

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ METRİK UZAYLARDA TEK DEĞERLİ VE
ÇOĞUL DEĞERLİ DÖNÜŞÜMLER İÇİN BAZI SABİT NOKTA VE
ORTAK SABİT NOKTA TEOREMLERİ

DOKTORA TEZİ

Neslihan KAPLAN KURU

Matematik Anabilim Dalı

Topoloji Bilim Dalı

ŞUBAT 2025

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ METRİK UZAYLARDA TEK DEĞERLİ VE
ÇOĞUL DEĞERLİ DÖNÜŞÜMLER İÇİN BAZI SABİT NOKTA VE
ORTAK SABİT NOKTA TEOREMLERİ

DOKTORA TEZİ

Neslihan KAPLAN KURU

Matematik Anabilim Dalı

Topoloji Bilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mahpeyker ÖZTÜRK

ŞUBAT 2025

Neslihan KAPLAN KURU tarafından hazırlanan “Genelleştirilmiş Metrik Uzaylarda Tek Değerli ve Çoğul Değerli Dönüşümler için Bazı Sabit Nokta ve Ortak Sabit Nokta Teoremleri” adlı tez çalışması 05.02.2025 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Topoloji Bilim Dalı’nda Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi

Jüri Başkanı : **Prof. Dr. Mahpeyker ÖZTÜRK** (Danışman)
Sakarya Üniversitesi

Jüri Üyesi : **Prof. Dr. Selma ALTUNDAĞ**
Sakarya Üniversitesi

Jüri Üyesi : **Prof. Dr. Fatma Aydın AKGÜN**
Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyesi : **Prof. Dr. Soley ERSOY**
Sakarya Üniversitesi

Jüri Üyesi : **Prof. Dr. Betül USTA**
Sakarya Uygulamalı Bilimler Üniversitesi



ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Eğitim-Öğretim Yönetmeliğine ve Yükseköğretim Kurumları Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesine uygun olarak hazırlamış olduğum “GENELLEŞTİRİLMİŞ METRİK UZAYLARDA TEK DEĞERLİ VE ÇOĞUL DEĞERLİ DÖNÜŞÜMLER İÇİN BAZI SABİT NOKTA VE ORTAK SABİT NOKTA TEOREMLERİ” başlıklı tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın tüm aşamalarında yukarıda belirtilen yönetmelik ve yönergeye uygun davrandığımı, tezin içerdiği yenilik ve sonuçları başka bir yerden almadığımı, tezde kullandığım eserleri usulüne göre kaynak olarak gösterdiğimi, bu tezi başka bir bilim kuruluna akademik amaç ve unvan almak amacıyla vermediğimi ve 20.04.2016 tarihli Resmi Gazete’de yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince Sakarya Üniversitesi’nin abonesi olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Enstitü tarafından belirlenmiş ölçütlere uygun rapor alındığını, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun ortaya çıkması halinde doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi beyan ederim.

(05/02/2025)

Neslihan KAPLAN KURU



Eşim ve kızım Simay'a



TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans ve Doktora eğitimim boyunca değerli bilgi ve tecrübesinden yararlandığım, teşvik ve desteğini hiç eksik etmeyen, araştırmanın planlanmasından yazılmasına kadar tüm aşamalarında yardımlarını esirgemeyip aynı titizlikte beni yönlendiren, bu yolda bana en güzel örnek olan değerli danışman hocam Prof. Dr. Mahpeyker ÖZTÜRK'e teşekkürlerimi sunarım.

Tez süresince gerekli ilgi ve yardımlarını esirgemeyen Prof. Dr. Selma ALTUNDAĞ ve Prof. Dr. Fatma Aydın AKGÜN hocalarıma teşekkürlerimi arz ederim.

Bu tezi bitirmem için her konuda yardımlarına başvurduğum arkadaşlarım Dr. Öğr. Üyesi Ekber GİRGİN ve Dr. Abdurrahman BÜYÜKKAYA'ya katkılarından dolayı teşekkürü borç bilirim.

Bugünleri görmesini tüm kalbimle istediğim, çok özlediğim annem Asiye KAPLAN ve beni yetiştiren babam Hüseyin KAPLAN' a emeklerinden dolayı teşekkür ederim.

Sadece tez çalışmalarım boyunca değil hayatımın her aşamasında hep yanımda olan, maddi ve manevi desteğini her zaman hissettiğim eşim İlhan KURU, biricik kızım Simay KURU' ya ve kardeşim Aslıhan KAPLAN'a çok teşekkür ederim.

Neslihan KAPLAN KURU



İÇİNDEKİLER

Sayfa

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ	v
TEŞEKKÜR	ix
İÇİNDEKİLER	xi
SİMGELER	xiii
TABLO LİSTESİ	xv
ŞEKİL LİSTESİ	xvii
ÖZET	xix
SUMMARY	xxi
1. GİRİŞ	1
1.1. Temel Kavramlar ve Teoremler	1
1.2. Temel Tanım ve Teoremler	3
1.3. Sabit Nokta Kavramı ve Banach Sabit Nokta Teoremi	9
1.4. Çoğul Değerli Dönüşümler ve Nadler Sabit Nokta Teoremi	21
1.5. Banach Sabit Nokta Teoreminin Bazı Genellemeleri	24
1.5.1. Geraghty daralma dönüşümleri	24
1.5.2. Simülasyon fonksiyonlar	25
1.5.3. α –geçişli (admissible) dönüşümü	30
1.5.4. E –daralma dönüşümleri	31
1.5.5. c –kıyaslama ve b –kıyaslama fonksiyonları	33
1.5.6. θ –dönüşümleri	34
1.6. $\mathfrak{R}$ İkili Bağntı	35
1.7. Ulam-Hyers Kararlılık Problemi	36
1.8. Graf Teorisi	38
2. BAZI GENEL METRİK YAPILARI	43
2.1. b –Metrik Uzaylar	43
2.2. Modüler Metrik Uzaylar	47
2.3. Modüler b –Metrik Uzaylar	51
2.4. Asimetrik Modüler Uzaylar	54
3. ASİMETRİK MODÜLER B –METRİK UZAYLARDA, SİMÜLATİF	
DARALMA DÖNÜŞÜMÜ İÇİN SABİT NOKTA SONUÇLARI	57
3.1. Asimetrik-Modüler b –Metriğin Bazı Topolojik Özellikleri	57
3.2. Asimetrik-Modüler b –Metrik Uzaylarda Sabit Nokta Teoremleri	61
3.3. Archimedean Olmayan Asimetrik Modüler b –Metrik Uzaylarda Sabit Nokta	
Teorisinin Bazı Uygulamaları	69
3.3.1. Ulam-Hyers kararlılık problemine uygulama	69
3.3.2. Caputo tipli doğrusal olmayan kesirli diferansiyel denkleminde uygulama	
.....	71
4. $\mathfrak{R}$-MODÜLER B –METRİK-GİBİ UZAYLARDA BAZI SABİT NOKTA	
SONUÇLARI	75
4.1. Modüler ve $\mathfrak{R}$ –Modüler b –Metrik–Gibi Uzaylar	75
4.1.1. Modüler b –metrik–gibi uzaylar ve bazı topolojik özellikleri	75

4.1.2. $\mathfrak{R}$ –Modüler b –metrik–gibi uzaylar ve bazı topolojik özellikleri	77
4.2. $\mathfrak{R}$ –Modüler b –Metrik–Gibi Uzaylarda Bazı Sabit Nokta Sonuçları	79
4.3. $\mathfrak{R}$ –Modüler b –Metrik–Gibi Uzaylarda Uygulamalar	88
4.3.1. Dinamik programlamada uygulama	88
4.3.2. RLC devre modelinde uygulama.....	91
5. ÇOĞUL DEĞERLİ DARALMA DÖNÜŞÜMLERİ İÇİN SABİT NOKTA	
TEOREMLERİ VE UYGULAMALARI	95
5.1. Archimedean Olmayan Modüler Metrik Uzaylarda Çoğul Değerli θ –Tipli Daralma Dönüşümü İçin Sabit Nokta Sonuçları	95
5.2. Archimedean Olmayan Modüler Metrik Uzaylarda Çoğul Değerli θ –Tipli Daralma Dönüşümünün Graf Uygulaması	107
6. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	117
KAYNAKLAR.....	119
ÖZGEÇMİŞ	125



SİMGELER

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	: Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^+$	: Pozitif sayılar kümesi
$\mathbb{K}$	: Cisim
$(\mathfrak{X}, \mathfrak{f})$	: Metrik uzay
$(\mathfrak{X}, \varrho)$	: b –Metrik uzay
$(\mathfrak{X}, \mu_\eta)$	: Modüler metrik uzay
$(\mathfrak{X}, \omega_\zeta)$	: Modüler b –metrik uzay
$(\mathfrak{X}, q^\mu)$	: Asimetrik modüler metrik uzay
$(\mathfrak{X}, \varrho^\mu)$	: Asimetrik modüler b –metrik uzay
$(\mathfrak{X}, \varrho^*)$	: Modüler b –metrik–gibi uzay
$Fix(\mathcal{T})$	: $\mathcal{T}$ dönüşümünün sabit noktalarının kümesi
$\mathfrak{u}$	: $\mathfrak{X}$ kümesinin alt kümelerinin bir ailesi
$(\mathfrak{X}, \mathfrak{u})$	: Topolojik uzay



TABLO LİSTESİ

Sayfa

Tablo 1.1. Simülasyon fonksiyonlar.....	25
--	----





ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 1.1. $T_6x = \sin(x^2 + \pi x - 1)$ fonksiyonunun sabit noktaları.	10
Şekil 1.2. $Tx = \ln x + 1$ ve $gx = x$ dönüşümlerinin ortak sabit noktaları.....	20
Şekil 1.3. G grafinin düğümleri [65].....	38
Şekil 1.4. Pregel nehri için graf [66].....	39
Şekil 3.1. (3.1) ifadesinin 3D gösterimi.	60
Şekil 3.2. (3.13) eşitsizliğinin 3D gösterimi.	67
Şekil 4.1. (4.1) eşitliğinin 3D gösterimi.....	77
Şekil 4.2. RLC paralel devresi.	92



GENELLEŞTİRİLMİŞ METRİK UZAYLARDA TEK DEĞERLİ VE ÇOĞUL DEĞERLİ DÖNÜŞÜMLER İÇİN BAZI SABİT NOKTA VE ORTAK SABİT NOKTA TEOREMLERİ

ÖZET

Sabit nokta teorisi, doğrusal olmayan fonksiyonel analiz, doğrusal olmayan operatör teorisi, topoloji, matematiksel modelleme ve uygulamaların dikkate değer bir karışımı ile karakterize edilen yirmi birinci yüzyılın büyüleyici ve sürekli gelişen bir alanıdır. Bu teori, doğrusal olmayan analizdeki en önemli araştırma alanlarından biridir. Çünkü birçok gerçek dünya probleminde sabit nokta teorisi, uygulamalarda doğal olarak ortaya çıkan problemlerin çözümlerinin varlığını tespit etmek için kullanılan temel matematiksel araçtır. Sonuç olarak, sabit nokta teorisi saf ve uygulamalı matematikte önemli bir çalışma alanıdır ve gelişmekte olan bir araştırma sahasıdır.

Sabit nokta teorisinin kapsamı, sadece sonsuz boyutlu fonksiyon uzaylarının geometrik teorisini ve operatör-teorik gerçek dünya problemlerini kapsamakla kalmaz, aynı zamanda mühendislikten uzay bilimine, hidromekanikten astrofiziğe, kimyadan biyolojiye, teorik mekanikten biyomekaniğe ve ekonomiden stokastik oyun teorisine kadar disiplinler arası alanların geniş bir yelpazesini içerir. Bu köklü kavramlar ve teknikler, çeşitli uygulamalı alanlarda karşılaşılan fenomenler için daha gerçekçi ve doğru modeller geliştirmek amacıyla araçlar sağlar.

Sabit nokta teorisi, $\mathcal{T}x = x$ türündeki doğrusal olmayan denklemlere çözüm bulma yöntemlerine ışık tutmaktadır; burada $\mathcal{T}$, bir metrik uzayın, normlu bir doğrusal uzayın, topolojik bir vektör uzayının veya uygun bir uzayın bir alt kümesi üzerinde tanımlanan bir öz eşlemdir. Bu bağlamda, sabit nokta teorisi, matematiksel analiz ve uygulamalı matematikte geniş bir uygulama yelpazesine sahiptir ve bu da onu modern matematiğin vazgeçilmez bir parçası haline getirmektedir.

Metrik sabit nokta teorisi, matematiksel analiz ve topolojinin önemli bir dalı olup, metrik uzaylarda tanımlanan dönüşümlerin sabit noktalarının varlığını ve özelliklerini incelemektedir. Bu teori, Banach'ın sabit nokta teoremi ile başlamış ve zamanla genişleyerek birçok farklı alanda uygulanabilir hale gelmiştir. Uzaklık fonksiyonunun değiştirilmesi, var olan fonksiyondan bazı özelliklerin çıkarılması ya da yeni özelliklerin eklenmesi ile literatüre birçok yeni topolojik yapı girmiştir. Banach'ın sabit nokta teoremi ile başlayan bu teori, zamanla genişleyerek birçok farklı alanda uygulanabilir hale gelmiştir ve modern matematiğin vazgeçilmez bir parçası olmuştur. Toplanabilirlik teorisi, dizi uzayları, bulanık teori, Banach uzaylarının geometrisi gibi matematiği ilgilendiren uygulamaların yanı sıra mühendislikten uzay bilimine hidromekanikten astrofiziğe, kimyadan biyolojiye, teorik mekanikten biyomekaniğe ve ekonomiden stokastik oyun teorisine kadar disiplinler arası alanlarda geniş bir yelpazede uygulama sahasına sahip olduğundan metrik sabit nokta teori bu yeni metrik yapıları ile oldukça zengin bir hale gelmiştir.

Bu çalışma altı bölümden oluşmaktadır. Bir ve ikinci bölümler literatür taraması şeklinde iken üç, dört ve beşinci bölümler tezin orijinal kısmını oluşturmaktadır. Altıncı bölümde ise sonuçlar ve öneriler kısmına yer verilmiştir.

Birinci bölümünde metrik sabit nokta teorisi ile ilgili temel tanım ve teoremlere yer verilmektedir. Ayrıca metrik uzayları genelleleyen çeşitli uzayların tanımları yapılmış ve özellikleri incelenmiştir. Bir çok araştırmacının ortaya koyduğu Banach daralma prensibinin ya da bir diğer ifade ile Banach sabit nokta teoreminin genellemeleri olarak ya metriğin üzerindeki şartların değiştirilerek yeni uzayların oluşturulması, ya da dönüşümler üzerindeki daralma şartlarının değiştirilerek literatüre kazandırılması amaçlanmıştır.

İkinci bölümde ise çalışmanın devamında kullanılan bazı genel metrik yapılarına ve bu yapıların özelliklerine yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde, asimetric modüler b –metrik uzay ile Archimedean olmayan asimetric modüler b –metrik uzay yapıları tanımlanıp bu uzayların topolojik yapıları hakkında bazı bilgiler sunulmuştur. Archimedean olmayan asimetric modüler b –metrik uzayında simülasyon ve kıyaslama fonsiyonları yardımıyla yeni bir daralma dönüşümü oluşturarak sabit nokta teoremleri ispatlanmıştır. Ayrıca elde edilen sabit nokta teoremleri Ulam-Hyers kararlılık problemi uygulanmıştır. Bunun yanı sıra, bu sonuçlar kullanılarak bir Caputo tipi doğrusal olmayan kesirli diferansiyel denklemin tek çözümüne ulaşılmıştır.

Dördüncü bölümde, modular b –metrik–benzeri uzay kavramı modular metrik–benzeri uzay ve modular b –metrik uzay kavramları yardımıyla tanımlanmıştır. Oluşturulan yeni uzayın bazı topolojik özellikleri incelenmiştir. Ayrıca, $\mathfrak{R}$ ikili bağıntısını dahil ederek, $\mathfrak{R}$ –modular b –metrik benzeri uzayların çerçevesi genişletilmiştir. $\mathcal{Z}$ –simülasyon fonksiyonunu ve E –tipi daralma yapıları dahil ederek, Geraghty büzölme tipi dönüşümlerini içeren sabit nokta sonuçları elde edilmiştir. Bununla birlikte, $\mathfrak{R}$ ikili bağıntısı yoluyla türetilen, grafiksel modular b –metrik–benzeri uzay tanımı lüteratüre kazandırılmıştır. Bu yapı üzerinde dinamik programlamada çok önemli olan bir fonksiyonel denklemler sınıfı için çözümlerin varlığı ve RLC paralel devresinde elektrik akımına ilişkin başlangıç değer problemlerinin çözümü araştırılmıştır.

Beşinci bölümde ise Archimedean olmayan modüler metrik uzayda, çok değerli rasyonel θ –tipli daralma dönüşümünün sabit noktasının varlığı ve tekliği ispatlanmıştır. Ayrıca Archimedean olmayan modüler metrik uzayın boş olmayan alt kümesinin sonlu ε –sıralanabilir olması durumunda yani alt küme üzerindeki herhangi iki uygun bağlantılı eleman arasında ε –sınırı altında N –uzunluğunda bir sıralının oluşturulmasıyla, çok değerli rasyonel θ –tipli daralma dönüşümünün sabit noktasının varlığı gösterilmiştir. Bu sonuçlar, matematiksel uygulamalardan biri olarak, grafla donatılmış Archimedean olmayan modüler metrik uzaya genelleştirerek desteklenmiştir.

Son bölümde ise çalışmada elde edilen sonuçlara ve literatüre kazandırılan yapıların uygulanabilirliği ile ilgili öneriler kısmına yer verilmiştir.

SOME FIXED POINT AND COMMON FIXED POINT THEOREMS FOR SINGLE VALUED AND MULTIVALUED MAPPINGS IN GENERALIZED METRIC SPACES

SUMMARY

Fixed point theory represents a compelling and continually advancing domain within the mathematical sciences of the twenty-first century. It is characterized by a distinctive integration of nonlinear functional analysis, nonlinear operator theory, topology, and mathematical modeling, along with various applications. Recognized as a pivotal area of research in nonlinear analysis, fixed point theory serves as a foundational mathematical framework for establishing the existence of solutions to a diverse array of real-world problems. This underscores its significance as both a theoretical and applied discipline within mathematics, with its relevance as a burgeoning area of research.

The breadth of fixed point theory extends beyond the geometric considerations of infinite-dimensional function spaces and operator-theoretic challenges; it encompasses a wide spectrum of interdisciplinary applications. These span various fields, including engineering, space science, hydromechanics, astrophysics, chemistry, biology, theoretical mechanics, biomechanics, economics, and stochastic game theory. The well-established concepts and methodologies intrinsic to fixed point theory furnish essential tools for the formulation of more realistic and precise models addressing phenomena encountered across a multitude of applied fields.

Fixed point theory provides significant insights into methodologies for locating solutions to nonlinear equations of the form $\mathcal{T}x = x$, where $\mathcal{T}$ is a self-mapping defined on a subset of a metric space, a normed linear space, a topological vector space, or an appropriate mathematical structure. In this framework, fixed point theory encompasses a variety of applications within mathematical analysis and applied mathematics, thus rendering it an essential component of contemporary mathematical discourse.

Metric fixed point theory constitutes a significant domain within mathematical analysis and topology, focusing on the exploration of fixed points of mappings defined on metric spaces. This theory originated with Banach's fixed point theorem, serving as a foundational result that has been progressively expanded to encompass a myriad of disciplines. Banach's fixed point theorem is one of the cornerstones of metric fixed point theory. This theorem guarantees the existence of fixed points of contraction maps defined on a metric space. As a formulation,

$(\mathfrak{X}, \mathfrak{f})$ is a complete metric space and $\mathcal{T}: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ is a contraction mapping; that is, there exists a constant $0 \leq k < 1$ for the mapping $\mathcal{T}$ and for each $x, y \in \mathfrak{X}$

$$\mathfrak{f}(\mathcal{T}(x), \mathcal{T}(y)) \leq k\mathfrak{f}(x, y)$$

inequality is satisfied. Then, the mapping $\mathcal{T}$ has a unique fixed point and this fixed point can be found by iterative methods.

Through the alteration of distance functions, the removal of certain properties from existing functions, or the introduction of novel properties, numerous topological structures have emerged in the literature. Initially rooted in Banach's fixed point theorem, metric fixed point theory has evolved into a critical component of contemporary mathematics, demonstrating its relevance across various mathematical disciplines. Beyond its theoretical implications in areas such as summability theory, sequence spaces, fuzzy set theory, and the geometry of Banach spaces, this theory exhibits extensive applicability in interdisciplinary realms. Fields such as engineering, space science, hydromechanics, astrophysics, chemistry, biology, theoretical mechanics, biomechanics, economics, and stochastic game theory have all benefited from the insights provided by metric fixed point theory, underscoring its versatility and importance in both pure and applied mathematics.

This study consists of six chapters. While chapters one and two are literature reviews, chapters three, four and five constitute the original part of the thesis. The sixth chapter contains conclusions and recommendations.

In the initial chapter of this study, we present fundamental definitions and theorems pertinent to metric fixed point theory. Furthermore, we delineate various spaces that extend the concept of metric spaces and analyze their properties comprehensively. As extensions of the Banach contraction principle commonly referred to as the Banach fixed point theorem proposed by numerous researchers, this work aims to either establish novel spaces through modifications of traditional metric conditions or to revise the contraction criteria applicable to transformations, thereby contributing significantly to the existing body of literature.

The second chapter of the paper delineates several general metric structures that will be utilized throughout the subsequent discussions, along with a comprehensive analysis of their properties.

In the third section, we introduce the concepts of asymmetric modular b -metric spaces and non-Archimedean modular b -metric space structures. A detailed examination of the topological characteristics inherent to these spaces is provided. Within the context of non-Archimedean asymmetric modular b -metric spaces, we establish fixed point theorems by formulating a novel contraction transformation, leveraging simulation and comparison functions for this purpose. Furthermore, we demonstrate the applicability of the derived fixed point theorems to the Ulam-Hyers stability problem. Building on these findings, we also derive a unique solution for a Caputo type nonlinear fractional differential equation, thereby illustrating the practical implications of our theoretical contributions. The equation under consideration is expressed as follows:

$$D^\delta \omega(\varrho) + G(\varrho, \omega(\varrho)) = 0, \quad \varrho \in I = [0,1], \quad 1 < \delta < 2$$

$$\omega(0) = 0, \quad \omega(1) = 0,$$

where D^δ denotes the Caputo fractional derivative of order δ and $\varrho \in (C[0,1], \mathbb{R})$, and also $G: I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is a continuous function.

In the fourth section, the concept of a modular b -metric-like space is introduced, drawing upon the foundational concepts of modular metric-like space and modular b -metric space. This section encompasses an analysis of various topological properties associated with the newly proposed space. Furthermore, the framework of $\mathfrak{R}$ -modular b -metric-like spaces is expanded to incorporate the binary relation $\mathfrak{R}$.

By integrating the Z –simulation function and E –type contraction structures, we derive fixed point results that are pertinent to mappings of the Geraghty contraction type. Additionally, a novel graphical definition of modular b –metric-like space, informed by the binary relation $\mathfrak{R}$, is presented, thereby contributing to the existing literature. This framework facilitates the exploration of solutions to a specific class of functional equations that hold significant relevance in the contexts of dynamic programming and the resolution of initial value problems pertaining to electric current within an RLC parallel circuit.

In the fifth section, the existence and uniqueness of the fixed point of the multivalued rational θ –type contraction mapping in the non-Archimedean modular metric space are proved. Additionally, it has been demonstrated that if a non-empty subset of non-Archimedean modular metric space is finitely ε –chainable, i.e., if N, ε –chain can be formed between any two connected elements of the subset, the existence of the fixed point of the multivalued rational θ –type contraction mapping is guaranteed. These results are supported by generalizing them to the non-Archimedean modular metric space endowed with a graph, as one of the mathematical applications.

In the concluding section, the findings derived from the study are presented, along with recommendations concerning the practical implementation of the theoretical frameworks discussed in the literature.



1. GİRİŞ

1.1. Temel Kavramlar ve Teoremler

$\mathcal{X}$ kümesi üzerinde tanımlı $\mathcal{T}: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ dönüşümünde $\mathcal{T}x = x$ eşitliğini sağlayan $x \in \mathcal{X}$ noktası varsa, bu noktaya $\mathcal{T}$ dönüşümünün sabit noktası adı verilir. Sabit noktalar, dönüşüm altında değişmez (invariant) kalan noktalardır.

Sabit nokta teorisi, geniş bir uygulama yelpazesine sahiptir ve çeşitli disiplinlerde önemli rol oynamaktadır. Örneğin, mühendislik alanında, kontrol sistemlerinin stabilitesini analiz etmek ve optimal kontrol stratejileri geliştirmek için kullanılmaktadır. Uzay bilimi ve astrofizikte, yörünge dinamikleri ve gök cisimlerinin hareketlerinin modellenmesinde sabit nokta teoremleri kritik öneme sahiptir.

Kimya ve biyolojide, sabit nokta teorisi, kimyasal reaksiyonların denge durumlarının analizi ve biyolojik sistemlerin dinamik davranışlarının incelenmesinde uygulanmaktadır. Ekonomide, Nash dengesi gibi kavramların varlığını ispatlamak ve ekonomik modellerin denge analizini yapmak için sabit nokta teoremleri kullanılmaktadır. Ayrıca, stokastik oyun teorisi ve karar teorisi gibi alanlarda, oyuncuların stratejilerinin dengede olduğu durumların belirlenmesinde sabit nokta teorisi önemli bir araçtır.

Matematiksel modelleme ve doğrusal olmayan analizde, sabit nokta teorisi, doğrusal olmayan diferansiyel denklemlerin çözümlerinin varlığını ve eşsizliklerini belirlemek için temel bir araçtır. Bu bağlamda, metrik sabit nokta teoremleri, topolojik uzaylarda tanımlanan doğrusal olmayan dönüşümlerin analizinde geniş bir uygulama alanına sahiptir ve bu nedenle modern matematiğin vazgeçilmez bir parçası haline gelmiştir.

Bu geniş uygulama alanları, sabit nokta teorisinin matematiksel ve pratik önemini vurgular.

Sabit nokta teorisinin gelişimine ve önemli sonuçlarına ilk olarak Brouwer [1] liderlik etmiştir. Brouwer, 1912 yılında, $\mathbb{R}^n$ içindeki kapalı birim yuvar üzerinde tanımlı sürekli dönüşümlerin en az bir sabit noktasının var olduğunu ispatladı. Bu sonuç, özellikle sınırlı ve kapalı kümelerde geçerlidir ve şu şekilde ifade edilir:

“Eğer $Y, \mathbb{R}^n$ de kapalı birim yuvar ve $\mathcal{T}: Y \rightarrow Y$ sürekli bir dönüşümse, bu durumda $\mathcal{T}$ dönüşümünün Y kapalı birim yuvarında en az bir sabit noktası vardır.”

Ayrıca, Banach uzaylarında Brouwer Sabit Nokta Teoremi'nin doğrudan genelleştirilemeyeceğini gösteren Kakutani [2]'nin örneği, sonsuz boyutlu uzaylarda sabit nokta teoremlerinin geçerli olabilmesi için ek koşulların gerekliliğini ortaya koyar.

Brouwer'ın teoreminin sonsuz boyutlu uzaylara genelleştirilmesi, Banach uzaylarında sabit nokta teorisinin temelini oluşturur. Schauder [3], bu teoremi sonsuz boyutlu Banach uzaylarına uygun şekilde genelleştirerek belirli ek koşullar altında benzer bir sonucu elde etmiştir:

“ $\mathfrak{X}$ bir Banach uzayı ve Y boş kümeden farklı ,sınırlı, kapalı ve konveks bir alt kümesi olsun. Bu durumda her sürekli ve kompakt $\mathcal{T}: Y \rightarrow Y$ dönüşümünün Y kümesinde en az bir sabit noktası vardır.”

Bu teorem, sonsuz boyutlu uzaylarda bile belirli koşullar altında sabit nokta teorisinin geçerli olduğunu gösterir. Schauder'in eklediği koşullar (özellikle kompaktlık), bu genellenmenin yapılmasını mümkün kılmıştır.

Bu çalışmalar, sabit nokta teorisinin matematiksel analiz, topoloji ve fonksiyonel analiz gibi alanlarda derin etkileri olan güçlü bir araç haline gelmesini sağlamıştır. Sabit nokta teoremleri, çeşitli bilimsel ve mühendislik disiplinlerinde de geniş uygulama alanları bulmuştur.

Banach Sabit Nokta Teoremi ya da Banach Daralma Dönüşüm Prensipleri olarak da bilinen teorem sabit nokta teorisinin en önemli ve en yaygın olarak kullanılan teoremlerinden biridir. Banach Sabit Nokta Teoremi, herhangi bir tam metrik uzayda daralma dönüşümleri için sabit noktanın varlığını ve tekliğini garanti eder. Aynı zamanda sabit nokta hesaplama yolu ile de bulunur. Bu teorem, matematiksel analiz ve uygulamalı matematik alanlarında önemli bir araçtır ve aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$(\mathfrak{X}, f)$ bir tam metrik uzay olsun. Bir $\mathcal{T}: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ dönüşümü verildiğinde her $x, y \in \mathfrak{X}$ için $f(\mathcal{T}(x), \mathcal{T}(y)) \leq kf(x, y)$ koşulu sağlanacak şekilde $0 \leq k < 1$ olan bir k sabiti varsa $\mathcal{T}$ dönüşümünün $\mathfrak{X}$ içinde bir ve yalnız bir sabit noktası vardır.

1.2. Temel Tanım ve Teoremler

Bu kısımda çalışma boyunca kullanılacak temel tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 1.2.1. [4] $\mathfrak{X} \neq \emptyset$ bir küme olsun. Her $x, y, z \in \mathfrak{X}$ için $\mathfrak{X}$ kümesi üzerinde bir $f: \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlasın:

$$(f_1) f(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$$

$$(f_2) f(x, y) = f(y, x),$$

$$(f_3) f(x, y) \leq f(x, z) + f(z, y).$$

Bu durumda, f fonksiyonuna $\mathfrak{X}$ uzayında bir metrik, $(\mathfrak{X}, f)$ ikilisine ise metrik uzay adı verilir.

Örnek 1.2.2. [4] $\mathbb{R}$ kümesi üzerinde her $x, y \in \mathbb{R}$ için tanımlanan

$$f(x, y) = |x - y|$$

fonksiyonu, $\mathbb{R}$ üzerinde alışılmış metrik olarak bilinir. Bu metrik genellikle mutlak değer, (doğal, salt değer) olarak da adlandırılır ve $(\mathbb{R}, f)$ ikilisine alışılmış metrik uzay denir.

Örnek 1.2.3. [5] $\mathfrak{X} = \mathbb{R}^2$ üzerinde tanımlanan $f_1: \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \rightarrow \mathbb{R}^+$ metriği her $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ için

$$f_1(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

Euclid metriği (veya Pisagor metriği) olarak adlandırılır ve iki nokta arasındaki doğrudan mesafeyi ölçer.

$$f_2(x, y) = \max \{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$$

şeklinde tanımlı $f_2: \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu ise maksimum metriği (veya Chebyshev metriği, Tchebychev uzaklığı) olarak isimlendirilir ve x ve y noktaları arasındaki en büyük farkı ölçer.

Örnek 1.2.4. [6] $\mathfrak{X} \neq \emptyset$ keyfi bir küme ve $f: \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu $\forall x, y \in \mathfrak{X}$ için

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. f fonksiyonu $\mathfrak{X}$ kümesi üzerinde bir metriktir ve bu metriğe ayrık (diskret) metrik, $(\mathfrak{X}, f)$ ikilisine ise ayrık metrik uzay denir.

Örnek 1.2.5. [4] Her $x = \{x_n\}, y = \{y_n\} \in \mathfrak{X}$ için sınırlı dizilerin kümesi

$$\mathfrak{X} = \ell_\infty = \left\{ \{x_n\} \subseteq \mathbb{R} \text{ (veya } \mathbb{C}) \mid \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < \infty \right\}$$

olarak tanımlansın. $f_\infty: \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu

$$f_\infty(x, y) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n - y_n|$$

$\mathfrak{X}$ uzayında bir metrik fonksiyonudur.

Örnek 1.2.6. [5] $\mathbb{R} = [\mathfrak{w}, \mathfrak{n}]$, $\forall x, y \in \mathfrak{X}$ için $1 \leq \mathfrak{h} < \infty$ sabit reel sayı ve

$$\mathfrak{X} = Y[\mathfrak{w}, \mathfrak{n}] := \{x: [\mathfrak{w}, \mathfrak{n}] \rightarrow \mathbb{R} \mid x \text{ sürekli fonksiyon}\}$$

olsun.

$$f_{\mathfrak{h}}(x, y) = \left(\int_{\mathfrak{m}}^{\mathfrak{n}} |x(\mathfrak{r}) - y(\mathfrak{r})|^{\mathfrak{h}} d\mathfrak{r} \right)^{1/\mathfrak{h}}$$

ile tanımlı $f_{\mathfrak{h}}: \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu $\mathfrak{X}$ üzerinde bir metriktir, $(\mathfrak{X}, f_{\mathfrak{h}})$ ikilisi de bir metrik uzaydır.

Örnek 1.2.7. [6] $\mathbb{R} = [\mathfrak{w}, \mathfrak{n}]$ ve her $x, y \in \mathfrak{X}$ için

$$\mathfrak{X} = Y[\mathfrak{w}, \mathfrak{n}] := \{x: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R} \mid x \text{ sürekli fonksiyon}\}$$

kümesi tanımlansın.

$$f_\infty(x, y) = \sup_{\mathfrak{r} \in [\mathfrak{w}, \mathfrak{n}]} |x(\mathfrak{r}) - y(\mathfrak{r})|$$

şeklinde tanımlanan $f_\infty: \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu $\mathfrak{X}$ üzerinde bir metrik belirtir. f_∞ metriğine $Y[\mathfrak{w}, \mathfrak{n}]$ üzerinde supremum metriği veya düzgün metrik de denir.

Bu kısımda, metrik uzaya ait topolojik özellikler ve tanımlara yer verilecektir:

Tanım 1.2.8. [6,7] $(\mathfrak{X}, f)$ bir metrik uzay ve $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\mathfrak{X}$ uzayından bir dizi olsun.

- (i) Her $\varepsilon > 0$ ve $n > n_0$ için $f(x_n, x^*) < \varepsilon$ olan $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ indisi var ise $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi $x^* \in \mathfrak{X}$ noktasına yakınsaktır denir. Bu durum $n \rightarrow \infty$ iken $x_n \rightarrow x^*$ ya da $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$ ile ifade edilir x^* noktası dizinin limit noktası olarak adlandırılır.

- (ii) $\forall \varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde $m, n \geq n_0$ olan bütün $m, n \in \mathbb{Z}^+$ için $f(x_n, x_m) < \varepsilon$ iken $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ indisi mevcut ise $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisine Cauchy dizisi denir.
- (iii) $(\mathfrak{X}, f)$ metrik uzayındaki her Cauchy dizisi uzayda yakınsak ise $(\mathfrak{X}, f)$ uzayına tam metrik uzay denir.

Uyarı 1.2.9. [4,7] Metrik uzaylarda aşağıdaki durumlar sağlanır:

- (i) Yakınsak bir dizinin limiti tektir. Ek olarak, bir dizinin yakınsaklığı, tanımlandığı uzaya ve uzay üzerinde tanımlanmış metriğe bağlı olarak değişir.
- (ii) Yakınsak her dizi bir Cauchy dizisidir, ancak tersinin doğru olması gerekmez. Tam metrik uzaylarda her Cauchy dizisi yakınsaktır.
- (iii) Yakınsak bir dizinin herhangi bir alt dizisi de dizinin limiti olan aynı noktaya yakınsaktır.
- (iv) Tam metrik uzayların her alt uzayı tam değildir. Reel sayılar kümesi $\mathbb{R}$, $f(x, y) = |x - y|$ ile tanımlı alışılmış metriğe göre tam uzaydır, ancak $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi üzerinde tanımlanan alışılmış metriğe göre tam değildir. Tam metrik uzayların her kapalı alt uzayları da tam metrik uzaydır. Reel sayılar kümesinin $[\mathfrak{w}, \mathfrak{n}]$ ile tanımlı kapalı alt uzayı üzerinde tanımlı alışılmış metriğe göre tam uzaydır.

Örnek 1.2.10. [4] Örnek 1.2.5 de verilen (ℓ_∞, f_∞) dizi uzayı ve Örnek 1.2.7 de verilen $(Y[\mathfrak{w}, \mathfrak{n}], f_\infty)$ fonksiyon uzayı tam uzaylardır.

Tanım 1.2.11. [6] $(\mathfrak{X}, f)$ ve $(\mathfrak{Q}, \mathfrak{d})$ iki metrik uzay ve $\mathcal{T}: (\mathfrak{X}, f) \rightarrow (\mathfrak{Q}, \mathfrak{d})$ bir fonksiyon olsun.

- (i) $\forall \varepsilon > 0$ ve $x \in \mathfrak{X}$ için $f(x, x_0) < \delta$ iken $\mathfrak{d}(\mathcal{T}(x), \mathcal{T}(x_0)) < \varepsilon$ olan $\delta(\varepsilon, x) > 0$ vardır $\Leftrightarrow \mathcal{T}$ fonksiyonu $x_0 \in \mathfrak{X}$ noktasında süreklidir.
- (ii) Her $\varepsilon > 0$ ve $x \in \mathfrak{X}$ için $f(x_0, x) < \delta$ iken $\mathcal{T}(x_0) - \varepsilon < \mathcal{T}(x)$ olan en az bir $\delta > 0$ vardır $\Leftrightarrow \mathcal{T}$ fonksiyonu $x_0 \in \mathfrak{X}$ noktasında alttan yarı süreklidir.
- (iii) Her $\varepsilon > 0$ ve $x \in \mathfrak{X}$ için $f(x_0, x) < \delta$ olacak şekilde $\mathcal{T}(x) < \mathcal{T}(x_0) + \varepsilon$ olan en az bir $\delta > 0$ vardır $\Leftrightarrow \mathcal{T}$ fonksiyonu $x_0 \in \mathfrak{X}$ da üstten yarı süreklidir.
- (iv) $\mathcal{T}$ fonksiyonu $(\mathfrak{X}, f)$ üzerinde düzgün süreklidir $\Leftrightarrow$ her $\varepsilon > 0$ ve her $x, x_0 \in \mathfrak{X}$ için $f(x, x_0) < \delta$ iken $\mathfrak{d}(\mathcal{T}(x), \mathcal{T}(x_0)) < \varepsilon$ olan sadece ε sayısına bağlı bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı vardır.

(v) $\mathcal{T}$ fonksiyonu bir $x_0 \in \mathfrak{X}$ noktasında dizisel süreklidir $\Leftrightarrow$ her $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathfrak{X}$ dizisi $x_0 \in \mathfrak{X}$ noktasına yakınsak iken $\{\mathcal{T}(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathfrak{Q}$ dizisi de $\mathcal{T}(x_0) \in \mathfrak{Q}$ noktasına yakınsaktır; yani $n \rightarrow \infty$ iken $x_n \rightarrow x_0 \Rightarrow \mathcal{T}(x_n) \rightarrow \mathcal{T}(x_0)$ dir.

Metrik uzaylarda süreklilik ve dizisel süreklilik tanımları birbirine denktir. $\mathcal{T}(x_n) \rightarrow \mathcal{T}(x_0)$ iken $x_n \rightarrow x_0, n \rightarrow \infty$ ifadesi sürekli bir fonksiyon için her zaman doğru değildir.

Örneğin, $\mathcal{T}: (\mathbb{R}, \mathfrak{f}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathfrak{f})$ fonksiyonu $\mathcal{T}(x) = x^2$ ve $x_n = (-1)^n, (n \in \mathbb{N})$ ise $n \rightarrow \infty$ iken $\mathcal{T}(x_n) = 1 \rightarrow \mathcal{T}(1)$ dir ancak $(x_n) \nrightarrow 1, n \rightarrow \infty$ olur [8].

Örnek 1.2.12. $\mathbb{R}$ kümesi üzerinde tanımlanan alışılmış metrik $\mathfrak{f}(x, y) = |x - y|$ için

- $\mathcal{T}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ iken $\mathcal{T}x = \sin x$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ de düzgün süreklidir,
- $\mathcal{T}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ iken $\mathcal{T}x = x^3$ fonksiyonu süreklidir, ancak düzgün sürekli değildir.

Tanım 1.2.13. [6] $\mathfrak{X} \neq \emptyset$ ve $\mathfrak{u}, \mathfrak{X}$ kümesinin alt kümelerinin bir ailesi olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan $\mathfrak{u}$ ailesine $\mathfrak{X}$ için bir topoloji ve $(\mathfrak{X}, \mathfrak{u})$ ikilisine de topolojik uzay denir:

- (i) $\mathfrak{X}, \emptyset \in \mathfrak{u}$ dir,
- (ii) $\mathfrak{u}$ ya ait kümelerin sonlu sayıda kesişimi yine $\mathfrak{u}$ ya aittir,
- (iii) $\mathfrak{u}$ ya ait olan herhangi sayıda kümenin birleşimi yine $\mathfrak{u}$ ya aittir.

Tanım 1.2.14. [6] $(\mathfrak{X}, \mathfrak{u})$ bir topolojik uzay ve $x \in \mathfrak{X}$ olsun. $\mathfrak{X}$ kümesinin bir K_x alt kümesi, $x \in U_x \subseteq K_x$ olacak şekilde $U_x \in \mathfrak{u}$ kümesi varsa bu K_x kümesine x noktasının bir komşuluğu adı verilir. x noktasını içeren ve topolojiye göre de açık olan kümeye de x noktasının bir açık komşuluğu denir.

Tanım 1.2.15. [6] $(\mathfrak{X}, \mathfrak{u})$ bir topolojik uzay olsun. $\mathfrak{u}$ topolojisinin elemanlarına açık kümeler denir. $\mathcal{H} \subseteq \mathfrak{X}$ için eğer $\mathfrak{X} \setminus \mathcal{H}$ kümesi açık ise $\mathcal{H}$ kümesine kapalı küme denir. $\mathcal{H} \subseteq \mathfrak{X}$ kümesinin kapsadığı tüm açık kümelerin birleşimine $\mathcal{H}$ kümesinin içi denir ve $\mathcal{H}^\circ$ ile ya da $\text{int}\mathcal{H}$ ile gösterilir. $\mathcal{H} \subseteq \mathfrak{X}$ kümesini içeren tüm kapalı kümelerin kesişimine $\mathcal{H}$ kümesinin kapanışı denir ve $\overline{\mathcal{H}}$ ile gösterilir. $\mathcal{H} = \overline{\mathcal{H}}$ ise $\mathcal{H} \subseteq \mathfrak{X}$ kümesi kapalı kümedir.

Tanım 1.2.16. [6] $(\mathfrak{X}, \mathfrak{f})$ bir metrik uzay olsun.

$$\mathfrak{u}_{\mathfrak{f}} = \{\mathcal{U} \subseteq \mathfrak{X} \mid \mathcal{U} \text{ kümesi } (\mathfrak{X}, \mathfrak{f}) \text{ uzayında açık}\}$$

ailesi $\mathfrak{X}$ üzerinde bir topoloji olup u_f topolojisine metrik topoloji veya f metriğinin ürettiği topoloji denir.

Tanım 1.2.17. [6] $(\mathfrak{X}, u)$ topolojik uzay olsun. Eğer her $x, y \in \mathfrak{X}, x \neq y$ için $\mathcal{U}$ ve $V \subset \mathfrak{X}$ gibi iki açık küme $x \in \mathcal{U}, y \in V$ ve $\mathcal{U} \cap V \neq \emptyset$ olacak şekilde bulunabilirse $(\mathfrak{X}, u)$ uzayına Hausdorff uzayı veya T_2 -uzayı adı verilir.

Tanım 1.2.18. [6] $(\mathfrak{X}, f)$ herhangi bir metrik uzay olsun. Bu uzaydaki her sonsuz dizi yakınsak bir alt diziye sahipse bu uzaya kompakt metrik (dizisel kompakt) uzay denir. Bir metrik uzayın kompakt alt kümeleri kapalı ve sınırlıdır. Çünkü kompaktlık, sınır noktalarının da kümeye dahil olmasını gerektirir. Ayrıca bir küme sınırsız ise, bu kümeden seçilen bir dizinin yakınsamayan bir alt dizisi olacaktır, bu da kompaktlık şartını bozacaktır.

Tanım 1.2.19. [6] $\mathfrak{X}$ ve $\mathfrak{D}$ boştan farklı iki küme ve $\mathcal{T}: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{D}$ bir fonksiyon olsun. $\forall x, y \in \mathfrak{X}$ ve $x < y$ iken $\mathcal{T}(x) \geq \mathcal{T}(y)$ ($\mathcal{T}(x) \leq \mathcal{T}(y)$) eşitsizliği sağlanırsa $\mathcal{T}$ fonksiyonu $\mathfrak{X}$ kümesinde sırasıyla artmayan (nonincreasing), (azalmayan (nondecreasing)) fonksiyon olarak adlandırılır.

Tanım 1.2.20. [6] $\mathfrak{X} \neq \emptyset$ ve $\mathbb{K}$ bir cisim olsun. $+: \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ ve $\cdot: \mathbb{K} \times \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ ikili işlemleri $\forall \alpha, v \in \mathbb{K}$ ve $\forall x, y, z \in \mathfrak{X}$ için

- (i) $x + y = y + x$,
- (ii) $x + (y + z) = (x + y) + z$,
- (iii) $\forall x, y \in \mathfrak{X}$ için $x + e = e + x = x$ olan bir $e \in \mathfrak{X}$ vardır,
- (iv) $\forall x, y \in \mathfrak{X}$ için $x + (-x) = (-x) + x = e$ olan bir $(-x) \in \mathfrak{X}$ vardır,
- (v) $1.x = x$,
- (vi) $\alpha.(x + y) = \alpha.x + \alpha.y$,
- (vii) $(\alpha + v).x = \alpha.x + v.x$,
- (viii) $(\alpha.v).x = \alpha.(v.x)$,

şartlarını sağlıyorsa $(\mathfrak{X}, +, \cdot)$ üçlüsüne $\mathbb{K}$ cismi üzerinde lineer uzay (vektör uzayı) denir. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ise $\mathfrak{X}$ uzayı reel vektör uzayı, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ise $\mathfrak{X}$ kompleks vektör uzayıdır.

Tanım 1.2.21. [6] $\mathfrak{X}$, $\mathbb{K}$ cismi ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ veya $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) üzerinde bir lineer uzay olsun. $\|\cdot\|: \mathfrak{X} \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu aşağıda verilen şartları sağlıyorsa $\mathfrak{X}$ üzerinde bir norm fonksiyonu ve $(\mathfrak{X}, \|\cdot\|)$ ikilisi de bir normlu uzaydır:

$\forall x, y \in \mathfrak{X}$ ve $\forall \alpha \in \mathbb{K}$ için

$$(i) \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta,$$

$$(ii) \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|,$$

$$(iii) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

dir.

Örnek 1.2.22. [6] Aşağıda verilen $\mathfrak{X}$ kümeleri üzerinde tanımlanan norm fonksiyonları ile birer normlu uzaydır:

(i) $\mathfrak{X} = \mathbb{R}$ olsun. $x \in \mathbb{R}$ için $\|\cdot\|$ fonksiyonu $\|x\| = |x|$ olacak şekilde $\mathbb{R}$ de bir normdur.

(ii) $x = (x_n) \in \ell_r$ ve $1 \leq r < \infty$ olmak üzere

$$\mathfrak{X} = \ell_r = \left\{ x = (x_n): \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^r < \infty \right\}$$

kümesi verilsin.

$$\|x\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^r \right)^{1/r}$$

ile tanımlı $\|\cdot\|: \ell_r \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu ℓ_r üzerinde bir normdur. $\mathfrak{X}$ kümesi üzerindeki bir norm, $\mathfrak{X}$ üzerinde her $x, y \in \mathfrak{X}$ için

$$f(x, y) = \|x - y\|$$

olan bir metrik tanımlar. Bu metrik norm tarafından üretilen bir metriktir. Bir vektör uzayı üzerindeki her metrik bir normdan üretilmeyebilir. Tüm sınırlı veya sınırsız kompleks terimli diziler uzayı $\mathfrak{X}$ bir vektör uzayıdır. $x = (x)$

ve $y = (y_j)$ için

$$f(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{|x_j - y_j|}{1 + |x_j - y_j|}$$

şeklinde verilen metrik normdan üretilmez. Bir norm tarafından üretilen f metriği

$\forall x, y, z \in \mathfrak{X}$ ve $\forall \alpha$ skaleri için aşağıdaki özellikleri sağlar:

$$\triangleright f(x + z, y + z) = f(x, y), \text{ (öteleme değişmezliği)}$$

$$\triangleright f(\alpha x, \alpha y) = |\alpha|f(x, y) \text{ (homotesi)[6].}$$

Tanım 1.2.23. [6] Bir normlu uzayda alınan her Cauchy dizisi uzayda bir noktaya yakınsak ise bu uzaya tam normlu uzay ya da Banach uzayı denir.

Örnek 1.2.24. [6] Aşağıda Banach uzayı örnekleri verilmiştir:

(i) $1 \leq r < \infty$ ve $x = (x_n) \in \ell_r$ için

$$x = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^r \right)^{1/r}$$

normuna göre $\{x = (x_n): \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^r < \infty\}$ uzayı bir Banach uzayıdır.

(ii) $\ell_{\infty} = \{x = (x_n): \sup |x_n| < \infty\}$ sınırlı diziler uzayı olsun. Bu uzay üzerinde verilen

$$\|x\| = \sup_n |x_n|$$

normu ile bir Banach uzayıdır.

Tanım 1.2.25. [4] $\mathfrak{X}$, $\mathbb{K}$ cismi üzerinde tanımlanan bir vektör uzayı ve $\mathfrak{X}$ üzerindeki topoloji u olsun. $(\mathfrak{X}, u)$ topolojik uzayında $\alpha \in \mathbb{K}$ ve her $x, y \in \mathfrak{X}$ için

(i) $(\alpha, x) \rightarrow \alpha \cdot x$ ile tanımlı skalerle çarpma işlemi sürekli,

(ii) $(x, y) \rightarrow x + y$ ile tanımlı vektörlerin toplama işlemi sürekli

ise; yani lineer uzay işlemleri $(\mathfrak{X}, u)$ topolojik uzayına göre sürekli ise $\mathfrak{X}$ uzayına bir topolojik vektör uzayı ya da lineer topolojik uzay denir.

1.3. Sabit Nokta Kavramı ve Banach Sabit Nokta Teoremi

Tanım 1.3.1. [9] $\mathfrak{X} \neq \emptyset$ ve $\mathcal{T}: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ bir dönüşüm olsun.

$$\mathcal{T}x = x$$

eşitliğini sağlayan $x \in \mathfrak{X}$ noktasına $\mathcal{T}$ dönüşümünün sabit noktası adı verilir. Yani sabit nokta dönüşüm altında invaryant kalan noktalardır. Bir dönüşümün tek sabit noktası,

birden fazla sabit noktası ya da sonsuz çoklukta sabit noktası olabileceği gibi hiç sabit noktası da olmayabilir.

