az 1 alır. Dolayısıyla R1 ile x_1 ve x_2 'ye 1 gönderdikten sonra $\mu^*(v) \geq 1 + 1 - 2 \times 1 = 0$ olur.

(4) $k = 5$ olsun. v 'nin başlangıç yükü $\mu(v) = \frac{5}{2}$ olur. Eğer v 'nin 2-komşusu yoksa, v köşesi R2-R4 kurallarına göre her bir komşusuna en fazla $\frac{1}{2}$ gönderir, bu durumda $\mu^*(v) \geq \frac{5}{2} - 5 \times \frac{1}{2} = 0$ olur. Dolayısıyla $1 \leq n_2(v) \leq 4$ varsayabiliriz, burada son eşitsizlik Özellik 5.7(c)'den gelir. Lemma 5.4'e göre v 'nin ağır olduğunu hatırlayalım. Ayrıca, eğer v 'nin bir 3(1)-komşusu u varsa, u 'nun bir 11^+ -komşusu olmalıdır. Çünkü her 3(1)-köşe Lemma 5.4'e göre ağırdır. Bu durumda, v köşesi bir 11^+ -komşusuna yıldız komşudur.

$n_2(v) = 1$ olsun. Eğer v 'nin üç 3-komşusu varsa, o zaman v 'nin son komşusu, v ağır olduğu için, bir 6^+ -köşe olmalıdır. Bu durumda $\mu^*(v) \geq \frac{5}{2} - 1 - 3 \times \frac{1}{2} = 0$ olur, v köşesi R1 ile x_1 'e 1 ve R2-R4 kurallarına göre her bir 3-komşusuna en fazla $\frac{1}{2}$ gönderir.

$n_2(v) = 2$ olsun. Eğer x_i 'lerden biri genişletilebilir ise, diğer x_i hafif olmalıdır (Lemma 5.6). Bu durumda v 'nin bir 3(1)-komşusu olamaz (Lemma 5.6). Ayrıca, v köşesi ağır olduğu için en fazla iki 3(0)-komşuya sahip olabilir. Dolayısıyla $\mu^*(v) \geq \frac{5}{2} - 2 \times 1 - 2 \times \frac{1}{6} > 0$ olur, v

köşesi R1 ile her bir x_i 'ye 1 ve R3-R4 kurallarına göre her bir 3(0)-komşusuna en fazla $\frac{1}{6}$ gönderir. Şimdi x_i 'lerin hiçbirinin genişletilebilir olmadığını varsayalım. Bu durumda her y_i bir 12^+ -köşesidir. Bu, v 'nin iki 12^+ -komşusuna zayıf komşu olduğu anlamına gelir. Öte yandan, v köşesi ağır olduğu için en fazla iki 3(1)-komşuya sahip olabilir. Eğer v 'nin bir 3(1)-komşusu yoksa, $\mu^*(v) \geq \frac{5}{2} - 2 \times 1 - 2 \times \frac{1}{6} > 0$ olur, v köşesi R1 ile her bir x_i 'ye 1 ve R3-R4 kurallarına göre her bir 3(0)-komşusuna $\frac{1}{6}$ gönderir. Eğer v 'nin tam olarak bir 3(1)-komşusu varsa, v 'nin ya bir 8^+ -komşusu ya da hiç 3(0)-komşusu olmaz. İlk durumda, v köşesi R7-R9 kurallarına göre 8^+ -komşusundan en az $\frac{1}{2}$ alır, dolayısıyla $\mu^*(v) \geq \frac{5}{2} + \frac{1}{2} - 2 \times 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{6} > 0$ olur, burada, v köşesi R1 ile her bir x_i 'ye 1, R2 ile 3(1)-komşusuna $\frac{1}{2}$ ve R3-R4 kurallarına göre 3(0)-komşusuna $\frac{1}{6}$ gönderir. İkinci durumda, v , 2- ve 3(1)-köşeleri dışındaki komşularına yük göndermez. Bu durumda $\mu^*(v) \geq \frac{5}{2} - 2 \times 1 - \frac{1}{2} = 0$ olur, burada v köşesi R1 ile her bir x_i 'ye 1 ve R2 ile 3(1)-komşusuna $\frac{1}{2}$ gönderir. Eğer v 'nin iki 3(1)-komşusu varsa, yukarıda belirtildiği gibi v , iki 11^+ -köşeye yıldız-komşu olur. v köşesi iki 12^+ -komşuya zayıf komşu ve iki 11^+ -komşuya yıldız-komşu olduğu için, f_i yüzlerinden biri $i \in [5]$ için ya iki bitişik 11^+ -köşesi x ve y olan bir 5-yüz ya da bir 6^+ -yüz olur. Eğer f_i , bir 6^+ -yüz ise, R13 v 'ye en az 1 gönderir. Diğer taraftan, eğer f_i , bitişik iki 11^+ -köşesi x ve y olan bir 5-yüz ise, her biri R12 ile xy 'yi içeren yüzlerle $\frac{1}{2}$ verir, böylece f_i , x ve y 'den toplamda en az 1 alır ve R13 ile v 'ye aktarır. Sonuç olarak v , f_i 'den en az 1 alır. Dolayısıyla $\mu^*(v) \geq \frac{5}{2} + \frac{1}{2} - 2 \times 1 - 2 \times \frac{1}{2} = 0$ olur, v , R1 ile her bir x_i 'ye 1 ve R2 ile her bir 3(1)-komşusuna $\frac{1}{2}$ gönderir.

$n_2(v)=3$ olsun. İlk olarak x_i 'lerden birinin genişletilebilir olduğunu varsayalım. Bu durumda, v 'nin diğer 2-komşuları hafif köşeler olur. Lemma 5.6'ya göre herhangi bir 3(1)-komşusu olamaz. Eğer v 'nin bir 3(0)-komşusu varsa, Lemma 5.6'ya göre v 'nin ayrıca bir 11^+ -komşusu da olmalıdır. R9 uygulanarak, v 11^+ -komşusundan 1 alır. Böylece $\mu^*(v) \geq \frac{5}{2} + 1 - 3 \times 1 - \frac{1}{6} > 0$ olur, v R1 ile her x_i 'ye 1 ve R3-R4 kurallarına göre 3(0)-komşusuna $\frac{1}{6}$ gönderir. Aksi takdirde, v 'nin 3(0)-komşusu yoksa, Lemma 5.6'ya göre v 'nin ya bir 8^+ -komşusu ya da iki 7^+ -komşusu vardır. Her durumda, v köşesi R7 ile 6^+ -komşularından toplamda en az $\frac{1}{2}$ alır. Böylece $\mu^*(v) \geq \frac{5}{2} + \frac{1}{2} - 3 \times 1 = 0$ olur, v R1 ile her bir x_i 'ye 1 gönderir. Şimdi x_i 'lerin genişletilebilir olmadığını varsayalım. Bu durumda, her y_i , bir 12^+ -köşedir. v köşesi üç 12^+ -komşusuna zayıf komşu olduğu için, $i \in [5]$ için f_i yüzlerinden birinin ya bitişik iki 12^+ -köşesi olan bir 5-yüz ya da bir 6^+ -yüz olduğu

sonucuna varırız. R12 ve R13 kuralları uygulanarak, f_i , v 'ye en az 1 gönderir. Böylece $\mu^*(v) \geq \frac{5}{2} + 1 - 3 \times 1 > 0$ olur, v köşesi R1 ile her x_i 'ye 1 gönderir.

