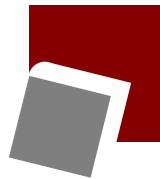


# پیشوا الحرمین السلام



# بررسی روش‌های قیمت‌گذاری مشتقات اعتباری از نوع تعهدات بدهی تضمین‌شده

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

منیره عطارعباسی

استاد راهنما: دکتر علی فروش باستانی

مهر ۱۳۹۱

تقدیم به دو اسطوره‌ی زندگی ام:

درو مادر عزیزم

که آزاداندیشی، استادگی و بلندپروازی  
را به من آموختند.

## چکیده

مشتقات اعتباری در سال‌های اخیر، معامله و مدیریت ریسک اعتباری را به کلی دگرگون ساخته و به یک ابزار بسیار مهم برای انتقال و پوشش این نوع ریسک تبدیل شده‌اند. سوآپ‌های نکول اعتباری (CDS) و تعهدات بدهی تضمین‌شده (CDO)، از جمله پرکاربردترین مشتقات اعتباری هستند که قیمت‌گذاری آنها از مسائل چالش‌برانگیز روز در حوزه ریاضیات مالی به شمار می‌رود. در میان رویکردهای مطرح برای قیمت‌گذاری CDOها، مدل تک عاملی کاپولای گاوسی، عمدتاً بدلیل کارایی محاسباتی‌اش، به عنوان روش استاندارد بازار شناخته شده است. ولی با گذشت زمان، این واقعیت بر همگان آشکار شده است که این مدل قادر به توصیف قیمت‌های مشاهده شده برای برش‌های مختلف بر روی یک سبد از دارایی‌ها نیست. در این پایان‌نامه سعی بر این است که ابتدا نوع خاصی از تعهدات بدهی تضمین شده به نام تعهد بدهی تضمین شده ترکیبی و همچنین روش استاندارد قیمت‌گذاری این قرارداد و نیز مشکلات آن معرفی گردد. سپس دو مورد از تعمیم‌های این روش یعنی مدل  $NIG$  و یک مدل جدید مبتنی بر مفهوم کاپولای آمیخته، که از یک توزیع آمیخته‌ی متشکل از توزیع  $NIG$  و توزیع نرمال استاندارد بهره می‌گیرد و مدل  $MG-NIG$  نام دارد، از منظر عددی و روش شبیه‌سازی مونت کارلو مورد بررسی قرار گیرند. در انتها به مبحث بومی‌سازی این نوع قرارداد و استفاده‌ی عملی از آن در بازارهای مالی داخلی پرداخته خواهد شد.

**واژه‌های کلیدی:** ریسک نکول، مشتقات اعتباری، تعهد بدهی تضمین شده، هبستگی نکول، کاپولای

عاملی، فرض تقریب سبد وسیع همگن، مدل  $NIG$ ، مدل  $MG-NIG$ .

## چهار

# فهرست

چهار	چکیده	.....
۱	پیش‌گفتار	.....
۴	۱ مفاهیم اولیه	.....
۴	۱.۱ ریسک و انواع آن	.....
۸	۲.۱ مدل‌های برآورد ریسک اعتباری	.....
۹	۱.۲.۱ روش‌های برآورد ریسک اعتباری تسهیلات (مشتریان) به صورت انفرادی	.....
۱۰	۲.۲.۱ روش‌های برآورد ریسک اعتباری سبد تسهیلات	.....
۱۲	۳.۲.۱ مدل‌بندی ریسک اعتباری سبد	.....
۱۶	۳.۱ مشتقات اعتباری	.....
۱۶	۱.۳.۱ وام	.....
۱۷	۲.۳.۱ اوراق قرضه	.....
۲۰	۳.۳.۱ تعریف و تقسیم‌بندی کلی مشتقات اعتباری	.....
۲۳	۴.۳.۱ ضرورت وجود بازار مشتقات اعتباری	.....
۲۴	۵.۳.۱ ریسک‌های مرتبط با مشتقات اعتباری	.....
۲۶	۶.۳.۱ مشتقات اعتباری تک‌اسمی	.....

۳۱	مشتقات اعتباری چند اسمی	۷.۳.۱
۳۲	مشتقات اعتباری چند اسمی مبتنی بر توریق	۴.۱
۳۲	تعریف و کارکرد	۱.۴.۱
۳۳	مزایای بازار قراردادهای مبتنی بر توریق	۲.۴.۱
۳۵	ریسک‌های بازار قراردادهای مبتنی بر توریق	۳.۴.۱
۳۶	<b>۲ معرفی و مدل‌سازی کلی تعهدات بدهی تضمین‌شده‌ی ترکیبی</b>	
۳۶	تعهدات بدهی تضمین‌شده (CDO)	۱.۲
۳۷	ساختار CDO	۲.۲
۳۸	انواع CDO	۳.۲
۳۸	CDOهای ترازنامه‌ای و CDOهای آربیتراژی	۱.۳.۲
۳۹	CDOهای فروش واقعی و CDOهای ترکیبی	۲.۳.۲
۴۰	CDOهای وجوه نقد و CDOهای مبتنی بر ارزش بازار	۳.۳.۲
۴۰	مدل کردن مشتقات اعتباری تک اسمی با مدل‌های شدت	۴.۲
۴۱	مدل نکول شدت	۱.۴.۲
۴۴	ارزشیابی CDS تک اسمی	۵.۲
۴۶	چارچوب کلی ارزشیابی CDO ترکیبی	۶.۲
۵۰	<b>۳ مدل تک عاملی کاپولای گاوسی</b>	
۵۰	معرفی	۱.۳
۵۲	توزیع ضرر سبب وسیع همگن تحت مدل تک عاملی کاپولای گاوسی	۲.۳
۵۶	توزیع ضرر سبب وسیع همگن تحت یک مدل کاپولای تک عاملی کلی	۳.۳
۵۷	فرم تحلیلی امید ریاضی ضرر برش تحت مدل واسیچک	۴.۳
۵۸	امید ریاضی ضرر برش سبب با فرض بازیافت ناصفر	۵.۳

۱۰۵.۳	الگوریتم تغییرات اسپرد یک برش CDO ترکیبی نسبت به تغییرات پارامتر
۵۹	همبستگی تحت مدل کاپولای گاوسی
۶۱	لبخند همبستگی
۶۴	مروری بر تعمیم‌های مدل واسیچک
۶۵	سبد متناهی ناهمگن
۶۷	استفاده از کاپولاهای غیر گاوسی
۶۸	عوامل تصادفی بیشتر در مدل
۶۹	۴ مدل $NIG$ و مدل $MG-NIG$
۶۹	۱.۴ مدل $NIG$
۷۳	۱.۱.۴ دو ویژگی اساسی توزیع $NIG$ : ناوردائی مقیاسی و ناوردائی تحت پیچش
۷۳	۲.۱.۴ مدل تک عاملی کاپولای $NIG$
۷۷	۳.۱.۴ قیمت گذاری CDO تحت مدل تک عاملی کاپولای $NIG$
	۴.۱.۴ الگوریتم تغییرات اسپرد برش‌های یک CDO ترکیبی نسبت به تغییرات
۷۸	پارامترهای مدل
۸۳	۲.۴ مدل $MG-NIG$
۸۳	۱.۲.۴ مدل تک عاملی کاپولای $MG-NIG$
۸۶	۳.۴ نتیجه‌گیری
۸۹	۵ مطالعاتی پیرامون بومی سازی قرارداد تعهدات بدهی تضمین شده
۹۰	۱.۵ ادبیات و مبانی فقهی
۹۰	۱.۱.۵ عقود مورد استفاده در بانکداری بدون ربا
۹۲	۲.۱.۵ بررسی فقهی قرارداد تعهد بدهی تضمین شده
۹۳	۳.۱.۵ بررسی فقهی رابطه‌ی بین بانک و SPV

## هفت

۹۳ . . . . . ۴.۱.۵ بررسی فقهی رابطه‌ی SPV و دارندگان اوراق

۹۶ . . . . . ۵.۱.۵ نتیجه‌گیری

۹۹ آ پیوست

۹۹ . . . . . ۱.آ اثبات گزاره‌ی ۱.۶.۲

۱۰۰ . . . . . ۲.آ اثبات گزاره‌ی ۲.۲.۳

۱۰۱ . . . . . ۳.آ اثبات لم ۱.۴.۳

۱۰۳ . . . . . ۴.آ اثبات لم ۴.۱.۴

۱۰۵ . . . . . ۵.آ اثبات لم ۵.۱.۴

۱۰۶ . . . . . ۶.آ اثبات دو ویژگی اساسی توزیع *NIG*

۱۱۲ . . . . . واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

۱۱۹ . . . . . واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

# لیست تصاویر

۱۳	مدل ساختاری بلک-شولز-مرتون	۱.۱
۲۱	ساختار ابتدایی یک مشتقه‌ی اعتباری	۲.۱
۲۷	ساختار کلی یک قرارداد سوآپ نکول اعتباری	۳.۱
۲۹	ساختار کلی یک قرارداد اختیار نکول اعتباری	۴.۱
۳۰	ساختار کلی یک قرارداد سوآپ بازده کامل	۵.۱
۴۶	پرداخت‌های Protection و Premium برشی از CDO	۱.۲
	تغییرات اسپرد برش‌های مؤخر و میانی CDO ترکیبی نسبت به تغییرات پارامتر همبستگی	۱.۳
۶۰	تحت مدل کاپولای گاوسی	
۶۲	لبخند همبستگی	۲.۳
۷۱	تابع چگالی توزیع گاوسی معکوس به ازای مقادیر مختلف پارامترها	۱.۴
۸۱	تغییرات اسپرد برای برش ۳٪-۶٪	۲.۴
۸۱	تغییرات اسپرد برای برش ۶٪-۹٪	۳.۴
۸۲	تغییرات اسپرد برای برش ۹٪-۱۲٪	۴.۴
۸۲	تغییرات اسپرد برای برش ۱۲٪-۲۲٪	۵.۴
۸۴	شبیه سازی اسپرد برای برش ۳٪-۶٪ تحت مدل $Mg-NIG$	۶.۴

۷.۴	شبهه سازی اسپرد برای برش ۹٪-۶٪ تحت مدل <i>MG-NIG</i> . . . . .	۸۵
۸.۴	شبهه سازی اسپرد برای برش ۱۲٪-۹٪ تحت مدل <i>MG-NIG</i> . . . . .	۸۵
۱.۵	اوراق منتشره به عنوان قرارداد بیمه . . . . .	۹۵
۲.۵	اوراق منتشره به عنوان قرارداد اجاره و غیره به شرط ضمانت . . . . .	۹۶



## پیش‌گفتار

«سلاح‌های کشتار جمعی مالی» اصطلاحی است که وارن بافت<sup>۱</sup> در یک سخنرانی بسیار جالب در سال ۲۰۰۳ در مورد مشتقات اعتباری به کار برد. از یک سو انتقادات بی‌شماری که از جانب افراد مختلف در سال‌های اخیر متوجه مشتقات اعتباری بوده است و از سوی دیگر، بحران‌های بازارهای اعتباری در سال‌های اخیر، می‌تواند گواه درخوری برای صحت و اعتبار چنین دیدگاه‌هایی باشد. اما واقعیت این است که مشتقات، وقتی به درستی به کار گرفته شوند، می‌توانند بسیار کارآمد عمل کنند. بدون آن‌ها، شرکت‌ها نخواهند توانست خود را از حرکت‌های غیرقابل پیش‌بینی مسیر قیمت نفت، نرخ ارز و غیره مصون سازند. پس، آنچه که این ابزار مالی سودمند را از کارآمدی باز می‌دارد و موجب می‌شود به دلیل بحران مالی جهانی اخیر مورد نکوهش قرار گیرد، چیست؟

دانشگاهیان بر این باورند که مشکل مشتقات، در به‌کارگیری گسترده‌ی روش‌های نادرست قیمت‌گذاری آن‌هاست. لذا چندی است در جستجوی روشی مناسب و صحیح برای قیمت‌گذاری این ابزارهای مالی هستند. مسئله‌ی اساسی در ارزشیابی مشتقات اعتباری که بر روی سبدهای قابل نکول تنظیم می‌شوند، بحث همبستگی نکول در سبد است. از طرفی ارزشیابی قراردادهای مبتنی بر همبستگی نکول، فرآیند پیچیده‌ای است و به یک تحلیل کمی ریسک می‌انجامد. به این معنی که توزیع ضرر سبد در افق‌های زمانی مختلف می‌بایست محاسبه شود [۶]. لذا بخش اصلی ارزشیابی قراردادهای مبتنی بر همبستگی نکول یافتن تابع توزیع توأم زمان نکول دارایی‌های موجود در سبد، با فرض توزیع‌های حاشیه‌ای معلوم است. یک رویکرد برای مدل کردن نکول‌های هم‌بسته (زمان‌های نکول) بر مبنای تعمیمی چند متغیره از فرآیند کاکس<sup>۲</sup> است که برای اولین بار توسط لاندو<sup>۳</sup> [۱۴] معرفی شد. این

<sup>۱</sup> Warren Buffet

<sup>۲</sup> February 21, 2003, "Berkshire Hathaway Inc., Annual Report 2002"

<sup>۳</sup> Cox Process

روش، مدل‌هایی چون مدل کاپولای گاوسی را نتیجه می‌دهد که جهت قیمت‌گذاری مشتقات اعتباری نخستین بار توسط لی<sup>۱</sup> [۱۶، ۱۷] به کار گرفته شده است. از طرف دیگر، مدل‌های عاملی همواره به طور گسترده‌ای برای یافتن توزیع ضرر سبد مورد استفاده قرار گرفته‌اند. واسیچک<sup>۲</sup> [۲۷] متوجه شد که مدل تک عاملی گاوسی به چارچوب محاسباتی تحلیلی در یافتن توزیع ضرر منجر می‌شود. سپس، در عرصه‌ی اعتباری، فرای<sup>۳</sup>، مک نیل<sup>۴</sup> و نیفلر<sup>۵</sup> [۹] ترکیبی از کاپولا و مدل‌های عاملی را به کار گرفتند که ایده‌ی اصلی آن، استقلال رویدادهای اعتباری در سبد، مشروط بر عاملی مشترک است. این فرض چهارچوبی نیمه تحلیلی برای محاسبات فراهم نمود که در واقع دلیل اصلی محبوبیت مدل کاپولای گاوسی در میان فعالان بازارهای اعتباری است. علی‌رغم فراگیر شدن این مدل، با گذشت زمان، ایرادهایی اساسی به آن وارد شده است که مهم‌ترین آن‌ها پدیده‌ی لبخند همبستگی<sup>۶</sup> است. یکی از راه‌حلی پیشنهادی، استفاده از کاپولاهای غیر گاوسی چون مارشال-اولکین [۲]، Student-t [۲۲]، Double-t [۱۰]،  $NIG$  [۱۳] و خانواده‌ی کاپولاهای ارشمیدسی [۲۳] است. در این پایان نامه، قیمت‌گذاری پرکاربردترین نوع از مشتقات اعتباری چند اسمی یعنی CDO ترکیبی تحت مدل تک عاملی کاپولای  $NIG$  و  $MG-NIG$  بررسی می‌گردد.

قرارداد تعهد بدهی تضمین شده CDO، راهی است برای انتشار اوراق بهاداری با ویژگی‌های ریسکی گوناگون که مبتنی بر سبدهای از قراردادهای بدهی مثل اوراق قرضه، وام‌ها، رهن‌های تجاری، مسکونی و غیره است. در واقع CDOها از طریق یک فرآیند توریق، اوراق بهاداری از جنس سهام و بدهی منتشر

<sup>۴</sup> Lando

<sup>۱</sup> Li

<sup>۲</sup> Vasicek

<sup>۳</sup> Frey

<sup>۴</sup> McNeil

<sup>۵</sup> Nyfeler

<sup>۶</sup> Correlation Smile

می‌کنند که این اوراق بر حسب وقوع رویدادهای اعتباری و زمان بازپرداخت‌ها اصطلاحاً برش‌بندی می‌شوند. برش‌ها اغلب به انواع برش سهام یا مؤخر، برش‌های میانی و برش مقدم دسته‌بندی می‌شوند. برش سهام، نازل‌ترین برش در ساختار سرمایه‌ی CDO محسوب می‌شود و قبل از هر برش دیگر متحمل ضرر حاصل از دیرکرد در پرداخت‌ها و ضرر اعتباری در سبد می‌شود. اما هنگام توزیع دریافتی‌ها این برش آخرین اولویت را دارد و هر آنچه را که از عایدات نقدی باقی مانده است، دریافت می‌کند. ضرر بیشتر در سبد به ترتیب، برش‌های بعدی را با توجه به میزان ریسکی بودنشان تحت تأثیر قرار می‌دهد. در یک قرارداد CDO ترکیبی، به طور خاص، به جای خریدن اوراق قرضه و وام‌ها برای تشکیل دادن سبد پشتوانه‌ی قرارداد، سرمایه‌گذاران این قرارداد مالی از طریق وارد شدن در یک قرارداد سوآپ نکول اعتباری، در معرض ریسک اعتباری قرار می‌گیرند. سوآپ نکول اعتباری (CDS) یک قرارداد دو طرفه است که در آن، عرضه‌کننده‌ی CDS تا زمان سررسید قرارداد یا تا زمانی که نکول اتفاق افتد، به صورت دوره‌ای (معمولاً فصلی) مبلغی را به خریدار CDS پرداخت می‌نماید. خریدار CDS یا فروشنده‌ی حمایت، مبلغی را پرداخت نمی‌نماید، مگر در صورتی که یک رویداد اعتباری اتفاق بیافتد که در این صورت فروشنده‌ی حمایت می‌بایست به جبران خسارت بپردازد. در این پایان‌نامه به روش‌های قیمت‌گذاری CDO ترکیبی بر مبنای مدل‌های عاملی به ویژه مدل تک عاملی کاپولای گاوسی و تعمیم‌های آن می‌پردازیم. به طور دقیق‌تر، در فصل اول به موضوع ریسک، انواع آن، مدل‌های برآورد نوع خاصی از ریسک به نام ریسک اعتباری، که در این پایان‌نامه مرکز توجه است، معرفی دسته‌ی خاصی از قراردادهای اعتباری یعنی مشتقات اعتباری و در آخر به آشنایی با مشتقات اعتباری چند اسمی مبتنی بر توریق می‌پردازیم. در فصل دوم، تعهدات بدهی تضمین شده‌ی ترکیبی را معرفی می‌کنیم. در فصل سوم، مدل استاندارد بازار برای قیمت‌گذاری این قرارداد، فرض سبد وسیع همگن و ایراد اساسی مدل مزبور را بیان می‌کنیم و به تلاش‌های صورت گرفته در جهت بهبود این مدل اشاره می‌کنیم. در فصل چهارم دو تعمیم از این مدل را به طور دقیق‌تر معرفی کرده و آن‌ها را در چهارچوب عددی بررسی می‌کنیم. در فصل آخر به بحث بومی‌سازی قرارداد CDO و مطابقت آن با فقه اسلامی خواهیم پرداخت.

# فصل اول

## مفاهیم اولیه

این فصل به معرفی برخی از مفاهیم پایه‌ای مورد نیاز در این پایان‌نامه اختصاص دارد که شامل چهار بخش است. در بخش اول به تعریف ریسک و انواع آن اشاره کرده و در بخش دوم مدل‌های برآورد ریسک اعتباری را معرفی می‌کنیم. در بخش سوم به معرفی کلی مشتقات اعتباری، بازارها و ریسک‌های پیش روی سرمایه‌گذاران این دسته از قراردادهای می‌پردازیم و بالاخره در بخش چهارم، یک دسته از مشتقات اعتباری که یک نمونه از آن‌ها در این پایان‌نامه مورد بررسی قرار گرفته، یعنی مشتقات اعتباری چند اسمی مبتنی بر توریق، بازار آن‌ها و ریسک‌های مرتبط با آن‌ها را معرفی می‌کنیم.

### ۱.۱ ریسک و انواع آن

عدم اطمینان محیطی و رقابت روز افزون، به ویژه در سال‌های اخیر، بانک‌ها و مؤسسه‌های مالی را با چالش‌های متعددی مواجه ساخته و آن‌ها را ناگزیر از بکارگیری رویکردهای نوین مدیریتی نموده است. شناسایی و مدیریت ریسک یکی از این رویکردهاست که اخیراً برای تقویت و ارتقای اثربخشی

عملکرد نهادهای مالی مورد توجه قرار گرفته است. مفهوم مدیریت ریسک بر سنجش ریسک و نیز اتخاذ راهبردهایی برای کنترل آن، دلالت دارد. بطور کلی در ادبیات مالی، عدم اطمینان یا عدم قطعیت در مورد دریافت عایدات آتی، ریسک نامیده می‌شود. این عدم اطمینان از عوامل متعددی از جمله چرخه‌های تجاری، اوضاع سیاسی، تورم و غیره تأثیر می‌پذیرد. تعریف‌های این بخش از سایت دایره‌المعارف مالی و پایان‌نامه‌ی مجتبی شاکری [۳۱] و پایان‌نامه‌ی شهاب نانکلی [۳۳] استخراج شده است.

تاکنون انواع گوناگونی برای ریسک ارائه شده است که از میان آن‌ها می‌توان به موارد زیر اشاره کرد: **ریسک بازار**<sup>۱</sup>: ریسک بازار در اثر نوسانات قیمت دارایی‌ها در بازار ایجاد می‌شود. اشخاص حقیقی و حقوقی دارایی‌های خود را به صورت‌های مختلف مانند پول نقد، سهام، اوراق قرضه، مسکن، طلا و سایر دارایی‌های با ارزش نگهداری می‌کنند. تمام این دارایی‌ها در معرض تغییرات قیمت قرار دارند و این نوسانات قیمت، عامل اصلی ایجاد ریسک بازار هستند.

**ریسک نوسان نرخ ارز**<sup>۲</sup>: ریسک نرخ ارز، زیر مجموعه‌ی ریسک بازار است که به دلیل تغییرات نرخ ارز روی می‌دهد. اهمیت این ریسک هنگامی افزایش می‌یابد که بخش قابل توجهی از سبد شرکت، متشکل از یک ارز و یا ارزهای گوناگون (سبد ارزی)، متأثر از وضعیت بازار باشد. حالت دیگری که باعث ایجاد ریسک نرخ ارز می‌شود هنگامی روی می‌دهد که بانک، مبادلات ارزی قابل توجهی داشته باشد و یا اینکه سپرده‌های ارزی دریافت نموده و همچنین تسهیلات ارزی پرداخت نماید.

**ریسک اعتباری**<sup>۳</sup>: ریسک اعتباری ریسکی است که از نکول<sup>۴</sup>/قصور طرف قرارداد ناشی می‌شود. به بیان کلی‌تر، ریسکی است که از رویدادی اعتباری<sup>۵</sup> به وجود می‌آید. این رویداد اعتباری ممکن است

---

1 Market Risk

2 Exchange Rate Risk

3 Credit Risk

4 Default

5 Credit Event

کاهش ارزش بازاری قرارداد مالی به دلیل نزول کیفیت اعتباری<sup>۱</sup> شخص متعهد در قرارداد (وام‌گیرنده) یا نکول شخص متعهد در قرارداد<sup>۲</sup> و یا موارد دیگر باشد. در هر صورت، ریسک اعتباری افراد سه مشخصه‌ی زیر را شامل می‌شود:

- احتمال نکول<sup>۳</sup>: احتمال اینکه وام‌گیرنده در عمل به تعهداتش ناتوان باشد.
  - نرخ بازیافت<sup>۴</sup>: کسری از ارزش اسمی قرارداد که در صورت وقوع نکول قابل بازیافت می‌باشد.
  - گذر اعتباری<sup>۵</sup>: تغییر در رتبه‌ی اعتباری یکی از طرفین قرارداد.
- چنانچه با یک ابزار مالی وابسته به بیش از یک شخص حقوقی یا با سبدهای از تسهیلات سر و کار داشته باشیم، جهت برآورد ریسک اعتباری می‌بایست موارد دیگری علاوه بر آنچه که در بالا اشاره شد، مورد محاسبه قرار گیرد. از جمله:
- همبستگی نکول یا رتبه‌ی اعتباری در سبدها<sup>۶</sup>: درجه‌ی همبستگی بین نکول یا رتبه‌ی اعتباری افراد یا مؤسسه‌های مالی.
  - سهم ریسک و تمرکز اعتباری<sup>۷</sup>: سهم یک قرارداد مالی در سبدهای از انواع قراردادها بر ریسک کلی سبدها.