$\mathcal{T}$ dönüşümünün sabit noktaları kümesi

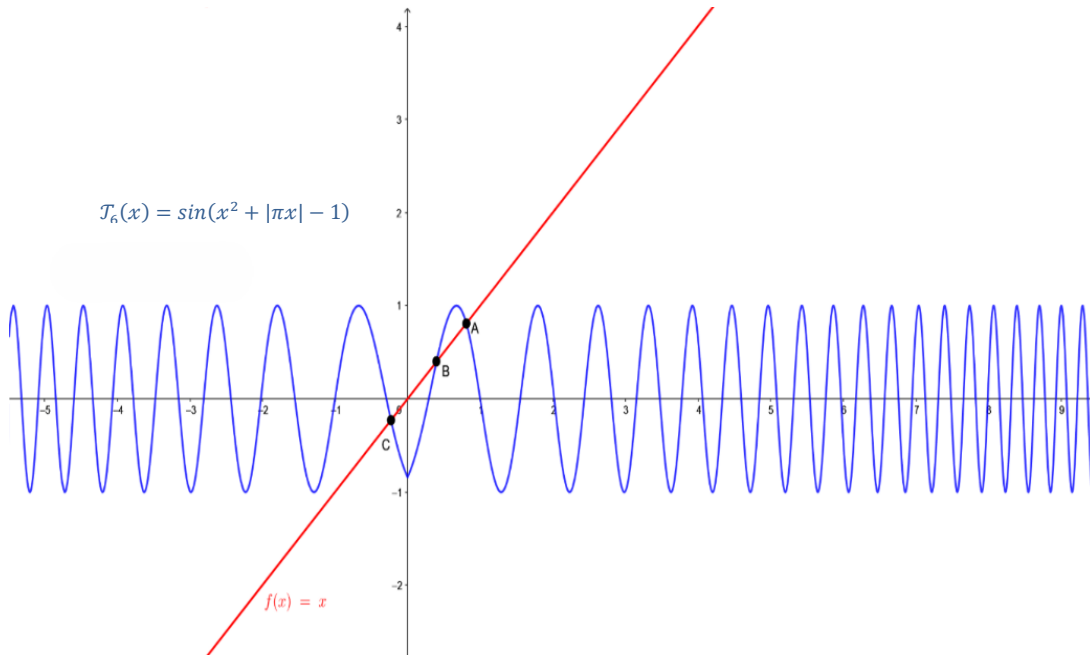
$$F(\mathcal{T}) = \text{Fix}(\mathcal{T}) = \{x \in \mathfrak{X} : \mathcal{T}x = x\}$$

şeklinde ifade edilir.

Örnek 1.3.2. [5] $\mathfrak{X} = \mathbb{R}$ ve $i = [1,5], i \in \mathbb{Z}$ için $\mathcal{T}_i: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ olsun.

- $\mathcal{T}_1(x) = \sqrt{x^2 - 8x + 40} \Rightarrow \text{Fix}(\mathcal{T}) = \{5\}$ dir.
- $\mathcal{T}_2(x) = x^2 - 6 \Rightarrow \text{Fix}(\mathcal{T}) = \{-2, 3\}$ dir,
- $\mathcal{T}_3(x) = x^5 - 4x^3 + x^2 + x - 4 \Rightarrow \text{Fix}(\mathcal{T}) = \{-2, -1, 2\}$ dir.
- $\mathcal{T}_4(x) = e^{x+1} \Rightarrow \text{Fix}(\mathcal{T}) = \emptyset$ dir.
- $\mathcal{T}_5(x) = x \Rightarrow \text{Fix}(\mathcal{T}) = \mathbb{R}$ dir.
- $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\mathcal{T}_6(x) = \sin(x^2 + |\pi x| - 1)$

fonksiyonunun ise sabit noktaları aşağıdaki grafikte belirtilen A, B ve C noktalarından oluşur, burada fonksiyonun $y = f(x) = x$ doğrusu ile kesim noktaları grafikteki gibidir.



Şekil 1.1. $\mathcal{T}_6(x) = \sin(x^2 + |\pi x| - 1)$ fonksiyonunun sabit noktaları.

Tanım 1.3.3. [10,11] $\mathfrak{X} \neq \emptyset$ bir küme ve $\mathcal{T}: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ bir dönüşüm olsun. Herhangi bir $x \in \mathfrak{X}$ için

$$\mathcal{T}^{n+1}(x) = \mathcal{T}(\mathcal{T}^n(x))$$

eşitliği ile tanımlanan $\mathcal{T}^n(x)$ dönüşümüne $x \in \mathfrak{X}$ noktasının n . iterasyonu adı verilir.

$\mathcal{T}: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ bir dönüşüm olmak üzere

$$(i) \text{ } Fix(\mathcal{T}) \subset Fix(\mathcal{T}^n)$$

$$(ii) \text{ keyfi bir } n \in \mathbb{N} \text{ için } Fix(\mathcal{T}^n) = \{x\} \text{ ise } Fix(\mathcal{T}) = \{x\}$$

ifadeleri doğrudur.

Tanım 1.3.4. [11] $(\mathfrak{X}, f)$ bir metrik uzay ve $\mathcal{T}^n$ ($n \geq 1$), dönüşümü $\mathcal{T}$ dönüşümünün n . iterasyonu olsun. Herhangi bir $x_0 \in \mathfrak{X}$ için

$$x_n = \mathcal{T}x_{n-1} = \mathcal{T}^n x_0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

ile tanımlı $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathfrak{X}$ dizisine x_0 başlangıç noktası ile en iyi yaklaşım dizisi veya Picard iterasyon dizisi denir.

Tanım 1.3.5. [10] $(\mathfrak{X}, f)$ bir metrik uzay ve $\mathcal{T}: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ bir dönüşüm olsun. Eğer $\forall x, y \in \mathfrak{X}$ için

$$f(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y) \leq k f(x, y)$$

eşitsizliğini sağlayan $k \geq 0$ sabiti varsa $\mathcal{T}$ dönüşümüne $\mathfrak{X}$ üzerinde bir Lipschitzian dönüşümü denir. Bu eşitsizliğe Lipschitz şartı ve bu şartı sağlayan en küçük k değerine de Lipschitz sabiti adı verilir.

Örnek 1.3.6. $\mathfrak{X} = \mathbb{R}$, $f(x, y) = |x - y|$ ve $\mathcal{T}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{T}x = 3x$ olsun. Bu durumda $k \geq 3$ için $\mathcal{T}$ dönüşümü

$$f(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y) = |3x - 3y| = 3|x - y| = 3 f(x, y)$$

eşitliğinden Lipschitz şartını gerçekleştirmektedir.

Tanım 1.3.7. [10] $(\mathfrak{X}, f)$ ikilisi bir metrik uzay olsun. $\forall x, y \in \mathfrak{X}$ için

$$f(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y) \leq k f(x, y)$$

ifadesini sağlayan $k \in [0, 1)$ sabiti varsa $\mathcal{T}: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ dönüşümüne “daralma (Banach daralma)” dönüşümü denir.

Örnek 1.3.8. [5] f Öklid metriği $\mathfrak{X} = [0,100] \times [-2,2]$ kümesi üzerinde tanımlansın.

$\forall (w, n) \in \mathfrak{X}$ için

$$\mathcal{T}(w, n) = \left(2 + \sqrt{w^2 - 8w + 40}, \tan^{-1} \frac{n}{2} \right)$$

biçiminde tanımlı $\mathcal{T}: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ dönüşümü bir daralma dönüşümüdür.

Örnek 1.3.9. [5] $(\mathfrak{X}, f)$ alışılmış metrik uzay ve $\mathcal{T}: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ bir fonksiyon olsun. $\forall x \in \mathfrak{X}$ için aşağıda verilen dönüşümler birer daralma dönüşümüdür:

- $\mathfrak{X} = \mathbb{R}$ iken $\mathcal{T}(x) = \frac{x}{2}$,
- $\mathfrak{X} = [0,100]$ iken $\mathcal{T}(x) = \sqrt{x^2 - 8x + 40}$,
- $\mathfrak{X} = [0,10]$ ve $k \in [0,1)$ iken $\mathcal{T}(x) = \text{sech}(kx)$,
- $\mathfrak{X} = \mathbb{R}$ iken $\mathcal{T}(x) = \cos(\cos x)$,
- $\mathfrak{X} = \mathbb{R}$ iken $\mathcal{T}(x) = e^{-e^{-x}}$.

Örnek 1.3.10. [5] $\mathfrak{X} = \mathbb{R}^3$ kümesi üzerinde $\forall x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ için $f(x, y, z) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, |x_3 - y_3|\}$ olan $f: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^+$ maksimum metriği verilsin. $\forall x \in \mathfrak{X}$ için

$$P = \begin{pmatrix} 1.2 & 0.1 & -0.2 \\ -0.1 & 0.8 & 0.4 \\ 0.5 & -0.2 & 1.1 \end{pmatrix} \text{ ve } \mathcal{V} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

iken

$$\mathcal{T}(x) = x - Px + \mathcal{V}$$

ile tanımlı $\mathcal{T}: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ bir daralma dönüşümüdür.

Daralma dönüşümleri düzgün sürekli dönüşümlerdir. Herhangi bir $\mathcal{T}$ dönüşümü sürekli değilse bir daralma dönüşümü de olamaz. Bununla birlikte, $\mathcal{T}$ daralma dönüşümü olmasa bile, herhangi bir N için $\mathcal{T}^N$ daralma dönüşümü olabilir.

Örnek 1.3.11. $\mathcal{T}: [0,2] \rightarrow [0,2]$ dönüşümü

$$\mathcal{T}x = \begin{cases} 0, & x \in [0,1] \\ 1, & x \in (1,2] \end{cases}$$

biçiminde tanımlansın. $\mathcal{T}$ dönüşümü daralma dönüşümü değildir. Çünkü $x = 1$ noktasında süreksizdir. Ayrıca, $\mathcal{T}^2: [0,1] \rightarrow \{0\}$, $\mathcal{T}^2 x = 0$ olup $\mathcal{T}^2$ bir daralma dönüşümüdür. $\mathcal{T}^2$ dönüşümünün tek sabit noktası $x = 0$ noktasıdır.

Metrik sabit nokta teorisinin temelleri, Polonyalı matematikçi Stefan Banach'ın 1922 yılında doktora tezinde ortaya koyduğu ve "Banach Daralma Prensipleri" (Banach Contraction Principle- BCP) olarak da bilinen sabit nokta teoremi ile atılmıştır. Banach'ın bu çalışması, metrik uzaylar üzerindeki dönüşümlerin sabit noktalarının varlığını garanti eden temel bir sonuç sunmuş ve doğrusal olmayan analizdeki birçok modern gelişmenin yolunu açmıştır. Bu teorem, daralma dönüşümlerinin sabit noktalarının varlığını ve tekliklerini sağlamakta olup, matematiksel analiz ve uygulamalı matematikte geniş bir uygulama alanı bulmuştur.

Teorem 1.3.12. (Banach sabit nokta teoremi) [12] $(\mathcal{X}, f)$ tam metrik uzay ve $\mathcal{T}: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ bir daralma dönüşümü olsun. Bu durumda $\mathcal{T}$ dönüşümü $\mathcal{X}$ uzayında bir tek sabit noktaya sahiptir. Ayrıca, $\forall x_0 \in \mathcal{X}$ için $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ Picard iterasyon dizisi $\mathcal{T}$ dönüşümünün tek sabit noktasına yakınsaktır.

Örnek 1.3.8, 1.3.9 ve 1.3.10 da gösterilen $\mathcal{T}$ daralma dönüşümleri, Banach sabit nokta teoremi uyarınca tam metrik bir uzay üzerinde tek bir sabit noktaya sahiptir.

Bununla birlikte her daralma dönüşümünün sabit noktası olması gerekmez. Bir dönüşümün bir veya daha fazla sabit noktası olabilir. Ayrıca, tam olmayan metrik uzaylarda tanımlanan daralma dönüşümlerinin sabit noktaya sahip olması da gerekmez. Örneğin; $\mathcal{X} = (0,1]$ kümesi mutlak değer metriği ile donatılsın. Bu durumda $\mathcal{T}x = \frac{x}{3}$ ile tanımlı $\mathcal{T}: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ bir daralma dönüşümüdür, fakat sabit noktası yoktur.

1968 yılında Bryant [12] Banach sabit nokta teoreminin bir genişlemesi olan aşağıdaki sonucu elde etmiştir.

Teorem 1.3.13. (Bryant sabit nokta teoremi) [12] $(\mathcal{X}, f)$ tam metrik uzay ve $\mathcal{T}: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ bir dönüşüm olsun. Bazı $N \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{T}^N$ dönüşümü bir daralma dönüşümü ise $\mathcal{T}$ dönüşümü bir tek sabit noktaya sahiptir. Her $x_0 \in \mathcal{X}$ için $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ Picard iterasyon dizisinin yakınsadığı nokta $\mathcal{T}$ dönüşümünün sabit noktasıdır.

Tanım 1.3.14. [10] $(\mathcal{X}, f)$ bir metrik uzay ve $\mathcal{T}: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ bir dönüşüm olsun. $\forall x, y \in \mathcal{X}$, $x \neq y$ için

$$f(Tx, Ty) < f(x, y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa T dönüşümüne kesin daralma (contractive) dönüşümü denir.

Örnek 1.3.15. $\mathfrak{X} = \mathbb{R}$ üzerinde $f(x, y) = |x - y|$ alışılmış metrik verilsin.

$T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere

$$x \rightarrow Tx = 1 + \ln(1 + e^x)$$

dönüşümü kesin daralma dönüşümü olup daralma dönüşümü değildir.

Edelstein [13] tam metrik uzaylarda bir $T: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ kesin daralma dönüşümünün sabit noktasının var olmasının gerekmediğini göstermiştir.

Teorem 1.3.16. (Edelstein sabit nokta teoremi) [13] $(\mathfrak{X}, f)$ kompakt metrik uzay ve $T: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ kesin daralan bir dönüşümü olmak üzere T bir tek sabit noktaya sahiptir.

Tanım 1.3.17. [9] $(\mathfrak{X}, f)$ bir metrik uzay ve $T: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ bir dönüşüm olsun. $\forall x, y \in \mathfrak{X}$ için

$$f(Tx, Ty) \leq f(x, y)$$

eşitsizliğini sağlayan T dönüşümüne genişlemeyen (nonexpansive) dönüşüm denir.

Örnek 1.3.18. $\mathfrak{X} = \mathbb{R}$ kümesi üzerinde f alışılmış metrik verilsin.

$$T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow Tx = \frac{x}{2} - k, (k \neq 0)$$

dönüşümü tanımlansın. $\forall x, y \in \mathbb{R}$ için

$$f(Tx, Ty) = \left| \frac{x}{2} - k - \frac{y}{2} + k \right| = \frac{|x - y|}{2} = \frac{f(x, y)}{2} \leq f(x, y)$$

ifadesi sağlandığından T dönüşümü genişlemeyen bir dönüşümdür.

Yukarıda belirtilen dönüşümler dikkate alındığında aşağıdaki sonuç elde edilir [8].

$$T \text{ daralma} \Rightarrow T \text{ kesin daralma} \Rightarrow T \text{ genişlemeyen} \Rightarrow T \text{ Lipschitzian.}$$

Ancak yukarıdaki gerektirmenin tersi her zaman doğru değildir.

Tanım 1.3.19. [10] $(\mathfrak{X}, f)$ bir metrik uzay ve $T: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in \mathfrak{X}$ için

$$f(Tx, Ty) \geq \alpha f(x, y)$$

eşitsizliği sağlanacak biçimde $\alpha > 1$ sabiti varsa $\mathcal{T}$ dönüşümüne genişleyen (expansive) dönüşüm denir.

Daralma dönüşümleri süreklilik özelliğine sahip olan dönüşümlerdir ve bu özellik oldukça zorlayıcı bir koşuldur. Süreklilik özelliğine sahip olmayan dönüşümler için Kannan [14] 1968 yılında aşağıdaki sabit nokta teoremini ispatlamıştır.

Teorem 1.3.20. (Kannan sabit nokta teoremi) [14] $(\mathfrak{X}, \mathfrak{f})$ tam metrik uzay ve $\mathcal{T}: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ bir dönüşüm olsun. $\forall x, y \in \mathfrak{X}$ için,

$$\mathfrak{f}(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y) \leq k[\mathfrak{f}(x, \mathcal{T}x) + \mathfrak{f}(y, \mathcal{T}y)]$$

eşitsizliği sağlayan bir $k \in [0, \frac{1}{2})$ sabiti varsa $\mathcal{T}$ dönüşümü bir tek sabit noktaya sahiptir. Her $x_0 \in \mathfrak{X}$ için $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ Picard iterasyon dizisi $\mathcal{T}$ dönüşümünün sabit noktasına yakınsaktır.

Kannan sabit nokta teoremi Banach sabit nokta teoreminin bir genelleştirmesi değildir. Bununla birlikte, kullanılan metrik uzayın tamlığını da gerektirdiği için son derece önemlidir. Subrahmanyam [15], Kannan daralma dönüşümünün metriğin tamlığını gösterdiğini ifade etmiştir. Yani, $\mathfrak{X}$ üzerindeki her Kannan dönüşümünün bir sabit noktaya sahip olması için $\mathfrak{X}$ metrik uzayının tam olması için gerek ve yeter koşuldur. Banach daralma dönüşümleri bu özelliğe sahip değildir.

Bianchini [16], Kannan daralma dönüşümünün bir genellemesi olarak ‘Bianchini Sabit Nokta Teorem’ini ispatlamıştır:

Teorem 1.3.21. (Bianchini sabit nokta teoremi) [16] $(\mathfrak{X}, \mathfrak{f})$ tam metrik uzay olsun. Her $x, y \in \mathfrak{X}$ için

$$\mathfrak{f}(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y) \leq k \max\{\mathfrak{f}(x, \mathcal{T}x), \mathfrak{f}(y, \mathcal{T}y)\}$$

olan bir $k \in [0, 1)$ sabiti varsa $\mathcal{T}: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ dönüşümü bir tek sabit noktaya sahiptir.

Aşağıdaki teoremler metrik sabit nokta teorisinin gelişiminde oldukça önemlidirler.

Teorem 1.3.22. (Chatterjea Sabit nokta teoremi) [17] $(\mathfrak{X}, \mathfrak{f})$ tam metrik uzay ve $\mathcal{T}: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ bir dönüşüm olsun. $\forall x, y \in \mathfrak{X}$ için

$$\mathfrak{f}(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y) \leq k[\mathfrak{f}(x, \mathcal{T}y) + \mathfrak{f}(y, \mathcal{T}x)]$$

olan bir $k \in [0, \frac{1}{2})$ sabiti varsa, $\mathcal{T}$ dönüşümü bir tek sabit noktaya sahiptir.

Teorem 1.3.23. (Reich sabit nokta teoremi) [18] $(\mathfrak{X}, f)$ tam metrik uzay üzerinde her $x, y \in \mathfrak{X}$ için $k_1 + k_2 + k_3 < 1$ özelliğindeki $k_1, k_2, k_3 \geq 0$ sabitleri

$$f(Tx, Ty) \leq k_1 f(x, y) + k_2 f(x, Tx) + k_3 f(y, Ty)$$

olacak şekilde varsa $T: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ dönüşümü bir tek sabit noktaya sahiptir.

Teorem 1.3.24. (Hardy-Rogers sabit nokta teoremi) [19] $(\mathfrak{X}, f)$ tam metrik uzay ve $T: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in \mathfrak{X}$ için

$$f(Tx, Ty) \leq k_1 f(x, y) + k_2 f(x, Tx) + k_3 f(y, Ty) \\ + k_4 f(x, Ty) + k_5 f(y, Tx)$$

şeklinde $k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 < 1$ olan $k_i, i = 1, \dots, 5 \in \mathbb{R}^+$ sabitleri varsa T dönüşümü bir tek sabit noktaya sahiptir.

Teorem 1.3.25. (Circic sabit nokta teoremi) [20] $(\mathfrak{X}, f)$ tam metrik uzay ve $T: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in \mathfrak{X}$ için

$$f(Tx, Ty) \leq \alpha \max \left\{ f(x, y), f(x, Tx), f(y, Ty), \frac{f(x, Ty) + f(y, Tx)}{2} \right\}$$

olan $\alpha \in [0, 1)$ sabiti varsa T dönüşümüne Circic daralma dönüşümü denir. Ayrıca, T dönüşümü $\mathfrak{X}$ üzerinde bir tek sabit noktaya sahiptir.

Berinde 2003 yılında, hemen hemen (almost) daralma olarak tanımlanan yeni bir daralma dönüşümünü şu şekilde sunmuştur:

Tanım 1.3.26. [21] $(\mathfrak{X}, f)$ bir metrik uzay ve $T: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in \mathfrak{X}$ ve $\delta \in [0, 1)$ ve $L \geq 0$ sabitleri için

$$f(Tx, Ty) \leq \delta f(x, y) + L f(y, Tx) \quad (1.1)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa T dönüşümüne hemen hemen daralma dönüşümü denir.

Uyarı 1.3.27. [11] (1.1) ile verilen eşitsizlik simetrik değildir. Ancak, simetrik olan uzaklık kavramından dolayı (1.1) şartı

$$f(Tx, Ty) \leq \delta f(x, y) + L f(x, Ty) \quad (1.2)$$

ile belirtilen bir eşitsizliği de her $x, y \in \mathfrak{X}$ için sağlar. Bu durumda T dönüşümünün hemen hemen bir daralma dönüşümü olduğunu doğrulamak için (1.1) ve (1.2) şartlarının her birinin gerçekleşip gerçekleşmeyeceği incelenmelidir.

Önerme 1.3.28. [11] Kannan daralma dönüşümleri hemen hemen daralma dönüşümleridir.

Metrik aksiyomlarından üçgen eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned} f(Tx, Ty) &\leq k [f(x, Tx) + f(y, Ty)] \\ &\leq k \{[f(x, y) + f(y, Tx)] + [f(y, Tx) + f(Tx, Ty)]\} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $(1 - k) f(Tx, Ty) \leq k f(x, y) + 2k f(y, Tx)$ sağlanır ve $\forall x, y \in \mathfrak{X}$ için

$$f(Tx, Ty) \leq \frac{k}{1-k} f(x, y) + \frac{2k}{1-k} f(y, Tx)$$

hemen hemen daralma şartı $k \in (0, \frac{1}{2})$ için $\delta = \frac{k}{1-k}$ ve $L = \frac{2k}{1-k}$ ile sağlanır. Ek olarak, simetrik özelliğini sağlayan Kannan daralma şartı (1.2) şartını da sağlar. Son durumda, her Kannan daralma dönüşümü bir hemen hemen daralma dönüşümüdür.

Önerme 1.3.29. [11] Teorem 1.3.22' de verilen Chatterjea daralma dönüşümleri de bir hemen hemen daralmadır.

Önerme 1.3.30. [11] $(\mathfrak{X}, f)$ bir metrik uzay olsun. Her $x, y \in \mathfrak{X}$ için $k_1 + 2k_2 < 1$ olan $k_1, k_2 \geq 0$ sabitleri varsa

$$f(Tx, Ty) \leq k_1 f(x, y) + k_2 [f(x, Tx) + f(y, Ty)]$$

eşitsizliğini sağlayan $T: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ dönüşümüne Ciric-Reich-Rus daralma dönüşümü denir ve aynı zamanda Ciric-Reich-Rus daralma dönüşümü bir hemen hemen daralma dönüşümüdür.

Önerme 1.3.31. [11] $(\mathfrak{X}, f)$ metrik uzay ve $T: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ bir dönüşüm olsun. $\forall x, y \in \mathfrak{X}$ için

$$M(x, y) = \max\{f(x, y), f(x, Tx), f(y, Ty), f(x, Ty), f(y, Tx)\}$$

iken

$$f(Tx, Ty) \leq \alpha M(x, y),$$

ifadesini sağlayan $\alpha \in [0, 1)$ sabiti varsa T dönüşümüne quasi daralma dönüşümü denir. Quasi daralma dönüşümleri $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ için hemen hemen daralma dönüşümleridir.

Örnek 1.3.32. [11] $\mathfrak{X} = [0,1]$, $(\mathfrak{X}, \mathfrak{f})$ alışılmış metrik uzayı olsun. $\mathcal{T}: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ dönüşümü

$$\mathcal{T}x = \begin{cases} \frac{2x}{3}, & \text{eğer } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ \frac{2x+1}{3}, & \text{eğer } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Aşağıdaki koşullar $\mathcal{T}$ dönüşümü için sağlanır.

(i) $\mathcal{T}$ dönüşümü $\delta = \frac{2}{3}$ ve $L = 6$ için bir hemen hemen daralmadır ve $Fix(\mathcal{T}) = \{0,1\}$ dir.

(ii) $\mathcal{T}$ bir Banach, Kannan, Chatterjea ve quasi daralma dönüşümü de değildir.

Berinde aşağıdaki sabit nokta teoremini 2003 yılında hemen hemen daralma dönüşümleri için ispatlamıştır.

Teorem 1.3.33. [21] $(\mathfrak{X}, \mathfrak{f})$ tam metrik uzay ve $\mathcal{T}: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ hemen hemen daralma dönüşümü olsun. $\mathcal{T}$ dönüşümü $\mathfrak{X}$ uzayında bir sabit noktaya sahiptir.

Hemen hemen daralma dönüşümlerinin sabit noktasının tek olması gerekmez. Hemen hemen daralma dönüşümlerinin sabit noktasının tekliği $L_1 \geq 0$ için eğer (1.1) ve (1.2) şartları

- $\mathfrak{f}(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y) \leq \delta \mathfrak{f}(x, y) + L_1 \mathfrak{f}(x, \mathcal{T}x),$
- $\mathfrak{f}(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y) \leq \delta \mathfrak{f}(x, y) + L_1 \mathfrak{f}(y, \mathcal{T}y),$

ile değiştirilirse elde edilir.

Berinde'nin tanımladığı hemen hemen daralma dönüşümlerini genelleleyen yeni bir daralma dönüşümünü Babu ve ark. [22] aşağıdaki gibi göstermişlerdir.

Tanım 1.3.34. [22] $(\mathfrak{X}, \mathfrak{f})$ metrik uzay ve $\mathcal{T}: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ bir dönüşüm olsun. $\mathfrak{h} \in [0,1)$ ve $p \geq 0$ sabitleri $\forall x, y \in \mathfrak{X}$ için

$$N(x, y) = \min\{\mathfrak{f}(x, \mathcal{T}x), \mathfrak{f}(y, \mathcal{T}y), \mathfrak{f}(x, \mathcal{T}y), \mathfrak{f}(y, \mathcal{T}x)\}$$

iken

$$\mathfrak{f}(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y) \leq \mathfrak{h} \mathfrak{f}(x, y) + pN(x, y)$$

olacak şekilde mevcut ise $\mathcal{T}$ dönüşümüne genelleştirilmiş hemen hemen daralma dönüşümü denir.

Teorem 1.3.35. [22] $(\mathfrak{X}, f)$ tam metrik uzay ve $\mathcal{T} : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ genelleştirilmiş hemen hemen daralma dönüşümü olsun. Bu durumda $\mathcal{T}$ dönüşümü $\mathfrak{X}$ üzerinde bir tek sabit noktaya sahiptir.

2008 yılında Suzuki [23] aşağıdaki sabit nokta teoremini ispatlamıştır.

Teorem 1.3.36. (Suzuki sabit nokta teoremi) [23] $(\mathfrak{X}, f)$ kompakt metrik uzay ve $\mathcal{T} : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ bir dönüşüm olsun. Artmayan bir $\theta : [0,1) \rightarrow \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ fonksiyonu

$$\theta(r) = \begin{cases} 1, & \text{eğer } 0 \leq r \leq (\sqrt{5} - 1)/2 \\ (1 - r) \cdot r^{-2}, & \text{eğer } (\sqrt{5} - 1)/2 \leq r \leq 1/\sqrt{2} \\ (1 + r)^{-1}, & \text{eğer } 1/\sqrt{2} \leq r < 1 \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Her $x, y \in \mathfrak{X}$ için

$$\theta(r)f(x, \mathcal{T}x) \leq f(x, y) \Rightarrow f(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y) \leq f(x, y)$$

olacak şekilde $r \in [0,1)$ sabiti varsa $\mathcal{T}$ dönüşümü bir tek sabit noktaya sahiptir.

Suzuki 2009 yılında ise Edelstein sabit nokta teoreminin bir genişlemesi olan ve daha sonraki sabit nokta çalışmalarında Suzuki daralma olarak öncü kabul edilebilecek aşağıdaki sabit nokta teoremini ispatlamıştır.

Teorem 1.3.37. [24] $(\mathfrak{X}, f)$ kompakt metrik uzay ve $\mathcal{T} : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in \mathfrak{X}$ için

$$\frac{1}{2}f(x, \mathcal{T}x) < f(x, y) \Rightarrow f(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y) < f(x, y)$$

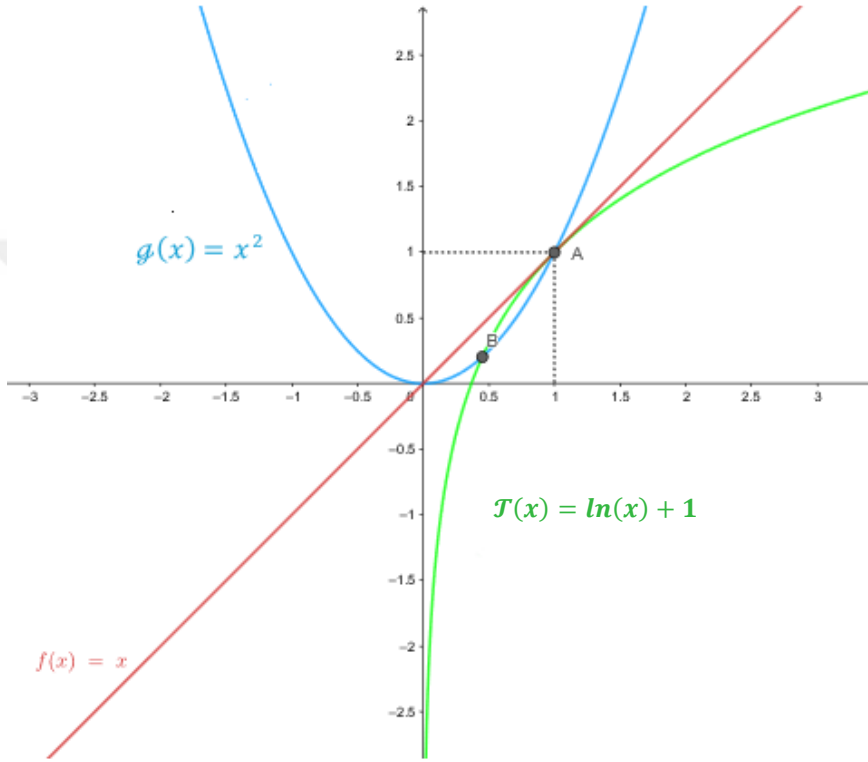
eşitsizliği sağlanıyorsa $\mathcal{T}$ dönüşümü bir tek sabit noktaya sahiptir.

Metrik sabit nokta teorisinde tek dönüşüm için elde edilen sabit nokta teoremlerinin yanı sıra birden fazla dönüşüm kullanılarak da elde edilen ortak sabit nokta çalışmaları mevcuttur. Bu çalışmalar Banach sabit nokta teoreminin iki veya daha fazla dönüşüm kullanılarak elde edilen genelleştirmelerini de içermektedir.

Tanım 1.3.38. [25] $\mathfrak{X} \neq \emptyset$ bir küme ve $\mathcal{T}, \mathcal{G} : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ iki dönüşüm olsun. Her $x \in \mathfrak{X}$ için $\mathcal{T}x = \mathcal{G}x = x$ eşitliği sağlanırsa x noktasına $\mathcal{T}$ ve $\mathcal{G}$ dönüşümlerinin ortak sabit noktası denir ve bu dönüşümlerin ortak sabit noktaları kümesi $C_{Fix}\{\mathcal{T}, \mathcal{G}\} = \{x \in \mathfrak{X} \mid \mathcal{T}x = \mathcal{G}x = x\}$ ile gösterilir.

Tanım 1.3.39. [25] $\mathfrak{X} \neq \emptyset$ bir küme ve $\mathcal{T}, \mathcal{G}: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ tanımlı iki dönüşüm olsun. $\mathcal{T}x = \mathcal{G}x = c$ olan $x, c \in \mathfrak{X}$ noktaları varsa x noktasına $\mathcal{T}$ ve $\mathcal{G}$ dönüşümlerinin çakışma noktası (coincidence point) ve $c \in \mathfrak{X}$ noktasına ise çakışılan nokta denir.

Örnek 1.3.40. $\mathfrak{X} = [0,2]$ olmak üzere Şekil 1.2 de tanımlanan fonksiyonların grafiğinde A noktası ortak sabit nokta ve B noktası ise dönüşümlerin çakışma noktasıdır.



Şekil 1.2. $\mathcal{T}(x) = \ln(x) + 1$ ve $\mathcal{G}(x) = x^2$ dönüşümlerinin ortak sabit noktaları.

Tanım 1.3.41. [26] $(\mathfrak{X}, \mathfrak{f})$ metrik uzay ve $\mathcal{T}, \mathcal{G}: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ iki dönüşüm olsun. Her $x \in \mathfrak{X}$ için $\mathfrak{f}(\mathcal{T}\mathcal{G}x, \mathcal{G}\mathcal{T}x) = 0$ ise $\mathcal{T}$ ve $\mathcal{G}$ dönüşümlerine değişmeli (commuting) dönüşümler denir.

Tanım 1.3.42 [27] $(\mathfrak{X}, \mathfrak{f})$ metrik uzayında tanımlanan $\mathcal{T}, \mathcal{G}: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ dönüşümleri her $x \in \mathfrak{X}$ için $\mathfrak{f}(\mathcal{T}\mathcal{G}x, \mathcal{G}\mathcal{T}x) \leq \mathfrak{f}(\mathcal{G}x, \mathcal{T}x)$ koşulunu sağlarsa bu dönüşümlere zayıf değişmeli (weakly commuting) dönüşümler adı verilir.

Tanım 1.3.43. [25] $(\mathfrak{X}, \mathfrak{f})$ metrik uzay ve $\mathcal{T}, \mathcal{G}: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ iki dönüşüm olsun. $\mathfrak{X}$ uzayında bazı $t \in \mathfrak{X}$ noktaları için $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{T}x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{G}x_n = t$ şartını sağlayan (x_n) dizisi için $\lim_{n \rightarrow \infty} (\mathcal{T}\mathcal{G}x_n, \mathcal{G}\mathcal{T}x_n) = 0$ ise $\mathcal{T}$ ve $\mathcal{G}$ dönüşümlerine uyumlu (compatible) dönüşümler denir.

Tanım 1.3.44. [25] $(\mathfrak{X}, f)$ metrik uzay ve $\mathcal{T}, \mathcal{G}: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ iki dönüşüm olsun. $\mathcal{T}$ ve $\mathcal{G}$ dönüşümleri çakışma noktalarında değişmeli ise bu dönüşümlere zayıf uyumlu (weakly compatible) dönüşümler denir. Yani, $\mathcal{T}u = \mathcal{G}u$ iken $\mathcal{T}\mathcal{G}u = \mathcal{G}\mathcal{T}u$ olan $u \in \mathfrak{X}$ noktaları vardır.

Yukarıdaki tanımlar göz önüne alındığında iki dönüşüm için aşağıdaki çıkarım yapılabilir:

Değişmeli dönüşümler $\Rightarrow$ Zayıf değişmeli dönüşümler $\Rightarrow$ Uyumlu dönüşümler.

Örnek 1.3.45. [28] $\mathfrak{X} = \mathbb{R}$ üzerinde $\mathcal{T}, \mathcal{G}: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ dönüşümleri $\mathcal{T}x = \frac{x}{3}$ ve $\mathcal{G}x = x^2$ olarak tanımlansın. Bu durumda $x = 0$ ve $x = \frac{1}{3}$ noktaları birer çakışma noktasıdır.

Ayrıca

$$\mathcal{T}\mathcal{G}0 = \mathcal{G}\mathcal{T}0 = 0$$

olduğundan 0 noktasında bu dönüşümler değişmeli dönüşümlerdir. Dolayısıyla bu noktada zayıf uyumludur. Fakat

$$\mathcal{T}\mathcal{G}\left(\frac{1}{3}\right) = \mathcal{T}\left(\frac{1}{9}\right) = \frac{1}{27} \text{ ve } \mathcal{G}\mathcal{T}\left(\frac{1}{3}\right) = \mathcal{G}\left(\frac{1}{9}\right) = \frac{1}{81}$$

olduğundan $x = \frac{1}{3}$ noktasında değişmeli olmadığı ve sonuç olarak zayıf uyumlu olmadıkları da açıktır.

Ciric ve ark. [29] aşağıdaki sabit nokta teoremini iki dönüşüm için ispatlamışlardır.

Teorem 1.3.46. [29] $(\mathfrak{X}, f)$ bir tam metrik uzay ve $\mathcal{T}, \mathcal{G}: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ iki dönüşüm olsun. Her $x, y \in \mathfrak{X}$ için

$$f(\mathcal{T}x, \mathcal{G}y) \leq h \max \left\{ f(x, y), f(x, \mathcal{T}x), f(y, \mathcal{G}y), \frac{f(x, \mathcal{G}y) + f(y, \mathcal{T}x)}{2} \right\} \\ + p \min \{ f(x, \mathcal{T}x), f(y, \mathcal{G}y), f(x, \mathcal{G}y), f(y, \mathcal{T}x) \}$$

ifadesini sağlayan $h \in [0, 1)$ ve $p \geq 0$ sabitleri varsa $\mathcal{T}$ ve $\mathcal{G}$ dönüşümleri bir tek ortak sabit noktaya sahiptir.

1.4. Çoğul Değerli Dönüşümler ve Nadler Sabit Nokta Teoremi

Banach sabit nokta teoremi, tek-değerli (tekil değerli) daralma dönüşümleri için sabit noktanın varlığını ve tekliğini garanti eden temel bir sonuçtur. Nadler sabit nokta

teoremi ise Banach teoremini genelleştirerek, çoğul değerli (küme-değerli) kontraktif dönüşümler için sabit noktanın varlığını inceleyen daha geniş bir çerçeve sunar. Banach sabit nokta teoremi, daralma dönüşümleri için tek bir sabit noktanın varlığını ve iteratif yöntemlerle yakınsamasını sağlarken, Nadler sabit nokta teoremi bu sonucu çoğul değerli dönüşümler için genişletir. Bu sayede Banach'ın sunduğu tekil sabit nokta yaklaşımı, Nadler teoremi ile çoklu sabit noktaların varlığına yönelik daha kapsamlı bir hale gelir. Hem Banach hem de Nadler sabit nokta teoremleri, daralma dönüşümleri altında sabit noktaların varlığını garanti eder. Ancak Banach teoremi tek-değerli fonksiyonlarla çalışırken, Nadler teoremi çoğul değerli fonksiyonların Hausdorff metriği bağlamında daralma olmasını şart koşarak bu yaklaşımı daha genel bir düzleme taşır.

Bu bölümde Nadler [30] tarafından 1969 yılında tanımlanan Hausdorff metriği ve çoğul değerli dönüşümlerle ilgili bazı tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Tanım 1.4.1.[30] $\mathfrak{X}$ ve $\mathcal{Y}$ boştan farklı iki küme, $2^{\mathcal{Y}}$ de $\mathcal{Y}$ kümesinin bütün boştan farklı alt kümelerinin bir ailesi olsun. $\mathcal{T}: \mathfrak{X} \rightarrow 2^{\mathcal{Y}}$ dönüşümüne çoğul (küme) değerli dönüşüm adı verilir.

$\mathcal{T}: \mathfrak{X} \rightarrow 2^{\mathcal{Y}}$ çoğul değerli dönüşümü $\mathfrak{X}$ kümesinden alınan her bir x elemanına $\mathcal{Y}$ kümesinin bir $\mathcal{T}x$ alt kümesini karşılık getirir. Eğer her bir $x \in \mathfrak{X}$ elemanına karşılık gelen $\mathcal{T}x$ alt kümesi tek bir elemandan oluşuyor ise bu durumda $\mathcal{T}$ dönüşümüne tek (tekil) değerli dönüşüm denir.

Örnek 1.4.2. $\mathcal{T}: \mathbb{R} \rightarrow 2^{\mathbb{R}}$ dönüşümü

$$\mathcal{T}x = \begin{cases} \{-1, 1\}, & x = 0 \text{ ise} \\ \{x^2\}, & x \neq 0 \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlansın. $\mathcal{T}$ çoğul değerli bir dönüşümdür.

Tanım 1.4.3. [31] $\mathfrak{X}$ ve $\mathcal{Y}$ boştan farklı iki küme, $\mathcal{T}: \mathfrak{X} \rightarrow 2^{\mathcal{Y}}$ çoğul değerli bir dönüşüm olsun. Her $x \in \mathfrak{X}$ için $x \in \mathcal{T}x$ ifadesi sağlanıyor ise x noktasına $\mathcal{T}$ çoğul değerli dönüşümünün sabit noktası adı verilir.

Tanım 1.4.4. [32] $(\mathfrak{X}, f)$ bir metrik uzay ve $C, \mathfrak{X}$ kümesinin boştan farklı bir alt kümesi olmak üzere bir $x \in \mathfrak{X}$ noktasının C kümesine uzaklığı $dist(x, C)$ ile gösterilir ve

$$dist(x, C) = \inf\{f(x, y) : y \in C\}$$

olarak tanımlanır.

Tanım1.4.4. [31] $(\mathfrak{X}, \mathfrak{f})$ bir metrik uzay, C ve M , $\mathfrak{X}$ kümesinin boştan farklı iki alt kümesi olmak üzere

$$dist(C, M) = \sup\{\mathfrak{f}(c, M) : c \in C\}$$

değerine C kümesinin M kümesine olan uzaklığı denir.

$$H(C, M) = \max\{dist(C, M), dist(M, C)\}$$

değerine de C ile M kümeleri arasındaki uzaklık adı verilir.

$(\mathfrak{X}, \mathfrak{f})$ bir metrik uzay olsun. $K(\mathfrak{X})$, $\mathfrak{X}$ kümesinin boş olmayan tüm kompakt alt kümelerin sınıfı, $B(\mathfrak{X})$, $\mathfrak{X}$ kümesinin boş olmayan tüm sınırlı alt kümelerin sınıfı, $C(\mathfrak{X})$ $\mathfrak{X}$ kümesinin boş olmayan tüm kapalı alt kümelerin sınıfı ve $CB(\mathfrak{X})$ ise, $\mathfrak{X}$ kümesinin tüm kapalı ve sınırlı alt kümelerin sınıfını temsil etmektedir.

Tanım1.4.5. [30] $(\mathfrak{X}, \mathfrak{f})$ bir metrik uzay olsun. Bu taktirde H de $CB(\mathfrak{X})$ üzerinde bir metriktir. Yani, $\mathcal{T}: CB(\mathfrak{X}) \times CB(\mathfrak{X}) \rightarrow \mathbb{R}$ bir metriktir. Bu metriğe Hausdorff metriği denir.

Tanım1.4.6. [30] $(\mathfrak{X}, \mathfrak{f})$ bir metrik uzay, H de $CB(\mathfrak{X})$ üzerinde bir Hausdorff metriği olsun ve bir $\mathcal{T}: \mathfrak{X} \rightarrow CB(\mathfrak{X})$ çok değerli bir dönüşüm verilsin. Eğer, $\mathfrak{X}$ deki her yakınsak $\{x_n\}$ dizisi için $x_n \rightarrow x$ iken $H(\mathcal{T}x_n, \mathcal{T}x) \rightarrow 0$ oluyorsa $\mathcal{T}$ ye $\mathfrak{X}$ üzerinde süreklidir denir.

Önerme 1.4.7. [32] $C, M \in CB(\mathfrak{X})$ olsun. Herhangi bir $c \in C$ için

$$\mathfrak{f}(c, M) \leq H(C, M)$$

dir.

Önerme 1.4.8. [30] $C, M \in CB(\mathfrak{X})$ ve $c \in C$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\mathfrak{f}(c, m) \leq H(C, M) + \varepsilon$$

olacak biçimde bir $m \in M$ vardır.

Önerme1.4.9. [33] $C, M \in CB(\mathfrak{X})$ olsun. Her $x \in \mathfrak{X}$ ve $\alpha > 1$ için,

$$\mathfrak{f}(c, m) \leq \alpha H(C, M)$$

olacak şekilde bir $c \in C$ vardır.

Teorem1.4.10. [30] $(\mathfrak{X}, \mathfrak{f})$ tam bir metrik uzay ve $\mathcal{T}: \mathfrak{X} \rightarrow CB(\mathfrak{X})$ çoğul değerli bir daralma dönüşüm olsun. O zaman $\mathcal{T}, \mathfrak{X}$ de bir sabit noktaya sahiptir.

1.5. Banach Sabit Nokta Teoreminin Bazı Genellemeleri

Çalışmanın bu bölümünde 3, 4 ve 5.bölümlerde kullanılacak olan bazı yardımcı fonksiyon sınıflarına ve bunların özellikleri ile çeşitli örneklere yer verilecektir.

1.5.1. Geraghty daralma dönüşümleri

Geraghty daralma dönüşümleri 1973 yılında Geraghty tarafından tanımlanmıştır.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta(\iota_n) = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \iota_n = 0$$

özelliğine sahip $\beta: [0, \infty) \rightarrow [0, 1)$ ile tanımlı fonksiyonların kümesi B olsun [34].

Teorem 1.5.1. [34] $(\mathfrak{X}, \mathfrak{f})$ tam metrik uzay ve $\mathcal{T}: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in \mathfrak{X}$ için

$$\mathfrak{f}(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y) \leq \beta(\mathfrak{f}(x, y))\mathfrak{f}(x, y)$$

olan bir $\beta \in B$ fonksiyonu varsa $\mathcal{T}$ dönüşümü $\mathfrak{X}$ uzayında bir tek sabit noktaya sahiptir.

Referans [35] de, Geraghty daralma dönüşümlerinin bir genellemesi aşağıdaki gibi ifade edilmiştir.

$\tau \geq 1$ bir reel sayı olsun. $\beta: [0, \infty) \rightarrow \left[0, \frac{1}{\tau}\right)$ biçiminde tanımlı fonksiyonların sınıfı B_τ olmak üzere $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta(\iota_n) = \frac{1}{\tau}$ ise $\lim_{n \rightarrow \infty} \iota_n = 0$ dir.

Teorem 1.5.2. $(\mathfrak{X}, \mathfrak{f})$ tam metrik uzay ve $\mathcal{T}: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ bir dönüşüm olsun. Bu durumda

$$E(x, y) = \mathfrak{f}(x, y) + |\mathfrak{f}(x, \mathcal{T}x) - \mathfrak{f}(y, \mathcal{T}y)|$$

olan

$$\mathfrak{f}(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y) \leq \beta(E(x, y))E(x, y)$$

ifadesini sağlayan $\beta \in B$ fonksiyonu varsa $\mathcal{T}$ dönüşümü $\mathfrak{X}$ uzayında bir tek sabit noktaya sahiptir.

Uyarı 1.5.3. $\beta: [0, \infty) \rightarrow \left[0, \frac{1}{\tau}\right)$ dönüşümü

$$\mathfrak{f}(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y) \leq \beta(E(x, y))E(x, y) < E(x, y)$$

ifadesini sağlamaktadır.

Örnek 1.5.5. [35] Aşağıda verilen $\beta: [0, \infty) \rightarrow \left[0, \frac{1}{\tau}\right)$ fonksiyonlar B_τ sınıfına aittir.

(i) Bazı $\tau \geq 1$ için $\beta(\iota) = \frac{\exp(-\tau)}{\iota}$ dir.

(ii) $\beta(\iota) = \frac{1}{\tau(1+\iota^2)}$ dir.

1.5.2. Simülasyon fonksiyonlar

Sabit nokta teorisinde daha verimli sonuçlar elde etmek için bazı araştırmacılar, çeşitli soyut uzaylarda yardımcı fonksiyonlardan yararlanarak Banach daralma ilkesini genişletmeye çalışmışlardır. Bu çalışmalar günümüzde de hala devam etmektedir. Bunlardan önemli olanlarından bir tanesi de Khojasteh ve ark. [36] tarafından 2015 yılında tanımlanan simülasyon fonksiyonların sınıfıdır.

$\zeta(x) = 0 \Leftrightarrow \zeta = 0$ şartını sağlayan $\zeta: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ tanımlı tüm sürekli ve kesin artan fonksiyonların sınıfı Ω olsun.

Tanım 1.5.3 $\xi: [0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu tanımlansın. Her $\hat{f}, \hat{q} > 0$, $\lambda \geq 1$ ve $\zeta \in \Omega$ için aşağıdaki şartlar sağlansın.

$$(\xi_1) \xi(0,0) = 0 \text{ dir,}$$

$$(\xi_2) \xi(\hat{f}, \hat{q}) < \hat{q} - \hat{f} \text{ dir,}$$

$$(\xi_2') \xi(\hat{f}, \hat{q}) < \zeta(\hat{q}) - \zeta(\hat{f}) \text{ dir,}$$

$$(\xi_2'') \xi(\hat{f}, \hat{q}) < \zeta(\hat{q}) - \zeta(\tau^\lambda \hat{f}) \text{ dir,}$$

$$(\xi_3) \{\hat{f}_n\}, \{\hat{q}_n\} \subset (0, \infty) \text{ olmak üzere } \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{f}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{q}_n > 0$$

iken $\limsup_{n \rightarrow \infty} \xi(\hat{f}_n, \hat{q}_n) < 0$ dir,

$$(\xi_3') \{\hat{f}_n\}, \{\hat{q}_n\} \subset (0, \infty) \text{ olmak üzere } \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{f}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{q}_n > 0 \text{ ve } \hat{f}_n \leq \hat{q}_n$$

iken $\limsup_{n \rightarrow \infty} \xi(\hat{f}_n, \hat{q}_n) < 0$ dir.

Aşağıdaki tabloda sağladığı koşullar altında isimlendirilen simülasyon fonksiyonlar ve tüm simülasyon fonksiyonların oluşturduğu sınıflar gösterilmiştir.

Tablo 1.1. Simülasyon fonksiyonlar.

$\xi: [0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun sağladığı koşullar	Simülasyon fonksiyonlar	Sınıf
$(\xi_1), (\xi_2), (\xi_3)$	Khojasteh ve ark. [36] tarafından tanımlanan simülasyon fonksiyondur.	Z
$(\xi_2), (\xi_3)$	Argoubi ve ark. [37] tarafından tanımlanan simülasyon fonksiyondur.	Z_a

Tablo 1.2.(Devamı) Simülasyon fonksiyonlar.

$(\xi_1), (\xi_2), (\xi_3')$	Roldan Lopez de Hierro ve ark. [38] tarafından tanımlanan simülasyon fonksiyondur.	Z_r
$(\xi_2'), (\xi_3)$	Joonaghany ve ark. [39] tarafından tanımlanan Ω -simülasyon fonksiyondur.	Z_j
$(\xi_2''), (\xi_3')$	Zoto ve ark. [40] tarafından tamamlanan Ω_τ -simülasyon fonksiyondur.	Z_3

Örnek 1.5.4 [36,39,40] $\xi_i: [0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $\hat{f}, \hat{q} \in [0, \infty)$ olsun.