$n_2(v) = 4$ olsun. x_i 'lerden birinin genişletilebilir olduğunu varsayalım. Bu durumda, v 'nin diğer 2-komşuları hafif köşeler olur. Bu durumda, Lemma 5.6'ya göre $D(v) \geq \Delta + 5 + |\{x_1, x_2, \dots, x_4\}|$ elde ederiz, ancak bu mümkün değildir, çünkü $D(v) \leq \Delta + 8$ 'dir. Bu nedenle, x_i 'lerin hiçbirinin genişletilebilir olmadığını varsayalım, yani her y_i , bir 12^+ köşedir. v köşesi dört 12^+ -köşeye zayıf komşu olduğundan, $i_1, i_2 \in [5]$ için f_{i1} ve f_{i2} 'nin her birinin ya iki bitişik 12^+ -köşeye sahip bir 5-yüz ya da bir 6^+ -yüz olduğunu çıkarırız. R12 ve R13'ü Özellik 5.8 ile birlikte uygulayarak, f_{i1} ve f_{i2} , v 'ye en az 1'er yük aktarır. Dolayısıyla, v köşesi R1 ile her x_i 'ye 1 gönderdikten sonra $\mu^*(v) \geq \frac{5}{2} + 2 \times 1 - 4 \times 1 > 0$ olur.

(5) $k = 6$ olsun. v 'nin başlangıç yükü $\mu(v) = 4$ 'tür. İlk olarak, v 'nin en fazla iki 2-komşusu varsa, v R1 ile her bir 2-komşusuna 1 ve diğer komşularının her birine R2-R6 kurallarına göre en fazla $\frac{1}{2}$ verir, bu yüzden $\mu^*(v) \geq 4 - 2 \times 1 - 4 \times \frac{1}{2} = 0$ olur. Bu nedenle, $n_2(v) \geq 3$ olduğu varsayılır.

$n_2(v) = 3$ olsun. v 'nin bir 3(1)-komşusu olduğunu varsayabiliriz, aksi takdirde v köşesi R1 ile her bir x_i 'ye 1 ve R3-R6 kurallarına göre diğer komşularının her birine en fazla $\frac{1}{4}$ verir ve $\mu^*(v) \geq 4 - 3 \times 1 - 3 \times \frac{1}{4} > 0$ olur. İlk olarak, x_i 'lerden birinin hafif olduğunu ve dolayısıyla v 'nin Lemma 5.4'e göre ağır olduğunu varsayalım. Bu durumda v 'nin ya iki 5-komşusu ya da bir 6^+ -komşusu olmalıdır. İlk durumda, $\mu^*(v) \geq 4 - 3 \times 1 - \frac{1}{2} > 0$, v R1 ile her bir x_i 'ye 1 ve R2 ile 3(1)-komşusuna $\frac{1}{2}$ gönderir. İkinci durumda, $\mu^*(v) \geq 4 - 3 \times 1 - 2 \times \frac{1}{2} = 0$, v R1 ile her bir x_i 'ye 1 ve R2-R6 kurallarına göre (3-4)-komşularının her birine en fazla $\frac{1}{2}$ gönderir.

Son olarak, tüm x_i 'lerin ağır olduğunu varsayalım. Bu durumda, her y_i , bir 11^+ -köşedir. Herhangi bir 3(1)-köşe ağır olduğundan, v köşesi bir 10^+ -köşeye yıldız-komşudur. Dolayısıyla, v köşesi üç 11^+ -köşeye zayıf komşu ve bir 10^+ -köşeye yıldız-komşudur. Bu durumda, $i \in [6]$ için f_i yüzlerinden birinin ya bitişik iki 10^+ -köşesi olan bir 5-yüz ya da bir 6^+ -yüz olduğunu sonucuna varırız. R12 ve R13 kuralları uygulanarak, f_i , v 'ye en az 1 gönderir. Böylece $\mu^*(v) \geq 4 + 1 - 3 \times 1 - 3 \times \frac{1}{2} > 0$ olur, v R1 ile her bir x_i 'ye 1 ve R2-R6 kurallarına göre (3-4)-komşularının her birine en fazla $\frac{1}{2}$ gönderir.

$n_2(v) = 4$ olsun. İlk olarak, x_i 'lerden ikisinin genişletilebilir olduğunu varsayalım. Bu durumda, diğer x_i 'ler hafif köşeler olacaktır. Lemma 5.3'e göre v 'nin ağır bir köşe olduğu açıktır. Eğer v 'nin bir 3(1)-komşusu varsa, v 'nin bir 11^+ -komşusu olur ve R9 ile v köşesi 11^+ -komşusundan 1 alır. Bu durumda $\mu^*(v) \geq 4 + 1 - 4 \times 1 - \frac{1}{2} > 0$ olur, v R1 ile her bir x_i 'ye 1 ve R2 ile 3(1)-komşusuna $\frac{1}{2}$ gönderir. Eğer v 'nin 3(1)-komşusu yoksa, Lemma 5.5'e göre v 'nin ya bir 9^+ -komşusu vardır ya da hiç (3-4)-komşusu yoktur. İlk durumda, v R8 ile 9^+ -komşusundan en az $\frac{1}{2}$ alır ve $\mu^*(v) \geq 4 + \frac{1}{2} - 4 \times 1 - \frac{1}{2} = 0$ olur, v R1 ile her bir x_i 'ye 1 ve R2-R6 ile (3-4)-komşusuna en fazla $\frac{1}{2}$ gönderir. İkinci durumda, $\mu^*(v) \geq 4 - 4 \times 1 = 0$ olur, v R1 ile her bir x_i 'ye 1 gönderir. Şimdi, x_i 'lerden sadece birinin genişletilebilir olduğunu, örneğin x_1 'in genişletilebilir olduğunu varsayalım. Bu durumda v köşesi Lemma 5.4'e göre ağırdır. Lemma 5.6'ya göre, v 'nin bir (3-4)-komşusu varsa, bir 6^+ -komşusu da olmalıdır. Ayrıca, $i \in 2, 3, 4$ için, x_i 'ler genişletilebilir olmadığından, her y_i 'nin bir 11^+ -köşe olduğu biliniyor. İlk olarak v 'nin bir 3(1)-komşusu olduğu durumu ele alalım, Lemma 5.4'e göre, bir 3(1)-köşe ağır olduğundan, v bir 11^+ -köşesinin yıldız komşusu olur. v köşesi üç 11^+ -köşesine zayıf komşu ve bir 11^+ -köşesinin yıldız komşusu olduğundan, $i \in [6]$ için f_i 'nin ya iki bitişik 11^+ -köşeye sahip bir 5-yüz ya da bir 6^+ -yüz olduğu sonucuna varırız. R12 ve R13'ü Özellik 5.8 ile birlikte uygulayarak, f_i , v 'ye en az 1 aktarır. Sonuç olarak, v köşesi R1 ile her x_i 'ye 1 ve R2 ile 3(1)-komşusuna $\frac{1}{2}$ gönderdikten sonra $\mu^*(v) \geq 4 + 1 - 4 \times 1 - \frac{1}{2} > 0$ olur.