---

<sup>۱</sup> Credit Quality Deterioration

<sup>۲</sup> که نکول به معنی عدم توانایی شخص در عمل به تعهداتش است.

<sup>۳</sup> Default Probability

<sup>۴</sup> Recovery Rate

<sup>۵</sup> Credit Migration

<sup>۶</sup> Default and Credit Quality Correlation

<sup>۷</sup> Risk Contribution and Credit Concentration

**ریسک عملیاتی<sup>۱</sup>:** ریسک عملیاتی عموماً ناشی از اشتباهات انسانی یا اتفاقات و خطاهای تکنیکی است. این ریسک شامل تقلب (موقعیتی که معامله گرها اطلاعات غلط می دهند)، اشتباهات مدیریتی و نقص در کنترل می شود. خطای تکنیکی ممکن است ناشی از نقص در اطلاعات، پردازش اشتباه معاملات، سیستم‌های جابه‌جایی یا به طور کلی هر مشکل دیگری باشد که در سطح سازمان روی می دهد.

**ریسک قانونی<sup>۲</sup>:** ریسک قانونی زمانی مطرح می شود که یک معامله از نظر قانونی قابل انجام نباشد. یا می تواند ناشی از تغییرات در قوانین باشد. ریسک قانونی در کل با ریسک اعتباری مرتبط است زیرا طرفین معامله در صورت زیان در یک معامله به دنبال بستر قانونی برای زیر سؤال بردن اعتبار معامله می گردند.

**ریسک نقدینگی<sup>۳</sup>:** ریسک نقدینگی، دارای دو گونه‌ی «ریسک نقدینگی دارایی» و «ریسک نقدینگی تأمین مالی» است.

۱. **ریسک نقدینگی دارایی** که با نام «ریسک نقدینگی بازار محصول» هم شناخته می شود، زمانی ظاهر می شود که معامله با قیمت پیش‌بینی شده (به دلیل تغییر وضعیت بازار) قابل انجام نباشد. این ریسک در بین گونه‌های دارایی‌ها و در زمان، وابسته به شرایط بازار تغییر می کند. بعضی دارایی‌ها مانند ارزهای اصلی یا اوراق قرضه، بازارهای عمیقی دارند و در اغلب مواقع به راحتی با نوسان کمی در قیمت، نقد می شوند اما این امر در مورد همه دارایی‌ها صادق نیست.

۲. **ریسک نقدینگی تأمین مالی** که «ریسک جریان وجه نقد» هم نامیده می شود، به عدم توانایی در پرداخت تعهدات برمی گردد. این موضوع مخصوصاً برای سبدهایی که متوازن شده‌اند و متعهد به پرداخت حاشیه‌ی سود به طلب‌کاران هستند، معضل مهمی است. در واقع اگر ذخیره‌ی وجه

---

<sup>۱</sup> Operational Risk

<sup>۲</sup> Legal risk

<sup>۳</sup> Liquidity risk

نقد کافی نباشد، ممکن است در شرایط سقوط ارزش بازار، نیاز به پرداخت وجه نقد وجود داشته باشد که منجر به نقد کردن اجباری سبد با قیمت پایین می‌شود. این چرخه‌ی ضررها که با حاشیه‌ی سود تعهدشده شدیدتر می‌شود، گاهی به مارپیچ مرگ تعبیر می‌شود.

**ریسک نرخ بهره<sup>۱</sup>**: در کشورهایی که نرخ بهره تابع عرضه و تقاضای سرمایه است، این عامل می‌تواند بر حسب شرایط اعتباری در اقتصاد جامعه افزایش یا کاهش یابد. این نرخ تابع سیاست‌های مالی و پولی دولت است. بطوریکه در زمان افزایش حجم پول و اعتبارات، نرخ بهره کاهش می‌یابد. با افزایش نرخ بهره، تقاضا برای اوراق بهادار کاهش می‌یابد و در نتیجه قیمت آن‌ها نیز پایین می‌آید. لذا، نرخ بهره معمولاً با قیمت اوراق قرضه و سهام رابطه‌ای معکوس دارد.

**ریسک کاهش قدرت خرید یا ریسک تورم<sup>۲</sup>**: سرمایه‌گذار به امید عایدات آتی سرمایه‌گذاری می‌کند. اگر در فاصله‌ی سرمایه‌گذاری و بازدهی، تورم وجود داشته باشد، این تورم باعث می‌شود عایدات آتی از قدرت خرید کمتری برخوردار شود. به خطر ناشی از کاهش ارزش سرمایه به دلیل تورم، ریسک تورم می‌گویند.

در این پایان‌نامه که بر قیمت‌گذاری مشتقات اعتباری تمرکز دارد، با ریسک اعتباری سر و کار خواهیم داشت.

## ۲.۱ مدل‌های برآورد ریسک اعتباری

چنانکه پیش‌تر اشاره شد، توسعه‌ی روزافزون کسب و کار و تجارت در دنیای کنونی، گسترش مراودات مالی را به دنبال داشته و اتخاذ رویکردهای نوین را برای مؤسسات مالی اجتناب‌ناپذیر ساخته است. از جمله مهم‌ترین این رویکردها مدیریت ریسک اعتباری می‌باشد. از آنجا که منابع پولی زیادی در

<sup>۱</sup> Interest Rate Risk

<sup>۲</sup> Inflation Risk

نهادهای پولی و اعتباری (بانکها، مؤسسه‌های مالی-اعتباری، شرکت‌های لیزینگ و ...) در قالب اعتبار به متقاضیان تسهیلات داده می‌شود، تداوم فعالیت آن‌ها در گرو باز پس گرفتن این اعتبارات می‌باشد و لذا بررسی وضعیت اعتباری متقاضیان می‌بایست مورد توجه قرار گیرد. برآورد ریسک اعتباری را می‌توان در دو سطح انجام داد:

۱. **بررسی تسهیلات (مشتریان) به صورت انفرادی** که متناظر با تحلیل انفرادی ریسک اوراق بهادار است. برآورد ریسک اعتباری یک مشتری با محاسبه‌ی احتمال نکول<sup>۱</sup>، نرخ بازیافت<sup>۲</sup>، زیان ناشی از نکول<sup>۳</sup> و مانده در نکول<sup>۴</sup> صورت می‌گیرد.

۲. **بررسی ریسک اعتباری سبد تسهیلات** که معادل تحلیل ریسک سبد اوراق بهادار است. برای برآورد ریسک اعتباری سبد، علاوه بر عوامل ریسک فردی باید همبستگی نکول را نیز محاسبه نماییم.

### ۱.۲.۱ روش‌های برآورد ریسک اعتباری تسهیلات (مشتریان) به صورت انفرادی

ارزیابی توان بازپرداخت مشتریان اعتباری به صورت انفرادی و محاسبه‌ی احتمال عدم بازپرداخت اعتبارات دریافتی آن‌ها را **اعتبارسنجی**<sup>۵</sup> گویند. مدل‌های اعتبارسنجی به دو گروه عمده تقسیم می‌شوند:

**مدل‌های اعتبارسنجی پارامتری:**

- مدل احتمال خطی<sup>۶</sup>

---

<sup>۱</sup> Default Probability

<sup>۲</sup> Recovery Rate

<sup>۳</sup> Loss Given Default

<sup>۴</sup> Exposure at Default

<sup>۵</sup> Credit Scoring

<sup>۶</sup> Linear Probability Model

• مدل‌های پروبیت و لوجیت<sup>۱</sup>

• مدل‌های مبتنی بر تحلیل ممیزی<sup>۲</sup>

مدل‌های اعتبارسنجی ناپارامتری :

• مدل‌های نزدیک‌ترین همسایگی<sup>۳</sup>

• فرآیند سلسله مراتب تحلیلی<sup>۴</sup>

• سیستم‌های خبره<sup>۵</sup>

• شبکه‌های عصبی مصنوعی<sup>۶</sup>

## ۲.۲.۱ روش‌های برآورد ریسک اعتباری سبد تسهیلات

معروف‌ترین روش‌های سنجش ریسک اعتباری عبارتند از [۵]:

### ۱. KMV و CreditMetrics

این دو مدل پرکاربرد در صنعت، مبتنی بر یک مدل‌سازی کارا به نام مدل‌های عاملی<sup>۷</sup> هستند و هر دوی آن‌ها از این ایده بهره می‌گیرند که هر بنگاه دارای یک فرآیند ارزش دارایی است، بطوریکه نکول و بقای آن به ارزش دارایی‌ها در یک افق زمانی معین بستگی دارد. اگر ارزش دارایی‌ها از

<sup>۱</sup> Probit and Logit Models

<sup>۲</sup> Discrimination Analysis Models

<sup>۳</sup> Nearest Neighbour Models

<sup>۴</sup> Analytical Hierarchy Process

<sup>۵</sup> Expert Systems

<sup>۶</sup> Artificial Neural Networks

<sup>۷</sup> Factor Models

یک حد آستانه‌ی مشخصی به نام «نقطه‌ی نکول»<sup>۱</sup> بر حسب تعریف‌های KMV، کمتر باشد، آنگاه این بنگاه دچار نکول شده است. اما اگر ارزش دارایی‌ها از این مقدار آستانه بیشتر باشد، بنگاه نکول نکرده است. در این حالت، این دو مدل از نوع برنولی هستند [۲۰].

## ۲. CreditRisk+

CreditRisk+ یک مدل ریسک اعتباری است که توسط مؤسسه‌ی سرمایه‌گذاری (CSFP)<sup>۲</sup> طراحی و توسعه یافته است [۷]. این مدل کمابیش مبتنی بر رویکرد کلی ریاضی بیمه است. به همین دلیل، آن را در دسته‌بندی مدل‌های بیمه<sup>۳</sup> قرار می‌دهند. این مدل نمونه‌ای از مدل‌های پوآسون آمیخته<sup>۴</sup> است و سعی می‌کند بر مبنای داده‌های گذشته، ضرر مورد انتظار و ام‌ها و توزیع احتمال این ضررها را تخمین بزند.

## ۳. CreditPortfolioView (CPV)

این مدل در سال ۱۹۹۷ توسط ویلسون<sup>۵</sup> [۲۷، ۲۸] معرفی شد. CPV یک مدل سبد مبتنی بر رتبه‌بندی اعتباری است که دلالت بر همبستگی احتمال‌های نکول و احتمال‌های گذر<sup>۶</sup> در چرخه‌ی اقتصادی<sup>۷</sup> دارد. به تبع آن احتمال‌های نکول و ماتریس‌های تغییر رتبه، تحت تأثیر نوسانات تصادفی<sup>۸</sup> خواهند بود.

---

<sup>۱</sup> Default Point

<sup>۲</sup> Credit Suisse Financial Products

<sup>۳</sup> Actuarial Models

<sup>۴</sup> Poisson Mixture Models

<sup>۵</sup> Wilson

<sup>۶</sup> Migration Probabilities

<sup>۷</sup> Economic Cycle

<sup>۸</sup> Random Fluctuations

## ۳.۲.۱ مدل‌بندی ریسک اعتباری سبد

از آنجا که موضوع بحث این پایان‌نامه قیمت‌گذاری مشتقات اعتباری است و ساختار این قراردادها ماهیتاً سبدي از تسهیلات است، در این بخش دسته‌بندی روش‌های برآورد ریسک اعتباری سبد تسهیلات را از دیدگاه ریاضی بیان می‌کنیم. بطور کلی این روش‌ها به سه دسته‌ی مدل‌های ساختاری<sup>۱</sup>، مدل‌های تقلیل‌یافته<sup>۲</sup> و مدل‌های رتبه‌بندی اعتباری<sup>۳</sup> تقسیم می‌شوند [۸].

### مدل‌های ساختاری

مدل‌های ساختاری برای اولین بار توسط بلک<sup>۴</sup> و شولز<sup>۵</sup> [۴] و مرتون<sup>۶</sup> [۲۱] مطرح شدند. در این مدل‌ها که نکول به صورت یک عامل درون‌زا تعریف می‌شود، فرض بر این است که ارزش دارایی‌های یک بنگاه در یک فرآیند پخش لوگ-نرمال به شکل زیر صدق می‌کند:

$$\frac{dA_t}{A_t} = (\mu - \gamma)dt + \sigma dB_t, \quad (1.1)$$

که در آن  $\mu$  نرخ میانگین بازده دارایی<sup>۷</sup>،  $\gamma$  نرخ عایدات نقدی نسبی<sup>۸</sup>،  $\sigma$  تلاطم دارایی<sup>۹</sup> و  $B$  یک حرکت براونی<sup>۱۰</sup> استاندارد می‌باشد. همچنین سهام بنگاه به صورت یک اختیار خرید بر ارزش دارایی بنگاه، با

---

<sup>۱</sup> Structural Models

<sup>۲</sup> Reduced Form Models

<sup>۳</sup> Credit Rating

<sup>۴</sup> Fischer Black

<sup>۵</sup> Myron Scholes

<sup>۶</sup> Robert C. Merton

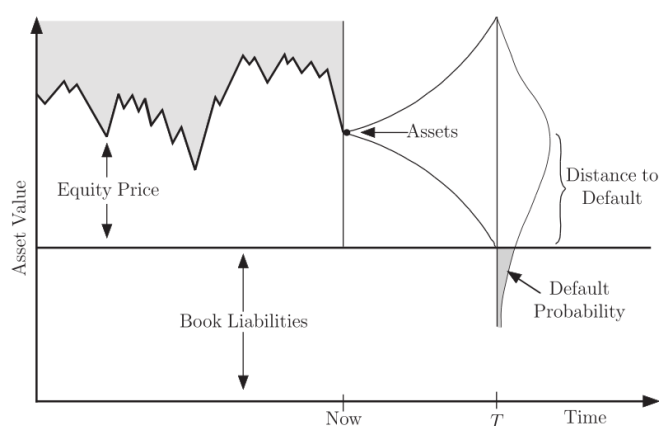
<sup>۷</sup> Mean Rate of Return

<sup>۸</sup> Proprtional Cash Payout Rate

<sup>۹</sup> Asset Volatility

<sup>۱۰</sup> Standard Brownian Motion

قیمت اعمالی<sup>۱</sup> معادل با ارزش اسمی بدهی بنگاه فرض می‌شود. در این صورت، ارزش سهام بنگاه را می‌توان با استفاده از فرمول بلک-شولز-مرتون به دست آورد؛ لذا، مقدار بدهی بنگاه برابر با تفاضل ارزش اختیار (سهام) و ارزش اولیه دارایی می‌باشد. ارزیابی احتمال نکول در این مدل از طریق محاسبه‌ی فاصله تا نکول<sup>۲</sup> میسر است. در شکل زیر می‌توان شمائی از عملکرد کلی مدل ساختاری بلک-شولز-مرتون را مشاهده نمود.



شکل ۱.۱: مدل ساختاری بلک-شولز-مرتون

از تعمیم‌های آن می‌توان به مدل بلک-کاکس اشاره کرد که در آن، نکول زمانی اتفاق می‌افتد که ارزش دارایی‌ها برای نخستین بار از یک مقدار آستانه کمتر شود. مدل‌های CreditMetrics و KMV در این دسته می‌باشند. مدل‌های ساختاری توانایی پیش‌بینی گذر اعتباری را دارند.

### مدل‌های تقلیل یافته

اولین کسانی که مدل‌های تقلیل یافته را معرفی کردند، رابرت جارو<sup>۳</sup> و استوارت ام. ترن بال<sup>۴</sup> [۱۲]

<sup>۱</sup> Strike Price

<sup>۲</sup> Distance to Default

<sup>۳</sup> Robert Jarrow

<sup>۴</sup> Stuart M. Turnbull

بودند. بسیاری از مدل‌های احتمال نکول، مبتنی بر مفهوم شدت<sup>۱</sup> وقوع نکول هستند. در این مدل‌ها که «مدل‌های شدت» یا «مدل‌های تقلیل‌یافته» نامیده می‌شوند، تعریفی که برای نکول ارائه می‌شود عبارت است از اولین پیشامد یک فرآیند پواسون با نرخ  $\lambda$ ، که مفروضات زیر نیز در آن در نظر گرفته می‌شوند:

۱. احتمال بقاء<sup>۲</sup> برای  $t$  سال، دارای توزیع نمایی است و مقدارش برابر است با  $p(t) = \exp(-\lambda t)$ .

۲. زمان مورد انتظار تا نکول برابر است با  $\frac{1}{\lambda}$ .

۳. احتمال وقوع نکول در یک بازه‌ی زمانی به طول  $\Delta$ ، مشروط بر اینکه تا شروع این بازه نکول رخ نداده باشد، تقریباً برابر است با  $\Delta\lambda$ .

در این مدل‌ها فرض بر این است که نکول‌ها به طور مستقل در طول زمان اتفاق می‌افتند و این باعث می‌شود زمان نکول در این مدل‌ها برخلاف مدل‌های ساختاری غیر قابل پیش‌بینی باشد یا بنا به ادبیات تصادفی، غیر قابل دسترسی<sup>۳</sup> باشد.

فرض مهم دیگر این است که شدت نکول در طول زمان برای مشتریان مختلف مقدار یکسانی دارد. در انواع تعمیم‌یافته‌ی مدل‌های تقلیل‌یافته، مقدار شدت وابسته به زمان و گاهی تصادفی در نظر گرفته می‌شود. از جمله:

• مدل‌های شدت CIR<sup>۴</sup>

• مدل‌های شدت آفین<sup>۵</sup>

<sup>۱</sup> Intensity

<sup>۲</sup> Survival Probability

<sup>۳</sup> Inaccessible

<sup>۴</sup> CIR Intensity Models

<sup>۵</sup> Affine Intensity Models

## • مدل‌های نرخ آتی نکول HJM<sup>۱</sup>

مدل‌های CreditRisk+ و CreditPortfolioView جزو این دسته هستند [۳۱].

### مدل‌های رتبه‌بندی اعتباری

این دسته از مدل‌ها در سال‌های اخیر نسبت به دو دسته‌ی قبلی سهم کمتری از تحقیقات در حوزه‌ی ریسک اعتباری را به خود اختصاص داده‌اند. لذا به شرح مختصری از تحقیقات مهم در این زمینه بسنده می‌کنیم. مدل رتبه‌بندی اعتباری را برای اولین بار ادوارد ال. آلتمن<sup>۲</sup> [۱] معرفی کرد. به این ترتیب که با بررسی صورت‌های مالی شرکت‌ها، متغیرهای تأثیرگذار بر نکول را شناسایی کرد و با استفاده از یک ترکیب خطی این متغیرها به هر شرکت یک امتیاز اعتباری<sup>۳</sup> تخصیص داد. سپس این امتیاز اعتباری با استفاده از توابع توزیع تجمعی نرمال و لوجستیک به احتمال نکول تبدیل شد. مدل‌های پروبیت و لوجیت که در بالا به آن‌ها اشاره شد نیز بر اساس این روش و در واقع تعمیمی از آن می‌باشند [۳۳]. در این پایان‌نامه با مدل عاملی تقلیل‌یافته که ترکیبی از مدل‌های ساختاری و تقلیل‌یافته است، سرو کار خواهیم داشت. در این مدل، احتمال نکول از طریق یک مدل تقلیل‌یافته به دست می‌آید و همبستگی احتمال نکول‌ها توسط مدل‌های ساختاری ارزیابی می‌شود. ایده‌ی اصلی این مدل این است که نرخ مخاطره<sup>۴</sup> از یک مدل ساختاری متأثر از یک یا چند متغیر پنهان تبعیت می‌کند و نکول زمانی اتفاق می‌افتد که متغیر پنهان از آستانه‌ی بخصوصی کمتر شود. این متغیر پنهان می‌تواند نرخ بازده شرکت یا ارزش دارایی‌های آن باشد. در بخش بعدی، مشتقات اعتباری را که از قراردادهای پرکاربرد در بازارهای اعتباری هستند، معرفی می‌کنیم.

---

<sup>۱</sup> HJM Forward Default Rate Models

<sup>۲</sup> Edward L. Altman

<sup>۳</sup> Credit Score

<sup>۴</sup> Hazard Rate

## ۳.۱ مشتقات اعتباری

پیش از آنکه در این بخش به معرفی مشتقات اعتباری بپردازیم، وام<sup>۱</sup> و ورق قرضه<sup>۲</sup> را که به نوعی در مدیریت ریسک اعتباری نقش دارند، معرفی می‌کنیم. این دو، ابزارهای مالی قدیمی مرتبط با ریسک اعتباری هستند که اغلب به عنوان دارایی پایه در قراردادهای مشتقه‌ی اعتباری مورد استفاده قرار می‌گیرند. لذا بیان ویژگی‌های مهم این دو قرارداد و ریسک‌های مربوط به آن‌ها ضروری به نظر می‌رسد [۲۵].

### ۱.۳.۱ وام

وام قراردادی است که بین دو یا چند نفر وام‌گیرنده مثل شرکت‌های تعاونی و وام‌دهنده که عموماً بانک است، منعقد می‌شود. در ابتدایی‌ترین حالت، طرفین قرارداد چنین توافق می‌کنند که وام‌دهنده مبلغی را که ما با نام ارزش اسمی قرارداد می‌شناسیم، به وام‌گیرنده قرض دهد و در ازاء آن، وام‌گیرنده ملزم به پرداخت اصل وام در تاریخ سررسید قرارداد است. علاوه بر این، وام‌گیرنده می‌بایست در تاریخ‌های از پیش تعیین شده یک سری پرداخت‌ها به عنوان سود به وام‌دهنده انجام دهد. وام یک قرارداد خصوصی است و می‌تواند به روش‌های گوناگون تنظیم شود. بطور مثال، وام‌دهنده می‌تواند اصل وام را یک‌جا، یا در نسبت‌هایی از قبل تعیین شده و یا در قالب یک خط اعتباری<sup>۳</sup> به وام‌گیرنده بپردازد. عمدتاً گزینه‌های زیر مورد استفاده قرار می‌گیرند:

- بطور یک‌جا و در زمان سررسید قرارداد<sup>۴</sup>

<sup>۱</sup> Loan

<sup>۲</sup> Bond

<sup>۳</sup> Credit Line

<sup>۴</sup> Bullet Repayment

• به صورت اقساطی، همراه با پرداخت‌های سود بر اساس آنچه در دوره‌ی پیشین از اصل وام باقی مانده است.<sup>۱</sup>

• به صورت اقساطی، با مقدار ثابت که شامل بازپرداخت اصل وام و بهره‌ی وام می‌باشد.<sup>۲</sup>

یک ویژگی اساسی دیگر وام‌ها، نوع نرخ بهره‌ی آنهاست که می‌تواند نرخ بهره‌ی ثابت یا شناور باشد. وام‌ها را می‌توان بر اساس وضعیت اعتباری وام‌گیرنده، به دو دسته‌ی قابل نکول یا ریسکی و غیر قابل نکول یا غیر ریسکی تقسیم کرد.

طرفین قرارداد وام علاوه بر ریسک اعتباری، در معرض ریسک‌های دیگری نیز هستند که ریسک نرخ بهره، ریسک ارز و ریسک تورم مهم‌ترین آنها به شمار می‌آیند.

وام قدیمی‌ترین ابزار پرداخت پول است و همچنان یک منبع تأمین مالی مهم محسوب می‌شود. اما از آنجا که قراردادهای وام استاندارد شده نیستند، معامله‌ی یک قرارداد وام دشوار یا غیرممکن است. برعکس، اوراق قرضه، معامله‌ی بدهی را برای سرمایه‌گذارها میسر می‌سازند.

