



T.C.
OSMANIYE KORKUT ATA ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Esra ARSLAN

**SİNÜS-GORDON AÇILIM YÖNTEMİ İLE
BAZI KISMİ DİFERANSİYEL
DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN
BULUNMASI**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

OSMANIYE – 2025

T.C.
OSMANİYE KORKUT ATA ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS TEZİ

SİNÜS-GORDON AÇILIM YÖNTEMİ İLE BAZI KİSMİ
DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN
BULUNMASI

Esra ARSLAN

MATEMATİK
ANABİLİM DALI

OSMANİYE
Şubat 2025

TEZ ONAYI

SİNÜS-GORDON AÇILIM YÖNTEMİ İLE BAZI KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN BULUNMASI

Esra ARSLAN tarafından Prof. Dr. Şeyma TÜLÜCE DEMİRAY danışmanlığında Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü **Matematik** Anabilim Dalı'nda hazırlanan bu çalışma aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından oy birliği/çokluğu ile **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Şeyma TÜLÜCE DEMİRAY
Matematik Anabilim Dalı, OKÜ

Üye: Doç. Dr. Durmuş YARIMPABUÇ
Matematik Anabilim Dalı, OKÜ

Üye: Prof. Dr. Yusuf GÜREFE
Matematik Anabilim Dalı, MEÜ

Yukarıdaki jüri kararı Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun/...../..... tarih ve /..... sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Eyyup TEL
Enstitü Müdürü, **Lisansüstü Eğitim Enstitüsü**

Bu tez çalışması, OKÜ Bilimsel Araştırma Projeleri Birimi (OKÜBAP-2023-PT2-033) tarafından desteklenmiştir.

Bu tezde kullanılan özgün bilgiler, şekil, çizelge ve fotoğraflardan kaynak göstermeden alıntı yapmak 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunu hükümlerine tabidir.

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, bu çalışma sonucunda elde edilmeyen her türlü bilgi ve ifade için ilgili kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını ve bu tezin Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlandığını bildiririm.

Esra ARSLAN



ÖZET

SİNÜS-GORDON AÇILIM YÖNTEMİ İLE BAZI KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN BULUNMASI

Esra ARSLAN
Yüksek Lisans, Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Şeyma TULUCE DEMİRAY

Şubat 2025, 30 sayfa

Bu tez çalışması beş ana bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, Sinüs-Gordon açılım yönteminin temel ilkeleri, yöntemin teorik altyapısı ve uygulama süreçlerine dair kapsamlı açıklamalar sunulmuştur. İkinci bölümde, çalışma kapsamında kullanılan temel tanımlar ve kavramsal çerçeve ele alınmıştır. Üçüncü bölümde, Sinüs-Gordon açılım yönteminin yapısal özellikleri detaylı bir şekilde incelenmiştir. Dördüncü bölümde, Camassa-Choi (CC) denklemi, (2+1) boyutlu Wazwaz-Kaur-Boussinesq (WKB) denklemi ve İnce-film Ferroelektrik Materyaller (İFFEM) denklemi gibi farklı denklemlerin çözümlerine ulaşmak amacıyla Sinüs-Gordon açılım yöntemi (SGAM) uygulanmıştır. Ayrıca, elde edilen yarı analitik çözümler Mathematica 12 yazılımı kullanılarak üç boyutlu, iki boyutlu, kontur ve yoğunluk grafikleri şeklinde görselleştirilmiştir. Beşinci ve son bölümde ise çalışmadan elde edilen bulguların detaylı bir değerlendirmesi yapılmış ve bu bulgular ışığında genel sonuçlar tartışılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Mathematica 12, Soliton çözüm, Sinüs-Gordon Açılım Metodu.

ABSTRACT

FINDING SOLUTIONS OF SOME PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH THE SINE-GORDON EXPANSION METHOD

Esra ARSLAN
M.Sc., Department of Math
Supervisor: Prof. Dr. Şeyma TÜLÜCE DEMİRAY

February 2025, 30 pages

This thesis consists of five main sections. In the first section, the fundamental principles of the Sine-Gordon expansion method, its theoretical framework, and application processes are comprehensively explained. The second section addresses the basic definitions and conceptual framework used in the study. The third section provides a detailed analysis of the structural properties of the Sine-Gordon expansion method. In the fourth section, the Sine-Gordon expansion method (SGEM) is applied to solve various equations, including the Camassa-Choi (CC) equation, the (2+1) dimensional Wazwaz-Kaur-Boussinesq (WKB) equation, and the thin-film ferroelectric materials (TFFEM) equation. Additionally, the semi analytical solutions obtained are visualized through three-dimensional, two-dimensional, contour, and density plots using Mathematica 12 software. Finally, the fifth and last section presents a detailed evaluation of the findings, and the overall results are discussed in light of these findings.

Key Words: Mathematica 12, Soliton Solution, Sine-Gordon Expansion Method.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tez konumun belirlenerek alıőmamın yürütölmesinde benden bilgi, deneyim ve yardımlarını esirgemeyen danışman hocam Sayın Prof. Dr. Şeyma TÖLÖCE DEMİRAY'a ve Araştırma Görevlisi Sayın Uęur BAYRAKCI'ya sonsuz teőekkürlerimi sunarım.



İÇİNDEKİLER

TEZ ONAYI

TEZ BİLDİRİMİ

ÖZET.....	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ	v
SİMGELER VE KISALTMALAR	vii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR	4
3. MATERYAL VE METOD.....	5
3.1. Sinüs-Gordon Açılım Metodu (SGAM).....	5
4. METODUN UYGULAMASI	7
4.1. Camassa-Choi Denklemi ve Uygulaması.....	7
4.2. (2+1) Boyutlu Wazwaz-Kaur-Boussinesq Denklemi ve Uygulaması	10
4.3. İnce-film Ferroelektrik Materyaller Denklemi ve Uygulaması.....	19
5. SONUÇ	25
KAYNAKLAR	27
ÖZGEÇMİŞ.....	30

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 4.1. Camassa-Choi denkleminin SGAM ile elde edilen (4.1.9) çözümüne ait $A_0 = 1, l = 2, K = 3, y = 1, -10 \leq x \leq 10, -4 \leq t \leq 4$ değerleri için sırasıyla üç boyutlu, yoğunluk grafikleri ile $A_0 = 1, l = 2, K = 3, y = 1, -10 \leq x \leq 10, t = 1.5$ değerleri için iki boyutlu grafiği.....9

Şekil 4.2. Camassa-Choi denkleminin SGAM ile elde edilen (4.1.11) çözümüne ait $A_0 = 1, l = 1, K = 0.5, y = 0.05, -25 \leq x \leq 25, -5 \leq t \leq 5$ değerleri için sırasıyla kontur, yoğunluk ve üç boyutlu grafikleri ile $A_0 = 1, l = 1, K = 0.5, y = 0.05, -25 \leq x \leq 25, t = 1$ değerleri için iki boyutlu grafiği.....10

Şekil 4.3. (2+1) boyutlu WKB denkleminin SGAM ile elde edilen (4.2.10) çözümüne ait $A_2 = 0.1, B_2 = 1, y = 0.5, \lambda = 2, \mu = 2, -20 \leq x \leq 20, -5 \leq t \leq 5$ değerleri için sırasıyla üç boyutlu ve yoğunluk grafikleri ile $A_2 = 0.1, B_2 = 1, y = 0.5, \lambda = 2, \mu = 2, -20 \leq x \leq 20, t = 2$ değerleri için iki boyutlu grafiği.....13

Şekil 4.4. (2+1) boyutlu WKB denkleminin SGAM ile elde edilen (4.2.12) çözümüne ait $A_2 = 0.1, B_2 = 1, y = 0.5, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 2, \lambda = 2, \mu = 2, -25 \leq x \leq 25, -4 \leq t \leq 4$ değerleri için sırasıyla üç boyutlu, yoğunluk grafikleri ile $\alpha_2 = 1, \alpha_3 = 2, \lambda = 2, \mu = 2, -25 \leq x \leq 25, t = 2$ değerleri için iki boyutlu grafiği.....15

Şekil 4.5. (2+1) boyutlu WKB denkleminin SGAM ile elde edilen (4.2.14) çözümüne ait $B_2 = 1, y = 0.5, \alpha_1 = 0.1, \alpha_2 = 2, \lambda = 2, \mu = 0.2, -35 \leq x \leq 35, -3 \leq t \leq 3$ değerleri için sırasıyla üç boyutlu ve yoğunluk grafikleri ile $B_2 = 1, y = 0.5, \alpha_1 = 0.1, \alpha_2 = 2, \lambda = 2, \mu = 0.2, -35 \leq x \leq 35, t = 2$ değerleri için iki boyutlu grafiği.....17

Şekil 4.6. (2+1) boyutlu WKB denkleminin SGAM ile elde edilen (4.2.16) çözümüne ait $B_2 = 1, y = 2, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 1, \lambda = 0.2, -30 \leq x \leq 30, -6 \leq t \leq 6$ değerleri için sırasıyla kontur, yoğunluk ve üç boyutlu grafikleri ile $B_2 = 1, y = 2, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 1, \lambda = 0.2, -30 \leq x \leq 30, t = 2$ değerleri için iki boyutlu grafiği.....18

Şekil 4.7. İFFEM denkleminin, SGAM ile elde edilen (4.3.10) çözümüne ait $g_4 = 1$, $g_6 = 2$, $K = 1$, $m_d = 3$, $Q_d = 1$, $-10 \leq x \leq 10$, $-3 \leq t \leq 3$, değerleri için sırasıyla kontur, yoğunluk ve üç boyutlu grafikleri ile $g_4 = 1$, $g_6 = 2$, $K = 1$, $m_d = 3$, $Q_d = 1$, $t = 2$, $-10 \leq x \leq 10$ değerleri için iki boyutlu grafiği.....21

Şekil 4.8. İFFEM denkleminin SGAM ile elde edilen (4.3.12) çözümüne ait $g_4 = 1$, $g_6 = 2$, $K = 1$, $m_d = 3$, $Q_d = 1$, $-20 \leq x \leq 20$, $-4 \leq t \leq 4$, ile değerleri için sırasıyla kontur, yoğunluk ve üç boyutlu grafikleri ile $g_4 = 1$, $g_6 = 2$, $K = 1$, $m_d = 3$, $Q_d = 1$, $t = 2$, $-10 \leq x \leq 10$ değerleri için iki boyutlu grafiği.....22

Şekil 4.9. İFFEM denkleminin SGAM ile elde edilen (4.3.14) çözümüne ait $g_4 = 1$, $g_6 = 2$, $K = 1$, $m_d = 3$, $Q_d = 1$, $-25 \leq x \leq 25$, $-5 \leq t \leq 5$, değerleri için sırasıyla üç boyutlu, yoğunluk grafikleri ile $g_4 = 1$, $g_6 = 2$, $K = 1$, $m_d = 3$, $Q_d = 1$, $t = 2$, $-10 \leq x \leq 10$ değerleri için iki boyutlu grafiği.....24

SİMGELER ve KISALTMALAR

- SGAM → Sinüs-Gordon Açılım Metodu
CC → Camassa-Choi
WKB → Wazwaz-Kaur-Boussinesq
İFFEM → İnce-film Ferroelektrik Materyaller



1. GİRİŞ

Diferansiyel denklemler, bir fonksiyon ile bu fonksiyonun türevleri arasındaki ilişkileri ifade eden matematiksel ifadeler olup, birçok bilimsel disiplinde temel bir rol oynamaktadır [1-2]. Matematiğin teorik ve uygulamalı alanlarının hemen her dalında önemli bir yere sahip olan bu denklemler, doğadaki fiziksel süreçlerin ve sistemlerin modellenmesinde kullanılmaktadır. Diferansiyel denklemlerin çözümü, klasik matematik çalışmalarının en eski ve temel konularından biri olmuştur. Tarih boyunca bu denklemlere yönelik birçok farklı çözüm yöntemi geliştirilmiş ve bu yöntemlerin kapsamı sürekli olarak genişletilmiştir [3]. Bununla birlikte, diferansiyel denklemler arasında yer alan lineer olmayan denklemlerin çözümlerini bulmak için bilim insanları bu alanda yenilikçi çözüm teknikleri geliştirmiştir. Bazı bilim insanları tarafından Kudryashov metodu, modifiye Kudryashov metodu, homojen denge metodu ve tanh-coth metodu gibi yöntemler, karmaşık yapıya sahip denklemlerin çözümünde yaygın olarak uygulanmıştır. Bu yöntemlerin her biri, lineer olmayan diferansiyel denklemlerin daha anlaşılabilir formlara dönüştürülerek çözüme ulaşılmasını sağlamaktadır. Özellikle, fiziksel sistemlerin modellenmesinde kullanılan bu yöntemler, su dalgalarının hareketinden manyetik alan dalgalarına kadar geniş bir uygulama yelpazesine sahiptir [4-7].