Şimdi, v 'nin 3(1)-komşusu olmadığı durumu ele alalım. Eğer y_2, y_3, y_4 , 12^+ -köşelerse, R9'u uygulayarak, her biri v 'ye $\frac{1}{12}$ gönderir ve böylece v köşesi R1 ile her x_i 'ye 1 ve R3-R6 ile (3-4)-komşusuna en fazla $\frac{1}{4}$ gönderdikten sonra $\mu^*(v) \geq 4 + 3 \times \frac{1}{12} - 4 \times 1 - \frac{1}{4} = 0$ olur.

Eğer y_2, y_3, y_4 'ten tam olarak biri, örneğin y_2 , bir 11 -köşe ise, R9'u uygulayarak y_3 ve y_4 , v 'ye $\frac{1}{12}$ gönderir. Ayrıca, Lemma 5.5'ten, v 'nin ya bir 9^+ -komşusu ya da hiç 4(2)-komşusu olmadığı sonucuna varırız. İlk durumda, v köşesi R8 ile 9^+ -komşusundan en az $\frac{1}{2}$ alır ve böylece v köşesi R1 ile her x_i 'ye 1 ve R3-R6 ile (3-4)-komşusuna en fazla $\frac{1}{4}$ gönderdikten sonra $\mu^*(v) \geq 4 + 2 \times \frac{1}{12} + \frac{1}{2} - 4 \times 1 - \frac{1}{4} > 0$ olur. İkinci durumda, $\mu^*(v) \geq 4 + 2 \times \frac{1}{12} - 4 \times 1 - \frac{1}{6} = 0$ olur.

Eğer y_2, y_3, y_4 'ten ikisi 11-köşe ise, Lemma 5.5'ten, v 'nin ya bir 9^+ -komşusu ya da hiç $3(0)$ -, $4(1)$ - ve $4(2)$ -komşusu olmadığı sonucuna varırız. İlk durumda, v köşesi R8 ile 9^+ -komşusundan en az $\frac{1}{2}$ alır ve böylece $\mu^*(v) \geq 4 + \frac{1}{2} - 4 \times 1 - \frac{1}{4} > 0$ olur. İkinci durumda, $\mu^*(v) \geq 4 - 4 \times 1 = 0$ olur.

Son olarak, x_i 'lerin hiçbirinin genişletilebilir olmadığını varsayalım, yani her y_i bir 11^+ -köşedir. v köşesi dört 11^+ -köşesine zayıf komşu olduğundan, $i_1, i_2 \in [6]$ için f_{i1} ve f_{i2} 'nin her birinin ya iki bitişik 11^+ -köşeye sahip bir 5-yüz ya da bir 6^+ -yüz olduğunu sonucuna varırız. R12 ve R13'ü Özellik 5.8 ile birlikte uygulayarak, f_{i1} ve f_{i2} , v 'ye en az 1 aktarır. Sonuç olarak, v köşesi R1 ile her x_i 'ye 1 ve R2-R6 ile diğer komşularının her birine en fazla $\frac{1}{2}$ gönderdikten sonra $\mu^*(v) \geq 4 + 2 \times 1 - 4 \times 1 - 2 \times \frac{1}{2} > 0$ olur.

$n_2(v) = 5$ olsun. Eğer x_i 'lerden ikisi genişletilebilir ise, diğerleri hafif köşeler olur. Bu durumda, v köşesi Lemma 5.3'e göre ağır olduğundan bir 12^+ -komşusuna sahip olacaktır. Bu, v 'nin R9 ile 12^+ -komşusundan 1 alması ve R1 ile her 2-komşusuna 1 göndermesi gerektiği anlamına gelir. Böylece, $\mu^*(v) \geq 4 + 1 - 5 \times 1 = 0$ olur.

Şimdi, en fazla bir x_i 'nin genişletilebilir olduğunu varsayalım. v köşesi dört 11^+ -köşesine zayıf komşu olduğundan, $i_1, i_2 \in [6]$ için f_{i1} ve f_{i2} 'nin her birinin ya iki bitişik 11^+ -köşesine sahip bir 5-yüz ya da bir 6^+ -yüz olduğu sonucuna varırız. R12 ve R13'ü Özellik 5.8 ile birlikte uygulayarak, f_{i1} ve f_{i2} , v 'ye en az 1 aktarır. Sonuç olarak, v köşesi R1 ile her x_i 'ye 1 ve R2-R6 ile diğer komşusuna en fazla $\frac{1}{2}$ gönderdikten sonra $\mu^*(v) \geq 4 + 2 \times 1 - 5 \times 1 - \frac{1}{2} > 0$ olur.

$n_2(v) = 6$ olsun. Tüm x_i 'ler ağırdır, çünkü aksi takdirde v ve komşularından biri hafif olur ve bu, Lemma 5.3'e göre bir çelişkidir. v , altı 11^+ -köşesine zayıf komşu olduğundan, her f_i 'nin ya iki bitişik 11^+ -köşesine sahip bir 5-yüz ya da bir 6^+ -yüz olduğu sonucuna varırız. R12 ve R13'ü Özellik 5.8 ile birlikte uygulayarak, her f_i v 'ye en az 1 aktarır. Böylece, v köşesi R1 ile her x_i 'ye 1 gönderdikten sonra $\mu^*(v) \geq 4 + 6 \times 1 - 6 \times 1 > 0$ olur.