### ۲.۳.۱ اوراق قرضه

یک ورق قرضه در واقع شکل تغییر یافته‌ای از وام است. هنگام عرضه‌ی یک ورق قرضه، مالک ورق قرضه<sup>۳</sup> یا وام‌دهنده<sup>۴</sup> ورق را از عرضه‌کننده‌ی ورق<sup>۵</sup> یا وام‌گیرنده<sup>۶</sup> با یک مقدار اصلی<sup>۷</sup> معین خریداری

<sup>۱</sup> Amortisable Loan

<sup>۲</sup> Annuity Loan

<sup>۳</sup> Bond Holder

<sup>۴</sup> Lender

<sup>۵</sup> Issuer

<sup>۶</sup> Borrower

<sup>۷</sup> Principal Amount

می‌کند. مفهوم مقدار اصلی، معادل با مفهوم ارزش اسمی در قرارداد وام است و محاسبه‌ی سود پرداختی بر مبنای آن صورت می‌گیرد. با عرضه‌ی اوراق قرضه، وام‌گیرنده متعهد می‌شود تا مبلغی معادل ارزش اسمی ورق قرضه در تاریخ سررسید و همچنین سود یا کوپن‌های مربوطه را در تاریخ‌های پرداختی مقرر (مثلاً سالیانه یا شش ماهه) به مالک ورق قرضه پرداخت نماید.

اوراق قرضه را نیز مانند وام‌ها می‌توان به دو دسته‌ی قابل نکول یا ریسکی و غیرقابل نکول یا غیرریسکی تقسیم کرد. اگر عرضه‌کننده‌ی ورق قرضه نکول کند، خسارت زیادی متوجه سرمایه‌گذار خواهد بود. به این صورت که سرمایه‌گذار تنها بخش قابل بازیابی از ارزش اسمی ورق قرضه را به دست خواهد آورد. برخلاف اوراق قرضه‌ی ریسکی، نوع غیرریسکی این اوراق، حتماً کوپن‌ها و ارزش اسمی ورق قرضه را کامل و در موعد مقرر پرداخت می‌نماید.

انواع گوناگونی از اوراق قرضه برحسب چگونگی پرداخت کوپن‌ها وجود دارد:

- اوراق قرضه با کوپن ثابت<sup>۱</sup>
- اوراق قرضه بدون کوپن<sup>۲</sup>
- اوراق قرضه با نرخ شناور<sup>۳</sup>

علاوه بر این‌ها، اوراق قرضه‌ای وجود دارند که ماهیتاً از ویژگی‌های اختیار برخوردار هستند. اوراق قرضه‌ی قابل تبدیل<sup>۴</sup>، که می‌توانند به سهام تبدیل شوند، از این نوع هستند. به‌عنوان مثال دیگر، ورق قرضه‌ی برگشت‌پذیر<sup>۵</sup> را می‌توان نام برد که دارنده‌ی آن این اختیار را دارد که در صورت تمایل، اوراق را با یک قیمت از پیش تعیین شده به عرضه‌کننده پس دهد.

---

<sup>۱</sup> Fixed-Coupon Bonds

<sup>۲</sup> Zero-Coupon Bonds

<sup>۳</sup> Floating Rate Notes (FRN)

<sup>۴</sup> Convertible Bonds

<sup>۵</sup> Callable Bonds

ریسک‌هایی که دارندگان اوراق قرضه را تهدید می‌کنند، مشابه ریسک‌هایی است که پیش‌تر برای قرارداد وام بیان کردیم. علاوه بر ریسک اعتباری، ریسک نرخ بهره، ریسک ارز، ریسک تورم و ریسک نقدینگی نیز طرفین قراردادهای اوراق قرضه را در معرض خطر قرار می‌دهند.

تفاوت اساسی اوراق قرضه با وام‌ها در قابل معامله بودن اوراق است که مزیت‌های زیر را به دنبال دارد:

- قابل دسترس بودن بازار برای تعداد خیلی بیشتری از سرمایه‌گذارها

- امکان سرمایه‌گذاری‌های کوچک

- عدم نیاز به نگه‌داشتن سرمایه تا زمان سررسید قرارداد

- استاندارد بالاتر داشتن نسبت به وام‌ها

- عملکرد اطلاعاتی قیمت‌های اوراق قرضه<sup>۱</sup>

عرضه‌ی اوراق قرضه تنها برای نهادهای خاصی از جمله دولت‌ها، شرکت‌ها، بانک‌ها و شرکت‌های با هدف خاص<sup>۲</sup> و غیره مجاز است. از طرفی تهیه و عرضه‌ی اوراق قرضه فرآیندی زمان‌بر است و برخلاف وام به منابع تأمین مالی خیلی بیشتری نیاز دارد. لذا عرضه‌ی اوراق قرضه تنها برای مقادیر زیاد مقرون به صرفه می‌باشد.

برخلاف دارندگان سهام، صاحبان اوراق قرضه مالک بخشی از مؤسسه‌ی عرضه‌کننده‌ی اوراق نیستند، بلکه نسبت به آن مؤسسه نقش قرض‌دهنده را بازی می‌کنند.

با وجود اینکه بازارهای اوراق، سهم قابل توجهی در انتقال و تجارت ریسک اعتباری دارند، این بازارها به تنهایی پاسخگوی تمایل روزافزون سرمایه‌گذاران و بانک‌ها به خرید و فروش اوراق با درآمد ثابت نیستند. اساساً اوراق قرضه بر مبنای نیازهای عرضه‌کننده تنظیم و عرضه می‌شوند و از سوی دیگر،

<sup>۱</sup> به این معنی که تخمین بازار از ریسک اعتباری قرض‌دهنده را منعکس می‌کنند.

<sup>۲</sup> Special Purpose Vehicles

اوراق قرضه‌ی دولتی<sup>۱</sup> و اوراق قرضه‌ی خارجی<sup>۲</sup> بخش عمده‌ی بازار اوراق قرضه را تشکیل می‌دهند، لذا امکان کمی برای سرمایه‌گذارها جهت شرکت در قراردادهای اوراق قرضه‌ی شرکتی<sup>۳</sup> وجود دارد. به‌طور کلی وسعت بازار اوراق قرضه با توجه به وسعت کل دنیای ریسک اعتباری نسبتاً کم است و این امر منجر به ریسک نقدشوندگی می‌شود. افزایش تمایل به معامله‌ی ریسک اعتباری و نیز کاستی‌های بازار اوراق قرضه در نهایت به ابداع مشتقات اعتباری<sup>۴</sup> انجامید. در بخش بعد به معرفی کلی آن‌ها می‌پردازیم.

### ۳.۳.۱ تعریف و تقسیم‌بندی کلی مشتقات اعتباری

مشتقه<sup>۵</sup> قراردادی مالی است که ارزش آن در زمان سررسید<sup>۶</sup> به قیمت یک یا چند کالای پایه<sup>۷</sup> وابسته است و هدف از طراحی این ابزار، مدیریت و انتقال یک سری از ریسک‌ها از جمله ریسک اعتباری، ریسک نرخ ارز و غیره بوده است. برای یک مشتقه‌ی اعتباری، کالای پایه بایستی یک ابزار مالی مرتبط با ریسک اعتباری باشد. مشتقه‌ی اعتباری یک قرارداد دوطرفه است که امکان مطالعه‌ی مجزای ریسک اعتباری مربوط به یک دارایی پایه‌ی حساس به ریسک اعتباری را فراهم می‌سازد. شکل ۲.۱ ساختار ابتدایی یک مشتقه‌ی اعتباری را نشان می‌دهد.

<sup>۱</sup> Government Debt

<sup>۲</sup> Sovereign Debt

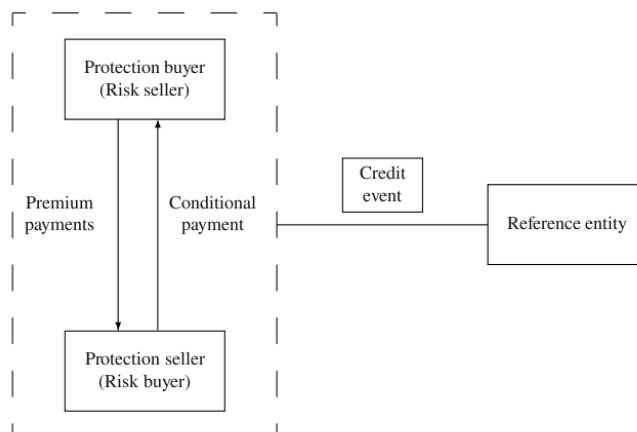
<sup>۳</sup> Corporate Bonds

<sup>۴</sup> Credit Derivatives

<sup>۵</sup> Derivative

<sup>۶</sup> Maturity

<sup>۷</sup> Underlying Asset



شکل ۲.۱: ساختار ابتدایی یک مشتقه‌ی اعتباری

طرفین قرارداد، خریدار حمایت<sup>۱</sup> (فروشنده‌ی ریسک)<sup>۲</sup> و فروشنده‌ی حمایت<sup>۳</sup> (خریدار ریسک)<sup>۴</sup> نامیده می‌شوند. در طول مدت قرارداد، خریدار حمایت پرداخت‌های صرف<sup>۵</sup> را به صورت دوره‌ای به فروشنده‌ی حمایت می‌پردازد. در مقابل، فروشنده‌ی حمایت بایستی مبلغی را مشروط بر وقوع یک رویداد اعتباری در طول مدت قرارداد به خریدار حمایت پرداخت نماید<sup>۶</sup>. رویداد اعتباری می‌تواند ورشکستگی<sup>۷</sup>، تقلیل کیفیت اعتباری<sup>۸</sup> یا تغییراتی در اسپرد اعتباری<sup>۹</sup> باشد. قرارداد یا در زمان سررسید و یا در صورت وقوع یک رویداد اعتباری خاتمه می‌یابد. علاوه بر پرداخت مشروط، یک مشتقه‌ی اعتباری می‌تواند فروشنده‌ی حمایت را به پرداخت‌های دیگر نیز ملزم نماید.

۱ Protection Buyer

۲ Risk Seller

۳ Protection Seller

۴ Risk Buyer

۵ Premium Payments

۶ Contingent Payment

۷ Bankruptcy

۸ Deterioration of Credit Quality

۹ Credit Spread

انواع گوناگونی برای مشتقات اعتباری بر مبنای نوع پوشش ریسک اعتباری وجود دارد. دسته‌بندی مشتقات اعتباری بر این مبنا را می‌توان در جدول ۱.۱ مشاهده کرد.

جدول ۱.۱: تقسیم‌بندی مشتقات اعتباری با توجه به ریسکی که پوشش می‌دهند.

ریسک	ریسک نکول	ریسک اسپرد اعتباری	ریسک کامل
مشتقات اعتباری	سواپ نکول اعتباری اختیار نکول اعتباری سواپ نکول سبد سواپ $n$ امین نکول	سواپ اسپرد اعتباری اختیار اسپرد اعتباری	سواپ بازده کامل

به‌عنوان مثال سواپ بازده کامل<sup>۱</sup>، ریسک مربوط به یک ورق قرضه را به تمامی منتقل می‌کند. مشتقات اعتباری را می‌توان با توجه به ویژگی‌های دیگرشان نیز تقسیم بندی نمود. این مشتقات بر اساس تعداد دارایی‌هایی که در سبد پایه قرار می‌گیرد، به دو دسته تقسیم می‌شوند: مشتقات اعتباری تک اسمی<sup>۲</sup> و مشتقات اعتباری چند اسمی<sup>۳</sup>. همچنین می‌توان تقسیم‌بندی را بر مبنای تأمین یا عدم تأمین مالی قرارداد نیز انجام داد. وقتی وارد یک قرارداد مشتقه‌ی اعتباری که تأمین مالی شده است می‌شویم، در ابتدا فروشنده‌ی حمایت، مبلغی معادل با ارزش اسمی قرارداد به طرف مقابل می‌پردازد و در زمان سررسید همان مبلغ را با کسری به میزان نکول شده، باز پس می‌گیرد. در حالی که برای مشتقات اعتباری که تأمین مالی نمی‌شوند، در ابتدای قرارداد مبلغی پرداخت نمی‌شود و در صورت وقوع نکول، فروشنده‌ی حمایت ملزم به جبران زیان است. جدول ۲.۱ تقسیم‌بندی مشتقات اعتباری بر این مبنا را نشان می‌دهد.

<sup>۱</sup> Total Return Swap (TRS)

<sup>۲</sup> Single-name Credit Derivatives

<sup>۳</sup> Multi-name Credit Derivatives

جدول ۲.۱: تقسیم‌بندی مشتقات اعتباری بر حسب تأمین یا عدم تأمین مالی و تعداد دارایی‌های سبد پشتوانه.

بدون بودجه‌ی اولیه/تأمین نشده	با بودجه‌ی اولیه/تأمین شده
تک اسمی	سوآپ نکول اعتباری اختیار نکول اعتباری اختیار اسپرد اعتباری سوآپ بازده کامل
چند اسمی	سوآپ نکول اعتباری سبد سوآپ $m$ امین نکول
چند اسمی و مبتنی بر توریق	تعهد بدهی تضمین شده‌ی وجوه نقد تعهد بدهی تضمین شده‌ی تصنعی

### ۴.۳.۱ ضرورت وجود بازار مشتقات اعتباری

مؤسسه‌های مالی از فعالان مهم بازارهای مشتقات اعتباری که موجبات رشد چشمگیر آن‌ها را فراهم کرده است، به شمار می‌روند. بانک‌ها از طریق این بازارها می‌توانند سرمایه‌ی اقتصادی<sup>۱</sup> و سرمایه‌ی قانونی<sup>۲</sup> خود را کاهش دهند. از طرفی، استفاده از قراردادهای مشتقه جهت کاهش ریسک اعتباری، به لحاظ مسائل مالیاتی به مراتب بهتر از تبدیل کردن وام‌ها به اوراق بهادار است. علاوه بر این، مشتقات دارای هزینه‌های قرارداد پایین‌تری هستند و این امر باعث می‌شود ارتباط بانک‌ها با مشتریان حفظ شود. همچنین این ابزار مالی مدیریت ریسک بانک‌ها را بهبود می‌بخشد و به تنوع‌بخشی در سبد کمک می‌کند. بانک‌ها حتی با فعالیت در بازار مشتقات به عنوان فروشنده‌ی حمایت نیز می‌توانند اهداف مدیریت سبد خود را اعم از توزیع یا افزایش ثمر<sup>۳</sup> محقق سازند.

دلایل مختلفی برای سرمایه‌گذاری در مشتقات اعتباری وجود دارد. وارد شدن در مشتقات اعتباری به عنوان خریدار حمایت، نه تنها برای شرکت‌های تعاونی تضمینی در برابر نکول خریداران و حامیان

<sup>۱</sup> Economic Capital

<sup>۲</sup> Regulatory Capital

<sup>۳</sup> Yield

است، بلکه قرار گرفتن در این موقعیت، به نوعی فروش عاریتی<sup>۱</sup> اوراق قرضه (به ویژه اوراق قرضه‌ی شرکتی) برای مواقعی که بیم آن رود که رتبه‌ی اعتباری یک عرضه‌کننده در حال کاهش است و به دنبال آن قیمت ورق قرضه افت خواهد کرد، به حساب می‌آید.

از طرف دیگر، یک سرمایه‌گذار با وارد شدن در قرارداد مشتقه‌ی اعتباری به عنوان فروشنده‌ی حمایت، می‌تواند به نحو مؤثری از ریسک اعتباری خود جهت کسب درآمد بهره بگیرد. به‌ویژه این امر در مورد آن دسته از مشتقات اعتباری صادق است که در ابتدا تأمین مالی نمی‌شوند. این نوع سرمایه‌گذاری، جایگزین مناسبی برای خرید اوراق قرضه‌ای است که هزینه‌ی خرید آن‌ها بیشتر از سودی است که عاید سرمایه‌گذارشان می‌شود.

مزیت دیگر استفاده از مشتقات اعتباری، جدا ساختن ریسک اعتباری از سایر ریسک‌های مرتبط با قرارداد است. به این ترتیب می‌توان ریسک‌های اعتباری اختصاصی برای دستیابی به هدف‌های خاص بازارهای مالی در قالب قراردادهای خاص طراحی و عرضه کرد.

### ۵.۳.۱ ریسک‌های مرتبط با مشتقات اعتباری

علاوه بر ریسک اعتباری، خریدار و فروشنده‌ی حمایت در مشتقات اعتباری، می‌بایست با ریسک‌های مختلف دیگر نیز دست و پنجه نرم کنند. این ریسک‌ها را می‌توان به دو دسته تقسیم نمود: ریسک‌های در سطح قرارداد و ریسک‌های در سطح بازار.

#### ریسک‌های در سطح قرارداد

ریسک طرف قرارداد<sup>۲</sup>: ریسک اینکه یکی از طرفین قرارداد قادر به عمل به تعهدات خویش نباشد.

<sup>۱</sup> Short Selling

<sup>۲</sup> Counterparty Risk

**ریسک پایه<sup>۱</sup>:** ریسک یک زیان قابل توجه ناشی از پوشش ریسک<sup>۲</sup> نامناسب در سبد، مثل پوشش ریسک اعتباری یک مؤسسه‌ی مرجع<sup>۳</sup> در سبد با مؤسسه‌ی مرجع هم‌بسته.

**ریسک قانونی:** ریسک ضرر ناشی از اینکه شرایط قرارداد به روشنی بیان نشده باشد و یا ضرر ناشی از اتفاقات غیرقابل پیش‌بینی آینده است. با وجود اینکه انجمن بین‌المللی سوآپ‌ها و مشتقات<sup>۴</sup>، استانداردهای قراردادهای مشتقه را روز به روز بهبود می‌بخشد، همچنان نمی‌توان از ریسک قانونی به طور کامل صرف‌نظر نمود.

**ریسک عملیاتی:** به ریسک ضرر قابل توجه یا سود غیر واقعی ناشی از نقص در شالوده‌ی فنی یا اشکال در روندهای درونی شرکت یا افراد و یا اتفاقات خارجی اطلاق می‌شود.

**ریسک مدل<sup>۵</sup>:** ریسک ضرر ناشی از محاسبه‌ی اشتباه ارزش یک قرارداد است که از بکارگیری مدل اشتباه برای قیمت‌گذاری یا پارامترهای ناصحیح مدل ناشی می‌شود.

### ریسک‌های در سطح بازار

**ریسک نقدینگی:** ریسک اینکه معامله در حجم بالا، تأثیر بد بر قیمت‌ها بگذارد و یا ریسک کم‌روتنی شدن بازار.

**ریسک تمرکز بالای بازار<sup>۶</sup>:** این یعنی معامله‌ی مشتقات اعتباری فقط برای تعداد محدودی از فعالان بازار میسر و مجاز است.

**ریسک قیمت‌گذاری ناصحیح سیستماتیک<sup>۷</sup>:** مدل‌های قیمت‌گذاری مشتقات اعتباری در ابتدای مسیر

<sup>۱</sup> Basis Risk

<sup>۲</sup> Hedge

<sup>۳</sup> Reference Entity

<sup>۴</sup> International Swaps and Derivatives Association (ISDA)

<sup>۵</sup> Model Risk

<sup>۶</sup> High Market Concentration Risk

<sup>۷</sup> Systematic Mispricing

پیشرفت قرار دارند و هنوز یک مدل کلی قیمت‌گذاری که از طرف همه پذیرفته شده باشد، وجود ندارد. مدل‌های موجود تنها بخشی از پیچیدگی‌های ابزارهای مالی وابسته به سبد را منعکس می‌کنند که همین مسئله منجر به مشکلاتی چون دست کم گرفتن<sup>۱</sup> ریسک واقعی شده است. ریسک‌های دیگری چون ریسک نمایندگی<sup>۲</sup>، ریسک آربیتراژ قانونی<sup>۳</sup> و ریسک عدم شفافیت بازار<sup>۴</sup> نیز در این دسته قرار می‌گیرند.

### ۶.۳.۱ مشتقات اعتباری تک اسمی<sup>۵</sup>

در این بخش، کارکرد دسته‌ی خاصی از مشتقات اعتباری را بیان می‌کنیم. مشتقات اعتباری تک اسمی، ریسک اعتباری دارایی یا مؤسسه‌ی مرجع را از یک طرف قرارداد به طرف دیگر منتقل می‌کنند. مهم‌ترین آن‌ها عبارتند از سوآپ نکول اعتباری<sup>۶</sup> (CDS)، اختیار نکول اعتباری<sup>۷</sup> و سوآپ بازده کامل<sup>۸</sup>.

#### سوآپ نکول اعتباری

سوآپ نکول اعتباری (CDS) قراردادی دو جانبه است که در آن خریدار حمایت (خریدار CDS) به طور دوره‌ای (معمولاً فصلی) مبلغ ثابتی را تحت عنوان صرف CDS<sup>۹</sup> که معمولاً بر حسب bps<sup>۱۰</sup>

<sup>۱</sup> Underestimation

<sup>۲</sup> Agency Risk

<sup>۳</sup> Regulatory Arbitrage

<sup>۴</sup> Market Intransparency

<sup>۵</sup> Single Name Credit Derivatives

<sup>۶</sup> Credit Default Swap

<sup>۷</sup> Credit Default Option

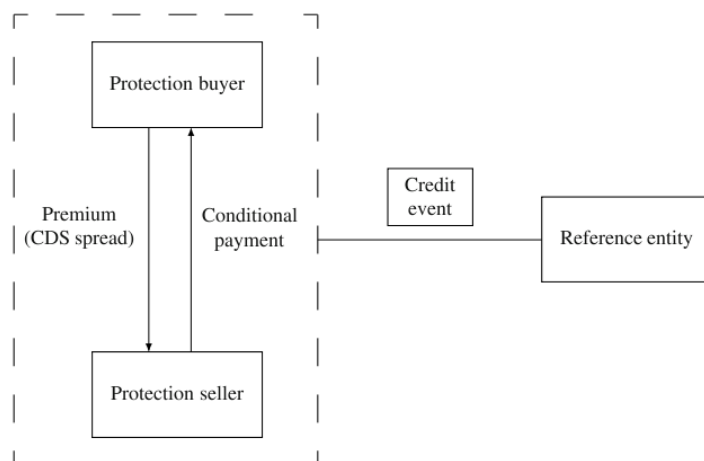
<sup>۸</sup> Total Return Swap (TRS)

<sup>۹</sup> CDS Premium

<sup>۱۰</sup> Basis Points: هر ۱٪ تغییر برابر با ۱۰۰ bps است و برای نشان دادن میزان تغییرات مفاهیم مالی از جمله: نرخ‌های

بهره، شاخص‌های سهام و اوراق بهادار با درآمد ثابت به کار گرفته می‌شود. مثلاً وقتی ثمر یک ورق قرضه از ۵٪ به ۵/۵٪

و ارزش اسمی محاسبه می‌شود، تا زمان سررسید قرارداد به فروشنده‌ی حمایت می‌پردازد. در مقابل، خریدار یک مبلغ را مشروط بر وقوع رویدادی اعتباری برای مؤسسه‌ی مرجع، از فروشنده‌ی حمایت دریافت می‌نماید. شکل ۳.۱ کارکرد کلی یک CDS را نشان می‌دهد.



شکل ۳.۱: ساختار کلی یک قرارداد سوآپ نکول اعتباری

متداول‌ترین زمان‌های سررسید برای این قرارداد، ۳ سال، ۵ سال و ۱۰ سال است و این در حالی است که زمان سررسید یک قرارداد CDS لزوماً با زمان سررسید قرارداد مربوط به مؤسسه‌ی مرجع آن یکسان نیست.

رویداد اعتباری در قراردادهای CDS می‌تواند شامل ورشکستگی، ناتوانی در پرداخت<sup>۱</sup>، تغییر ساختار بدهی<sup>۲</sup> و موارد دیگر باشد.

برای قراردادهای CDS در صورتی که نکول اتفاق افتد دو نوع تسویه<sup>۳</sup> وجود دارد: نقدی<sup>۴</sup> که بیشتر

می‌رسد، می‌توان گفت ۵۰ bps افزایش داشته است.

<sup>۱</sup> Failure to Pay

<sup>۲</sup> Restructuring of Debt

<sup>۳</sup> Settlement

<sup>۴</sup> In Cash

در اروپا متداول است و فیزیکی<sup>۱</sup> که در ایالات متحده آمریکا رایج است. تسویه بطور فیزیکی به این معنی است که در صورت وقوع نکول، خریدار حمایت ملزم به انتقال دارایی مرجع با کسر ارزش فعلی دارایی به فروشندهی حمایت است. اما برای مواقعی که تسویه از نوع نقدی است هنگام وقوع نکول، فروشندهی حمایت بایستی مبلغی معادل با اختلاف ارزش اسمی<sup>۲</sup> دارایی مرجع با ارزش بازاری<sup>۳</sup> آن<sup>۴</sup> را به صورت نقدی به خریدار حمایت پرداخت نماید.