Sinüs-Gordon denklemi, diferansiyel denklemler arasında özel bir yere sahiptir. Dalga hareketlerini modellemek için kullanılan bu denklem, soliton davranışı gösteren çözümleriyle tanınmaktadır. Solitonlar, çarpışma sonrasında şekil ve hızlarını koruyan dalga paketleri olarak tanımlanır. Bu özellikleri sayesinde, soliton çözümleri su dalgaları, optik iletim sistemleri, manyetik alanlar ve biyolojik sistemler gibi çeşitli alanlarda önemli bir rol oynamaktadır. Solitonların enerji kaybı yaşamadan ilerleyebilmeleri, soliton kavramının hem teorik hem de uygulamalı fizik açısından dikkat çekici bir çalışma konusu olmasına neden olmuştur [8].

Sinüs-Gordon Açılım Metodu (SGAM), ilk olarak 1996 yılında C. Yan tarafından literatüre sunulmuştur [9]. Bu metod uygulanırken ilk olarak, kısmi diferansiyel denklemler dalga dönüşümü yardımıyla adi diferansiyel denklemlere indirgenir. İndirgenmiş denkleme metodun algoritması uygulanır. Bu dönüşüm sayesinde,

karmaşık yapıya sahip denklemler daha basit bir hale getirilerek çözüm yolları açılmaktadır.

SGAM, yalnızca matematiksel teorilerde değil, aynı zamanda fizik, biyoloji, finans ve mühendislik gibi disiplinlerde ortaya çıkan karmaşık sistemlerin modellenmesinde de başarıyla uygulanmıştır [10]. Kudryashov ve meslektaşları, 1988 yılında SGAM'ın genelleştirilmiş bir versiyonunu geliştirerek lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çözüm yelpazesini genişletmiş ve bu yöntemin daha geniş bir alanda uygulanmasına imkan tanımıştır [11].

Bu çalışma kapsamında, SGAM kullanılarak Camassa-Choi (CC) denklemi, (2+1) boyutlu Wazwaz-Kaur-Boussinesq (WKB) denklemi ve İnce-film Ferroelektrik Materyaller (İFFEM) denklemi ele alınmış ve bu denklemlerin çözümleri elde edilmiştir. CC denklemi, iki akışkanlı sistemlerdeki dalga dinamiklerini tanımlayan önemli bir modeldir ve sığ su dalgalarının davranışını incelemek için kullanılmıştır. Bu denklem, literatürde soliton çözümleri ile bilinir ve çeşitli uygulama alanlarına sahiptir [12]. CC denkleminin uygulama alanları arasında oşinografi, matematiksel biyoloji ve akışkanlar dinamiği yer almakta olup, bu alanlarda zengin davranış özellikleri ile dikkat çekmektedir [13]. WKB denklemi ise yerçekimi dalgalarını ve su yüzeyindeki dalga yayılımını modellemek için kullanılan lineer olmayan bir kısmi diferansiyel denklemdir. Bu denklem, dalga profillerinin kafa kafaya çarpışmasını açıklayan özel bir model olarak öne çıkar ve sığ su dalgaları gibi sistemlerde yaygın olarak kullanılmaktadır. WKB denkleminin çözümünde, dalga dönüşüm teknikleri kullanılarak denklemin adi diferansiyel denklem haline getirilmesi ve cebirsel yöntemlerle çözüm bulunması sağlanmıştır [14-15]. İFFEM denklemi, nanoteknoloji ve elektronik alanında önemli bir yere sahiptir. Bu denklem, ince-film materyallerdeki elektriksel davranışı tanımlamak için kullanılır ve çeşitli dalga çözümlerine sahiptir [16]. Elektronik cihazlarda kullanılan ferroelektrik materyaller, hızlı anahtarlama ve enerji depolama kapasiteleri nedeniyle önemlidir. Bu nedenle, ince-film ferroelektrik materyallerin davranışını modelleyen denklemlerin çözümü özellikle mikrodalga teknolojisi, sensör sistemleri ve bellek cihazları gibi uygulama alanlarında kritik öneme sahiptir [17].

Bu tezde, CC denklemi, (2+1) boyutlu WKB denklemi ve İFFEM denklemine SGAM uygulanarak yeni dalga çözümleri elde edilmiş ve elde edilen çözümlerin grafiksel analizleri yapılmıştır. Grafiksel analizler, Mathematica yazılımı kullanılarak gerçekleştirilmiş ve her bir denklem için özel olarak hazırlanan çözümler iki boyutlu, üç boyutlu, kontur ve yoğunluk grafikleriyle desteklenmiştir. Sonuç olarak, Sinüs-Gordon Açılım Metodu'nun lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çözümlerinde etkili bir yöntem olduğu bu çalışmada bir kez daha gösterilmiştir. Bu metodun gelecekte yapılacak diferansiyel denklem çalışmalarında yeni çözümler sunması beklenmektedir. İleride yapılacak benzer çalışmaların, farklı fiziksel ve biyolojik sistemlerde de uygulanarak daha geniş kapsamda çözümler üretebileceği öngörülmektedir. Bununla birlikte, geliştirilecek yeni yaklaşımların, hem teorik matematiksel modellemelerde hem de uygulamalı bilimsel çalışmalarda daha verimli ve hızlı çözümler sunacağı düşünülmektedir. Bu çalışmanın bulguları, SGAM'ın literatüre katkısını ortaya koyarak, farklı disiplinlerde yapılacak yeni araştırmalara öncülük edebilecek niteliktedir.

2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

Tanım

Bir lineer olmayan adi diferansiyel denklemde bulunan en yüksek mertebeden türev olan terim $u^{(p)}$ ve en yüksek dereceden lineer olmayan terim $u^r \left(u^{(q)}\right)^s$ şeklinde gösterilsin. Buna göre dengeleme terimi m için,

$$m + p = mr + s(m + q), \quad (2.1)$$

eşitliği yazılır [18].

Kavram

Zabusky ve Kruskal, tekil dalgalar arasındaki etkileşimleri araştırırken, çarpışmalar sonrasında biçimlerini ve hızlarını koruyan dalgalar keşfetmiş ve bu dalgalara "soliton" adını vermiştir. Solitonlar, tekil dalgaların özel bir çeşidi olup belirli özellikler gösterir. Korteweg-de Vries (KdV) denklemi gibi integrallenebilir denklemler için tekil dalgalar soliton özelliği belirtirken, RLW ve EW gibi bazı denklemler için bu durum söz konusu değildir. Bu sebeple, bir denklem integrallenebilir olduğunda hiperbolik fonksiyonlarla verilen çözümleri soliton çözümler olarak tanımlanır. Soliton çözümler, özelliklerine göre dark soliton ve bright soliton olarak iki gruba ayrılır. Eğer çözüm, sech fonksiyonu şeklinde tanımlanabiliyorsa bright soliton, tanh fonksiyonu şeklinde tanımlanabiliyorsa dark soliton olarak adlandırılır [19,20].

Kavram

Mathematica, Wolfram Research tarafından geliştirilen ve geniş kapsamlı matematiksel işlemleri ortaya koyabilen güçlü bir simgesel matematik yazılımıdır. Hem sembolik hem de sayısal hesaplamalar yapma kabiliyetine sahip olan bu yazılım, başka türde matematiksel problemleri çözmek için etkili bir araç olarak değerlendirilmektedir. Bunun yanı sıra, Mathematica ile karmaşık fonksiyonların grafik gösterimlerini oluşturmak ve çeşitli bilimsel görselleştirmeler de yapılabilir [21].

3.MATERYAL VE METOD

3.1. Sinüs-Gordon Açılım Metodu (SGAM):

SGAM'ın genel yapısı aşağıdaki gibi ifade edilir [22]:

Sinüs-Gordon denklemi

$$u_{xx} + u_{yy} - u_{tt} = m^2 \sin(u), \quad (3.1.1)$$

eşitliği ile verilmiştir. Burada $u = u(x, y, t)$ ve m reel bir sabittir.

(3.1.1) ile verilen diferansiyel denkleme $u = u(x, y, t) = U(\varepsilon)$, $\varepsilon = kx + ly - ct$,

dalga dönüşümü uygulandığında aşağıdaki doğrusal olmayan adi diferansiyel denklem

$$U'' = \frac{m^2}{(k^2 + l^2 - c^2)} \sin(U), \quad (3.1.2)$$

elde edilir.

Burada $U = U(\varepsilon)$, ε hareketli dalganın genliği ve c hareketli dalganın hızıdır.

(3.1.2) denkleminin integrali alınır

$$\left[\left(\frac{U}{2} \right)' \right]^2 = \frac{m^2}{(k^2 + l^2 - c^2)} \sin^2 \left(\frac{U}{2} \right) + K, \quad (3.1.3)$$

elde edilir. Burada K integrasyon sabitidir.

(3.1.3) denkleminde $K = 0$, $\frac{U}{2} = w(\varepsilon)$, $\frac{m^2}{(k^2 + l^2 - c^2)} = \alpha^2$ ifadeleri yerine yazılırsa,

$$w' = \alpha \sin(w), \quad (3.1.4)$$

denklemi elde edilir. Özel olarak $\alpha = 1$ alınır

$$w' = \sin(w), \quad (3.1.5)$$

olur. (3.1.5) denklemini değişkenlerine ayrılabilir bir denklem olduğundan bu denklem çözüldüğünde aşağıdaki iki önemli çözümü

$$\sin(w) = \sin(w(\varepsilon)) = \frac{2pe^\varepsilon}{p^2e^{2\varepsilon} + 1} \Big|_{p=1} = \operatorname{sech}(\varepsilon), \quad (3.1.6)$$

$$\cos(w) = \cos(w(\varepsilon)) = \frac{p^2e^{2\varepsilon} - 1}{p^2e^{2\varepsilon} + 1} \Big|_{p=1} = \tanh(\varepsilon), \quad (3.1.7)$$

elde ederiz. Burada p integrasyon sabitidir.

$$P(u, u_x, u_y, u_t, u_{xx}, u_{yy}, u_{tt}, u_{xy}, u_{xt}, u_{yt}, \dots) = 0, \quad (3.1.8)$$

lineer olmayan diferansiyel denkleminin çözümünün

$$U(\varepsilon) = \sum_{i=1}^n \tanh^{i-1}(\varepsilon) [B_i \operatorname{sech}(\varepsilon) + A_i \tanh(\varepsilon)] + A_0, \quad (3.1.9)$$

şeklinde olduğunu kabul edelim. (3.1.9) denklemi (3.1.6) ve (3.1.7) denklemlerine göre aşağıdaki gibi

$$U(w) = \sum_{i=1}^n \cos^{i-1}(w) [B_i \operatorname{sech}(\varepsilon) + A_i \tanh(\varepsilon)] + A_0, \quad (3.1.10)$$

yazılabilir.