(i) $\zeta(\hat{f}) = \phi(\hat{f}) = 0 \Leftrightarrow \hat{f} = 0$ ve her $\hat{f} > 0$ için $\zeta(\hat{f}) < \hat{f} \leq \phi(\hat{f})$ ifadesini sağlayan $\zeta, \phi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ iki sürekli fonksiyon olsun. $\xi_1(\hat{f}, \hat{q}) = \zeta(\hat{q}) - \phi(\hat{f})$ fonksiyonu için $\xi_1 \in Z$ dir.

(ii) Her $\hat{f}, \hat{q} > 0$ için $\square(\hat{f}, \hat{q}) > \square(\hat{f}, \hat{q})$ ifadesini sağlayan $\square, \square: [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ iki sürekli fonksiyon olsun. Bu durumda $\xi_2(\hat{f}, \hat{q}) = \hat{q} - \frac{\square(\hat{f}, \hat{q})}{\square(\hat{f}, \hat{q})}$ fonksiyonu Z sınıfına aittir.

(iii) $\varrho(\hat{f}) = 0 \Leftrightarrow \hat{f} = 0$ ifadesini sağlayan $\varrho: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ sürekli bir fonksiyon olsun. $\xi_3(\hat{f}, \hat{q}) = \hat{q} - \varrho(\hat{q}) - \hat{f}$ ise $\xi_3 \in Z$ dir.

(iv) Her $\hat{f} > 0$ için $\mathfrak{P}(c) < c$ ve $\mathfrak{P}(0) = 0$ olacak şekilde $\mathfrak{P}: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ üstten yarı sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\xi_4(\hat{f}, \hat{q}) = \hat{q}\mathfrak{P}(\hat{q}) - \hat{f} \text{ fonksiyonu } Z \text{ sınıfındadır.}$$

(v) Her $\varepsilon > 0$ için $\int_0^\varepsilon \mathfrak{x}(t) dt$ mevcut ve $\int_0^\varepsilon \mathfrak{x}(t) dt > \varepsilon$ ifadesini sağlayan $\mathfrak{x}: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu verilsin. Bu durumda

$$\xi_5(\hat{f}, \hat{q}) = \hat{q} - \int_0^{\hat{q}} \mathfrak{x}(t) dt$$

fonksiyonu için $\xi_5 \in Z$ olur.

(vi) Her $\hat{q} > 0$ için $\limsup_{\hat{f} \rightarrow \hat{q}} \phi(\hat{f}) < 1$ ifadesini sağlayan $\phi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ bir fonksiyon olsun. $\xi_6(\hat{f}, \hat{q}) = \phi(\nu)\zeta(\hat{q}) - \zeta(\hat{f})$ ile tanımlanan ξ_6 fonksiyonu Z_j sınıfına aittir.

(vii) Her $\hat{q} > 0$ için $\limsup_{\hat{f} \rightarrow \hat{q}} \phi(\hat{f}) < 1$ olacak şekilde $\phi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ bir fonksiyon olsun. $\xi_7(\hat{f}, \hat{q}) = \zeta(\nu) - \phi(\nu) - \zeta(t)$ fonksiyonu için $\xi_7 \in Z_j$ dir.

(viii) Her $\hat{q} > 0$ için $\phi(\hat{q}) < \varsigma(\hat{q})$ eşitsizliğini sağlayan ς artan ve $\phi, \varsigma: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ sürekli fonksiyonlar olsun. $\xi_8(\hat{f}, \hat{q}) = \phi(\hat{q}) - \varsigma(\tau^\lambda \hat{f})$ ile tanımlanan ξ_8 fonksiyonu Z_3 sınıfındandır, yani $\xi_8 \in Z_3$ dir.

Khojasteh ve ark. [36] tanımladıkları simülasyon fonksiyonlar sınıfını kullanarak Banach daralma dönüşümünün bir genellemesi olan Z –daralma dönüşümünü aşağıdaki gibi ifade etmişlerdir.

Tanım 1.5.5. [36] $(\mathfrak{X}, \mathfrak{f})$ metrik uzay, $\mathcal{T}: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ bir dönüşüm ve $\xi \in Z$ olsun. Her $x, y \in \mathfrak{X}$ için

$$\xi(\mathfrak{f}(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y), \mathfrak{f}(x, y)) \geq 0$$

eşitsizliği sağlanırsa $\mathcal{T}$ dönüşümüne Z –daralma dönüşümü adı verilir.

Eğer yukarıdaki tanımda her $\hat{f}, \hat{q} \in [0, \infty)$ için $\xi \in Z$ fonksiyonunu

$$\xi(\hat{f}, \hat{q}) = x\hat{q} - \hat{f}$$

olarak seçilirse Z –daralma dönüşümü Banach daralma dönüşümüne indirgenir.

Uyarı 1.5.6. [36] Metrik uzay üzerinde tanımlı simülasyon fonksiyonlar göz önüne alındığında her $\hat{f} \geq \hat{q} > 0$ için $\xi(\hat{f}, \hat{q}) < 0$ olduğu açıktır. $\mathcal{T}$ dönüşümü $\xi \in Z$ olmak üzere Z –daralma dönüşümü ise

$$\mathfrak{f}(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y) < \mathfrak{f}(x, y)$$

ifadesi sağlanır. Buradan Z –daralma dönüşümü kesin daralma dönüşümüdür ve dolayısıyla süreklidir.

Teorem 1.5.7. [36] $(\mathfrak{X}, \mathfrak{f})$ tam metrik uzay ve $\mathcal{T}: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ bir Z –daralma dönüşümü olsun. Bu durumda $\mathcal{T}$ bir tek sabit noktaya sahiptir. Ayrıca her $x_0 \in \mathfrak{X}$ için $x_n = \mathcal{T}x_{n-1}$ ile tanımlanan $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ Picard iterasyon dizisi $\mathcal{T}$ dönüşümünün sabit noktasına yakınsar.

Işık ve ark. [41] metrik uzaylarda Z –daralma ve hemen hemen daralma dönüşümlerini kullanarak hemen hemen Z –daralma dönüşümünü (almost Z –contraction) aşağıdaki gibi tanımlamışlardır.

Tanım 1.5.8. [41] $(\mathfrak{X}, \mathfrak{f})$ metrik uzay, $\mathcal{T}: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ bir dönüşüm ve $\mathcal{T} \in Z$ olsun. Her $x, y \in \mathfrak{X}$ için

$$N(x, y) = \min\{\mathfrak{f}(x, \mathcal{T}x), \mathfrak{f}(y, \mathcal{T}y), \mathfrak{f}(x, \mathcal{T}y), \mathfrak{f}(y, \mathcal{T}x)\}$$

iken

$$\xi(\mathfrak{f}(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y), \mathfrak{f}(x, y) + pN(x, y)) \geq 0$$

ifadesini sağlayan $p \geq 0$ sabiti varsa $\mathcal{T}$ dönüşümüne hemen hemen Z –daralma dönüşümü adı verilir.

Işık ve ark. [41] tam metrik uzaylarda hemen hemen Z –daralma dönüşümlerinin bir tek sabit noktaya sahip olduğunu ispatlamışlardır.

2017 yılında Mongkolkeha ve ark. [42] simülasyon fonksiyonları ve $\mathfrak{z} \geq 1$ reel sayısını göz önüne alarak ξ^* simülasyon fonksiyonunu aşağıdaki gibi tanımlamışlardır.

Tanım 1.5.9. [42] $\xi^*: [0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan ξ^* fonksiyonuna $\mathfrak{z} \geq 1$ sabiti ile simülasyon fonksiyonu denir.

$$(\xi_1^*) \xi^*(0,0) = 0 \text{ dir,}$$

$$(\xi_2^*) \xi^*(\mathfrak{z}\hat{f}, \hat{q}) < \hat{q} - \mathfrak{z}\hat{f} \text{ dir,}$$

$$(\xi_3^*) \{\hat{f}_n\}, \{\hat{q}_n\} \subset (0, \infty) \text{ olmak üzere } \lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{z}\hat{f}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{q}_n > 0 \text{ ve } \hat{f}_n \leq \hat{q}_n \text{ iken}$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \xi^*(\hat{f}_n, \hat{q}_n) < 0 \text{ dir.}$$

2018 yılında S. H. Cho [43] simülasyon fonksiyonların sınıfını genişletecek olan yeni bir simülasyon fonksiyon sınıfı tanımlamıştır ve bu sınıfa $\mathcal{Z}$ –simülasyon fonksiyon adı verilmiştir.

Tanım.1.5.10. [43] $g: [1, \infty) \times [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan g fonksiyonuna $\mathcal{Z}$ –simülasyon fonksiyon adı verilir.

$$(g_1) \square(1,1) = 1 \text{ dir,}$$

$$(g_2) \text{ Her } \hat{f}, \hat{q} > 1 \text{ için } \square(\hat{f}, \hat{q}) < \frac{\hat{q}}{\hat{f}} \text{ dir,}$$

$$(g_3) \{\hat{f}_n\}, \{\hat{q}_n\} \subset (1, \infty) \text{ dizileri için } \hat{f}_n \leq \hat{q}_n, (\forall n = 1, 2, 3, \dots) \text{ iken}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{f}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{q}_n > 1 \Rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} g(\hat{f}_n, \hat{q}_n) < 1 \text{ dir.}$$

Bu tanımdan her $\hat{f} > 1$ için $g(\hat{f}, \hat{f}) < 1$ olduğu açıktır.

Tüm $\mathcal{Z}$ –simülasyon fonksiyonlarının ailesi $\mathcal{Z}$ ile gösterilir.

Örnek 1.5.11. [43] Aşağıdaki gibi tanımlanan $(g_1), (g_2), (g_3): [1, \infty) \times [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları $\mathcal{Z}$ sınıfına aittir.

(i) Her $\hat{f}, \hat{q} \geq 1$ ve $k \in (0,1)$ için $g_1(\hat{f}, \hat{q}) < \frac{\hat{q}^k}{\hat{f}}$ dir,

(ii) $\phi: [1, \infty) \rightarrow [1, \infty)$ azalmayan ve alttan yarı sürekli bir fonksiyon ve $\phi^{-1}(\{1\}) = 1$ olsun. Her $\hat{f}, \hat{q} \geq 1$ için $g_2(\hat{f}, \hat{q}) < \frac{\hat{q}}{\hat{f}\phi(\hat{q})}$ dir,

(iii) $\forall \hat{f}, \hat{q} \geq 1$ ve $\lambda \in (0,1)$ için

$$g_3(\hat{f}, \hat{q}) = \begin{cases} 1 & \text{eğer } g(\hat{f}, \hat{q}) = 1 \\ \frac{\hat{q}}{2\hat{f}} & \text{eğer } \hat{q} < \hat{f} \\ \frac{\hat{q}^x}{2\hat{f}} & \text{diğer durumda} \end{cases}$$

dir.

Yakın zamanda, Öztürk ve ark. [44], $\mathcal{Z}$ –simülasyon fonksiyon fikrini, $\psi^{-1}(\{1\}) = 1$ eşitliğini sağlayan tüm azalmayan $\psi: [1, +\infty) \rightarrow [1, +\infty)$ fonksiyonların kümesi olarak gösterilen Ψ^* sınıfı aracılığıyla genişletmiştir.

Tanım 1.5.12. $\mathcal{Z}$, tüm $\eta: [1, \infty)^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümlerinin sınıfı olsun. $\psi \in \Psi^*$ fonksiyonu ve $x \geq 1$ sabiti

$$(\eta_1) \eta(1,1) = 1;$$

$$(\eta_2) \eta(\hat{c}, \hat{q}) < \frac{\psi(\hat{q})}{\psi(\hat{c})}, \quad \forall \hat{c}, \hat{q} > 1;$$

$$(\eta_{2'}) \eta(\hat{c}, \hat{q}) < \frac{\psi(\hat{q})}{\psi(b^x \hat{c})}, \quad \forall \hat{c}, \hat{q} > 1;$$

$$(\eta_3) \{ \hat{c}_n \}, \{ \hat{q}_n \} \subset (1, \infty) \text{ dizileri için } \hat{c}_n \leq \hat{q}_n, (\forall n = 1, 2, 3, \dots) \text{ iken}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{c}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{q}_n > 1 \Rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} \eta(\hat{c}_n, \hat{q}_n) < 1 \text{ dir,}$$

şartlarını sağlasın.

Eğer, η , $(\eta_2) - (\eta_3)$ şartlarını sağlarsa, genelleştirilmiş Ψ^* –simülasyon fonksiyonu olarak isimlendirilir. Benzer şekilde, sadece $(\eta_{2'}) - (\eta_3)$ şartları mevcut ise η fonksiyonuna genelleştirilmiş Ψ^*b –simülasyon fonksiyonu denir. Ayrıca, tüm $\hat{c} \geq 1$

için $\psi(\hat{c}) = \hat{c}$ olacak şekilde $(\eta_1) - (\eta_2) - (\eta_3)$ şartlarını sağlayan η fonksiyonu [44] de tanımlanmış olan $\mathcal{Z}$ –simülasyon fonksiyonudur.

Örnek 1.5.13. $\eta_a, \eta_b, \eta_c, \eta_d: [1, \infty) \times [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları genelleştirilmiş Ψ^*b –simülasyon fonksiyonlarıdır. Ayrıca, $b = 1$ için fonksiyonlar genelleştirilmiş Ψ^* –simülasyon fonksiyonudur.

(i) $\forall \hat{c}, \hat{q} \geq 1$ ve $\alpha \in (0,1)$ için

$$\eta_a(\hat{c}, \hat{q}) = \frac{\alpha\psi(\hat{q})}{\psi(b\hat{c})}$$

dir,

(ii) ϕ fonksiyonu $[1, \infty)$ aralığında azalmayan, alttan yarı sürekli ve $\phi^{-1}(\{1\}) = 1$ özelliğini sağlayan bir fonksiyon olsun. $\forall \hat{c}, \hat{q} \geq 1$ ve $\alpha \geq 1$ olmak üzere

$$\eta_b(\hat{c}, \hat{q}) = \frac{\psi(\hat{q})}{\psi(b^\alpha \hat{c})\phi(\hat{q})}$$

dir.

(iii) $\forall \hat{c}, \hat{q} \geq 1$ ve $\alpha \geq 1$ katsayısı olsun. O halde

$$\eta_c(\hat{c}, \hat{q}) = \frac{\phi(\hat{q})}{\psi(b^\alpha \hat{c})}$$

dir. Burada her $\hat{q} > 0$ için $\phi(\hat{q}) < \psi(\hat{q})$ olacak şekilde $\phi: [1, \infty) \rightarrow [1, \infty)$ sürekli bir fonksiyondur,

(iv) $\forall \hat{c}, \hat{q} \geq 1$, $p \in (0,1)$ ve $k \geq 1$ olmak üzere

$$\eta_d(\hat{c}, \hat{q}) = \begin{cases} 1 & \text{eğer } (\hat{c}, \hat{q}) = (1,1) \\ \frac{\psi(\hat{q})}{k\psi(\hat{c})}, & \text{eğer } \hat{q} < \hat{c} \\ \frac{[\psi(\hat{q})]^p}{\psi(\hat{c})}, & \text{diğer durumlar} \end{cases}.$$

dir.

1.5.3. α –geçişli (admissible) dönüşümü

Samet ve ark. [45] metrik sabit nokta teorisinde yoğun bir biçimde çalışılan α –geçişli (admissible) dönüşümleri tanımlamışlardır. Karapınar ve ark. [46] da bu kavramı aşağıda belirtildiği gibi genellemiştir.

Tanım 1.5.16. [45] $\mathfrak{X}$ boştan farklı bir küme, $T: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ bir dönüşüm ve $\alpha: \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \rightarrow [0, \infty)$ bir fonksiyon olsun.

$$\alpha(x, y) \geq 1 \text{ iken } \alpha(Tx, Ty) \geq 1$$

şartı sağlayan $x, y \in \mathfrak{X}$ noktaları varsa T dönüşümüne α –geçişli (admissible) dönüşüm denir.

Örnek 1.5.17. [45] $\mathfrak{X} = (0, \infty)$ olmak üzere $T: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ dönüşümü $x \in \mathfrak{X}$ için $Tx = \ln x$ ile tanımlansın. $\alpha: \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \rightarrow [0, \infty)$ dönüşümü ise

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} 2, & \text{eğer } x \geq y \text{ ise} \\ 0, & \text{eğer } x < y \text{ ise} \end{cases}$$

olsun. Bu durumda T dönüşümü α –geçişli dönüşümdür.

Tanım 1.5.18. [46] $\mathfrak{X}$ boştan farklı bir küme ve $T: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ bir dönüşüm olsun.

- (i) $\alpha(x, y) \geq 1$ iken $\alpha(Tx, Ty) \geq 1$,
- (ii) $\alpha(x, z) \geq 1$ ve $\alpha(z, y) \geq 1$ iken $\alpha(x, y) \geq 1$

olacak şekilde $x, y, z \in \mathfrak{X}$ noktaları ve $\alpha: \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu mevcut ise T dönüşümüne üçgensel (triangular) α –geçişli dönüşüm denir.

Örnek 1.5.19. [46] $\mathfrak{X} = \mathbb{R}$, $Tx = \sqrt[3]{x}$ ve $\alpha(x, y) = e^{x-y}$ olsun. Bu durumda T dönüşümü üçgensel (triangular) α –geçişli dönüşümdür. Eğer $\alpha(x, y) = e^{x-y} \geq 1$ ise $Tx \geq Ty$ olacak şekilde $x \geq y$ dir. Burada, $\alpha(Tx, Ty) = e^{Tx-Ty} \geq 1$ dir. Ayrıca, $\alpha(x, z) \geq 1$ ve $\alpha(z, y) \geq 1$ ise $x - z \geq 0$ ve $z - y \geq 0$ dir. Buradan $x - y \geq 0$ ve $\alpha(x, y) = e^{x-y} \geq 1$ dir.

1.5.4. E –daralma dönüşümleri

İlk olarak 2017 yılında A. Fulga ve A. M. Proca [47] tarafından Geraghty daralma dönüşümlerini genelleleyen kavram aşağıda verilmiştir.

Tanım 1.5.20. [47] $(\mathfrak{X}, f)$ metrik uzay ve $T: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in \mathfrak{X}$ için

$$E(x, y) = f(x, y) + |f(x, Tx) - f(x, Ty)|$$

olmak üzere

$$f(Tx, Ty) \leq \varphi(E(x, y))E(x, y)$$

eşitsizliğini sağlayan $\varphi \in B$ fonksiyonu var ise $\mathcal{T}$ dönüşümüne φ_E —daralma dönüşümü adı verilir

Teorem 1.5.21. [47] $(\mathfrak{X}, \mathfrak{f})$ tam metrik uzay ve $\mathcal{T}: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ bir φ_E —daralma dönüşümü olsun. Bu durumda $\mathcal{T}$ dönüşümü $\mathfrak{X}$ uzayında bir tek sabit noktaya sahiptir.

Aynı yıl Fulga ve Proca [48] E —daralma dönüşümünü ve aşağıdaki gibi tanımladıkları $F \in \mathcal{F}_E$ sınıfını göz önüne alarak bir sabit nokta teoremi ispatlamışlardır.

Fulga ve Proca [48] $F \in \mathcal{F}$ sınıfını aşağıdaki koşulları göz önüne alarak daha genel bir $\mathcal{F}_E$ sınıfını elde etmiştir.

$\mathcal{F}_E$ aşağıdaki koşulları sağlayan $F: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlarının bir ailesi olsun.

(F_E1) F kesin artandır, yani her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ için $\alpha < \beta$ iken $F(\alpha) < F(\beta)$ dir.

(F_E2) Her $t_0 > 0$ için $\kappa + \liminf_{t \rightarrow t_0} F(t) \leq \limsup_{t \rightarrow t_0} F(t)$ olacak şekilde $\kappa > 0$ vardır.

Teorem 1.5.22. [48] $(\mathfrak{X}, \mathfrak{f})$ tam metrik uzay ve $\mathcal{T}: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in \mathfrak{X}$ için

$$E(x, y) = \mathfrak{f}(x, y) + |\mathfrak{f}(x, \mathcal{T}x) - \mathfrak{f}(y, \mathcal{T}y)|$$

iken

$$\tau + F(\mathfrak{f}(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y)) \leq F(E(x, y))$$

olan $\tau > 0$, $\mathfrak{f}(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y) > 0$ ve $F \in \mathcal{F}_E$ varsa $\mathcal{T}$ dönüşümü $\mathfrak{X}$ uzayında bir tek sabit noktaya sahiptir.

Diğer yandan 2018 yılında Fulga ve Karapınar [49] Z —daralma ve E —daralma dönüşümlerini kullanarak aşağıdaki sabit nokta teoremini ispatlamışlardır.

Teorem 1.5.23. [49] $(\mathfrak{X}, \mathfrak{f})$ tam metrik uzay ve $\mathcal{T}: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in \mathfrak{X}$ için

$$E(x, y) = \mathfrak{f}(x, y) + |\mathfrak{f}(x, \mathcal{T}x) - \mathfrak{f}(y, \mathcal{T}y)|$$

iken

$$\mathcal{X}(\mathfrak{f}(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y), E(x, y)) \geq 0$$

ifadesini sağlayan $\mathcal{X} \in Z$ fonksiyonu varsa $\mathcal{T}$ dönüşümü $\mathfrak{X}$ uzayında bir sabit noktaya sahiptir.

2018 yılında A. M. Proca [50] E –daralma dönüşümünü maksimum operatörü ile genelleyerek yeni bir E_m –daralma dönüşümünü tanımlamıştır ve aşağıdaki sabit nokta sonucunu elde etmiştir.

Teorem 1.5.24. [50] $(\mathfrak{X}, \mathfrak{f})$ tam metrik uzay ve $\mathcal{T}: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in \mathfrak{X}$ için

$$E_m(x, y) = \max\{ \mathfrak{f}(x, y) + |\mathfrak{f}(x, \mathcal{T}x) - \mathfrak{f}(y, \mathcal{T}y)|; \\ \mathfrak{f}(y, \mathcal{T}y) + |\mathfrak{f}(x, y) - \mathfrak{f}(y, \mathcal{T}y)|; \\ \mathfrak{f}(y, \mathcal{T}y) + |\mathfrak{f}(x, y) - \mathfrak{f}(x, \mathcal{T}x)|; \\ \frac{\mathfrak{f}(x, \mathcal{T}y) + \mathfrak{f}(y, \mathcal{T}x) + |\mathfrak{f}(x, \mathcal{T}x) - \mathfrak{f}(y, \mathcal{T}y)|}{2} \}$$

iken

$$\mathfrak{f}(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y) \leq \beta(E_m(x, y))E_m(x, y)$$

olan $\beta \in B$ fonksiyonu varsa $\mathcal{T}$ dönüşümü $\mathfrak{X}$ uzayında bir tek sabit noktaya sahiptir.

2019 yılında A. M. Proca [51] numaralı referansta E_m –daralma dönüşümünün Ciric daralma dönüşümünden daha genel olduğunu örneklerle açıklamış ve aşağıdaki sabit nokta teoremini ispatlamıştır.

Teorem 1.5.25. [51] $\mathcal{T}, (\mathfrak{X}, \mathfrak{f})$ tam metrik uzayından kendisine tanımlı bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in \mathfrak{X}$ için

$$\mathfrak{f}(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y) \leq \alpha(E_m(x, y))$$

eşitsizliğini sağlayan $\alpha \in [0,1)$ sabiti varsa $\mathcal{T}$ dönüşümü $\mathfrak{X}$ uzayında bir tek sabit noktaya sahiptir.

1.5.5. c –kıyaslama ve b –kıyaslama fonksiyonları

$\varpi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlasın:

(ϖ_1) ϖ azalmayandır;

(ϖ_2) ϖ^n, ϖ' nin n . kez bileşkesini göstermek üzere $\sum_{n=1}^{\infty} \varpi^n(\rho) < \infty$ dir.

Herhangi bir $\rho > 0$ için, $\varpi(\rho) < \rho$ olmak üzere ϖ ye c –kıyaslama fonksiyonu adı verilir. Bu fonksiyonların ailesi $\mathcal{L}$ ile gösterilsin.

Berinde [52] 1996 yılında sabit nokta teoremlerinin b –metrik uzaylara genişletmek için bir c –kıyaslama fonksiyonu fikrini geliştirdi.

Tanım 1.5.26. [52] $\psi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ bir fonksiyonu ve $\tau \geq 1$ reel sayı olsun. Eğer (ψ_1) ψ azalmayan,

(ψ_2) her $\rho \in [0, \infty)$ ve $\vartheta \geq \vartheta_0$ için

$$\tau^{\vartheta+1}\psi^{\vartheta+1}(\rho) \leq \gamma\tau^{\vartheta}\psi^{\vartheta}(\rho) + \nu_{\vartheta},$$

olacak şekilde $\vartheta_0 \in \mathbb{N}$, $\gamma \in (0,1)$ ve $\sum_{\vartheta=1}^{\infty} \nu_{\vartheta}$ negatif olmayan terimlerin yakınsak serisi vardır, özellikleri sağlanır ise, ψ fonksiyonuna b –karşılaştırma fonksiyonu adı verilir. Bu fonksiyonların ailesi $\mathcal{L}_b$ ile gösterilsin.

Ayrıca, $\tau = 1$ olduğunda b –kıyaslama fonksiyonu ve c –kıyaslama fonksiyonu birbirlerine denk olurlar.

Önerme 1.5.27. [52] $\psi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ b –kıyaslama fonksiyonu olsun. Bu durumda, aşağıdakiler sağlanır:

(ψ_3) Her $\rho > 0$ için, $\sum_{\vartheta=0}^{\infty} \tau^{\vartheta}\psi^{\vartheta}(\rho)$ serisi yakınsaktır,

(ψ_4) $\rho \in [0, \infty)$ iken, $\rho_{\tau}(\rho) = \sum_{\vartheta=0}^{\infty} \tau^{\vartheta}\psi^{\vartheta}(\rho)$ ile tanımlı $\rho_{\tau}: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu artan ve 0 noktasında süreklidir.

1.5.6. θ –dönüşümleri

Jleli ve Samet [53] 2014 yılında Θ sınıfını aşağıdaki şekilde tanımlamışlardır:

Tanım 1.5.28. [53] $\Theta = \{\theta \mid \theta: (0, \infty) \rightarrow (1, \infty)\}$ ailesi aşağıdaki özellikleri sağlayan fonksiyonların bir ailesi olsun.

(θ_1) θ azalmayandır,

(θ_2) her bir $\{\iota_n\} \subset (0, \infty)$ dizisi için $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta(\iota_n) = 1 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \iota_n = 0^+$ dır,

(θ_3) $r \in (0,1)$ ve $l \in (0, \infty]$ için $\lim_{\iota \rightarrow 0^+} \frac{\theta(\iota)-1}{\iota^r} = l$ dir.

Θ sınıfı kullanılarak Banach daralma dönüşümünü genelleyen yeni bir sabit nokta teoremini metrik uzayların bir genellemesi olan dikdörtgensel metrik uzaylarda ispat edilmiş ve bu teoremden kullanılan daralma şartı θ –daralma şartı olarak isimlendirilmiştir.

Teorem 1.5.29. [53] $(\mathfrak{X}, \mathfrak{f})$ dikdörtgensel tam metrik uzay ve $\mathcal{T}: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in \mathfrak{X}$ için

$$\mathfrak{f}(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y) \neq 0 \Rightarrow \theta(\mathfrak{f}(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y)) \leq [\theta(\mathfrak{f}(x, y))]^k$$

olan $\theta \in \Theta$ fonksiyonu ve $k \in (0,1)$ sabiti varsa $\mathcal{T}$ dönüşümü $\mathfrak{X}$ uzayında bir tek sabit noktaya sahiptir.

Ayrıca (θ_3) koşulu yerine aşağıdaki koşul eklenerek yeni bir sınıf elde edilmiştir [54].

(θ_3') θ süreklidir.

(θ_1) , (θ_2) ve (θ_3') şartlarını sağlayan fonksiyonların sınıfı $\widehat{\Theta}$ ile gösterilir.

Örnek 1.5.30. [54] $x > 0$ için aşağıda verilen γ fonksiyonları $\widehat{\Theta}$ sınıfındadır. Aynı zamanda $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \Theta$ dir.

- (i) $\gamma_1(x) = e^x$ dir,
- (ii) $\gamma_2(x) = e^{\sqrt{x}}$ dir,
- (iii) $\gamma_3(x) = e^{\sqrt{x e^x}}$ dir,
- (iv) $\gamma_4(x) = \cosh x$ dir,
- (v) $\gamma_5(x) = 1 + \ln(1 + x)$ dir,
- (vi) $\gamma_6(x) = e^{x e^x}$ dir.

1.6. $\mathfrak{R}$ İkili Bağntı

2015 yılında, Alam ve Imdad [55] metrik uzay üzerinde ikili bağntı özelliğini ekleyerek klasik Banach daralma dönüşümünün farklı bir genellemesini elde etmişlerdir.

Tanım 1.6.1. [55] $\mathfrak{X}$ boştan farklı bir küme ve $\mathfrak{R}, \mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$ kümesinin boştan farklı bir alt kümesi olan bir ikili bağntı olsun. Herhangi iki $\varphi, \gamma \in \mathfrak{X}$ elemanları $\mathfrak{R}$ 'ye göre bağlantılılar ise o zaman $(\varphi, \gamma) \in \mathfrak{R}$ ya da $\varphi \mathfrak{R} \gamma$ olarak yazılır. Bu durumda her $\varphi, \gamma, \theta \in \mathfrak{X}$ için :

- (i) $\varphi \mathfrak{R} \varphi$ ise $\mathfrak{R}$ yansıyandır,
- (ii) $\varphi \mathfrak{R} \varphi$ ifadesi $\gamma \mathfrak{R} \varphi'$ 'yi gerektiriyor ise $\mathfrak{R}$ simetriktir,
- (iii) $\varphi \mathfrak{R} \gamma$ ve $\gamma \mathfrak{R} \varphi$ iken $\varphi = \gamma$ ise $\mathfrak{R}$ antisimetriktir,
- (iv) $\varphi \mathfrak{R} \gamma$ ve $\gamma \mathfrak{R} \theta$ iken $\varphi \mathfrak{R} \theta$ ise $\mathfrak{R}$ geçişlidir.

Tanım 1.6.2. [56] $\mathfrak{X}$ boştan farklı bir küme ve $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{X}$ kümesinde boştan farklı bir ikili bağıntı olsun. Bu durumda

- (i) eğer her $n \in \mathbb{N}$ için $\varphi_n \mathfrak{R} \varphi_{n+1}$ ise $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi bir $\mathfrak{R}$ –dizisidir.
- (ii) eğer $\varphi \mathfrak{R} \gamma \Rightarrow \mathcal{T}\varphi \mathfrak{R} \mathcal{T}\gamma$ ise $\mathcal{T}: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ dönüşümü $\mathfrak{R}$ –korumalıdır.

Tanım 1.6.3. [56] $(\mathfrak{X}, f)$ bir metrik uzay ve $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{X}$ kümesinde boştan farklı bir ikili bağıntı olsun. O halde, $(\mathfrak{X}, f, \mathfrak{R})$ üçlüsü $\mathfrak{R}$ –metrik uzayı olarak isimlendirilir.

Tanım 1.6.4. [57] Her $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ $\mathfrak{R}$ –dizisi için $\varphi_n \rightarrow \varphi_0$ iken $\mathcal{T}\varphi_n \rightarrow \mathcal{T}\varphi_0$ ise $\mathcal{T}: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ dönüşümü $\varphi_0 \in \mathfrak{X}$ ’ da $\mathfrak{R}$ –süreklidir.

Khalehoghli ve ark. [58] Banach sabit nokta teoremini, $\mathfrak{R}$ ikili bağıntı kavramını kullanarak aşağıdaki şekilde ifade etmişlerdir.

Teorem 1.6.5. [58] $\mathcal{T}: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ dönüşümü, $\mathfrak{R}$ – tam $\mathfrak{R}$ –metrik uzayda $\mathfrak{R}$ –korumalı ve $\mathfrak{R}$ –sürekl bir dönüşüm olsun, her $\gamma \in \mathfrak{X}$ ve $\varphi_0 \in \mathfrak{X}$ için $\varphi_0 \mathfrak{R} \gamma$ sağlansın.

Her $\varphi, \gamma \in \mathfrak{X}$ için $\varphi \mathfrak{R} \gamma$ olmak üzere

$$f(\mathcal{T}\varphi, \mathcal{T}\gamma) \leq r f(\varphi, \gamma), \quad r \in (0,1)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa $\mathcal{T}$ dönüşümüne $\mathfrak{R}$ –daralma dönüşümü adı verilir ve bu dönüşüm $\mathfrak{X}$ uzayı üzerinde tek bir sabit noktaya sahiptir.

Aşağıda verilen tanım Kolman ve ark. [59] tarafından verilmiştir.

Tanım 1.6.6. [59] $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{X}$ uzayında bir ikili bağıntı olsun. φ noktasından γ noktasına uzanan yol

- (i) $\varphi_0 = \varphi$ ve $\varphi_n = \gamma$ dır,
- (ii) her $j \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ için φ_n dizisi $\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n\} \subseteq \mathfrak{X}$ ile tanımlı bir dizidir.

φ noktasından γ ’ya uzanan tüm yolların kümesi $\Gamma(\varphi, \gamma, \mathfrak{R})$ ile gösterilir. n uzunluklu yol, $\mathfrak{X}$ kümesinin her zaman birbirinden farklı olması gerekmeyen $n+1$ tane elemanını içerir.

1.7. Ulam-Hyers Kararlılık Problemi

Ulam-Hyers kararlılığı, fonksiyonel denklemlerin yaklaşık çözümlerinin, gerçek çözümlere yakın olup olmadığını inceleyen bir konudur. Bu kavram, ilk olarak Stanislaw Ulam [60] tarafından 1960 yılında ortaya atılmış ve daha sonra Donald

Hyers [61] tarafından 1978'de Banach uzayları genelinde çözülerek geliştirilmiştir. Daha sonra bu problem literatüre Ulam-Hyers kararlılık problemi olarak girmiştir.[62] Rus [63] operatör denklemleri özelinde bu soruya cevap aramıştır.

Ulam-Hyers kararlılığı, yaklaşık çözümlerin tam çözüme ne kadar yakın olduğunu inceler. Yani, eğer bir fonksiyonel denklem tam olarak değil, hata payı ile sağlanıyorsa, yine de çözümün var olup olmadığı belirlenmeye çalışılır.

Bir daralma dönüşümü için Ulam-Hyers kararlılığı, yaklaşık olarak sabit nokta özelliğini sağlayan her fonksiyonun gerçekten bir sabit noktanın yakınında olup olmadığını inceleyen bir özelliktir.

Matematiksel olarak, şu problem incelenir:

$T: (\mathfrak{X}, f) \rightarrow (\mathfrak{X}, f)$ bir daralma dönüşümü olsun. Eğer bir $g: (\mathfrak{X}, f) \rightarrow (\mathfrak{X}, f)$ fonksiyonu için

$$f(Tx, gx) \leq \varepsilon, \quad \forall x \in \mathfrak{X},$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, gerçekten bir sabit nokta x^* var mıdır? Ve eğer varsa yaklaşık çözüm olan gx , gerçek sabit nokta olan x^* noktasına yakın mıdır ?

Tanım 1.7.1. [63]. $(\mathfrak{X}, f)$ bir metrik uzay ve $T: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ dönüşümü olsun. Sabit nokta denklemi

$$x = T(x) \tag{1.3}$$

aşağıdaki gibi bir $c_T > 0$ gerçek sayısı varsa Ulam-Hyers kararlıdır denir. Her $\varepsilon > 0$ ve

$$f(y, Ty) \leq \varepsilon \tag{1.4}$$

eşitsizliğini sağlayan her y^* için sabit nokta denklemi (1.3)' ü sağlayan bir x^* noktası

$$f(y^*, Tx^*) \leq c_T \varepsilon$$

olacak şekilde vardır.

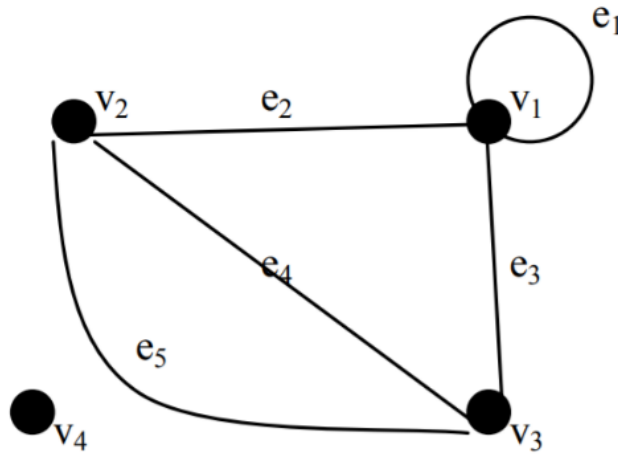
Eğer, her bir $\rho \in \mathbb{R}^+$ için $\psi(\rho) = \iota \rho$ eşitliğini sağlayacak şekilde bir $\iota > 0$ elemanı mevcut ise, sabit nokta denklemi (1.3) in Ulam-Hyers kararlı olduğu kabul edilir.

1.8. Graf Teorisi

Graf teorisinin uygulamaları modern hayatın karmaşık ve geniş kapsamlı birçok probleminin çözümü için kullanılmaktadır. Bu uygulamalar; ekonomi, yönetim bilimi, satış pazarlama, bilgi iletimi, taşıma planlanması gibi alanları kapsamaktadır. Graf teorisi problemleri tanımlama ve yapısal olarak ilişkileri belirlemede de faydalıdır.

Bu kısımda kullanılan graf bir fonksiyonun grafiği değildir. O halde graf nedir? Basitçe bir graf düğüm olarak adlandırılan noktalar ve her biri bu noktayı veya sadece noktanın kendisini birleştiren ve ayrıt (edge) olarak adlandırılan çizgiler topluluğudur. Örnek olarak şehirleri düğüm (verticle) ve onları bağlayan yolları ayrıt olarak gösteren yol haritaları verilebilir.

Bir grafi tanımlamak için öncelikle düğümlerin ve ayrıtların kümesinin tanımlamak gerekir. Daha sonra hangi ayrıtların hangi düğümleri bağladığı belirtilmelidir. Bir ayrıt her iki ucunda da bir düğüm olacak şekilde tanımlandığından graftaki tüm ayrıtların uç noktalarını bir düğüm ile ilişkilendirmek gerekir. Bu nedenle her bir e ayrıtı için $\{v_1, v_2\}$ kümesi tanımlanır. Bunun anlamı e ayrıtının v_1 ve v_2 düğümleri ile bağlılığıdır. $v_1 = v_2$ olabilir. Ayrıca $\{v_1, v_2\}$ kümesi düğümler kümesinin alt kümesidir.



Şekil 1.3. G grafının düğümleri [65].

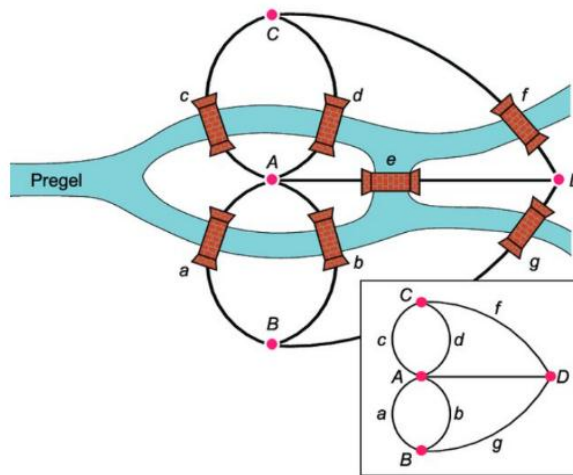
Şekil 1.3' de verilen G grafi incelendiğinde G grafının düğüm kümesinin $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ ve ayrıt kümesinin $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ olduğu açıktır. Örneğin, e_1 ayrıtının v_1 düğümü kendisine, e_2 ayrıtının ise v_1 ve v_2 düğümlerinin bağladığını gösterir.

Yukarıdaki şekilde görüldüğü gibi bir ayrıt bir düğümü yine kendisine bağlayacağı (loop) gibi, bir düğüm hiçbir ayrıtla bağlanmamış olabilir (v_4 düğümünde olduğu gibi). Ayrıca iki düğüm birden fazla ayrıt (multiple edge) ile de bağlanmış olabilir. Burada dikkat edilmesi gereken bir nokta bir graf ile onu temsil eden diyagram aynı değildir. Çünkü, graf bir fonksiyon ile birlikte iki kümeden oluşur. Eğer bir graf bir düğümü yine kendisine bağlayan (çevrim içermeyen) bir ayrıt ve aynı iki düğümü birden fazla bağlayan ayrıtlara sahip değilse basit graf olarak adlandırılır.

Bir G grafında eğer birbirinden ayrı düğümleri bağlayan bir yol varsa G grafına bağlantılıdır denir [65-66].

Örnek 1.8.1. [64] (Könnisberg köprüsü problemi) Euler 1736 yılında yazdığı makale ile graf teorisinin doğmasına sebep olmuştur. Bu makale Şekil 4 de gösterilen Könnisberg Köprü probleminin çözümünü içeriyordu. Pregel nehri Könnisberg kasabasının içinden akmaktadır. Nehrin ortasında nehrin kıyılarına ve birbirlerine köprü ile bağlı iki ada bulunmaktadır. Könnisberg kasabasının vatandaşları için problem kıyıların veya adaların birinden başlayıp köprülerden sadece bir kez geçerek başladığımız yere yürüyebilir miyiz?

Euler öncelikle Könnisberg coğrafyasının gerekli özelliklerinin bir graf ile gösterdi. Her bir nehir kıyısı ve adalar bir düğüm ile, köprüler ise ayrıtlar ile temsil edildi. Graf teorisi terimleri ile problem şu hale geldi: grafın tüm ayrıtları içeren kapalı bir yol var mıdır?



Şekil 1.4. Pregel nehri için graf [66].

Şimdi bu çalışmada kullanılacak olan graf teorisi ile ilgili notasyonlar verilecektir.

$(\mathfrak{X}, f)$ metrik uzay ve $\Lambda = \{(x, x) : x \in \mathfrak{X}\}$ kümesi $\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$ kartezyen çarpımının köşegenleri olsun. $\mathfrak{X}$ kümesinin elemanları ile

- $V(G) \rightarrow$ grafin noktalar kümesi
- $E(G) \rightarrow$ grafin doğrular kümesi

oluşturulsun. Bu durumda G grafi $(V(G), E(G))$ çifti ile tanımlanır. Bu basit yönlü bir graftır. Basit yönlü graf tüm düğüm noktalarını içerdiği için $\Lambda \subseteq E(G)$ dir.

Eğer G grafinin kenarlarının yönü değiştirilir ise G grafinin tersi, yani G^{-1} grafi elde edilir.

$$E(G^{-1}) = \{(x, y) \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \mid (y, x) \in E(G)\},$$

ve aynı zamanda $V(G^{-1}) = V(G)$ dir.

Eğer G grafinin yönü ihmal edilir ise $\tilde{G}$ yönsüz grafi elde edilir. Böylece $\tilde{G}$ grafinin doğrular kümesi simetrik olduğundan

$$E(\tilde{G}) = E(G) \cup E(G^{-1})$$

olarak tanımlanır. Diğer yandan $V(H) \subseteq V(G)$ ve $E(H) \subseteq E(G)$ ise H grafına G nin alt grafi denir. Eğer $\tilde{G}$ grafi bağlantılı ise G grafi zayıf bağlantılıdır denir.

Jachymski [67] metrik uzay üzerinde graf yapısını kullanarak Banach G –daralma dönüşümünü tanımlamış ve sabit nokta kavramının graf teorisine uygulamasının en temel sonucunu elde etmiştir.

Tanım 1.8.2. [67] $G, (\mathfrak{X}, f)$ üzerinde bir graf ve $\mathcal{T} : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in \mathfrak{X}$ için

- $\mathcal{T}$ dönüşümü G grafinin doğrularını korur. Yani, $(x, y) \in E(G) \Rightarrow (\mathcal{T}x, \mathcal{T}y) \in E(G)$ dir,
- $(x, y) \in E(G)$ için $f(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y) \leq \alpha f(x, y)$ ifadesini sağlayan $\alpha \in (0, 1)$ vardır,

şartları sağlanırsa $\mathcal{T}$ dönüşümüne Banach G –daralma veya daha sade bir şekilde G –daralma dönüşümü adı verilir.

Tanım 1.8.3. [67] $(\mathfrak{X}, f)$ bir tam metrik uzay olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan $(\mathfrak{X}, f, G)$ üçlüsüne düzenli (regular) uzay adı verilir.

- (i) $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathfrak{X}$ dizisi için $x_n \rightarrow x^*$ ve $(x_n, x_{n+1}) \in E(G)$ ise her $n \in \mathbb{N}$ için $(x_n, x^*) \in E(G)$ dir.
- (ii) $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathfrak{X}$ dizisi için $x_n \rightarrow x^*$ ve $(x_{n+1}, x_n) \in E(G)$ ise her $n \in \mathbb{N}$ için $(x^*, x_n) \in E(G)$ dir.

2015 yılında Alfuraidan [68], Banach sabit nokta teorisinin grafla donatılmış modüler metrik uzaylarda genellemesini elde etmiştir.

Tanım 1.8.4. [68] $(\mathfrak{X}, \omega)$ modüler metrik uzay ve $\mathfrak{X}_\omega$ uzayının boştan farklı bir alt kümesi C olsun. Her $x, y \in \mathfrak{X}$ için $\mathcal{T}: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ dönüşümü

- (i) G_ω grafinin doğrularını korur. Yani,

$$(x, y) \in E(G_\omega) \Rightarrow (\mathcal{T}x, \mathcal{T}y) \in E(G_\omega)$$

ve eğer herhangi bir $(x, y) \in E(G_\omega)$, $\alpha \in [0, 1)$ için

$$\omega_1(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y) \leq \alpha \omega_1(x, y)$$

eşitsizliği sağlanırsa $\mathcal{T}$ dönüşümüne G_ω –daralma dönüşümü adı verilir.

- (ii) Eğer $\mathcal{T}$ dönüşümü G_ω grafinin doğrularını korur ve herhangi bir $(x, y) \in E(G_\omega)$ için $\omega_1(x, y) < \varepsilon$ iken

$$\omega_1(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y) \leq \alpha \omega_1(x, y)$$

olan $\alpha \in [0, 1)$ sabiti mevcut ise $\mathcal{T}$ dönüşümüne (ε, α) – G_ω –düzenli yerel daralma dönüşümü adı verilir.



2. BAZI GENEL METRİK YAPILARI

Bu kısımda metrik aksiyomlarının değiştirilmesi sonucu elde edilen bazı genelleştirilmiş metrik uzay tanımlarına, örneklerine, topolojik yapıları ile bazı teoremlere yer verilmiştir.

2.1. b –Metrik Uzaylar

Metrik fonksiyonunun en popüler genelleştirmesinden birisi b –metrik fonksiyonudur. İlk olarak b –metrik uzay yapısı Bakhtin’nin [69] çalışmasında 1989 yılında görüldü. Fakat S. Czerwik’in [70,71] 1993 ve 1998 yıllarındaki çalışmalarından sonra pek çok yazarın dikkatini çekti. S. Czerwik, b –metrik fonksiyonunu aşağıdaki gibi ifade etmiştir.

Tanım 2.1.1. [70] $\mathfrak{X}$ boştan farklı bir küme ve $\tau \geq 1$ bir reel sayı olsun. Her $x, y, z \in \mathfrak{X}$ için $\varrho: \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu

$$(\varrho_1) \varrho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$$

$$(\varrho_2) \varrho(x, y) = \varrho(y, x),$$

$$(\varrho_3) \varrho(x, y) \leq \tau[\varrho(x, z) + \varrho(z, y)]$$

şartlarını sağlarsa ϱ fonksiyonuna b –metrik ve $(\mathfrak{X}, \varrho)$ ikilisine de b –metrik uzay denir.

Eğer $\tau = 1$ olarak seçilir ise b –metrik fonksiyonu ile metrik fonksiyonu çakışır.

Örnek 2.1.2. [70] $(\mathfrak{X}, f)$ metrik uzay ve $p > 1$ reel sayı olsun. Bu durumda

$$\varrho(x, y) = (f(x, y))^p$$

ile tanımlanan ϱ fonksiyonu $\tau = 2^{p-1}$ olmak üzere bir b –metrik fonksiyonudur. Tanım 2.1.1 den (ϱ_1) ve (ϱ_2) şartlarının sağlandığı açıktır. Eğer $1 < p < \infty$ ise $\varrho(x) = x^p (x > 0)$ fonksiyonunun konveksliğinden

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^p \leq \frac{1}{2}(a^p + b^p)$$

olur ve böylece $(a + b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$ sağlanır. Buradan, her $x, y, z \in \mathfrak{X}$ için

$$\begin{aligned} \varrho(x, y) &= (\mathfrak{f}(x, y))^p \leq (\mathfrak{f}(x, z) + \mathfrak{f}(z, y))^p \\ &\leq 2^{p-1}((\mathfrak{f}(x, z))^p + (\mathfrak{f}(z, y))^p) \\ &= 2^{p-1}(\varrho(x, z) + \varrho(z, y)) \end{aligned}$$

dir. Sonuç olarak (ϱ_3) şartı da sağlanmış olur. Böylece ϱ bir b –metriktir.

Örnek 2.1.3. [70] $(\mathfrak{X}, \mathfrak{f})$ metrik uzay, $\mathcal{L} \geq 0$, $\gamma > 0$ ve $\beta \geq 1$ olsun. Bu durumda

$$\mathfrak{f}'(x, y) = \mathcal{L}\mathfrak{f}(x, y) + \gamma\mathfrak{f}(x, y)^\beta$$

ile tanımlanan $\mathfrak{f}': \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu $\mathfrak{X}$ üzerinde bir metrik değildir. Ancak $(\mathfrak{X}, \mathfrak{f}')$ uzayı $\tau = 2^{\beta-1} \geq 1$ sabiti ile bir b –metrik uzaydır. Gerçekten her $x, y, z \in \mathfrak{X}$ için

$$\begin{aligned} \mathfrak{f}'(x, y) &= \mathcal{L}\mathfrak{f}(x, y) + \gamma\mathfrak{f}(x, y)^\beta \\ &\leq \mathcal{L}[\mathfrak{f}(x, z) + \mathfrak{f}(z, y)] + \gamma[\mathfrak{f}(x, z) + \mathfrak{f}(z, y)]^\beta \\ &\leq \mathcal{L}[\mathfrak{f}(x, z) + \mathfrak{f}(z, y)] + 2^{\beta-1}\gamma[\mathfrak{f}(x, z)^\beta + \mathfrak{f}(z, y)^\beta] \\ &\leq 2^{\beta-1}(\mathfrak{f}'(x, z) + \mathfrak{f}'(z, y)) \end{aligned}$$

eşitsizliğinden $(\mathfrak{X}, \mathfrak{f}')$ ikilisinin b –metrik uzay olduğu açıktır.