به قراردادهای CDS می توان به شکل یک قرارداد بیمه نگاه کرد. اما سه تفاوت اساسی میان این دو قرارداد را نباید فراموش کرد:

۱. دامنه‌ی مفهوم رویداد اعتباری که منجر به جبران خسارت توسط فروشندهی حمایت می شود، در مشتقات اعتباری گسترده تر است.

۲. خریدار حمایت در یک قرارداد مشتقه‌ی اعتباری، نیاز به اثبات اینکه واقعاً متحمل ضرر شده است ندارد.

۳. تفاوت آخر این است که برای مشتقات اعتباری یک منبع استاندارد برای مستند سازی<sup>۵</sup> قراردادها وجود دارد که باعث سهولت معامله و افزایش بازار آن‌ها می شود.

همچنین می توان قراردادهای CDS را به صورتی تنظیم نمود که در ابتدا با تأمین مالی<sup>۶</sup> همراه باشند. به این ترتیب که فروشندهی حمایت (سرمایه گذار) یک ورق قرضه با نرخ شناور می خرد که دارای کوپن

---

<sup>۱</sup> Physically

<sup>۲</sup> Par Value

<sup>۳</sup> Market Value

<sup>۴</sup> ارزش دارایی مرجع که بر حسب نرخ بازیافت محاسبه شده است.

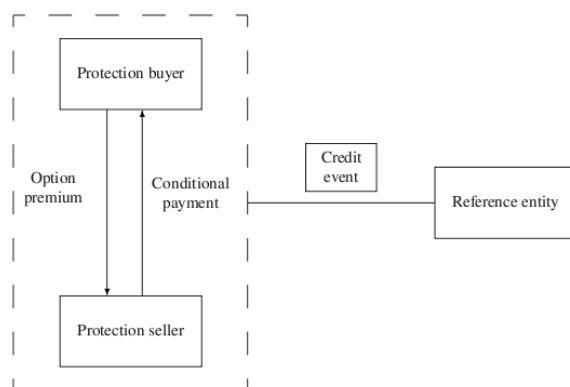
<sup>۵</sup> Documentation

<sup>۶</sup> Funded

لیبور<sup>۱</sup> سه ماهه بعلاوه‌ی اسپرد ثابت CDS فصلی است. اگر هیچ رویداد اعتباری‌ای رخ ندهد کوپن تا زمان سررسید پرداخت می‌شود. سپس سرمایه‌گذار مبلغی معادل با ارزش اسمی ورق قرضه با نرخ شناور را دریافت می‌نماید. اما اگر یک رویداد اعتباری به وقوع بپیوندد، فروشنده‌ی حمایت ارزش قابل بازیافت را دریافت می‌کند و قرارداد خاتمه می‌یابد.

### اختیار نکول اعتباری

قرارداد اختیار نکول اعتباری بسیار شبیه به سوآپ نکول اعتباری است. تفاوت اساسی بین آن دو در این است که خریدار حمایت در یک قرارداد اختیار نکول اعتباری پرداخت‌های دوره‌ای ندارد. بلکه یک هزینه‌ی اولیه<sup>۲</sup> یا صرف اختیار<sup>۳</sup> می‌پردازد. کارکرد یک قرارداد معمول اختیار نکول اعتباری در شکل ۴.۱ نمایش داده شده است.



شکل ۴.۱: ساختار کلی یک قرارداد اختیار نکول اعتباری

### سوآپ بازده کامل

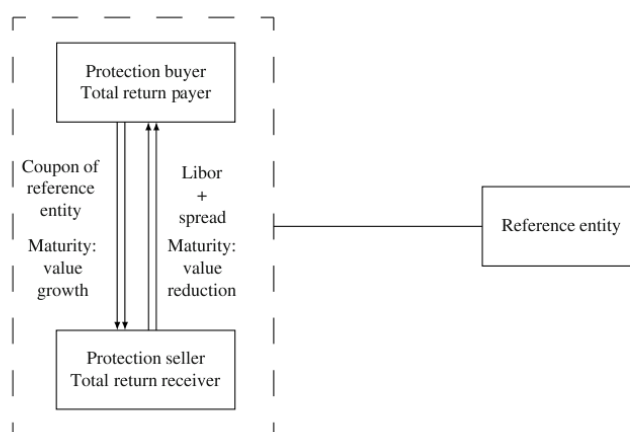
یک قرارداد سوآپ بازده کامل (TRS)، قراردادی دوجانبه بین دریافت‌کننده‌ی تمامی بازده (فروشنده‌ی

<sup>۱</sup> LIBOR

<sup>۲</sup> Upfront Fee

<sup>۳</sup> Option Premium

حمایت) و پرداخت‌کننده‌ی بازده (خریدار حمایت) است. فروشنده‌ی حمایت تمامی جریان‌های نقدی مربوط به دارایی مرجع را بی آنکه مالکیت آن را داشته باشد، دریافت می‌کند. در مقابل، خریدار حمایت نیز پرداخت‌های دوره‌ای که بر حسب لیبور و ارزش اسمی قرارداد محاسبه می‌شوند، به اضافه‌ی یک اسپرد ثابت بر مبنای همان ارزش اسمی دریافت می‌کند. ساختار ابتدایی یک قرارداد سوآپ بازده کامل در شکل ۵.۱ نشان داده شده است.



شکل ۵.۱: ساختار کلی یک قرارداد سوآپ بازده کامل

یک قرارداد TRS می‌تواند به دو طریق خاتمه یابد: یا مؤسسه‌ی مرجع دچار نکول می‌شود و یا زمان سررسید فرا می‌رسد. اگر نکول رخ ندهد، اختلاف بین ارزش بازاری دارایی مرجع در زمان شروع و زمان سررسید قرارداد محاسبه می‌شود. اگر مقدار این اختلاف مثبت باشد، دریافت‌کننده‌ی بازده کامل مبلغی معادل با این اختلاف به دست می‌آورد. در غیر این صورت، او مجبور به پرداخت همین مبلغ به دهنده‌ی بازده کامل است.

قراردادهای TRS انواع مختلفی دارند. یک نوع از این قراردادها وابسته به بیش از یک دارایی مرجع است و دارایی‌های مرجع قرارداد را سببی از دارایی‌ها یا شاخص اوراق قرضه تشکیل می‌دهند. در نوع دیگر، پرداخت‌کننده‌ی بازده کامل ممکن است پرداخت‌های شناور بر حسب لیبور را کسب نکند و فقط پرداخت‌های ثابت را دریافت نماید.

## ۷.۳.۱ مشتقات اعتباری چند اسمی

### سواپ K - امین نکول<sup>۱</sup>

سواپ نکول سبد<sup>۲</sup>، نوعی مشتقه‌ی اعتباری است که در مقایسه با یک سواپ نکول اعتباری تک اسمی، بر روی سبدهای با بیش از یک دارایی مرجع بسته می‌شود. سواپ نکول سبد یک قرارداد دوجانبه است که خریدار حمایت در آن اسپرد سواپ<sup>۳</sup> را به صورت دوره‌ای در طول مدت قرارداد به فروشنده‌ی حمایت می‌پردازد و در ازاء آن یک مبلغ پرداختی مشروط بر اینکه K-امین نکول برای یکی از  $n$  دارایی مرجع اتفاق بیافتد، دریافت می‌کند. متداول‌ترین قرارداد در این دسته، سواپ اولین نکول<sup>۴</sup> (FtD Swaps) است. قراردادهای سواپ نکول سبد به‌طور معمول دارای پنج یا ده دارایی مرجع در سبدشان هستند. یک قرارداد سواپ نکول سبد می‌تواند به دو طریق منقضی شود: زمانی که K-امین نکول در سبد قرارداد اتفاق افتد و یا هنگامی که زمان سررسید قرارداد فرا رسد. اگر K-امین نکول روی دهد، فروشنده‌ی حمایت می‌بایست مابه‌التفاوت ارزش اسمی آخرین دارایی نکول شده و ارزش قابل بازیافت آن را بپردازد. طرفین قرارداد می‌توانند به صورت توافقی یکی از دو شکل نقدی یا فیزیکی را برای تسویه انتخاب کنند.

---

<sup>۱</sup> K'th-to-Default Swap

<sup>۲</sup> Basket Default Swap

<sup>۳</sup> Swap Spread

<sup>۴</sup> First to Default Swap

## ۴.۱ مشتقات اعتباری چند اسمی مبتنی بر توریق<sup>۱</sup>

### ۱.۴.۱ تعریف و کارکرد

توریق در واقع تبدیل سبدي از دارایی‌ها به اوراق بهادار قابل معامله است. در ابتدایی‌ترین حالت، توریق فرآیندی است که طی آن دارایی‌های در معرض ریسک اعتباری در یک سبد جمع می‌شوند و به یک شرکت با هدف خاص (SPV)<sup>۲</sup> فروخته می‌شوند. سپس SPV در بازار پول یا سرمایه سرمایه‌گذاری می‌کند. به این صورت که اوراق بهادار قابل معامله‌ای به نام اوراق بهادار با پشتیبانی دارایی (ABS)<sup>۳</sup> منتشر می‌نماید.

یک مشخصه‌ی بارز ABSها مستقل بودن ارزش اعتباری بانک از ارزش اعتباری ABS است. از آنجا که هر SPV منحصراً برای یک قرارداد خاص به وجود می‌آید، عوامل دیگری غیر از ارزش اعتباری سبد دارایی نمی‌تواند ریسک ABS را تحت تأثیر قرار دهد. سرمایه‌گذارهای این حوزه تمام درآمدهای حاصل از سبد دارایی بجز هزینه‌های خدماتی را دریافت می‌کنند. لذا وضعیت ریسک و بازده به عملکرد سبد دارایی‌ها وابسته است.

بطور کلی، ABSها در کلاس‌های ریسک مختلفی به نام برش<sup>۴</sup> عرضه می‌شوند. برای اینکه این اوراق بهادار قابل معامله در بازار سرمایه باشند، لازم است برش‌ها توسط یک شرکت رتبه‌بندی<sup>۵</sup>، رتبه‌بندی شوند. شرکت رتبه‌بندی به‌طور مرتب ریسک برش‌ها را برآورد می‌کند و در صورت نیاز، رتبه‌ی برش را تغییر می‌دهد.

<sup>۱</sup> Securitization-Based Multi Name Credit Derivatives

<sup>۲</sup> بایستی مستقل از شرکتی که خواهان اعمال توریق بر سبد دارایی‌هاست و دور از ورشکستگی باشد.

<sup>۳</sup> (ABS) Asset-Backed Securities

<sup>۴</sup> Tranche

<sup>۵</sup> Rating Agency

اوراق بهادار با پشتوانه‌ی رهنی<sup>۱</sup> (MBS) قراردادهایی هستند که سبد پشتوانه‌ی آن‌ها املاک است. در صورتی که این املاک به شخص حقیقی تعلق گیرد، قرارداد از نوع اوراق بهادار با پشتوانه‌ی رهنی مسکونی<sup>۲</sup> خواهد بود و چنانچه به شرکتی تعلق گیرد، از نوع اوراق بهادار با پشتوانه‌ی رهنی تجاری<sup>۳</sup> خواهد بود. ABSها با سبدهای از انواع گوناگون بدهی (به‌غیر از رهن‌های مسکونی) تضمین می‌شوند. تعهدات بدهی تضمین‌شده<sup>۴</sup> (CDO) دسته‌ای از قراردادهای مبتنی بر توریق هستند که سبد دارایی آن‌ها از انواع قراردادهای در معرض ریسک اعتباری تشکیل می‌شود. زیرمجموعه‌ای از CDOها که وام‌ها نقش پشتوانه را برایشان بازی می‌کنند، تعهدات وامی تضمین‌شده<sup>۵</sup> (CLO) نام دارند. زیرمجموعه‌ی دیگر از این دسته، تعهدات ورقه‌ای تضمین‌شده<sup>۶</sup> (CBO) هستند که سبدهای متشکل از اوراق قرضه است.

در این پایان‌نامه به معرفی روش‌های قیمت‌گذاری نوع خاصی از تعهدات بدهی تضمین‌شده، با عنوان تعهدات بدهی تضمین‌شده‌ی ترکیبی<sup>۷</sup> خواهیم پرداخت.

## ۲.۴.۱ مزایای بازار قراردادهای مبتنی بر توریق

در این بخش، انگیزه‌های سرمایه‌گذارها برای شرکت در قراردادهای مبتنی بر توریق را بیان می‌کنیم. عوامل مختلفی باعث می‌شوند تا بانک‌ها مکانیسم توریق را مورد توجه قرار دهند. یک دلیل عمده،

<sup>۱</sup> Mortgage-Backed Securities

<sup>۲</sup> Residential Mortgage-Backed Securities

<sup>۳</sup> Commercial Mortgage-Backed Securities

<sup>۴</sup> Collateralized Debt Obligations

<sup>۵</sup> Collateralized Loan Obligations

<sup>۶</sup> Collateralized Bond Obligations

<sup>۷</sup> Synthetic Collateralized Debt Obligation

مدیریت ریسک و تنوع‌بخشی<sup>۱</sup> است. بانک‌ها از توریق جهت تنظیم مجدد سبد وام‌های خود بهره می‌گیرند، بخصوص اگر مشکلاتی چون تمرکز بالای ریسک اعتباری در یک منطقه یا صنعت خاص در سبد مشاهده شود. چنین مشکلاتی را می‌توان از طریق اعمال توریق بر بخشی از سبد، یا با سرمایه‌گذاری در قراردادهایی مبتنی بر توریق که بر منطقه یا صنعت دیگری تمرکز دارد، کاهش داد. انگیزه‌ی مهم دیگر، کاهش سرمایه‌ی قانونی و اقتصادی است.

هرچند، از نظر بانک‌ها فرآیند توریق مشکلاتی نیز به همراه دارد. این مکانیسم ممکن است محدودیت‌هایی چون موافقت یا مخالفت قرض‌کننده‌ها را داشته باشد، که این خود رابطه‌ی بین بانک و مشتری را مورد تهدید قرار می‌دهد. از طرفی کاهش سرمایه‌ی اقتصادی و قانونی بانک ممکن است محدود باشد، چون اغلب بخش عمده‌ی برش سهام را بانک‌ها در اختیار دارند. لذا، تنها درصد کمی از ریسک اعتباری منتقل می‌شود. به‌عنوان آخرین نکته توریق ممکن است بنا به نحوه‌ی سازماندهی سبد و مراحل قانونی مورد نیاز، فرآیندی زمان‌بر و پرهزینه باشد.

برای سرمایه‌گذارها نیز دلایل متعددی برای اینکه جذب بازارهای قراردادهای مبتنی بر توریق شوند، وجود دارد. با توریق سبدهای دارایی‌های مالی و عرضه‌ی آن‌ها در قالب برش‌های مختلف، ریسک اعتباری از تعهد مرجع اولیه<sup>۲</sup> تفکیک می‌شود و به سرمایه‌گذارهای برش‌های مختلف با توجه به ریسک‌گریزیشان منتقل می‌شود. پیش از بحران مالی جهانی اخیر، سرمایه‌گذارها سودهای زیاد قراردادهای مبتنی بر توریق را به سودهای حاصل از مشتقات اعتباری سنتی با همان رتبه‌بندی ترجیح می‌دادند. همچنین قراردادهای مبتنی بر توریق، این امکان را برای سرمایه‌گذارها فراهم می‌کنند که با اضافه کردن ریسک اعتباری به سبدشان به آن تنوع بخشند.

---

<sup>۱</sup> Diversification

<sup>۲</sup> Original Obligation

## ۳.۴.۱ ریسک‌های بازار قراردادهای مبتنی بر توریق

در این بخش، ریسک‌هایی را که ناشی از (و همراه با) توریق هستند معرفی می‌کنیم. این ریسک‌ها شبیه ریسک‌های مربوط به مشتقات اعتباری سنتی هستند. در اینجا نیز می‌توان ریسک‌ها را به دو دسته‌ی ریسک‌های در سطح قرارداد و ریسک‌های در سطح بازار تقسیم‌بندی کرد. همانند مشتقات اعتباری قدیمی، ریسک طرفین قرارداد در قراردادهای مبتنی بر توریق نیز لحاظ می‌شود.

چندین واقعیت دلالت بر وجود ریسک قانونی در این حوزه از قراردادهای مالی دارد که یکی از آن دلایل این است که برای به انجام رسانیدن فرآیند توریق، یک مؤسسه‌ی مالی بایستی جوانب مختلف چون نظارت قانونی و مالیات را در نظر بگیرد.

در فرآیند توریق، بیش از یک شخص یا ارگان دخیل هستند. این امر موجب می‌شود احتمال زیان‌های قابل توجه ناشی از ریسک عملیاتی بالا رود.

از منظر SPV ممکن است ریسک نقدینگی ظاهر شود. به این ترتیب که زمان دریافت درآمدها با زمان پرداخت بدهی‌ها مطابقت نداشته باشد. این امر، ریسک پیش‌پرداخت<sup>۱</sup> را نیز ممکن است پیش بیاورد. این ریسک در صورتی اتفاق می‌افتد که وام‌گیرنده از حق خود برای لغو کردن قرارداد استفاده کند و بازپرداخت وام را پیش از موعد مقرر (زمان سررسید) انجام دهد. در این صورت، سرمایه‌گذارها سود مربوطه را از دست می‌دهند.

در سطح بازار، ریسک نقدینگی برای سرمایه‌گذار وقتی پیش می‌آید که سرمایه‌گذار قادر به معامله‌ی ورق قرضه‌ی توریق شده در هر زمان دلخواه نباشد.

تعاریف ریسک بازار و ریسک نرخ بهره در قراردادهای مبتنی بر توریق، مطابق است با آنچه که پیش‌تر در مورد مشتقات اعتباری قدیمی ذکر شد.

---

<sup>۱</sup> Prepayment Risk

## فصل دوم

# معرفی و مدل‌سازی کلی تعهدات بدهی تضمین‌شده ترکیبی

در این فصل ابتدا با کلیات قراردادهای تعهدات بدهی تضمین‌شده آشنا می‌شویم. سپس با تمرکز بر تعهد بدهی تضمین‌شده ترکیبی، نحوه‌ی قیمت‌گذاری آن را بیان می‌کنیم.

### ۱.۲ تعهدات بدهی تضمین‌شده (CDO)

همانطور که پیش‌تر اشاره شد، CDO یکی از مهمترین انواع مشتقات اعتباری است که در آن، یک شرکت با هدف خاص (SPV) تشکیل می‌شود و سپس این شرکت به پشتوانه‌ی سبده‌ی از دارایی‌های قابل نکول، اوراق بهادار منتشر می‌کند. سبد پشتوانه این اوراق می‌تواند ترکیبی از انواع دارایی‌های مالی اعم از وام‌ها، اوراق قرضه، سایر مشتقات اعتباری و یا متشکل از تنها یک نوع از این دارایی‌ها باشد.

## ۲.۲ ساختار CDO

در یک CDO سبدي از انواع قراردادها (اوراق قرضه، وام‌های رهنی تجاری، وام‌های رهنی مسکونی، سوآپ نکول اعتباری و غیره) داریم که اوراق بهاداری بر مبنای آن‌ها تنظیم و عرضه می‌شوند. در واقع دسته‌بندی دارایی‌های موجود در سبد، در قالب برش‌هایی از جنس اوراق بهادار انجام می‌گیرد. برش‌ها به ترتیب با عناوین **برش سهام<sup>۱</sup>** یا **برش مؤخر<sup>۲</sup>**، **برش‌های میانی<sup>۳</sup>** و **برش مقدم<sup>۴</sup>** معرفی می‌شوند. این برش‌ها بر حسب تقدم یا تأخر در نکول و زمان‌بندی بازپرداخت‌ها اولویت‌بندی می‌شوند. برش سهام پایین‌ترین جایگاه را در ساختار سرمایه‌ی CDO دارد و اولین دیرکرد در بازپرداخت‌ها و زیان اعتباری، دارندگان این برش را در معرض خطر قرار می‌دهد. لذا ریسکی‌ترین برش در CDO برش سهام است. در صورتی که زیان کل سبد بیش از نسبت در نظر گرفته شده برای این برش باشد، این بار برش‌های میانی ملزم به جبران خسارت هستند و این روند تا برش مقدم ادامه می‌یابد. واضح است که برش مقدم کمترین ریسک اعتباری را در میان برش‌های CDO داراست. برش سهام معمولاً توسط خود عرضه‌کننده‌ی CDO مدیریت می‌شود. یک دلیل این است که برای این برش ریسکی اغلب به اندازه‌ی کافی تقاضا وجود ندارد.

بازپرداخت‌ها مطابق با **اصل آبشار<sup>۵</sup>** انجام می‌پذیرد. هنگام پرداخت سود به سرمایه‌گذارها برش مقدم از اولویت برخوردار است. سپس نوبت به برش‌های میانی می‌رسد و در نهایت برش سهام (برش مؤخر) هر آنچه را که از سود باقی مانده است، دریافت می‌کند.

---

<sup>۱</sup> Equity Tranche

<sup>۲</sup> Junior Tranche

<sup>۳</sup> Mezzanine Tranches

<sup>۴</sup> Senior Tranche

<sup>۵</sup> Waterfall Principle

به طور کلی، یک برش با نقطه‌ی حد پایین<sup>۱</sup>  $K_L$  و نقطه‌ی حد بالا<sup>۲</sup>  $K_U$  مشخص می‌شود. خریداران برش  $[K_L, K_U]$ ، متعهد می‌شوند تمام زیان‌هایی را که حداقل  $K_L$  درصد و حداکثر  $K_U$  درصد از ارزش اولیه‌ی سبد باشند، جبران کنند. برش‌بندی، این امکان را برای سرمایه‌گذاران فراهم کرده است که مطابق با ریسک‌پذیری خود وارد قرارداد شوند و به این وسیله، دارنده‌ی هر برش قادر است میزان تعهد خود را به  $K_U - K_L$  درصد از ارزش اولیه‌ی سبد محدود کند.

## ۳.۲ انواع CDO

در این بخش به بیان تقسیم‌بندی CDOها از سه دیدگاه می‌پردازیم. همانطور که قبلاً نیز گفته شد، CDOها ابزارهای مالی حاصل از فرآیند توریق هستند که ریسک اعتباری سبد پشتوانه را در برش‌هایی با ویژگی‌های ریسک و بازده متفاوت پخش می‌کنند و سپس در بازار عرضه می‌شوند. سه دیدگاه مورد نظر برای تقسیم‌بندی تعهدات بدهی تضمین شده عبارتند از: انگیزه‌ی انتشار، سبد پشتوانه و نحوه‌ی تأمین مالی سبد پشتوانه [۱۸].

### ۱.۳.۲ CDOهای ترازنامه‌ای<sup>۳</sup> و CDOهای آربیتراژی<sup>۴</sup>

CDOهای ترازنامه‌ای و به دلایل مختلف منتشر می‌شوند. این دلایل ممکن است کاهش سرمایه، مدیریت ریسک یا مختصرسازی<sup>۵</sup> ترازنامه باشد. این نوع از CDOها عمدتاً برای CLOها کاربرد دارد.

<sup>۱</sup> Attachment Point

<sup>۲</sup> Detachment Point

<sup>۳</sup> Balance Sheet CDOs

<sup>۴</sup> Arbitrage CDOs

<sup>۵</sup> Reduction

CDOهای آربیتراژی بطور عمومی توسط بانک‌های سرمایه یا مدیران دارایی منتشر می‌شود که به دنبال کسب سود ناشی از اختلاف قیمت بین قیمت بازاری سبد پشتوانه و قیمت ریسک همان سبد در یک چهارچوب توریقی هستند.

## ۲.۳.۲ CDOهای فروش واقعی<sup>۱</sup> و CDOهای ترکیبی

دارایی‌های تشکیل دهنده سبد پشتوانه، یا اینکه چگونه افراد در تعهدات بدهی تضمین شده در معرض ریسک اعتباری قرار بگیرند، منجر به دسته‌بندی این قراردادها به دو نوع **فروش واقعی و ترکیبی** می‌شود.