Elde edilen doğrusal olmayan diferansiyel denklemdeki en yüksek mertebeli türev ile en yüksek dereceli doğrusal olmayan terimin denge durumuna göre belirlenmesi, balans yöntemi ile sağlanabilir. Aynı dereceye sahip terimlerin katsayılarının toplamının sıfır olduğu varsayılarak bir cebirsel denklem sistemi oluşturulur. Bu sistem Wolfram Mathematica 12 programı kullanılarak çözüldüğünde, ilgili A_i, B_i, k, l ve c değerleri elde edilir. Elde edilen bu değerler (3.1.9) denkleminde yerleştirildiğinde, (3.1.8) denklemi için yeni dalga çözümleri üretilir.

4. METODUN UYGULANMASI:

Bu bölümde, CC denklemi, (2+1) boyutlu WKB denklemi ve İFFEM denkleminin çözümlerini elde etmek için SGAM kullanılmıştır.

4.1. Camassa-Choi Denklemi ve Uygulaması

Camassa-Choi (CC) denklemini

$$(u_t + Ku_x - uu_x + u_{xx})_x + u_{yy} = 0, \quad (4.1.1)$$

ele alalım. Burada, $K = 1/\tau$, iki akışkanlı sistemdeki derinliği tanımlar. Aslında, CC denklemi lineer olmayan zayıf iç dalgaları iki akışkanlı bir sistemde tanımlamaktadır. Aynı zamanda bu denklem, sığ sularındaki dalgaların dinamiğini tanımlayan bir lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemdir. Bilindik denklemlerden farklı olarak CC denklemi, şekillerini bozmadan yayılan soliter dalgaların oluşmasına izin verir. Bu tekil dalgalar pikon olarak tanımlanır ve tekil pik şekilli bir profil ile karakterize edilir. Ayrıca bu denklem, düzgün çözümlerin şoklar veya süreksizlikler geliştirdiği dalga kırılması özelliğini de gösterir. CC denklemi, oşinografi, matematiksel biyoloji ve akışkanlar dinamiği gibi çeşitli alanlarda uygulanmıştır. Zengin davranışının ve soliton çözümlerinin olması, onu lineer olmayan dalga teorisinde ilginç bir çalışma konusu haline getirmiştir. CC denkleminin kesin çözümleri, su dalgaları, lineer olmayan optik, biyofizik ve sismik dalgalar gibi uygulama alanlarına sahiptir [23].

Bu bölümde CC denklemi adi diferansiyel denkleme dönüştürülür ve cebirsel olarak çözümü yapılır.

$$u(x, y, t) = U(\varepsilon), \varepsilon = kx + ly - ct, \quad (4.1.2)$$

dönüşümü ele alınırsa (4.1.1) denklemi,

$$(-cU' + KkU' - kUU' + k^2U'')' + l^2U'' = 0, \quad (4.1.3)$$

denklemine dönüşür. (4.1.3) denkleminin integrasyon sabiti sıfıra eşit alınır ve denklem iki kez integre edilirse,

$$(Kk + l^2 - c)U - \frac{k}{2}U^2 + k^2U' = 0, \quad (4.1.4)$$

denklemini elde edilir.

(4.1.4) denkleminde dengeleme prensibi kullanılırsa

$$n + 1 = 2n \Rightarrow n = 1,$$

şeklinde dengeleme bağıntısı elde edilir. Burada $n = 1$ olduğundan,

$$U(w) = B_1 \sin(w) + A_1 \cos(w) + A_0, \quad (4.1.5)$$

$$U'(w) = B_1 \cos(w) \sin(w) - A_1 \sin^2(w), \quad (4.1.6)$$

yazılır.

(4.1.5) ve (4.1.6) denklemleri (4.1.4) denkleminde yerine yazıldığında

$$\begin{aligned} & (Kk + l^2 - c)(B_1 \sin(w) + A_1 \cos(w) + A_0) - \frac{k}{2}(B_1 \sin(w) + A_1 \cos(w) + A_0)^2 \\ & + k^2(B_1 \cos(w) \sin(w) - A_1 \sin^2(w)) = 0, \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

eşitliği elde edilir.

(4.1.7) eşitliğinden elde edilen cebirsel denklem sistemi Mathematica 12 yazılımı yardımıyla çözümlenerek aşağıdaki farklı çözüm durumları elde edilmiştir.

Durum 1:

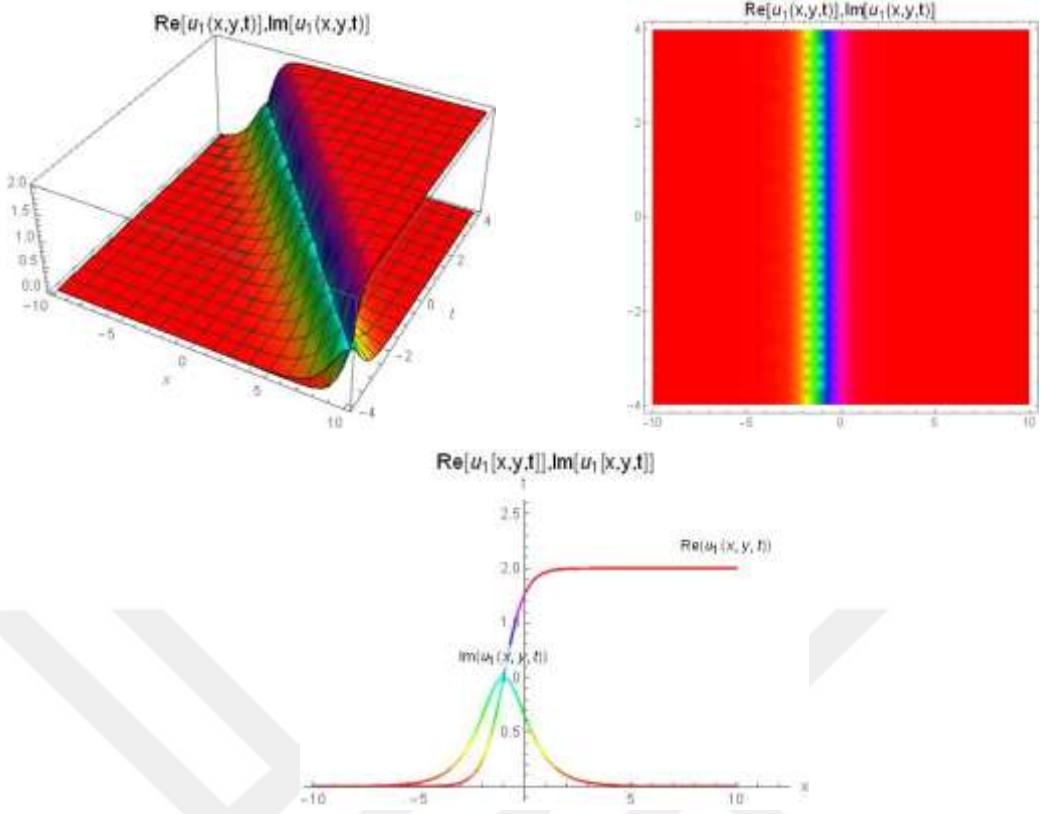
$$A_0 = A_0, A_1 = -A_0, B_1 = iA_0, c = l^2 - KA_0 + A_0^2, k = -A_0. \quad (4.1.8)$$

(4.1.8) denklemindeki değerler (4.1.7) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} u_1(x, y, t) = & A_0 \left(1 + i \operatorname{sech} \left[-A_0 x + ly - (l^2 - KA_0 + A_0^2) t \right] \right) \\ & - A_0 \left(\tanh \left[-A_0 x + ly - (l^2 - KA_0 + A_0^2) t \right] \right), \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

kompleks mixed dark-bright soliton çözümü elde edilir.

CC denkleminin SGAM ile elde edilen (4.1.9) çözümü için üç boyutlu, yoğunluk ve iki boyutlu grafikleri aşağıdaki şekilde çizilmiştir.



Şekil 4.1. Camassa-Choi denkleminin SGAM ile elde edilen (4.1.9) çözümüne ait $A_0 = 1, l = 2, K = 3, y = 1, -10 \leq x \leq 10, -4 \leq t \leq 4$ değerleri için sırasıyla üç boyutlu, yoğunluk grafikleri ile $A_0 = 1, l = 2, K = 3, y = 1, -10 \leq x \leq 10, t = 1.5$ değerleri için iki boyutlu grafiği

Durum 2:

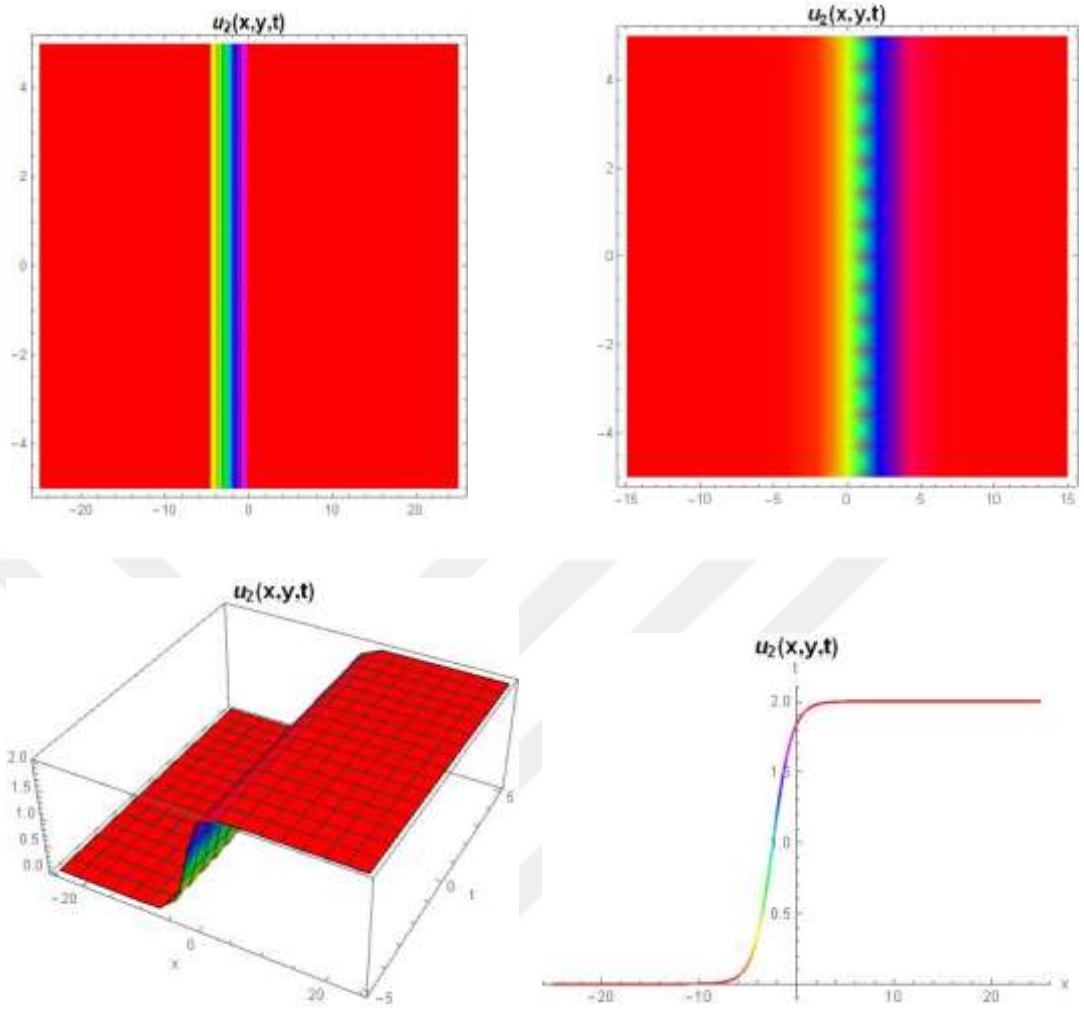
$$A_0 = A_0, A_1 = -A_0, B_1 = 0, c = \frac{1}{2}(2l^2 - KA_0 + A_0^2), k = -\frac{A_0}{2}. \quad (4.1.10)$$

(4.1.10) denklemindeki değerler (4.1.7) denkleminde yerine yazılırsa,

$$u_2(x, y, t) = -A_0 \left(-1 + \tanh \left[-\frac{A_0}{2}x + ly - \frac{1}{2}(2l^2 - KA_0 + A_0^2)t \right] \right), \quad (4.1.11)$$

dark soliton çözümü elde edilir.