Örnek 2.1.4. $0 < p < 1$ olmak üzere $\ell_p(\mathbb{R})$ kümesi

$$\ell_p(\mathbb{R}) = \left\{ \{x_n\} \subset \mathbb{R}: \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\}$$

olarak tanımlansın. $x = \{x_n\}$, $y = \{y_n\} \in \ell_p(\mathbb{R})$ için

$$\varrho: \ell_p(\mathbb{R}) \times \ell_p(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow \varrho(x, y) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

fonksiyonu $\ell_p(\mathbb{R})$ üzerinde $\tau = 2^{\frac{1}{p}} > 1$ sabiti ile bir b –metriktir. Ayrıca yukarıdaki sonuç $0 < p < 1$ için $\mathfrak{X}$ bir Banach uzayı olmak üzere

$$\ell_p(\mathfrak{X}) = \left\{ \{x_n\} \subset \mathfrak{X} : \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p < \infty \right\}$$

uzayı için de doğrudur.

Örnek 2.1.5. $p \in (0,1)$ bir reel sayı olmak üzere

$$L_p[0,1] := \left\{ x: [0,1] \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_0^1 |x(t)|^p dt < 1 \right\}$$

kümesi verilsin. Bu durumda $x, y \in L_p[0,1]$ için

$$\varrho: L_p[0,1] \times L_p[0,1] \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$(x, y) \rightarrow \varrho(x, y) = \left(\int_0^1 |x(t) - y(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

fonksiyonu $L_p[0,1]$ üzerinde $\tau = 2^{\frac{1}{p}} > 1$ sabiti ile bir b –metriktir.

Örnek 2.1.6. $\mathfrak{X} = \{0,1,2,3,4\}$ olsun. Bu durumda

$$\varrho(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{eğer } x = y \text{ ise} \\ x + y^2 & \text{eğer } x \neq y \text{ ise} \end{cases}$$

ile tanımlanan $\varrho: \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu $\tau = \frac{49}{25}$ sabiti ile bir b –metriktir.

Örnek 2.1.7. [72] $\mathfrak{X} = \{0,1,2\}$ ve $m \geq 2$ bir reel sayı olsun. $\varrho: \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu

$$\varrho(0,0) = \varrho(1,1) = \varrho(2,2) = 0,$$

$$\varrho(1,0) = \varrho(0,1) = \varrho(1,2) = \varrho(2,1) = 1,$$

$$\varrho(2,0) = \varrho(0,2) = m$$

olarak tanımlansın. Bu durumda $(\mathfrak{X}, \varrho)$ ikilisi $\tau = \frac{m}{2}$ sabiti ile bir b –metrik uzaydır.

$(\mathfrak{X}, \varrho)$ bir b –metrik uzay olsun. Bu durumda $x \in \mathfrak{X}$ merkezli r yarıçaplı açık yuvar

$$B_\varrho(x, r) = \{y \in \mathfrak{X} \mid \varrho(x, y) < r\}$$

ile tanımlanır. Ayrıca $\mathcal{M}, \mathfrak{X}'$ in bir alt kümesi olsun. Her $x \in \mathcal{M}$ için $B_\varrho(x, r) \subseteq \mathcal{M}$ olan $r_x, > 0$ sayısı varsa $\mathcal{M}$ kümesine açıktır denir. $\mathfrak{X}$ kümesinin tüm açık alt

kümelerinin ailesi T_q olsun. Bu durumda T_q b –metrik için bir topoloji oluşturur.

Bunun yanı sıra $\varepsilon > 0$ için

$$\mathcal{U}_\varepsilon = \{B_q(x, \varepsilon) | x \in \mathfrak{X}, \varepsilon > 0\}$$

kümesi b –metrik topolojisi için bir tabandır.

Tanım 2.1.8. [70] $(\mathfrak{X}, q)$ uzayı $\tau \geq 1$ ile b –metrik uzay ve $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ bu uzayda bir dizi olsun.

- (i) $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin b –yakınsak olması için gerek ve yeter şart $n \rightarrow \infty$ için $q(x, x^*) \rightarrow 0$ olan $x^* \in \mathfrak{X}$ noktasının var olmasıdır. Bu durumda $\lim_{n \rightarrow \infty} q(x_n, x^*) = 0$ dir.
- (ii) $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin b –Cauchy olması için gerek ve şart $n, m \rightarrow \infty$ iken $q(x_n, x_m) \rightarrow 0$ olmasıdır. Yani, $\lim_{n \rightarrow \infty} q(x_n, x_m) = 0$ dır.
- (iii) b –metrik uzayın b –tam olması için gerek ve yeter şart bu uzayda alınan her b –Cauchy dizisinin bu uzaydaki bir noktaya b –yakınsak olmasıdır.

Önerme 2.1.9. [70] $(\mathfrak{X}, q)$ uzayı $s \geq 1$ ile b –metrik uzay ve $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ bu uzayda $x^* \in \mathfrak{X}$ noktasına b –yakınsak bir dizi olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur.

- (i) $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi bir tek limite sahiptir.
- (ii) $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi b –Cauchy dizisidir.

Adi metrik fonksiyonunun aksine b –metrik fonksiyonu genelde sürekli değildir. Bu sebeple aşağıdaki önerme b –metrik fonksiyonu için oldukça önemlidir.

Önerme 2.1.10. [73] $(\mathfrak{X}, q)$ uzayı $\tau \geq 1$ ile b –metrik uzay olsun. $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ve $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizileri sırasıyla x ve y noktalarına yakınsasın. Bu durumda

$$\frac{1}{\tau^2} q(x, y) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} q(x_n, y_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} q(x_n, y_n) \leq \tau q(x, y)$$

dir. Özellikle $x = y$ alınır ise $\lim_{n \rightarrow \infty} q(x, y_n) = 0$ olur. Ayrıca $z \in \mathfrak{X}$ için

$$\frac{1}{\tau} q(x, z) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} q(x_n, z) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} q(x_n, z) \leq \tau^2 q(x, z)$$

elde edilir.

Banach sabit nokta teoreminin b –metrik uzaylardaki genellemesi aşağıdaki gibidir.

Teorem 2.1.11. [73] $(\mathfrak{X}, \varrho)$ $\tau \geq 1$ katsayısı ile b –tam b –metrik uzay ve $\mathcal{T}: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in \mathfrak{X}$ ve $k \in [0,1)$ için

$$\tau \varrho(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y) \leq k \varrho(x, y)$$

eşitsizliği sağlansın. Bu durumda $\mathcal{T}$ dönüşümü $\mathfrak{X}$ uzayında bir tek sabit noktaya sahiptir. Ayrıca, $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ Picard iterasyon dizisi her $x_0 \in \mathfrak{X}$ için $\mathcal{T}$ dönüşümünün sabit noktasına yakınsaktır.

2.2. Modüler Metrik Uzaylar

Bu kısımda Chistyakov' un 2010 yılında tanımladığı modüler metrik kavramına yer verilmiştir. Chistyakov [74,75,76], ilk olarak 2008 yılında F –modülerden indirgenen modüler metrik kavramını vermiştir. Daha sonra boştan farklı bir küme üzerinde tanımladığı modüler kavramı tarafından üretilen metrik uzay yapısını tanımlanmış ve bu uzaya modüler metrik uzay adını vermiştir.

Tanım 2.2.1. [77] $\mathfrak{X}$ boştan farklı bir küme ve $\mu_\eta: (0, \infty) \times \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \rightarrow [0, \infty]$ fonksiyonu $x, y, z \in \mathfrak{X}$ için aşağıdaki şartları sağlasın:

$$(\mu_1) \text{ her } \eta > 0 \text{ için } \mu_\eta(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \text{ dir,}$$

$$(\mu_2) \text{ her } \eta > 0 \text{ için } \mu_\eta(x, y) = \mu_\eta(y, x) \text{ dir,}$$

$$(\mu_3) \text{ her } \eta, \ell > 0 \text{ için } \mu_{\eta+\ell}(x, y) \leq \mu_\eta(x, z) + \mu_\ell(z, y) \text{ dir.}$$

Bu durumda μ_η fonksiyonuna modüler metrik ve $\mathfrak{X}_{\mu_\eta} = (\mathfrak{X}, \mu_\eta)$ ikilisine de modüler metrik uzay denir. $\forall \eta > 0$ ve $x, y \in \mathfrak{X}$ için $\mu(\eta, x, y)$ gösterimi yerine $\mu_\eta(x, y)$ ifadesi kullanılacaktır.

Yukarıdaki tanımda (μ_1) şartı yerine her $x \in \mathfrak{X}$ için

$$(\mu_1') \text{ her } \eta > 0 \text{ için } \mu_\eta(x, x) = 0$$

ifadesi sağlanırsa μ_η fonksiyonuna pseudo modüler metrik denir. Her $x, y \in \mathfrak{X}$ için (μ_1') şartı ve x ve y noktalarına bağlı bir $\eta > 0$ sayısı için

$$(\mu_s) \mu_\eta(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$$

şartı da sağlandığında ise μ_η fonksiyonuna kesin (strict) modüler denir. Ayrıca modüler metrik fonksiyonu (μ_1) şartından daha zayıf olan

(μ_1'') bazı $\eta > 0$ için $\mu_\eta(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

şartını sağladığında ise μ_η fonksiyonuna regülerdir denir. Son olarak, her $x, y, z \in \mathfrak{X}$ ve $\eta, \ell > 0$ için (μ_3) şartı yerine

$$(\mu_3') \mu_{\eta+\ell}(x, y) \leq \frac{\eta}{\eta+\ell} \mu_\eta(x, z) + \frac{\ell}{\eta+\ell} \mu_\ell(z, y)$$

ifadesi sağlarsa μ_η fonksiyonuna konvektir denir.

Örnek 2.2.2. [77] $(\mathfrak{X}, f)$ bir metrik uzay olsun. Her $x, y \in \mathfrak{X}$ ve $\eta > 0$ için

$$\mu_\eta(x, y) = \frac{f(x, y)}{\eta}$$

ile tanımlanan μ_η fonksiyonu konveks modüler metrik fonksiyonudur. Ayrıca bu örnekle modüler metrik yapısının fiziksel yorumu yapılır. $x, y \in \mathfrak{X}$ noktaları arasında geçen zaman η ve $f(x, y)$, bu noktalar arasındaki uzaklığı belirtmek üzere

$$0 \leq \mu_\eta(x, y) < \infty$$

değeri ortalama hızı gösterir. Buradan hareketle aşağıdaki yorumlar yapılabilir.

(μ_1) $\mathfrak{X}$ kümesindeki x ve y noktalarının çakışık olması ($f(x, y) = 0$) için gerek ve yeter şart herhangi bir $\eta > 0$ zamanında x noktasından y noktasına hareketin hızının $\mu_\eta(x, y) = 0$ olmasıdır. Özetle, herhangi bir $\eta > 0$ zamanında hareket yoktur.

(μ_2) $f(x, y) = f(y, x)$ olduğundan herhangi $\eta > 0$ zamanında x noktasından y noktasına hareketin ortalama hızı ile ters yöndeki ortalama hızlar birbirine eşittir.

(μ_3) Zamanlar eşit olmak üzere x noktasından y noktasına hareket aşağıdaki gibi iki şekilde yapılsın.

- (i) x noktasından y noktasına olan harekette üçüncü bir $z \in \mathfrak{X}$ noktasından geçilsin,
- (ii) Doğrudan x noktasından y noktasına hareket etsin.

x noktasından z noktasına olan harekette geçen süre η ve z noktasından y noktasına olan harekette geçen süre ise ℓ olsun. Bu durumda ortalama hızlar sırasıyla $\mu_\eta(x, z)$ ve $\mu_\ell(z, y)$ dir. (i) durumundaki harekette harcanan zaman $\eta + \ell$ dir. Her iki harekette

de geçen süreler eşit olduğundan (ii) durumundaki ortalama hız $\mu_{\eta+\ell}(x, y)$ dir. Üçgen eşitsizliğinden $\mathfrak{f}(x, y) \leq \mathfrak{f}(x, z) + \mathfrak{f}(z, y)$ dir. Yani x ve y noktaları arasındaki uzaklık (ii) durumundaki yolların toplamını aşamayacağından her $x, y, z \in \mathfrak{X}$ ve $\eta, \ell > 0$ için

$$\mu_{\eta+\ell}(x, y) \leq \max\{\mu_{\eta}(x, z) + \mu_{\ell}(z, y)\} \leq \mu_{\eta}(x, z) + \mu_{\ell}(z, y)$$

biçiminde ifade edilir.

Örnek 2.2.3 [77] $(\mathfrak{X}, \mathfrak{f})$ bir metrik uzay olsun. Her $x, y \in \mathfrak{X}$ ve $\eta > 0$ için

$$\mu_{\eta}(x, y) = \begin{cases} 0, & \eta \geq \mathfrak{f}(x, y) \\ \infty, & \eta < \mathfrak{f}(x, y) \end{cases}$$

olarak tanımlanan μ_{η} fonksiyonu $\mathfrak{X}$ üzerinde konveks modülerdir. Bu örneğin bir sonucu olarak modüler metriğin görüntü kümesi de $[0, \infty]$ olarak tanımlanmıştır.

Örnek 2.2.4. [77] $\eta > 0$ ve pozitif reel sayıların $x = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}, y = \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}$ iki alt dizisi için

$$\mu_{\eta}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{|x_n - y_n|}{\eta} \right)^p, \quad 1 \leq p < \infty,$$

ile tanımlanan μ_{η} fonksiyonu kesin ve konveks modülerdir. Ayrıca aynı koşullar altında μ modülleri

$$\mu_{\eta}(x, y) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{|x_n - y_n|}{\eta} \right)^{\frac{1}{n}}$$

ile tanımlanırsa kesin konveks olmayan modülleri elde edilir.

$\mu_{\eta}(x, y)$ fonksiyonu $(0, \infty)$ üzerinde artmayan bir fonksiyondur. $(\mu_1) - (\mu_3)$ koşulları dikkate alındığında $0 < \ell < \eta$ için

$$\mu_{\eta}(x, y) \leq \mu_{\eta-\ell}(x, x) + \mu_{\ell}(x, y) \leq \mu_{\ell}(x, y)$$

yazılır. Bu ise istenendir.

Tanım 2.2.5. [77] $\mu, \mathfrak{X}$ üzerinde pseudo modüler ve $x_0 \in \mathfrak{X}$ olsun. Bu durumda

$$\mathfrak{X}_{\mu} = \mathfrak{X}_{\mu}(x_0) = \{x \in \mathfrak{X} : \mu_{\eta}(x, x_0) \rightarrow 0, (\eta \rightarrow \infty)\}$$

$$\mathfrak{X}_{\mu}^* = \mathfrak{X}_{\mu}^*(x_0) = \{x \in \mathfrak{X} : \exists \eta = \eta(x) > 0 \text{ öyle ki } \mu_{\eta}(x, x_0) < \infty\}$$

kümelerine (x_0 civarındaki) modüler uzaylar denir. Buradan $\mathfrak{X}_\mu \subset \mathfrak{X}_\mu^*$ olduğu açıktır. μ fonksiyonu $\mathfrak{X}$ üzerinde bir modüler ise $\mathfrak{X}_\mu$ modüler uzayı herhangi $x, y \in \mathfrak{X}_\mu$ için

$$\mathfrak{f}_\mu(x, y) = \inf \{ \eta > 0 : \mu_\eta(x, y) \leq \eta \}$$

metriği ile verilen ve μ tarafından üretilen metrik (nontrivial) ile donatılmıştır. Ayrıca $\mu, \mathfrak{X}$ üzerinde bir konveks modüler ise $\mathfrak{X}_\mu = \mathfrak{X}_\mu^*$ olur ve bu ortak kümeler herhangi $x, y \in \mathfrak{X}_\mu$ için

$$\mathfrak{f}_\mu^*(x, y) = \inf \{ \eta > 0 : \mu_\eta(x, y) \leq 1 \}$$

metriği ile donatılmıştır. Bu metriğe Luxemburg uzaklığı denir.

$\mathfrak{X}_\mu^*$ modüler metrik uzay üzerinde $x \in \mathfrak{X}_\mu^*$ merkezli $r > 0$ yarıçaplı açık yuvarı

$$B_\mu(x, r) = \{ y \in \mathfrak{X}_\mu^* \mid \mathfrak{f}_\mu(x, y) < r \}$$

kümesi ile tanımlanır. Ayrıca her $x \in U$ için $B_\mu(x, r) \subset U$ olan bir $r = r(x) > 0$ sayısı varsa U kümesine açık küme denir.

$\mathfrak{X}_\mu^*$ kümesi üzerindeki bütün açık alt kümelerinin ailesine $\mathfrak{f}_\mu$ metriği tarafından $\mathfrak{X}_\mu^*$ kümesi üzerine indirgenen metrik topoloji denir ve $T_{\mathfrak{f}_\mu}$ ile gösterilir.

Modüler metrik uzaya ait bazı ifadeler aşağıdaki gibidir.

Tanım 2.2.6.[77] $\mathfrak{X}_\mu^*$ bir modüler metrik uzay ve $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathfrak{X}_\mu^*$ bir dizi olsun.

- (i) $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin $x^* \in \mathfrak{X}_\mu^*$ noktasına μ –yakınsak olması için gerek ve yeter şart her $\eta > 0$ için $n \rightarrow \infty$ iken $\mu_\eta(x_n, x^*) \rightarrow 0$ olmasıdır. Ayrıca x^* noktasına $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin μ –limiti denir.
- (ii) $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin μ –Cauchy dizisi olması için gerek ve yeter koşul her $\eta > 0$ ve $n, m \rightarrow \infty$ için $\mu_\eta(x_n, x_m) \rightarrow 0$ olmasıdır.
- (iii) $\mathfrak{X}_\mu^*$ modüler metrik uzayında alınan her μ –Cauchy dizisi $\mathfrak{X}_\mu^*$ uzayında bir noktaya yakınsak ise $\mathfrak{X}_\mu^*$ modüler metrik uzayına μ –tamdır denir.
- (iv) $\mathcal{N} \subseteq \mathfrak{X}_\mu^*$ verilsin. $\mathcal{N}$ kümesindeki μ –yakınsak her dizinin limiti yine $\mathcal{N}$ kümesinde ise $\mathcal{N}$ kümesine μ –kapalıdır denir.
- (v) Her $\eta > 0$ için $\mathfrak{X}_\mu(\mathcal{N}) = \{ \mu_\eta(x, y) \mid x, y \in \mathcal{N} \} < \infty$ ise $\mathcal{N}$ kümesine μ –sınırlı küme denir.

Tanım 2.2.7. [78] $\mathfrak{X}_\mu^*$, bir modüler metrik uzay ve $\mathcal{T}: \mathfrak{X}_\mu^* \rightarrow \mathfrak{X}_\mu^*$ bir dönüşüm olsun. $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi $n \rightarrow \infty$ için $x_n \xrightarrow{\mu} x$ oluyor iken $\mathcal{T}x_n \xrightarrow{\mu} \mathcal{T}x$ oluyorsa $\mathcal{T}$ dönüşümüne μ –süreklî dönüşüm denir.

Teorem 2.2.8. [79] $\mathfrak{X}_\mu^*$ bir μ –tam modüler metrik uzay ve $\mathcal{T}: \mathfrak{X}_\mu^* \rightarrow \mathfrak{X}_\mu^*$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in \mathfrak{X}_\mu^*$ için

$$\mu_\eta(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y) \leq k \mu_\eta(x, y)$$

ifadesi $k \in [0, 1)$ için sağlansın. Her $\eta > 0$ için $\mu_\eta(x_0, \mathcal{T}x_0) < \infty$ olan $x_0 \in \mathfrak{X}_\mu^*$ elemanı varsa $\mathcal{T}$ dönüşümü $\mathfrak{X}_\mu^*$ uzayında bir tek sabit noktaya sahiptir.

Teorem 2.2.9. [79] $\mathfrak{X}_\mu^*$ bir μ –tam modüler metrik uzay ve $\mathcal{T}: \mathfrak{X}_\mu^* \rightarrow \mathfrak{X}_\mu^*$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in \mathfrak{X}_\mu^*$ için

$$\mu_\eta(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y) \leq \ell [\mu_{2\eta}(x, \mathcal{T}x) + \mu_{2\eta}(y, \mathcal{T}y)]$$

ifadesi $\ell \in [0, \frac{1}{2})$ için sağlansın. Her $\eta > 0$ için $\mu_\eta(x_0, \mathcal{T}x_0) < \infty$ olan $x_0 \in \mathfrak{X}_\mu^*$ elemanı varsa $\mathcal{T}$ dönüşümü $\mathfrak{X}_\mu^*$ uzayında bir tek sabit noktaya sahiptir.

2.3. Modüler b –Metrik Uzaylar

Modüler metrik ve b –metrik kavramlar gözönüne alınarak Alaca ve ark. [80] modüler b –metrik yapısını ve modüler b –metrik uzayı tanımlamışlardır. Elde ettikleri bu yeni yapıda Banach sabit nokta teoremini de ifade ve ispat etmişlerdir.

Tanım 2.3.1.[80] $\mathfrak{X}$ boştan farklı bir küme ve $\tau \geq 1$ bir reel sayı olsun. Her $x, y, z \in \mathfrak{X}$ için $\omega_\varsigma: (0, \infty) \times \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \rightarrow [0, \infty]$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlasın:

$$(\omega_1) \text{ her } \varsigma > 0 \text{ için } \omega_\varsigma(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \text{ dir,}$$

$$(\omega_2) \text{ her } \varsigma > 0 \text{ için } \omega_\varsigma(x, y) = \omega_\varsigma(y, x) \text{ dir,}$$

$$(\omega_3) \text{ her } \varsigma, \ell > 0 \text{ için } \omega_{\varsigma+\ell}(x, y) \leq \tau [\omega_\varsigma(x, z) + \omega_\ell(z, y)] \text{ dir.}$$

Bu durumda ω_ς fonksiyonuna modüler b –metrik ve $\mathfrak{X}_{\omega_\varsigma} = (\mathfrak{X}, \omega_\varsigma)$ ikilisine de modüler b –metrik uzay denir.

Modüler b –metrik uzay modüler metrik uzayın bir genellemesidir. Gerçekten, $\tau = 1$ alınır ise bu iki tanımın çakışacağı açıktır.

Örnek 2.3.2. [80] $0 < p < 1$ olmak üzere ℓ_p kümesi

$$\ell_p = \left\{ \{x_n\} \subset \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\}$$

ile tanımlansın. $x = x_n, y = y_n \in \ell_p$ için

$$q : \ell_p \times \ell_p \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow q(x, y) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

b –metrik fonksiyonu verilsin. $\omega_\zeta \in (0, \infty)$ için $\omega_\zeta(x, y) = \frac{q(x, y)}{\zeta}$ ile tanımlı

$\omega : (0, \infty) \times \ell_p \times \ell_p \rightarrow [0, \infty]$ fonksiyonu $\tau = 2^{\frac{1}{p}} > 1$ sabiti olmak üzere bir modüler b –metriktir.

Örnek 2.3.3. [80] $(\mathfrak{X}, \mu)$ bir modüler metrik uzay ve $p > 1$ bir reel sayı olsun.

$$\omega_\zeta(x, y) = (\mu(x, y))^p$$

ile tanımlanan ω_ζ fonksiyonu $\tau = 2^{p-1}$ ile bir modüler b –metrik fonksiyonudur.

Örnek 2.3.4. [80] $\mathfrak{X} = [0, \infty)$ kümesi üzerinde tanımlı $\omega : (0, \infty) \times \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \rightarrow [0, \infty]$ fonksiyonu her $x, y \in \mathfrak{X}$ için

$$\omega_\zeta(x, y) = \frac{(e^x - e^y)^2}{\zeta}$$

biçiminde tanımlansın. Bu durumda (ω_1) ve (ω_2) koşullarının sağlandığı açıktır. Her $x, y, z \in \mathfrak{X}$ için

$$\begin{aligned} \omega_{\zeta+\ell}(x, y) &= \frac{(e^x - e^y)^2}{\zeta + \ell} = \frac{(e^x - e^y + e^z - e^z)^2}{\zeta + \ell} \\ &= \frac{(e^x - e^z)^2}{\zeta + \ell} + \frac{(e^y - e^z)^2}{\zeta + \ell} + \frac{2(e^x - e^z)(e^y - e^z)}{\zeta + \ell} \\ &\leq \frac{(e^x - e^z)^2}{\zeta} + \frac{(e^y - e^z)^2}{\ell} + \frac{(e^x - e^z)^2}{\zeta} + \frac{(e^y - e^z)^2}{\ell} \\ &= 2 \left[\frac{(e^x - e^z)^2}{\zeta} + \frac{(e^y - e^z)^2}{\ell} \right] \end{aligned}$$

$$\leq 2[\omega_{\zeta}(x, z) + \omega_{\ell}(z, y)]$$

ifadesi ile (ω_3) şartı da sağlandığından $\tau = 2$ ile $(\mathfrak{X}, \omega)$ bir modüler b –metrik uzaydır. Ancak dikkat edilir ise ω bir modüler metrik değildir. Sonuç olarak her modüler metrik uzay bir modüler b –metrik uzaydır. Fakat bu örnekte olduğu gibi tersinin doğru olması gerekmez.

Tanım 2.3.5. [80] $(\mathfrak{X}, \omega_{\zeta})$ bir modüler b –metrik uzay olsun. Bu durumda

$$\mathfrak{X}_{\mu_{\zeta}} = \{x, y \in \mathfrak{X} : y \sim x\}$$

kümesi bir modüler kümedir. Burada $x, y \in \mathfrak{X}$ için $\mathfrak{X}$ üzerinde $\sim$, $x \sim y \Leftrightarrow \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \omega_{\zeta}(x, y) = 0$ olacak şekilde bir denklik bağıntısıdır. Ayrıca $x_0 \in \mathfrak{X}$ için

$$\mathfrak{X}_{\omega}^* = \mathfrak{X}_{\omega}^*(x_0) = \{x \in \mathfrak{X} : \exists \zeta = \zeta(x) > 0 \text{ öyle ki } \omega_{\zeta}(x, x_0) < \infty\}$$

kümesi $(x_0$ civarında) bir modüler b –metrik uzaydır.

Modüler b –metrik uzaydaki ω –yakınsaklık, ω –Cauchy ve ω –tamlik gibi topolojik kavramlar modüler metrik uzay ile benzer şekilde ifade edilir.

Modüler b –metrik uzayda sabit nokta teorisi ile ilgili bazı tanım ve teoremler aşağıdaki gibi verilir.

Tanım 2.3.6. [80] $(\mathfrak{X}, \omega_{\zeta})$ bir modüler b –metrik uzay ve $\mathcal{T} : \mathfrak{X}_{\omega}^* \rightarrow \mathfrak{X}_{\omega}^*$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in \mathfrak{X}_{\omega}^*$ ve $\zeta > 0$ için

$$\omega_{\zeta}(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y) \leq k \omega_{\zeta}(x, y)$$

olan $k \in [0, 1)$ varsa $\mathcal{T}$ dönüşümüne ω –daralma dönüşümü adı verilir.

Teorem 2.3.7.[80] $(\mathfrak{X}, \omega_{\zeta})$ uzayı $\tau \geq 1$ ile bir ω –tam modüler b –metrik uzay olsun. $k \in [0, 1)$ ve $\tau.k < 1$ olmak üzere $\mathcal{T} : \mathfrak{X}_{\omega}^* \rightarrow \mathfrak{X}_{\omega}^*$ bir ω –daralma dönüşümü olarak tanımlansın. $\omega_{\zeta}(x, \mathcal{T}x) < \infty$ olan $x = x(\zeta) \in \mathfrak{X}_{\omega}^*$ elemanı varsa $x_n \rightarrow x^*$ dır ve x^* noktası $\mathcal{T}$ dönüşümünün bir tek sabit noktasıdır.

Teorem 2.3.8. [80] $(\mathfrak{X}, \omega_{\zeta})$ uzayı $\tau \geq 1$ sabiti ile bir ω –tam modüler b –metrik uzay ve $\mathcal{T} : \mathfrak{X}_{\omega}^* \rightarrow \mathfrak{X}_{\omega}^*$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in \mathfrak{X}_{\omega}^*$ ve $\zeta > 0$ için

$$\omega_{\zeta}(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y) \leq k[\omega_{\zeta}(x, \mathcal{T}x) + \omega_{\zeta}(y, \mathcal{T}y)]$$

eşitsizliğini sağlayan $\tau \cdot \kappa \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ olan $\kappa \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ var olsun. Bu durumda $\omega_\zeta(x, \mathcal{T}x) < \infty$ olan $x = x(\zeta) \in \mathfrak{X}_\omega^*$ elemanı varsa $x_n \rightarrow x^*$ dır ve x^* noktası $\mathcal{T}$ dönüşümünün bir tek sabit noktasıdır.

Teorem 2.3.9. [80] $(\mathfrak{X}, \omega_\zeta)$ uzayı $\tau \geq 1$ sabiti ile bir ω –tam modüler b –metrik uzayve $\mathcal{T}: \mathfrak{X}_\omega^* \rightarrow \mathfrak{X}_\omega^*$ bir dönüşüm olsun. Bu durumda her $x, y \in \mathfrak{X}_\omega^*$ ve $\zeta > 0$ için

$$\omega_\zeta(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y) \leq \tau [\omega_\zeta(x, \mathcal{T}y) + \omega_\zeta(y, \mathcal{T}x)]$$

ifadesini sağlayan $\tau \cdot \tau \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ olan $\tau \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ var olsun. Bu durumda $\omega_\zeta(x, \mathcal{T}x) < \infty$ olan $x = x(\zeta) \in \mathfrak{X}_\omega^*$ elemanı varsa $x_n \rightarrow x^*$ dır ve x^* noktası $\mathcal{T}$ dönüşümünün bir tek sabit noktasıdır.

2.4. Asimetrik Modüler Uzaylar

2019 yılında Girgin ve ark. [81] asimetrik modüler metrik uzay olarak isimlendirilen yeni bir genelleştirilmiş modüler metrik yapısı tanımlamışlardır. Bu uzayların belli özelliklerini çalışmışlar ve aynı zamanda bazı sabit nokta teoremleri ispatlamışlardır. Bununla birlikte, Archimedean olmayan asimetrik modüler metrik yapısını da geliştirilerek sonuçlar elde etmişlerdir. Bu uzayda yönlendirilmiş bir graf kullanarak simülasyon fonksiyonlarını içeren sabit nokta teorisi ile ilgili sonuçlar sunmuşlardır.

Tanım 2.4.1. [81] $\mathfrak{X}$ boştan farklı bir küme ve $q^\mu: (0, \infty) \times \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \rightarrow [0, \infty]$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y, z \in \mathfrak{X}$ ve $\eta, \ell > 0$ için q^μ dönüşümü

$$(q^\mu_1) \ x = y \Leftrightarrow q^\mu_\eta(x, y) = 0,$$

$$(q^\mu_2) \ q^\mu_{\eta+\ell}(x, y) \leq [q^\mu_\eta(x, z) + q^\mu_\ell(z, y)]$$

şartlarını sağlıyorsa q^μ dönüşümüne $\mathfrak{X}$ üzerinde asimetrik modüler metrik ve $\mathfrak{X}_{q^\mu} = (\mathfrak{X}, q^\mu)$ ikilisine de bir asimetrik modüler metrik uzay denir. Bu yapı kolaylık bakımından *QMMS* şeklinde kısaltılmıştır. Ayrıca, (q^μ_2) yerine aşağıdaki şart kullanılırsa, Archimedean olmayan uzay yapısı elde edilir, yani $\mathfrak{X}_{q^\mu}$ uzayı Archimedean olmayan asimetrik modüler metrik uzay olur (kısaca *nonArc-QMMS* ile gösterilir.):

$$(q^{\tilde{\mu}}_{2'}) \ q^{\tilde{\mu}}_{\max\{\eta, \ell\}}(x, y) \leq q^{\tilde{\mu}}_\eta(x, z) + q^{\tilde{\mu}}_\ell(z, y).$$

Eğer q^μ dönüşümü (q^μ_1) şartı yerine her $x \in \mathfrak{X}$ için

$$(q^\mu_{1'}) \text{ her } \eta > 0 \text{ için } q^\mu_\eta(x, x) = 0$$

şartını sağlarsa q^μ dönüşümüne asimetric pseudo modüler metrik, $\mathfrak{X}_{q^\mu}$ uzayına da asimetric pseudo modüler metrik uzay adı verilir. q^μ dönüşümü (q^μ_1) şartı yerine

$$(q^\mu_{1''}) \text{ bazı } \eta > 0 \text{ için } q^\mu_\eta(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

şartını sağlarsa $\mathfrak{X}_{q^\mu}$ uzayına regülerdir denir. Son olarak q^μ dönüşümü her $x, y, z \in \mathfrak{X}$ ve $\eta, \ell > 0$ için

$$(q^\mu_3) \quad q^\mu_{\eta+\ell}(x, y) \leq \frac{\eta}{\eta+\ell} q^\mu_\eta(x, z) + \frac{\ell}{\eta+\ell} q^\mu_\ell(z, y)$$

ifadesi sağlanırsa q^μ dönüşümüne konvektir denir. Bu kavramlar non-Archimedean olmayan asimetric modüler metrik uzaylar içinde geçerlidir.

Örnek 2.4.2. $\mathfrak{X} = [0, \infty]$ ve q^μ fonksiyonu

$$q^\mu_\eta(x, y) = \begin{cases} \frac{x-y}{\eta}, & x \geq y \text{ ise} \\ 1, & x < y \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda, $\eta = \frac{1}{3}$ ve $\ell = \frac{2}{3}$ olmak üzere $\mathfrak{X}_{q^\mu}$ asimetric modüler metrik uzaydır ancak $q^\mu_\eta(0,1) = 1$ ve $q^\mu_\eta(1,0) = \frac{1}{3}$ olduğundan modüler metrik uzay değildir.

Aşağıda asimetric modüler metrik uzayların bazı özellikleri verilmiştir.

q^μ asimetric modüler metrik olmak üzere $q^{\mu^{-1}}_\eta(x, y) = q^\mu_\eta(x, y)$ olarak tanımlanan $q^{\mu^{-1}}$ fonksiyonu asimetric modüler metriğin eşleniğidir.

Eğer q^μ , asimetric modüler metrik fonksiyonu ise $q^{\mu^E} = q^\mu \vee q^{\mu^{-1}}$ yani

$$q^{\mu^E}(x, y) = \max\{q^\mu(x, y), q^\mu(y, x)\}$$

ile tanımlanan q^{μ^E} bir modüler metrik fonksiyondur.

Asimetric modüler metrik fonksiyonunun simetri özelliğini sağlamaması tamlık, kompaktlık ve total sınırlılık kavramların asimetric modüler metrik uzayların yeniden tanımlanmasını gerektirmiştir. Bu yapılarda birden fazla yakınsaklık, tamlık, Cauchy dizisi olma ve kompaktlık gibi tanımlar verilmiştir. [81]



3. ASİMETRİK MODÜLER b –METRİK UZAYLARDA, SİMÜLATİF DARALMA DÖNÜŞÜMÜ İÇİN SABİT NOKTA SONUÇLARI

Bu bölümde, asimetrik modüler b –metrik ile Archimedean olmayan asimetrik modüler b –metrik uzay yapıları tanımlanmış ve topolojik özellikler hakkında bazı bilgiler ortaya konmuştur. Archimedean olmayan asimetrik modüler b –metrik uzaylarda simülasyon ve kıyaslama fonksiyonları yardımıyla elde edilen daralma dönüşümleri için sabit nokta teoremleri sunulmuştur. Elde edilen teoremleri Ulam-Hyers kararlılık problemine ve bir Caputo tipli doğrusal olmayan kesirli diferansiyel denklemin çözümünün tekliğinin elde edilmesine uygulanmıştır. Buradaki sonuçlar [87] numaralı referanstaki çalışmada sunulmuştur.

3.1. Asimetrik-Modüler b –Metriğin Bazı Topolojik Özellikleri

Bu bölümde, asimetrik modüler b –metrik uzay yapısı b –metrik fonksiyonu üzerinden asimetrik modüler b –metrik uzayı olarak isimlendirilerek aşağıdaki gibi genişletilmiştir.

Tanım 3.1.1. $\mathfrak{X}$ boştan farklı bir küme ve $q^\mu: (0, \infty) \times \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \rightarrow [0, \infty]$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y, z \in \mathfrak{X}$, $\eta, \ell > 0$ ve $\tau \geq 1$ için q^μ dönüşümü

$$(q^\mu_1) \quad x = y \Leftrightarrow q^\mu_\eta(x, y) = 0,$$

$$(q^\mu_2) \quad q^\mu_{\eta+\ell}(x, y) \leq \tau \left[q^\mu_\eta(x, z) + q^\mu_\ell(z, y) \right]$$

şartlarını sağlıyorsa q^μ dönüşümüne $\mathfrak{X}$ üzerinde asimetrik modüler b –metrik ve $\mathfrak{X}_{q^\mu} = (\mathfrak{X}, q^\mu)$ ikilisine de bir asimetrik modüler b –metrik uzay denir ve bu uzay QM_bMS ile gösterilir.

Ayrıca, q^μ dönüşümü (q^μ_1) yerine

$$(q^\mu_{1'}) \quad \text{her } \eta > 0 \text{ ve } x \in \mathfrak{X} \text{ için } q^\mu_\eta(x, x) = 0$$

ifadesini sağlarsa q^μ dönüşümüne asimetrik pseudo modüler b –metrik denir.

Üstelik, (ϱ^μ_1) yerine aşağıdaki daha zayıf kriterin geçerli olması durumunda $\mathfrak{X}$ üzerinde, ϱ^μ dönüşümüne regülerdir denir:

$$(\varrho^\mu_3) \text{ bazı } \eta > 0 \ x = y \Leftrightarrow \varrho^\mu_\eta(x, y) = 0.$$

Ek olarak, ϱ^μ dönüşümü her $x, y, z \in \mathfrak{X}$ ve $\eta, \ell > 0$ için

$$(\varrho^\mu_4) \varrho^\mu_{\eta+\ell}(x, y) \leq \frac{\eta}{\eta+\ell} \varrho^\mu_\eta(x, z) + \frac{\ell}{\eta+\ell} \varrho^\mu_\ell(z, y)$$

ifadesini sağlıyorsa ϱ^μ dönüşümüne konvektir denir.

Tanım 3.1. Asimetrik modüler b –metrik uzaylarda (ϱ^μ_2) şartının yerine her $x, y, z \in \mathfrak{X}$ ve $\eta, \ell > 0$ için

$$(\varrho^{\tilde{\mu}}_5) \varrho^{\tilde{\mu}}_{\max\{\eta, \ell\}}(x, y) \leq \tau \left[\varrho^{\tilde{\mu}}_\eta(x, z) + \varrho^{\tilde{\mu}}_\ell(z, y) \right]$$

ifadesi sağlanırsa $\mathfrak{X}_{\varrho^{\tilde{\mu}}}$ Archimedean olmayan asimetrik modüler b - metrik uzay denir ve kısaca *nonArc- QM_bMS* ile gösterilir.

$(\varrho^{\tilde{\mu}}_5)$ şartı (ϱ^μ_2) aksiyomunu gerektirdiğinden, her Archimedean olmayan asimetrik modüler b - metrik uzay, asimetrik modüler b - metrik uzaydır.

Önerme 3.1.3. Yukarıda verilen bilgileri dikkate alınırsa:

- (i) ϱ^μ , $\mathfrak{X}$ üzerinde asimetrik modüler b –metrik olmak üzere $\varrho^{\mu^{-1}}_\eta(x, y) = \varrho^\mu_\eta(y, x)$ olarak tanımlanan $\varrho^{\mu^{-1}}$ dönüşümü, $\mathfrak{X}$ üzerinde asimetrik modüler b –metriğin eşleniğidir,
- (ii) eğer ϱ^μ , $\mathfrak{X}$ üzerinde asimetrik pseudo modüler b –metrik ise

$$\varrho^{\mu^E} = \varrho^{\mu^{-1}} \vee \varrho^\mu \text{ yani,}$$

$$\varrho^{\mu^E}_\eta(x, y) = \max\{\varrho^\mu_\eta(x, y), \varrho^\mu_\eta(y, x)\},$$

ile tanımlanan ϱ^{μ^E} fonksiyonu bir modüler b –metrik fonksiyonudur, ifadeleri elde edilir.

ϱ^μ , $\mathfrak{X}$ üzerinde asimetrik modüler b –metriği, $r > 0$ ve $\eta > 0$ için

$$B_\eta(x, \varepsilon) = \{y \in \mathfrak{X} : \varrho^\mu_\eta(x, y) < \varepsilon\}$$

olan $\{B_\eta(x, r): x \in \mathfrak{X}, r > 0 \text{ ve } \eta > 0\}$ açık ϱ^μ –yuvarlarının ailesine baz olarak sahip olan $\mathfrak{X}$ üzerinde T_{ϱ^μ} topolojisini oluşturur. Eğer, T_{ϱ^μ} , $\mathfrak{X}$ üzerinde

T_1 topolojisi ise ϱ^μ , $\mathfrak{X}$ üzerinde T_1 asimetrik modüler b –metriktir.

Tanım 3.1.4. $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi $\mathfrak{X}_{\varrho^\mu}$ asimetrik modüler b –metrik uzayında $x \in \mathfrak{X}$ noktasına yakınsasın. Bu durumda $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi

- (i) $x_n \rightarrow x \Leftrightarrow \varrho^\mu_\eta(x, x_n) \rightarrow 0$ ise ϱ^μ –yakınsaktır veya soldan yakınsaktır.
- (ii) $x_n \rightarrow x \Leftrightarrow \varrho^\mu_\eta(x_n, x) \rightarrow 0$ ise $\varrho^{\mu^{-1}}$ –yakınsaktır veya sağdan yakınsaktır.
- (iii) $\varrho^\mu_\eta(x, x_n) \rightarrow 0$ ve $\varrho^\mu_\eta(x_n, x) \rightarrow 0$ ise ϱ^{μ^E} –yakınsaktır.
- (iv) $\varepsilon > 0$ verildiğinde her $p, k \in \mathbb{N}$ $p_\varepsilon \leq k \leq p$ ($p_\varepsilon \leq p \leq k$) özelliğindeki, $\eta > 0$ için $\varrho^\mu_\eta(x_k, x_p) < \varepsilon$ olan $p_\varepsilon \in \mathbb{N}$ varsa sol(sağ) $\varrho^\mu - \mathcal{K}$ –Cauchy dizisi denir.
- (v) Her $\varepsilon > 0$ verildiğinde $p, k \in \mathbb{N}$ $p, k \geq n_\varepsilon$ için $\varrho^\mu_\eta(x_p, x_k) < \varepsilon$ olan $p_\varepsilon \in \mathbb{N}$ varsa ϱ^{μ^E} –Cauchy dizisi denir.

Tanım 3.1.5. $\mathfrak{X}_{\varrho^\mu}$ bir asimetrik modüler b –metrik uzayı ve $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi $\mathfrak{X}_{\varrho^\mu}$ uzayında bir dizi olsun.

- (i) $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi ϱ^μ fonksiyonuna göre soldan $\varrho^\mu - \mathcal{K}$ –Cauchy dir $\Leftrightarrow \varrho^{\mu^{-1}}$ e göre sağdan $\varrho^\mu - \mathcal{K}$ –Cauchy dizisidir.
- (ii) $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi $\varrho^{\mu^E} - \text{Cauchy}$ dir $\Leftrightarrow$ Bu dizi soldan ve sağdan $\varrho^\mu - \mathcal{K}$ –Cauchy dizisidir.

Tanım 3.1.6. $\mathfrak{X}_{\varrho^\mu}$ bir asimetrik modüler b –metrik uzay olsun.

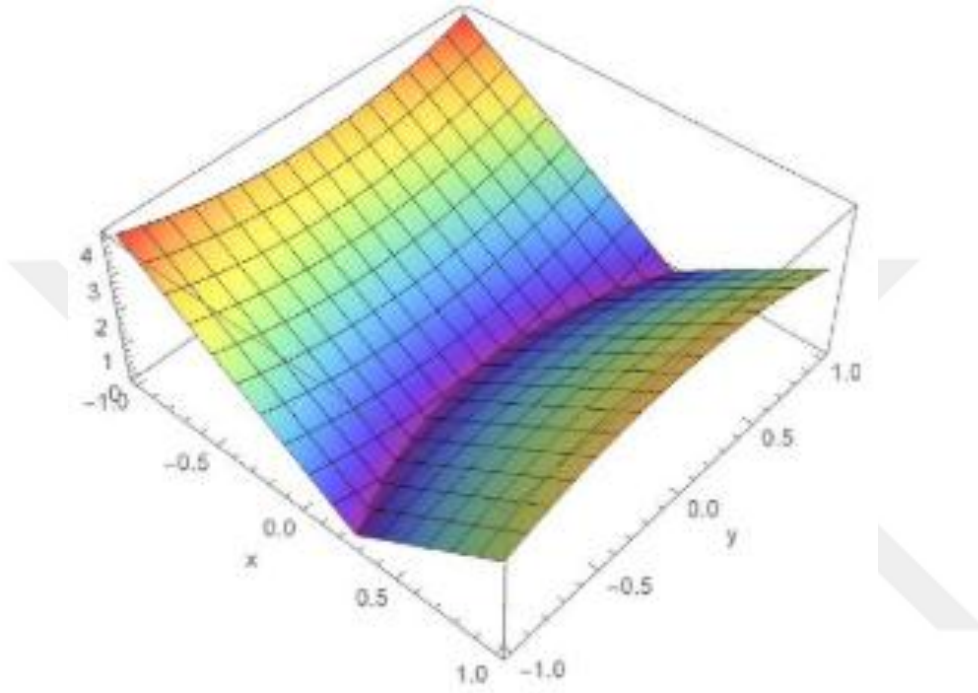
- (i) Eğer her soldan $\varrho^\mu - \mathcal{K}$ –Cauchy dizisi ϱ^μ –yakınsak ise soldan $\varrho^\mu - \mathcal{K}$ –tamdır.
- (ii) Eğer her $\varrho^\mu - \mathcal{K}$ –Cauchy dizisi ϱ^{μ^E} –yakınsak ise ϱ^μ –Smyth- tamdır.
- (iii) Eğer $\mathfrak{X}_{\varrho^{\mu^E}}$ bir tam modüler b –metrik uzayı ise ϱ^μ –bitam uzaydır.

Her ϱ^μ –Smyth-tam asimetrik modüler b –metrik uzayı soldan $\varrho^\mu - \mathcal{K}$ –tam uzaydır. Fakat tersi her zaman doğru değildir.

Örnek 3.1.7. $\mathfrak{X} = [-1, 1]$ olsun. $\varrho^\mu: (0, \infty) \times \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \rightarrow [0, \infty]$ asimetrik modüler b –metriği

$$\varrho_{\eta}^{\mu}(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \text{ ise} \\ \frac{|x - \frac{y}{2}|^2}{\eta}, & \text{diğer durumda} \end{cases} \quad (3.1)$$

ile tanımlansın. $[-1,1]$ aralığında $\eta = 1$ iken (3.1) denkleminin 3D grafiği aşağıda verilen şekildeki gibidir:



Şekil 3.1. (3.1) ifadesinin 3D gösterimi.

Her $x, y \in \mathfrak{X}$ için $\varrho_{\eta}^{\mu}(x, y) \geq 0$ ve $\eta > 0$ için $\varrho_{\eta}^{\mu}(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ olsun. Ayrıca, $\eta > 0$ için $\varrho_{\eta}^{\mu}(x, y) = \varrho_{\eta}^{\mu}(y, x) \Leftrightarrow x = y$ olduğundan ϱ^{μ} simetriktir. $x = 1, y = 0$ ve $z = -1$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned} \varrho_{\eta}^{\mu}(x, z) &= \varrho_{\eta}^{\mu}(1, -1) = \frac{9}{4\eta} \\ &\leq \tau \left[\varrho_{\eta}^{\mu}(x, y) + \varrho_{\eta}^{\mu}(y, z) \right] \\ &= \tau \left[\varrho_{\eta}^{\mu}(1, 0) + \varrho_{\eta}^{\mu}(0, -1) \right] \\ &= \tau \frac{5}{4\eta} \end{aligned}$$

ifadesi $\tau = 1$ için sağlanmamaktadır, yani ϱ^{μ} fonksiyonu Archimedian olmayan asimetric modüler metrik fonksiyonu değildir. Burada, $\tau \geq 2$ için ϱ^{μ} fonksiyonunun

Archimedean olmayan asimetrik modüler b –metrik fonksiyonudur ve sonuç olarak, $\mathfrak{X}_{\varrho^\mu}$ Archimedean olmayan asimetrik modüler b –metrik uzaydır.

3.2. Asimetrik-Modüler b –Metrik Uzaylarda Sabit Nokta Teoremleri

Bölüm boyunca, aşağıda yer alan özellik kullanılmıştır.

(Ω) $\mathcal{T}$, üçgensel α –geçişli dönüşüm ve $\alpha(x_0, \mathcal{T}x_0) \geq 1$ olan $x_0 \in \mathfrak{X}_{\varrho^\mu}$ elemanı vardır.

Tanım 3.2.1. $\mathfrak{X}_{\varrho^\mu}$ bir asimetrik modüler b –metrik uzay ve $\mathcal{T}: \mathfrak{X}_{\varrho^\mu} \rightarrow \mathfrak{X}_{\varrho^\mu}$ dönüşüm olsun. Her $x, y \in \mathfrak{X}_{\varrho^\mu}$ ve $\alpha: \mathfrak{X}_{\varrho^\mu} \times \mathfrak{X}_{\varrho^\mu} \rightarrow [0, \infty)$ için

$$\mathcal{M}(x, y) = \max \left\{ \varrho^\mu_\eta(x, y), \varrho^\mu_\eta(x, \mathcal{T}x), \varrho^\mu_\eta(y, \mathcal{T}y) \right\} \quad (3.2)$$

iken

$$\xi \left(\alpha(x, y) \varrho^{\tilde{\mu}}_\eta(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y), \psi(\mathcal{M}(x, y)) \right) \geq 0 \quad (3.3)$$

ifadesini sağlayan $\psi \in \mathcal{L}_b$ ve $\xi \in \mathcal{Z}$ fonksiyonları varsa $\mathcal{T}$ dönüşümüne genelleştirilmiş simülatif $\mathcal{Z}_\psi$ –daralma dönüşümü adı verilir.

Teorem 3.2.2. $\mathfrak{X}_{\varrho^{\tilde{\mu}}}$ uzayı $\tau > 1$ katsayısı ile bir $\varrho^{\tilde{\mu}}$ –Smyth– tam Archimedean olmayan asimetrik modüler b –metrik uzay olsun. $\mathcal{T}$, genelleştirilmiş simülatif $\mathcal{Z}_\psi$ –daralması aşağıdaki ifadeleri sağlasın:

- (i) (Ω) özelliği sağlanır,
- (ii) $\mathcal{T}$ dönüşümü süreklidir.

Bu durumda, $\mathcal{T}$ dönüşümü $\mathfrak{X}_{\varrho^{\tilde{\mu}}}$ uzayında bir sabit noktaya sahiptir.