• CDOهای فروش واقعی، سبد پشتوانه‌ای متشکل از دارایی‌های مالی چون وام‌ها، اوراق قرضه، MBSها، ABSها یا حتی CDOهای دیگر دارند.

• CDOهای ترکیبی برای درگیر کردن افراد با ریسک اعتباری، از مشتقات اعتباری (CDS) در سبد پشتوانه‌ی خود بهره می‌گیرند. خود این CDOها به دو دسته تقسیم می‌شوند:

۱. **تأمین شده/با بودجه‌ی اولیه<sup>۲</sup>**: برای این نوع از CDOهای ترکیبی، بخش پشتوانه از دارایی‌های ریسکی مجزا بوده و با سرمایه‌گذاری در اوراق بهادار غیر ریسکی کوپن دار تشکیل می‌شود. به این ترتیب، در این CDOها بدون نیاز به داشتن سبد وام یا اوراق قرضه، رویه‌ای مشابه با آنچه که در CDOهای وجوه نقد برای پرداخت‌ها اتخاذ می‌شود، خواهیم داشت.

۲. **تأمین نشده/بدون بودجه‌ی اولیه<sup>۳</sup>**: در این نوع، نیازی به تأمین بودجه در ابتدای کار نیست. بلکه سرمایه‌گذار در هنگام وقوع نکول در برش خود، متعهد به جبران ضرر است.

---

<sup>۱</sup> True Sale CDOs

<sup>۲</sup> Funded

<sup>۳</sup> Unfunded

## ۳.۳.۲ CDOهای وجوه نقد<sup>۱</sup> و CDOهای مبتنی بر ارزش بازار<sup>۲</sup>

• CDOهای وجوه نقد، قراردادهایی هستند که در آنها پرداخت سود به سرمایه گذارها تضمینی است و این سود از طریق وجوه نقدی حاصل از دارایی‌های موجود در سبد پشتوانه تأمین می‌شوند. این ساختار معمولاً در قراردادهای غیرپویا<sup>۳</sup> با سبدهای مشخص از وام‌ها یا اوراق قرضه به کار گرفته می‌شود.

• CDOهای مبتنی بر ارزش بازار، ساختارهایی پویا<sup>۴</sup> هستند که ریسک اعتباری سبد در آنها توسط یک مدیر سبد، بطور مداوم مدیریت می‌شود. تلاش مدیر در راستای بهینه کردن بازده سبد پشتوانه به وسیله‌ی معاملاتی است که بر روی دارایی‌های سبد انجام می‌دهد. لذا به دنبال فرصت‌هایی است که از طریق تغییرات قیمت بازاری دارایی‌ها سود برده، بازده سبد را افزایش دهد. در ساختارهای این‌چنینی، سرمایه‌گذار علاوه بر ریسک اعتباری در معرض ریسک استراتژی مدیریت سبد نیز است.

در این پایان‌نامه به معرفی و بررسی روش‌های قیمت‌گذاری قرارداد تعهد بدهی تضمین شده‌ی ترکیبی مبتنی بر روش‌های عاملی تقلیل یافته خواهیم پرداخت.

## ۴.۲ مدل کردن مشتقات اعتباری تک اسمی با مدل‌های شدت

در این بخش به معرفی مدل شدت می‌پردازیم. از این مدل برای محاسبه‌ی ضرر مورد انتظار در زمان‌های پرداخت اسپرد و با توجه به ارزش اسمی قرارداد استفاده می‌کنیم. سپس، فرمول‌های ارزشیابی CDS

<sup>۱</sup> Cash Flow CDOs

<sup>۲</sup> Market Value CDOs

<sup>۳</sup> Static Transactions

<sup>۴</sup> Dynamic Structures or Managed Structures

تک اسمی مبتنی بر مدل شدت را ارائه می‌کنیم.

## ۱.۴.۲ مدل نکول شدت

مدل‌های نکول شدت، احتمال‌های نکول را به طرز بسیار ساده و مستقل از سایر عوامل بازار مدل می‌کنند. این مدل‌ها که جزو مدل‌های تقلیل‌یافته محسوب می‌شوند، برخلاف مدل‌های ساختاری، نکول را به اطلاعات بنیادی شرکت نسبت نمی‌دهند، بلکه نکول در این مدل بر اساس یک سری اتفاقات خارجی در زمان‌های نامعلوم  $\tau$  روی می‌دهد. مدل‌های تقلیل‌یافته طبیعت تصادفی نکول را به صورت وقوع نکول در طول زمان و با استفاده از فرآیند پواسون بیان می‌کنند. در ادامه ابتدا توزیع پواسون و توزیع نمایی را تعریف می‌کنیم و سپس به معرفی فرآیند پواسون و بالاخره مدل نکول شدت می‌پردازیم.

### تعریف ۴.۱.۲. توزیع پواسون

متغیر تصادفی  $X$  دارای توزیع پواسون با پارامتر مثبت  $\lambda$  ( $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ ) است هرگاه:

$$\mathbb{Q}[X = x] = \exp(-\lambda) \frac{\lambda^x}{x!}, x \in \mathbb{N}_0, \quad (1.2)$$

پس  $\mathbb{Q}[X \leq x]$  برابر خواهد بود با:

$$\mathbb{Q}[X \leq x] = \sum_{i=0}^x \exp(-\lambda) \frac{\lambda^i}{i!}.$$

میانگین و واریانس این متغیر تصادفی عبارتند از:

$$\mathbb{E}[X] = \lambda, \mathbb{V}[X] = \lambda.$$

### تعریف ۴.۲.۲. توزیع نمایی

متغیر تصادفی  $X$  دارای توزیع نمایی با پارامتر مثبت  $\lambda$  ( $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ )، است هرگاه:

$$f(x) = \lambda \exp(-\lambda x), x \geq 0.$$

و تابع توزیع متناظر برابر است با:

$$F(x) = 1 - \exp(-\lambda x), \quad x \geq 0. \quad (2.2)$$

همینطور، میانگین و واریانس متغیر تصادفی با این توزیع عبارتند از:

$$\mathbb{E}(x) = \frac{1}{\lambda}, \quad \mathbb{V}(x) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

اکنون فرآیند شمارشی<sup>۱</sup> و سپس فرآیند پواسون را تعریف کرده و ویژگی‌هایشان را بیان می‌کنیم.

### تعریف ۴.۳.۲. فرآیند شمارشی

فرآیند تصادفی  $X = X(t)_{t \geq 0}$  یک فرآیند شمارشی نامیده می‌شود اگر مسیرهای نمونه‌ی آن از راست پیوسته و دارای حد چپ<sup>۲</sup> باشند و دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی  $T_0 = 0, T_1, T_2, \dots$  وجود داشته باشند که به‌طور تقریباً حتمی<sup>۳</sup> به بینهایت میل کنند و داشته باشیم:

$$X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} I_{(T_k \leq t)}. \quad (3.2)$$

یک فرآیند پواسون همگن حالت خاصی از فرآیند شمارشی است.

### تعریف ۴.۴.۲. فرآیند پواسون

یک فرآیند تصادفی  $X = X(t)_{t \geq 0}$  فرآیند پواسون همگن با شدت  $\lambda > 0$  نامیده می‌شود در صورتی که دارای ویژگی‌های زیر باشد:

۱.  $X$  یک فرآیند شمارشی است.

۲.  $X(0) = 0$  تقریباً حتمی.

۳.  $X$  نمونه‌های مستقل و پایدار دارد.

۴.  $X(t) \sim \mathcal{P}(t\lambda)$ .

<sup>۱</sup> Counting Process

<sup>۲</sup> Cadlag: Continue à Droite, Limite à Gauche

<sup>۳</sup> Almost Surely

در یک فضای مدل‌بندی ریسک اعتباری،  $\mathbb{Q}[X_t = x]$  معادل با احتمال دقیقاً  $x$  نکول در یک بازه‌ی زمانی  $t$  ساله است. متعاقباً میانگین و واریانس یک فرآیند پواسون عبارتند از:

$$\mathbb{E}(X) = \lambda t, \mathbb{V}(X) = \lambda t.$$

احتمال غیر شرطی عدم نکول (احتمال بقاء<sup>۱</sup>) در یک بازه‌ی زمانی  $t$  ساله را می‌توان به آسانی و به ازای  $x = 0$  در (۱.۲) به دست آورد:

$$\mathbb{Q}[X_t = 0] = \exp(-\lambda t). \quad (4.2)$$

همچنین می‌توان احتمال غیر شرطی دقیقاً یک نکول در یک بازه‌ی زمانی  $t$  ساله را با فرض  $x = 1$  در (۱.۲) محاسبه کرد:

$$\mathbb{Q}[X_t = 1] = \lambda t \cdot \exp(-\lambda t). \quad (5.2)$$

در قیمت‌گذاری مشتقات اعتباری، زمان مورد انتظار برای اولین نکول از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. فرض کنید  $\tau$  یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع توزیع  $Q(t)$  باشد که زمان اولین نکول را نشان می‌دهد. برای  $Q(t)$  داریم:

$$Q(t) = \begin{cases} \mathbb{Q}[\tau \leq t] = 1 - \mathbb{Q}[\tau > t], & \text{اگر } t \geq 0 \\ 0, & \text{اگر } t < 0. \end{cases}$$

قابل ذکر است که  $\mathbb{Q}[\tau > t]$  احتمال عدم نکول تا زمان  $t$  است که با (۴.۲) برابر است. لذا، برای  $t \geq 0$  داریم:

$$Q(t) = 1 - \exp(-\lambda t). \quad (6.2)$$

رابطه‌ی اخیر را می‌توان به عنوان احتمال غیر شرطی اولین نکول تا قبل یا در زمان  $t$  تعبیر نمود. تابع چگالی احتمال  $\tau$  به شکل زیر تعریف می‌شود:

<sup>۱</sup> Survival Probability

$$q(t) := \frac{\partial Q(t)}{\partial t} = \lambda \exp(-\lambda t). \quad (7.2)$$

پس زمان اولین نکول دارای توزیع نمایی است، در حالیکه خود نکول‌ها از فرآیند پواسون تبعیت می‌کنند. احتمال بقاء تا زمان  $t$  برابر است با:

$$\mathbb{Q}[\tau > t] = \exp(-\lambda t), t \geq 0. \quad (8.2)$$

نرخ شدت  $\lambda$  را می‌توان به حالت‌های وابسته به زمان و تصادفی نیز تعمیم داد.

## ۵.۲ ارزشیابی CDS تک اسمی

از آنجا که سبد پشتوانه‌ی CDO ترکیبی از CDS تشکیل شده است، ابتدا به قیمت‌گذاری این قرارداد می‌پردازیم. فرض می‌کنیم در قرارداد CDS شرایط زیر حاکم باشد:

- $t_1 < \dots < t_n = T$  زمان‌های پرداخت اسپرد را نشان دهند و  $T$  زمان سررسید باشد.
- $t_0 < t_1$  زمان ارزشیابی است. فرض بر این است که این تاریخ زودتر از تاریخ انعقاد قرارداد نیست. بعبارت دیگر این قرارداد یک قرارداد CDS پیش‌رو<sup>۱</sup> نیست.
- پرداخت صرف CDS در انتهای هر دوره انجام می‌گیرد. یعنی، برای دوره‌ی  $t_{k-1}$  تا  $t_k$  صرف CDS در  $t_k$  پرداخت می‌شود.
- ارزش اسمی قرارداد برابر با ۱ فرض می‌شود.
- اسپرد سالانه<sup>۲</sup> را که مبنای محاسبه‌ی مقادیر صرف CDS است با  $s$  نشان می‌دهیم.

<sup>۱</sup> Forward CDS

<sup>۲</sup> Annual Spread

• طبق آنچه که در بخش پیش بیان شد،  $S(t_0, t) = \exp(-\int_{t_0}^t \lambda(s)ds) = \exp(-\lambda(t - t_0))$ ، احتمال بقاء از  $t_0$  تا  $t$  است.

•  $B(t_0, t_i)$  عامل تنزیل<sup>۱</sup> است. همچنین نرخ بازیافت را با  $R$  نشان می‌دهیم.

با این مفروضات، PremiumLeg قرارداد CDS چنین محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} \text{PremiumLegCDS}(t_0, (t_i)_{i=1, \dots, n}, s, \lambda) \\ &= \sum_{i=1}^n \Delta t_i \cdot s \cdot S(t_0, t_i) \cdot B(t_0, t_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \Delta t_i \cdot s \cdot \exp(-\lambda(t_i - t_0)) \cdot B(t_0, t_i) \end{aligned}$$

که در آن  $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ .

پرداخت حمایت بلافاصله پس از هر نکول انجام می‌گیرد. اما برای اجتناب از انتگرال‌گیری، فرض می‌کنیم که حمایت تنها در زمان‌های  $t_i$  پرداخت می‌شود. مبلغ پرداختی معادل حمایت با احتمال وقوع نکول در دوره‌ی زمانی قبل، در زمان  $t_i$  برابر با  $(1 - R)$  است. لذا ارزش ProtectionLeg<sup>۲</sup> قرارداد به شکل زیر است:

$$\begin{aligned} \text{ProtectionLegCDS}(t_0, (t_i)_{i=1, \dots, n}, R, \lambda) \\ &= \int_{t_0}^{t_n} (1 - R) B(t_0, s) d(1 - S(t_0, s)) \quad (9.2) \\ &= \sum_{i=1}^n (1 - R) (S(t_0, t_{i-1}) - S(t_0, t_i)) \cdot B(t_0, t_i) \\ &= \sum_{i=1}^n (1 - R) (\exp(-\lambda(t_{i-1} - t_0)) - \exp(-\lambda(t_i - t_0))) \cdot B(t_0, t_i). \end{aligned}$$

<sup>۱</sup> Discount Factor

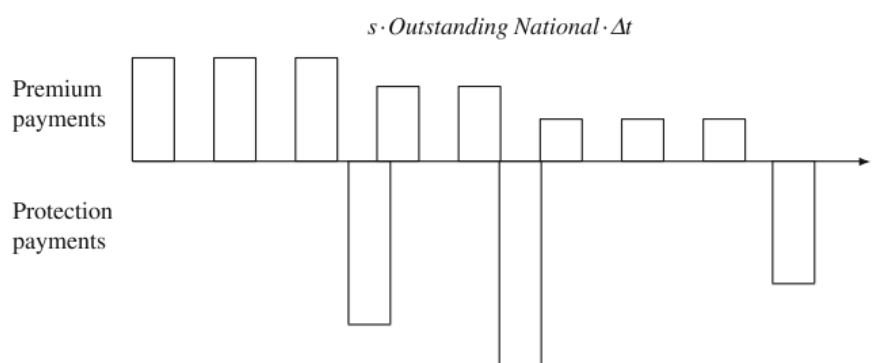
<sup>۲</sup> ProtectionLeg در زمان  $t_k$  برابر است با زیان کل (از ابتدا تا کنون) برشی که در طول مدت دوره‌ی قبل دچار نکول شده است.

لذا، ارزش CDS از منظر فروشنده‌ی حمایت برابر خواهد بود با:

$$\begin{aligned} & \text{PVCDS}(t_0, (t_i)_{i=1, \dots, n}, s, R, \lambda) \\ &= \text{PremiumLegCDS}(t_0, (t_i)_{i=1, \dots, n}, s, \lambda) \\ & \quad - \text{ProtectionLegCDS}(t_0, (t_i)_{i=1, \dots, n}, R, \lambda) \end{aligned} \quad (10.2)$$

## ۶.۲ چارچوب کلی ارزشیابی CDO ترکیبی

در این بخش چارچوب اولیه‌ی قیمت‌گذاری CDOهای ترکیبی را بیان می‌کنیم. برای این منظور یک CDO ترکیبی را با سبد پشتوانه‌ای متشکل از سوآپ نکول اعتباری در نظر می‌گیریم. فروشنده‌ی حمایت در برشی از یک CDO ترکیبی از خریدار حمایت، پرداخت‌های اسپرد را به طور مرتب (معمولاً فصلی) دریافت می‌کند. در ازاء این دریافتی، فروشنده‌ی حمایت در صورت وقوع نکول در برش مربوط به خود متعهد به جبران ضرر است. در شکل ۱۰.۲ مفهوم پرداخت‌های Premium و Protection برای برشی از CDO نشان داده شده است.



شکل ۱۰.۲: پرداخت‌های Premium و Protection برشی از CDO

اساساً قیمت‌گذاری یک برش CDO ترکیبی که بازه‌ی  $K_1$  تا  $K_2$  ( $0 \leq K_1 < K_2 \leq 1$ )، را پوشش

می‌دهد، کاملاً منطبق بر روش قیمت‌گذاری سواپ نکول اعتباری است. فرض کنیم

$$t_1 < \dots < t_n = T \quad (11.2)$$

تاریخ‌های پرداخت اسپرد را نشان دهد و  $T$  زمان سررسید CDO ترکیبی بوده و  $t_0 < t_1$  هم زمان قیمت‌گذاری قرارداد باشد. همچنین برای سادگی فرض می‌کنیم در هر دوره (انتهای دوره) پرداخت صرف با توجه به ارزش اسمی قرارداد در آن لحظه صورت می‌پذیرد. در ادامه، نمادگذاری‌های زیر را بکار می‌گیریم:

- اسپرد سالانه را با  $s$  نشان می‌دهیم.
  - نشان‌دهنده‌ی ضرر برش  $(K_1, K_2)$  تا زمان  $t$  است. بازایفت‌ها نیز در محاسبه‌ی ضرر لحاظ شده است.
  - نرخ بهره  $r(t)$  مستقل از ضرر برش در نظر گرفته می‌شود.
- با فرض اندازه‌ی ریسک-خنثی  $\mathbb{Q}$ ، امید ریاضی ضرر برش  $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[L_{(K_1, K_2)}^R(t)]$  را با  $EL_{(K_1, K_2)}^R(t)$  و عامل تنزیل  $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\exp - \int_{t_0}^{t_i} r(u) du]$  را با  $B(t_0, t_i)$  نشان می‌دهیم.

ارزش PremiumLeg<sup>۱</sup> برش معادل است با ارزش فعلی پرداخت‌های اسپرد مورد انتظار:

$$\begin{aligned} \text{PremiumLeg} &= \sum_{i=1}^n \Delta t_i \cdot s \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ \left( 1 - L_{(K_1, K_2)}^R(t_i) \right) \exp - \int_{t_0}^{t_i} r(u) du \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \Delta t_i \cdot s \cdot \left( 1 - EL_{(K_1, K_2)}^R(t_i) \right) \cdot B(t_0, t_i) \end{aligned} \quad (12.2)$$

که در آن  $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ .

همانطور که در بخش ارزشیابی CDS تک اسمی گفتیم، برای اجتناب از انتگرال‌گیری، زمان‌های

<sup>۱</sup> PremiumLeg به صورت ارزش فعلی پرداخت‌های صرف مورد انتظار از جانب خریدار حمایت محاسبه می‌شود.

پرداخت حمایت را گسسته و برابر با زمان‌های پرداخت اسپرد در نظر می‌گیریم. لذا ProtectionLeg برش به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} \text{ProtectionLeg} &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ \int_{t_0}^{t_n} \exp - \int_{t_0}^s r(u) du dL_{(K_1, K_2)}^R(s) \right] \\ &\approx \sum_{i=1}^n \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ \exp - \int_{t_0}^{t_i} r(u) du (L_{(K_1, K_2)}^R(t_i) - L_{(K_1, K_2)}^R(t_{i-1})) \right] \\ &= \sum_{i=1}^n (EL_{(K_1, K_2)}^R(t_i) - EL_{(K_1, K_2)}^R(t_{i-1})) \cdot B(t_0, t_i). \end{aligned} \quad (13.2)$$

ویژگی مهم CDOها این است که هنگام انتشار برش‌ها اسپرد برش به اندازه‌ای است که PremiumLeg و ProtectionLeg در آن لحظه دارای ارزش یکسان باشند و این امر به ما کمک می‌کند بتوانیم اسپرد یک CDO ترکیبی را محاسبه کنیم:

$$s = \frac{\sum_{i=1}^n (EL_{(K_1, K_2)}^R(t_i) - EL_{(K_1, K_2)}^R(t_{i-1})) \cdot B(t_0, t_i)}{\sum_{i=1}^n \Delta t_i \cdot s \cdot (1 - EL_{(K_1, K_2)}^R(t_i)) \cdot B(t_0, t_i)}. \quad (14.2)$$

رابطه‌های بدست آمده‌ی اخیر بوضوح بیانگر این هستند که برای قیمت‌گذاری CDO دانستن توزیع ضرر یک برش یا کل سبد الزامی است.

با فرض ضرر سبد  $L_{\text{portfolio}}(t)$  معلوم، ضرر برش درصدی متناظر برابر خواهد بود با:

$$L_{(K_1, K_2)}^R(t) = \frac{(\min(L_{\text{portfolio}}^R(t), K_2) - K_1)^+}{K_2 - K_1}. \quad (15.2)$$

فرض کنید توزیع گسسته‌ی ضرر سبد تا زمان  $t$  پس از لحاظ کردن بازیافت معلوم باشد و  $m$  مقدار ممکن

برای آن موجود باشد و  $L_{\text{portfolio}}^R(t) = L_{\text{portfolio}}^{R,k}(t)$  با مقادیر احتمال ریسک-خنثی  $F_{k=1, \dots, m}^R(t, k)$ . آنگاه برش  $(K_1 - K_2)$  متحمل ضرر درصدی برابر با  $\frac{(\min(L_{\text{portfolio}}^{R,k}(t), K_2) - K_1)^+}{K_2 - K_1}$  با احتمال  $F^R(t, k)$  خواهد بود و امید ریاضی ضرر برش تا زمان  $t$  به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} EL_{(K_1, K_2)}^R(t) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ \frac{(\min(L_{\text{portfolio}}^R(t), K_2) - K_1)^+}{K_2 - K_1} \right] \\ &= \frac{1}{K_2 - K_1} \sum_{k=1}^m (\min(L_{\text{portfolio}}^{R,k}(t), K_2) - K_1)^+ \cdot F^R(t, k). \end{aligned} \quad (16.2)$$

برای مواردی که تابع توزیع ضرر  $F^R(t, x)$  پیوسته است، با فرض اینکه ضرر سبد پس از لحاظ کردن بازایات‌ها معلوم باشد، ضرر درصدی مورد انتظار  $(K_1 - K_2)$  به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$EL_{(K_1, K_2)}^R(t) = \frac{1}{K_2 - K_1} \int_{K_1}^1 (\min(x, K_2) - K_1) dF^R(t, x). \quad (17.2)$$

گزاره ۶.۱.۲. امید ریاضی ضرر برش را به شکل زیر نیز می‌توان نوشت:

$$EL_{(K_1, K_2)}^R(t) = \frac{1}{K_2 - K_1} \left( \int_{K_1}^1 (x - K_1) dF^R(t, x) - \int_{K_2}^1 (x - K_2) dF^R(t, x) \right). \quad (18.2)$$

اثبات در پیوست آ.۱ آمده است.

بنابراین مسئله‌ی اساسی در قیمت‌گذاری یک برش CDO پیدا کردن توزیع ضرر سبد پیشنهادی است. در فصل بعدی، مدل تک عاملی کاپولای گاوسی برای نکول‌های هم‌بسته را معرفی می‌کنیم. همچنین روش‌های تقریب تحلیلی و نیمه-تحلیلی محاسبه‌ی توزیع ضرر سبد و امید ریاضی ضرر برش را بیان می‌کنیم.

## فصل سوم

### مدل تک عاملی کاپولای گاوسی<sup>۱</sup>

#### ۱.۳ معرفی

این بخش را با معرفی مدل تک عاملی کاپولای گاوسی که از معروفترین روش‌های مدل کردن نکول‌های هم‌بسته به شمار می‌رود، آغاز می‌کنیم.