CC denkleminin SGAM ile elde edilen (4.1.11) çözümü için kontur, yoğunluk, üç boyutlu ve iki boyutlu grafikleri aşağıdaki şekilde çizilmiştir.



Şekil 4.2. Camassa-Choi denkleminin SGAM ile elde edilen (4.1.11) çözümüne ait $A_0 = 1, l=1, K = 0.5, y = 0.05, -25 \leq x \leq 25, -5 \leq t \leq 5$ değerleri için sırasıyla kontur, yoğunluk ve üç boyutlu grafikleri ile $A_0 = 1, l=1, K = 0.5, y = 0.05, -25 \leq x \leq 25, t = 1$ değerleri için iki boyutlu grafiği

4.2. (2+1) Boyutlu Wazwaz-Kaur-Boussinesq Denklemi ve Uygulaması

(2+1) boyutlu WKB denklemi

$$u_{tt} - u_{xx} - \alpha_1 (u)_{xx}^2 - \alpha_2 u_{xxx} + \frac{\alpha_3^2}{4} u_{yy} + \alpha_3 u_{ty} = 0, \quad (4.2.1)$$

şeklinde verilsin. Burada alt simgeler (2+1) boyutlu WKB denklemi için kısmi türevlerdir, örneğin $u_{tt} = \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial t^2}$ şeklindedir. Burada $\alpha_i; i = 1, 2, 3$ sıfırdan farklı

sabitlerdir. Bu denklem, yerçekimi dalgalarının su yüzeyi üzerindeki etkileşimini (yayılmını), daha spesifik olarak da eğik dalga profillerinin kafa kafaya çarpışmasını açıklamaktadır [24].

Bu bölümde (2+1) boyutlu WKB denklemi adi diferansiyel denkleme dönüştürülür ve cebirsel olarak çözümü yapılır.

$$u(x, y, t) = U(\varepsilon), \varepsilon = \mu(x + y - \lambda t), \quad (\mu \neq 0, \lambda \neq 0), \quad (4.2.2)$$

dönüşümü ele alınırsa (4.2.1) denklemi,

$$-4\alpha_2\mu^2U^{(4)} - 8\alpha_1(UU'' + (U')^2) + (\alpha_3^2 + 4\lambda^2 - 4\alpha_3\lambda - 4)U'' = 0, \quad (4.2.3)$$

formuna indirgenir.

(4.2.3) denkleminin integrasyon sabiti sıfıra eşit alınır ve denklem iki kez integre edilirse,

$$-4\alpha_2\mu^2U'' - 4\alpha_1U^2 + (\alpha_3^2 + 4\lambda^2 - 4\alpha_3\lambda - 4)U = 0, \quad (4.2.4)$$

denklemine dönüşür.

(4.2.4) denkleminde dengeleme prensibi kullanılırsa

$$n + 2 = 2n \Rightarrow n = 2, \quad (4.2.5)$$

şeklinde dengeleme bağıntısı elde edilir. Burada $n = 2$ olduğundan,

$$U(w) = B_1 \sin(w) + A_1 \cos(w) + B_2 \cos(w) \sin(w) + A_2 \cos^2(w) + A_0, \quad (4.2.6)$$

$$U''(w) = B_1 \cos^2(w) \sin(w) - B_1 \sin^3(w) - 2A_1 \sin^2(w) \cos(w) + B_2 \cos^3(w) \sin(w) - 5B_2 \sin^3(w) \cos(w) - 4A_2 \cos^2(w) \sin^2(w) + 2A_2 \sin^4(w),$$

(4.2.7)

yazılır.

(4.2.6) ve (4.2.7) denklemleri (4.2.4) denkleminde yerine yazıldığında aşağıdaki denklem

$$\begin{aligned} & -4\alpha_2\mu^2 \left(\begin{aligned} & B_1 \cos^2(w) \sin(w) - B_1 \sin^3(w) - 2A_1 \sin^2(w) \cos(w) + B_2 \cos^3(w) \sin(w) \\ & - 5B_2 \sin^3(w) \cos(w) - 4A_2 \cos^2(w) \sin^2(w) + 2A_2 \sin^4(w) \end{aligned} \right) \\ & - 4\alpha_1 (B_1 \sin(w) + A_1 \cos(w) + B_2 \cos(w) \sin(w) + A_2 \cos^2(w) + A_0)^2 \\ & + (\alpha_3^2 + 4\lambda^2 - 4\alpha_3\lambda - 4) (B_1 \sin(w) + A_1 \cos(w) + B_2 \cos(w) \sin(w) + A_2 \cos^2(w) + A_0) = 0, \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

elde edilir.

(4.2.8) eşitliğinden elde edilen cebirsel denklem sistemi Mathematica 12 yazılımı yardımıyla çözümlenerek aşağıdaki farklı çözüm durumları elde edilmiştir.

Durum 1:

$$A_0 = -A_2, A_1 = 0, A_2 = A_2, B_1 = 0, B_2 = -iA_2, \lambda = \frac{i\lambda B_2}{A_2},$$

$$\alpha_2 = -\frac{A_2\alpha_1}{3\mu^2}, \alpha_3 = -\frac{2\sqrt{3}\sqrt{A_2^4(3-A_2\alpha_1)} + 6iA_2\lambda B_2}{3A_2^2}. \quad (4.2.9)$$

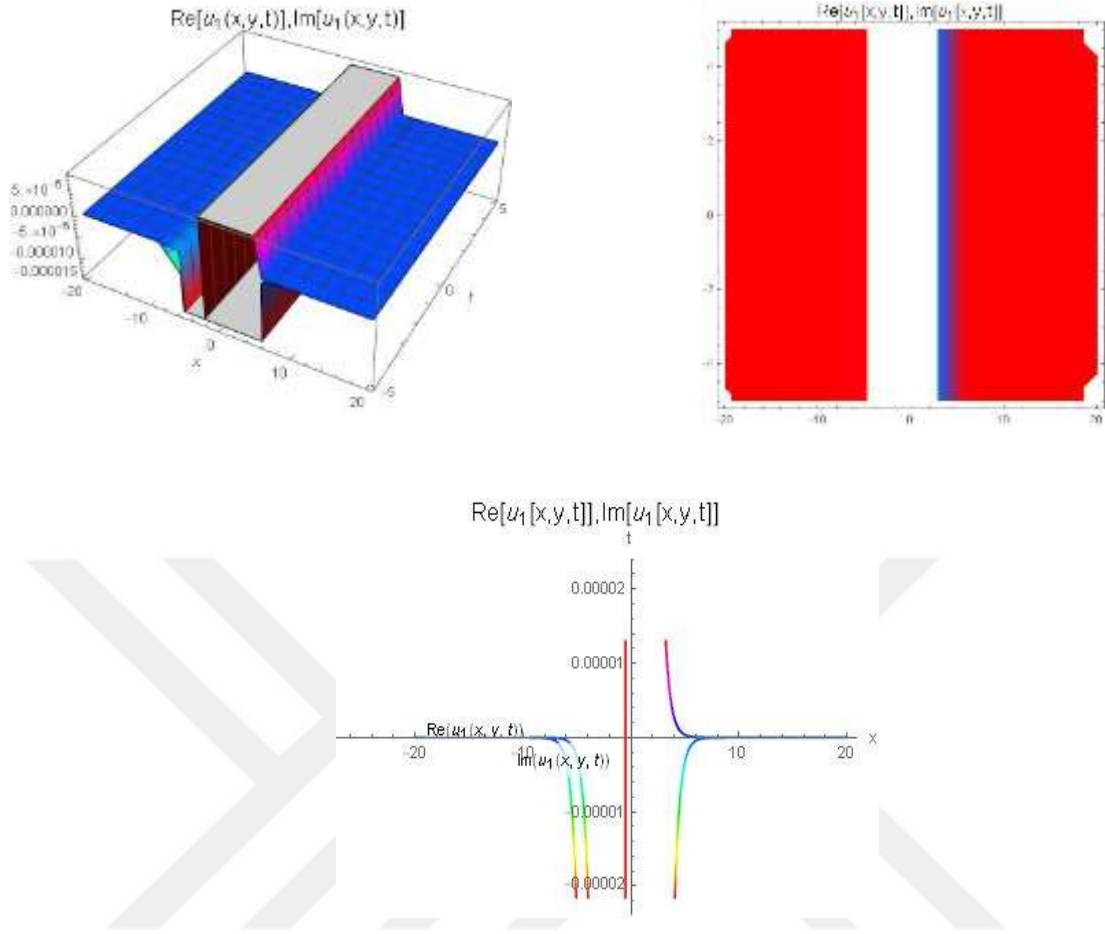
(4.2.9) denklemindeki değerler (4.2.8) denkleminde yerine yazılırsa,

$$u_1(x, y, t) = A_2 \left(-1 - i \operatorname{sech}[\delta] \tanh[\delta] + \tanh^2[\delta] \right), \quad (4.2.10)$$

kompleks mixed dark-bright soliton çözümü elde edilir. Burada $\delta = \mu \left(x + y - \frac{i\lambda B_2}{A_2} t \right)$

şeklindedir.

(2+1) boyutlu WKB denkleminin SGAM ile elde edilen (4.2.10) çözümü için üç boyutlu, yoğunluk ve iki boyutlu grafikleri aşağıdaki şekilde çizilmiştir.