(6) $k = 7$ olsun. v 'nin başlangıç yükü $\mu(v) = \frac{11}{2}$ 'dir. Bir 3^+ -köşe, R2-R7 kurallarına göre v 'den en fazla $\frac{2}{3}$ alabilir. Dolayısıyla, v 'nin en fazla iki 2-komşusu varsa, v köşesi R1 ile her x_i 'ye 1 ve R2-R7 ile diğer komşularının her birine en fazla $\frac{2}{3}$ gönderdikten sonra: $\mu^*(v) \geq \frac{11}{2} - 2 \times 1 - 5 \times \frac{2}{3} > 0$ olduğunu varsayabiliriz.

$n_2(v) = 3$ olsun. Eğer v 'nin en fazla üç 3(1)-komşusu varsa, v her bir x_i 'ye R1 ile 1, 3(1)-komşularına R2 ile $\frac{2}{3}$, diğer komşularına ise R3-R7 ile en fazla $\frac{1}{2}$ gönderir. Bu durumda $\mu^*(v) \geq \frac{11}{2} - 3 \times 1 - 3 \times \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = 0$ olur. Eğer v 'nin dört 3(1)-komşusu varsa, v hafif olur ve her x_i Lemma 5.4'e göre ağır olmalıdır. Bu durumda her y_i , 10^+ -köşe olur. Ayrıca, Lemma 5.4'e göre v 'nin her bir 3(1)-komşusu, 9^+ -köşeye bitişiktir çünkü bir 3(1)-köşe ağırdır. v köşesi üç 10^+ -köşeye zayıf ve dört 9^+ -köşeye yıldız komşudur. Bu nedenle, $i_1, i_2 \in [7]$ için f_{i1}, f_{i2} yüzlerinin her birinin ya bitişik iki 9^+ -köşesi olan bir 5-yüz ya da bir 6^+ -yüz olduğunu çıkarırız. R11-R13 kuralları uygulanarak, her bir f_{i1}, f_{i2} , v 'ye en az $\frac{1}{3}$ gönderir. Bu durumda $\mu^*(v) \geq \frac{11}{2} + 2 \times \frac{1}{3} - 3 \times 1 - 4 \times \frac{2}{3} > 0$ olur, v her bir x_i 'ye R1 ile 1 ve her bir 3(1)-komşusuna R2 ile $\frac{2}{3}$ gönderir.

$n_2(v) = 4$ olsun. Eğer tüm x_i 'ler ağırsa, her y_i , 10^+ -köşe olmalıdır. v köşesi dört 10^+ -köşeye zayıf komşudur. Bu durumda, $i \in [7]$ için f_i yüzünün ya bitişik iki 10^+ -köşesi olan bir 5-yüz ya da bir 6^+ -yüz olduğunu çıkarırız. R12-R13 kuralları uygulanarak, f_i , v 'ye en az 1 gönderir. Böylece $\mu^*(v) \geq \frac{11}{2} + 1 - 4 \times 1 - 3 \times \frac{2}{3} > 0$ olur, v her bir x_i 'ye R1 ile 1 ve diğer komşularına R2-R7 ile en fazla $\frac{2}{3}$ gönderir.

Şimdi, x_i 'lerden birinin hafif olduğunu varsayalım, bu durumda v Lemma 5.4'e göre ağır olur. Eğer v 'nin 3(1)-komşusu yoksa, v her bir x_i 'ye R1 ile 1 ve diğer komşularına R3-R7 ile en fazla $\frac{1}{2}$ gönderir. Bu durumda $\mu^*(v) \geq \frac{11}{2} - 4 \times 1 - 3 \times \frac{1}{2} = 0$ olur. Eğer v 'nin tam olarak bir 3(1)-komşusu varsa, Lemma 5.6'ya göre v 'nin iki 4(2)-komşusu olamaz. Bu durumda v her bir x_i 'ye R1 ile 1, 3(1)-komşusuna R2 ile $\frac{2}{3}$, 4(2)-komşusuna R6 ile $\frac{1}{2}$, diğer komşusuna ise R3-R5, R7 ile en fazla $\frac{1}{3}$ gönderir. Bu durumda $\mu^*(v) \geq \frac{11}{2} - 4 \times 1 - \frac{2}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = 0$ olur. Eğer v 'nin iki 3(1)-komşusu varsa, Lemma 5.6'ya göre v 'nin bir 6^+ -komşusu olur. Bu durumda v her bir x_i 'ye R1 ile 1 ve her bir 3(1)-komşusuna R2 ile $\frac{2}{3}$ gönderir. Bu durumda $\mu^*(v) \geq \frac{11}{2} - 4 \times 1 - 2 \times \frac{2}{3} > 0$ olur.

$n_2(v) = 5$ olsun. Eğer x_i 'lerden üçü genişletilebilir durumdaysa, geri kalanlar hafif köşeler olur. Bu durumda, v 'nin ya bir 10^+ -komşusu ya da 3(1)-komşusu olmadığını söyleyebiliriz. İlk durumda, v köşesi R9 kuralına göre 10^+ -komşusundan 1 alır ve R1 ile her 2-komşusuna 1, diğer 5-komşularına ise R2-R7 kurallarıyla en fazla $\frac{2}{3}$ gönderir. Böylece $\mu^*(v) \geq \frac{11}{3} + 3 \times \frac{1}{12} - 5 \times 1 - \frac{3}{4} > 0$ olur. İkinci durumda, Lemma 5.5'e göre v 'nin iki (3-5)-komşusu olamaz. Bu durumda, v köşesi her bir 2-komşusuna R1 ile 1, diğer (3-5)-komşularına