متغیر تصادفی  $T_i$ ، زمان مانده تا نکول<sup>۲</sup> شرکت  $i$  ام را نشان می‌دهد. برای مدل کردن یک سبد اعتباری، نیاز به پیدا کردن توزیع توأم زمان‌های مانده تا نکول داریم. از آنجا که  $T_i$ ها توزیع نمایی دارند و نرمال نیستند، نمی‌توان از یک توزیع چندمتغیره‌ی نرمال برای مدل کردنشان استفاده کرد. راه‌حل پیشنهادی، رویکرد کاپولای گاوسی است که امکان مدل کردن ساختار همبستگی سبد را به‌طور مجزا از توزیع‌های حاشیه‌ای فراهم می‌سازد. این امر از طریق تبدیل صدک به صدک<sup>۳</sup> زمان‌های مانده تا نکول به متغیرهای

---

<sup>۱</sup> One Factor Gaussian Copula Model

<sup>۲</sup> Time to Default

<sup>۳</sup> Percentile-to-Percentile Transformation

$A_i$  میسر می شود:

$$A_i = \Phi^{-1}(Q_i(\tau_i)), \quad (1.3)$$

که  $Q_i$  در آن تابع توزیع زمان مانده تا نکول  $\tau_i$  است و متغیرهای جدید  $A_i$  دارای توزیع نرمال استاندارد هستند. اکنون می توانیم فرض کنیم توزیع توأم  $A_i$  ها،  $i = 1, \dots, m$ ، توزیع چندمتغیره‌ی نرمال استاندارد با ماتریس همبستگی  $\Sigma$  است. به این ترتیب ساختار همبستگی زمان‌های نکول از طریق ساختار همبستگی متغیرهای جدید تعیین می شود.  $A_i$  را می توان به عنوان بازده دارایی استاندارد شده در نظر گرفت. چرا که بازده دارایی (تقریباً) دارای توزیع نرمال است.

با بکارگیری عامل‌های ریسکی، تعریف و به‌ویژه کالیبراسیون ماتریس همبستگی ساده‌تر می شود. لذا به‌جای تعریف همبستگی دو به دو بین  $A_i$  و  $A_j$  برای هر جفت  $i$  و  $j$ ، می توان همبستگی را با استفاده از یک عامل مشترک تعریف کرد.

### تعریف ۱.۱.۳. مدل تک عاملی کاپولای گاوسی

سبدی از  $m$  ابزار مالی اعتباری را در نظر بگیرید. فرض کنیم بازده دارایی استاندارد برای دارایی  $i$  ام تا زمان  $t$  به شکل زیر باشد:

$$A_i(t) = a_i M(t) + \sqrt{1 - a_i^2} X_i(t), \quad (2.3)$$

که در آن  $M(t)$  و  $X_i(t)$ ،  $i = 1, \dots, m$ ، متغیرهای تصادفی نرمال استاندارد مستقل از هم هستند. تحت این مدل کاپولا، متغیر  $A_i$  با یک تبدیل صدک به صدک به متغیر  $\tau_i$  تبدیل می شود. لذا دارایی  $i$  ام قبل از زمان  $t$  نکول می کند در صورتی که:

$$\Phi(A_i(t)) \leq Q_i(t), \quad (3.3)$$

یا به‌طور معادل

$$A_i(t) \leq \Phi^{-1}(Q_i(t)) =: C_i(t), \quad (4.3)$$

که  $Q_i(t)$  در آن احتمال نکول دارایی  $i$  ام قبل از زمان  $t$  است:

$$Q_i(t) = \mathbb{Q}[\tau_i \leq t].$$

قابل ذکر است که احتمال‌های ریسک-خشی در این مسئله، از قیمت‌های بازاری ابزارهای مالی اعتباری (مثل اوراق قرضه یا CDO) قابل استنباط هستند.

عامل  $M$  را می‌توان عامل بازاری مشترک سیستماتیک<sup>۱</sup> و  $X_i$ ها را عامل‌های غیرسیستماتیک<sup>۲</sup> یا شرکتی در نظر گرفت. همبستگی بین بازده دارایی‌های  $i$  و  $j$  برابر با  $a_i a_j$  است. مشروط بر عامل  $M$ ، بازده‌ها از هم مستقل هستند.

بر اساس (۲.۳) مؤسسه‌ی مرجع  $i$  ام تا زمان  $t$  نکول می‌کند اگر:

$$X_i(t) \leq \frac{C_i(t) - a_i M(t)}{\sqrt{1 - a_i^2}}$$

احتمال نکول تا زمان  $t$ ، مشروط بر عامل مشترک  $M(t)$  برابر است با:

$$p_i(t | M) = \Phi \left( \frac{C_i(t) - a_i M(t)}{\sqrt{1 - a_i^2}} \right). \quad (5.3)$$

## ۲.۳ توزیع ضرر سبد وسیع همگن تحت مدل تک عاملی کاپولای

### گاوسی

مدل واسیچک<sup>۳</sup>، در واقع حالت مجانبی مدل تک عاملی گاوسی است که ایده‌ی اصلی آن تقریب زدن سبد اعتباری توسط یک سبد وسیع همگن مناسب است. با استفاده از یک چهارچوب استقلال شرطی، واسیچک یک فرم تحلیلی حدی برای ضرر سبد ارائه می‌کند.

معرفی فرض سبد وسیع همگن<sup>۴</sup>، امکان حل مسئله‌ی توزیع ضرر سبد و امید ریاضی ضرر برش را در

<sup>۱</sup> Factor Market Common Systematic

<sup>۲</sup> Factors Idiosyncratic

<sup>۳</sup> Model Vasicek

<sup>۴</sup> Large Homogeneous Portfolio Assumption

یک چهارچوب تحلیلی فراهم می‌کند و به این ترتیب از دشواری مسئله کاسته شده و به قیمت گذاری CDOهای ترکیبی سرعت می‌بخشد.

### تعریف ۲.۱.۳. سبد وسیع همگن (LHP)

سبد وسیع همگن، سبدي است که از تعداد به اندازه‌ی کافی زیاد مؤسسه‌های مرجع با یک سری ویژگی یکسان به شرح زیر تشکیل شده باشد:

- وزن یکسان در سبد
- احتمال نکول  $Q(t)$  یکسان
- نرخ بازیافت  $R$  یکسان
- ضریب همبستگی یکسان  $a$  با عامل مشترک بازار

بنا به این فرض، آستانه‌ی نکول  $C(t)$  نیز برای تمام مؤسسه‌های مرجع سبد، یکسان خواهد بود و احتمال نکول مشروط بر  $M$  برابر خواهد بود با:

$$p(t | M) = \Phi \left( \frac{C(t) - aM(t)}{\sqrt{1 - a^2}} \right). \quad (6.3)$$

پیش از آنکه تابع توزیع ضرر سبد را با توجه به مفروضات گفته شده به دست آوریم، نتیجه‌ی زیر را بیان می‌کنیم.

گزاره ۲.۲.۳. برای هر  $p$  و  $x$  در  $(0, 1]$  داریم:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\lfloor mx \rfloor} \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k} = \begin{cases} 0, & \text{اگر } x < p, \\ 1, & \text{اگر } x > p. \end{cases}$$

اثبات در پیوست ۲.آ آمده است.

قضیه ۲.۳.۳. با فرض بازیافت صفر برای همه‌ی دارایی‌های داخل سبد، توزیع ضرر یک سبد بی‌نهایت وسیع همگن که بازده دارایی در آن در یک مدل تک عاملی کاپولای گاوسی به شکل:

$$A_i(t) = a_i M(t) + \sqrt{1 - a_i^2} X_i(t), \quad (7.3)$$

صدق می‌کند که در آن  $M(t)$  و  $X_i(t)$ ،  $i = 1, \dots, m$ ، متغیرهای تصادفی نرمال استاندارد مستقل از هم هستند، به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$F_\infty(t, x) = \Phi \left( \frac{\sqrt{1 - a^2} \Phi^{-1}(x) - C(t)}{a} \right), \quad (8.3)$$

که  $x \in [0, 1]$  ضرر درصدی سبد است.

اثبات. یک سبد همگن متشکل از  $m$  مؤسسه‌ی مرجع را در نظر بگیرید. آنگاه ضرر درصدی سبد، مقادیر  $\binom{m}{k}$  را با احتمال‌های زیر می‌گیرد:

$$\begin{aligned} & \mathbb{Q} \left[ L(t) = \frac{k}{m} \mid M(t) \right] \\ &= \binom{m}{k} p(t \mid M)^k (1 - p(t \mid M))^{m-k} \\ &= \binom{m}{k} \Phi \left( \frac{C(t) - aM(t)}{\sqrt{1 - a^2}} \right)^k \left( 1 - \Phi \left( \frac{C(t) - aM(t)}{\sqrt{1 - a^2}} \right) \right)^{m-k}. \end{aligned} \quad (9.3)$$

لذا با توجه به استقلال شرطی و دو حالت محتمل، ضرر دارای توزیع شرطی دوجمله‌ای خواهد بود. پس توزیع غیر شرطی ضرر با انتگرال‌گیری از (9.3) با توجه به توزیع عامل مشترک  $M(t)$  به دست می‌آید:

$$\mathbb{Q} \left[ L(t) = \frac{k}{m} \right] = \int_{-\infty}^{\infty} \binom{m}{k} \Phi \left( \frac{C(t) - au}{\sqrt{1 - a^2}} \right)^k \left( 1 - \Phi \left( \frac{C(t) - au}{\sqrt{1 - a^2}} \right) \right)^{m-k} d\Phi(u). \quad (10.3)$$

حال احتمال تجمعی ضرر درصدی سبد وقتی که بیشتر از  $x$  ( $x \in [0, 1]$ )، نباشد محاسبه می‌کنیم:

$$F_m(t, x) = \sum_{k=0}^{\lfloor mx \rfloor} \mathbb{Q} \left[ L(t) = \frac{k}{m} \right].$$

با جایگزینی  $s = \frac{C(t) - au}{\sqrt{1 - a^2}}$  خواهیم داشت:

$$u = \frac{C(t) - \sqrt{1 - a^2} \Phi^{-1}(s)}{a}$$

و

$$\Phi(u) = \Phi\left(\frac{C(t) - \sqrt{1 - a^2} \Phi^{-1}(s)}{a}\right).$$

لذا

$$d\Phi(u) = d\Phi\left(\frac{C(t) - \sqrt{1 - a^2} \Phi^{-1}(s)}{a}\right),$$

از آنجا که حدود انتگرالگیری جدید از ۱ تا ۰ است داریم:

$$-\infty \leq u \leq \infty \Leftrightarrow \infty \geq \frac{C(t) - au}{\sqrt{1 - a^2}} \geq -\infty \Leftrightarrow 1 \geq s \geq 0.$$

سپس با توجه به (۱۰.۳)، برای  $F_m(t, x)$  به دست می‌آوریم:

$$F_m(t, x) = - \int_0^1 \sum_{k=0}^{[mx]} \binom{m}{k} s^k (1-s)^{m-k} d\Phi\left(\frac{C(t) - \sqrt{1 - a^2} \Phi^{-1}(s)}{a}\right). \quad (11.3)$$

اگر از رابطه‌ی به دست آمده حد بگیریم، تابع توزیع ضرر یک سبد بی‌نهایت وسیع چنین محاسبه خواهد

شد:

$$F_\infty(t, x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left[ - \int_0^1 \sum_{k=0}^{[mx]} \binom{m}{k} s^k (1-s)^{m-k} d\Phi\left(\frac{C(t) - \sqrt{1 - a^2} \Phi^{-1}(s)}{a}\right) \right]. \quad (12.3)$$

با توجه به اینکه تابع تحت انتگرال کراندار است خواهیم داشت:

$$\sum_{k=0}^{[mx]} \binom{m}{k} s^k (1-s)^{m-k} \leq \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} s^k (1-s)^{m-k} = 1 \quad (13.3)$$

و همگرایی نقطه به نقطه آن به دست می آید و با توجه به لم موجود در پیوست آ در [۲۳] حد از انتگرال عبور می کند. پس با استفاده از گزاره ۱.۲.۳ تابع توزیع تجمعی ضرر یک سبد وسیع را به شکل زیر به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} F_{\infty}(t, x) &= - \int_0^x d\Phi \left( \frac{C(t) - \sqrt{1 - a^2} \Phi^{-1}(s)}{a} \right) \\ &= - \Phi \left( \frac{C(t) - \sqrt{1 - a^2} \Phi^{-1}(x)}{a} \right) + 1. \end{aligned} \quad (14.3)$$

با توجه به تقارن توزیع گاوسی، رابطه ی اخیر را به شکل زیر نیز می توان نوشت:

$$F_{\infty}(t, x) = \left( \frac{\sqrt{1 - a^2} \Phi^{-1}(x) - C(t)}{a} \right). \quad (15.3)$$

□

رابطه ی اخیر به توزیع واسیچک معروف است.

## ۳.۳ توزیع ضرر سبد وسیع همگن تحت یک مدل کاپولای تک

### عاملی کلی

عبارت تحلیلی به دست آمده برای تابع توزیع سبد وسیع همگن، تحت مدل کاپولای تک عاملی گاوسی، دستاورد اصلی این دسته از مدل های تحلیلی برای مشتقات اعتباری مبتنی بر سبد است. اما این نتیجه برای توزیع های غیر گاوسی نیز معتبر است. لذا در این بخش تعمیم مدل مذکور را بیان می کنیم.

**قضیه ۳.۱.۳.** یک سبد وسیع همگن نامتناهی را در نظر بگیرید، بطوریکه بازده دارایی در آن از مدل کاپولای تک عاملی تبعیت کند:

$$A_i(t) = aM(t) + \sqrt{1 - a^2} X_i(t). \quad (16.3)$$

حال اگر  $F_M(t, x)$  تابع توزیع  $M(t)$ ،  $F_X(t, x)$  تابع توزیع  $X_i(t)$  و  $F_A(t, x)$  تابع توزیع  $A_i(t)$  باشد و  $M(t)$  و  $X_i(t)$  از هم مستقل باشند و بعلاوه برای سادگی فرض کنیم نرخ بازیافت برای همه‌ی دارایی‌های سبد برابر با صفر باشد، آنگاه توزیع ضرر سبد عبارت است از:

$$F_\infty(t, x) = 1 - F_M \left( t, \frac{C(t) - \sqrt{1 - a^2} F_X^{-1}(t, x)}{a} \right), \quad (17.3)$$

که در آن  $x \in [0, 1]$  ضرر درصدی سبد،  $C(t) = F_A^{-1}(t, Q(t))$  و  $Q(t)$  احتمال ریسک-خشی نکول یک دارایی در سبد است.

اثبات دقیقاً مشابه با حالتی است که کاپولای گاوسی در مدل به کار گرفته شود. با این تفاوت که تابع‌های توزیع، کلی و غیرگاوسی هستند.

## ۴.۳ فرم تحلیلی امید ریاضی ضرر برش تحت مدل واسیچک

در مدل واسیچک، حل تحلیلی انتگرال‌های رابطه‌ی (۱۸.۲) میسر است.

لم ۴.۱.۳. در مدل واسیچک، امید ریاضی ضرر برش میان  $(K_1, K_2)$  با فرض بازیافت صفر در زمان  $t$  برابر است با:

$$EL_{(K_1, K_2)}(t) = \frac{\Phi_2(-\Phi^{-1}(K_1), C(t), \rho) - \Phi_2(-\Phi^{-1}(K_2), C(t), \rho)}{K_2 - K_1},$$

که  $\Phi_2$  در آن تابع توزیع نرمال دو متغیره است و همینطور ماتریس کوواریانس عبارت است از:

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{1 - a^2} \\ -\sqrt{1 - a^2} & 1 \end{pmatrix}.$$

اثبات در پیوست ۳.آ آمده است.

### ۵.۳ امید ریاضی ضرر برش سبد با فرض بازیافت ناصفر

اکنون باز می‌گردیم به سبد وسیع همگن با نرخ بازیافت ناصفر. برای  $x \in [0, 1]$  که بیانگر درصدی از دارایی‌هاست که دچار نکول شده‌اند، ضرر سبد معادل با  $(1-R)x$  است. آنگاه ضرر برش مقدم با نقطه‌ی حد پایین  $K$  برابر است با:

$$[(1-R)x - K]^+.$$

لذا امید ریاضی ضرر برش  $(K, 1)$  به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \int_0^1 [(1-R)x - K]^+ dF_\infty(t, x) &= \int_{\frac{K}{1-R}}^1 [(1-R)x - K] dF_\infty(t, x) \\ &= (1-R) \int_{\frac{K}{1-R}}^1 \left[ x - \frac{K}{1-R} \right] dF_\infty(t, x). \end{aligned}$$

به این ترتیب کل ضرر برش سهام  $K$  تنها در صورتی روی می‌دهد که به میزان  $\frac{K}{1-R}$  دارایی دچار نکول شود.

امید ریاضی ضرر یک برش میانی  $(K_1, K_2)$  تحت فرض بازیافت غیر صفر و با توجه به گزاره‌ی (۶.۱.۲) برابر خواهد بود با:

$$\begin{aligned} EL_{(K_1, K_2)}^R(t) &= \frac{1}{K_2 - K_1} \left( \int_{\frac{K_1}{1-R}}^1 [(1-R)x - K_1] dF_\infty(t, x) - \int_{\frac{K_2}{1-R}}^1 [(1-R)x - K_2] dF_\infty(t, x) \right) \\ &= \frac{1-R}{K_2 - K_1} \left( \int_{\frac{K_1}{1-R}}^1 \left[ x - \frac{K_1}{1-R} \right] dF_\infty(t, x) - \int_{\frac{K_2}{1-R}}^1 \left[ x - \frac{K_2}{1-R} \right] dF_\infty(t, x) \right) \\ &= EL_{\left( \frac{K_1}{1-R}, \frac{K_2}{1-R} \right)}(t). \end{aligned} \tag{۱۸.۳}$$

### ۱.۵.۳ الگوریتم تغییرات اسپرد یک برش CDO ترکیبی نسبت به تغییرات پارامتر

#### همبستگی تحت مدل کاپولای گاوسی

الگوریتم زیر، روشی برای محاسبه‌ی تغییرات اسپرد یک برش CDO ترکیبی نسبت به تغییرات پارامتر همبستگی ارائه می‌دهد.

---

الگوریتم ۱ تغییرات اسپرد یک برش CDO ترکیبی نسبت به تغییرات پارامتر همبستگی تحت مدل کاپولای گاوسی

---

**ورودی:**  $TM$  = زمان سررسید،  $K_1$  = نقطه‌ی حد پائین،  $K_2$  = نقطه‌ی حد بالا،  $r$  = نرخ بهره‌ی بدون ریسک،  $\lambda$  = پارامتر شدت در فرآیند پواسون،  $\Delta t$  = بازه‌ی زمانی بین زمان‌های پرداخت.

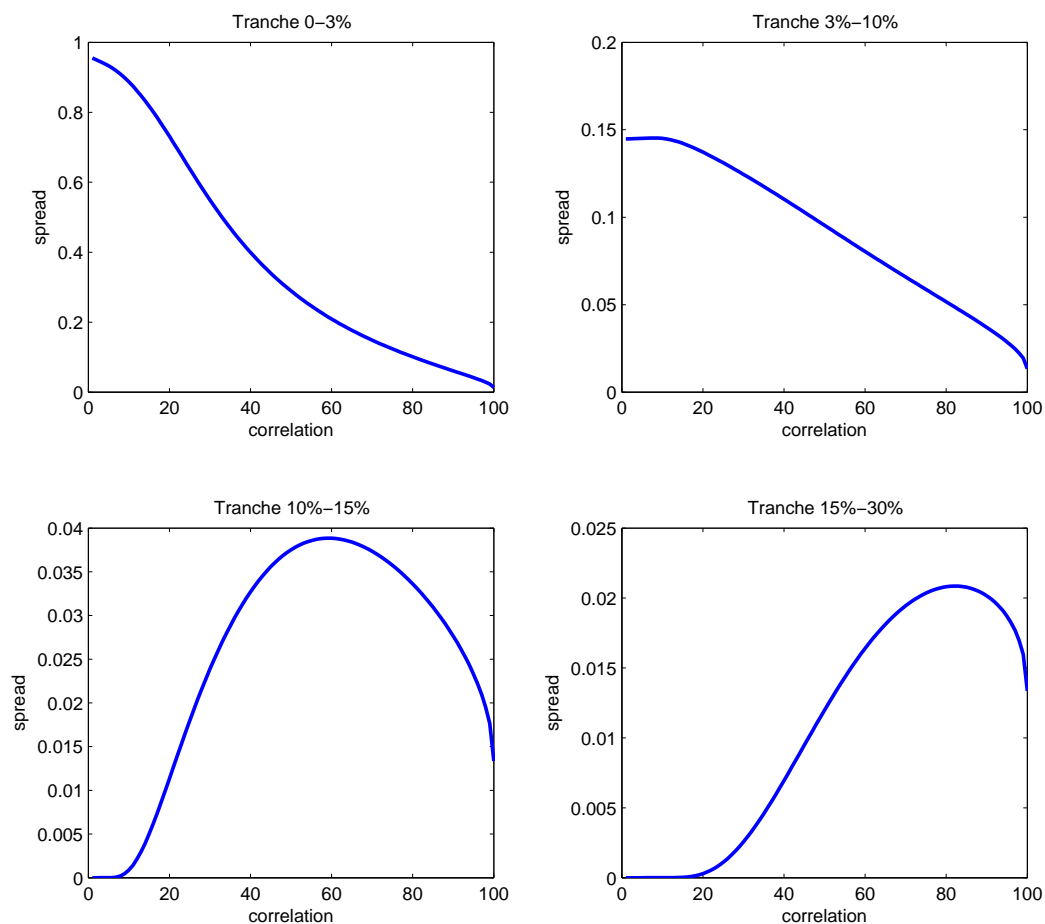
**خروجی:**  $s$  = اسپرد برش.

```

do  $a = 1$  for  $100$  do
   $\rho = [1 - \sqrt{(1 - (0.01a)^2)}; -\sqrt{(1 - (0.01a)^2)}]$  قرار دهید
   $S_1$  = مقدار تابع چگالی معکوس نرمال در  $K_1$  قرار دهید
   $S_2$  = مقدار تابع چگالی معکوس نرمال در  $K_2$  قرار دهید
  do  $i = 1$  for  $TM$ 
     $Q(i)$  = مقدار تابع توزیع تجمعی دو متغیره‌ی نمایی در  $(\Delta t.i, 1/\lambda)$  قرار دهید
     $C(i)$  = مقدار تابع چگالی معکوس نرمال در  $Q(i)$  قرار دهید
     $EL(i) = 1/(K_2 - K_1)$  . (مقدار تابع توزیع تجمعی چند متغیره‌ی نرمال در  $([S_2, C(i)], [0, 0], \rho)$ ) قرار دهید
     $Dis(i) = \exp(-r.\Delta t.i)$  قرار دهید
     $PremiumL + (0.05\Delta t).(1 - EL(i))Dis(i)$  = مقدار  $PremiumLeg$  در زمان پرداخت  $i$  ام.
  for end
   $A$  = بردار حاصل از تفاضل امید ریاضی هر دو مؤلفه‌ی متوالی از بردار  $EL$  قرار دهید
   $ProtectionL$  = مجموع  $(diag(Dis(2 : end))A')$  مقدار  $ProtectionLeg$ 
   $s(a) = ProtectionL/(PremiumL/0.05)$ 
for end
قرار دهید  $a = 1 : 100$ 
plot( $a, s$ ) نمودار تغییرات اسپرد  $s$  نسبت به تغییرات پارامتر همبستگی  $a$  را نمایش دهید.
  
```

---

نتایج الگوریتم ۱ به ازای مقادیر مختلف پارامتر همبستگی و برای برش‌های میانی در شکل ۱.۳ ارائه شده است.



شکل ۱.۳: تغییرات اسپرد برش‌های مؤخر و میانی CDO ترکیبی نسبت به تغییرات پارامتر همبستگی تحت مدل کاپولای گاوسی

## ۶.۳ لبخند همبستگی<sup>۱</sup>

مدل کاپولای گاوسی تک عاملی تحت فرض سبد وسیع همگن به دلیل سهولتی که در محاسبات فراهم می‌کند، سریعاً به یک روش استاندارد در بازار تبدیل شد. اما با گذشت زمان، ایرادهایی اساسی به این مدل وارد شده است.

همانطور که در بخش‌های قبل دیدیم، قیمت یک برش CDO تابعی از همبستگی نکول دارایی‌های سبد پشتوانه است. پیش از آنکه شاخص‌های CDS برش‌بندی شده‌ی استاندارد<sup>۲</sup> در بازار عرضه شوند و از قابلیت نقدشوندگی برخوردار شوند، در محاسبات از همبستگی تاریخی یا همبستگی بازده دارایی استفاده می‌شد. اخیراً از وقتی که قیمت‌های بازاری CDOهای ترکیبی در بازار قابل مشاهده هستند، همبستگی ضمنی<sup>۳</sup> بازار کاربرد بیشتری نسبت به همبستگی‌های مزبور پیدا کرده است.