Şekil 4.3. (2+1) boyutlu WKB denkleminin SGAM ile elde edilen (4.2.10) çözümüne ait $A_2 = 0.1, B_2 = 1, y = 0.5, \lambda = 2, \mu = 2, -20 \leq x \leq 20, -5 \leq t \leq 5$ değerleri için sırasıyla üç boyutlu ve yoğunluk grafikleri ile $A_2 = 0.1, B_2 = 1, y = 0.5, \lambda = 2, \mu = 2, -20 \leq x \leq 20, t = 2$ değerleri için iki boyutlu grafiği

Durum 2:

$$\begin{aligned}
A_0 &= -\frac{4\mu^2\alpha_2}{3\sqrt{\frac{\mu^4\alpha_2^2(-4+4\mu^2\alpha_2-\alpha_3^2)\lambda B_2^2-4\sqrt{\mu^8\alpha_2^4(1-\mu^2\alpha_2)}\alpha_3^2\lambda B_2^4}{\lambda B_2^4}}}, A_1 = 0, B_1 = 0, \\
A_2 &= \frac{2\mu^2\alpha_2}{\sqrt{\frac{\mu^4\alpha_2^2(-4+4\mu^2\alpha_2-\alpha_3^2)\lambda B_2^2-4\sqrt{\mu^8\alpha_2^4(1-\mu^2\alpha_2)}\alpha_3^2\lambda B_2^4}{\lambda B_2^4}}}, \\
B_2 &= \frac{1}{\frac{\alpha_3}{2\lambda B_2} + \frac{\sqrt{\mu^8\alpha_2^4(1-\mu^2\alpha_2)}\alpha_3^2\lambda B_2^4}{\mu^4\alpha_2^2\alpha_3\lambda B_2^3}}, \lambda = \frac{\alpha_3}{2} + \frac{\sqrt{\mu^8\alpha_2^4(1-\mu^2\alpha_2)}\alpha_3^2\lambda B_2^4}{\mu^4\alpha_2^2\alpha_3\lambda B_2^2}, \\
\alpha_1 &= -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{\mu^4\alpha_2^2(-4+4\mu^2\alpha_2-\alpha_3^2)\lambda B_2^2-4\sqrt{\mu^8\alpha_2^4(1-\mu^2\alpha_2)}\alpha_3^2\lambda B_2^4}{\lambda B_2^4}}. \quad (4.2.11)
\end{aligned}$$

(4.2.11) denklemindeki değerler (4.2.8) denkleminde yerine yazılırsa,

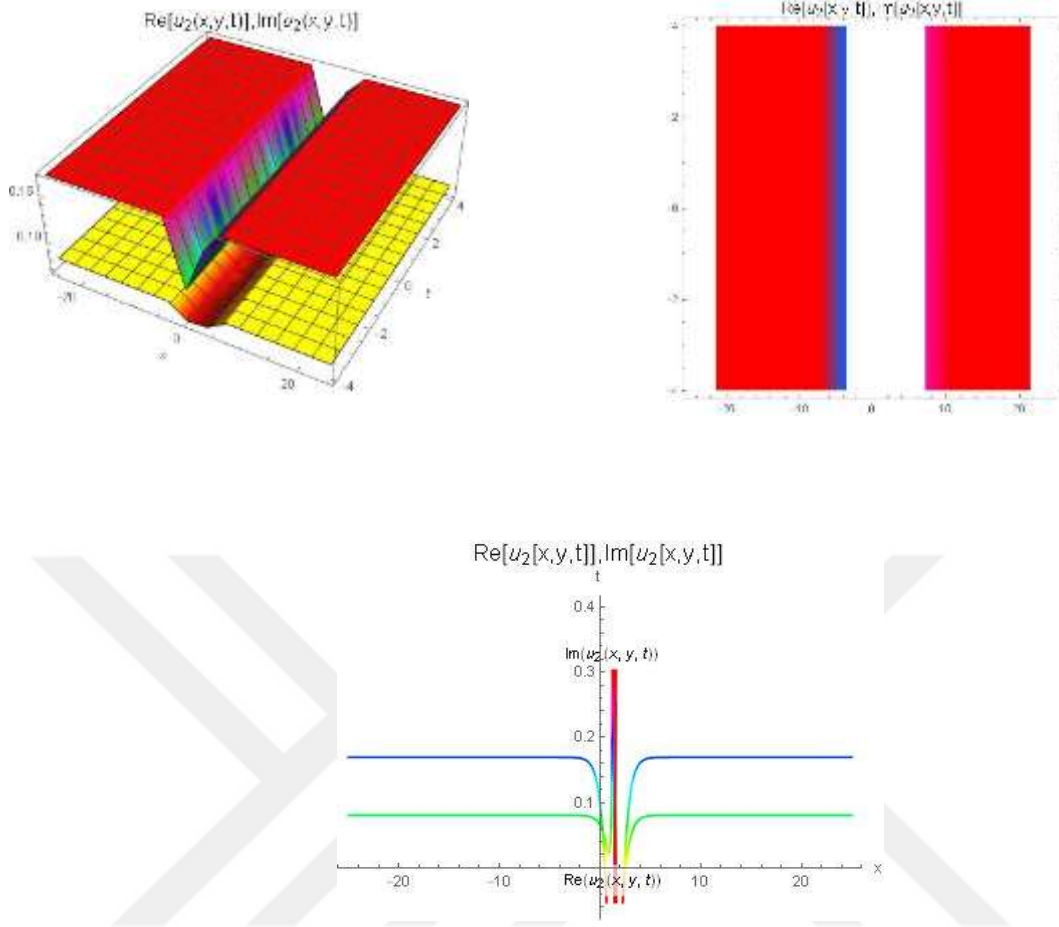
$$\begin{aligned}
u_2(x, y, t) &= \frac{\operatorname{sech}\left[\mu + \left(x + y - \left(\frac{\alpha_3}{2} + \rho\right)t\right)\right] \tanh\left[\mu \left(x + y - \left(\frac{\alpha_3}{2} + \rho\right)t\right)\right]}{\frac{\alpha_3}{2\lambda B_2} + \frac{\sqrt{\mu^8\alpha_2^4(1-\mu^2\alpha_2)}\alpha_3^2\lambda B_2^4}{\mu^4\alpha_2^2\alpha_3\lambda B_2^3}} \\
&\quad + \frac{2\mu^2\alpha_2\left(-2 + 3 \tanh^2\left[\mu + \left(x + y - \left(\frac{\alpha_3}{2} + \rho\right)t\right)\right]\right)}{3\sqrt{v}}, \quad (4.2.12)
\end{aligned}$$

mixed dark-bright soliton çözümleri elde edilir.

$$\text{Burada } v = \frac{\mu^4\alpha_2^2(-4+4\mu^2\alpha_2-\alpha_3^2)\lambda B_2^2-4\sqrt{\mu^8\alpha_2^4(1-\mu^2\alpha_2)}\alpha_3^2\lambda B_2^4}{\lambda B_2^4} \text{ ve}$$

$$\rho = \frac{\sqrt{\mu^8\alpha_2^4(1-\mu^2\alpha_2)}\alpha_3^2\lambda B_2^4}{\mu^4\alpha_2^2\alpha_3\lambda B_2^3} \text{ şeklindedir.}$$

(2+1) boyutlu WKB denkleminin SGAM ile elde edilen (4.2.12) denkleminin çözümleri için üç boyutlu, yoğunluk ve iki boyutlu grafikleri aşığıdaki şekilde çizilmiştir.



Şekil 4.4. (2+1) boyutlu WKB denkleminin SGAM ile elde edilen (4.2.12) çözümüne ait $A_2 = 0.1, B_2 = 1, y = 0.5, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 2, \lambda = 2, \mu = 2, -25 \leq x \leq 25, -4 \leq t \leq 4$ değerleri için sırasıyla üç boyutlu, yoğunluk grafikleri ile $A_2 = 0.1, B_2 = 1, y = 0.5, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 2, \lambda = 2, \mu = 2, -25 \leq x \leq 25, t = 2$ değerleri için iki boyutlu grafiği

Durum 3:

$$A_0 = \frac{3\mu^2\alpha_2}{\alpha_1}, A_1 = 0, B_1 = 0, A_2 = -\frac{3\mu^2\alpha_2}{\alpha_1}, B_2 = -\frac{3i\mu^2\alpha_2}{\alpha_1},$$

$$\lambda = \frac{i\alpha_1\lambda B_2}{3\mu^2\alpha_2}, \alpha_3 = \frac{2i\left(3i\sqrt{\mu^8\alpha_2^4(1+\mu^2\alpha_2)} + \mu^2\alpha_1\alpha_2\lambda B_2\right)}{3\mu^4\alpha_2^2}. \quad (4.2.13)$$

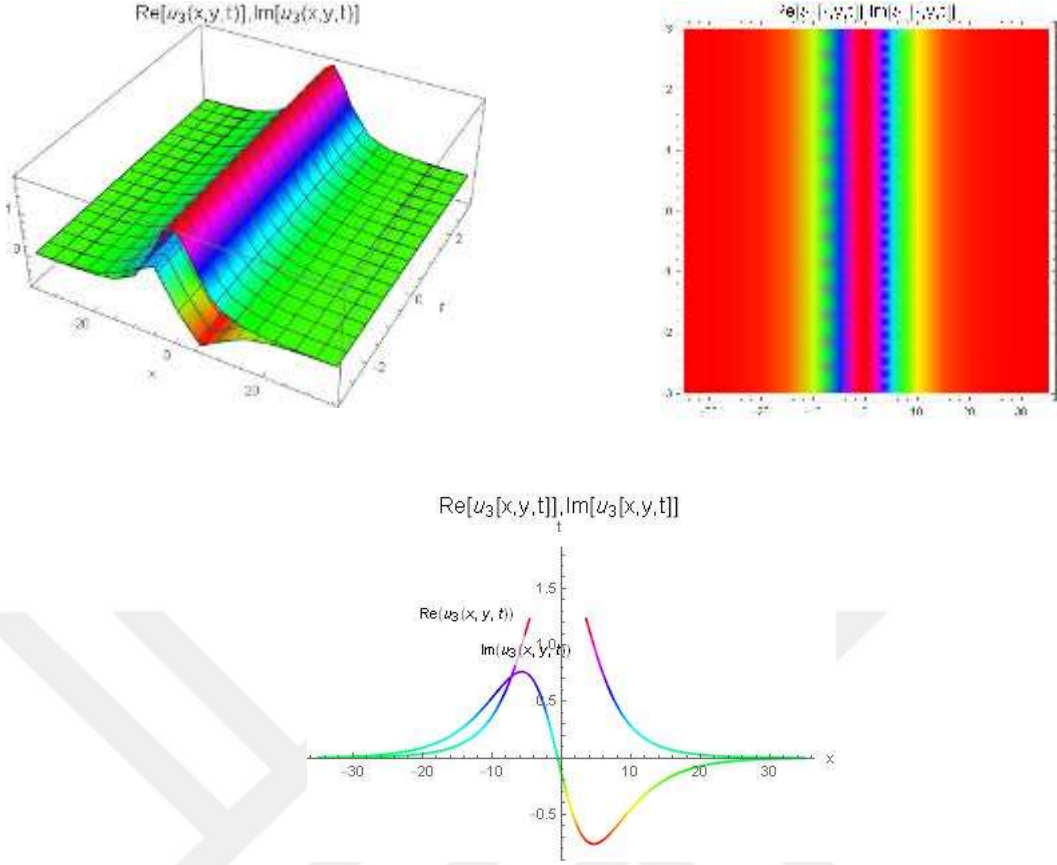
(4.2.13) denklemindeki değerler (4.2.8) denkleminde yerine yazılırsa,

$$u_3(x, y, t) = A \operatorname{sech}^2 \left[\mu \left(x + y - \frac{i\alpha_1 \lambda B_2}{3\mu^2 \alpha_2} t \right) \right] - iA \operatorname{sech} \left[\mu \left(x + y - \frac{i\alpha_1 \lambda B_2}{3\mu^2 \alpha_2} t \right) \right] \tanh \left[\mu \left(x + y - \frac{i\alpha_1 \lambda B_2}{3\mu^2 \alpha_2} t \right) \right], \quad (4.2.14)$$

kompleks mixed dark-bright soliton çözümü elde edilir. Burada $A = \frac{3\mu^2 \alpha_2}{\alpha_1}$ şeklindedir.

(2+1) boyutlu WKB denkleminin SGAM ile elde edilen (4.2.14) denkleminin çözümü için üç boyutlu, yoğunluk ve iki boyutlu grafikleri aşağıdaki şekilde çizilmiştir.