ise R3-R7 kurallarıyla en fazla $\frac{1}{2}$ gönderir ve $\mu^*(v) \geq \frac{11}{2} + \frac{1}{2} - 5 \times 1 - \frac{2}{3} > 0$ olur. Şimdi x_i 'lerden tam olarak ikisinin genişletilebilir olduğunu varsayalım, diyelim ki x_1 ve x_2 . Bu durumda, y_3, y_4 ve y_5 genişletilebilir olmadıkları için birer 10^+ -köşedir. Önce, y_3, y_4 ve y_5 'ten tam olarak birinin 11^- -köşesi olduğunu düşünelim, diyelim ki y_3 . Açıkça y_3 hafif bir köşedir. R9 kuralına göre, y_4 ve y_5 , v 'ye $\frac{1}{12}$ gönderir. Lemma 5.3'e göre v ağır bir köşe olduğundan, v 'nin ya iki 5^+ -komşusu ya da bir 6^+ -komşusu vardır. Her iki durumda da, v köşesi (3-5)-komşularına R2-R7 ile toplamda en fazla $\frac{2}{3}$ gönderir. Böylece $\mu^*(v) \geq \frac{11}{2} + 2 \times \frac{1}{12} - 5 \times 1 - \frac{2}{3} = 0$ olur. Şimdi y_3, y_4, y_5 'ten en az ikisinin 11^- -köşesi olduğunu varsayalım. Lemma 5.3'e göre v ağır bir köşedir ve bir 6^+ -komşusu vardır. Ayrıca, ya bir 9^+ -komşusu vardır ya da $3(1)$ -komşusu yoktur. İlk durumda, R8-R9 kurallarına göre, v köşesi 9^+ -komşusundan en az $\frac{1}{2}$ alır ve $\mu^*(v) \geq \frac{11}{2} + \frac{1}{2} - 5 \times 1 - \frac{2}{3} > 0$ olur. İkinci durumda ise, v köşesi R1 ile her bir 2-komşusuna 1 ve R3-R7 ile (3-5)-komşusuna en fazla $\frac{1}{2}$ gönderir ve $\mu^*(v) \geq \frac{11}{2} - 5 \times 1 - \frac{1}{2} > 0$ olur. Son olarak, y_3, y_4 ve y_5 'in her birinin 12^+ -köşesi olduğunu varsayalım. Bu durumda, y_3, y_4, y_5 , v 'ye $\frac{1}{12}$ gönderir. v ağır bir köşe olduğundan, ya bir 4-komşusu ve bir 5^+ -komşusu ya da bir 6^+ -komşusu vardır. Her iki durumda da, v köşesi (3-5)-komşularına R2-R7 ile toplamda en fazla $\frac{3}{4}$ gönderir. Böylece $\mu^*(v) \geq \frac{11}{2} + 3 \times \frac{1}{12} - 5 \times 1 - \frac{3}{4} = 0$ olur. Şimdi x_i 'lerden en fazla birinin genişletilebilir olduğunu varsayalım. v köşesi dört 10^+ -köşesine zayıf komşu olduğu için, $i \in [7]$ için f_i 'nin ya iki bitişik 10^+ -köşeye sahip bir 5-yüz ya da bir 6^+ -yüz olduğu sonucuna varırız. R12-R13'ü Özellik 5.8 ile birlikte uygulayarak, f_i , v 'ye en az 1 gönderir. Böylece, v köşesi R1 ile her x_i 'ye 1 ve R2-R7 ile diğer komşularının her birine en fazla $\frac{2}{3}$ gönderir ve $\mu^*(v) \geq \frac{11}{2} + 1 - 5 \times 1 - 2 \times \frac{2}{3} > 0$ olur.

$n_2(v) = 6$ olsun. Eğer x_i 'lerden üçü genişletilebilir durumdaysa, geri kalanlar hafif köşeler olur. Bu, Lemma 5.5'e göre v 'nin bir 11^+ -komşusu olduğu anlamına gelir. R9 kuralına göre, v köşesi 11^+ -komşusundan 1 alır ve R1 ile her 2-komşusuna 1 gönderir $\mu^*(v) \geq \frac{11}{2} + 1 - 6 \times 1 > 0$ olur. Şimdi x_i 'lerden en fazla ikisinin genişletilebilir olduğunu varsayalım. Dört 10^+ -köşeye zayıf komşu olduğundan, $i \in [7]$ için f_i yüzünün ya bitişik iki 10^+ -köşesi olan bir 5-yüz ya da bir 6^+ -yüz olduğunu çıkarırız. R12-R13 kuralları uygulanarak, her bir f_i , v 'ye en az 1 gönderir. Böylece, $\mu^*(v) \geq \frac{11}{2} + 1 - 6 \times 1 > 0$ olur, v her bir x_i 'ye R1 ile 1 gönderir.

$n_2(v) = 7$ olsun. Tüm x_i 'ler ağırdır, aksi takdirde v ve komşularından biri hafif olursa bu Lemma 5.4 ile çelişir. v köşesi yedi 10^+ -köşeye zayıf komşu olduğundan, f_i 'nin her biri ya bitişik iki 10^+ -köşesi olan bir 5-yüz ya da bir 6^+ -yüzdür. R12-R13 kuralları uygulanarak, her f_i , v 'ye en az 1 gönderir. Böylece, $\mu^*(v) \geq \frac{11}{2} + 6 \times 1 - 7 \times 1 > 0$ olur, v her bir x_i 'ye R1 ile 1 gönderir.

(7) $k = 8$ olsun. v köşesinin başlangıç yükü $\mu(v) = 7$ 'dir. Eğer v 'nin en fazla dört 2-komşusu varsa, o zaman $\mu^*(v) \geq 7 - 4 \times 1 - 4 \times \frac{3}{4} = 0$ olur; v , her bir x_i 'ye R1 ile 1 ve diğer komşularına R2-R7 ile en fazla $\frac{3}{4}$ gönderir. Bu nedenle, $n_2(v) \geq 5$ olduğunu varsayabiliriz.

$n_2(v) = 5$ olsun. Eğer x_i 'lerden biri hafifse, Lemma 5.3'e göre v ağır olur ve Lemma 5.5'e göre v üç tane 3(1)-komşusuna sahip olamaz. Böylece, $\mu^*(v) \geq 7 - 5 \times 1 - 2 \times \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = 0$ olur; v köşesi her bir x_i 'ye R1 ile 1, 3(1)-komşularına R2 ile $\frac{3}{4}$, ve diğer komşularına R3-R7 ile en fazla $\frac{1}{2}$ gönderir. Eğer tüm x_i 'ler ağırsa, her y_i 9^+ -köşe olur. v köşesi beş 9^+ -köşeye zayıf komşu olduğundan, $i_1, i_2 \in [8]$ olmak üzere f_{i1}, f_{i2} yüzlerinin her birinin bitişik iki 9^+ -köşesi olan bir 5-yüz ya da bir 6^+ -yüz olduğunu çıkarırız. R11-R13 kuralları uygulanarak, f_{i1}, f_{i2} her biri v 'ye en az $\frac{1}{3}$ gönderir. Böylece, $\mu^*(v) \geq 7 + 2 \times \frac{1}{3} - 5 \times 1 - 3 \times \frac{3}{4} > 0$ olur; v köşesi her bir x_i 'ye R1 ile 1 ve diğer komşularına R2-R7 ile en fazla $\frac{3}{4}$ gönderir.