با برآزش مدل کاپولای گاوسی به قیمت‌های بازاری، پدیده‌ای به نام لبخند همبستگی رخ می‌دهد. نحوه‌ی برآزش به این صورت است که توزیع‌های حاشیه‌ای نکول، با استفاده از مدل شدت نکول ثابت به دست می‌آید و پارامتر شدت  $\lambda$  برای سبد وسیع همگن، با توجه به اسپرد میانگین CDS تخمین زده می‌شود. با فرض نرخ بازیافت ثابت و اینکه پارامتر همبستگی را طوری در نظر بگیریم که مدل منطبق بر قیمت برش سهام باشد، برش‌های دیگر بر اساس مقدار به دست آمده برای همبستگی ارزشیابی می‌شوند. نتیجه حاکی از آن است که مدل کاپولای گاوسی برای برش‌های میانی، قیمتی بیش از قیمت واقعی آن‌ها را نتیجه می‌دهد و برای برش مقدم مقداری کمتر از مقدار واقعی به دست می‌دهد.

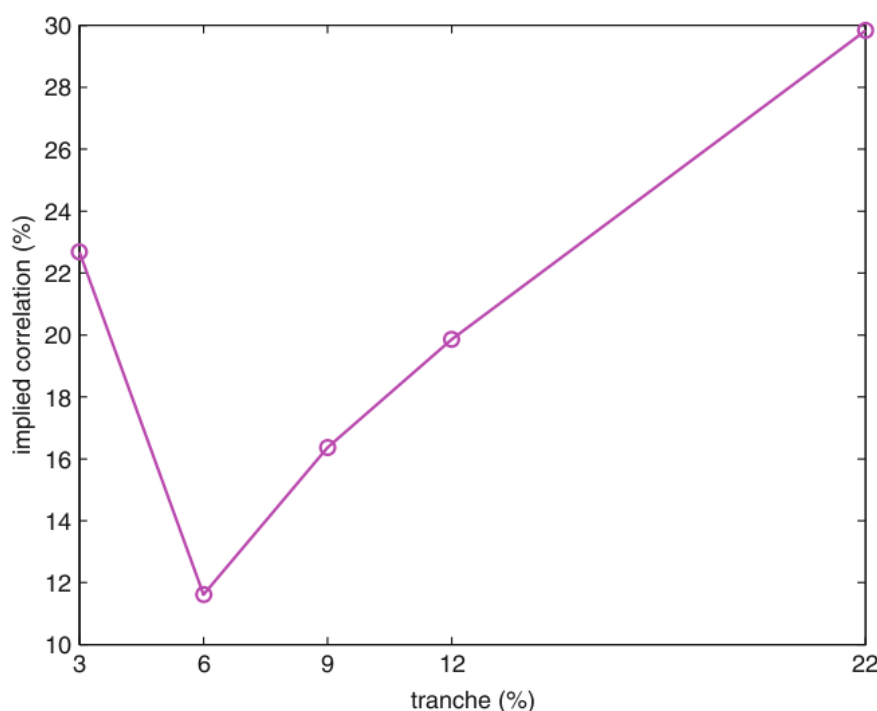
این اتفاق بیانگر این است که مدل کاپولای گاوسی قادر به بیان صحیح ساختار همبستگی ضمنی بازار نیست. در واقع این چیزی است که می‌شد انتظارش را داشت. چون مدلی با تنها یک پارامتر همبستگی، بعید به نظر می‌رسد بتواند یک ساختار همبستگی دقیقاً منطبق بر ساختار همبستگی سبدي با ۱۲۵ دارایی

<sup>۱</sup> Correlation Smile

<sup>۲</sup> Standard Tranch CDS Indices

<sup>۳</sup> Implied Correlation

مختلف را داشته باشد. شکل ۲.۳ این پدیده را نشان می‌دهد. رهیافت نخست برای حل این مشکل،



شکل ۲.۳: لبخند همبستگی

به دست آوردن همبستگی ضمنی برای تک تک برش‌هاست. به این ترتیب که رابطه‌ی مربوط به ارزش

فعلی برش  $(K_1, K_2)$  را با توجه به ProtectionLeg و PremiumLeg به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}
 & PV(K_1, K_2, S_{(K_1, K_2)}, a_{(K_1, K_2)}) \\
 &= U_{(K_1, K_2)} + \sum_{i=1}^n \Delta t_i \cdot S_{(K_1, K_2)} \cdot (1 - EL_{K_1, K_2}^R(t_i)) \cdot B(t_0, t_i) \\
 &\quad - \sum_{i=1}^n (EL_{K_1, K_2}^R(t_{i-1})) \cdot B(t_0, t_i), \tag{19.3}
 \end{aligned}$$

که در آن  $U_{(K_1, K_2)}$  پرداخت اولیه<sup>۱</sup>،  $S_{(K_1, K_2)}$  اسپرد بازاری برش و پارامتر همبستگی برش

است. برای به دست آوردن همبستگی ضمنی بایستی معادله‌ی زیر را بر حسب  $a_{(K_1, K_2)}$  حل کنیم:

$$PV(K_1, K_2, S_{(K_1, K_2)}, a_{(K_1, K_2)}) = 0 \tag{20.3}$$

<sup>۱</sup> Upfront Payment

که جواب به دست آمده، برابر با مجذور اندازه‌ی پارامتر همبستگی خواهد بود. جواب مسئله‌ی اخیر، به آسانی و از طریق یک الگوریتم جستجوی ریشه، قابل محاسبه است. اما ممکن است برای یک برش، دو یا هیچ مقدار همبستگی به دست آید. در مواقعی که دو جواب از حل معادله به دست می‌آید، معمولاً مقدار کوچک‌تر به عنوان جواب صحیح پذیرفته می‌شود. یک مقدار همبستگی خیلی زیاد، چندان واقعی به نظر نمی‌رسد.

علاوه بر اینکه ممکن است بیش از یک جواب برای معادله‌ی گفته شده به دست آید، محاسبه‌ی همبستگی ضمنی از این طریق ایراد دیگری نیز دارد. از آنجا که همبستگی ضمنی یک مقدار دو بعدی و وابسته به حد بالا و حد پائین برش است، هنگام قیمت‌گذاری برش‌هایی با حدود بالا و پائین غیر استاندارد دچار مشکل می‌شویم.

راه‌حل ارائه شده برای این مشکل نیز استفاده از رویکرد همبستگی پایه<sup>۱</sup> است که نخستین بار در سال ۲۰۰۴ توسط لی مک‌گینتی<sup>۲</sup> و همکاران [۱۹] از شرکت جی.پی. مورگان<sup>۳</sup> معرفی شد. ایده‌ی این رویکرد این است که هر برش به مجموعه‌ای از برش‌های پایه<sup>۴</sup> تجزیه می‌شود. به این معنی که داشتن  $N$  مقدار از برش  $(K_1, K_2)$  معادل با داشتن  $\frac{K_2}{K_2 - K_1} N$  از برش  $(0, K_1)$  است. به ازای هر برش پایه یک همبستگی پایه وجود دارد. پس ابعاد مسئله به یک بعد تقلیل می‌یابد و پارامتر آن تنها به نقطه‌ی حد بالا و به طور غیر مستقیم نیز به مقادیر برش پائین و همبستگی پایه‌ی پائینی وابسته می‌گردد.

لزوماً فقط ساختار همبستگی سبب نیست که در پدیده‌ی لبخند همبستگی منعکس می‌شود. بسیاری از محققان درصدد توجیه این پدیده با در نظر گرفتن عوامل دیگری چون عرضه و تقاضا هستند. به عنوان مثال، آن‌ها معتقدند که اکثر فعالان بازار بر یک برش خاص متمرکز هستند. بانک‌ها مشتریان همیشگی برش سهام هستند، سرمایه‌گذاران خرده‌پا خریداران برش‌های میانی اند و شرکت‌های بیمه عمدتاً در برش

<sup>۱</sup> Base Correlation Approach

<sup>۲</sup> Lee McGinty

<sup>۳</sup> J.P. Morgan

<sup>۴</sup> Base Tranches: برش پایه در واقع همان برش مؤخر با نقطه‌ی حد پائین صفر است.

مقدم سرمایه‌گذاری می‌کنند. این امر باعث می‌شود تغییرات چندانی را در نمودار همبستگی ضمنی برش‌ها مشاهده نکنیم.

از آنجا که به دست آوردن همبستگی ضمنی دشوار نیست و مقدار آن برای هر برش به راحتی و بدون نیاز به داشتن اطلاعات مربوط به برش‌های دیگر محاسبه می‌شود، لذا معامله‌ی برش‌ها بر مبنای اسپرد هر برش به سرعت جای خود را به معامله بر مبنای همبستگی ضمنی برش‌ها داد. این، مشابه با اتفاقی است که برای تلاطم ضمنی در بازارهای اوراق مشتقه روی داده است. هرچند تفاوتی اساسی بین این دو وجود دارد و آن این است که در بازار اوراق مشتقه تلاطم ضمنی با استفاده از فرمول بلک-شولز به دست می‌آید. در حالی که مدل‌های به کار گرفته شده در بازار CDO یکسان نیستند و در نتیجه مقادیر یکسانی برای همبستگی ضمنی به دست نمی‌دهند. پس در بازار CDO همبستگی ضمنی وابسته به مدل است.

### ۷.۳ مروری بر تعمیم‌های مدل واسیچک

محاسبه‌ی توزیع ضرر سبد برای افق‌های زمانی مختلف، مسئله‌ی اساسی قیمت‌گذاری CDOهای ترکیبی است. از طرفی در صورتی که ساختار همبستگی خیلی کلی در نظر گرفته شود، می‌بایست تکنیک‌های هزینه‌بر شبیه‌سازی مونت کارلو به کار گرفته شود. اما مفهوم استقلال شرطی به ساده‌سازی قابل توجهی در مسئله انجامید. به این صورت که با فرض استقلال نکول‌های دارایی‌های موجود در سبد از هم‌دیگر مشروط بر یک عامل بازاری مشترک، محاسبه‌ی توزیع ضرر سبد به ازای افق‌های زمانی مختلف به مراتب آسان‌تر می‌شود.

همین‌طور یک ساده‌سازی دیگر با عنوان فرض سبد وسیع همگن در نظر گرفته شد. به این معنی که تقریب سبد اعتباری واقعی با سبدهای متشکل از بی‌شمار دارایی با وزن یکسان (ساختار احتمال نکول یکسان، نرخ‌های بازیافت یکسان و همبستگی یکسان با عامل مشترک) میسر باشد. با این فرض، روابط

فرم بسته برای قیمت گذاری برش های CDO ترکیبی به دست آمد. اما همچنان یک مشکل اساسی حل نشده باقی ماند و آن لبخند همبستگی است.

از سال ۲۰۰۴ محققان زیادی در تلاش برای حل این مشکل هستند و بسیاری در صدد تعمیم مدل معروف واسیچک یا مدل تک عاملی کاپولای گاوسی به منظور دستیابی به نتایج بهتر بوده اند. اکثر تعمیم ها حذف یا تغییر یک یا بیش از یک فرض در مدل واسیچک است. سه رویکرد عمده برای تعمیم این مدل وجود دارد:

- سبد متناهی ناهمگن<sup>۱</sup>

- استفاده از کاپولاهای غیر گاوسی

- در نظر گرفتن عوامل تصادفی بیشتر در مدل

در این پایان نامه، رویکرد دوم مورد توجه است که در فصل بعدی تعمیم مدل واسیچک را با استفاده از دو کاپولای غیر گاوسی  $^{2}NIG$  و  $MG-NIG$  بررسی می کنیم. در ادامه، سه ایده نامبرده را به طور اجمالی شرح می دهیم.

### ۱.۷.۳ سبد متناهی ناهمگن

فرض سبد وسیع همگن در مدل واسیچک در واقع تا حد زیادی غیر واقعی است. بسیاری از محققان ترجیح می دهند این فرض را نادیده بگیرند و مدل کاپولای گاوسی را طبق تعریف ۱.۱.۳ به کار بگیرند. یک سبد متناهی ناهمگن، سبدهای  $m$  ابزار مالی-اعتباری است که هر یک جداگانه دارای ویژگی های زیر هستند:

- وزن  $w_i$

<sup>۱</sup> Heterogeneous Finite Portfolio

<sup>۲</sup> Normal Inverse Gaussian Factor Copula Model

• احتمال نکول  $Q_i(t)$

• نرخ بازیافت  $R_i$

• همبستگی با عامل مشترک  $a_i$

این فرضیات در مقایسه با فرض سبد وسیع همگن بسیار واقع گرایانه تر است. هرچند در این حالت، توزیع ضرر سبد به صورت تحلیلی به دست نمی آید و در نتیجه سرعت قیمت گذاری CDO کمتر از زمانی است که مدل واسیچک به کار گرفته می شود. با این حال، مدل عاملی باعث می شود تکنیک های محاسباتی نیمه تحلیلی، ما را از شبیه سازی هزینه بر مونت کارلو بی نیاز سازد. دو رهیافت مطرح در این حوزه عبارتند از:

• روش محدوده های احتمال<sup>۱</sup>: روش عددی بازگشتی برای محاسبه ی توزیع ضرر سبد متناهی ناهمگن تحت مدل تک عاملی کاپولای گاوسی به طور هم زمان و مستقل از هم توسط [۱۰، ۳] معرفی شد و روش محدوده های احتمال نام گرفت.

ضرر درصدی سبد هنگام نکول دارایی  $i$  ام برابر با  $w_i(1 - R_i)$  است. احتمال نکول شرطی دارایی  $i$  ام قبل از زمان  $t$  مشروط بر عامل بازاری مشترک نیز به شکل زیر است:

$$p_i(t|M) = \Phi\left(\frac{C_i(t) - a_i M(t)}{\sqrt{1 - a_i^2}}\right). \quad (21.3)$$

در این روش هدف این است که پس از آنکه بازه های  $[0, b_0], (b_0, b_1), \dots$  و  $(b_{K-1}, \infty)$  برای توزیع ضرر در نظر گرفته شد، بایستی احتمال اینکه ضرر کل در  $k$  امین بازه به ازای  $k = 0, \dots, K$  بیافتد را محاسبه کنیم.

- تبدیل سریع فوریه<sup>۱</sup>: لورنت<sup>۲</sup> و گرگوری<sup>۳</sup> [۱۵] روش دیگری برای محاسبه‌ی توزیع ضرر سبد متناهی ناهمگن مبتنی بر تبدیل سریع فوریه ارائه کردند که ایده‌ی اصلی آن محاسبه‌ی تابع مشخصه‌ی ضرر سبد است.

### ۲.۷.۳ استفاده از کاپولاهای غیر گاوسی

برخی محققان پدیده‌ی لبخند همبستگی را نتیجه‌ی مقدار صفر وابستگی در دم<sup>۴</sup> کاپولای گاوسی می‌دانند و لذا روش‌های مختلفی را برای افزایش وابستگی در دم در مدل واسیچک ارائه کرده‌اند. معروف‌ترین آن‌ها، بکارگیری کاپولایی است که وابستگی در دم بیشتری داشته باشد. به عنوان مثال می‌توان کاپولای مارشال-اولکین<sup>۵</sup>، کاپولای  $Student-t$ ، کاپولای  $Double-t$ ، کاپولای  $NIG$ ، کاپولای  $MG-NIG$  [۲۸] و دسته‌ی کاپولاهای ارشمیدسی<sup>۶</sup> را نام برد.

<sup>۱</sup> Fast Fourier Transform

<sup>۲</sup> Laurent

<sup>۳</sup> Gregory

<sup>۴</sup> Tail Dependence

<sup>۵</sup> Marshall-Olkin

<sup>۶</sup> Archimedean Copulas

### ۳.۷.۳ عوامل تصادفی بیشتر در مدل

رویکرد سوم جهت بهبود کارکرد مدل واسیچک، افزودن عوامل تصادفی بیشتر به مدل است. اندرسن<sup>۱</sup> و سیدنیوس<sup>۲</sup> [۲] مدل کاپولای گاوسی را به مدلی با نرخ بازیافت تصادفی تعمیم دادند. هال<sup>۳</sup> و همکاران [۱۱] این مدل را به مدلی با همبستگی تصادفی تعمیم دادند. ترینج<sup>۴</sup> و همکاران [۲۵] نیز ایده‌ی پرش‌های سیستماتیک و غیر سیستماتیک در نکول را ارائه کردند.



---

<sup>۱</sup> Andersen

<sup>۲</sup> Sidenius

<sup>۳</sup> Hull

<sup>۴</sup> Trinh

## فصل چهارم

### مدل $NIIG$ و مدل $MG-NIIG$

در این فصل به معرفی دو مورد از تعمیم‌های مدل تک عاملی کاپولای گاوسی که مبتنی بر استفاده از کاپولای غیر گاوسی هستند، می‌پردازیم.

#### ۱.۴ مدل $NIIG$

در فصل قبل دیدیم که یک توزیع با دم کلفت<sup>۱</sup> عامل‌ها در مدل کاپولای تک عاملی، می‌تواند مشکل لبخند همبستگی مدل کاپولای گاوسی را حل کند. لذا به نظر می‌رسد یک توزیع با دم کلفت که مشابه با توزیع Student-t، اما ناوردا تحت پیچش<sup>۲</sup> است، می‌تواند هزینه‌ی محاسباتی را به طور قابل توجهی کاهش دهد چرا که در مسئله‌هایی چون تخصیص دارایی سبد بهینه (دارای برش‌های CDO) که در آن برش‌های CDO در هر سناریو و در هر گام زمانی مجدداً قیمت‌گذاری می‌شوند، زمان محاسباتی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است و استفاده از چنین توزیعی ضروری به نظر می‌رسد.

<sup>۱</sup> Heavy Tailed Distribution

<sup>۲</sup> Convolution

مدلی که می‌خواهیم در این فصل به آن بپردازیم، مبتنی بر توزیع گاوسی معکوس نرمال است که برای اولین بار توسط کلمانوا<sup>۱</sup>، اشمیت<sup>۲</sup> و وارنر<sup>۳</sup> [۱۳] در سال ۲۰۰۵ معرفی شده است. این توزیع یک توزیع آمیخته، متشکل از توزیع گاوسی معکوس و توزیع نرمال است. در ادامه به معرفی توزیع گاوسی معکوس و سپس توزیع گاوسی معکوس نرمال می‌پردازیم.

#### تعریف ۱.۱.۴. توزیع گاوسی معکوس

یک متغیر تصادفی نامنفی  $X$  دارای توزیع گاوسی معکوس با پارامترهای  $\alpha > 0$  و  $\beta > 0$  است، هرگاه تابع چگالی آن به شکل زیر باشد:

$$f_{IG}(x; \alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi\beta}} x^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{(\alpha - \beta x)^2}{2\beta x}\right), & \text{اگر } x > 0 \\ 0, & \text{اگر } x \leq 0 \end{cases}$$

تابع توزیع متناظر برابر خواهد بود با:

$$F_{IG}(x; \alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi\beta}} \int_0^x z^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{(\alpha - \beta z)^2}{2\beta z}\right) dz, & \text{اگر } x > 0 \\ 0, & \text{اگر } x \leq 0 \end{cases}$$

در اینصورت می‌نویسیم:  $X \sim IG(\alpha, \beta)$ .

شکل تابع چگالی این توزیع در صفحه بعدی نمایش داده شده است.

لم ۱.۲.۴. گشتاورهای مرکزی استاندارد برای یک متغیر تصادفی با توزیع گاوسی معکوس،  $X \sim IG(\alpha, \beta)$  عبارتند از:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{\alpha}{\beta},$$

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \frac{\alpha}{\beta^2},$$

<sup>۱</sup> Anna Kalemanova

<sup>۲</sup> Bernd Schmid

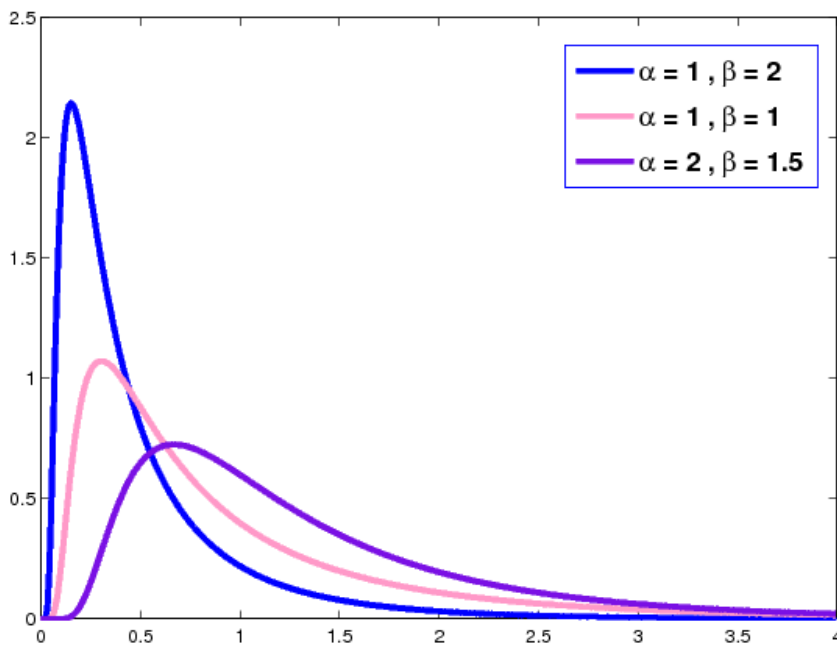
<sup>۳</sup> Ralf Warner

$$S(X) = \mathbb{E} \left( \left( \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sqrt{V(X)}} \right)^3 \right) = \frac{3}{\sqrt{\alpha}},$$

$$K(X) = \mathbb{E} \left( \left( \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sqrt{V(X)}} \right)^4 \right) = 3 + \frac{15}{\alpha}.$$

که پارامترهای  $\mu$  و  $\lambda$  به صورت  $\mu = \alpha/\beta$  و  $\lambda = \alpha^2/\beta$  در نظر گرفته شده است.

برای اثبات به [۱۳] مراجعه شود.



شکل ۱.۴: تابع چگالی توزیع گاوسی معکوس به ازای مقادیر مختلف پارامترها

### تعریف ۱.۳.۴. توزیع گاوسی معکوس نرمال

متغیر تصادفی  $X$  دارای توزیع گاوسی معکوس نرمال ( $NI\mathcal{G}$ ) با پارامترهای  $\alpha, \beta, \mu$  و  $\delta$  است، هرگاه:

$$X|Y = y \sim \mathcal{N}(\mu + \beta y, y)$$

$$Y \sim \mathcal{IG}(\delta\gamma, \gamma^2), \quad \gamma := \sqrt{\alpha^2 - \beta^2},$$

که در آن پارامترها به صورت زیر هستند:  $0 < \delta < \alpha$  و  $0 \leq |\beta| < \alpha$ .

پس می‌توان نوشت  $X \sim NIG(\alpha, \beta, \mu, \delta)$  و تابع‌های چگالی و توزیع احتمال  $f_{NIG}(x; \alpha, \beta, \mu, \delta)$

و  $F_{NIG}(x; \alpha, \beta, \mu, \delta)$  را به ترتیب به صورت زیر خواهیم داشت:

$$f_{NIG}(x; \alpha, \beta, \mu, \delta) = \int_0^{\infty} f_N(x; \mu + \beta y, y) \cdot f_{IG}(y; \delta\gamma, \gamma^2) dy, \quad (1.4)$$

$$F_{NIG}(x; \alpha, \beta, \mu, \delta) = \int_{-\infty}^x \int_0^{\infty} f_N(t; \mu + \beta y, y) \cdot f_{IG}(y; \delta\gamma, \gamma^2) dy dt, \quad (2.4)$$

که در آن  $f_N(x; \mu + \sigma^2)$  تابع چگالی توزیع گاوسی به شکل زیر است:

$$f_N(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

لم ۱.۴.۴. تابع چگالی متغیر تصادفی  $X \sim NIG(\alpha, \beta)$  را به شکل زیر نیز می‌توان نوشت:

$$f_{NIG}(x; \alpha, \beta, \mu, \delta) = \frac{\delta\alpha \cdot \exp(\delta\gamma + \beta(x-\mu))}{\pi \cdot \sqrt{\delta^2 + (x-\mu)^2}} K_1\left(\alpha\sqrt{\delta^2 + (x-\mu)^2}\right),$$

که در آن  $K_1(w) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \exp(-\frac{1}{2}w(t+t^{-1})) dt$  تابع بسل تعدیل شده‌ی نوع سوم<sup>۱</sup> بوده و

$$\gamma := \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \text{ است.}$$

اثبات لم در پیوست ۴.آ آمده است.