İspat. $x_0 \in \mathfrak{X}_{\varrho^{\tilde{\mu}}}$ keyfi noktası $\alpha(x_0, \mathcal{T}x_0) \geq 1$ olan ifadesini sağlasın. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_{n+1} = \mathcal{T}x_n$ olacak şekilde $\mathfrak{X}_{\varrho^{\tilde{\mu}}}$ uzayında $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi verilsin. Eğer bazı $n \in \mathbb{N}$ için $x_{n+1} = x_n$ ise, $x^* = x_n$ noktası $\mathcal{T}$ dönüşümü için bir sabit nokta olur ve ispat elde edilir. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için $x_{n+1} \neq x_n$ dir.

$\mathcal{T}$ dönüşümü üçgensel α –geçişli dönüşüm olduğundan

$$\alpha(x_0, x_1) = \alpha(x_0, \mathcal{T}x_0) \geq 1 \Rightarrow \alpha(\mathcal{T}x_0, \mathcal{T}x_1) = \alpha(x_1, \mathcal{T}x_2) \geq 1$$

ifadesi sağlanır. Benzer şekilde devam edilerek her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1 \quad (3.4)$$

olur. (3.2) ve (3.3) ifadelerinden

$$\begin{aligned} 0 &\leq \xi \left(\alpha(x_n, x_{n-1}) \varrho_{\tilde{\mu}}^{\tilde{\mu}}(Tx_n, Tx_{n-1}), \psi(\mathcal{M}(x_n, x_{n-1})) \right) \\ &< \psi(\mathcal{M}(x_n, x_{n-1})) - \alpha(x_n, x_{n-1}) \varrho_{\tilde{\mu}}^{\tilde{\mu}}(Tx_n, Tx_{n-1}) \end{aligned} \quad (3.5)$$

bulunur. (3.5) ifadesinden de,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(x_{n-1}, x_n) &= \max \left\{ \varrho_{\tilde{\mu}}^{\tilde{\mu}}(x_{n-1}, x_n), \varrho_{\tilde{\mu}}^{\tilde{\mu}}(x_{n-1}, Tx_{n-1}), \varrho_{\tilde{\mu}}^{\tilde{\mu}}(x_n, Tx_n) \right\} \\ &= \max \left\{ \varrho_{\tilde{\mu}}^{\tilde{\mu}}(x_{n-1}, x_n), \varrho_{\tilde{\mu}}^{\tilde{\mu}}(x_{n-1}, x_n), \varrho_{\tilde{\mu}}^{\tilde{\mu}}(x_n, x_{n+1}) \right\} \\ &= \max \left\{ \varrho_{\tilde{\mu}}^{\tilde{\mu}}(x_{n-1}, x_n), \varrho_{\tilde{\mu}}^{\tilde{\mu}}(x_n, x_{n+1}) \right\} \end{aligned}$$

olacak şekilde

$$\varrho_{\tilde{\mu}}^{\tilde{\mu}}(x_n, x_{n+1}) \leq \alpha(x_n, x_{n-1}) \varrho_{\tilde{\mu}}^{\tilde{\mu}}(x_n, Tx_{n-1}) < \psi(\mathcal{M}(x_n, x_{n-1})) \quad (3.6)$$

olur.

Eğer, $\mathcal{M}(x_{n-1}, x_n) = \varrho_{\tilde{\mu}}^{\tilde{\mu}}(x_n, x_{n+1})$ ise (3.6) ifadesinden

$$\varrho_{\tilde{\mu}}^{\tilde{\mu}}(x_n, x_{n+1}) \leq \psi \left(\varrho_{\tilde{\mu}}^{\tilde{\mu}}(x_n, x_{n+1}) \right) < \varrho_{\tilde{\mu}}^{\tilde{\mu}}(x_n, x_{n+1})$$

çelişkisi elde edilir. Buradan, $\mathcal{M}(x_{n-1}, x_n) = \varrho_{\tilde{\mu}}^{\tilde{\mu}}(x_{n-1}, x_n)$ dir ve

$$\varrho_{\tilde{\mu}}^{\tilde{\mu}}(x_n, x_{n+1}) \leq \psi \left(\varrho_{\tilde{\mu}}^{\tilde{\mu}}(x_{n-1}, x_n) \right)$$

şeklinde yazılır. Benzer şekilde devam edildiğinde, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\varrho_{\tilde{\mu}}^{\tilde{\mu}}(x_n, x_{n+1}) \leq \psi^n \left(\varrho_{\tilde{\mu}}^{\tilde{\mu}}(x_0, x_1) \right) \quad (3.7)$$

bulunur. (3.7) ifadesi $(\varrho_{\tilde{\mu}}^{\tilde{\mu}})_2$ aksiyomu ve uzayın Archimedean olmaması özelliklerinden her $p \geq 1$ için

$$\varrho_{\tilde{\mu}}^{\tilde{\mu}}(x_n, x_{n+p}) \leq \tau \varrho_{\tilde{\mu}}^{\tilde{\mu}}(x_n, x_{n+1}) + \tau^2 \varrho_{\tilde{\mu}}^{\tilde{\mu}}(x_{n+1}, x_{n+2}) + \dots$$

$$\begin{aligned}
& +\tau^{p-1}\varrho_{\eta}^{\tilde{\mu}}(x_{n+p-2}, x_{n+p-1}) + \tau^p\varrho_{\eta}^{\tilde{\mu}}(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \\
& \leq \tau\psi^n\left(\varrho_{\eta}^{\tilde{\mu}}(x_0, x_1)\right) + \tau^2\psi^{n+1}\left(\varrho_{\eta}^{\tilde{\mu}}(x_0, x_1)\right) + \dots \\
& \quad +\tau^{p-1}\psi^{n+p-2}\left(\varrho_{\eta}^{\tilde{\mu}}(x_0, x_1)\right) + \tau^p\psi^{n+p-1}\left(\varrho_{\eta}^{\tilde{\mu}}(x_0, x_1)\right) \\
& = \frac{1}{\tau^{n-1}}\left[\tau^n\psi^n\left(\varrho_{\eta}^{\tilde{\mu}}(x_0, x_1)\right) + \tau^{n+1}\psi^{n+1}\left(\varrho_{\eta}^{\tilde{\mu}}(x_0, x_1)\right) + \dots\right. \\
& \quad \left.+ \tau^{n+p-2}\psi^{n+p-2}\left(\varrho_{\eta}^{\tilde{\mu}}(x_0, x_1)\right) + \tau^{n+p-1}\psi^{n+p-1}\left(\varrho_{\eta}^{\tilde{\mu}}(x_0, x_1)\right)\right]
\end{aligned}$$

sağlanır.

$Z_n = \sum_{k=0}^n \tau^k \psi^k \left(\varrho_{\eta}^{\tilde{\mu}}(x_0, x_1) \right)$, $n \geq 1$ için tanımlansın. Burada

$$\varrho_{\eta}^{\tilde{\mu}}(x_n, x_{n+p}) \leq \frac{1}{\tau^{n-1}} [Z_{n+p-1} - Z_{n-1}], \quad p \geq 1 \quad (3.8)$$

eşitsizliği elde edilir.

Buradan, Önerme 1.5.26 dan, $\sum_{k=0}^n \tau^k \psi^k \left(\varrho_{\eta}^{\tilde{\mu}}(x_0, x_1) \right)$ serisinin yakınsak olduğu bulunur. Bu durumda, $\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n = Z \in [0, \infty)$ elemanı vardır. $\tau \geq 1$ ve (3.8) eşitsizliği kullanılırsa, $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin soldan $\varrho^{\tilde{\mu}} - \mathcal{K}$ -Cauchy dizisi olduğu bulunur. $\mathfrak{X}_{\varrho^{\tilde{\mu}}}$ bir $\varrho^{\tilde{\mu}} - \text{Smyth}$ - tam Archimedean olmayan asimetric modüler b -metrik uzayı olduğundan, $x_n \rightarrow x^*, n \rightarrow \infty$ olacak şekilde $x^* \in \mathfrak{X}_{\varrho^{\tilde{\mu}}}$ elemanı vardır. $\mathcal{T}$ dönüşümünün sürekliliğinden $x_{n+1} = \mathcal{T}x_n \rightarrow \mathcal{T}x^*, n \rightarrow \infty$ olur. Son olarak, limitin tek olması gerektiğinden $x^* = \mathcal{T}x^*$ eşitliği elde edilir, yani $x^* \in \mathfrak{X}_{\varrho^{\tilde{\mu}}}$, $\mathcal{T}$ dönüşümünün bir sabit noktasıdır.

Bir sonraki teoremdede, $\mathcal{T}$ dönüşümünün sürekliliği göz ardı edilerek yeni bir sonuç elde edilmiştir.

Teorem 3.2.3. $\mathfrak{X}_{\varrho^{\tilde{\mu}}}$ uzayı $\tau > 1$ ile bir $\varrho^{\tilde{\mu}} - \text{Smyth}$ - tam Archimedean olmayan asimetric modüler b -metrik uzay olsun. $\mathcal{T}$ dönüşümü genelleştirilmiş simülatif Z_{ψ} -daralması aşağıdaki ifadeleri sağlasın:

- (i) (Ω) özelliği sağlansın,

(ii) Eğer $\mathfrak{X}_{\varrho^{\tilde{\mu}}}$ uzayındaki $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi, her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$, ve $n \rightarrow \infty$ iken $x_n \rightarrow x$ ise her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha(x_n, x) \geq 1$ dir.

Bu durumda, $\mathcal{T}$ dönüşümü $\mathfrak{X}_{\varrho^{\tilde{\mu}}}$ uzayında bir sabit noktaya sahiptir.

İspat. Teorem 3.2.2. nin ispatındaki gibi devam edilerek $\mathfrak{X}_{\varrho^{\tilde{\mu}}}$ bir $\varrho^{\tilde{\mu}}$ –Smyth– tam Archimedean olmayan asimetrik modüler b –metrik uzayında $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi soldan $\varrho^{\tilde{\mu}} - \mathcal{K}$ –Cauchy dizisi olduğu elde edilir. Yani, $n \rightarrow \infty$ iken $x_n \rightarrow x^*$ olacak şekilde $x^* \in \mathfrak{X}_{\varrho^{\tilde{\mu}}}$ elemanı vardır. (3.4) ifadesi ve (ii) özelliği kullanılarak, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\alpha(x_n, x^*) \geq 1 \quad (3.9)$$

bulunur. $x^* \neq \mathcal{T}x^*$ olsun. Üçgen eşitsizliği, (3.2), (3.3) ve (3.9) ifadeleri kullanılarak,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \xi \left(\alpha(x_n, x^*) \varrho_{\eta}^{\tilde{\mu}}(\mathcal{T}x_n, \mathcal{T}x^*), \psi(\mathcal{M}(x_n, x^*)) \right) \\ &= \xi \left(\alpha(x_n, x^*) \varrho_{\eta}^{\tilde{\mu}}(x_{n+1}, \mathcal{T}x^*), \psi(\mathcal{M}(x_n, x^*)) \right) \\ &< \psi(\mathcal{M}(x_n, x^*)) - \alpha(x_n, x^*) \varrho_{\eta}^{\tilde{\mu}}(x_{n+1}, \mathcal{T}x^*) \end{aligned} \quad (3.10)$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(x_n, x^*) &= \max \left\{ \varrho_{\eta}^{\tilde{\mu}}(x_n, x^*), \varrho_{\eta}^{\tilde{\mu}}(x_n, \mathcal{T}x_n), \varrho_{\eta}^{\tilde{\mu}}(x^*, \mathcal{T}x^*) \right\} \\ &= \max \left\{ \varrho_{\eta}^{\tilde{\mu}}(x_n, x^*), \varrho_{\eta}^{\tilde{\mu}}(x_n, x_{n+1}), \varrho_{\eta}^{\tilde{\mu}}(x^*, \mathcal{T}x^*) \right\} \end{aligned} \quad (3.11)$$

iken

$$\begin{aligned} \varrho_{\eta}^{\tilde{\mu}}(x_{n+1}, \mathcal{T}x^*) &= \varrho_{\eta}^{\tilde{\mu}}(\mathcal{T}x_n, \mathcal{T}x^*) \leq \alpha(x_n, x^*) \varrho_{\eta}^{\tilde{\mu}}(\mathcal{T}x_n, \mathcal{T}x^*) \\ &< \psi(\mathcal{M}(x_n, x^*)) \end{aligned} \quad (3.12)$$

elde edilir. (3.10), (3.11) ve (3.12) ifadelerinde $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa, ψ fonksiyonunun özelliğinden

$$\varrho_{\eta}^{\tilde{\mu}}(x^*, \mathcal{T}x^*) = 0$$

bulunur ki bu da bir çelişkidir, yani $x^* = \mathcal{T}x^*$ olmalıdır.

Teorem 3.2.1. ve Teorem 3.2.2.' de dönüşümün sabit noktasının varlığı için yeterli şartlar verilmiş olup bu şartlar sabit noktanın tekliği için yeterli şartlar değildir. Dönüşümlerin sabit noktasının tekliğinin elde edilebilmesi için aşağıda verilen özelliğe ihtiyaç duyulmaktadır.

(3) ÖZELLİĞİ: Her $x, y \in \text{Fix}\{\mathcal{T}\}$ için $\alpha(x, y) \geq 1$ dir.

Teorem 3.2.4. Teorem 3.2.1. in (sırasıyla Teorem 3.2.2.nin) koşullarının yanı sıra, (3) özelliği eklenirse $\mathcal{T}$ dönüşümü $\mathfrak{X}_{\varrho^{\tilde{\mu}}}$ uzayında tek sabit noktaya sahiptir.

İspat. $y^* \in \mathfrak{X}_{\varrho^{\tilde{\mu}}}$ noktası $\varrho^{\tilde{\mu}}_{\eta}(x^*, y^*) \neq 0$ olacak şekilde $\mathcal{T}$ dönüşümünün diğer bir sabit noktası olsun. (3) özelliğinden $\alpha(x^*, y^*) \geq 1$ yazılır. $\mathcal{T}$ dönüşümü genelleştirilmiş simülatif Z_{ψ} –daralma dönüşümü olduğundan

$$0 \leq \xi \left(\alpha(x^*, y^*) \varrho^{\tilde{\mu}}_{\eta}(\mathcal{T}x^*, \mathcal{T}y^*), \psi(\mathcal{M}(x^*, y^*)) \right) \\ < \psi(\mathcal{M}(x^*, y^*)) - \alpha(x^*, y^*) \varrho^{\tilde{\mu}}_{\eta}(\mathcal{T}x^*, \mathcal{T}y^*)$$

ile

$$\mathcal{M}(x^*, y^*) = \max \left\{ \varrho^{\tilde{\mu}}_{\eta}(x^*, y^*), \varrho^{\tilde{\mu}}_{\eta}(x^*, \mathcal{T}x^*), \varrho^{\tilde{\mu}}_{\eta}(y^*, \mathcal{T}y^*) \right\} \\ = \varrho^{\tilde{\mu}}_{\eta}(x^*, y^*)$$

olmak üzere

$$\varrho^{\tilde{\mu}}_{\eta}(x^*, y^*) = \varrho^{\tilde{\mu}}_{\eta}(\mathcal{T}x^*, \mathcal{T}y^*) \leq \alpha(x^*, y^*) \varrho^{\tilde{\mu}}_{\eta}(\mathcal{T}x^*, \mathcal{T}y^*) \\ < \psi(\mathcal{M}(x^*, y^*))$$

ifadeleri denktir.

Böylece

$$\varrho^{\tilde{\mu}}_{\eta}(x^*, y^*) \leq \psi \left(\varrho^{\tilde{\mu}}_{\eta}(x^*, y^*) \right) < \varrho^{\tilde{\mu}}_{\eta}(x^*, y^*)$$

çelişkisi elde edilir. Böylece, $\mathcal{T}$ dönüşümünün $\mathfrak{X}_{\varrho^{\tilde{\mu}}}$ uzayında sabit noktası tektir.

Simulasyon fonksiyonlarının özellikleri dikkate alındığında aşağıdaki sonuçlar verilir:

Sonuç 3.2.5. $\mathfrak{X}_{\varrho^{\tilde{\mu}}}$ uzayı $\tau > 1$ ile bir $\varrho^{\tilde{\mu}}$ –Smyth- tam Archimedean olmayan asimetric modüler b –metrik uzay olsun. $\mathfrak{X}_{\varrho^{\tilde{\mu}}}$ uzayından kendi üzerine tanımlı $\mathcal{T}$ dönüşümü aşağıdaki ifadeleri sağlasın:

(i) her $x, y \in \mathfrak{X}_{\varrho^{\tilde{\mu}}}$ için $\mathcal{M}(x, y) = \max \{ \varrho^{\tilde{\mu}}_{\eta}(x, y), \varrho^{\tilde{\mu}}_{\eta}(x, \mathcal{T}x), \varrho^{\tilde{\mu}}_{\eta}(y, \mathcal{T}y) \}$ olmak üzere

$$\alpha(x, y) \varrho^{\tilde{\mu}}_{\eta}(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y) \leq \psi(\mathcal{M}(x, y)) \quad (3.13)$$

olan $\alpha: \mathfrak{X}_{\varrho^{\tilde{\mu}}} \times \mathfrak{X}_{\varrho^{\tilde{\mu}}} \rightarrow [0, \infty)$ ve $\psi \in \mathcal{L}_b$ fonksiyonları mevcuttur,

(ii) (Ω) koşulu sağlansın,

(iii) $\mathcal{T}$ sürekli olsun,

(iv) $(\mathfrak{Z})$ özelliği sağlansın.

Bu durumda $\mathcal{T}$ dönüşümü $\mathfrak{X}_{\varrho^{\tilde{\mu}}}$ uzayında tek bir sabit noktaya sahiptir.

Örnek 3.2.6. $\mathfrak{X} = [0, \infty)$ olsun. $\varrho^{\mu}: (0, \infty) \times \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \rightarrow [0, \infty]$ asimetric modüler b –metriği ve $\alpha: \mathfrak{X}_{\varrho^{\mu}} \times \mathfrak{X}_{\varrho^{\mu}} \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu sırasıyla,

$$\varrho^{\mu}_{\eta}(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \text{ ise} \\ \frac{(x^2 + y^2)^2}{\eta}, & x \neq y \text{ ise} \end{cases}$$

ve

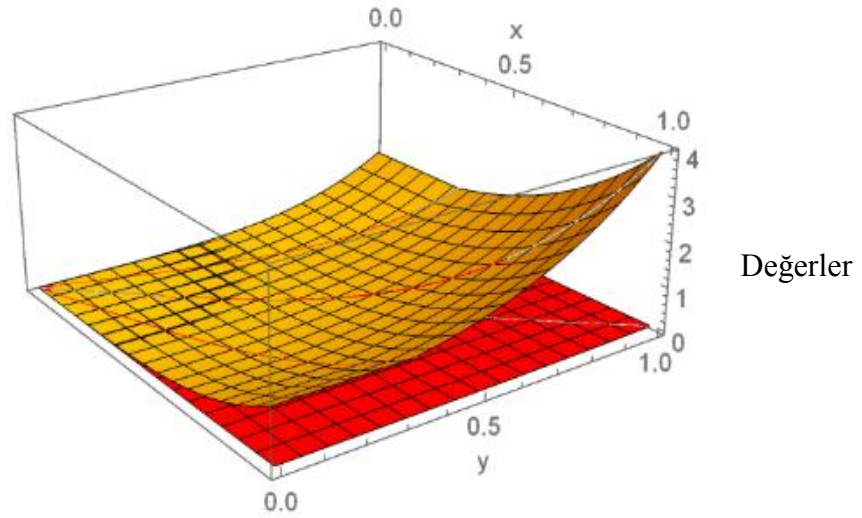
$$\alpha(x, y) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olarak verilsin. Buradan, $\tau = 2$ olmak üzere $\mathfrak{X}_{\varrho^{\mu}}$ uzayının bir ϱ^{μ} –Smyth- tam Archimedean olmayan asimetric modüler b –metrik uzayıdır. Ayrıca, $\mathcal{T}$ dönüşümü ve $\psi \in \mathcal{L}_b$ fonksiyonu $\mathcal{T}x = \frac{x}{3}$ ve $\psi(t) = \frac{t}{2}$ ile tanımlansın. Burada (3.13) eşitsizliğinin, yani

$$\alpha(x, y) \varrho^{\tilde{\mu}}_{\eta}(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y) \leq \psi \left(\max \{ \varrho^{\tilde{\mu}}_{\eta}(x, y), \varrho^{\tilde{\mu}}_{\eta}(x, \mathcal{T}x), \varrho^{\tilde{\mu}}_{\eta}(y, \mathcal{T}y) \} \right)$$

ifadesinin doğru olduğu gösterilmiştir.

Her $x, y \in [0, 1]$ için aşağıdaki şekilde (3.13) eşitsizliğinin doğru olduğu anlaşılmaktadır.



Şekil 3.2. (3.13) eşitsizliğinin 3D gösterimi.

Ayrıca, $x, y \in \mathfrak{X} - [0,1]$ durumunda da istenen sonuçların sağlandığı açıktır. Bu nedenle, $x \neq y$ ve $x, y \in [0,1]$ olan her $x, y \in \mathfrak{X}$ için

$$\begin{aligned} \alpha(x, y) \varrho_{\eta}^{\tilde{\mu}}(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y) &= \varrho_{\eta}^{\tilde{\mu}}\left(\frac{x}{3}, \frac{y}{3}\right) = \frac{(x^2 + y^2)^2}{81\eta} \\ &\leq \frac{1}{2} \max \left\{ \varrho_{\eta}^{\tilde{\mu}}(x, y), \varrho_{\eta}^{\tilde{\mu}}(x, \mathcal{T}x), \varrho_{\eta}^{\tilde{\mu}}(y, \mathcal{T}y) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \max \left\{ \frac{(x^2 + y^2)^2}{\eta}, \frac{(10x^2)^2}{81\eta}, \frac{(10y^2)^2}{81\eta} \right\} \end{aligned}$$

ifadesi doğrudur.

Basit hesaplamalarla, her $x, y \in \mathfrak{X}$ ve $\eta > 0$ için

$$\max \left\{ \varrho_{\eta}^{\tilde{\mu}}(x, y), \varrho_{\eta}^{\tilde{\mu}}(x, \mathcal{T}x), \varrho_{\eta}^{\tilde{\mu}}(y, \mathcal{T}y) \right\} = \varrho_{\eta}^{\tilde{\mu}}(x, y)$$

olduğu bulunur. Böylece,

$$\frac{(x^2 + y^2)^2}{81\eta} \leq \frac{(x^2 + y^2)^2}{2\eta}$$

eşitsizliği sağlanır. Dolayısıyla (3.13) ifadesi doğrudur. Sonuç olarak, Sonuç 3.2.5. in tüm şartları sağlanır ve $\mathcal{T}$ dönüşümünün sabit noktası $x = 0$ noktasıdır.

Sonuç 3.2.7. $\mathfrak{X}_{\varrho^{\tilde{\mu}}}$ uzayı $\tau > 1$ ile bir $\varrho^{\tilde{\mu}}$ –Smyth– tam Archimedean olmayan asimetric modüler b –metrik uzay olsun. $\mathcal{T}: \mathfrak{X}_{\varrho^{\tilde{\mu}}} \rightarrow \mathfrak{X}_{\varrho^{\tilde{\mu}}}$ dönüşümü aşağıdaki şartları sağlasın:

- (i) her $x, y \in \mathfrak{X}_{\varrho^{\tilde{\mu}}}$ için

$$\alpha(x, y) \varrho_{\eta}^{\tilde{\mu}}(Tx, Ty) \leq \psi\left(\varrho_{\eta}^{\tilde{\mu}}(x, y)\right)$$

olan $\alpha: \mathfrak{X}_{\varrho^{\tilde{\mu}}} \times \mathfrak{X}_{\varrho^{\tilde{\mu}}} \rightarrow [0, \infty)$ ve $\psi \in \mathcal{L}_b$ fonksiyonları mevcuttur,

- (ii) (Ω) özelliği sağlanır,
- (iii) $\mathcal{T}$ fonksiyonu süreklidir,
- (iv) $(\mathfrak{Z})$ özelliği sağlanır.

Böylece, $\mathcal{T}$ dönüşümü $\mathfrak{X}_{\varrho^{\tilde{\mu}}}$ uzayında tek bir sabit noktaya sahiptir.

Sonuç 3.2.8. $\mathfrak{X}_{\varrho^{\tilde{\mu}}}$ uzayı $\tau > 1$ ile bir $\varrho^{\tilde{\mu}}$ –Smyth– tam Archimedean olmayan asimetrik modüler b –metrik uzay olsun. $\mathcal{T}$, $\mathfrak{X}_{\varrho^{\tilde{\mu}}}$ uzayından $\mathfrak{X}_{\varrho^{\tilde{\mu}}}$ uzayının kendi üzerine tanımlı bir dönüşüm olarak tanımlansın. Eğer,

- (i) her $x, y \in \mathfrak{X}_{\varrho^{\tilde{\mu}}}$ için

$$\alpha(x, y) \varrho_{\eta}^{\tilde{\mu}}(Tx, Ty) \leq \lambda \varrho_{\eta}^{\tilde{\mu}}(x, y)$$

olacak şekilde $\alpha: \mathfrak{X}_{\varrho^{\tilde{\mu}}} \times \mathfrak{X}_{\varrho^{\tilde{\mu}}} \rightarrow [0, \infty)$ ve $\lambda \in (0, 1)$ elemanı mevcuttur,

- (ii) (Ω) özelliği sağlanır,
- (iii) $\mathcal{T}$ dönüşümü süreklidir,
- (iv) $(\mathfrak{Z})$ özelliği sağlanır.

şartları sağlanırsa, $\mathcal{T}$ dönüşümü $\mathfrak{X}_{\varrho^{\tilde{\mu}}}$ uzayında tek bir sabit noktaya sahiptir.

Sonuç 3.2.9. $\mathfrak{X}_{\varrho^{\tilde{\mu}}}$ uzayı $\tau > 1$ ile bir $\varrho^{\tilde{\mu}}$ –Smyth– tam $nonArc-QM_bMS$ ve $\mathcal{T}: \mathfrak{X}_{\varrho^{\tilde{\mu}}} \rightarrow \mathfrak{X}_{\varrho^{\tilde{\mu}}}$ bir dönüşüm olsun.

- (i) her $x, y \in \mathfrak{X}_{\varrho^{\tilde{\mu}}}$ için

$$\alpha(x, y) \varrho_{\eta}^{\tilde{\mu}}(Tx, Ty) \leq \psi\left(\varrho_{\eta}^{\tilde{\mu}}(x, y)\right)$$

olan $\alpha: \mathfrak{X}_{\varrho^{\tilde{\mu}}} \times \mathfrak{X}_{\varrho^{\tilde{\mu}}} \rightarrow [0, \infty)$ ve $\psi \in \mathcal{L}_b$ fonksiyonları mevcuttur,

- (ii) (Ω) özelliği sağlanır,
- (iii) eğer $\mathfrak{X}_{\varrho^{\tilde{\mu}}}$ uzayındaki $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi, her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$, ve $n \rightarrow \infty$ iken $x_n \rightarrow x$ ise, o zaman her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha(x_n, x) \geq 1$ dir,
- (iv) $(\mathfrak{Z})$ özelliği sağlanır.

şartları sağlansın. Bu durumda, $\mathcal{T}$ dönüşümü $\mathfrak{X}_{\varrho^{\tilde{\mu}}}$ uzayında tek bir sabit noktaya sahiptir.

Sonuç 3.2.10. $\mathfrak{X}_{\varrho^{\tilde{\mu}}}$ uzayı $\tau > 1$ ile bir $\varrho^{\tilde{\mu}}$ –Smyth –tam *nonArc* – QM_bMS olsun. $\mathcal{T}$, $\mathfrak{X}_{\varrho^{\tilde{\mu}}}$ uzayından $\mathfrak{X}_{\varrho^{\tilde{\mu}}}$ uzayının kendi üzerine tanımlı bir dönüşüm aşağıdaki şartları sağlasın:

(i) her $x, y \in \mathfrak{X}_{\varrho^{\tilde{\mu}}}$ için

$$\alpha(x, y)\varrho^{\tilde{\mu}}_{\eta}(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y) \leq \lambda\varrho^{\tilde{\mu}}_{\eta}(x, y) \quad (3.14)$$

olan $\alpha: \mathfrak{X}_{\varrho^{\tilde{\mu}}} \times \mathfrak{X}_{\varrho^{\tilde{\mu}}} \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu ve $\lambda \in (0, 1)$ mevcuttur,

(ii) (Ω) özelliği sağlanır

(iii) eğer $\mathfrak{X}_{\varrho^{\tilde{\mu}}}$ uzayındaki $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi, her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$, ve $n \rightarrow \infty$ iken $x_n \rightarrow x$ ise, o zaman her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha(x_n, x) \geq 1$ dir,

(iv) $(\mathfrak{Z})$ özelliği sağlanır.

Bu durumda, $\mathcal{T}$ dönüşümü $\mathfrak{X}_{\varrho^{\tilde{\mu}}}$ uzayında tek bir sabit noktaya sahiptir.

3.3. Archimedean Olmayan Asimetrik Modüler b –Metrik Uzaylarda Sabit Nokta Teorisinin Bazı Uygulamaları

Bu bölümde, elde edilen sabit nokta teoremlerinin bazı uygulamaları verilmiştir.

3.3.1. Ulam-Hyers kararlılık problemine uygulama

Bu bölümde Archimedean olmayan asimetrik modüler b – metrik uzaylarda elde edilen temel sonuçlar Ulam –Hyers kararlılık problemine uygulanmıştır.

Tanım 3.3.1.1. $(\mathfrak{X}, \mathfrak{f})$ bir metrik uzay ve $\mathcal{T}: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ dönüşümü olsun. Sabit nokta denklemi

$$x = \mathcal{T}(x) \quad (3.15)$$

in bir ϵ –çözümü olacak şekilde artan, 0 da sürekli ve $\psi(0) = 0$ özelliklerini sağlayan $\psi: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu var ise Ulam-Hyers kararlıdır denir. Her $\epsilon > 0$

$$\mathfrak{f}(y^*, \mathcal{T}y^*) \leq \epsilon \quad (3.16)$$

eşitsizliğini sağlayan her $y^* \in \mathfrak{X}_{\varrho^{\tilde{\mu}}}$ için sabit nokta denklemi (3.15) i sağlayan bir x^* noktası

$$f(y^*, Tx^*) \leq \psi(\epsilon)$$

olacak şekilde vardır.

Eğer, her bir $\rho \in \mathbb{R}^+$ için $\psi(\rho) = \iota\rho$ eşitliğini sağlayacak şekilde bir $\iota > 0$ elemanı var ise, sabit nokta denklemi Ulam-Hyers kararlıdır.

Teorem 3.3.1.2. $\mathfrak{X}_{\varrho^{\tilde{\mu}}}$ uzayı $\tau > 1$ ile bir $\varrho^{\tilde{\mu}}$ –Smyth- tam Archimedean olmayan asimetric modüler b –metrik uzay olsun. $\mathcal{T}$, $\mathfrak{X}_{\varrho^{\tilde{\mu}}}$ uzayından $\mathfrak{X}_{\varrho^{\tilde{\mu}}}$ uzayının kendi üzerine tanımlı bir dönüşüm olarak tanımlansın. Aşağıdaki ifadeler sağlanır:

(i) her $x, y \in \mathfrak{X}_{\varrho^{\tilde{\mu}}}$ için

$$\alpha(x, y)\varrho^{\tilde{\mu}}_{\eta}(Tx, Ty) \leq \psi\left(\varrho^{\tilde{\mu}}_{\eta}(x, y)\right)$$

olacak şekilde $\alpha: \mathfrak{X}_{\varrho^{\tilde{\mu}}} \times \mathfrak{X}_{\varrho^{\tilde{\mu}}} \rightarrow [0, \infty)$ ve $\psi \in \mathcal{L}_b$ fonksiyonları mevcuttur,

(ii) (Ω) özelliği sağlanır,

(iii) $\mathcal{T}$ süreklidir,

(iv) $(\mathfrak{Z})$ özelliği sağlanır,

(v) $\sigma: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $\sigma(r) = r - \tau\psi(r)$ artan fonksiyon olsun.

Bunun üzerine, sabit nokta denklemi (3.15) genelleştirilmiş Ulam-Hyers kararlıdır.

İspat. $\mathcal{T}$ dönüşümü Picard operatörü olduğundan $Fix(\mathcal{T}) = \{x^*\}$ sağlanır. $\epsilon > 0$ ve (3.16) ifadesinin çözümü $y^* \in \mathfrak{X}_{\varrho^{\tilde{\mu}}}$ olsun, yani

$$\varrho^{\tilde{\mu}}_{\eta}(y^*, Ty^*) \leq \epsilon$$

sağlasın. Ayrıca (ii) ve (iv) şartlarını kullanarak

$$\begin{aligned} \varrho^{\tilde{\mu}}_{\eta}(x^*, y^*) &= \varrho^{\tilde{\mu}}_{\eta}(Tx^*, Ty^*) \leq \varrho^{\tilde{\mu}}_{\max\{\eta, \eta\}}(Tx^*, Ty^*) \\ &\leq \tau \left[\varrho^{\tilde{\mu}}_{\eta}(Tx^*, Ty^*) + \varrho^{\tilde{\mu}}_{\eta}(Ty^*, y^*) \right] \\ &\leq \tau \left[(x^*, y^*)\varrho^{\tilde{\mu}}_{\eta}(Tx^*, Ty^*) + \epsilon \right] \\ &\leq \tau \left[\psi\left(\varrho^{\tilde{\mu}}_{\eta}(x^*, y^*)\right) + \epsilon \right] \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\sigma\left(\varrho^{\tilde{\mu}}_{\eta}(x^*, y^*)\right) := \varrho^{\tilde{\mu}}_{\eta}(x^*, y^*) - \tau\psi\left(\varrho^{\tilde{\mu}}_{\eta}(x^*, y^*)\right) \leq \tau\epsilon$$

olur, yani,

$$\varrho_{\eta}^{\tilde{\mu}}(x^*, y^*) \leq \sigma^{-1}(\tau\epsilon)$$

elde edilir.

Sonuç olarak, sabit nokta denklemi (3.15) genelleştirilmiş Ulam-Hyers kararlıdır.

3.3.2. Caputo tipli doğrusal olmayan kesirli diferansiyel denkleme uygulama

Bu bölümde Caputo tipi doğrusal olmayan kesirli diferansiyel denklemin Archimedean olmayan asimetric modüler b –metrik uzayda çözümünün varlığı ve tekliği incelenmiştir.

$g \in (C[0,1], \mathbb{R})$, D^{δ} Caputo kesirli türevin mertebesi δ ve $G: I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$\begin{aligned} D^{\delta}u(g) + G(g, u(g)) &= 0, \quad g \in I = [0,1], \quad 1 < g < 2 \\ u(0) &= 0, u(1) = 0, \end{aligned} \quad (3.17)$$

denklemini Caputo tipi doğrusal olmayan kesirli diferansiyel denklemdir. ([88,89,90]). Burada normu

$$\|u\| = \frac{1}{\eta} \sup_{g \in [0,1]} |u(g)|, \quad \eta > 0$$

olan $\mathfrak{X} = \{u: u \in (C[0,1], \mathbb{R})\}$ normu bir Banach uzayıdır. Ayrıca her $\eta > 0$ için

$$\varrho_{\eta}^{\tilde{\mu}}: (0, \infty) \times \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \rightarrow [0, \infty]$$

$$(u, v) \rightarrow \varrho_{\eta}^{\tilde{\mu}}(u, v) = \frac{1}{\eta} \|u - v\| \quad (3.18)$$

$$= \frac{1}{\eta} \sup_{g \in [0,1]} |u(g) - v(g)|,$$

fonksiyonu ile birlikte $\mathfrak{X} := C([0,1], \mathbb{R})$ bir $nonArc - QM_bMS$ dir. Bu durumda, $\mathfrak{X}_{\varrho_{\eta}^{\tilde{\mu}}}$ bir $\varrho_{\eta}^{\tilde{\mu}}$ –Smyth–tam Archimedean olmayan asimetric modüler b –metrik uzayıdır. (3.17) nin çözümü

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}u(g) &= \frac{1}{\Gamma(\delta)} \int_0^g (g(1-\varsigma)^{\delta-1} - (g-\varsigma)^{\delta-1}) G(\varsigma, u(\varsigma)) f\varsigma \\
&\quad + \frac{t}{\Gamma(\delta)} \int_g^1 (1-\varsigma)^{\delta-1} G(\varsigma, u(\varsigma)) f\varsigma
\end{aligned} \tag{3.19}$$

integral denkleminin bir sabit noktasıdır.

Teorem 3.3.2.1. $G: I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. Her $\varsigma \in [0,1]$, bazı $\lambda \in [0,1]$ ve tüm $u, v \in \mathfrak{X}_{q^{\tilde{\mu}}}$ için

$$|G(\varsigma, u(\varsigma)) - G(\varsigma, v(\varsigma))| \leq \frac{\Gamma(\delta+1)}{5} \lambda |u(\varsigma) - v(\varsigma)| \tag{3.20}$$

ifadesini belirtilen sınır koşulları için kesirli diferansiyel denklem (3.17) tek bir çözüme sahiptir.

İspat. $\mathfrak{X} = C([0,1], \mathbb{R})$ uzayı

$$E_\eta(u, v) = \frac{1}{\eta} \|u - v\| = \frac{1}{\eta} \sup_{g \in [0,1]} |u(g) - v(g)|, \quad \eta > 0$$

ile tanımlanan $E_\eta: (0, \infty) \times \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \rightarrow [0, \infty]$ Archimedean olmayan asimetric modüler b -metriği ile donatılsın. Buradan $\mathfrak{X}_{q^{\tilde{\mu}}}$ bir $q^{\tilde{\mu}}$ -Smyth-tam Archimedean olmayan asimetric modüler b -metrik uzayıdır. $\mathcal{T}: \mathfrak{X}_{q^{\tilde{\mu}}} \rightarrow \mathfrak{X}_{q^{\tilde{\mu}}}$ dönüşümü ise (3.19) ifadesindeki gibi tanımlanırsa $\mathcal{T}$ sürekli bir fonksiyon olur Şimdi, her $g \in [0,1]$ ve her $u, v \in \mathfrak{X}_{q^{\tilde{\mu}}}$ için

$$\begin{aligned}
|\mathcal{T}u(g) - \mathcal{T}v(g)| &= \left| \frac{1}{\Gamma(\delta)} \int_0^g (g(1-\varsigma)^{\delta-1} - (g-\varsigma)^{\delta-1}) G(\varsigma, u(\varsigma)) f\varsigma \right. \\
&\quad \left. + \frac{t}{\Gamma(\delta)} \int_g^1 (1-\varsigma)^{\delta-1} G(\varsigma, u(\varsigma)) f\varsigma \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\Gamma(\delta)} \int_0^g (g(1-\varsigma)^{\delta-1} - (g-\varsigma)^{\delta-1}) G(\varsigma, v(\varsigma)) f\varsigma \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left| -\frac{t}{\Gamma(\delta)} \int_{\varrho}^1 (1-\varsigma)^{\delta-1} G(\varsigma, v(\varsigma)) \mathfrak{f} \varsigma \right| \\
& \leq \frac{1}{\Gamma(\delta)} \int_0^g (g(1-\varsigma)^{\delta-1} - (g-\varsigma)^{\delta-1}) |G(\varsigma, u(\varsigma)) - G(\varsigma, v(\varsigma))| \mathfrak{f} \varsigma \\
& + \frac{t}{\Gamma(\delta)} \int_{\varrho}^1 (1-\varsigma)^{\delta-1} |G(\varsigma, \omega(\varsigma)) - G(\varsigma, v(\varsigma))| \mathfrak{f} \varsigma \\
& \leq \frac{1}{\Gamma(\delta)} \int_0^g (g(1-\varsigma)^{\delta-1} - (g-\varsigma)^{\delta-1}) \left[\frac{\Gamma(\delta+1)}{5} \lambda \sup_{\varsigma \in [0,1]} |u(\varsigma) - v(\varsigma)| \right] \mathfrak{f} \varsigma \\
& + \frac{t}{\Gamma(\delta)} \int_g^1 (1-\varsigma)^{\delta-1} \left[\frac{\Gamma(\delta+1)}{5} \lambda \sup_{\varsigma \in [0,1]} |u(\varsigma) - v(\varsigma)| \right] \mathfrak{f} \varsigma \\
& \leq \left[\frac{\Gamma(\delta+1)}{5} \lambda \sup_{\varsigma \in [0,1]} |u(\varsigma) - v(\varsigma)| \right] \\
& \times \sup_{g \in [0,1]} \left(\frac{1}{\Gamma(\delta)} \int_0^g (g(1-\varsigma)^{\delta-1} - (g-\varsigma)^{\delta-1}) \mathfrak{f} \varsigma + \frac{t}{\Gamma(\delta)} \int_g^1 (1-\varsigma)^{\delta-1} \mathfrak{f} \varsigma \right) \\
& \leq \lambda \sup_{\varsigma \in [0,1]} |u(\varsigma) - v(\varsigma)|
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan, her $\eta > 0$ için,

$$\begin{aligned}
\varrho_{\tilde{\mu}}^{\eta}(\mathcal{T}u, \mathcal{T}v) &= \frac{1}{\eta} \sup_{g \in [0,1]} |\mathcal{T}u(g) - \mathcal{T}v(g)| \\
&\leq \frac{1}{\eta} \lambda \sup_{\varsigma \in [0,1]} |u(\varsigma) - v(\varsigma)| \leq \lambda \varrho_{\tilde{\mu}}^{\eta}(u, v)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Sonuç 3.2.5 de, $\psi(t) = \lambda t$, $\mathcal{M}(x, y) = \varrho_{\tilde{\mu}}^{\eta}(x, y)$ ve $\alpha(x, y) = 1$ seçilerek $\mathcal{T}$ dönüşümünün bir sabit noktaya sahip olduğu ve (3.17) denkleminin tek bir çözümü olduğu bulunur.



4. $\mathfrak{R}$ -MODÜLER b –METRİK-GİBİ UZAYLARDA BAZI SABİT NOKTA SONUÇLARI

Bu çalışmada, modüler metrik–gibi uzay tanımında üçgen eşitsizliği şartı genişletilerek modüler b –metrik–gibi uzay kavramı. elde edilmiştir. Ayrıca, $\mathfrak{R}$ ikili bağıntısı ile birlikte $\mathfrak{R}$ –modüler b –metrik–gibi uzayların çerçevesi genişletilmiştir. Bu yenilikçi yapıya hem $\mathcal{Z}$ –simülasyon fonksiyonunu hem de E –tipi daralmayı dahil ederek, Geraghty büzülme tipi dönüşümleri sabit nokta teoremine genişletilmiştir. $\mathfrak{R}$ ikili bağıntısı yoluyla türetilen, daha önceden örneğine rastlanmamış bir grafiksel modüler b –metrik–gibi uzay kavramı tanıtılmıştır. Sonuç olarak, dinamik programlamada, fonksiyonel denklemler sınıfı için çözümlerin varlığı ve RLC paralel devresinde elektrik akımına ilişkin başlangıç değer problemlerinin çözümü titizlikle araştırılmıştır.

4.1. Modüler ve $\mathfrak{R}$ –Modüler b –Metrik–Gibi Uzaylar

Aşağıdaki bölümde, modüler b –metrik–gibi uzay kavramının topolojik özellikleri incelenmektedir. Daha sonra, modüler b –metrik–gibi yapısı ile yardımcı fonksiyon olan $\mathfrak{R}$ ikili bağıntısının biraraya getirilerek oluşan yeni yapı şekillendirilmiştir.

4.1.1. Modüler b –metrik–gibi uzaylar ve bazı topolojik özellikleri

Aşağıda modüler b –metrik–gibi uzay kavramı verilmiştir:

Tanım 4.1.1.1. $\mathfrak{X}$ boştan farklı bir küme ve $\tau \geq 1$ de bir gerçel sayı olsun. $q^*: (0, \infty) \times \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \rightarrow [0, \infty]$ dönüşümü her $x, y, z \in \mathfrak{X}$ için

$$(q^*_1) \text{ Her } \zeta > 0 \text{ için } q^*_\zeta(x, y) = 0 \text{ ise } x = y \text{ dir,}$$

$$(q^*_2) \text{ Her } \zeta > 0 \text{ için } q^*_\zeta(x, y) = q^*_\zeta(y, x) \text{ dir,}$$

$$(q^*_3) \text{ Her } \zeta, v > 0 \text{ için } q^*_{\zeta+v}(x, y) \leq \tau[q^*_\zeta(x, z) + q^*_v(z, y)]$$

şartlarını sağlarsa q^* dönüşümüne modüler b –metrik–gibi ve $(\mathfrak{X}, q^*) = \mathfrak{X}_{q^*}$ uzayına ise modüler b –metrik–gibi uzayı denir.

Modüler b –metrik–gibi fonksiyonu, $\tau = 1$ durumunda modüler metrik–gibi uzayına indirgenmektedir. Böylelikle, modüler b –metrik–gibi uzayın, modüler metrik–gibi uzayının doğal bir genelleştirmesi olduğu görülmektedir.

$\mathfrak{X}_{\varrho^*}$ üzerinde ϱ^* modüler b –metrik–gibi, aynı zamanda $\mathfrak{X}_{\varrho^*}$ üzerinde tabanı açık ϱ^* –yuvar, $\{\mathcal{B}_{\varrho^*}(x, \varepsilon) : x \in \mathfrak{X} \text{ ve } \varepsilon > 0\}$ ailesi olan bir T_{ϱ^*} topolojisi üretecektir; burada her $x \in \mathfrak{X}_{\varrho^*}$, $0 < \varepsilon < \infty$ ve $\zeta > 0$ için

$$\mathcal{B}_{\varrho^*}(x, \varepsilon) = \{y \in \mathfrak{X}_{\varrho^*} : |\varrho_{\zeta}^*(x, y) - \varrho_{\zeta}^*(x, x)| < \varepsilon\}$$

İle ifade edilmektedir.

Tanım 4.1.1.2. $\mathfrak{X}_{\varrho^*}$ modüler b –metrik–gibi uzayı ve $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ $\mathfrak{X}_{\varrho^*}$ uzayında bir dizi olsun.

- (i) Her $\zeta > 0$ için $n \rightarrow \infty$ iken $\varrho_{\zeta}^*(x_n, x) \rightarrow \varrho_{\zeta}^*(x, x)$ ise $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisine $x \in \mathfrak{X}_{\varrho^*}$ noktasına ϱ^* –yakınsaktır;
- (ii) $\lim_{n, m \rightarrow \infty} \varrho_{\zeta}^*(x_n, x_m)$ var ve sonlu ise $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi ϱ^* –Cauchy dizisidir,
- (iii) $\mathfrak{X}_{\varrho^*}$ uzayında ki her $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy dizisi T_{ϱ^*} topolojisine göre

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \varrho_{\zeta}^*(x_n, x_m) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varrho_{\zeta}^*(x_n, x) = \varrho_{\zeta}^*(x, x)$$

ise $(\mathfrak{X}_{\varrho^*}, \varrho_{\zeta}^*)$ uzayı ϱ^* –tamdır,

- (iv) $\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho_{\zeta}^*(x_n, x) = \varrho_{\zeta}^*(Tx, x)$ limiti var(sonlu) ise $T: \mathfrak{X}_{\varrho^*} \rightarrow \mathfrak{X}_{\varrho^*}$ fonksiyonu süreklidir.

Örnek 4.1.1.3. $(\mathfrak{X}, m)$ modüler metrik–gibi uzay ve $p > 1$ reel sayısı $\varrho_{\zeta}^*(x, y) = [m_{\zeta}(x, y)]^p$ olsun. Buradan, $(\mathfrak{X}_{\varrho^*}, \varrho_{\zeta}^*)$ uzayı $\tau = 2^{p-1} \geq 1$ ile modüler b –metrik–gibi uzayıdır. Bu durum, $a, b \in \mathbb{R}^+$ için

$$(a + b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$$

ifadesinden elde edilir.

Örnek 4.1.1.4. $\mathfrak{X} = \mathbb{R}$, $a \geq 1$ ve $b \in \mathbb{R}$ için

$$\varrho_{\zeta^1}^*(x, y) = \frac{(|x| + |y| + a)^p}{\zeta},$$

$$\varrho_{\zeta^2}^*(x, y) = \frac{(|x - b| + |y - b|)^p}{\zeta},$$

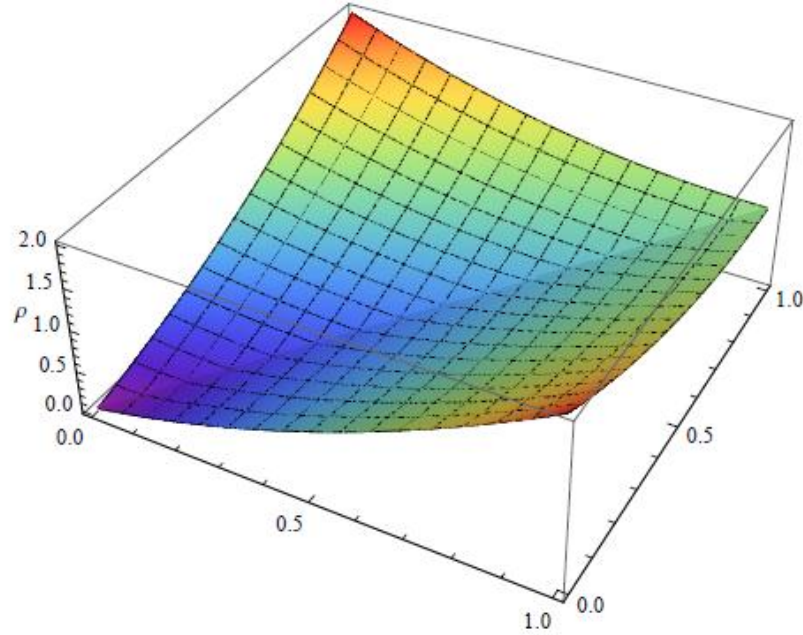
$$\varrho_{\zeta^3}^*(x, y) = \frac{(x^2 + y^2)^\rho}{\zeta}$$

şeklinde tanımlanan $\varrho_{\zeta^j}^*: \mathfrak{X}_{\varrho^*} \times \mathfrak{X}_{\varrho^*} \rightarrow \mathbb{R}^+ (j = 1, 2, 3)$ dönüşümleri $\mathfrak{X}$ üzerinde modüler b –metrik– gibi dönüşümleridir.

Örnek 4.1.1.5. $\mathfrak{X} = \mathbb{R}$ olsun. $\varrho_{\zeta}^*: \mathfrak{X}_{\varrho^*} \times \mathfrak{X}_{\varrho^*} \rightarrow \mathbb{R}^+$ dönüşümü

$$\varrho_{\zeta}^*(x, y) = \frac{|x - y|^2}{\zeta} + \max\{x, y\} \quad (4.1)$$

şeklinde tanımlanmış olup $\tau = 2$ katsayısı ile $\mathfrak{X}$ uzayında modüler b –metrik– gibidir. Şekil 4.1 de verilen (4.1) denkleminin 3D gösterimi, (4.1) denkleminin grafiğini $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ aralığında $\zeta = 1$ için sağlamaktadır.



Şekil 4.1. (4. 1) eşitliğinin 3D gösterimi.

Ayrıca, $\zeta = 0, 1$ ise, ϱ_{ζ}^* en üstte “10” değerine eşit olur.