$n_2(v) = 6$ olsun. Eğer x_i 'lerden üçü hafifse, Lemma 5.6'ya göre v köşesi ya bir 6^+ -komşuya sahip olur ya da 3(1)-komşusu olmaz. İlk durumda, $\mu^*(v) \geq 7 - 6 \times 1 - \frac{3}{4} > 0$ olur; v köşesi her bir x_i 'ye R1 ile 1 ve (3-5)-komşusuna R2-R7 ile en fazla $\frac{3}{4}$ gönderir. İkinci durumda, $\mu^*(v) \geq 7 - 6 \times 1 - 2 \times \frac{1}{2} = 0$ olur; v köşesi her bir 2-komşusuna R1 ile 1 ve (3-5)-komşularına R2-R7 ile en fazla $\frac{1}{2}$ gönderir. Şimdi, x_i 'lerin tam olarak ikisinin hafif olduğunu varsayalım, diyelim ki x_1 ve x_2 . Lemma 5.3'e göre v ağırdır. Lemma 5.5'e göre v 'nin iki tane 3(1)-komşusu olamaz. Eğer v 'nin 3(1)-komşusu yoksa, $\mu^*(v) \geq 7 - 6 \times 1 - 2 \times \frac{1}{2} = 0$ olur; v köşesi her bir 2-komşusuna R1 ile 1 ve (3-5)-komşularına R2-R7 ile en fazla $\frac{1}{2}$ gönderir. Eğer v 'nin bir 3(1)-komşusu varsa, diyelim ki z , o zaman z , bir 10^+ -köşeye bitişiktir ve Lemma 5.4'e göre 3(1)-köşe ağırdır. Yani, v köşesi bir 10^+ -köşeye yıldız-komşudur. y_3, y_4, y_5, y_6 'nın 9^+ -köşeler olduğunu hatırlayalım. v köşesi dört 9^+ -köşeye zayıf komşu ve bir 10^+ -köşeye yıldız-komşu olduğundan, $i \in [8]$ için f_i

yüzünün bitişik iki 9^+ -köşesi olan bir 5-yüz ya da bir 6^+ -yüz olduğunu çıkarırız. R11-R13 kuralları uygulanarak, f_i v 'ye en az $\frac{1}{3}$ gönderir. Böylece, $\mu^*(v) \geq 7 + \frac{1}{3} - 6 \times 1 - \frac{3}{4} - \frac{1}{2} > 0$ olur; v köşesi her bir x_i 'ye R1 ile 1, R2'ye göre 3(1) komşusuna $\frac{3}{4}$ ve R3-R7'ye göre 3^+ komşularına (3(1)-köşe hariç) en fazla $\frac{1}{2}$ gönderir. Şimdi, x_i 'lerden en fazla birinin hafif olduğunu varsayalım, diyelim ki x_1 (eğer varsa). Açıkça $y_2, y_3, \dots, y_6$ 9^+ -köşelerdir. v köşesi beş 9^+ -köşeye zayıf komşu olduğundan, $i_1, i_2 \in [8]$ olmak üzere, f_{i_1}, f_{i_2} yüzlerinin her birinin bitişik iki 9^+ -köşesi olan bir 5-yüz ya da bir 6^+ -yüz olduğunu çıkarırız. R11-R13 kuralları uygulanarak, f_{i_1}, f_{i_2} her biri v 'ye en az $\frac{1}{3}$ gönderir. Böylece, $\mu^*(v) \geq 7 + 2 \times \frac{1}{3} - 6 \times 1 - 2 \times \frac{3}{4} > 0$ olur; v köşesi her bir x_i 'ye R1 ile 1 ve (3-5)-komşularına R2-R7 ile en fazla $\frac{3}{4}$ gönderir.

$n_2(v) = 7$ olsun. Eğer x_i 'lerden üçü hafifse, Lemma 5.3 ve Lemma 5.5'e göre v 'nin bir 6^+ -komşusu olur. Böylece, $\mu^*(v) \geq 7 - 7 \times 1 = 0$ olur; v köşesi her bir x_i 'ye R1 ile 1 gönderir. Şimdi, x_i 'lerden tam ikisinin hafif olduğunu varsayalım, diyelim ki x_1, x_2 . O zaman, Lemma 5.3 ve Lemma 5.5'e göre v 'nin bir 5^+ -komşusu olur. Diğer yandan, $y_3, y_4, \dots, y_7$ 9^+ -köşelerdir. v köşesi beş 9^+ -köşeye zayıf komşu olduğundan, $i_1, i_2 \in [8]$ olmak üzere, f_{i_1}, f_{i_2} yüzlerinin her birinin bitişik iki 9^+ -köşesi olan bir 5-yüz ya da bir 6^+ -yüz olduğunu çıkarırız. R11-R13 kuralları uygulanarak, f_{i_1}, f_{i_2} her biri v 'ye en az $\frac{1}{3}$ gönderir. Böylece, $\mu^*(v) \geq 7 + 2 \times \frac{1}{3} - 7 \times 1 - \frac{1}{2} > 0$ olur; v köşesi her bir x_i 'ye R1 ile 1 ve 5^+ -komşusuna R7 ile en fazla $\frac{1}{2}$ gönderir. Son olarak, x_i 'lerden en fazla birinin hafif olduğunu varsayalım, diyelim ki x_1 (eğer varsa). O zaman, $y_3, y_4, \dots, y_7$ 9^+ -köşelerdir. v , altı 9^+ -köşeye zayıf komşu olduğundan, $i_1, i_2, \dots, i_4 \in [8]$ olmak üzere, $f_{i_1}, f_{i_2}, \dots, f_{i_4}$ yüzlerinin her birinin bitişik iki 9^+ -köşesi olan bir 5-yüz ya da bir 6^+ -yüz olduğunu çıkarırız. R11-R13 kuralları uygulanarak, $f_{i_1}, f_{i_2}, \dots, f_{i_4}$ her biri v 'ye en az $\frac{1}{3}$ gönderir. Böylece, $\mu^*(v) \geq 7 + 4 \times \frac{1}{3} - 7 \times 1 - \frac{3}{4} > 0$ olur; v köşesi her bir x_i 'ye R1 ile 1 ve R2-R7 ile diğer komşusuna en fazla $\frac{3}{4}$ gönderir.