Şekil 4.5. (2+1) boyutlu WKB denkleminin SGAM ile elde edilen (4.2.14) çözümüne ait $B_2 = 1, y = 0.5, \alpha_1 = 0.1, \alpha_2 = 2, \lambda = 2, \mu = 0.2, -35 \leq x \leq 35, -3 \leq t \leq 3$ değerleri için sırasıyla üç boyutlu ve yoğunluk grafikleri ile $B_2 = 1, y = 0.5, \alpha_1 = 0.1, \alpha_2 = 2, \lambda = 2, \mu = 0.2, -35 \leq x \leq 35, t = 2$ değerleri için iki boyutlu grafiği

Durum 4:

$$A_0 = iB_2, A_1 = 0, A_2 = -iB_2, B_1 = 0, B_2 = B_2, \quad (4.2.15)$$

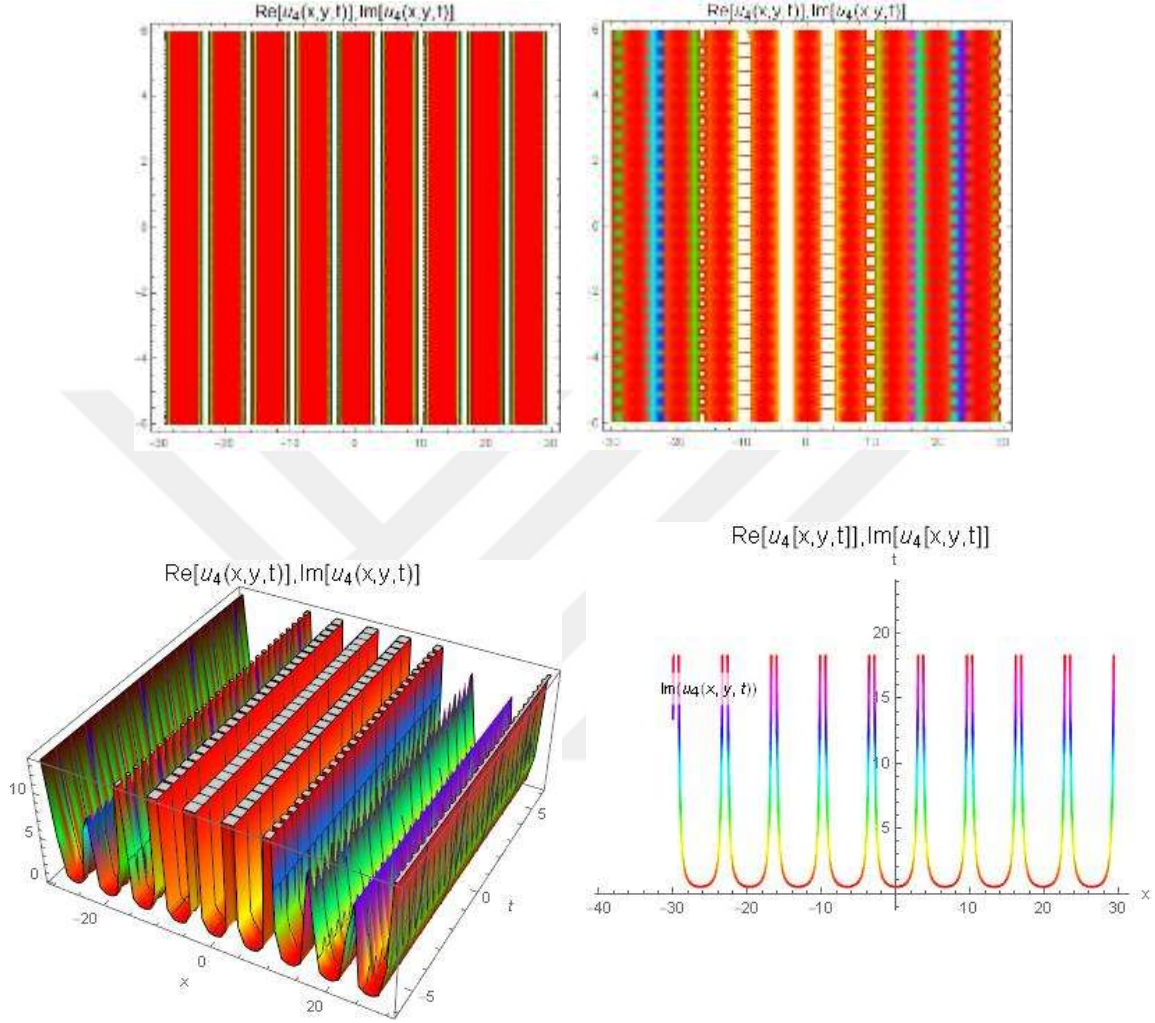
$$\mu = -\frac{\sqrt{-4 + 4\lambda^2 - 4\lambda\alpha_3 + \alpha_3^2}}{2\sqrt{\alpha_2}}, \alpha_1 = -\frac{3i\lambda(-4 + 4\lambda^2 - 4\lambda\alpha_3 + \alpha_3^2)}{4\lambda B_2}.$$

(4.2.15) denklemindeki değerler (4.2.8) denkleminde yerine yazılırsa,

$$u_4(x, y, t) = \frac{-B_2}{\left(i + \sinh \left[\frac{\sqrt{-4 + 4\lambda^2 - 4\lambda\alpha_3 + \alpha_3^2}}{2\sqrt{\alpha_2}} (x + y - \lambda t) \right] \right)}, \quad (4.2.16)$$

kompleks hiperbolik fonksiyon çözümleri elde edilir.

(2+1) boyutlu WKB denkleminin SGAM ile elde edilen (4.2.16) denkleminin çözümü için kontur, yoğunluk, üç boyutlu ve iki boyutlu grafikleri aşağıdaki şekilde çizilmiştir.



Şekil 4.6. (2+1) boyutlu WKB denkleminin SGAM ile elde edilen (4.2.16) çözümüne ait $B_2 = 1, y = 2, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 1, \lambda = 0.2, -30 \leq x \leq 30, -6 \leq t \leq 6$ değerleri için sırasıyla kontur, yoğunluk ve üç boyutlu grafikleri ile $B_2 = 1, y = 2, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 1, \lambda = 0.2, -30 \leq x \leq 30, t = 2$ değerleri için iki boyutlu grafiği

4.3. İnce-film Ferroelektrik Materyaller Denklemi ve Uygulaması

İnce-film Ferroelektrik Materyaller (İFFEM) denklemi, ferroelektrik ince-film malzemelerdeki elektriksel özellikleri tanımlamak amacıyla kullanılan bir kısmi türevli diferansiyel denklemdir. Bu malzemelerin geniş bir uygulama alanı bulunmaktadır ve hızlı anahtarlama, enerji depolama gibi özellikleri sayesinde özellikle elektronik cihazlarda kullanılmaktadır [25].

İFFEM denklemi

$$\frac{m_d}{Q_d^2} u_{tt} - (g_2 - 2\beta)u - g_4 u^3 - g_6 u^5 - K \Delta u = 0, \quad (4.3.1)$$

ile verilen kısmi diferansiyel denklemine

$$u(x, t) = U(\varepsilon), \varepsilon = x - ct, \quad (4.3.2)$$

dalga dönüşümü uygulanırsa

$$\left(\frac{m_d c^2}{Q_d^2} - K \right) U'' - (g_2 - 2\beta)U - g_4 U^3 - g_6 U^5 = 0, \quad (4.3.3)$$

adi diferansiyel denklemi elde edilir. (4.3.3) denkleminde $U = \sqrt{v}$ dönüşümü uygulanırsa

$$\left(\frac{m_d c^2}{Q_d^2} - K \right) \left(-\frac{1}{4} v'^2 + \frac{1}{2} v v'' \right) - (g_2 - 2\beta)v^2 - g_4 v^3 - g_6 v^4 = 0, \quad (4.3.4)$$

denklemi elde edilir. (4.3.4) denkleminde dengeleme prensibi uygulanırsa

$$n + 2 = 3n \Rightarrow n = 1,$$

değeri elde edilir. $n = 1$ ifadesi (4.3.4) denkleminde yerine yazılırsa

$$v(w) = B_1 \sin(w) + A_1 \cos(w) + A_0, \quad (4.3.5)$$

$$v'(w) = B_1 \cos(w) \sin(w) - A_1 \sin^2(w), \quad (4.3.6)$$

$$v''(w) = B_1 \cos^2(w) \sin(w) - B_1 \sin^3(w) - 2A_1 \sin^2(w) \cos(w), \quad (4.3.7)$$

elde edilir.

Elde edilen (4.3.5), (4.3.6) ve (4.3.7) denklemleri (4.3.4) adi diferansiyel denkleminde dikkate alınırsa,

$$\left(\frac{m_d c^2}{Q^2 d} - K \right) \left(-\frac{1}{4} (B_1 \cos(w) \sin(w) - A_1 \sin^2(w))^2 + \frac{1}{2} (B_1 \sin(w) + A_1 \cos(w) + A_0) \right) \\ - (g_2 - 2\beta) (B_1 \sin(w) + A_1 \cos(w) + A_0)^2 - g_4 (B_1 \sin(w) + A_1 \cos(w) + A_0)^3 \\ - g_6 (B_1 \sin(w) + A_1 \cos(w) + A_0)^4 = 0, \quad (4.3.8)$$

eşitliği elde edilir.

(4.3.8) eşitliğinden elde edilen cebirsel denklem sistemi Mathematica 12 yardımıyla çözümlenerek aşağıdaki farklı çözüm durumları elde edilmiştir.

Durum 1:

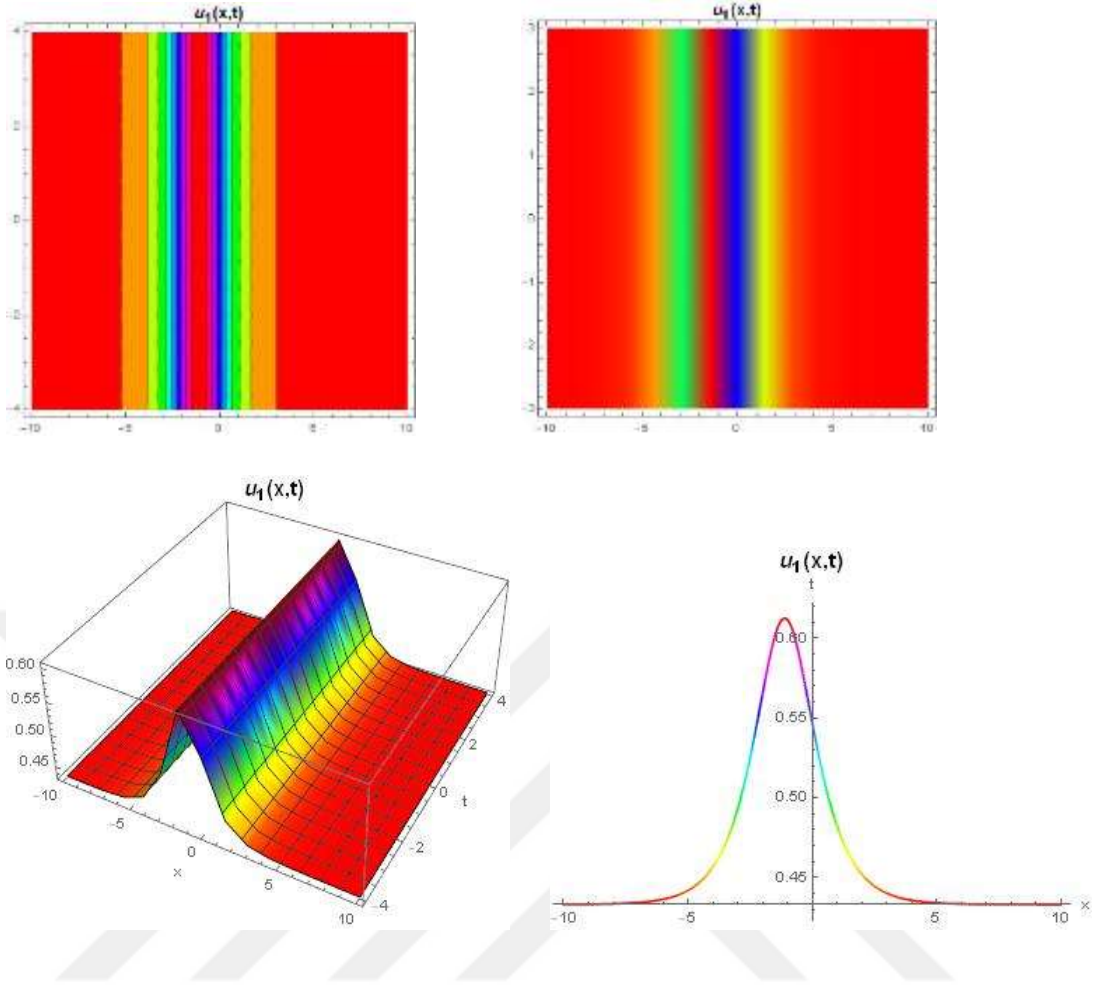
$$A_0 = -\frac{3g_4}{8g_6}, A_1 = 0, B_1 = -\frac{3g_4}{8g_6}, c = \frac{i\sqrt{3g_4^2 - 16Kg_6Q_d}}{4\sqrt{g_6m_d}}, \beta = \frac{g_2}{2} - \frac{15g_4^2}{128g_6}. \quad (4.3.9)$$

(4.3.9) eşitlikleri (4.3.8) denkleminde yerine yazılırsa,

$$u_1(x, t) = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \sqrt{-\frac{\left(1 + \operatorname{sech} \left[x - \frac{i\sqrt{3g_4^2 - 16Kg_6Q_d}}{4\sqrt{g_6m_d}} t \right] \right) g_4}{g_6}}, \quad (4.3.10)$$

bright soliton çözümü elde edilir.