4.1.2. $\mathfrak{R}$ –Modüler b –metrik–gibi uzaylar ve bazı topolojik özellikleri

Bu bölümde, $\mathfrak{R}$ olarak gösterilen ikili bağıntı kullanılarak, $\mathfrak{R}$ –modüler b –metrik–gibi uzay tanımı yapılmıştır. Ayrıca $\mathfrak{R}$ –modüler b –metrik–gibi uzayların topolojik özellikleri incelenmiştir.

Tanım 4.1.2.1. $\mathfrak{X}$ boştan farklı bir küme ve $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{X}$ üzerinde $(\mathfrak{X}, \mathfrak{R})$ şeklinde gösterilen yansımali bir ikili bağıntı olsun. $\varrho^{\mathfrak{R}}: (0, \infty) \times \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \rightarrow [0, \infty]$ dönüşümü her $x, y, z \in \mathfrak{X}$ ve $x \mathfrak{R} y$ için aşağıdaki şartlar sağlansın:

$(\varrho^{\mathfrak{R}}_1)$ Her $\zeta > 0$ için $\varrho^{\mathfrak{R}}_{\zeta}(x, y) = 0$ ise $x = y$ dir,

$(\varrho^{\mathfrak{R}}_2)$ Her $\zeta > 0$ için $\varrho^{\mathfrak{R}}_{\zeta}(x, y) = \varrho^{\mathfrak{R}}_{\zeta}(y, x)$ dir,

$(\varrho^{\mathfrak{R}}_3)$ Her $\zeta, v, z > 0$ için $\varrho^{\mathfrak{R}}_{\zeta+v}(x, y) \leq \tau[\varrho^{\mathfrak{R}}_{\zeta}(x, z) + \varrho^{\mathfrak{R}}_v(z, y)]$.

Bu durumda, $\varrho^{\mathfrak{R}}$ dönüşümüne $\mathfrak{R}$ –modüler b –metrik–gibi ve $(\mathfrak{X}_{\varrho^{\mathfrak{R}}}, \mathfrak{R}, \tau) = \mathfrak{X}_{\varrho^{\mathfrak{R}}}$ uzayına da $\mathfrak{R}$ –modüler b –metrik–gibi uzayı adı verilir.

Uyarı 4.1.2.2. $\mathfrak{X}, \mathfrak{R}$ yansımali ikili bağıntılı bir küme olsun. $\varrho^{\mathfrak{R}}: (0, \infty) \times \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \rightarrow [0, \infty]$ dönüşümü, $\mathfrak{R}$ yansımali ikili bağıntı altında elemanlar için $(\varrho^{\mathfrak{R}}_1) - (\varrho^{\mathfrak{R}}_3)$ iken karşılaştırılabilir.

Metrik uzay teorisinin şartları göz önüne alındığında $\mathfrak{R}$ –modüler b –metrik–gibi yapısı, modüler b –metrik–gibi yapısının özelliklerini sağlamasa da tersi durumunun geçerli olduğunu belirtmek gerekir.

Aşağıdaki örnekte, $\zeta \geq 1$ ile $\mathfrak{R}$ –modüler b –metrik–gibi metriğinin $\zeta \geq 1$ ile bir modüler b –metrik–gibi metriği olması gerektiği gerçeğini sunuyoruz.

Örnek 4.1.2.3. $\mathfrak{X} = \{-2, -1, 0, 1\}$ ve $x = y$ ya da $x, y > 0$ ancak ve ancak $x \mathfrak{R} y$ şeklinde tanımlanan $\mathfrak{R}$ ikili bağıntı olsun. O halde, $\varrho^{\mathfrak{R}}$ dönüşümü $\zeta = 2$ ile $\mathfrak{X}$ uzayında

$$\varrho^{\mathfrak{R}}_{\zeta}(x, y) = (\max\{x, y\})^2$$

$\mathfrak{R}$ –modüler b –metrik–gibidir. Ancak, $x = -2$ ve $y = 0$ için $(\varrho^{\mathfrak{R}}_1)$ koşulu yani

$$\varrho^{\mathfrak{R}}_{\zeta}(x, y) = (\max\{-2, 0\})^2 = 0 \Rightarrow x \neq y$$

sağlanmamaktadır bu da $\mathfrak{X}$ uzayında, $\varrho^{\mathfrak{R}}$ dönüşümü modüler b –metrik–gibi olmamaktadır.

Tanım 4.1.2.4. $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\mathfrak{X}_{\varrho^{\mathfrak{R}}}$ uzayında bir $\mathfrak{R}$ –dizisi yani her bir $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \mathfrak{R} x_{n+1}$ ya da $x_{n+1} \mathfrak{R} x_n$ olsun. Bu durumda,

- (i) her $\zeta > 0$ ve her bir $n \geq k$ için eğer $\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho_{\zeta}^{\mathfrak{R}}(x_n, x) = \varrho_{\zeta}^{\mathfrak{R}}(x, x)$ ve $x_n \mathfrak{R} x$ ise $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, dizisine bazı $x \in \mathfrak{X}_{\varrho^{\mathfrak{R}}}$ için $\varrho^{\mathfrak{R}}$ –yakınsaktır,
- (ii) $\lim_{n, m \rightarrow \infty} \varrho_{\zeta}^{\mathfrak{R}}(x_n, x_m)$ limiti mevcut ve sonlu ise $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi $\mathfrak{X}_{\varrho^{\mathfrak{R}}}$ uzayında $\varrho^{\mathfrak{R}}$ –Cauchy dizisidir (ya da $\mathfrak{R}$ – Cauchy),
- (iii) $\mathfrak{X}_{\varrho^{\mathfrak{R}}}$ uzayında ki her $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ $\mathfrak{R}$ –Cauchy $\mathfrak{R}$ –dizisi her $\zeta > 0$ ve her bir $n \geq k$ için

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \varrho_{\zeta}^{\mathfrak{R}}(x_n, x_m) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varrho_{\zeta}^{\mathfrak{R}}(x_n, x) = \varrho_{\zeta}^{\mathfrak{R}}(x, x)$$

$x_n \mathfrak{R} x$ olan $x \in \mathfrak{X}_{\varrho^{\mathfrak{R}}}$ noktasına yakınsak ise, $\mathfrak{X}_{\varrho^{\mathfrak{R}}}$ uzayı $\mathfrak{R}$ – tamdır.

Önerme 4.1.2.5. $\mathcal{T}: \mathfrak{X}_{\varrho^{\mathfrak{R}}} \rightarrow \mathfrak{X}_{\varrho^{\mathfrak{R}}}$ bir dönüşüm ve $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{X}_{\varrho^{\mathfrak{R}}}$ uzayında ikili bir bağıntı olsun. Ayrıca, $x_0 \mathfrak{R} \mathcal{T}x_0$ olan $x_0 \in \mathfrak{X}_{\varrho^{\mathfrak{R}}}$ noktası var olsun. $x_n = \mathcal{T}x_{n-1} = \mathcal{T}^n x_0$ biçiminde bir $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ $\mathfrak{R}$ –dizisi tanımlansın. Bu durumda, her $m, n \in \mathbb{N}$, $n < m$ için $x_n \mathfrak{R} x_m$ dir.

İspat. $\mathcal{T}$, $\mathfrak{R}$ –korumalı ve $x_0 \mathfrak{R} \mathcal{T}x_0$ olduğundan, $x_1 \mathfrak{R} x_2 = \mathcal{T}x_0 \mathfrak{R} \mathcal{T}x_1$ sonucu elde edilir. Bu şekilde devam edilirse, her bir $n \geq 0$ için $x_n \mathfrak{R} x_{n+1}$ bulunur. $x_n \mathfrak{R} x_m$ olsun ve bu durumda $m > n$ iken $x_n \mathfrak{R} x_{m+1}$ olduğu gösterilecektir. $\mathfrak{R}$, geçişli özelliğine sahip ve $x_m \mathfrak{R} x_{m+1}$ olduğundan, $x_n \mathfrak{R} x_{m+1}$ ifadesi elde edilir. Böylece, her $m, n \in \mathbb{N}$, $n < m$ için $x_n \mathfrak{R} x_m$ dir.

4.2. $\mathfrak{R}$ –Modüler b –Metrik–Gibi Uzaylarda Bazı Sabit Nokta Sonuçları

Aşağıdaki bölümde, $\mathfrak{R}$ –modüler b –metrik–gibi uzayında sabit nokta teorisi ile ilgili sonuçlar sunulmaktadır.

Teorem 4.2.1. $\mathfrak{X}_{\varrho^{\mathfrak{R}}}$, $\tau \geq 1$ sabiti ile $\mathfrak{R}$ –tam $\mathfrak{R}$ –modüler b –metrik–gibi uzayı ve her bir $y \in \mathfrak{X}_{\varrho^{\mathfrak{R}}}$ için $x_0 \mathfrak{R} y$ olan $x_0 \in \mathfrak{X}_{\varrho^{\mathfrak{R}}}$ olsun. $\mathcal{T}: \mathfrak{X}_{\varrho^{\mathfrak{R}}} \rightarrow \mathfrak{X}_{\varrho^{\mathfrak{R}}}$ $\mathfrak{R}$ –korumalı bir dönüşüm ve $\eta, \varrho \in \Theta$ ve $\mathcal{B} \in \mathfrak{B}_{\tau}$ ye göre $x \mathfrak{R} y$, $x \mathfrak{R} \mathcal{T}x$, $y \mathfrak{R} \mathcal{T}y$ ve $y \mathfrak{R} \mathcal{T}x$ iken

$$E(x, y) = \varrho_{\zeta}^{\mathfrak{R}}(x, y) + |\varrho_{\zeta}^{\mathfrak{R}}(x, \mathcal{T}x) - \varrho_{\zeta}^{\mathfrak{R}}(y, \mathcal{T}y)|$$

ve $k \geq 0$

$$\mathcal{N}(x, y) = \min\{\varrho_{\zeta}^{\mathfrak{R}}(x, \mathcal{T}x), \varrho_{\zeta}^{\mathfrak{R}}(y, \mathcal{T}y), \varrho_{\zeta}^{\mathfrak{R}}(x, \mathcal{T}y), \varrho_{\zeta}^{\mathfrak{R}}(y, \mathcal{T}x)\}$$

her $x, y \in \mathfrak{X}_{\varrho^{\mathfrak{R}}}$ için

$$\eta \left(\mathfrak{L} \left(\tau \varrho_{\zeta}^{\mathfrak{R}}(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y) \right), \mathfrak{L} \left(\mathcal{B}(\mathcal{E}(x, y))\mathcal{E}(x, y) + \mathfrak{k}\mathcal{N}(x, y) \right) \right) \geq 1, \quad (4.2)$$

ifadesini sağlayan η genelleştirilmiş Ψ^*b –simülasyon fonksiyonu var olsun.

O halde, $\varrho_{\zeta}^{\mathfrak{R}}(x^*, x^*) = 0$ olmak üzere $\mathcal{T}$ dönüşümü $x^* \in \mathfrak{X}_{\varrho^{\mathfrak{R}}}$ sabit noktasına sahiptir.

İspat. Her $y \in \mathfrak{X}_{\varrho^{\mathfrak{R}}}$ için $x_0 \mathfrak{R} y$ olan $x_0 \in \mathfrak{X}_{\varrho^{\mathfrak{R}}}$ elemanı ve $\mathcal{T}$ dönüşümü $\mathfrak{R}$ –korumalı olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = \mathcal{T}x_{n-1} = \mathcal{T}^n x_0$ ve $x_{n-1} \mathfrak{R} x_n$ olan $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ $\mathfrak{R}$ –dizisi her $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $x_n = x_{n+1}$ olsun. Burada, (4.2) ifadesinden,

$$1 \leq \eta \left(\mathfrak{L} \left(\tau \varrho_{\zeta}^{\mathfrak{R}}(\mathcal{T}x_{n-1}, \mathcal{T}x_n) \right), \mathfrak{L} \left(\mathcal{B}(\mathcal{E}(x_{n-1}, x_n))\mathcal{E}(x_{n-1}, x_n) + \mathfrak{k}\mathcal{N}(x_{n-1}, x_n) \right) \right) \quad (4.3)$$

ve (η_2') tanımından,

$$1 < \frac{\psi \left(\mathfrak{L} \left(\mathcal{B}(\mathcal{E}(x_{n-1}, x_n))\mathcal{E}(x_{n-1}, x_n) + \mathfrak{k}\mathcal{N}(x_{n-1}, x_n) \right) \right)}{\psi \left(\tau^{\lambda} \mathfrak{L} \left(\tau \varrho_{\zeta}^{\mathfrak{R}}(\mathcal{T}x_{n-1}, \mathcal{T}x_n) \right) \right)}$$

elde edilir, yani

$$\begin{aligned} & \psi \left(\tau^{\lambda} \mathfrak{L} \left(\tau \varrho_{\zeta}^{\mathfrak{R}}(x_n, x_{n+1}) \right) \right) \\ & < \psi \left(\mathfrak{L} \left(\mathcal{B}(\mathcal{E}(x_{n-1}, x_n))\mathcal{E}(x_{n-1}, x_n) + \mathfrak{k}\mathcal{N}(x_{n-1}, x_n) \right) \right) \end{aligned}$$

olur.

ψ fonksiyonunun özelliklerinden dolayı, yukarıdaki ifadede

$$\tau^{\lambda} \mathfrak{L} \left(\tau \varrho_{\zeta}^{\mathfrak{R}}(x_n, x_{n+1}) \right) < \mathfrak{L} \left(\mathcal{B}(\mathcal{E}(x_{n-1}, x_n))\mathcal{E}(x_{n-1}, x_n) + \mathfrak{k}\mathcal{N}(x_{n-1}, x_n) \right)$$

bulunur.

$\mathfrak{L} \in \Theta$ olarak,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(x_{n-1}, x_n) &= \varrho_{\zeta}^{\mathfrak{R}}(x_{n-1}, x_n) + |\varrho_{\zeta}^{\mathfrak{R}}(\mathcal{T}x_{n-1}) - \varrho_{\zeta}^{\mathfrak{R}}(x_n, \mathcal{T}x_n)| \\ &= \varrho_{\zeta}^{\mathfrak{R}}(x_{n-1}, x_n) + |\varrho_{\zeta}^{\mathfrak{R}}(x_{n-1}, x_n) - \varrho_{\zeta}^{\mathfrak{R}}(x_n, x_{n+1})|, \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
& \mathcal{N}(x_{n-1}, x_n) \\
& = \min\{\varrho_{\zeta}^{\Re}(x_{n-1}, \mathcal{T} x_{n-1}), \varrho_{\zeta}^{\Re}(x_n, \mathcal{T} x_n), \varrho_{\zeta}^{\Re}(x_{n-1}, \mathcal{T} x_n), \varrho_{\zeta}^{\Re}(x_n, \mathcal{T} x_{n-1})\} \\
& = \min\{\varrho_{\zeta}^{\Re}(x_{n-1}, x_n), \varrho_{\zeta}^{\Re}(x_n, x_{n+1}), \varrho_{\zeta}^{\Re}(x_{n-1}, x_{n+1}), 0\}=0
\end{aligned}$$

iken

$$\begin{aligned}
& \tau^{\lambda+1} \varrho_{\zeta}^{\Re}(x_n, x_{n+1}) \\
& < \mathcal{B}(\mathcal{E}(x_{n-1}, x_n))\mathcal{E}(x_{n-1}, x_n) + k\mathcal{N}(x_{n-1}, x_n)
\end{aligned} \tag{4.4}$$

elde edilir.

(4.4) ifadesinde $\varrho_{\zeta}^{\Re}(x_{n-1}, x_n)$ yerine $\mathcal{X}_n$ yazıldığında

$$\tau^{\lambda+1} \mathcal{X}_{n+1} < \mathcal{B}(\mathcal{X}_n + |\mathcal{X}_n - \mathcal{X}_{n+1}|)(\mathcal{X}_n + |\mathcal{X}_n - \mathcal{X}_{n+1}|) + k.0 \tag{4.5}$$

ifadesine dönüşür.

$\mathcal{X}_n \leq \mathcal{X}_{n+1}$ olan $n > 0$ olsun. Dolayısıyla, (4.5) ifadesinden

$$\tau^{\lambda+1} \mathcal{X}_{n+1} < \mathcal{B}(\mathcal{X}_{n+1})\mathcal{X}_{n+1} < \mathcal{X}_{n+1}$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan çelişkiye varılır. Böylece, her $n > 0$ için $\mathcal{X}_n > \mathcal{X}_{n+1}$ olan $\mathcal{E}(x_{n-1}, x_n) = 2\mathcal{X}_n - \mathcal{X}_{n+1}$ ifadesine ulaşılır. Sonuç olarak, $\mathcal{X}_n = \{\varrho_{\zeta}^{\Re}(x_{n-1}, x_n)\}$ azalmayan bir dizidir. Buradan $\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho_{\zeta}^{\Re}(x_{n-1}, x_n) = r$ olan bir $r \geq 0$ reel sayısı vardır.

Şimdi $r = 0$ olduğu gösterilecektir. r değerinin sıfıra eşit olmadığını varsayalım. Buradan iki duruma ulaşılır:

Durum (1): $\tau > 1$ olsun. Bu durumda (4.4) ifadesi

$$\tau^{\lambda+1} \mathcal{X}_{n+1} < \mathcal{B}(2\mathcal{X}_n - \mathcal{X}_{n+1})(2\mathcal{X}_n - \mathcal{X}_{n+1}) < (2\mathcal{X}_n - \mathcal{X}_{n+1})$$

olur.

Yukarıdaki ifade de $n \rightarrow \infty$ iken limit alınırsa $\tau^{(\lambda+1)} r < r$ eşitsizliğini elde ederiz.

Durum (2): $\tau = 1$ olsun. O halde, (4.3) ifadesinden

$$\begin{aligned}
1 & \leq \eta(\mathfrak{L}(\mathcal{X}_{n+1}), \mathfrak{L}(\mathcal{B}(\mathcal{E}(x_{n-1}, x_n))\mathcal{E}(x_{n-1}, x_n) \\
& + k\mathcal{N}(x_{n-1}, x_n)))
\end{aligned} \tag{4.6}$$

bulunur. Burada $E(x_{n-1}, x_n)$ ve $\mathcal{N}(x_{n-1}, x_n)$ yukarıda değerlendirildiği gibidir.

$$\hat{c}_n = \mathfrak{L}(\mathcal{X}_{n+1})$$

ve

$$\hat{q}_n = \mathfrak{L}(\mathcal{B}(2\mathcal{X}_n - \mathcal{X}_{n+1})) (2\mathcal{X}_n - \mathcal{X}_{n+1})$$

olsun.

Tanımlanan $\{\hat{c}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ve $\{\hat{q}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizilerinin limiti $\mathfrak{L}(r)$ dir. Burada (4.6) ifadesi ve (η_2) tanımı kullanılarak

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}(\mathcal{X}_{n+1}) = \hat{c}_n &\leq \mathfrak{L}(\mathcal{B}(E(x_{n-1}, x_n))E(x_{n-1}, x_n)) \\ &= \hat{q}_n \\ &= \mathfrak{L}(\mathcal{B}(2\mathcal{X}_n - \mathcal{X}_{n+1})) (2\mathcal{X}_n - \mathcal{X}_{n+1}) \\ &< \mathfrak{L}(2\mathcal{X}_n - \mathcal{X}_{n+1}) \end{aligned}$$

elde edilir.

Yukarıdaki ifade de limit alındığında

$$\mathfrak{L}(r) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{L}(\mathcal{X}_{n+1}) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{q}_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{L}(2\mathcal{X}_n - \mathcal{X}_{n+1}) = \mathfrak{L}(r)$$

ifadesinde $\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{c}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{q}_n = \mathfrak{L}(r) > 1$ sonucuna varılır. Burada (η_3) tanımından faydalanarak,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \eta(\hat{c}_n, \hat{q}_n) < 1$$

bulunur, ancak bu bir çelişkidir. Bu durumda her iki durumda da $r = 0$ sonucuna varılır. Burada

$$n \rightarrow \infty \text{ iken } \varrho_{\zeta}^{\mathfrak{R}}(x_{n-1}, x_n) \rightarrow 0 \quad (4.7)$$

dir.

Şimdi $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin $\mathfrak{R}$ -Cauchy $\mathfrak{R}$ -dizisi olduğu gösterilecektir. Tersini kabul edilsin. $\varepsilon > 0$ ve her $\zeta = \zeta(x_n) > 0$ için $\varrho_{2\zeta}^{\mathfrak{R}}(x_{m_k}, x_{n_k}) \geq \varepsilon$ olan $n_k > m_k \geq k$ ifadesini sağlayan pozitif tamsayılardan oluşturulabilecek $\{m_k\}$ ve $\{n_k\}$ gibi iki dizi bulunur. Ayrıca $\varrho_{\zeta}^{\mathfrak{R}}(x_{m_k}, x_{n_k}) \geq \varrho_{2\zeta}^{\mathfrak{R}}(x_{m_k}, x_{n_k})$ ifadesini göz önünde bulundurarak

$$\varrho_{\zeta}^{\Re}(x_{m_k}, x_{n_k}) \geq \varepsilon \quad (4.8)$$

eşitsizliği elde edilir.

Buradan,

$$\varrho_{\zeta}^{\Re}(x_{m_k}, x_{n_{k-1}}) < \varepsilon \quad (4.9)$$

olan (4.8) ifadesini sağlayan en küçük değer n_k olsun.

(4.9) ve $(\varrho_3^{\Re})$ üçgen eşitsizliği şartını kullanarak

$$\varrho_{\zeta}^{\Re}(x_{m_{k-1}}, x_{n_{k-1}}) \leq \tau \varrho_{\frac{\zeta}{2}}^{\Re}(x_{m_{k-1}}, x_{m_k}) + \tau \varrho_{\frac{\zeta}{2}}^{\Re}(x_{m_k}, x_{n_{k-1}})$$

bulunur.

Yani, (4.7) ve (4.9) ifadelerinden

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \varrho_{\zeta}^{\Re}(x_{m_{k-1}}, x_{n_{k-1}}) \leq \tau \varepsilon \quad (4.10)$$

sonucuna varılır.

Diğer yandan, Önerme 4.1.2.5 den dolayı $x_{m_{k-1}} \Re x_{n_{k-1}}$ elde edilir. Buradan, (4.1) ifadesinden,

$$\begin{aligned} & E(x_{m_{k-1}}, x_{n_{k-1}}) \\ &= \varrho_{\zeta}^{\Re}(x_{m_{k-1}}, x_{n_{k-1}}) + |\varrho_{\zeta}^{\Re}(x_{m_{k-1}}, \mathcal{T}x_{m_{k-1}}) - \varrho_{\zeta}^{\Re}(x_{n_{k-1}}, \mathcal{T}x_{n_{k-1}})| \\ &= \varrho_{\zeta}^{\Re}(x_{m_{k-1}}, x_{n_{k-1}}) + |\varrho_{\zeta}^{\Re}(x_{m_{k-1}}, x_{m_k}) - \varrho_{\zeta}^{\Re}(x_{n_{k-1}}, x_{n_k})| \end{aligned}$$

iken

$$\begin{aligned} 1 &\leq \eta(\tau \mathfrak{L}(\varrho_{\zeta}^{\Re}(\mathcal{T}x_{m_{k-1}}, \mathcal{T}x_{n_{k-1}})), \mathfrak{L}(\mathcal{B}(E(x_{m_{k-1}}, x_{n_{k-1}}))E(x_{m_{k-1}}, x_{n_{k-1}}) \\ &\quad + \mathcal{K}\mathcal{N}(x_{m_{k-1}}, x_{n_{k-1}}))) \end{aligned} \quad (4.11)$$

sonucu elde edilir.

(4.7) ve (4.10) ifadelerini kullanarak, $k \rightarrow \infty$ iken yukarıda limit alındığında

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} E(x_{m_k-1}, x_{n_k-1}) \leq \tau \varepsilon \quad (4.12)$$

olur.

Ayrıca,

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(x_{m_k-1}, x_{n_k-1}) = \min \{ & \varrho_{\zeta}^{\Re}(x_{m_k-1}, \mathcal{T}x_{m_k-1}), \varrho_{\zeta}^{\Re}(x_{n_k-1}, \mathcal{T}x_{n_k-1}), \\ & \varrho_{\zeta}^{\Re}(x_{m_k-1}, \mathcal{T}x_{n_k-1}), \varrho_{\zeta}^{\Re}(x_{n_k-1}, \mathcal{T}x_{m_k-1}) \} \end{aligned}$$

dir.

(4.7) ifadesini kullanarak

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \mathcal{N}(x_{m_k-1}, x_{n_k-1}) = 0 \quad (4.13)$$

bulunur.

Sonuç olarak, (η_2') , $\Omega \in \Theta$, $\mathcal{B} \in \mathfrak{B}_{\tau}$ ve ψ fonksiyonunun özellikleri kullanılarak (4.11) ifadesi

$$\begin{aligned} & \tau^{\lambda+1} \varrho_{\zeta}^{\Re}(x_{m_k}, x_{n_k}) \\ & < \mathcal{B}(E(x_{m_k-1}, x_{n_k-1})) E(x_{m_k-1}, x_{n_k-1}) + \mathcal{K} \mathcal{N}(x_{m_k-1}, x_{n_k-1}) \end{aligned}$$

olur.

Ayrıca, burada limit alınarak, (4.8), (4.12) ve (4.13) dikkate alındığında, yukarıdaki ifade $\tau^{\lambda+1} \varepsilon < \frac{1}{\tau} \tau \varepsilon$ eşitsizliğine dönüşür. Fakat, bu çelişkiye neden olur. Böylelikle, $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ $\Re$ -Cauchy $\Re$ -dizisi ve $\mathfrak{X}_{\varrho^{\Re}}$ nin tamllığından, her $x_n \in \mathfrak{X}$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho_{\zeta}^{\Re}(x_n, x^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varrho_{\zeta}^{\Re}(x_n, x_m) = \varrho_{\zeta}^{\Re}(x^*, x^*)$$

olan $x^* \in \mathfrak{X}_{\varrho^{\Re}}$ elemanı vardır.

Bu nedenle, her $x_n \in \mathfrak{X}$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varrho_{\zeta}^{\Re}(x_n, x^*) = \varrho_{\zeta}^{\Re}(x^*, x^*) = 0 \quad (4.14)$$

dır.

Şimdi, x^* noktasının $\mathcal{T}$ dönüşümüne ait bir sabit noktası olduğu gösterilecektir. $x^* \neq \mathcal{T}x^*$ olsun. Bu durumda $\varrho_{\zeta}^{\Re}(x_n, x^*) > 0$ olur. Dolayısıyla (4.1) ifadesinden

$$1 \leq \eta(\tau \mathfrak{L}(\varrho_{\zeta}^{\Re}(\mathcal{T}x_n, \mathcal{T}x^*)), \mathfrak{L}(\mathcal{B}(\mathbb{E}(x_n, x^*))\mathbb{E}(x_n, x^*) + k\mathcal{N}(x_n, x^*)))$$

elde edilir.

Benzer şekilde, (η_2') , $\mathfrak{L} \in \Theta$ ve azalmayan ψ fonksiyonunu kullanarak, yukarıdaki eşitsizlik

$$\tau^{\lambda+1} \varrho_{\zeta}^{\Re}(x_{n+1}, \mathcal{T}x^*) < \mathcal{B}(\mathbb{E}(x_n, x^*))\mathbb{E}(x_n, x^*) + k\mathcal{N}(x_n, x^*) \quad (4.15)$$

olur, burada

$$\mathbb{E}(x_n, x^*) = \varrho_{\zeta}^{\Re}(x_n, x^*) + |\varrho_{\zeta}^{\Re}(x_n, \mathcal{T}x_n) - \varrho_{\zeta}^{\Re}(x^*, \mathcal{T}x^*)|$$

yazılıp, (4.14) ifadesi ile birlikte $n \rightarrow \infty$ iken limit alınırsa $\mathbb{E}(x_n, x^*) \rightarrow \varrho_{\zeta}^{\Re}(x^*, \mathcal{T}x^*)$ dir. Ayrıca,

$$\mathcal{N}(x_n, x^*) = \min\{\varrho_{\zeta}^{\Re}(x_n, \mathcal{T}x_n), \varrho_{\zeta}^{\Re}(x^*, \mathcal{T}x^*), \varrho_{\zeta}^{\Re}(x_n, \mathcal{T}x^*), \varrho_{\zeta}^{\Re}(x^*, \mathcal{T}x_n)\}$$

eşitliğinde (4.14) ifadesi ile birlikte $n \rightarrow \infty$ iken $\mathcal{N}(x_n, x^*) \rightarrow 0$ olur.

Sonuç olarak, $n \rightarrow \infty$ iken (4.15) ifadesinde limit alınırsa ve (4.14) ifadesini yukarıda elde edilenlerle birlikte düşünersek (4.15) eşitsizliği

$$\tau^{\lambda+1} \varrho_{\zeta}^{\Re}(x^*, \mathcal{T}x^*) < \mathcal{B}(\varrho_{\zeta}^{\Re}(x^*, \mathcal{T}x^*)) \varrho_{\zeta}^{\Re}(x^*, \mathcal{T}x^*) < \varrho_{\zeta}^{\Re}(x^*, \mathcal{T}x^*)$$

eşitsizliğine dönüşmektedir.

Fakat bu çelişir. Bunun üzerine $x^* = \mathcal{T}x^*$ anlamına gelen

$$\varrho_{\zeta}^{\Re}(x^*, \mathcal{T}x^*) = 0 \text{ ifadesi elde edilir.}$$

Ayrıca sabit noktanın tekliği, $(\mathcal{H})$ özelliğinin Teorem 4.2.1' in şartlarına ilave edilerek gösterilmektedir.

$(\mathcal{H})$ $\mathcal{T}$ dönüşümünün sabit noktaları x^* ve y^* için $x^* \Re y^*$ ya da $y^* \Re x^*$ dır.

Burada, $(\mathcal{H})$ özelliğinden $x^* \Re y^*$ ile $\mathcal{T}x^* = x^* \neq y^* = \mathcal{T}y^*$ ifadesi elde edilir. (4.1) ifadesinde

$$1 \leq \eta(\tau \mathfrak{L}(\varrho_{\zeta}^{\Re}(\mathcal{T}x^*, \mathcal{T}y^*)), \mathfrak{L}(\mathcal{B}(\mathbb{E}(x^*, y^*))\mathbb{E}(x^*, y^*) + k\mathcal{N}(x^*, y^*)))$$

olur. Benzer ifade ve özelliklerin kullanılmasıyla

$$\tau^{\lambda+1} \varrho_{\zeta}^{\Re}(Tx^*, Ty^*) < B(E(x^*, y^*))E(x^*, y^*) + k\mathcal{N}(x^*, y^*) \quad (4.16)$$

olduğu görülmektedir. O halde, $E(x^*, y^*) = \varrho_{\zeta}^{\Re}(x^*, y^*)$ ve $\mathcal{N}(x^*, y^*) = 0$ olduğu açıktır. Öyleyse, $\varrho_{\zeta}^{\Re}(x^*, y^*) \neq 0$ durumuyla çelişki oluşturan

$$\tau^{\lambda+1} \varrho_{\zeta}^{\Re}(x^*, y^*) < B\left(\varrho_{\zeta}^{\Re}(x^*, y^*)\right) \varrho_{\zeta}^{\Re}(x^*, y^*) < \varrho_{\zeta}^{\Re}(x^*, y^*)$$

ifadesi elde edilir. Buradan, $x^* = y^*$ dir.

Teorem 4.2.1' in uygulanmasından elde edilen çeşitli sonuçlar aşağıdaki gibi verilir.

Sonuç 4.2.2. $\mathfrak{X}_{\varrho^{\Re}}$ uzayı, $\tau \geq 1$ ile $\Re$ –tam $\Re$ –modüler b –metrik–gibi uzayı ve her bir $y \in \mathfrak{X}_{\varrho^{\Re}}$ için $x_0 \Re y$ olan $x_0 \in \mathfrak{X}_{\varrho^{\Re}}$ olsun. $\mathcal{T}: \mathfrak{X}_{\varrho^{\Re}} \rightarrow \mathfrak{X}_{\varrho^{\Re}}$ $\Re$ –korumalı bir dönüşüm ve her $x, y \in \mathfrak{X}_{\varrho^{\Re}}$ için $x \Re y, x \Re \mathcal{T}x$ ve $y \Re \mathcal{T}y$ ile

$$\psi\left(\tau^{\lambda} \varrho_{\zeta}^{\Re}(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y)\right) \leq \psi\left(\varrho_{\zeta}^{\Re}(B(E(x, y))E(x, y))\right)$$

ifadesini sağlayan $\psi \in \Psi^*$, $\varrho \in \Theta$ ve $B \in \mathfrak{B}_{\tau}$ fonksiyonlar mevcut olsun. Burada $E(x, y)$, (4.2) ifadesindeki gibi tanımlıdır. Buradan, $\mathcal{T}$ dönüşümü $\varrho_{\zeta}^{\Re}(x^*, x^*) = 0$ olmak üzere $x^* \in \mathfrak{X}_{\varrho^{\Re}}$ sabit noktasına sahiptir.

İspat. (η_2') ifadesi dikkate alınarak ve $k = 0$ için istenen elde edilir.

Sonuç 4.2.3. $\mathfrak{X}_{\varrho^{\Re}}$ uzayı, $\tau \geq 1$ ile $\Re$ –tam $\Re$ –modüler b –metrik–gibi uzay ve her bir $y \in \mathfrak{X}_{\varrho^{\Re}}$ için $x_0 \Re y$ olan $x_0 \in \mathfrak{X}_{\varrho^{\Re}}$ olsun. $\mathcal{T}: \mathfrak{X}_{\varrho^{\Re}} \rightarrow \mathfrak{X}_{\varrho^{\Re}}$ dönüşümü $\Re$ –korumalı bir dönüşüm ve her $x, y \in \mathfrak{X}_{\varrho^{\Re}}$ için $x \Re y, x \Re \mathcal{T}x$ ve $y \Re \mathcal{T}y$ ile

$$\psi\left(\tau^{\lambda} \varrho_{\zeta}^{\Re}(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y)\right) \leq \phi\left(\varrho_{\zeta}^{\Re}(B(E(x, y))E(x, y))\right),$$

ifadesini sağlayan $\psi \in \Psi^*$, $\varrho \in \Theta$ ve $B \in \mathfrak{B}_{\tau}$ fonksiyonlar mevcut olsun. Burada $E(x, y)$, (4.2) ifadesindeki gibi tanımlı ve her $\hat{q} > 0$ için $\phi(\hat{q}) < \psi(\hat{q})$ özelliğini sağlayan $\phi: [1, \infty) \rightarrow [1, \infty)$ sürekli bir dönüşüm olsun. Buradan $\mathcal{T}$ dönüşümü $\varrho_{\zeta}^{\Re}(x^*, x^*) = 0$ olmak üzere $x^* \in \mathfrak{X}_{\varrho^{\Re}}$ sabit noktasına sahiptir.

İspat. $\eta(\hat{c}, \hat{q}) = \frac{\phi(\hat{q})}{\psi(\tau^{\lambda} \hat{c})}$ seçerken $k = 0$ ve her $\hat{c}, \hat{q} > 1$ için Teorem 4.2.1'de verilen şartlar sağlanmaktadır. Bu yaklaşım, $\hat{c}$ ve $\hat{q}$ değişkenleri arasındaki bağlantıya sırasıyla ϕ ve ψ fonksiyonları ile elde edilen analitik bir çerçevenin altı çizilmektedir. η fonksiyonunun bu özel halini kullanma kararı, teoremden sunulan kapsamlı analizle

desteklenmektedir; bu analiz, böyle bir ifadenin hangi şartlar altında optimal sonuçları sağladığını göstermektedir.

Sonuç 4.2.4. $\mathfrak{X}_{\varrho^{\mathfrak{R}}}$, $\tau \geq 1$ sabiti ile $\mathfrak{R}$ –tam $\mathfrak{R}$ –modüler b –metrik–gibi uzay ve her bir $y \in \mathfrak{X}_{\varrho^{\mathfrak{R}}}$ için $x_0 \mathfrak{R} y$ olan $x_0 \in \mathfrak{X}_{\varrho^{\mathfrak{R}}}$ olsun. $\mathcal{T}: \mathfrak{X}_{\varrho^{\mathfrak{R}}} \rightarrow \mathfrak{X}_{\varrho^{\mathfrak{R}}}$ dönüşümü $\mathfrak{R}$ –korumalı bir dönüşüm ve her $x, y \in \mathfrak{X}_{\varrho^{\mathfrak{R}}}$ için $x \mathfrak{R} y, x \mathfrak{R} \mathcal{T}x$ ve $y \mathfrak{R} \mathcal{T}y$ ile

$$\varrho_{\zeta}^{\mathfrak{R}}(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y) \leq \delta E(x, y),$$

ifadesini sağlayan $E(x, y)$, (4.2) ifadesindeki gibi tanımlı ve $\delta = \frac{1}{\tau^{\lambda+1}}$ olsun. Bu durumda, $\mathcal{T}$ dönüşümü $\varrho_{\zeta}^{\mathfrak{R}}(x^*, x^*) = 0$ olmak üzere $x^* \in \mathfrak{X}_{\varrho^{\mathfrak{R}}}$ sabit noktasına sahiptir.

İspat. Uyarı 1.5.3 ve $\psi \in \Psi^*$ fonksiyonunun yanına $\mathfrak{L} \in \Theta$ fonksiyonunun dahil edilmesiyle ispat, Sonuç 4.2.2’ nin ispatına benzer şekilde elde edilir.

$\tau = 1$ seçilirse $\mathfrak{R}$ –modüler metrik–gibi uzaylarda da bu sonuçlar geçerlidir. Özellikle, Sonuç 4.2.2’ de belirtildiği gibi $\tau = 1$ alınması, ψ ’ nin $\Psi^{*’}$ ye ait olması ve $\mathfrak{L} \in \Theta$ ile birleştiğinde yeni bir sonuç ortaya çıkar.

Sonuç 4.2.5. $\mathfrak{X}_{\varrho^{\mathfrak{R}}}$, $\tau \geq 1$ sabiti ile $\mathfrak{R}$ –tam $\mathfrak{R}$ –modüler metrik–gibi uzay ve her bir $y \in \mathfrak{X}_{\varrho^{\mathfrak{R}}}$ için $x_0 \mathfrak{R} y$ olan $x_0 \in \mathfrak{X}_{\varrho^{\mathfrak{R}}}$ olsun. $\mathcal{T}: \mathfrak{X}_{\varrho^{\mathfrak{R}}} \rightarrow \mathfrak{X}_{\varrho^{\mathfrak{R}}}$ $\mathfrak{R}$ –korumalı bir dönüşüm ve her $x, y \in \mathfrak{X}_{\varrho^{\mathfrak{R}}}$ için $x \mathfrak{R} y, x \mathfrak{R} \mathcal{T}x$ ve $y \mathfrak{R} \mathcal{T}y$ ile

$$\varrho_{\zeta}^{\mathfrak{R}}(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y) \leq \mathcal{B}(E(x, y))E(x, y)$$

ifadesini sağlayan $\mathcal{B} \in \mathfrak{B}_{\tau}$ fonksiyonu mevcut olsun. Burada $E(x, y)$, (4.2) ifadesindeki gibi tanımlıdır. Buradan, $\mathcal{T}$ dönüşümü $\varrho_{\zeta}^{\mathfrak{R}}(x^*, x^*) = 0$ olmak üzere $x^* \in \mathfrak{X}_{\varrho^{\mathfrak{R}}}$ sabit noktasına sahiptir.

Teorem 4.2.1’ de tanımlanan temel hususlara dayanarak, buradan türetilen sonuçlar modüler b –metrik–gibi uzaylarda da geçerlidir.

Teorem 4.2.6. $\mathfrak{X}_{\varrho^*}$ $\tau \geq 1$ sabiti ile ϱ^* –tam modüler b –metrik–gibi uzay ve $\mathcal{T}: \mathfrak{X}_{\varrho^*} \rightarrow \mathfrak{X}_{\varrho^*}$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in \mathfrak{X}_{\varrho^*}$ için

$$E(x, y) = \varrho_{\zeta}^*(x, y) + |\varrho_{\zeta}^*(x, \mathcal{T}x) - \varrho_{\zeta}^*(y, \mathcal{T}y)|$$

ve

$$\mathcal{N}(x, y) = \min\{\varrho_{\zeta}^*(x, \mathcal{T}x), \varrho_{\zeta}^*(y, \mathcal{T}y), \varrho_{\zeta}^*(x, \mathcal{T}y), \varrho_{\zeta}^*(y, \mathcal{T}x)\}$$

iken, $k \geq 0$ olmak üzere $\eta, \mathfrak{L} \in \Theta$ ve $\mathcal{B} \in \mathfrak{B}_{\tau}$ ye göre

$$\eta \left(\mathfrak{L} \left(\tau \varrho_{\zeta}^*(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y) \right), \mathfrak{L} \left(\mathcal{B}(\mathcal{E}(x, y)) \mathcal{E}(x, y) + k \mathcal{N}(x, y) \right) \right) \geq 1,$$

eşitsizliğini sağlayan genelleştirilmiş Ψ^*b –simülasyon fonksiyonu mevcuttur.

Bu durumda $\varrho_{\zeta}^*(x^*, x^*) = 0$ olan $\mathcal{T}$ dönüşümü, $x^* \in \mathfrak{X}_{\varrho^*}$ sabit noktasına sahiptir.

İspat. Teoremin ispatı, Teorem 4.2.1.’ in ispatına benzer şekilde yapılır.

4.3. $\mathfrak{R}$ –Modular b –Metrik–Gibi Uzaylarda Uygulamalar

4.3.1. Dinamik programlamada uygulama

Σ ve Υ , $\mathfrak{X} \subseteq \Sigma$ ve $\Xi \subseteq \Upsilon$ olan iki Banach uzayı olsun; burada, $\mathfrak{X}$ ve Ξ sırasıyla durum uzayını ve karar uzayını temsil etmektedir. İki sınırlı fonksiyon $f: \mathfrak{X} \times \Xi \rightarrow \mathbb{R}$ ve $G: \mathfrak{X} \times \Xi \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları ve ayrıca

$$q(x) = \sup_{y \in \Xi} \left\{ f(x, y) + G \left(x, y, q(\xi(x, y)) \right) \right\}$$

olan $\xi: \mathfrak{X} \times \Xi \rightarrow \mathfrak{X}$ ve $x \in \mathfrak{X}$ var olsun.

$\mathfrak{X}_{\varrho^{\mathfrak{R}}} = B(\mathfrak{X})$, $\mathfrak{X}$ üzerinde sınırlı reel-değerli fonksiyonların uzayı olsun. Her $\varsigma, \kappa \in \Sigma$, $e \in \mathbb{R}_0^+$ ve $\zeta > 0$ için $\|\varsigma\| = \sup_{x \in \mathfrak{X}} |\varsigma(x)|$ iken

$$\varrho_{\zeta}^{\mathfrak{R}}(\varsigma, \kappa) = e^{-\zeta} \|\varsigma - \kappa\|^2 + \|\varsigma\| + \|\kappa\|$$

metriği tanımlansın. Ayrıca, $\mathfrak{X}$ üzerinde “ $\varsigma \mathfrak{R} \kappa$ olması için gerek ve yeter şart $\varsigma = \kappa$ ya da $\varsigma, \kappa \geq 0$ dır” bağıntısı verilsin. $(\mathfrak{X}_{\varrho^{\mathfrak{R}}}, \mathfrak{R}, 2)$ $\mathfrak{R}$ –tam $\mathfrak{R}$ –modüler b –metrik–gibi uzayıdır. Ayrıca, $x \in \mathfrak{X}$ ve $\varsigma \in \mathfrak{X}_{\varrho^{\mathfrak{R}}}$ iken $\mathcal{T}: \mathfrak{X}_{\varrho^{\mathfrak{R}}} \rightarrow \mathfrak{X}_{\varrho^{\mathfrak{R}}}$ dönüşümü

$$\mathcal{T}\varsigma(x) = \sup_{y \in \Xi} \left\{ f(x, y) + G \left(x, y, \varsigma(\xi(x, y)) \right) \right\} \quad (4.17)$$

şeklindedir. f ve G fonksiyonları sınırlı ise Σ ve Υ uzayları iyi tanımlanmıştır.

Teorem 4.3.1.1. $\mathcal{T}: \mathfrak{X}_{\varrho^{\mathfrak{R}}} \rightarrow \mathfrak{X}_{\varrho^{\mathfrak{R}}}$ operatörü (4.17) ifadesindeki gibi tanımlansın ve aşağıdakiler sağlansın:

(i) f ve G sınırlıdır,

(ii) her $\varsigma, \kappa \in \mathfrak{X}_{\varrho^{\mathfrak{N}}}$, $y \in \Xi$ ve $x \in \mathfrak{X}$ için

$$|G(x, y, \varsigma(x)) - G(x, y, \kappa(x))| < \delta^{1/2} |\varsigma(x) - \kappa(x)|$$

olan $\delta \in (0,1)$ elemanı vardır,

(iii) her $(x, y) \in \mathfrak{X} \times \Xi$ için $f: \mathfrak{X} \times \Xi \rightarrow \mathbb{R}$ iken

$$G(x, y, \varsigma(x)) \leq \varsigma(x) - f(x, y)$$

olsun,

(iv) her $\varsigma \in \mathfrak{X}_{\varrho^{\mathfrak{N}}}$, $\delta \in (0,1)$ iken $|\sup \varsigma(x)| \leq \delta |\varsigma(x)|$ olsun.

Fonksiyon denklemi (4.17)'nin sınırlı bir çözümü vardır; yani $\mathcal{T}$ dönüşümünün bir sabit noktası vardır.

İspat. $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ keyfi, $x \in \mathfrak{X}$ ve $\varsigma \in \mathfrak{X}_{\varrho^{\mathfrak{N}}}$ olsun. $\mathcal{T}\varsigma \neq \varsigma$ olduğu kabul edilsin. Bu durumda,

$$\mathcal{T}\varsigma(x) < f(x, y_1) + G(x, y_1, \varsigma(\xi(x, y_1))) + \epsilon, \quad (4.18)$$

$$\mathcal{T}\kappa(x) < f(x, y_2) + G(x, y_2, \kappa(\xi(x, y_2))) + \epsilon, \quad (4.19)$$

$$\mathcal{T}\varsigma(x) \geq f(x, y_2) + G(x, y_2, \varsigma(\xi(x, y_2))), \quad (4.20)$$

$$\mathcal{T}\kappa(x) \geq f(x, y_1) + G(x, y_1, \kappa(\xi(x, y_1))), \quad (4.21)$$

olan $y_1, y_2 \in \Xi$ elemanları vardır. Burada, (4.18) ve (4.21) ifadelerinden

$$\begin{aligned} \mathcal{T}\varsigma(x) - \mathcal{T}\kappa(x) &< G(x, y_1, \varsigma(\xi(x, y_1))) - G(x, y_1, \kappa(\xi(x, y_1))) + \epsilon \\ &\leq \left| G(x, y_1, \varsigma(\xi(x, y_1))) - G(x, y_1, \kappa(\xi(x, y_1))) \right| + \epsilon \\ &< \delta^{1/2} |\varsigma(x) - \kappa(x)| + \epsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Aynı şekilde, (4.19) ve (4.20) ifadelerinden

$$\begin{aligned} \mathcal{T}\kappa(x) - \mathcal{T}\varsigma(x) &< G(x, y_2, \kappa(\xi(x, y_2))) - G(x, y_2, \varsigma(\xi(x, y_2))) + \epsilon \\ &\leq \left| G(x, y_2, \kappa(\xi(x, y_2))) - G(x, y_2, \varsigma(\xi(x, y_2))) \right| + \epsilon \\ &< \delta^{1/2} |\varsigma(x) - \kappa(x)| + \epsilon \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Dolayısıyla, yukarıdaki ifadeleri göz önünde bulundurarak,

$$|\mathcal{T}\kappa(x) - \mathcal{T}\varsigma(x)| < \delta^{1/2}|\varsigma(x) - \kappa(x)| + \epsilon$$

ve keyfi bir ϵ için

$$|\mathcal{T}\kappa(x) - \mathcal{T}\varsigma(x)| < \delta^{1/2}|\varsigma(x) - \kappa(x)|$$

ifadesine ya da denk olacak şekilde

$$\|\mathcal{T}\kappa(x) - \mathcal{T}\varsigma(x)\| \leq \delta^{1/2}\|\varsigma(x) - \kappa(x)\| \quad (4.22)$$

ifadesi elde edilir. Buradan

$$|\mathcal{T}\varsigma(x)| = \left| \sup_{y_1 \in \Xi} \left\{ f(x, y_1) + G\left(x, y_1, \varsigma(\xi(x, y_1))\right) \right\} \right| \leq \delta|\varsigma(x)|$$

ifadesine ulaşılır, yani

$$\|\mathcal{T}\varsigma(x)\| \leq \delta\|\varsigma(x)\| \quad (4.23)$$

sonucuna varılır. O halde, (4.22) ve (4.23) ifadelerinden

$$\begin{aligned} \varrho_{\zeta}^{\Re}(\mathcal{T}\varsigma(x), \mathcal{T}\kappa(x)) &= e^{-\zeta} \|\mathcal{T}\varsigma(x) - \mathcal{T}\kappa(x)\|^2 + \|\mathcal{T}\varsigma(x)\| + \|\mathcal{T}\kappa(x)\| \\ &\leq e^{-\zeta} \delta \|\varsigma(x) - \kappa(x)\|^2 + \delta \|\varsigma(x)\| + \delta \|\kappa(x)\| \\ &= \delta \left[e^{-\zeta} \|\varsigma(x) - \kappa(x)\|^2 + \|\varsigma(x)\| + \|\kappa(x)\| \right] \\ &= \delta \varrho_{\zeta}^{\Re}(\varsigma(x), \kappa(x)) \end{aligned} \quad (4.24)$$

ifadesine ulaşılır. Sonuç olarak, (4.24) ifadesinden

$$\begin{aligned} \varrho_{\zeta}^{\Re}(\mathcal{T}\varsigma(x), \mathcal{T}\kappa(x)) &\leq \delta \varrho_{\zeta}^{\Re}(\varsigma(x), \kappa(x)) \\ &\leq \delta \left[\varrho_{\zeta}^{\Re}(\varsigma(x), \kappa(x)) + \left| \varrho_{\zeta}^{\Re}(\varsigma(x), \mathcal{T}\varsigma(x)) - \varrho_{\zeta}^{\Re}(\kappa(x), \mathcal{T}\kappa(x)) \right| \right] \\ &= \delta E(\varsigma(x), \kappa(x)) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\delta = \frac{1}{\tau^{\lambda+1}}$ alındığında Sonuç 4.2.4'ün tüm koşullarının sağlandığı görülür. Böylece, $\mathcal{T}$ dönüşümünün sabit bir noktaya sahip olduğu elde edilir yani fonksiyon denklemi (4.17) sınırlı bir çözüme sahiptir.