$n_2(v) = 8$ olsun. Tüm x_i 'ler ağırdır, aksi takdirde v ve bir komşusu hafif olur ki bu, Lemma 5.4 ile çelişir. v köşesi sekiz 9^+ -köşeye zayıf komşu olduğundan, her f_i yüzünün bitişik iki 9^+ -köşesi olan bir 5-yüz ya da bir 6^+ -yüz olduğunu çıkarırız. R11-R13 kuralları uygulanarak, her f_i v 'ye en az $\frac{1}{3}$ gönderir. Böylece, $\mu^*(v) \geq 7 + 8 \times \frac{1}{3} - 8 \times 1 > 0$ olur; v köşesi her bir x_i 'ye R1 ile 1 gönderir.

(8) $k = 9$ olsun. v 'nin başlangıç yükü $\mu(v) = \frac{17}{2}$ 'dir. Eğer v 'nin en fazla altı 2-komşusu varsa, v her bir x_i 'ye R1 ile 1 ve diğer komşularına R2-R7 ile en fazla $\frac{5}{6}$ gönderdikten sonra $\mu^*(v) \geq \frac{17}{2} - 6 \times 1 - 3 \times \frac{5}{6} = 0$ olur. Bu nedenle, $n_2(v) \geq 7$ olduğunu varsayabiliriz.

$n_2(v) = 7$ olsun. Eğer x_i 'lerden ikisi hafif ise, Lemma 5.3 ve Lemma 5.5'e göre v köşesi en fazla bir tane 3(1)- veya 4(2)-köşe oluşturan komşuya sahip olabilir. Bu durumda, v köşesi R1'e göre her bir x_i 'ye 1, varsa R2 ve R6'ya göre 3(1)- veya 4(2)-komşusuna en fazla $\frac{5}{6}$ ve R3-R5 ile R7'ye göre diğer komşularının her birine en fazla $\frac{1}{2}$ gönderdiğinde: $\mu^*(v) \geq \frac{17}{2} - 7 \times 1 - \frac{5}{6} - \frac{1}{2} > 0$ olur. Şimdi, x_i 'lerden tam olarak birinin hafif olduğunu varsayalım, diyelim ki x_1 . Bu durumda, $y_2, y_3, \dots, y_7$ açıkça 8^+ -köşeleridir. Eğer v köşesi bir 3(1)-komşuya sahip değilse, v köşesi R1'e göre her bir x_i 'ye 1 ve R3-R7'ye göre diğer komşularının her birine en fazla $\frac{3}{4}$ gönderdiğinde $\mu^*(v) \geq \frac{17}{2} - 7 \times 1 - 2 \times \frac{3}{4} > 0$ olur. Eğer v köşesi bir 3(1)-komşuya sahipse, diyelim ki z , Lemma 5.4'e göre z köşesi v dışında bir 8^+ -köşeye komşudur. Yani, v köşesi, bir 8^+ köşeye yıldız komşuluğu yapmaktadır. Bunun yanında, $y_2, y_3, \dots, y_7$ 8^+ köşelerdir. v köşesi altı 8^+ köşe ile zayıf komşuluk yaptığı ve bir 8^+ -köşeye yıldız komşuluğu yaptığı için, [9] kümesinden $i \in [9]$ olacak şekilde iki ardışık yüz f_i ve f_{i+1} bulunduğu sonucuna varırız. Bu yüzlerin her biri ya iki bitişik 8^+ -köşeye sahip bir 5-yüzdür ya da bir 6^+ -yüzdür. Eğer hem f_i hem de f_{i+1} , 5-yüz ise, f_i ve f_{i+1} üzerinde iki 8^+ -köşeye komşu olan ve her iki yüzde de ortak olan bir 8^+ -köşe x_5 vardır. Bu durumda, x_5 , R10-R12'ye göre f_i ve f_{i+1} 'in her birine en az $\frac{1}{4}$ gönderir. Eğer f_i ve f_{i+1} 'den biri 6^+ -yüz ise, R13 ve Özellik 5.8'e göre bu yüz, v 'ye en az $\frac{1}{3}$ gönderir. Sonuç olarak, v köşesi R13'e göre kendi çevresindeki yüzlerden toplamda en az $\frac{1}{3}$ alır. Bu durumda, v köşesi R1'e göre her bir x_i 'ye 1 ve R2-R7'ye göre diğer komşularının her birine en fazla $\frac{5}{6}$ gönderdiğinde $\mu^*(v) \geq \frac{17}{2} + \frac{1}{3} - 7 \times 1 - 2 \times \frac{5}{6} > 0$ olur. Son olarak, tüm x_i 'lerin ağır olduğunu varsayalım. Bu durumda, $y_1, y_2, \dots, y_7$ 8^+ köşelerdir. v köşesi yedi 8^+ -köşeye zayıf komşuluk yaptığı için, [8] kümesinden $i \in [8]$ olacak şekilde iki ardışık yüz f_i ve f_{i+1} bulunduğu sonucuna varırız. Bu yüzlerin her biri ya iki bitişik 8^+ -köşeye sahip bir 5-yüzdür ya da bir 6^+ -yüzdür. Yukarıda olduğu gibi, v , R10-R13'e göre çevresindeki yüzlerden toplamda en az $\frac{1}{3}$ alır. Bu durumda, v köşesi R1'e göre her bir x_i 'ye 1 ve R2-R7'ye göre diğer komşularının her birine en fazla $\frac{5}{6}$ gönderdiğinde $\mu^*(v) \geq \frac{17}{2} + \frac{1}{3} - 7 \times 1 - 2 \times \frac{5}{6} > 0$ olur.

$n_2(v) \geq 8$ olsun. Eğer x_i 'lerden ikisi hafifse, Lemma 5.3 ve Lemma 5.5'e göre v 'nin ne 3(1)- ne de 4(2)-komşusu vardır. Bu durumda, v her bir 2-komşusuna R1 ile 1 ve diğer komşularına R3-R4,R8 ile en fazla $\frac{1}{2}$ gönderdikten sonra $\mu^*(v) \geq \frac{17}{2} - 8 \times 1 - \frac{1}{2} = 0$ olur. Şimdi, en fazla bir x_i 'nin hafif olduğunu varsayalım, diyelim ki x_1 (varsa). Açıkça, $y_2, y_3, \dots, y_8$ 8^+ -köşelerdir. v köşesi yedi 8^+ -köşeye zayıf komşu olduğundan, $i \in [8]$ olmak üzere, ardışık iki yüz f_i ve f_{i+1} 'in her birinin ya bitişik iki 8^+ -köşesi olan bir 5-yüz ya da bir 6^+ -yüz olduğunu çıkarırız. Yukarıda olduğu gibi, v köşesi R10-R13 ile toplamda en az $\frac{1}{3}$ alır. Böylece, $\mu^*(v) \geq \frac{17}{2} + \frac{1}{3} - 7 \times 1 - 2 \times \frac{5}{6} > 0$ olur; v köşesi her bir x_i 'ye R1 ile 1 ve diğer komşularına R2-R7 ile en fazla $\frac{5}{6}$ gönderir.