İFFEM denkleminin SGAM ile elde edilen (4.3.10) çözümü için kontur, yoğunluk, üç boyutlu ve iki boyutlu grafikleri aşağıdaki şekilde çizilmiştir.



Şekil 4.7. İnce-film Ferroelektrik Materyaller denkleminin SGAM ile elde edilen (4.3.10) çözümüne ait $g_4 = 1, g_6 = 2, K = 1, m_d = 3, Q_d = 1, -10 \leq x \leq 10, -3 \leq t \leq 3$, değerleri için sırasıyla kontur, yoğunluk ve üç boyutlu grafikleri ile $g_4 = 1, g_6 = 2, K = 1, m_d = 3, Q_d = 1, t = 2, -10 \leq x \leq 10$ değerleri için iki boyutlu grafiği

Durum 2:

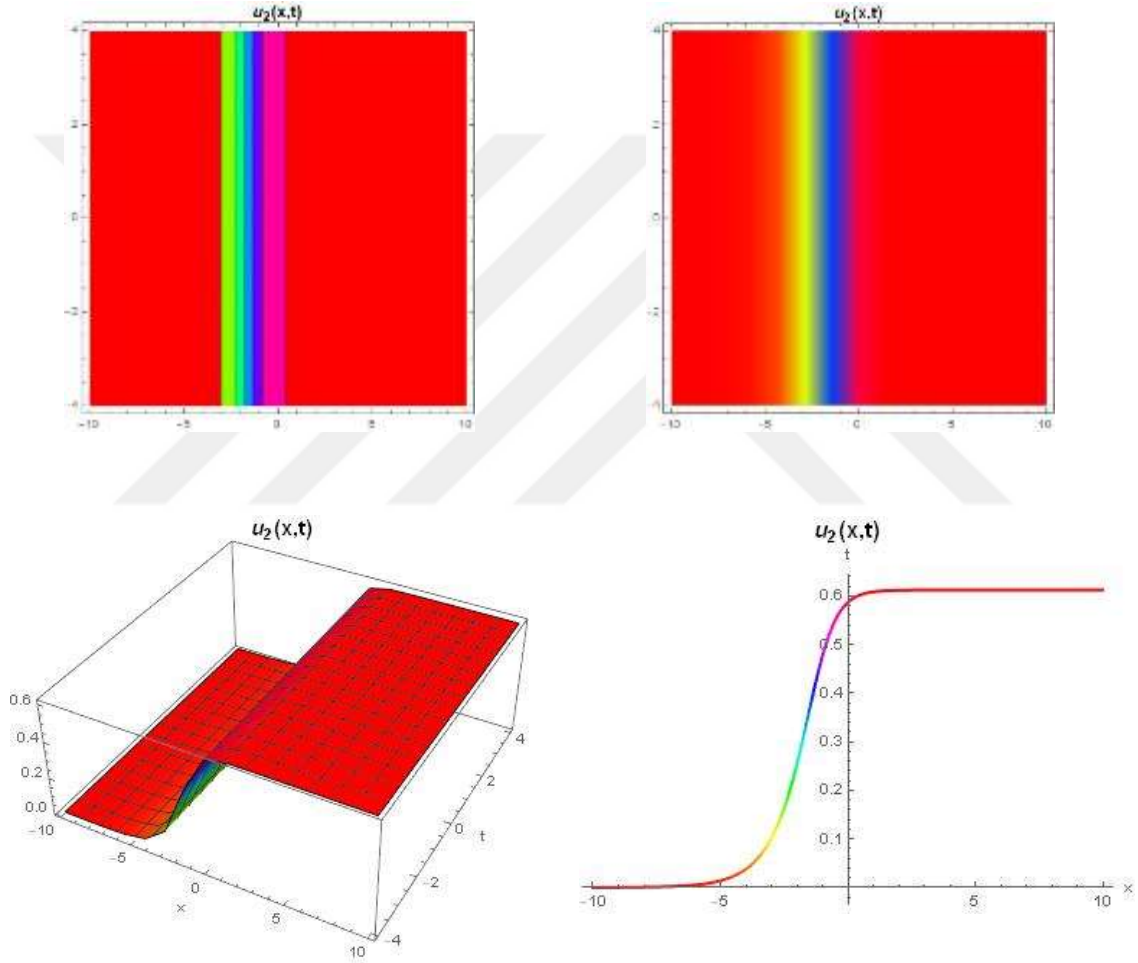
$$A_0 = -\frac{3g_4}{8g_6}, A_1 = -\frac{3g_4}{8g_6}, B_1 = 0, c = -\frac{\sqrt{3g_4^2 + 16Kg_6} Q_d}{4\sqrt{g_6 m_d}}, \beta = \frac{g_2}{2} - \frac{3g_4^2}{32g_6}. \quad (4.3.11)$$

(4.3.11) eşitlikleri (4.3.8) denkleminde yerine yazılırsa,

$$u_2(x,t) = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{g_4 \left(1 + \tanh \left[x + \frac{\sqrt{3g_4^2 + 16Kg_6} Q_d t}{4\sqrt{g_6 m_d}} \right] \right)}{g_6}}, \quad (4.3.12)$$

dark soliton çözümleri elde edilir.

İFFEM denkleminin SGAM ile elde edilen (4.3.12) çözümleri için kontur, yoğunluk, üç boyutlu ve iki boyutlu grafikleri aşağıdaki şekilde çizilmiştir.



Şekil 4.8. İnce-film Ferroelektrik Materyaller denkleminin SGAM ile elde edilen (4.3.12) çözümlerine ait $g_4 = 1, g_6 = 2, K = 1, m_d = 3, Q_d = 1, -20 \leq x \leq 20, -4 \leq t \leq 4$, ile değerleri için sırasıyla kontur, yoğunluk ve üç boyutlu grafikleri ile $g_4 = 1, g_6 = 2, K = 1, m_d = 3, Q_d = 1, t = 2, -10 \leq x \leq 10$ değerleri için iki boyutlu grafiği

Durum 3:

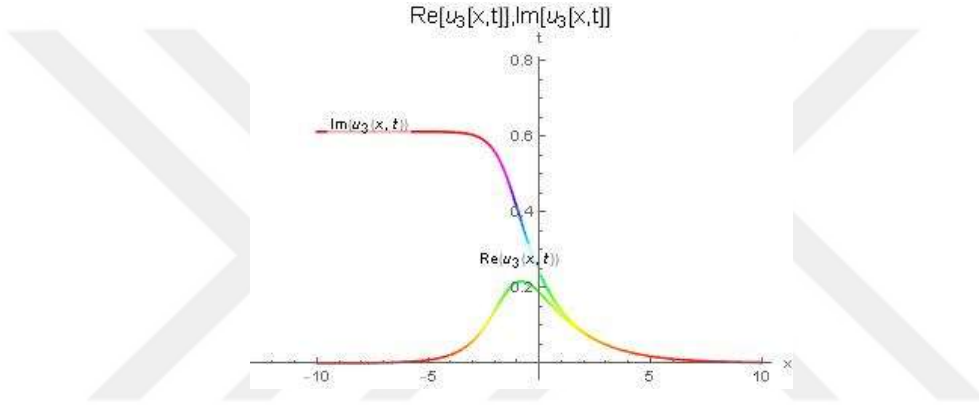
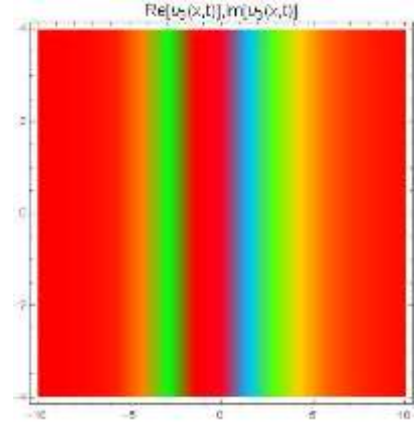
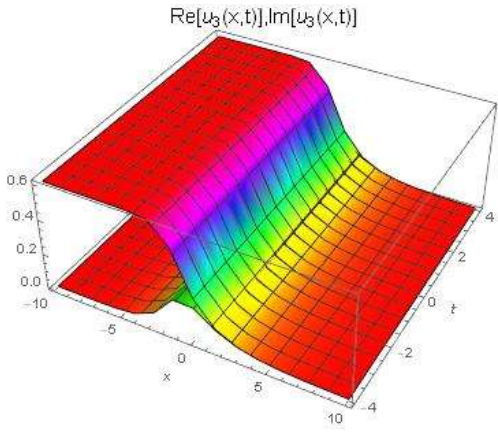
$$A_0 = -\frac{3g_4}{8g_6}, A_1 = \frac{3g_4}{8g_6}, B_1 = \frac{3ig_4}{8g_6}, c = -\frac{\sqrt{3g_4^2 + 4Kg_6Q_d}}{2\sqrt{g_6m_d}}, \beta = \frac{g_2}{2} - \frac{3g_4^2}{32g_6}. \quad (4.3.13)$$

(4.3.13) eşitlikleri (4.3.8) denkleminde yerine yazılırsa,

$$u_3(x, t) = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{g_4 \left(-1 + i \operatorname{sech} \left[x + \frac{\sqrt{3g_4^2 + 4Kg_6Q_d}}{2\sqrt{g_6m_d}} t \right] + \tanh \left[x + \frac{\sqrt{3g_4^2 + 4Kg_6Q_d}}{2\sqrt{g_6m_d}} t \right] \right)}{g_6}}, \quad (4.3.14)$$

kompleks mixed dark-bright soliton çözümü elde edilir.

İFFEM denkleminin SGAM ile elde edilen (4.3.14) çözümü için üç boyutlu, yoğunluk ve iki boyutlu grafikleri aşağıdaki şekilde çizilmiştir.