4.3.2. RLC devre modelinde uygulama

Fotovoltaik, ışığın doğrudan atom seviyesinde elektriğe dönüştürülmesidir. Bu malzemeler, fotoelektrik etki olarak bilinen ve ışığın fotonlarını almalarına ve elektronları serbest bırakmalarına neden olan bir özellik sergilemektedir. Bu serbest elektronlar yakalandığında akım elektrik olarak kullanılır. İlk fotovoltaik modül güneş pili olarak tanımlanırdı ancak yaygın olarak kullanılamayacak kadar maliyetliydi. Uzay araştırmalarının getirdiği teknoloji ile maliyetler düşmüş, alternatif enerji kaynağı olarak güneş panelleri günümüz dünyasında önemli bir enerji kaynağı haline gelmiştir. Işığın elektrik enerjisine dönüştürüldüğü sürecin temel bir anlayışının kazanılmasıyla, genellikle ayarlama devresi olarak adlandırılan paralel bir RLC devresi içindeki elektrik akımı akışının matematiksel bir modelini oluşturmak mümkün hale gelmektedir[91].

Şekil 4.2'de V güç kaynağının voltajı, I devredeki akım, R direncin direnci, L indüktörün endüktansı ve C kapasitörün kapasitansıdır. Bu tür problemler, ikinci dereceden adi diferansiyel denklemler için başlangıç değer problemleri olarak matematiksel olarak modellenenbilmektedir:

$$\begin{cases} \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du}{dt} = \mathfrak{J}(t, u(t)), t \in [0,1], \\ u(0) = u'(0) = 0 \end{cases} \quad (4.25)$$

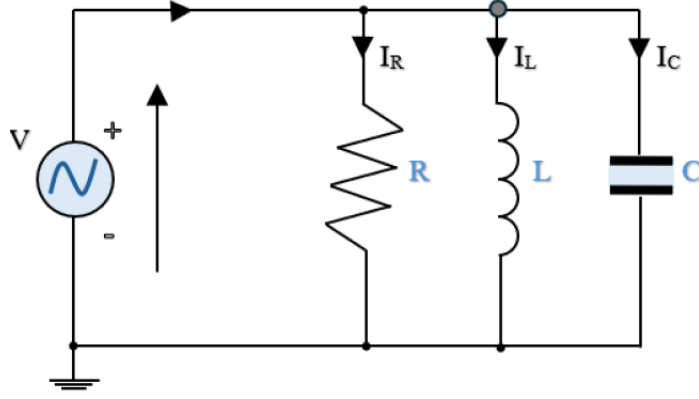
Burada $\mathfrak{J}: [0,1] \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyondur. Bu bölümde, (4.25) ifadesindeki RLC diferansiyel denkleminin çözümünün var olduğunu gösterilecektir. (4.25) problemi

$$u(t) = \int_0^1 \mathfrak{G}(t, \vartheta) \mathfrak{J}(\vartheta, u(\vartheta)) d\vartheta, \quad t \in [0,1], \quad (4.26)$$

şeklindeki integral denklemine eşdeğerdir. Burada $\tau > 0$, (4.25) matematik modellemesinde belirtildiği gibi R ve L cinsinden hesaplanan bir sabit olmak üzere

$$\mathfrak{G}(t, \vartheta) = \begin{cases} (t - \vartheta)e^{\tau(t-\vartheta)}, & 0 \leq \vartheta \leq t \leq 1 \text{ ise} \\ 0, & 0 \leq \vartheta \leq t \leq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

tanımlanan $\mathfrak{G}$ fonksiyonuna Green fonksiyonu denir.



Şekil 4.2. RLC paralel devresi.

$[0,1]$ aralığında tanımlanan tüm sürekli fonksiyonların uzayı $\mathfrak{X} = (C[0,1], \mathbb{R}^+)$ olsun. $\mathfrak{X}$ uzayı üzerinde tanımlı $\varrho^{\mathfrak{R}}: (0, \infty) \times \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \rightarrow [0, \infty]$ modüler b –metrik–gibi fonksiyonu

$$\varrho_{\zeta}^{\mathfrak{R}}(x, y) = \frac{1}{\zeta} \sup_{t \in [0,1]} (|x(t) + |y(t)||)^{\rho}, \quad \text{her } \zeta > 0 \text{ için}$$

ile tanımlansın. Ayrıca, $\mathfrak{R} = \{(u, v) \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} : u(t) \geq v(t), t \in [0,1]\}$ olsun. Buradan, $\mathfrak{X}_{\varrho^{\mathfrak{R}}}$, $\tau = 2^{\rho-1}$ sabitli $\mathfrak{R}$ –tam $\mathfrak{R}$ –modüler b –metrik–gibi uzayıdır.

Teorem 4.3.2.1. Aşağıdaki ifadeler sağlansın:

- (i) $\mathfrak{G}(t, \vartheta): [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0, \infty)$ sürekli bir dönüşümdür,
- (ii) $\delta \in (0,1)$ ve her $u, v \in \mathfrak{X}_{\varrho^{\mathfrak{R}}}$ olacak şekilde $\mathfrak{Z}: [0,1] \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü

$$|\mathfrak{Z}(t, u(t))| + |\mathfrak{Z}(t, v(t))| \leq \delta^{\frac{1}{\rho}} (|u(t)| + |v(t)|)$$

eşitsizliğini sağlar.

O halde, (4.26) integral denklemi bir çözüme sahiptir.

İspat. Her $t \in [0,1]$ için $\mathcal{T}: \mathfrak{X}_{\varrho^{\mathfrak{R}}} \rightarrow \mathfrak{X}_{\varrho^{\mathfrak{R}}}$ dönüşümü

$$\mathcal{T}u(t) = \int_0^1 \mathfrak{G}(t, \vartheta) \mathfrak{Z}(\vartheta, u(\vartheta)) f \vartheta$$

biçiminde tanımlansın. (4.26) integral denkleminin çözümünün varlığı $\mathcal{T}$ dönüşümünün bir sabit noktasının olmasına denktir. $u(t) \geq v(t)$ için,

$$\varrho_{\zeta}^{\mathfrak{R}}(\mathcal{T}u(t), \mathcal{T}v(t)) = \frac{1}{\zeta} (|\mathcal{T}u(t)| + |\mathcal{T}v(t)|)^{\rho}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\zeta} \left(\left| \int_0^1 \mathfrak{G}(\mathfrak{t}, \vartheta) \mathfrak{Z}(\vartheta, u(\vartheta)) d\vartheta \right| + \left| \int_0^1 \mathfrak{G}(\mathfrak{t}, \vartheta) \mathfrak{Z}(\vartheta, v(\vartheta)) d\vartheta \right| \right)^p \\
&\leq \frac{1}{\zeta} \left(\delta^{\frac{1}{p}} \sup_{\mathfrak{t} \in [0,1]} |u(\mathfrak{t})| + |v(\mathfrak{t})| \right)^p \left(\int_0^1 \mathfrak{G}(\mathfrak{t}, \vartheta) d\vartheta \right)^p \\
&= \delta \frac{1}{\zeta} \left(\sup_{\mathfrak{t} \in [0,1]} |u(\mathfrak{t})| + |v(\mathfrak{t})| \right)^p \left(\int_0^1 (\mathfrak{t} - \vartheta) e^{\tau(\mathfrak{t}-\vartheta)} d\vartheta - \frac{\vartheta^2}{2} e^{\tau(\mathfrak{t}-\vartheta)} \tau \left(\frac{-\vartheta^2}{2} \right) \right)^p \\
&= \delta \frac{1}{\zeta} \left(\sup_{\mathfrak{t} \in [0,1]} |u(\mathfrak{t})| + |v(\mathfrak{t})| \right)^p (1 - \tau e^{-\tau\vartheta} - e^{-\tau\vartheta})^p \\
&\leq \delta \varrho_{\zeta}^{\Re}(u(\mathfrak{t}), v(\mathfrak{t}))
\end{aligned}$$

elde edilir, burada $(1 - \tau e^{-\tau\vartheta} - e^{-\tau\vartheta})^p \leq 1$ dir. Ayrıca Sonuç 4.2.4' ün tüm şartlarının sağlandığı

$$\begin{aligned}
&\varrho_{\zeta}^{\Re}(\mathcal{T}u(\mathfrak{t}), \mathcal{T}v(\mathfrak{t})) \\
&\leq \delta [\varrho_{\zeta}^{\Re}(u(\mathfrak{t}), v(\mathfrak{t})) + |\varrho_{\zeta}^{\Re}(u(\mathfrak{t}), \mathcal{T}u(\mathfrak{t})) - \varrho_{\zeta}^{\Re}(v(\mathfrak{t}), \mathcal{T}v(\mathfrak{t}))|] \\
&= \delta E(u(\mathfrak{t}), v(\mathfrak{t}))
\end{aligned}$$

İfadesden görülür. Sonuç olarak bir elektrik devresinde ortaya çıkan başlangıç değer problemi (4.25)'in çözümü bulunmaktadır.



5. ÇOĞUL DEĞERLİ DARALMA DÖNÜŞÜMLERİ İÇİN SABİT NOKTA TEOREMLERİ VE UYGULAMALARI

5.1. Archimedean Olmayan Modüler Metrik Uzaylarda Çoğul Değerli θ –Tipli Daralma Dönüşümü İçin Sabit Nokta Sonuçları

Tanım 5.1.1. $(\mathfrak{X}, \tilde{\mu})$ Archimedean olmayan modüler metrik uzay ve C boştan farklı $\mathfrak{X}$ in alt kümesi olsun. Eğer $H_{\tilde{\mu}}(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y) > 0$ ile birlikte tüm $x, y \in C$ için

$$\theta \left(H_{\tilde{\mu}}(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y) \right) \leq \left[\theta \left(R_{\tilde{\mu}}(x, y) \right) \right]^k \quad (5.1)$$

ve

$$R_{\tilde{\mu}}(x, y) = \max \left\{ \tilde{\mu}_{\lambda}(x, y), \delta_{\lambda}(x, \mathcal{T}x), \delta_{\lambda}(y, \mathcal{T}y), \frac{\delta_{\lambda}(x, \mathcal{T}y) + \delta_{\lambda}(\mathcal{T}x, y)}{2}, \frac{\delta_{\lambda}(\mathcal{T}y, y)(1 + \delta_{\lambda}(x, \mathcal{T}x))}{1 + \delta_{\lambda}(x, y)} \right\}$$

olan $k \in (0,1)$ mevcutsa $\mathcal{T}: C \rightarrow CB(\mathfrak{X})$ dönüşümüne çoğul değerli rasyonel θ –tipli daralması adı verilir. Burada $\theta: (0, \infty) \rightarrow (1, \infty)$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlayan bir fonksiyondur:

θ_1) θ azalmayan ve süreklidir,

θ_2) $\inf_{t \in (0, \infty)} \theta(t) = 1'$ dir.

Önerme 5.1.2. $\theta: (0, \infty) \rightarrow (1, \infty)$ fonksiyonu sürekli ve $\inf_{t \in (0, \infty)} \theta(t) = 1$ olsun. $\{t_k\}$ dizisi ise $(0, \infty)$ aralığında tanımlı .azalmayan bir dizi olarak verilsin. Bu durumda

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \theta(t_k) = 1 \text{ iken } \lim_{k \rightarrow \infty} t_k = 0$$

dır.

Tanım 5.1.3. $(\mathfrak{X}, \tilde{\mu})$ Archimedean olmayan modüler metrik uzay olsun. $\tilde{\mu}$ Fatou özelliğini sağlar ancak ve ancak $\mathfrak{X}_{\tilde{\mu}}$ uzayında x noktasına $\tilde{\mu}$ –yakınsak herhangi bir $\{x_n\}$ dizisi için

$$\tilde{\mu}_{\lambda}(x, y) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\mu}_{\lambda}(x_n, y)$$

olan $y \in \mathfrak{X}_{\tilde{\mu}}$ vardır.

Tanım 5.1.4. $\tilde{\mu}$ Archimedean olmayan modüler metrik olsun. $\tilde{\mu}$ metriği Δ_2 –şartını sağlar ancak ve ancak bazı $\lambda > 0$ için, $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\mu}_\lambda(x_n, x) = 0$ ise tüm $\lambda > 0$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\mu}_\lambda(x_n, x) = 0$ dır.

Tanım 5.1.5. $(\mathfrak{X}, \tilde{\mu})$ Archimedean olmayan modüler metrik uzay olsun. Eğer herhangi $\alpha > 0$ ve $\lambda > 0$ için

$$\tilde{\mu}_{\lambda/\alpha}(x, y) \leq K \tilde{\mu}_\lambda(x, y)$$

olan $x \neq y$ iken $x, y \in \mathfrak{X}_{q^\mu}$ ve $\lambda > 0$ değeri var ise $\tilde{\mu}$, Δ_2 –tip şartını sağlar.

Aşağıda verilen önermelerin ispatları modüler metrik uzaylardaki gibi benzer şekilde edilir.

Önerme 5.1.6. $(\mathfrak{X}, \tilde{\mu})$ Archimedean olmayan modüler metrik uzay olsun. $\tilde{\mu}$, Δ_2 –tip şartını sağlayan dışbükey regüler bir modüler olsun. K sıfırdan farklı bir sabit ve $\alpha \in (0,1)$ iken

$$\tilde{\mu}_\lambda(x_n, x_{n+1}) \leq K\alpha^n, \quad n \in \mathbb{N}^+$$

ifadesini sağlayan $\mathfrak{X}_{\tilde{\mu}}$ uzayında $\{x_n\}$ bir dizisi verilsin. O halde $\{x_n\}$ dizisi $\tilde{\mu}$ ve $\tilde{\mu}^*$ metrikleri için Cauchy dizisidir.

Önerme 5.1.7. $(\mathfrak{X}, \tilde{\mu})$ bir Archimedean olmayan modüler metrik uzay olsun ve $\tilde{\mu}$, Δ_2 –şartını sağlasın. $\mathfrak{X}_{\tilde{\mu}}$ uzayının boştan farklı bir alt kümesi C , $CB(C)$ kümesinin bir dizisi $\mathcal{R}_n$ ve $\mathcal{R}_0 \in CB(C)$ iken $\lim_{n \rightarrow \infty} H_{\tilde{\mu}}(\mathcal{R}_n, \mathcal{R}_0) = 0$ olsun. Eğer $s_n \in \mathcal{R}_n$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s_0$ ise $s_0 \in \mathcal{R}_0$ dir.

Önerme 5.1.8. $(\mathfrak{X}, \tilde{\mu})$ bir Archimedean olmayan modüler metrik uzay olsun. $\mathfrak{X}_{\tilde{\mu}}$ uzayının boştan farklı bir alt kümesi C ve $\mathcal{R}, M \in CB(C)$ olsun. Herhangi $\varepsilon > 0$ ve $s \in \mathcal{R}$ için

$$\tilde{\mu}_\lambda(s, m) \leq H_{\tilde{\mu}}(\mathcal{R}, M) + \varepsilon$$

olan $m \in M$ vardır.

Ayrıca, M , $\tilde{\mu}$ –kompakt ve $\tilde{\mu}$ Fatou özelliğine sahip ise herhangi $s \in \mathcal{R}$ ve $m \in M$ için

$$\tilde{\mu}_\lambda(s, m) \leq H_{\tilde{\mu}}(\mathcal{R}, M)$$

eşitsizliği sağlanır.

(γ) özelliği: $\tilde{\mu}$, Fatou özelliğini ve Δ_2 -şartını sağlayan dışbükey regüler bir modüler ve $C \setminus \mathfrak{X}_{\tilde{\mu}}$ uzayının boştan farklı bir $\tilde{\mu}$ -tam alt kümesi olsun.

Teorem 5.1.9. $(\mathfrak{X}, \tilde{\mu})$ bir Archimedean olmayan modüler metrik uzay ve $\tilde{\mu}$, (γ) özelliğini sağlayan dışbükey regüler bir modüler olsun. C , $\mathfrak{X}_{\tilde{\mu}}$ uzayının boştan farklı bir alt kümesi ve $\mathcal{T}: C \rightarrow K(C)$ çoğul değerli rasyonel θ -tipli daralması olsun. Bazı $x_0, x_1 \in \mathfrak{X}_{q^\mu}$ için $\tilde{\mu}_\lambda(x_0, x_1) < \infty$ iken $\mathcal{T}$ dönüşümünün $C \subseteq \mathfrak{X}_{\tilde{\mu}}$ kümesinde bir sabit noktası vardır.

İspat: $x_0 \in C$ keyfi bir değer ve $x_1 \in \mathcal{T}x_0$ olsun. Bu durumda

$$\tilde{\mu}_\lambda(x_1, x_2) \leq H_{\tilde{\mu}}(\mathcal{T}x_0, \mathcal{T}x_1) \quad (5.2)$$

olan $x_2 \in \mathcal{T}x_1$ vardır. $\mathcal{T}$ dönüşümü çoğul değerli rasyonel θ -tipli daralma dönüşümü olduğundan

$$\begin{aligned} \theta(\tilde{\mu}_\lambda(x_1, x_2)) &\leq \theta(H_{\tilde{\mu}}(\mathcal{T}x_0, \mathcal{T}x_1)) \leq \left[\theta(R_{\tilde{\mu}}(x_0, x_1)) \right]^k \\ &= \left[\theta(\max\{\tilde{\mu}_\lambda(x_0, x_1), \delta_\lambda(x_0, \mathcal{T}x_0), \delta_\lambda(x_1, \mathcal{T}x_1), \frac{\delta_\lambda(x_0, \mathcal{T}x_1) + \delta_\lambda(\mathcal{T}x_0, x_1)}{2}, \right. \\ &\quad \left. \frac{\delta_\lambda(\mathcal{T}x_1, x_1)(1 + \delta_\lambda(x_0, \mathcal{T}x_0))}{1 + \delta_\lambda(x_0, x_1)}\} \right]^k \end{aligned} \quad (5.3)$$

yazılır. Buradan

- $\delta_\lambda(x_0, \mathcal{T}x_0) = \inf_{x_1 \in \mathcal{T}x_0} \{\tilde{\mu}_\lambda(x_0, x_1)\} \leq \tilde{\mu}_\lambda(x_0, x_1)$
- $\delta_\lambda(x_1, \mathcal{T}x_1) = \inf_{x_2 \in \mathcal{T}x_1} \{\tilde{\mu}_\lambda(x_1, x_2)\} \leq \tilde{\mu}_\lambda(x_1, x_2)$
- $\delta_\lambda(x_0, \mathcal{T}x_1) = \inf_{x_2 \in \mathcal{T}x_1} \{\tilde{\mu}_\lambda(x_0, x_2)\} \leq \tilde{\mu}_\lambda(x_0, x_2)$
- $\delta_\lambda(\mathcal{T}x_0, x_1) = \inf_{x_1 \in \mathcal{T}x_0} \{\tilde{\mu}_\lambda(x_1, x_1)\} = 0$
- $\delta_\lambda(\mathcal{T}x_1, x_1) = \inf_{x_2 \in \mathcal{T}x_1} \{\tilde{\mu}_\lambda(x_2, x_1)\} \leq \tilde{\mu}_\lambda(x_2, x_1)$

elde edilir ve bu durumda (5.3) eşitsizliğinde

$$\begin{aligned} &R_{\tilde{\mu}}(x_0, x_1) \\ &= \max \left\{ \tilde{\mu}_\lambda(x_0, x_1), \tilde{\mu}_\lambda(x_1, x_2), \frac{\tilde{\mu}_\lambda(x_0, x_2)}{2}, \frac{\tilde{\mu}_\lambda(x_2, x_1)(1 + \tilde{\mu}_\lambda(x_0, x_1))}{1 + \tilde{\mu}_\lambda(x_0, x_1)} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \max \left\{ \tilde{\mu}_\lambda(x_0, x_1), \tilde{\mu}_\lambda(x_1, x_2), \frac{\tilde{\mu}_{\max\{\lambda, \lambda\}}(x_0, x_1) + (x_1, x_2)}{2} \right\} \\
&\leq \max \left\{ \tilde{\mu}_\lambda(x_0, x_1), \tilde{\mu}_\lambda(x_1, x_2), \frac{\tilde{\mu}_\lambda(x_0, x_1) + \tilde{\mu}_\lambda(x_1, x_2)}{2} \right\} \\
&= \max\{\tilde{\mu}_\lambda(x_0, x_1), \tilde{\mu}_\lambda(x_1, x_2)\}
\end{aligned}$$

ifadesine ulaşılır. Burada $\max\{\tilde{\mu}_\lambda(x_0, x_1), \tilde{\mu}_\lambda(x_1, x_2)\} = \tilde{\mu}_\lambda(x_1, x_2)$ ise (5.3) eşitsizliğinde yerine yazılırsa $k \in (0,1)$ olduğundan

$$1 < \theta(\tilde{\mu}_\lambda(x_1, x_2)) \leq \theta(H_{\tilde{\mu}}(\mathcal{T}x_0, \mathcal{T}x_1)) \leq [\theta(\tilde{\mu}_\lambda(x_1, x_2))]^k$$

çelişkisi elde edilir. O halde, $\max\{\tilde{\mu}_\lambda(x_0, x_1), \tilde{\mu}_\lambda(x_1, x_2)\} = \tilde{\mu}_\lambda(x_0, x_1)$ dır. Dolayısıyla (5.3) eşitsizliğinde

$$\theta(\tilde{\mu}_\lambda(x_1, x_2)) \leq \theta(H_{\tilde{\mu}}(\mathcal{T}x_0, \mathcal{T}x_1)) \leq [\theta(\tilde{\mu}_\lambda(x_0, x_1))]^k \quad (5.4)$$

olur. Benzer şekilde, $\mathcal{T}$ çoğul değerli rasyonel θ –tipli daralma dönüşümü olduğundan

$$\theta(\tilde{\mu}_\lambda(x_2, x_3)) \leq [\theta(\tilde{\mu}_\lambda(x_1, x_2))]^k \quad (5.5)$$

elde edilir. Buradan (5.4) ve (5.5) eşitsizliklerinin bir araya getirilmesiyle

$$1 < \theta(\tilde{\mu}_\lambda(x_2, x_3)) \leq [\theta(\tilde{\mu}_\lambda(x_1, x_2))]^k \leq [\theta(\tilde{\mu}_\lambda(x_0, x_1))]^{k^2}$$

sonucuna ulaşılır. Bu şekilde devam edilerek C kümesinde $x_n \neq x_{n+1}$ ve her $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $\{x_n\}$ dizisi

$$1 < \theta(\tilde{\mu}_\lambda(x_n, x_{n+1})) \leq [\theta(\tilde{\mu}_\lambda(x_0, x_1))]^{k^n} \quad (5.6)$$

ifadesini sağlayacak biçimde elde edilir.

Eğer $n \rightarrow \infty$ iken (5.6) eşitsizliğinde limit alınırsa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \theta(\tilde{\mu}_\lambda(x_n, x_{n+1})) = 1$$

ve Önerme 5.1.2 özelliğinden

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\mu}_\lambda(x_n, x_{n+1}) = 0 \quad (5.7)$$

olur.

Şimdi, $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin $\tilde{\mu}$ –Cauchy dizisi olduğunu belirtmek gerekir. Bunun için de $\{x_{2n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin $\tilde{\mu}$ –Cauchy dizisi olduğunu göstermek yeterlidir. $\{x_{2n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi $\tilde{\mu}$ –Cauchy dizisi olmasın. O halde $n_k > m_k > k$ durumunu sağlayan pozitif tam sayılardan oluşan $\{m_k\}$ ve $\{n_k\}$ $\mathbb{C}$ kümesinde iki alt dizi $\varepsilon > 0$ olmak üzere

$$\tilde{\mu}_\lambda(x_{2n_k}, x_{2m_k}) \geq \varepsilon \text{ ve } \tilde{\mu}_\lambda(x_{2n_k-1}, x_{2m_k}) < \varepsilon \quad (5.8)$$

ifadelerini sağlar.

(5.8) ve Archimedean olmayan modüler metrik şartından

$$\begin{aligned} \varepsilon &\leq \tilde{\mu}_\lambda(x_{2n_k}, x_{2m_k}) = \tilde{\mu}_{\max\{\lambda, \lambda\}}(x_{2n_k}, x_{2m_k}) \\ &\leq \tilde{\mu}_\lambda(x_{2n_k}, x_{2n_k-1}) + \tilde{\mu}_\lambda(x_{2n_k-1}, x_{2m_k}) \\ &< \varepsilon + \tilde{\mu}_\lambda(x_{2n_k}, x_{2n_k-1}) \end{aligned} \quad (5.9)$$

elde edilir ve $k \rightarrow \infty$ iken yukarıdaki ifadede limit alınırsa,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{\mu}_\lambda(x_{2n_k}, x_{2m_k}) = \varepsilon \quad (5.10)$$

sonucuna varılır. Ayrıca, benzer şekilde aşağıdaki ifadeler elde edilir:

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_\lambda(x_{2n_k-1}, x_{2m_k-1}) &= \tilde{\mu}_{\max\{\lambda, \lambda\}}(x_{2n_k-1}, x_{2m_k-1}) \\ &\leq \tilde{\mu}_\lambda(x_{2n_k-1}, x_{2m_k}) + \tilde{\mu}_\lambda(x_{2m_k}, x_{2m_k-1}) \\ &< \varepsilon + \tilde{\mu}_\lambda(x_{2m_k}, x_{2m_k-1}) \end{aligned} \quad (5.11)$$

ve

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_\lambda(x_{2n_k}, x_{2m_k-1}) &= \tilde{\mu}_{\max\{\lambda, \lambda\}}(x_{2n_k}, x_{2m_k-1}) \\ &\leq \tilde{\mu}_\lambda(x_{2n_k}, x_{2n_k-1}) + \tilde{\mu}_\lambda(x_{2n_k-1}, x_{2m_k-1}) \\ &< \tilde{\mu}_\lambda(x_{2n_k}, x_{2n_k-1}) + \varepsilon + \tilde{\mu}_\lambda(x_{2m_k}, x_{2m_k-1}). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Burada (5.11) ve (5.12) ifadelerinde $k \rightarrow \infty$ için limit alınırsa, (5.7) ifadesi yardımıyla

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{\mu}_\lambda(x_{2n_k-1}, x_{2m_k-1}) < \varepsilon \quad (5.13)$$

ve

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{\mu}_\lambda(x_{2n_k}, x_{2m_k-1}) < \varepsilon \quad (5.14)$$

bulunur. Böylece $x_{n_k} = \mathcal{T}x_{n_k-1}$ ve $x_{m_k} = \mathcal{T}x_{m_k-1}$ ile (5.1) ifadesinden

$$\begin{aligned} \theta(\tilde{\mu}_\lambda(x_{2n_k}, x_{2m_k})) &\leq \theta(H_{\tilde{\mu}}(\mathcal{T}x_{2n_k-1}, \mathcal{T}x_{2m_k-1})) \\ &\leq [\theta(R_{\tilde{\mu}}(x_{2n_k-1}, x_{2m_k-1}))]^k \end{aligned}$$

yazılır. Burada

$$\begin{aligned} R_{\tilde{\mu}}(x_{2n_k-1}, x_{2m_k-1}) &= \max \left\{ \tilde{\mu}_\lambda(x_{2n_k-1}, x_{2m_k-1}), \delta_\lambda(x_{2n_k-1}, \mathcal{T}x_{2n_k-1}), \right. \\ &\quad \delta_\lambda(x_{2m_k-1}, \mathcal{T}x_{2m_k-1}), \frac{\delta_\lambda(x_{2n_k-1}, \mathcal{T}x_{2m_k-1}) + \delta_\lambda(\mathcal{T}x_{2n_k-1}, \mathcal{T}x_{2m_k-1})}{2}, \\ &\quad \left. \frac{\delta_\lambda(\mathcal{T}x_{2m_k-1}, x_{2m_k-1})(1 + \delta_\lambda(x_{2n_k-1}, \mathcal{T}x_{2n_k-1}))}{1 + \delta_\lambda(x_{2n_k-1}, x_{2m_k-1})} \right\} \\ &= \max \left\{ \tilde{\mu}_\lambda(x_{2n_k-1}, x_{2m_k-1}), \delta_\lambda(x_{2n_k-1}, x_{2n_k}), \right. \\ &\quad \delta_\lambda(x_{2m_k-1}, x_{2m_k}), \frac{\delta_\lambda(x_{2n_k-1}, x_{2m_k}) + \delta_\lambda(x_{2n_k}, x_{2m_k-1})}{2}, \\ &\quad \left. \frac{\delta_\lambda(x_{2m_k}, x_{2m_k-1})(1 + \delta_\lambda(x_{2n_k-1}, x_{2n_k}))}{1 + \delta_\lambda(x_{2n_k-1}, x_{2m_k-1})} \right\} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada limit alınırsa, (5.7), (5.8), (5.10), (5.13) ve (5.14) ifadelerini kullanılarak

$$\theta(\varepsilon) \leq [\theta(\varepsilon)]^k$$

sonucu elde edilir. $k \in (0,1)$ olduğundan bu bir çelişkidir. O halde $\{x_{2n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi $\tilde{\mu}$ -Cauchy dizisidir.

$K(C)$ kompakt olduğundan kapalı ve sınırlıdır. Dolayısıyla $(x_n) \rightarrow x$ olan $x^* \in K(C) \subseteq \mathfrak{X}_\eta$ elemanı vardır. $\mathcal{T}$ dönüşümünün sabit noktasının var olduğunu göstermek için $x^* \neq \mathcal{T}x^*$ olduğunu varsayıp çelişki elde edilmesi amaçlanmaktadır. O halde Fatou özelliğinden

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_\lambda(x^*, \mathcal{T}x^*) &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \tilde{\mu}_\lambda(x_{n+1}, \mathcal{T}x^*) \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \tilde{\mu}_\lambda(\mathcal{T}x_n, \mathcal{T}x^*) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} H_{\tilde{\mu}}(\mathcal{T}x_n, \mathcal{T}x^*) \end{aligned}$$

bulunur. Burada θ sürekli ve $\mathcal{T}$ çoğul değerli rasyonel θ –tipli daralma dönüşümü olduğundan

$$R_{\tilde{\mu}}(x_n, x^*) = \max\{\tilde{\mu}_\lambda(x_n, x^*), \delta_\lambda(x_n, \mathcal{T}x_n), \delta_\lambda(x^*, \mathcal{T}x^*), \\ \frac{\delta_\lambda(x_n, \mathcal{T}x^*) + \delta_\lambda(\mathcal{T}x_n, x^*)}{2}, \frac{\delta_\lambda(x^*, \mathcal{T}x^*)(1 + \delta_\lambda(x_n, \mathcal{T}x_n))}{1 + \delta_\lambda(x_n, x^*)}\}$$

olmak üzere

$$\theta(\tilde{\mu}_\lambda(x^*, \mathcal{T}x^*)) \leq \theta(H_{\tilde{\mu}}(\mathcal{T}x_n, \mathcal{T}x^*)) \leq [\theta(R_{\tilde{\mu}}(x_n, x^*))]^k$$

ifadesine ulaşılır. Burada $n \rightarrow \infty$ iken limit alınırsa $R_{\tilde{\mu}}(x_n, x^*) = \tilde{\mu}_\lambda(x^*, \mathcal{T}x^*)$ eşitliği oluşacağından yukarıdaki eşitsizlikte yerine yazılırsa

$$\theta(\tilde{\mu}_\lambda(x^*, \mathcal{T}x^*)) \leq [\theta(\tilde{\mu}_\lambda(x^*, \mathcal{T}x^*))]^k$$

$k \in (0,1)$ olduğundan çelişki elde edilir. Yani $x^* = \mathcal{T}x^*$ olmalıdır.

Şimdi x^* sabit noktasının tekliğini gösterilecektir. $x^* \neq y^*$ olan $\mathcal{T}$ dönüşümünün farklı bir sabit noktası olsun. (5.1) eşitsizliğinde $x = x^*$ ve $y = y^*$ olsun. Buradan

$$R_{\tilde{\mu}}(x^*, y^*) = \max\{\tilde{\mu}_\lambda(x^*, y^*), \delta_\lambda(x^*, \mathcal{T}x^*), \delta_\lambda(y^*, \mathcal{T}y^*), \\ \frac{\delta_\lambda(x^*, \mathcal{T}y^*) + \delta_\lambda(\mathcal{T}x^*, y^*)}{2}, \frac{\delta_\lambda(\mathcal{T}y^*, y^*)(1 + \delta_\lambda(x^*, \mathcal{T}x^*))}{1 + \delta_\lambda(x^*, y^*)}\} \\ = \max\{\tilde{\mu}_\lambda(x^*, y^*), \delta_\lambda(x^*, x^*), \delta_\lambda(y^*, y^*), \\ \frac{\delta_\lambda(x^*, y^*) + \delta_\lambda(x^*, y^*)}{2}, \frac{\delta_\lambda(y^*, y^*)(1 + \delta_\lambda(x^*, x^*))}{1 + \delta_\lambda(x^*, y^*)}\}$$

iken

$$\theta(\tilde{\mu}_\lambda(x^*, y^*)) \leq \theta(H_{\tilde{\mu}}(\mathcal{T}x^*, \mathcal{T}y^*)) \leq [\theta(R_{\tilde{\mu}}(x^*, y^*))]^k$$

bulunur. Yani,

$$\theta(\tilde{\mu}_\lambda(x^*, y^*)) \leq [\theta(\tilde{\mu}_\lambda(x^*, y^*))]^k$$

olduğundan $k \in (0,1)$ için çelişki elde edilir. Bu da $\mathcal{T}$ dönüşümünün sabit noktasının tekliğini ispat eder.

Teorem 5.1.9’da $K(C)$ yerine $CB(C)$ alınırsa aynı şartlar altında $\mathcal{T}$ dönüşümünün sabit noktası olduğunu göstermek mümkün olmadığından aşağıdaki Teorem 5.1.10’un ispatında kullanılacak olan ek şart

$\theta_3)$ Her $A \subset (0, \infty)$ için $\inf A > 0$ olan $\theta (\inf A) = \inf \theta(A)$

dır.

Ayrıca Teorem 5.1.10’da, Teorem 5.1.9’un ispatından farklı olarak $\mathcal{T}$ sürekli alınıp Önerme.5.1.7 kullanılacaktır.

Teorem 5.1.10. $(\mathfrak{X}, \tilde{\mu})$ bir Archimedean olmayan modüler metrik uzay ve $\tilde{\mu}, (\gamma)$ özelliğini sağlayan dışbükey regüler bir modüler olsun. $C, \mathfrak{X}_{\tilde{\mu}}$ in boştan farklı bir alt kümesi ve $\mathcal{T}: C \rightarrow CB(C)$ çoğul değerli rasyonel θ –tipli daralması sürekli olsun. Bazı $x_0, x_1 \in \mathfrak{X}_{q^\mu}$ için $\tilde{\mu}_\lambda(x_0, x_1) < \infty$ iken $\mathcal{T}$ dönüşümünün $C \subseteq \mathfrak{X}_{\tilde{\mu}}$ kümesinde bir sabit noktası vardır.

İspat: $\mathcal{T}$ dönüşümünün sabit noktası olmasın. Bu durumda tüm $x \in \mathfrak{X}$ için $\tilde{\mu}_\lambda(x, \mathcal{T}x) > 0$ olur. $x \in \mathfrak{X}$ keyfi noktası olsun. Tüm $x \in \mathfrak{X}$ için $\mathcal{T}x$ boştan farklı olduğundan $x_1 \in \mathcal{T}x_0$ olacak şekilde $x_1 \in \mathfrak{X}$ noktası vardır. Diğer yandan $0 < \delta_\lambda(x_1, \mathcal{T}x_1) \leq H_{\tilde{\mu}}(\mathcal{T}x_0, \mathcal{T}x_1)$ ve (θ_1) özelliğinden

$$\begin{aligned} \theta(\delta_\lambda(x_1, \mathcal{T}x_1)) &\leq \theta(H_{\tilde{\mu}}(\mathcal{T}x_0, \mathcal{T}x_1)) \leq \left[\theta(R_{\tilde{\mu}}(x_0, x_1)) \right]^k \\ &= [\theta(\max\{\tilde{\mu}_\lambda(x_0, x_1), \delta_\lambda(x_0, \mathcal{T}x_0), \delta_\lambda(x_1, \mathcal{T}x_1), \\ &\quad \frac{\delta_\lambda(x_0, \mathcal{T}x_1) + \delta_\lambda(\mathcal{T}x_0, x_1)}{2}, \frac{\delta_\lambda(\mathcal{T}x_1, x_1)(1 + \delta_\lambda(x_0, \mathcal{T}x_0))}{1 + \delta_\lambda(x_0, x_1)}\})]^k \end{aligned} \quad (5.15)$$

elde edilir ve bu durumda (5.15) eşitsizliğinde

$$\begin{aligned} &R_{\tilde{\mu}}(x_0, x_1) \\ &= \max \left\{ \tilde{\mu}_\lambda(x_0, x_1), \delta_\lambda(x_0, x_1), \frac{\delta_\lambda(x_0, \mathcal{T}x_1)}{2}, \frac{\delta_\lambda(\mathcal{T}x_1, x_1)(1 + \delta_\lambda(x_0, x_1))}{1 + \delta_\lambda(x_0, x_1)} \right\} \\ &= \max \left\{ \tilde{\mu}_\lambda(x_0, x_1), \delta_\lambda(x_0, x_1), \frac{\delta_{\lambda_{\max\{\lambda, \lambda\}}}(x_0, x_1) + \delta_\lambda(x_1, \mathcal{T}x_1)}{2}, \delta_\lambda(\mathcal{T}x_1, x_1) \right\} \\ &\leq \max \left\{ \tilde{\mu}_\lambda(x_0, x_1), \delta_\lambda(x_0, x_1), \frac{\delta_\lambda(x_0, x_1) + \delta_\lambda(x_1, \mathcal{T}x_1)}{2}, \delta_\lambda(\mathcal{T}x_1, x_1) \right\} \\ &= \max\{\tilde{\mu}_\lambda(x_0, x_1), \delta_\lambda(\mathcal{T}x_1, x_1)\} \end{aligned}$$

ifadesine ulaşılır. Burada $\max\{\tilde{\mu}_\lambda(x_0, x_1), \delta_\lambda(\mathcal{T}x_1, x_1)\} = \delta_\lambda(\mathcal{T}x_1, x_1)$ ise, (5.15) eşitsizliğinde yerine yazılırsa $k \in (0,1)$ olduğundan

$$\theta(\delta_\lambda(x_1, \mathcal{T}x_1)) \leq [\theta(\delta_\lambda(x_1, \mathcal{T}x_1))]^k$$

çelişki elde edilir. O halde $\max\{\tilde{\mu}_\lambda(x_0, x_1), \delta_\lambda(x_1, \mathcal{T}x_1)\} = \tilde{\mu}_\lambda(x_0, x_1)$ olursa

$$\theta(\delta_\lambda(x_1, \mathcal{T}x_1)) \leq [\theta(\tilde{\mu}_\lambda(x_0, x_1))]^k \quad (5.16)$$

şeklinde yazılır. (θ_3) özelliğinden

$$\theta(\delta_\lambda(x_1, \mathcal{T}x_1)) \leq \inf_{y \in \mathcal{T}x_1} \theta(\tilde{\mu}_\lambda(x_1, y))$$

yazılır ve (5.16) ifadesinden $s \in (k, 1)$ olan

$$\inf_{y \in \mathcal{T}x_1} \theta(\tilde{\mu}_\lambda(x_1, y)) \leq [\theta(\tilde{\mu}_\lambda(x_0, x_1))]^k < [\theta(\tilde{\mu}_\lambda(x_0, x_1))]^s \quad (5.17)$$

ifadesi elde edilir. Daha sonra, (5.17) ifadesinden

$$\theta(\tilde{\mu}_\lambda(x_1, x_2)) \leq [\theta(\tilde{\mu}_\lambda(x_0, x_1))]^s$$

olan $x_2 \in \mathcal{T}x_1$ elemanı vardır. Bu şekilde devam ettirerek, C kümesinde $x_n \neq x_{n+1}$ ve her $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $\{x_n\}$ dizisi

$$1 < \theta(\tilde{\mu}_\lambda(x_n, x_{n+1})) \leq [\theta(\tilde{\mu}_\lambda(x_0, x_1))]^{s^n} \quad (5.18)$$

olacak şekilde inşa edilir. Eğer $n \rightarrow \infty$ iken (5.18) eşitsizliğinde limit alınırsa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \theta(\tilde{\mu}_\lambda(x_n, x_{n+1})) = 1$$

ve (θ_2) özelliğinden

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\mu}_\lambda(x_n, x_{n+1}) = 0 \quad (5.19)$$

olur.

$\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin C kümesinde $\tilde{\mu}$ -Cauchy dizisi olduğu Teorem 5.1.6'daki teknikle elde edilir.

C kümesi kapalı olduğundan $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi bazı $x^* \in C$ elemanına yakınsaktır. $\mathcal{T}$ dönüşümü $\tilde{\mu}$ -sürekli olduğundan $\mathcal{T}x_n \rightarrow \mathcal{T}x^*$ dır. Yani $\mathcal{T}x^* \in CB(C)$ için

$\lim_{n \rightarrow \infty} H_{\tilde{\mu}}(\mathcal{T}x_n, \mathcal{T}x^*) = 0$ dır. Burada $x_{n+1} \in \mathcal{T}x_n$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = x^*$ olduğu göz önüne alınırsa Önerme 5.1.7’den $x^* \in \mathcal{T}x^*$ olup $x^*, \mathcal{T}$ dönüşümünün sabit noktasıdır. $\mathcal{T}$ dönüşümünün sabit noktasının tekliği ise yine Teorem 5.1.9’ daki teknikle gösterilir.

Tanım 5.1.11. $(\mathfrak{X}, \tilde{\mu})$ bir Archimedean olmayan modüler metrik uzay olsun. Boştan farklı $C \subset \mathfrak{X}_{\tilde{\mu}}$ alt kümesi $\varepsilon > 0$ olmak üzere sonlu ε –sıralanabilirdir ancak ve ancak bazı $a, b \in C$ için a dan b ye ε –sıralı olacak şekilde $N \geq 1$ vardır. (yani, $x_0 = a, x_N = b$ ve $\tilde{\mu}_\lambda(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon$ olacak şekilde, $i = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ iken $x_0, x_1, x_2, \dots, x_N \in C$ sonlu noktaların kümesidir.)

Tanım 5.1.12. $(\mathfrak{X}, \tilde{\mu})$ Archimedean olmayan modüler metrik uzay, C boştan farklı $\mathfrak{X}$ kümesinin alt kümesi olsun. Eğer $H_{\tilde{\mu}}(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y) > 0$ ve $\tilde{\mu}_\lambda(x, y) < \varepsilon$ ile birlikte tüm $x, y \in C$ için

$$\theta \left(H_{\tilde{\mu}}(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y) \right) \leq \left[\theta \left(R_{\tilde{\mu}}(x, y) \right) \right]^k \quad (5.20)$$

ve

$$R_{\tilde{\mu}}(x, y) = \max \left\{ \tilde{\mu}_\lambda(x, y), \delta_\lambda(x, \mathcal{T}x), \delta_\lambda(y, \mathcal{T}y), \frac{\delta_\lambda(x, \mathcal{T}y) + \delta_\lambda(\mathcal{T}x, y)}{2}, \frac{\delta_\lambda(\mathcal{T}y, y)(1 + \delta_\lambda(x, \mathcal{T}x))}{1 + \delta_\lambda(x, y)} \right\}$$

olan $k \in (0, 1)$ mevcutsa $\mathcal{T}: C \rightarrow CB(\mathfrak{X})$ dönüşümüne $(\varepsilon, \theta) - \tilde{\mu}$ – düzgün yerel daralma dönüşümü adı verilir. Burada $\theta: (0, \infty) \rightarrow (1, \infty)$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlayan bir fonksiyondur:

$\theta_1)$ θ azalmayan ve sürekli,dir,

$\theta_2)$ $\inf_{t \in (0, \infty)} \theta(t) = 1'$ dir.

Teorem 5.1.13. $(\mathfrak{X}, \tilde{\mu})$ bir Archimedean olmayan modüler metrik uzay olsun. $\tilde{\mu}$, Fatou özelliğini ve Δ_2 – şartını sağlayan dışbükey regüler bir modüler olsun. Bazı sabit $\varepsilon > 0$ için $\mathfrak{X}_{\tilde{\mu}}$ uzayının sonlu ε –sıralanabilir alt kümesi C , $\tilde{\mu}$ –tam ve $\tilde{\mu}$ –sınırlı olsun. Bu durumda $\mathcal{T}: C \rightarrow K(C)$, $(\varepsilon, \theta) - \tilde{\mu}$ –düzgün yerel daralma dönüşümünün C kümesinde sabit noktası vardır.

İspat. C sonlu ε –sıralanabilir olduğundan tüm $i = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ için $x_0 = a, x_N = b$ ve $\tilde{\mu}_1(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon$ olacak şekilde $x_0, x_1, x_2, \dots, x_N \in C$ sonlu noktaların kümesidir, burada $a, b \in C$ için $N \geq 1$ sayısı mevcuttur. Herhangi bir $x, y \in C$ için

$$\tilde{\mu}^*(x, y) = \inf \left\{ \sum_{i=0}^{N-1} \tilde{\mu}_1(x_i, x_{i+1}) \right\}$$

olsun. Burada infimum, x den y ye kadar tüm $x_0, x_1, x_2, \dots, x_N$ N, ε sıralıları üzerinden alınır. Herhangi bir $x, y \in C$ için $\tilde{\mu}^*(x, y) < \infty$ olduğu gösterilmelidir. $\tilde{\mu}$ metriğinin temel özellikleri sayesinde herhangi bir $x, y \in C$ için

$$\tilde{\mu}_N(x, y) \leq \tilde{\mu}^*(x, y)$$

yazılır. Ayrıca $\tilde{\mu}_1(x, y) < \varepsilon$ ise herhangi bir $x, y \in C$ için $\tilde{\mu}^*(x, y) \leq \tilde{\mu}_1(x, y)$ elde edilir. Şimdi $x \in C$ sabit, $z_0 = x$ ve $z_1 \in \mathcal{T}(z_0)$ olsun. Ek olarak $x_0, x_1, x_2, \dots, x_N$ sıralısı z_0 dan z_1 e kadar (N, ε) sıralısı verilsin. Böyle bir (N, ε) sıralısı, C sonlu ε sıralısı vardır. Önerme 5.1.8 kullanılarak

$$\tilde{\mu}_1(z_1, y_1) \leq H_{\tilde{\mu}}(\mathcal{T}(z_0), \mathcal{T}(x_1))$$

olacak şekilde $y_1 \in \mathcal{T}(x_1)$ elemanı bulunur. Bu işlemi tekrarlayarak $y_i \in \mathcal{T}(x_i)$ ve

$$\tilde{\mu}_1(y_i, y_{i+1}) \leq H_{\tilde{\mu}}(\mathcal{T}(x_i), \mathcal{T}(x_{i+1}))$$

olan $y_2, y_3, \dots, y_N$ sıralısı bulunur. Burada $z_0, y_1, \dots, y_N$ nin z_0 dan $y_N \in \mathcal{T}(z_0)$ ' a kadar bir (N, ε) sıralısı olduğu açıktır. $\mathcal{T}, (\varepsilon, \theta) - \tilde{\mu}$ –düzgün yerel daralma dönüşümü olduğundan

$$\theta(\tilde{\mu}_\lambda(z_1, z_2)) \leq \theta(H_{\tilde{\mu}}(\mathcal{T}(z_0), \mathcal{T}(z_1))) \leq \left[\theta(R_{\tilde{\mu}}(z_0, z_1)) \right]^k$$

eşitsizliği elde edilir. Burada

$$R_{\tilde{\mu}}(z_0, z_1) = \max\{\tilde{\mu}_\lambda(z_0, z_1), \delta_\lambda(z_0, \mathcal{T}(z_0)), \delta_\lambda(z_1, \mathcal{T}(z_1)),$$

$$\frac{\delta_\lambda(z_0, \mathcal{T}(z_1)) + \delta_\lambda(\mathcal{T}(z_0), z_1)}{2}, \frac{\delta_\lambda(\mathcal{T}(z_1), z_1)(1 + \delta_\lambda(z_0, \mathcal{T}(z_0)))}{1 + \delta_\lambda(z_0, z_1)}\}$$

$$= \max\left\{\tilde{\mu}_\lambda(z_0, z_1), \delta_\lambda(z_1, z_2), \frac{\delta_{\max\{\lambda, \lambda\}}(z_0, z_2) + (z_1, z_1)}{2}, \delta_\lambda(z_2, z_1)\right\}$$

$$\leq \max \left\{ \tilde{\mu}_\lambda(z_0, z_1), \delta_\lambda(z_1, z_2), \frac{\delta_\lambda(z_0, z_1) + \delta_\lambda(z_1, z_2)}{2} \right\}$$

$$= \max \{ \tilde{\mu}_\lambda(z_0, z_1), \delta_\lambda(z_1, z_2) \}.$$

ifadesinde oluşan iki durumu göz önünde bulundurarak $\max \{ \tilde{\mu}^*(z_0, z_1), \delta^*(z_1, z_2) \} = \delta^*(z_1, z_2)$ iken elde edilen çelişki nedeniyle $R_{\tilde{\mu}}(z_0, z_1) = \tilde{\mu}^*(z_0, z_1)$ dir. O halde

$$\theta(\tilde{\mu}^*(z_1, z_2)) \leq \theta \left(H_{\tilde{\mu}}(\mathcal{T}(z_0), \mathcal{T}(z_1)) \right) \leq [\theta(\tilde{\mu}^*(z_0, z_1))]^k$$

olur. Benzer şekilde, $\{z_n\}$ dizisi herhangi $n \geq 1$ ve $z_{n+1} \in \mathcal{T}(z_n)$ için

$$\theta(\tilde{\mu}^*(z_n, z_{n+1})) \leq [\theta(\tilde{\mu}^*(z_{n-1}, z_n))]^k$$

olsun. Açıkça görüldüğü gibi herhangi $n \geq 1$ için

$$\theta(\tilde{\mu}^*(z_n, z_{n+1})) \leq [\theta(\tilde{\mu}^*(z_0, z_1))]^{k^n}$$

dir. $\tilde{\mu}$, Δ_2 -şartını sağladığından herhangi $n \geq 1$ için

$$\theta(\tilde{\mu}^*(z_n, z_{n+1})) \leq K \theta(\tilde{\mu}^*(z_n, z_{n+1})) \leq K [\theta(\tilde{\mu}^*(z_0, z_1))]^{k^n}$$

bulunur. Böylelikle Önerme 5.1.6'dan $\{z_n\}$ dizisi $\tilde{\mu}$ -Cauchy dizisidir. Dolayısıyla, C alt kümesi $\tilde{\mu}$ -tam olduğundan $\{z_n\}$ dizisi bazı $z \in C$ noktasına $\tilde{\mu}$ -yakınsaktır. Şimdi $z \in C$ noktasının $\mathcal{T}$ dönüşümünün sabit noktası olduğunu gösterilecektir. Bunun için $z_{n+1} \notin \mathcal{T}(z)$ olsun. O zaman $\tilde{\mu}^*(z_{n+1}, \mathcal{T}(z)) > 0$ dir. $\mathcal{T}, (\varepsilon, \theta) - \tilde{\mu}$ -düzgün yerel daralma dönüşümü olduğundan

$$\theta(\tilde{\mu}^*(z_{n+1}, \mathcal{T}(z))) \leq \theta(H_{\tilde{\mu}^*}(\mathcal{T}(z_n), \mathcal{T}(z))) \leq [\theta(R_{\tilde{\mu}^*}(z_n, z))]^k \quad (5.21)$$

ve

$$R_{\tilde{\mu}^*}(z_n, z) = \max \{ \tilde{\mu}^*(z_n, z), \delta^*(z_n, \mathcal{T}(z_n)), \delta^*(z, \mathcal{T}(z)) \},$$

$$\frac{\delta^*(z_n, \mathcal{T}(z)) + \delta^*(\mathcal{T}(z_n), z)}{2}, \frac{\delta^*(\mathcal{T}(z), z) (1 + \delta^*(z_n, \mathcal{T}(z_n)))}{1 + \delta^*(z_n, z)} \Bigg\}$$

(5.21) eşitsizliğinde $n \rightarrow \infty$ iken limit alındığında

$$\theta(\tilde{\mu}^*(z, \mathcal{T}(z))) \leq [\theta(\delta^*(z, \mathcal{T}(z)))]^k$$

eşitsizliğine ulaşılır. Burada $k \in (0,1)$ olduğundan çelişki elde edilir. Bu durumda kabul edilen $z_{n+1} \notin \mathcal{T}(z)$ hatalı olup $z_{n+1} \in \mathcal{T}(z)$ dir. Herhangi $n \geq 1$ için

$$\tilde{\mu}_{\max\{1,N\}}(z, \mathcal{T}(z)) \leq \tilde{\mu}_1(z_{n+1}, z) + \tilde{\mu}_N(z_{n+1}, \mathcal{T}(z))$$

ifadesinde $\{z_{n+1}\}$, z noktasına $\tilde{\mu}$ –yakınsak ve $\mathcal{T}(z), \tilde{\mu}$ –kapalı olduğundan $z \in \mathcal{T}(z)$ olarak bulunur.