(9) $k \geq 10$ olsun. v 'nin başlangıç yükü $\mu(v) \geq \frac{3d(v)}{2} - 5 \geq 10$. R9'a göre, v her bir 8^- -komşusuna 1 gönderir. Ayrıca, eğer v 'nin bir 9^+ -komşusu u varsa, R12 ile v köşesi vu içeren her yüze $\frac{1}{2}$ gönderir. Bu nedenle, v her komşusuna tam olarak 1 yük gönderir. Öte yandan, eğer v bir 12^+ -köşe ise, v köşesi her zayıf komşusuna $\frac{1}{12}$ gönderir ve bu durumda $\mu^*(v) \geq \frac{3d(v)}{2} - 5 - d(v) \times 1 - d(v) \times \frac{1}{12} \geq 0$ olur.

Her bir köşe ve yüz üzerinde negatif olmayan bir yük elde ediyoruz ve bu durum, toplam yükün negatif olduğu gerçeğiyle çelişiyor. Dolayısıyla, G var olamaz. Bu da Teorem 5.2'nin ispatını tamamlar.

6. SONUÇ

Bu çalışmada, düzlemsel çizgeler ve bu çizgelerin 2-uzaklı renklendirmesi ele alınmıştır. Öncelikle literatürde deşarj metodu olarak bilinen yöntem detaylı bir şekilde ifade edilmiştir. Daha sonra deşarj metodu kullanılarak düzlemsel çizgelerin 2-uzaklı renklendirmesi üzerinde çalışılmıştır. Bu tezde, çevrimi en az 5 olan düzlemsel çizgeler ele alınmıştır. Bu çizgeler ile ilgili bilinen en iyi sonuç Bu ve Zhu [4] tarafından ortaya konulan $\Delta \geq 15$ için $\chi_2(G) \leq \Delta + 5$ çalışmasına dayanmaktadır. Bu tez çalışmasında, Bu ve Zhu [4] nun sonucu şu şekilde geliştirilmiştir; $\Delta \geq 12$ için $\chi_2(G) \leq \Delta + 5$.

Elde edilen sonuç, deşarj metodunun etkin bir şekilde kullanılmasıyla ortaya çıkmıştır. Çalışmanın ilk bölümünde, yeniden boyama argümanı kullanılarak çizgede oluşabilecek yasaklı konfigürasyonlar tespit edilmiştir. Devamında, deşarj bölümünde yalnızca köşeler arasında yük transferi gerçekleşmemiş, aynı zamanda çizgedeki yüzlerin de yükleriyle birlikte aktif bir rol oynaması sağlanmıştır. Daha kapsamlı bir çalışmayla, elde edilen sonucun daha da iyileştirilebileceği düşünülmektedir. Ayrıca, burada kullanılan yeniden renklendirme yaklaşımının literatürde bilinen diğer sonuçların geliştirilmesine de katkı sağlayabileceği değerlendirilmektedir.

7. KAYNAKLAR

- [1] K. Appel, W. Haken, "Every planar map is four colorable. Part I. Discharging", *Illinois Journal of Mathematics*, c. 21, ss. 429-490, 1977.
- [2] E. Aras, "A result on the 2-distance coloring of planar graphs with girth five", *Konuralp Journal of Mathematics*, c. 13, sayı 1, ss. 60-66, 2025.
- [3] Y. Bu, X. Zhu, "An optimal square coloring of planar graphs", *Journal of Combinatorial Optimization*, c. 24, ss. 580-592, 2012.
- [4] Y. Bu, J. Zhu, "Channel Assignment with r-Dynamic Coloring", *12th International Conference on Algorithmic Aspects in Information and Management (AAIM)*, Dallas, TX, ss. 36-48, 2018.
- [5] D. W. Cranston, "Coloring, list coloring, and painting squares of graphs (and other related problems)", *The Electronic Journal of Combinatorics*, DS25, 2023.
- [6] Z. Deniz, "Some results on 2-distance coloring of planar graphs with girth five", *Journal of Combinatorial Optimization*, c. 47, sayı 4, ss. 68, 2024.
- [7] Z. Deniz, "An improved bound for 2-distance coloring of planar graphs with girth six", *Discrete Applied Mathematics*, c. 361, ss. 121-135, 2025.
- [8] S. G. Hartke, S. Jahanbekam, B. Thomas, "The chromatic number of the square of subcubic planar graphs", *arXiv preprint*, arXiv:1604.06504, 2016.
- [9] J. van den Heuvel, S. McGuinness, "Coloring the square of a planar graph", *Journal of Graph Theory*, c. 42, ss. 110-124, 2003.
- [10] A. B. Kempe, "On the geographical problem of the four colours", *American Journal of Mathematics*, c. 2, sayı 3, ss. 193-200, 1879.
- [11] H. La, "2-distance list $(\Delta + 3)$ -coloring of sparse graphs", *Graphs and Combinatorics*, c. 38, sayı 6, ss. 167, 2022.
- [12] H. La, M. Montassier, "2-distance list $(\delta + 2)$ -coloring of planar graphs with girth at least 10", *Journal of Combinatorial Optimization*, c. 44, sayı 2, ss. 1356-1375, 2022.
- [13] M. Molloy, M. R. Salavatipour, "A bound on the chromatic number of the square of a planar graph", *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, c. 94, ss. 189-213, 2005.

- [14] C. Thomassen, "The square of a planar cubic graph is 7-colorable", *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, c. 128, ss. 192-218, 2018.
- [15] G. Wegner. (1977). *Graphs with given diameter and a coloring problem* (Rapor No:Arbeitspapier 3, SFB 26). Dortmund: University of Dortmund.



ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Elif ARAS

Yabancı Dili : İngilizce

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Y. Lisans	Matematik	Düzce Üniversitesi	2025
Lisans	Matematik	Düzce Üniversitesi	2022
Lise		Düzce Arsal Anadolu Lisesi	2018

TEZDEN ÜRETİLEN YAYIN

E. Aras, "A result on the 2-distance coloring of planar graphs with girth five", Konuralp Journal of Mathematics, c. 13, sayı 1, ss. 60-66, 2025.