Şekil 4.9. İnce-film Ferroelektrik Materyaller denkleminin SGAM ile elde edilen (4.3.14) çözümüne ait $g_4 = 1, g_6 = 2, K = 1, m_d = 3, Q_d = 1, -25 \leq x \leq 25, -5 \leq t \leq 5$, değerleri için sırasıyla üç boyutlu, yoğunluk grafikleri ile $g_4 = 1, g_6 = 2, K = 1, m_d = 3, Q_d = 1, t = 2, -10 \leq x \leq 10$ değerleri için iki boyutlu grafiği

5.SONUÇ

Bu tez çalışmasında SGAM kullanılarak CC denklemi, (2+1) boyutlu WKB denklemi ve İFFEM denklemlerinin çözümleri elde edilmiştir. Çalışmanın temel amacı, lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin daha basit yöntemlerle çözümlerinin bulunması ve bu çözümlerin fiziksel sistemlerdeki anlamlarını incelemektir. SGAM, dalga dönüşümü uygulanarak kısmi türevli denklemlerin adi diferansiyel denkleme dönüştürülmesi ve bu denklemin cebirsel olarak çözümlenmesi esasına dayanır.

CC denklemi, sığ su dalgalarının dinamiğini modelleyen önemli bir denklemdir. Bu denklem, literatürde soliton çözümleri ile bilinen ve oşinografi, akışkanlar mekaniği gibi alanlarda yaygın olarak kullanılan bir modeldir. Çalışmada, CC denklemi üzerinde SGAM uygulanarak farklı çözümleri elde edilmiş ve bu çözümlerin üç boyutlu, kontur, yoğunluk ve iki boyutlu grafikleri Mathematica yazılımı kullanılarak çizilmiştir.

WKB denklemi, yerçekimi dalgalarını modelleyen ve su yüzeyi üzerindeki dalga etkileşimlerini açıklayan bir denklemdir. Bu çalışmada, SGAM uygulanarak denklemin farklı çözüm durumları elde edilmiş ve bu çözümlerin üç boyutlu, kontur, yoğunluk ve iki boyutlu grafikleri Mathematica yazılımı kullanılarak çizilmiştir.

İFFEM denklemi, elektronik cihazlarda kullanılan ince-film malzemelerin elektriksel davranışlarını modellemek amacıyla kullanılan bir denklemdir. Bu tez çalışmasında, İFFEM denklemi üzerinde SGAM uygulanmış ve elde edilen çözümler detaylı olarak incelenmiştir. Elde edilen bu çözümlerin üç boyutlu, kontur, yoğunluk ve iki boyutlu grafikleri Mathematica yazılımı kullanılarak çizilmiştir.

Bu çalışma kapsamında elde edilen sonuçlar, SGAM'ın lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çözümlerinde etkili bir yöntem olduğunu göstermektedir. Elde edilen kompleks mixed dark-bright soliton, kompleks hiperbolik fonksiyon, dark soliton bright soliton çözümleri sadece teorik anlamda değil, aynı zamanda uygulamalı bilimsel çalışmalarda da kullanılabilir niteliktedir. Özellikle elektronik, biyofizik ve oşinografi gibi alanlarda bu çözümlerin yeni modellere ilham vereceği ve mevcut modellere katkı sağlayacağı düşünülmektedir.

Sonuç olarak, SGAM'ın uygulanabilirliği ve etkinliği bu tezde bir kez daha kanıtlanmıştır. Bu metodun farklı disiplinlerdeki kullanımı genişletilerek, daha kapsamlı cözümler elde edilebilir. Bu bağlamda, SGAM'ın farklı dallarda yaygınlaşması ve geliştirilmesi, bilimsel araştırmaların ilerlemesine katkı sağlayacaktır.



KAYNAKLAR

- [1] Kara, S., Ünsal, Ö., Analytical solutions to new forms of two nonlinear partial differential equations via two variable expansion method, *Partial Differential Equations in Applied Mathematics*, 5, 1-7, 2022.
- [2] Mamun, A. A., Ananna, S. N., An, T., Asaduzzaman, M., Miah, M. M., Solitary wave structures of a family of 3D fractional WBBM equation via the tanh-coth approach, *Partial Differential Equations in Applied Mathematics*, 5, 1-6, 2022.
- [3] Odabaşı, G., Bazı lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin çözüm yöntemleri, *Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek lisans tezi, Kocaeli*, 78, 2018.
- [4] Eren, S., Kısmi türevli diferansiyel denklemlerin Kudryashov yöntemiyle incelenmesi, *Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Yozgat*, 46, 2019.
- [5] Kumar, D., Seadawy, A. R., Joardar, A. K., Modified Kudryashov method via new exact solutions for some conformable fractional differential equations arising in mathematical biology, *Chinese Journal of Physics*, 56(1), 75-85, 2018.
- [6] Wazwaz, A. M., The tanh-coth method for solitons and kink solutions for nonlinear parabolic equations, *Applied Mathematics and Computation*, 188(2), 1467-1475, 2007.
- [7] Amer, S., Homogeneous balance method for solving nonlinear dispersive dissipative equation, *Al-Mustansiriyah J Sci.*, 22(6), 189-200, 2011.
- [8] Ağır, T., Kısmi türevli diferansiyel denklemlerin deneme denklemler yöntemiyle çözümleri, *Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Yozgat*, 44, 2019.
- [9] Yan, C., A simple transformation for nonlinear waves, *Physics Letters A*, 224, 1-2, 77-84, 1996.
- [10] Baskonus, H.M., Bulut, H., Sulaiman, T.A., New complex hyperbolic structures to the lonngren-wave equation by using sine-gordon expansion method, *Applied Mathematics and Nonlinear Sciences*, 4(1), 129-138, 2019.
- [11] Iatkliang, T., Kaewta, S., Tuan, N. M., Sirisubtawee, S., Novel Exact Traveling Wave Solutions for Nonlinear Wave Equations with Beta-Derivatives via the Sine-Gordon Expansion Method, *WSEAS Transactions on Mathematics*, 22, 432450, 2023.

- [12] Paliathanasis, A., Lie symmetry analysis and similarity solutions for the Camassa-Choi equations, *Analysis and Mathematical Physics*, 11(2), 57, 2021.
- [13] Harrop-Griffiths, B., Marzuola, J. L., Small data global solutions for the Camassa-Choi equations, *Nonlinearity*, 31(5), 1868, 2018.
- [14] Wazwaz, A. M., Kaur, L., New integrable Boussinesq equations of distinct dimensions with diverse variety of soliton solutions, *Nonlinear Dynamics*, 97, 83-94, 2019.
- [15] Khaliq, S., Ullah, A., Ahmad, S., Akgül, A., Yusuf, A., Sulaiman, T. A., Some novel analytical solutions of a new extended (2+1)-dimensional Boussinesq equation using a novel method, *Journal of Ocean Engineering and Science*, In Press, 2022.
- [16] Bekir, A., Zahran, E. H., Optical soliton solutions of the thin-film ferro-electric materials equation according to the Painlevé approach, *Optical and Quantum Electronics*, 53(2), 118, 2021.
- [17] Chu, Y. M., Arshed, S., Sadaf, M., Akram, G., Maqbool, M., Solitary wave dynamics of thin-film ferroelectric material equation, *Results in Physics*, 45, 106201, 2023.
- [18] Tuluce Demiray, S., Lineer ve Lineer Olmayan Kesirli Mertebeden Diferansiyel Denklemlerin Çözüm Yöntemleri, *Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi*, Elazığ, 120, 2014.
- [19] Tuluce Demiray, S., Pandir, Y., Bulut, H., New solitary wave solutions of Maccari system, *Ocean Engineering*, 103, 153-159, 2015.
- [20] Tuluce Demiray, S., Pandir, Y., Bulut, H., All exact travelling wave solutions of Hirota equation and Hirota-Maccari system, *Optik*, 127(4), 1848-1859, 2016.
- [21] Çınar, M., Çınar, M., *Mathematica 3.0 ve 4.0 sürümü*, Seçkin Yayıncılık, 2000.
- [22] Fahim, M. R. A., Kundu, P. R., Islam, M. E., Akbar, M. A., Osman, M. S., Wave profile analysis of a couple of (3+1)-dimensional nonlinear evolution equations by Sine-Gordon expansion approach, *Journal of Ocean Engineering and Science*, 7(3), 272-279, 2022.
- [23] Fahim, M. R. A., Kundu, P. R., Islam, M. E., Akbar, M. A., Osman, M. S., Wave profile analysis of a couple of (3+1)-dimensional nonlinear evolution

equations by sine-Gordon expansion approach, *Journal of Ocean Engineering and Science*, 7(3), 272-279, 2022.

- [24] Silambarasan, R., Nisar, K. S., Doubly periodic solutions and non-topological solitons of (2+1)-dimension Wazwaz-Kaur-Boussinesq equation employing Jacobi elliptic function method, *Chaos, Solitons & Fractals*, 175, 113997, 2023.
- [25] Sadaf, M., Arshed, S., Akram, G., Ahmad, H., Askar, S., Soliton solutions of thin-film ferroelectric materials equation, *Results in Physics*, 58, 107380, 2024.



ÖZGEÇMİŞ

1. Adı Soyadı : Esra ARSLAN			
2. Öğrenim Durumu : Lisansüstü			
Derece	Bölüm/Program	Üniversite	Bitirme Yılı
Lisans	Matematik	Balıkesir Üniversitesi	2010-2014
Yüksek Lisans	Matematik A.B.D.	Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi	2022-2025





T.C.
OSMANİYE KORKUT ATA ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
TEZ ÇALIŞMASI BENZERLİK RAPORU FORMU
(SAVUNMA SONRASI)

FORM
TEZLİ YL-24

ÖĞRENCİ BİLGİLERİ

Adı ve Soyadı	Esra ARSLAN
Öğrenci Numarası	202211130005
Ana Bilim/ Ana Sanat Dalı	Matematik
Danışman Unvanı, Adı-Soyadı	Prof. Dr. Şeyma TÛLÛCE DEMİRAY
Tez Başlığı (Türkçe)	Sinüs-Gordon Açılım Yöntemiyle Bazı Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Çözümlerinin Bulunması

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE

Yukarıda başlığı belirtilen tez çalışmamın a) Kapak sayfası, b) Özet ve Abstract c) Giriş, d) Ana bölümler, e) Sonuç ve f) Kaynakça kısımlarından oluşan toplam 30 sayfalık kısmına ilişkin, 13 /02 /2025 tarihinde Lisansüstü Eğitim Enstitüsü tarafından Turnitin adlı intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan orijinallik raporuna göre, tezimin benzerlik oranı % 24 'tür.

Filtreleme Tip 1 (maksimum %30)

- 1- Kabul/Onay ve Bildirim sayfaları hariç,
- 2- Kaynakça hariç,
- 3- Alıntılar dâhil.

Filtreleme Tip 2 (maksimum %10)

- 1- Kabul/Onay ve Bildirim sayfaları hariç,
- 2- Kaynakça hariç,
- 3- Alıntılar hariç,
- 4- 5 Kelimeden daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç.

Osmaniye Korkut Ata Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Tez Çalışması Benzerlik Raporu Alınması ve Kullanılması Uygulama Esasları'nı inceledim ve bu Uygulama Esasları'nda belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Tarih ve İmza
Öğrenci

Danışman Onayı
UYGUNDUR

Prof. Dr. Şeyma TÛLÛCE DEMİRAY
(İmzası)

Enstitü Onayı
UYGUNDUR

(İmzası)

AÇIKLAMALAR

1. Lisansüstü tezler, savunma öncesinde benzerlik raporu ile birlikte Enstitüye teslim edilir.
2. Benzerlik raporu ile ilgili olarak etik kurallar dâhilindeki benzerlik oranları ilgili Enstitü Yönetim Kurulu tarafından belirlenir. (Enstitü Yönetim Kurulu tarafından tezin, intihal kapsamı dışında değerlendirilmesi için TURNITIN'den alınan raporda "benzerlik oranı"nın, "alıntılar hariç" en fazla %10, "alıntılar dahil" % 30'u geçmemesi şeklinde kabul edilmiştir).