5.2. Archimedean Olmayan Modüler Metrik Uzaylarda Çoğul Değerli θ –Tipli Daralma Dönüşümünün Graf Teoriye Uygulaması

Bu bölümde, ilk bölümde ispatlanan Teorem 5.1.9 ve Teorem 5.1.12’ nin graf teoriye uygulaması verilmektedir.

Aşağıda verilen teoremlerin ispatında kullanılacak olan (S) ve (S^*) özelliklerinin tanımı verilmektedir:

Tanım 5.2.1. (S) Özelliği: Herhangi bir dizisi $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in C$, x noktasına $\tilde{\mu}$ –yakınsak ve $(x_n, x_{n+1}) \in E(G_{\tilde{\mu}}^\theta)$ ise her n için $(x_n, x) \in E(G_{\tilde{\mu}}^\theta)$ dir.

(S^*) Özelliği: Eğer x ve y noktaları $\mathcal{T}$ dönüşümünün sabit noktası ise $(x, y) \in E(G_{\tilde{\mu}}^\theta)$ olan $y \in \mathcal{T}x$ ve herhangi $z \in \mathcal{T}y$ ve tüm $\lambda > 0$ için

$$\tilde{\mu}_\lambda(x, y) \leq \tilde{\mu}_\lambda(y, z)$$

dir.

Tanım 5.2.2. . $(\mathfrak{X}, \tilde{\mu})$ bir Archimedean olmayan modüler metrik uzayı $G_{\tilde{\mu}}^\theta$ yönlü graf ile donatılmış ve C , $\mathfrak{X}_{q^\mu}$ uzayının boştan farklı bir alt kümesi olsun. Eğer $\mathcal{T}: C \rightarrow CB(C)$ dönüşümü

(i) Her $x, y \in C$ için $(x, y) \in E(G_{\tilde{\mu}}^\theta)$ iken

$$\theta \left(H_{\tilde{\mu}}(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y) \right) \leq \left[\theta \left(R_{\tilde{\mu}}(x, y) \right) \right]^k \quad (5.22)$$

ve

$$R_{\tilde{\mu}}(x, y) = \max \left\{ \tilde{\mu}_\lambda(x, y), \delta_\lambda(x, \mathcal{T}x), \delta_\lambda(y, \mathcal{T}y), \frac{\delta_\lambda(x, \mathcal{T}y) + \delta_\lambda(\mathcal{T}x, y)}{2}, \frac{\delta_\lambda(\mathcal{T}y, y)(1 + \delta_\lambda(x, \mathcal{T}x))}{1 + \delta_\lambda(x, y)} \right\}$$

olan $k \in (0,1)$ mevcut olsun,

(ii) Her $x \in \mathfrak{X}$, $y \in \mathcal{T}x$ için $(x, y) \in E(G_\mu^\theta)$ ve

$$\tilde{\mu}_\lambda(y, z) \leq H_{\tilde{\mu}}(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y)$$

olan $z \in \mathcal{T}y$ elemanı vardır, o zaman $(y, z) \in E(G_\mu^\theta)$ dır,

şartlarını sağlıyorsa $\mathcal{T}$ dönüşümüne çoğul değerli rasyonel tipte G_μ^θ –daralma dönüşümü denir. Burada $\theta: (0, \infty) \rightarrow (1, \infty)$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlayan bir fonksiyondur:

θ_1) θ azalmayan ve sürekli,dir,

θ_2) $\inf_{t \in (0, \infty)} \theta(t) = 1'$ dir.

Teorem 5.2.3. $(\mathfrak{X}, \tilde{\mu})$ bir Archimedean olmayan modüler metrik uzayı G_μ^θ yönlü graf ile donatılmış, $C = V(G_\mu^\theta)$, $\mathfrak{X}_{q^\mu}$ uzayının boştan farklı $\tilde{\mu}$ –tam ve (S) özelliğine sahip bir alt kümesi olsun. Burada $\tilde{\mu}$ dışbükey, regüler ve Fatou özellikli modüler metrik, $\mathcal{T}: C \rightarrow K(C)$ çoğul değerli rasyonel tipte G_μ^θ –daralma dönüşümü ve

$$C_{\mathcal{T}} = \{x \in C: (x, y) \in E(G_\mu^\theta), \text{ bazı } y \in \mathcal{T}(x) \text{ için } \}$$

olsun. Eğer $C_{\mathcal{T}}$ boştan farklı ise $\mathcal{T}$ sabit noktaya sahiptir. Ayrıca, $\mathcal{T}$ dönüşümü (S^*) özelliğini de sağlıyorsa bu durumda $\mathcal{T}$ dönüşümünün sabit noktası tektir.

İspat. $x_0 \in C_{\mathcal{T}}$ ve $(x_0, x_1) \in E(G_\mu^\theta)$ olacak şekilde $x_1 \in \mathcal{T}x_0$ olsun. $\mathcal{T}$ çoğul değerli rasyonel tipte G_μ^θ –daralma dönüşümü ve θ_1 özelliğinden

$$\begin{aligned} R_{\tilde{\mu}}(x_0, x_1) &= \max\{\tilde{\mu}_\lambda(x_0, x_1), \tilde{\mu}_\lambda(x_0, \mathcal{T}x_0), \tilde{\mu}_\lambda(x_1, \mathcal{T}x_1), \\ &\quad \frac{\tilde{\mu}_\lambda(x_0, \mathcal{T}x_1) + \tilde{\mu}_\lambda(\mathcal{T}x_0, x_1)}{2}, \frac{\tilde{\mu}_\lambda(\mathcal{T}x_1, x_1)(1 + \tilde{\mu}_\lambda(x_0, \mathcal{T}x_0))}{1 + \tilde{\mu}_\lambda(x_0, x_1)}\} \\ &= \max\left\{\tilde{\mu}_\lambda(x_0, x_1), \tilde{\mu}_\lambda(x_1, x_2), \frac{\tilde{\mu}_\lambda(x_0, x_2)}{2}, \frac{\tilde{\mu}_\lambda(x_2, x_1)(1 + \tilde{\mu}_\lambda(x_0, x_1))}{1 + \tilde{\mu}_\lambda(x_0, x_1)}\right\} \\ &= \max\left\{\tilde{\mu}_\lambda(x_0, x_1), \tilde{\mu}_\lambda(x_1, x_2), \frac{\tilde{\mu}_{\max\{\lambda, \lambda\}}(x_0, x_1) + (x_1, x_2)}{2}\right\} \\ &\leq \max\left\{\tilde{\mu}_\lambda(x_0, x_1), \tilde{\mu}_\lambda(x_1, x_2), \frac{\tilde{\mu}_\lambda(x_0, x_1) + \tilde{\mu}_\lambda(x_1, x_2)}{2}\right\} \\ &= \max\{\tilde{\mu}_\lambda(x_0, x_1), \tilde{\mu}_\lambda(x_1, x_2)\} \end{aligned}$$

iken

$$\theta(\tilde{\mu}_\lambda(x_1, x_2)) \leq \theta(H_{\tilde{\mu}}(\mathcal{T}x_0, \mathcal{T}x_1)) \leq [\theta(R_{\tilde{\mu}}(x_0, x_1))]^k \quad (5.22)$$

elde edilir.

Burada $\max\{\tilde{\mu}_\lambda(x_0, x_1), \tilde{\mu}_\lambda(x_1, x_2)\} = \tilde{\mu}_\lambda(x_1, x_2)$ ise, (5.22) eşitsizliğinde yerine yazılırsa $k \in (0,1)$ olduğundan

$$1 < \theta(\tilde{\mu}_\lambda(x_1, x_2)) \leq \theta(H_{\tilde{\mu}}(\mathcal{T}x_0, \mathcal{T}x_1)) \leq [\theta(\tilde{\mu}_\lambda(x_1, x_2))]^k$$

çelişkisi elde edilir. O halde, $\max\{\tilde{\mu}_\lambda(x_0, x_1), \tilde{\mu}_\lambda(x_1, x_2)\} = \tilde{\mu}_\lambda(x_0, x_1)$ elde edilir. Buradan, (5.22) eşitsizliğinde

$$\theta(\tilde{\mu}_\lambda(x_1, x_2)) \leq \theta(H_{\tilde{\mu}}(\mathcal{T}x_0, \mathcal{T}x_1)) \leq [\theta(\tilde{\mu}_\lambda(x_0, x_1))]^k \quad (5.23)$$

olur. Bu şekilde devam edilerek $x_{n+1} \in \mathcal{T}x_n$ ve $(x_n, x_{n+1}) \in E(G_{\tilde{\mu}}^\theta)$ için $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi

$$1 < \theta(\tilde{\mu}_\lambda(x_n, x_{n+1})) \leq [\theta(\tilde{\mu}_\lambda(x_0, x_1))]^{k^n} \quad (5.24)$$

olarak inşa edilir.

Eğer, $n \rightarrow \infty$ iken (5.24) eşitsizliğinde limit alınırsa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \theta(\tilde{\mu}_\lambda(x_n, x_{n+1})) = 1$$

ve Önerme 5.1.2 özelliğinden

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\mu}_\lambda(x_n, x_{n+1}) = 0 \quad (5.25)$$

olur.

$\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin $\tilde{\mu}_\lambda$ -Cauchy olduğunu Teorem 5.1.9'daki yöntemle gösterilir. O halde C , $\tilde{\mu}_\lambda$ -tam olduğundan $\{x_n\}$, x^* noktasına yakınsayacak şekilde $x^* \in C$ noktası vardır. Ayrıca (S) özelliğinden $(x_n, x^*) \in E(G_{\tilde{\mu}}^\theta)$ dır. Şimdi x^* noktasının $\mathcal{T}$ dönüşümünün sabit noktası olduğu gösterilecektir. $x^* \notin \mathcal{T}x^*$ olsun. Burada θ sürekli ve $\mathcal{T}$ çoğul değerli rasyonel tipte $G_{\tilde{\mu}}^\theta$ -daralma dönüşümü olduğundan

$$R_{\tilde{\mu}}(x_n, x^*) = \max\{\tilde{\mu}_\lambda(x_n, x^*), \tilde{\mu}_\lambda(x_n, \mathcal{T}x_n), \tilde{\mu}_\lambda(x^*, \mathcal{T}x^*),$$

$$\left\{ \frac{\tilde{\mu}_\lambda(x_n, \mathcal{T}x^*) + \tilde{\mu}_\lambda(\mathcal{T}x_n, x^*)}{2}, \frac{\tilde{\mu}_\lambda(x^*, \mathcal{T}x^*)(1 + \tilde{\mu}_\lambda(x_n, \mathcal{T}x_n))}{1 + \tilde{\mu}_\lambda(x_n, x^*)} \right\}$$

iken

$$\theta(\tilde{\mu}_\lambda(x_{n+1}, \mathcal{T}x^*)) \leq \theta(H_{\tilde{\mu}}(\mathcal{T}x_n, \mathcal{T}x^*)) \leq [\theta(R_{\tilde{\mu}}(x_n, x^*))]^k \quad (5.26)$$

ifadesine ulaşılır. (5.26) eşitsizliğinde $n \rightarrow \infty$ iken limit alınırsa $R_{\tilde{\mu}}(x_n, x^*) = \tilde{\mu}_\lambda(x^*, \mathcal{T}x^*)$ olacağından yukarıdaki eşitsizlikte yerine yazılırsa

$$\theta(\tilde{\mu}_\lambda(x^*, \mathcal{T}x^*)) \leq [\theta(\tilde{\mu}_\lambda(x^*, \mathcal{T}x^*))]^k$$

$k \in (0,1)$ olduğundan çelişki ile karşılaşıldığından $x^* \in \mathcal{T}x^*$ olur. $\mathcal{T}$ dönüşümünün sabit noktasının tekliğini göstermek için $x^* \neq y^*$ olacak şekilde iki sabit noktası olsun. (S^*) özelliğinden $y^* \in \mathcal{T}x^*$, $(x^*, y^*) \in E(G_{\tilde{\mu}}^\theta)$ olacak şekilde herhangi bir $z^* \in \mathcal{T}y^*$ ve tüm $\lambda > 0$ için

$$\tilde{\mu}_\lambda(x^*, y^*) \leq \tilde{\mu}_\lambda(y^*, z^*) \quad (5.27)$$

yazılır. θ_1 özelliği ve $\mathcal{T}$ çoğul değerli rasyonel $G_{\tilde{\mu}}^\theta$ -tipli daralma dönüşümü olduğundan

$$R_{\tilde{\mu}}(x^*, y^*) = \max\{\tilde{\mu}_\lambda(x^*, y^*), \tilde{\mu}_\lambda(x^*, \mathcal{T}x^*), \tilde{\mu}_\lambda(y^*, \mathcal{T}y^*),$$

$$\left. \frac{\tilde{\mu}_\lambda(x^*, \mathcal{T}y^*) + \tilde{\mu}_\lambda(\mathcal{T}x^*, y^*)}{2}, \frac{\tilde{\mu}_\lambda(y^*, \mathcal{T}y^*)(1 + \tilde{\mu}_\lambda(x^*, \mathcal{T}x^*))}{1 + \tilde{\mu}_\lambda(x^*, y^*)} \right\}$$

$$= \max\left\{ \tilde{\mu}_\lambda(x^*, y^*), \tilde{\mu}_\lambda(y^*, z^*), \frac{\tilde{\mu}_{\max\{\lambda, \lambda\}}(x^*, \mathcal{T}x^*) + (\mathcal{T}x^*, \mathcal{T}y^*)}{2} \right\}$$

$$\leq \max\left\{ \tilde{\mu}_\lambda(x^*, y^*), \tilde{\mu}_\lambda(y^*, z^*), \frac{\tilde{\mu}_\lambda(x^*, \mathcal{T}x^*) + \tilde{\mu}_\lambda(y^*, z^*)}{2} \right\}$$

$$= \max\{\tilde{\mu}_\lambda(x^*, y^*), \tilde{\mu}_\lambda(y^*, z^*)\}$$

iken

$$\begin{aligned} \theta(\tilde{\mu}_\lambda(x^*, y^*)) &\leq \theta(\tilde{\mu}_\lambda(y^*, z^*)) \leq \theta(H_{\tilde{\mu}}(\mathcal{T}x^*, \mathcal{T}y^*)) \\ &\leq [\theta(R_{\tilde{\mu}}(x^*, y^*))]^k \end{aligned} \quad (5.28)$$

(5.27) ifadesinden dolayı $R_{\tilde{\mu}}(x^*, y^*) = \tilde{\mu}_{\lambda}(y^*, z^*)$ olduğundan (5.28) ifadesinde tekrar yerine yazılırsa

$$\theta(\tilde{\mu}_{\lambda}(y^*, z^*)) \leq [\theta(\tilde{\mu}_{\lambda}(y^*, z^*))]^k$$

ifadesi elde edilir. Burada $k \in (0,1)$ aralığında olduğundan çelişkiye ulaşılır. Dolayısıyla $x^* = y^*$ olup, $\mathcal{T}$ dönüşümünün sabit noktası tektir.

Edelstein, klasik sabit nokta teoremini, $\mathfrak{X}$ kümesinin tam ε –sıralanabilir bir metrik uzay ve $\mathcal{T}: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ dönüşümünün (ε, k) –düzenli yerel daralma olduğu duruma genişletmiştir. Burada, Edelstein’in bu çalışmasını, grafla donatılmış Archimedean olmayan modüler metrik uzaylardaki sonucu araştırılmaktadır. Öncelikle, bir grafla donatılmış Archimedean olmayan modüler metrik uzaylarda ε –sıralanabilirlik kavramı verilmektedir. Verilen tanım klasik metrik uzaylarda kullanılan tanımdan biraz farklıdır çünkü Archimedean olmayan modüler metrik uzaylar üçgen eşitsizliğini genelde sağlamamaktadır. Bu nedenle, ε –sıralanabilirlik kavramı, Archimedean olmayan modüler metrik uzayların doğasına uygun olarak uyarlanmalıdır. Bu farklılık, modüler yapıların analitik özelliklerinden kaynaklanmakta ve bu özellikler klasik metrik uzaylardan ayrılan önemli bir yönünü temsil etmektedir.

Tanım 5.2.4. $(\mathfrak{X}, \tilde{\mu})$ bir Archimedean olmayan modüler metrik uzay ve $C = V(G_{\tilde{\mu}}^{\theta}) \subset \mathfrak{X}_{\tilde{\mu}}$ boş olmayan bir alt kümesi olsun. C , $\varepsilon > 0$ olmak üzere, sonlu ε –sıralanabilir olarak adlandırılır ancak ve ancak herhangi bir $a, b \in C$ için a ve b arasında $(a, b) \in E(G_{\tilde{\mu}}^{\theta})$ olduğunda $N \geq 1$ iken bir (N, ε) –sıralısı vardır. (Burada, tüm $i = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ için $x_0 = a$, $x_N = b$, $(x_i, x_{i+1}) \in E(G_{\tilde{\mu}}^{\theta})$ ve

$$\tilde{\mu}_{\lambda}(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon$$

olacak şekilde $x_0, x_1, x_2, \dots, x_N \in V(G_{\tilde{\mu}}^{\theta}) = C$ köşelerinin sonlu bir kümesidir.)

Tanım 5.2.5. $(\mathfrak{X}, \tilde{\mu})$ bir Archimedean olmayan modüler metrik uzayı $G_{\tilde{\mu}}^{\theta}$ yönlü graf ile donatılmış ve C , $\mathfrak{X}_{q^{\mu}}$ uzayının boştan farklı bir alt kümesi olsun. Eğer $H_{\tilde{\mu}}(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y) > 0$ ve $\tilde{\mu}_{\lambda}(x, y) < \varepsilon$ ile birlikte $\mathcal{T}: C \rightarrow CB(C)$ dönüşümü

(i) Her $x, y \in C$ için $(x, y) \in E(G_{\tilde{\mu}}^{\theta})$ iken

$$\theta(H_{\tilde{\mu}}(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y)) \leq [\theta(R_{\tilde{\mu}}(x, y))]^k \quad (5.29)$$

ve

$$R_{\tilde{\mu}}(x, y) = \max\left\{\tilde{\mu}_{\lambda}(x, y), \delta_{\lambda}(x, Tx), \delta_{\lambda}(y, Ty), \frac{\delta_{\lambda}(x, Ty) + \delta_{\lambda}(Tx, y)}{2}, \frac{\delta_{\lambda}(Ty, y)(1 + \delta_{\lambda}(x, Tx))}{1 + \delta_{\lambda}(x, y)}\right\}$$

olan $k \in (0,1)$ mevcut olsun,

(ii) Her $x \in \mathfrak{X}, y \in Ty$ için $(x, y) \in E(G_{\tilde{\mu}}^{\theta})$ ve

$$\tilde{\mu}_{\lambda}(y, z) \leq H_{\tilde{\mu}}(Tx, Ty)$$

olan $z \in Ty$ elemanı vardır, o zaman $(y, z) \in E(G_{\tilde{\mu}}^{\theta})$ dır,

şartlarını sağlıyorsa T dönüşümüne çoğul değerli rasyonel tipte $(\varepsilon, \theta) - G_{\tilde{\mu}}^{\theta}$ -düzgün yerel daralma dönüşümü denir. Burada $\theta: (0, \infty) \rightarrow (1, \infty)$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlayan bir fonksiyondur:

$\theta_1)$ θ azalmayan ve süreklidir,

$\theta_2)$ $\inf_{t \in (0, \infty)} \theta(t) = 1'$ dir.

Teorem 5.2.6. $(\mathfrak{X}, \tilde{\mu})$ bir Archimedean olmayan modüler metrik uzay ve $\tilde{\mu}$ dışbükey, regüler, Fatou özellikli ve Δ_2 -şartını sağlayan modüler metrik olsun. $C = V(G_{\tilde{\mu}}^{\theta})$, $\mathfrak{X}_{\tilde{\mu}}$ uzayının boş olmayan $\tilde{\mu}$ -tam, $\tilde{\mu}$ -sınırlı, sabit bir $\varepsilon > 0$ için sonlu ε -sıralanabilir ve (S) özelliğine sahip bir alt kümesi olsun. Bu durumda $T: C \rightarrow K(C)$, $(\varepsilon, \theta) - G_{\tilde{\mu}}^{\theta}$ -düzgün yerel daralma dönüşümü ise T dönüşümünün C grafinin köşe kümesinde sabit noktası vardır.

İspat. C , sonlu ε -sıralanabilir olduğundan tüm $i = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ için $x_0 = a, x_N = b, (x_i, x_{i+1}) \in E(G_{\tilde{\mu}}^{\theta})$ ve $\tilde{\mu}_{\lambda}(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon$ olacak şekilde $x_0, x_1, x_2, \dots, x_N \in C$ sonlu köşelerin bir kümesidir, burada herhangi bir $a, b \in C$ için $(a, b) \in E(G_{\tilde{\mu}}^{\theta})$ olacak şekilde $N \geq 1$ vardır. Herhangi bir $x, y \in C$ için $\tilde{\mu}^*(x, y)$

aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\tilde{\mu}^*(x, y) = \inf \left\{ \sum_{i=0}^{i=N-1} \tilde{\mu}_{\lambda}(x_i, x_{i+1}) \right\}.$$

Burada infimum, x den y ye kadar tüm (N, ε) sıralıları $x_0, x_1, x_2, \dots, x_N$ üzerinden alınır. C 'nin sonlu ε -sıralanabilir olması nedeniyle, herhangi bir $x, y \in C$ için $\tilde{\mu}^*(x, y) < \infty$ olduğu sonucuna ulaşılır. $\tilde{\mu}$ metriğinin temel özelliklerini kullanarak herhangi bir $x, y \in C$ için $(x, y) \in E(G_\mu^\theta)$ olacak şekilde

$$\tilde{\mu}_N(x, y) \leq \tilde{\mu}^*(x, y)$$

eşitsizliği yazılır. Ayrıca $\tilde{\mu}_\lambda(x, y) < \varepsilon$ ise herhangi bir $x, y \in C$ için $(x, y) \in E(G_\mu^\theta)$ iken

$$\tilde{\mu}^*(x, y) \leq \tilde{\mu}_{\lambda\varepsilon}(x, y)$$

elde edilir. Herhangi bir $x \in C$ sabit olmak üzere, $z_0 = x$ ve $z_1 \in \mathcal{T}(z_0)$ için $(z_0, z_1) \in E(G_\mu^\theta)$ olsun. Şimdi, $x_0, x_1, x_2, \dots, x_N$ sıralısı z_0 ile z_1 arasında (N, ε) sıralısı olsun. Böyle bir (N, ε) sıralısının varlığı, C sonlu ε -sıralısı olmasından kaynaklanır. Önerme 5.1.8 sayesinde

$$\tilde{\mu}_\lambda(z_1, y_1) \leq H_\mu(\mathcal{T}(z_0), \mathcal{T}(x_1))$$

olacak şekilde $y_1 \in \mathcal{T}(x_1)$ elemanı bulunur. Tekrarlanan bu sürecin sonucunda $y_i \in \mathcal{T}(x_i)$ ve

$$\tilde{\mu}_\lambda(y_i, y_{i+1}) \leq H_\mu(\mathcal{T}(x_i), \mathcal{T}(x_{i+1}))$$

olacak şekilde $y_2, y_3, \dots, y_N$ sıralısı bulunur. Burada $z_0, y_1, \dots, y_N$ nin z_0 dan $y_N \in \mathcal{T}(z_0)$ ' a kadar bir (N, ε) sıralısı olduğu açıktır. $\mathcal{T}, (\varepsilon, \theta) - G_\mu^\theta$ -düzgün yerel daralma dönüşümü ve θ_1 özelliğinde yer alan θ' 'nin sürekli olmasından dolayı

$$R_\mu(x_i, x_{i+1}) = \max\{\tilde{\mu}_\lambda(x_i, x_{i+1}), \tilde{\mu}_\lambda(x_i, \mathcal{T}(x_i)), \tilde{\mu}_\lambda(x_{i+1}, \mathcal{T}(x_{i+1}))\},$$

$$\frac{\tilde{\mu}_\lambda(x_i, \mathcal{T}(x_{i+1})) + \tilde{\mu}_\lambda(\mathcal{T}(x_i), x_{i+1})}{2}, \frac{\tilde{\mu}_\lambda(\mathcal{T}(x_{i+1}), x_{i+1}) (1 + \tilde{\mu}_\lambda(x_i, \mathcal{T}(x_i)))}{1 + \tilde{\mu}_\lambda(x_i, x_{i+1})} \Bigg\}$$

$$= \max \left\{ \tilde{\mu}_\lambda(x_i, x_{i+1}), \tilde{\mu}_\lambda(x_{i+1}, x_{i+2}), \frac{\tilde{\mu}_{\max\{\lambda, \lambda\}}(x_i, x_{i+2}) + (x_{i+1}, x_{i+1})}{2} \right\}$$

$$\leq \max \left\{ \tilde{\mu}_\lambda(x_i, x_{i+1}), \tilde{\mu}_\lambda(x_{i+1}, x_{i+2}), \frac{\tilde{\mu}_\lambda(x_i, x_{i+1}) + \tilde{\mu}_\lambda(x_{i+1}, x_{i+2})}{2} \right\}$$

$$= \max\{\tilde{\mu}_\lambda(x_i, x_{i+1}), \tilde{\mu}_\lambda(x_{i+1}, x_{i+2})\}$$

iken

$$\theta(\tilde{\mu}_\lambda(y_i, y_{i+1})) \leq \theta(H_{\tilde{\mu}}(\mathcal{T}(x_i), \mathcal{T}(x_{i+1}))) \leq [\theta(R_{\tilde{\mu}}(x_i, x_{i+1}))]^k$$

ifadesi elde edilir. Burada oluşan iki durumu göz önünde bulundurarak $\max\{\tilde{\mu}_\lambda(x_i, x_{i+1}), \tilde{\mu}_\lambda(x_{i+1}, x_{i+2})\} = \tilde{\mu}_\lambda(x_{i+1}, x_{i+2})$ iken elde edilen çelişki nedeniyle $R_{\tilde{\mu}}(x_i, x_{i+1}) = \tilde{\mu}_\lambda(x_i, x_{i+1})$ dir. O halde

$$\theta(H_{\tilde{\mu}}(\mathcal{T}(x_i), \mathcal{T}(x_{i+1}))) \leq [\theta(\tilde{\mu}_\lambda(x_i, x_{i+1}))]^k < \theta(\tilde{\mu}_\lambda(x_i, x_{i+1}))$$

olur. Bu durumda $H_{\tilde{\mu}}(\mathcal{T}(x_i), \mathcal{T}(x_{i+1})) < \tilde{\mu}_\lambda(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon$ yazılır. Yani $\mathcal{T}(x_0), \mathcal{T}(x_1), \dots, \mathcal{T}(x_N), \mathcal{T}(z_0)$ ile $\mathcal{T}(z_1)$ arasında (N, ε) sıralısı oluşturur. Ayrıca bu sıralının özellikleri korunarak mesafelerin daralma şartını sağladığı görülmektedir. Bunun sonucunda, $z_2 \in \mathcal{T}(z_1)$ olan

$$\theta(\tilde{\mu}^*(z_1, z_2)) \leq \theta(H_{\tilde{\mu}}(\mathcal{T}(z_0), \mathcal{T}(z_1))) \leq [\theta(\tilde{\mu}^*(z_0, z_1))]^k$$

elde edilir. Benzer şekilde, $\{z_n\}$ dizisini herhangi $n \geq 1$ için $(z_n, z_{n+1}) \in E(G_{\tilde{\mu}}^\theta)$ iken

$$\theta(\tilde{\mu}^*(z_n, z_{n+1})) \leq [\theta(\tilde{\mu}^*(z_{n-1}, z_n))]^k$$

ve $z_{n+1} \in \mathcal{T}(z_n)$ olsun. Açıkça görüldüğü gibi herhangi $n \geq 1$ için

$$\theta(\tilde{\mu}^*(z_n, z_{n+1})) \leq [\theta(\tilde{\mu}^*(z_0, z_1))]^{k^n}$$

dir. $\tilde{\mu}, \Delta_2$ -şartını sağladığından herhangi $n \geq 1$ için

$$\theta(\tilde{\mu}^*(z_n, z_{n+1})) \leq K\theta(\tilde{\mu}^*(z_n, z_{n+1})) \leq K[\theta(\tilde{\mu}^*(z_0, z_1))]^{k^n}$$

bulunur. Böylelikle Önerme 5.1.4 ten $\{z_n\}$ dizisi $\tilde{\mu}$ -Cauchy dizisidir. Dolayısıyla, C alt kümesi $\tilde{\mu}$ -tam olduğundan $\{z_n\}$ dizisi bazı $z \in C$ noktasına $\tilde{\mu}$ -yakınsaktır. Şimdi $z \in C$ noktasının $\mathcal{T}$ dönüşümünün sabit noktası olduğu gösterilecektir. Bunun için $z_{n+1} \notin \mathcal{T}(z)$ olsun. O zaman $\tilde{\mu}^*(z_{n+1}, \mathcal{T}(z)) > 0$ dir. Bununla birlikte, (S) özelliğinden $(z_n, z) \in E(G_{\tilde{\mu}}^\theta)$ dir. $\mathcal{T}, (\varepsilon, \theta) - G_{\tilde{\mu}}^\theta$ -düzgün yerel daralma dönüşümü olduğundan

$$R_{\tilde{\mu}^*}(z_n, z) = \max\{\tilde{\mu}^*(z_n, z), \delta^*(z_n, \mathcal{T}(z_n)), \delta^*(z, \mathcal{T}(z)),$$

$$\left. \frac{\delta^*(z_n, \mathcal{T}(z)) + \delta^*(\mathcal{T}(z_n), z)}{2}, \frac{\delta^*(\mathcal{T}(z), z) (1 + \delta^*(z_n, \mathcal{T}(z_n)))}{1 + \delta^*(z_n, z)} \right\}$$

iken

$$\theta\left(\tilde{\mu}^*(z_{n+1}, \mathcal{T}(z))\right) \leq \theta\left(H_{\tilde{\mu}^*}(\mathcal{T}(z_n), \mathcal{T}(z))\right) \leq \left[\theta\left(R_{\tilde{\mu}^*}(z_n, z)\right)\right]^k \quad (5.30)$$

olur. (5.30) eşitsizliğinde $n \rightarrow \infty$ iken limit alındığında

$$\theta\left(\tilde{\mu}^*(z, \mathcal{T}(z))\right) \leq \left[\theta\left(\delta^*(z, \mathcal{T}(z))\right)\right]^k$$

eşitsizliğine ulaşılır. Burada $k \in (0,1)$ olduğundan çelişki elde edilir. Bu durumda kabul edilen $z_{n+1} \notin \mathcal{T}(z)$ ifadesi hatalı olup $z_{n+1} \in \mathcal{T}(z)$ dir. Herhangi $n \geq 1$ için

$$\tilde{\mu}_{\max\{1,N\}}(z, \mathcal{T}(z)) \leq \tilde{\mu}_1(z_{n+1}, z) + \tilde{\mu}_N(z_{n+1}, \mathcal{T}(z))$$

ifadesinde $\{z_{n+1}\}$ dizisi, z noktasına $\tilde{\mu}$ –yakınsak ve $\mathcal{T}(z)$ $\tilde{\mu}$ –kapalı olduğundan $z \in \mathcal{T}(z)$ elde edilir.



6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Çalışmasında M_bMS ve $nonArc -QM_bMS$ uzaylarının tanımlarını vererek başlamış ve bazı topolojik özellikler sağlamıştır. Daha sonra, $nonArc -QM_bMS$ uzayında genelleştirilmiş $\alpha - \psi_b$ -büzülme dönüşümü için bazı sabit nokta sonuçlarını elde etmiştir. Uygulama olarak, sabit nokta problemleri için Ulam-Hyers kararlılık sonuçlarını elde etmiştir. Ayrıca, Caputo-tipli doğrusal olmayan kesirli diferansiyel probleminin tek bir çözümü için sabit nokta teorisini kullanmıştır.

Büzülme koşullarının, örneğin, F -daralması, θ -daralması, ara değer daralması, vb., asimetric modüler b -metrik uzayında gelecekte geçerli olabileceği öne sürülmüştür. Ayrıca, optimal yakınlık sonuçlarına ve çoğul değerli daralmalara ilişkin daha fazla araştırma etkileyici olacaktır. Asimetric modüler b -metrik uzayındaki mevcut sonuçların ortak sabit nokta versiyonunun incelenmesinin daha kapsamlı olabileceğini ifade etmiştir.

Sonuç olarak, çalışması, modüler b -metrik-gibi uzay olarak adlandırılan yeni bir kavramı, genelleştirilmiş metrik uzayı tanıtmaktadır. Ayrıca çalışmada verilen temel teorem metrik uzayın çeşitli genellemeleri üzerinde çalışan araştırmacılar tarafından oluşturulan temel sonuçlara önemli ölçüde dayanmakta ve onlara katkıda bulunmaktadır. Böylece, bu şekilde yapılan ufuk açıcı çalışmalar metrik uzay teorisi alanının kapsamını ve uygulanabilirliğini genişletmektedir.



KAYNAKLAR

- [1] Brouwer, L. E. J.,(1912). Über abbildung von mannigfaltigkeiten. *Mathematische Annalen*, 71, 598,97-115.
- [2] Kakutani, S., A.,(1941). Generalization of Brouwer's fixed point theorem, *Duke Mathematical Journal*.,8, 3 457–459.
- [3] Schauder, J. Der.,(1930). Fixpunktsatz in funktionalräumen. *Studia Mathematica*. 2,171-180.
- [4] Şuhubi, E., (2001).Fonksiyonel Analiz, İTÜ Vakfı Yayınları.
- [5] Sintunavarant, W., (2020).Fixed point theory and applications, Lecture Notes.
- [6] Maddox, I. J., (1970).Elements of Functional Analysis, Cambridge University Press..
- [7] Kreyszig, E.,(1978). Introductory Functional Analysis with Applications, John Wiley and New York.
- [8] Jain, P. K., (2009). Metric Spaces, Narosa Publishing House, New Delhi.
- [9] Banach, S.(2012) Sur les operations dans les emsembles abstraits et leurs applications aux equations integrales, *Fund. Math.*, 1,133–181.
- [10] Granas, A., Dugundji, J., Fixed Point Theory, *Springer Monographs in Mathematics*, 2002.
- [11] Berinde, V.,(2007). Iterative Approximation of Fixed Points, *Springer*, Verlag.
- [12] Bryant, V. W.,(1968).A remark on a fixed point theorem for iterated mappings, *Am. Math.Mon* 75, 399–400.
- [13] Edelstein, M.,(1962) On fixed and periodic points under contractive mappings, *J. Lond.Math. Soc.* 37, 74–79,
- [14] Kannan, R: (1968).Some results on fixed points, *Bull. Calcutta Math. Soc.*, 60, 71-76
- [15] Subrahmanyam, V.,(1975), Completeness and fixed-points, *Monatsh. Math.*, 80, 325–330.
- [16] Bianchini, R. M. T.,(1972).Su un problema di S. Reich riguardante la teoria dei punti fissi, *Boll. Un. Mat. Ital.*, 5, 3–10.
- [17] Chatterjea, S. K., (1972) Fixed point theorem, *C. R. Acad. Bulgare Sci*, 25, 727-730.
- [18] Reich, S., (1971) Some remarks concerning contraction mappings, *Canad. Math. Bull.*, 14, 121–124.
- [19] Hardy, G. E. ve Rogers, T. D., (1973) A generalization of a fixed point theorem of Reich, *Canad. Math. Bull.*, 16, 201-206.
- [20] Ćirić, L., (1971) On contraction type mappings, *Math. Balcanica*, 1, 52–57.

- [21] Berinde, V., (2003) On the approximation of fixed points of weak contractive mappings, *Carpathian J. Math.*, 19, 1722-732.
- [22] Babu, G.V.R., Sandhya, M.L. ve Kameswari, M.V.R., (2008) A note on a fixed point theorem of Berinde weak contractions, *Carpathian J. Math.*, 24, 1 8-12.
- [23] Suzuki, T., (2008) A generalized Banach contraction principle that characterizes metric completeness, *Proceedings of the American Math. Soc.*, 136, 1861-1869.
- [24] Suzuki, T., (2009) A new type of fixed point theorem in metric spaces, *Nonlinear Anal.*, 71, 5313–5317.
- [25] Jungck, G., Rhoades, B. E., (1998) Fixed Point for Set Valued Functions Without Continuity, *Indian J. Pure Applied Math.*, 29, 3 227-238.
- [26] Jungck, G., (1976) Commuting Mappings and Fixed Points, *Amer. Math. Monthly*, 83, 261-263.
- [27] Sessa, S., (1982) On a Weak Commutativity Condition of Mappings in Fixed Point Considerations, *Publ. Inst. Math.*, 32, 149-153.
- [28] Chugh, R. ve Kumar, S., (2001) Common Fixed Points for Weakly Compatible Maps, *Proc. Indian Acad. Sci.*, 111, 2 241-247.
- [29] Ćirić, L., Abbas, M., Saadati, R. ve Hussain, N., , (2011) Common fixed point of almost generalized contractive mappings in ordered metric spaces, *Appl., Math., Comput.*, 2175784-5789.
- [30] Nadler, S.B.,(1969).Multivalued contraction mappings, *Pacific J.Math.*,30, 475-488.
- [31] Agarwal, R.P., O'Regan,D.,Sahu, D.R.,(2009). Fixed point theory for lipschitzian-type mappings with applications, *Springer-Verlag New York, Springer, New York, NY*, ISBN:978-0-378-75818-3.
- [32] Dube, L. S.,(1975). A theorem on common fixed points of multivalued mappings, *Annal.Soc. Sci Bruxells*, 84(4), 463-468.
- [33] Kamran, T.,(2009). Mizoguchi- Takahashi's type fixed point theorem, *Computer and Mathematics with Applications*, 57(3), 507- 511.
- [34] Geraghty, M., (1973) On contractive mappings, *Proceedings of American Math. Soc.*, 40, 604–608.
- [35] Huang, H., Paunovic L. ve Radenovic, S.,(2015) On some new fixed point results for rational Geraghty contractive mappings inordered b-metric spaces, *J. Nonlinear Sci. Appl.*, 8, 800-807
- [36] Khojasteh, F., Shukla, S., Radenovic, S. (2015). A new approach to the study of fixed point theorems for simulation functions. *Filomat*,29(6), 1189-1194
- [37] Argoubi, H., Samet, B. Ve Vetro C. (2015). Nonlinear contractions involving simulation functions in a metric space with a partial order. *J. Nonlinear Sci. Appl.*, 8. 1082-1094.
- [38] Roldan-Lopez-de-Hierro, A., F., Karapınar, E., Roldan-Lopez-de-Hierro, C. ve Martínez-Moreno, J.(2015) Coincidence point theorems on metric spaces via simulation functions. *J. Comput. Appl. Math.*, 275, 345-355.

- [39] Joonaghany, G., H., Farajzadeh, A., Azhini, M. ve F. Khojasteh, (2019), A new common fixed point theorem for Suzuki type contractions via generalized Ψ –simulation functions, *Sahand Com. in Math. Anal. (SCMA)*, 16, 1.129–148.
- [40] Zoto, K., Mlaiki, N. ve Aydi, H., (2020) Related fixed point theorems via general approach of simulation functions, *Journal of Mathematics*, 2020, 1–12.
- [41] Isik, H., Gungor, N. B., Park, C. ve Jang, S. Y., (2018) Fixed Point Theorems for Almost Z –Contractions with an Application, *Mathematics*, 6, 3, 37 1–8.
- [42] Mongkolkeha, C., Cho, Y., J. ve Kumam, P., (2017) Fixed point theorems for simulation functions in b –metric spaces via the wt –distance, *Applied General Topology*, 1, 18 91–105
- [43] Cho, S., H., (2018) Fixed point theorem for Z –contraction generalized metric spaces, *Abstract and Applied Analysis*, 2018, 1–6
- [44] Girgin, E., Öztürk, M. (2019). Modified Suzuki-Simulation type contractive mapping in Non-Archimedean quasi modüler metric spaces and application to graph theory. *Mathematics*, 7, 769.
- [45] Samet, B., Vetro, C., Vetro, P. (2012). Fixed point theorems for $\alpha - \psi$ –contractive type mappings. *Nonlinear Ana.*,75(4), 2154-2165.
- [46] Karapınar, E., Kumam, P., Salimi, P. (2013). On a $\alpha - \psi$ –Meir-Keeler contraction mappings. *Fixed Point Theory Appl.* 94, 2013
- [47] Fulga, A. ve Proca, A., M., (2017) Fixed point for Geraghty ϑ_E – contractions, *J. Nonlinear Sci. Appl.*, 10, 5125–5131
- [48] Fulga, A. ve Proca, A., M., (2017) A new Generalization of Wardowski fixed point theorem in complete metric spaces, *Adv. Theory Nonlinear Anal. Appl.*, 1, 57–63.
- [49] Fulga, A. ve Karapınar, E., (2018) Some results on S –contractions of type E, *Mathematics*, 195, 6 1–9.
- [50] Proca, A., M., (2018) Fixed point theorem for φ_M –Geraghty contraction, Scientific Research and Education in the Air Force–AFASES2018, 1–6.
- [51] Proca, A., M., (2019) New fixed point theorem for generalized contractions, *Bull. Transilv. Univ. Bras. III: Math. Inform. Phys.*, 12, 61 435–442.
- [52] Berinde, V. (1996), Sequences of operators and fixed points in quasimetric spaces, *Stud. Univ. Babes-Bolyai, Math.*
- [53] Jleli, M., Samet, B. (2014). A new generalization of the Banach contraction principle. *J. Inequal. Appl.*, 2014, 38.
- [54] Ahmad J., Al-Mazrooei, A. E., Yeol Je Cho, Y. J. ve Yang, Y. O., (2017) Fixed point results for generalized θ –contractions, *J. Nonlinear Sci. Appl.*, 10, 2350–2358.
- [55] Alam, A., Imdad, M.(2015). Relation-theoretic contraction principle. *J. Fixed Point Theory Appl.*17, 693-702.
- [56] Al-Sulami, H., Ahmad, J., Hussain, N., Latif, A. (2018). Relation theoretic $(\Theta, \mathfrak{R})$ contraction results with applications to nonlinear matrix equations. *Symmetry*,10, 767

- [57] Baghani, H., Ramezani, M. (2017). A fixed point theorem for a new class of set-valued mappings in $\mathfrak{R}$ –complete (not necessarily complete) metric spaces. *Filomat*, 31, 3875- 3884.
- [58] Khalehghli, S., Rahimi, H., Gordji, M.E. (2022). Fixed point theorem in $\mathfrak{R}$ –metric spaces with applications. *AIMS Math.*, 5, 3125-3137
- [59] Kolman, B., Busby, R.C., Ross, S. (2000). Discrete mathematical structures. 3rd ed.; PHI Pvt: New Delhi, India.
- [60] Ulam, S.M., (1960) Collection of mathematical problems, *Intersciences*, NewYork, NY,USA.
- [61] Hyers, D., H., Isac, G., Rassias T., M., (1978),On the stability of linear mappings in Banach spaces., *Proc., Am., Math., Soc.*,72, 279-300.
- [62] Bota-Boriceanu, Petruşel, M., F., A.(2011) Ulam-Hyers stability for operational equations.,*Analele Univ. Al. I Cuza Iaşi*, 57, 65–74.
- [63] Rus, I.A. Remarks on Ulam stability of the operatorial equations.(2009) *Fixed Point Theory* 2009, 10, 305–320.
- [64] Johnsonbaugh, R.,(1997) Discrete Mathematics, *Prentice-Hall, Inc.*, New Jersey.
- [65] Garnier, R. ve Taylor, J., (1992)Discrete mathematics for new technology, Adam Hilger Publishing.
- [66] Toroczkai, Z.,(2005) Complex Networks The Challenge of Interaction Topology,*Los Alamos Science*, 29,.
- [67] Jachymski, J., (2008), The contraction principle for mappings on a metric space endowed wit a graph, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 136, 1359-1373.
- [68] Alfuraidan, M., R., (2015), The contraction principle for mappings on a modüler metric spaces with graph., *Fixed Point Theory and Applications*, 2015,46.
- [69] Bakhtin, I.A. (1989). The contraction mapping principle in quasi metric spaces. *Funct. Anal. Unianowsk Gos. Ped. Inst.*, 30, 26-37.
- [70] Czerwik, S. (1993). Contraction mappings in b –metric spaces. *Acta Math. Inf. Univ.Ostrav.*,1(1), 5-11.
- [71] Czerwik, S. (1998). Nonlinear set-valued contraction mappings in b –metric spaces. *Atti Sem. Math. Fis. Univ. Modena*, 46, 263-276.
- [72] Yamaod, O.,(2017). Fixed Point and Common Fixed Point Theorems Using New Generalized Simulation Functions and Clr-Property With Applications, Doktora Tezi, Thammasat Üniversitesi, Fen Bilimleri, Tayland.
- [73] Aghajani, A., Abbas, M. ve Roshan, J., R.(2014) Common fixed point of generalized weak contractive mappings in partially ordered b –metric spaces,*Math. Slovaca*,64(4), 941-960.
- [74] Chistyakov, V.V. (2010). Modüler metric spaces, I: Basic concepts. *Nonlinear Anal.*, 72, 1-14.
- [75] Chistyakov, V. V. (2010). Modüler metric spaces, II: Application to superposition operators. *Nonlinear Anal.*, 72, 15-30.

- [76] Chistyakov, V.V. (2013). Modüler contractions and their application. *Models, Algorithms, and Technologies for Network Analysis: Springer: New York, NY, USA*, 32, 65-92.
- [77] Migdalas, A.ve Karakitsiou, A., (2015). Optimization, Control, and Applications in the Information Age,. *Springer Proceedings in Mathematics & Statistics*.
- [78] Chistyakov, V. V.,(2015). Metric Modular Spaces Theory and Applications. *Springer*.
- [79] Mongkolkeha, C., Sintunavarat, W. ve Kumam, P.,(2011). Fixed Point Theorems for Contraction Mappings in Modular Metric Spaces. *Fixed Point and Theory Appl.* 93, 1-9.
- [80] Ege, M.E., Alaca, C. (2018). Some results for modüler b -metric spaces and an application to a system of linear equations. *Azerbaijan J. Math.*, 8(1), 3-14.
- [81] Girgin, E., Öztürk, M. (2019). $(\alpha, \beta) - \psi$ -type contraction in non-Archimedean quasi modüler metric space and applications. *J. Math. Anal.*, 10(1), 19-30
- [82] Kesik, D., Büyükkaya, A., Öztürk, M. (2023). On modified interpolative almost type contraction in partial modüler b -metric spaces. *Axioms*, 12(7), 669.
- [83] Öztürk, M., Büyükkaya, A. (2022). Fixed point results for Suzuki-type Σ – contractions via simulation functions in modüler metric spaces. *Math. Meth. Appl. Sci.*, 45, 1-17, <https://doi.org/10.1002/mma.7634>
- [84] Öztürk, M., Golkarmanesh, F., Büyükkaya, A., Parvaneh, V. (2023). Generalized almost simulative $\hat{Z}_{\psi^*}^{\theta}$ –contraction mappings in modüler b –metric spaces. *J. Math. Ext.*, 17(2), 1.
- [85] Büyükkaya, A., Öztürk, M. (2023). Some fixed point results for Sehgal-Proinov type contractions in b –modüler metric spaces. *Analele Stiint. Ale Univ. Ovidius Constanta Ser. Mat.*, 31, 61-85.
- [86] Büyükkaya, A., Fulga, A., Öztürk, M. (2023). On generalized Suzuki-Proinov type $(\alpha, \mathbb{Z}_E^*)$ –contractions in modüler b –metric spaces. *Filomat*, 37, 1207-1222.
- [87] Girgin, E., Büyükkaya A., Kuru Kaplan N., Younis M., Öztürk, M.,(2024), Analysis of Caputo-type non- linear fractional differential equations and their Ulam-Hyers stability, *Fractal Fract.*, 8(10), 558.
- [88] Balenau, D., Rezapour, S.; Mohammadi, H. (2013). Some existence results on nonlinear fractional differential equations, *Philos. Trans. R. Soc. A Math. Phys. Eng. Sci.* 371, 1–7.
- [89] Balenau, D.; Jajarmi, A.; Hajipour, M.(2017). A new formulation of the fractional optimal control problems involving Mittag-Leffler nonsingular kernel. *J. Optim. Theory. Appl.* 175, 718–737
- [90] Balenau, D.; Jajarmi, A.; Asad, A.; Blaszczyk, J.H.(2017) The motion of a bead sliding on a wire in a fractional sense. *Acta Phys. Pol. A*, 131, 1561–1564.

- [91] Harwood K., Modeling an RLC Circuit's current with differential equations. Available online: <https://www.simiode.org/resources/4148/> (accessed on 17 May 2011).



ÖZGEÇMİŞ

Ad-Soyad : Neslihan KAPLAN KURU

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans** : 2012, Sakarya Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik
- **Yükseklisans** : 2014, Sakarya Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı, Topoloji

MESLEKİ DENEYİM VE ÖDÜLLER:

- 2012 : Özel okul öğretmenliği

TEZDEN TÜRETİLEN ESERLER:

- Girgin, E., Büyükkaya A., Kuru N. K., Younis M. ve Öztürk, M.,. 2024. Analysis of Caputo-Type Non-Linear Fractional Differential Equations and Their Ulam-Hyers Stability, *Fractal and Fractional*, 8 (10) 558.
- Girgin, E., Büyükkaya A., Kuru N. K., Öztürk M., 2024 On The Impact of Some Fixed Point Theorems on Dynamic Programming and RLC Circuit Models in $\mathfrak{R}$ -Modular $\mathfrak{b}$ -Metric-like Spaces, *Axioms*, 13(7), 441.