برخلاف تابع چگالی  $NIG$  که کاملاً پیچیده است، تابع مولد گشتاورش فرم ساده‌ای دارد.

لم ۱.۵.۴. تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی  $X \sim NIG(\alpha, \beta, \mu, \delta)$  عبارت است از:

$$M_X(t) = \exp(\mu t) \frac{\exp\left(\delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}\right)}{\exp\left(\delta\sqrt{\alpha^2 - (\beta+t)^2}\right)}. \quad (3.4)$$

برای اثبات به لم ۵.آ مراجعه شود.

لم ۱.۶.۴. گشتاورهای مرکزی (میانگین، واریانس، چولگی و کشیدگی) برای  $X \sim NIG(\alpha, \beta, \mu, \delta)$

به ترتیب به صورت زیر هستند:

$$\mathbb{E}(X) = \mu + \delta \frac{\beta}{\gamma},$$

<sup>۱</sup> Modified Bessel Function of the Third Type

$$\mathbb{V}(X) = \delta \frac{\alpha^2}{\gamma^3},$$

$$\mathbb{S}(X) = \frac{\beta}{\alpha \sqrt{\delta \gamma}},$$

$$\mathbb{K}(X) = 3 + 3 \left( 1 + 4 \left( \frac{\beta}{\alpha} \right)^2 \right) \frac{1}{\delta \gamma}.$$

مقادیر به دست آمده برای گشتاورهای مرکزی در این لم، از لم ۱.۵.۴ نتیجه می‌شوند.

#### ۱.۱.۴ دو ویژگی اساسی توزیع $NIG$ : ناوردائی مقیاسی<sup>۱</sup> و ناوردائی تحت پیچش

(الف) ناوردائی مقیاسی: برای یک متغیر تصادفی  $X \sim NIG(\alpha, \beta, \mu, \delta)$  و یک اسکالر  $c$ ،  $cX$

دارای توزیع  $NIG$  به صورت زیر است:

$$cX \sim NIG\left(\frac{\alpha}{c}, \frac{\beta}{c}, c\mu, c\delta\right). \quad (4.4)$$

(ب) ناوردائی تحت پیچش: مجموع  $X \sim NIG(\alpha, \beta, \mu_1, \delta_1)$  و  $Y \sim NIG(\alpha, \beta, \mu_2, \delta_2)$  که

مستقل از هم هستند نیز دارای توزیع  $NIG$  به شکل زیر است:

$$X + Y \sim NIG(\alpha, \beta, \mu_1 + \mu_2, \delta_1 + \delta_2). \quad (5.4)$$

اثبات این دو ویژگی در پیوست آ.۶ ارائه شده است.

#### ۲.۱.۴ مدل تک عاملی کاپولای $NIG$

حال که توزیع  $NIG$  را شناختیم، می‌توانیم مدل تک عاملی کاپولای تعریف شده بر اساس این توزیع،

جهت مدل کردن نکول‌های همبسته و همینطور روابط نیمه تحلیلی برای یک سبد وسیع همگن CDO

تحت این مدل را معرفی نمائیم. از آنجا که ویژگی دوم توزیع  $NIG$  یعنی ناوردائی تحت پیچش برای

<sup>۱</sup> Scaling

هر دو متغیر تصادفی دلخواه با این توزیع برقرار نیست، لازم است پارامترهای  $M$  و  $X_i$  را به گونه‌ای در نظر بگیریم که  $A_i$  نیز دارای توزیع  $NIG$  باشد. ابتدا توزیع‌های دو پارامتر را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$M \sim NIG(\alpha_1, \beta_1, \mu_1, \delta_1), \quad X_i \sim NIG(\alpha_2, \beta_2, \mu_2, \delta_2).$$

با اعمال ویژگی اول توزیع  $NIG$  خواهیم داشت:

$$aM \sim NIG\left(\frac{\alpha_1}{a}, \frac{\beta_1}{a}, a\mu_1, a\delta_1\right), \quad (6.4)$$

$$\sqrt{1-a^2}X_i \sim NIG\left(\frac{\alpha_2}{\sqrt{1-a^2}}, \frac{\beta_2}{\sqrt{1-a^2}}, \sqrt{1-a^2}\mu_2, \sqrt{1-a^2}\delta_2\right). \quad (7.4)$$

حال برای آنکه ویژگی دوم توزیع  $NIG$ ، برای عبارت  $aM + \sqrt{1-a^2}X_i$  برقرار باشد، دو پارامتر اول در (6.4) و (7.4) باید برابر باشند:

$$\frac{\alpha_1}{a} = \frac{\alpha_2}{\sqrt{1-a^2}}, \quad \frac{\beta_1}{a} = \frac{\beta_2}{\sqrt{1-a^2}}.$$

از آنجا که  $M$  عامل مشترک بازار است، نباید به پارامتر همبستگی سبب  $a$  وابسته باشد. فرض می‌کنیم که

$$\alpha_1 = \alpha, \quad \beta_1 = \beta, \quad \alpha_2 = \frac{\sqrt{1-a^2}}{a}\alpha, \quad \beta_2 = \frac{\sqrt{1-a^2}}{a}\beta.$$

به این ترتیب متغیر تصادفی  $A_i = aM + \sqrt{1-a^2}X_i$  به‌ازای تمامی مقادیر پارامترهای  $\mu_1, \mu_2, \delta_1$  و  $\delta_2$  دارای توزیع  $NIG$  به صورت زیر است:

$$A_i \sim NIG\left(\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\beta}{\alpha}, a\mu_1 + \sqrt{1-a^2}\mu_2, a\delta_1 + \sqrt{1-a^2}\delta_2\right).$$

بعلاوه پارامترهای سوم و چهارم را طوری انتخاب می‌کنیم که توزیع‌های احتمال هر دو عامل، استاندارد شود<sup>۱</sup>. با استفاده از لم ۱.۶.۴ برای  $M$  داریم:

$$\mu_1 + \delta_1 \frac{\beta}{\gamma} = 0, \quad \delta_1 \frac{\alpha^2}{\gamma^3} = 1, \quad \gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2},$$

<sup>۱</sup> توزیع با میانگین صفر و واریانس یک داشته باشند.

و برای  $X_i$  داریم:

$$\mu_2 + \delta_2 \frac{\beta_2}{\gamma_2} = 0, \quad \delta_2 \frac{\alpha_2^2}{\gamma_2^3} = 1, \quad \gamma_2 = \sqrt{\alpha_2^2 - \beta_2^2}.$$

با حل این دستگاه معادلات، جواب‌های زیر به دست می‌آید:

$$\mu_1 = -\frac{\beta\gamma^2}{\alpha^2}, \quad \delta_1 = \frac{\gamma^3}{\alpha^2}, \quad \mu_2 = -\frac{\sqrt{1-a^2}\beta\gamma^2}{a\alpha^2}, \quad \delta_2 = \frac{\sqrt{1-a^2}\gamma^3}{a\alpha^2}$$

که در آن  $\gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$  آنگاه توزیع  $A_i$  به صورت زیر خواهد بود:

$$A_i \sim \text{NIG} \left( \frac{\alpha}{a}, \frac{\beta}{a}, -\frac{1}{a} \frac{\beta\gamma^2}{\alpha^2}, \frac{1}{a} \frac{\gamma^3}{\alpha^2} \right).$$

می‌توان به آسانی مشاهده کرد که توزیع دارای میانگین صفر و واریانس یک است:

$$\mathbb{E}(A_i) = -\frac{1}{a} \frac{\beta\gamma^2}{\alpha^2} + \frac{1}{a} \frac{\gamma^3}{\alpha^2} \frac{\beta}{a} = 0,$$

$$\mathbb{V}(A_i) = \frac{1}{a} \frac{\gamma^3}{\alpha^2} \frac{\alpha^2}{a\gamma^3} = 1.$$

اکنون می‌توانیم مدل تک عاملی کاپولای  $\text{NIG}$  را در قالب یک تعریف معرفی نماییم.

#### تعریف ۱.۷.۴. مدل تک عاملی کاپولای $\text{NIG}$

یک سبد وسیع همگن با  $m$  ابزار مالی را در نظر بگیرید. فرض کنیم بازده استاندارد شده‌ی دارای تا

زمان  $t$  برای ابزار مالی  $i$  ام در سبد یعنی  $A_i(t)$  به صورت زیر باشد:

$$A_i(t) = aM(t) + \sqrt{1-a^2}X_i(t),$$

که در آن

$$M(t) \sim \text{NIG} \left( \alpha, \beta, -\frac{\beta\gamma^2}{\alpha^2}, \frac{\gamma^3}{\alpha^2} \right)$$

و

$$X_i(t) \sim \text{NIG} \left( \frac{\sqrt{1-a^2}}{a}\alpha, \frac{\sqrt{1-a^2}}{a}\beta, -\frac{\sqrt{1-a^2}}{a} \frac{\beta\gamma^2}{\alpha^2}, \frac{\sqrt{1-a^2}}{a} \frac{\gamma^3}{\alpha^2} \right)$$

همینطور  $\gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$  است.

تحت این مدل کاپولا، متغیر  $A_i(t)$  با یک تبدیل صدک-به-صدک به زمان نکول  $t_i$  برای مؤسسه‌ی مرجع  $i$  ام نگاشته می‌شود. مؤسسه‌ی مرجع  $i$  تا زمان  $t$  نکول می‌کند اگر:

$$F_{NIG(1/a)}(A_i(t)) \leq Q(t) \quad (۸.۴)$$

به‌طور معادل

$$A_i(t) \leq F_{NIG(1/a)}^{-1}(Q(t)) =: C(t) \quad (۹.۴)$$

که در آن احتمال ریسک-خنثی نکول دارایی‌های موجود در سبد تا زمان  $t$  است.

حال می‌توانیم روابط نیمه تحلیلی قیمت‌گذاری CDO تحت مدل تک عاملی کاپولای  $NIG$  را بیان کنیم.

گزاره ۱.۸.۴. یک سبد وسیع همگن نامتناهی را در نظر بگیرید که بازده دارایی در آن از مدل تک عاملی کاپولای  $NIG$  تبعیت کند. آنگاه توزیع ضرر سبد قبل از اعمال بازیافت در محاسبات برابر خواهد بود با:

$$F_{\infty}(t, x) = 1 - F_{NIG(1)} \left( \frac{F_{NIG(1/a)}^{-1}(Q(t)) - \sqrt{1-a^2} F_{NIG(z)}^{-1}(x)}{a} \right) \quad (۱۰.۴)$$

که در آن  $x$  متعلق به بازه‌ی  $[0, 1]$  و  $z = \frac{\sqrt{1-a^2}}{a}$  است.

اثبات. با توجه به دو ویژگی اساسی توزیع  $NIG$ ، توزیع  $A_i$  برابر است با:

$$A_i \sim NIG \left( \frac{\alpha}{a}, \frac{\beta}{a}, -\frac{1}{a} \frac{\beta \gamma^2}{\alpha^2}, \frac{1}{a} \frac{\gamma^3}{\alpha^2} \right)$$

به این ترتیب رابطه‌ی (۷.۴) برای توزیع ضرر سبد بلافاصله از قضیه ۱.۳.۳ نتیجه می‌شود.  $\square$

### ۳.۱.۴ قیمت گذاری CDO تحت مدل تک عاملی کاپولای $NIG$

اگر تعریف  $F_\infty$  را برای گزاره‌ی ۱.۶.۲ به کار ببریم، عبارت زیر به دست می‌آید:

$$El_{(K_1, K_2)}(t) = \frac{1}{K_2 - K_1} \int_{K_1}^{K_2} (x - K_1) dF_\infty(t, x) + (1 - F_\infty(t, K_2)). \quad (11.4)$$

برای محاسبه‌ی انتگرال نیاز به تابع چگالی ضرر سبد داریم. با این فرض که  $z = \frac{\sqrt{1-a^2}}{a}$  باشد

می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} f_\infty(t, x) &= \frac{dF_\infty(t, x)}{dx} \\ &= -f_{NIG(1)} \left( \frac{F_{NIG(\frac{1}{a})}^{-1}(Q(t)) - \sqrt{1-a^2} F_{NIG(z)}^{-1}(x)}{a} \right) \\ &\quad \cdot (-z) \frac{dF_{NIG(z)}^{-1}(x)}{dx} \\ &= z \frac{f_{NIG(1)} \left( \frac{F_{NIG(\frac{1}{a})}^{-1}(Q(t)) - \sqrt{1-a^2} F_{NIG(z)}^{-1}(x)}{a} \right)}{f_{NIG(z)} \left( F_{NIG(z)}^{-1}(x) \right)}. \end{aligned}$$

انتگرال  $\int_{K_1}^{K_2} (x - K_1) f_\infty(t, x) dx$  جواب تحلیلی ندارد و می‌بایست به طور عددی محاسبه شود. از

آنجا که وجود معکوس تابع توزیع  $NIG$  محاسبه‌ی این انتگرال را بسیار پرهزینه می‌نماید، بهتر است

از یک تغییر متغیر به شکل زیر استفاده کنیم:

$$y = F_{NIG(z)}^{-1}(x).$$

در این صورت خواهیم داشت:

$$dy = \frac{dx}{f_{NIG(z)} \left( F_{NIG(z)}^{-1}(x) \right)}$$

به همین ترتیب:

$$\int_{K_1}^{K_2} (x - K_1) f_\infty(t, x) dx = \int_{F_{NIG(z)}^{-1}(K_1)}^{F_{NIG(z)}^{-1}(K_2)} (F_{NIG(z)}(y) - K_1) dy$$

$$\cdot f_{NIG(1)} \left( \frac{C(t) - \sqrt{1 - a^2}y}{a} \right) z dy.$$

عبارت حاصل تنها در کران‌های انتگرال نیاز به محاسبه‌ی تابع توزیع  $NIG$  معکوس دارد و تابع تحت انتگرال تنها یک تابع توزیع  $NIG$  و یک تابع چگالی آن را دارد که محاسبه‌شان به مراتب سریع‌تر از محاسبه‌ی تابع توزیع معکوس است.

توزیع  $NIG$  در مقایسه با توزیع گاوسی که دو گشتاور ثابت (کشیدگی صفر و چولگی ۳) دارد با چهار گشتاور معین می‌شود. در گزاره‌ی زیر مقادیر گشتاورهای توزیع  $NIG$  را که در مدل تک عاملی به کار رفته است بیان می‌کنیم.

گزاره ۱.۹.۴. متغیر تصادفی  $(s \frac{\beta \gamma^2}{\alpha^2}, s \frac{\gamma^2}{\alpha^2}) \sim NIG(s\alpha, s\beta, -s \frac{\beta \gamma^2}{\alpha^2}, s \frac{\gamma^2}{\alpha^2})$  دارای گشتاورهای مرکزی زیر است:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= 0, & \mathbb{V}(X) &= 1 \\ \mathbb{S}(X) &= 3 \frac{\beta}{s\gamma^2}, & \mathbb{K}(X) &= 3 + 3 \left( 1 + 4 \left( \frac{\beta}{\alpha} \right)^2 \right) \frac{\alpha^2}{s^2 \gamma^4}, \\ & & \text{که در آن } \gamma &= \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \end{aligned}$$

#### ۴.۱.۴ الگوریتم تغییرات اسپرد برش‌های یک CDO ترکیبی نسبت به تغییرات پارامترهای مدل

در این بخش الگوریتم تغییرات اسپرد برش‌های یک CDO ترکیبی نسبت به تغییرات پارامترهای مدل  $NIG$  یعنی  $\alpha, \beta$  و پارامتر همبستگی با استفاده از شبیه‌سازی مونت کارلو را بیان می‌کنیم. قیمت‌گذاری CDO با استفاده از روش شبیه‌سازی مونت کارلو شامل تولید مسیرهای نمونه از زمان نکول همبسته است. در این الگوریتم که در محیط MATLAB پیاده‌سازی شده است، ابتدا نمونه‌هایی از زمان‌های نکول را با استفاده از متغیرهای تصادفی با توزیع یکنواخت و بر اساس توزیع  $NIG$  تولید می‌کنیم. پس از به دست آوردن امید ریاضی ضرر برش در هر مسیر با استفاده از ماتریس همبستگی و ماتریس ضرر

برای مسیرها و گام‌های زمانی مختلف مقدار PremiumLeg و ProtectionLeg و نیز اسپرد حاصل می‌شود و به این ترتیب می‌توان تغییرات اسپرد یک برش را به ازای مقدر مختلف پارامترهای توزیع محاسبه و مشاهده نمود.

---

**الگوریتم ۲** تغییرات اسپرد یک برش CDO تصنعی نسبت به تغییرات پارامترهای مدل *NIG* ورودی:  $N =$  تعداد دارایی‌های موجود در سبد پشتوانه،  $R =$  نرخ بازیاخت،  $\lambda =$  پارامتر شدت در فرآیند پواسون،  $\text{notional} =$  ارزش اسمی هر دارایی در سبد،  $K_1 =$  نقطه‌ی حد پائینی،  $K_2 =$  نقطه‌ی حد بالایی،  $r =$  نرخ بهره‌ی بدون ریسک،  $No =$  تعداد مسیرهای شبیه‌سازی،  $\rho =$  پارامتر همبستگی. خروجی:  $\text{Spread} =$  اسپرد برش.

قرار دهید  $TM =$  زمان سررسید قرارداد (بر حسب سال).  
 قرار دهید  $tstep =$  زمان‌های پرداخت کوپن (بر حسب سال).  
 قرار دهید  $nn =$  ارزش اسمی کل.  
 قرار دهید  $loss =$  زیان کل.  
 قرار دهید  $T =$  برداری که مؤلفه‌های آن زمان‌های پرداخت کوپن است.  
 قرار دهید  $TCoupon =$  ماتریس که ستون‌های آن تکرار بردار  $T$  است.  
 قرار دهید  $discount =$  عامل تنزیل.  
 قرار دهید  $fixedtot = 0$ ، مقدار اولیه‌ی  $fixedleg$ .  
 قرار دهید  $floattot = 0$ ، مقدار اولیه‌ی  $floatingleg$ .  
**do**  $i = 1$  تا  $101$  **for**  
 قرار دهید  $\alpha = 0.5 + 0.01(i - 1)$   
**do**  $j = 1$  تا  $101$  **for**  
 قرار دهید  $\beta = -0.5 + 0.01(j - 1)$   
**then**  $a < \alpha$  **if**  
 قرار دهید  $\gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$   
**do**  $TM$  تا  $i = 1$  **for**  
 قرار دهید  $DFT =$  ماتریس زمان‌های نکول شبیه‌سازی شده با توزیع *NIG*  
 قرار دهید  $DFT_1 =$  مسیر  $i$  ام

---

---

قرار دهید  $DFT_2 =$  زمان‌های پرداختی برای مسیر  $i$  ام  
قرار دهید  $DF =$  حذف زمان‌های نکول شبیه سازی شده که دیرتر از زمان سررسید قرارداد هستند.

قرار دهید  $Lmat =$  ماتریس زیان که حاصل ضرب ماتریس  $DF$  در اندازه‌ی زیان است.  
قرار دهید  $Tloss =$  مجموع زیان  
قرار دهید  $Ploss/nn =$  زیان درصدی  
قرار دهید  $PITR = \max(Ploss - K_1, 0) - \max(Ploss - K_2, 0)$  = زیان درصدی

در برش  
قرار دهید  $PITR(2 : end) - PITR(1 : end - 1) = temppllos$   
قرار دهید  $nn.temppllos = temp_2$   
قرار دهید  $nn.(K_2 - K_1 - PITR) = temp$  محاسبه‌ی ارزش اسمی که در سبد

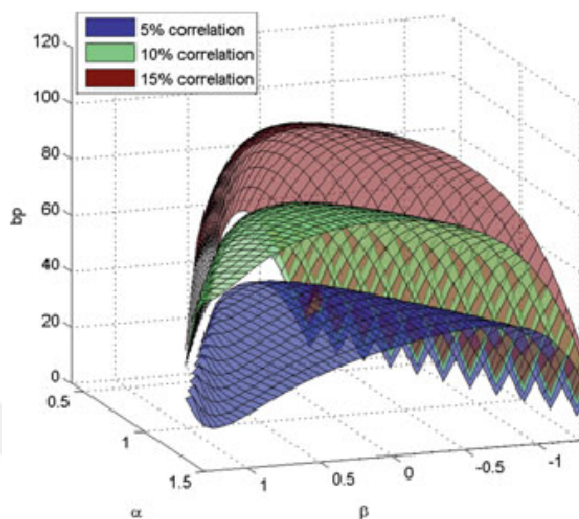
باقی مانده

قرار دهید coupon = اندازه‌ی کوپن‌ها  
قرار دهید  $fl - flows =$  جریان‌های ثابت تنزیل شده  
قرار دهید  $fx - flows =$  جریان‌های شناور تنزیل شده  
قرار دهید  $Vfloat =$  جریان‌های شناور کل برای این مسیر  
قرار دهید  $floattot =$  کل جریان‌های شناور تا الان  
قرار دهید  $Vfixed =$  جریان‌های ثابت کل برای این مسیر  
قرار دهید  $fixedtot =$  کل جریان‌های ثابت تا الان

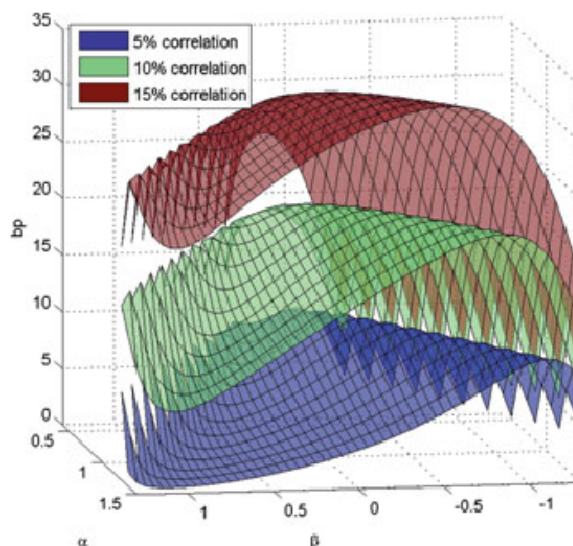
**for end**  
قرار دهید  $floattot / (fixedtot / c) = Spread(i, j)$   
**else**  
قرار دهید  $j + 1 = j$   
**if end**  
**for end**  
**for end**  
**for end**  
surf(Spread)

---

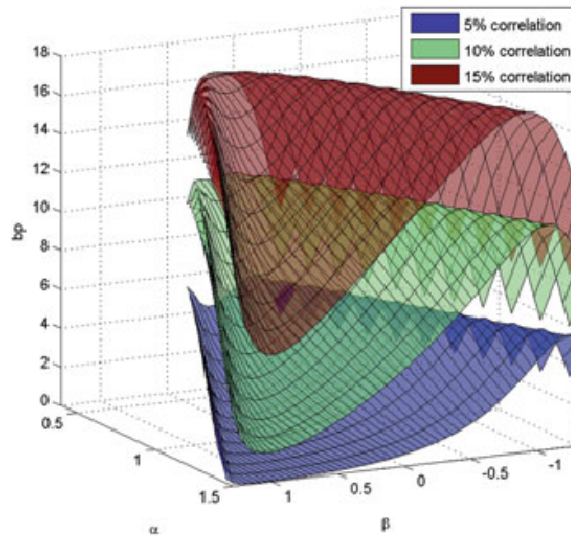
در ادامه، نمودارهای تغییرات اسپرد برش‌های میانی نسبت به تغییرات پارامترهای توزیع  $NIG$  نمایش داده شده است.



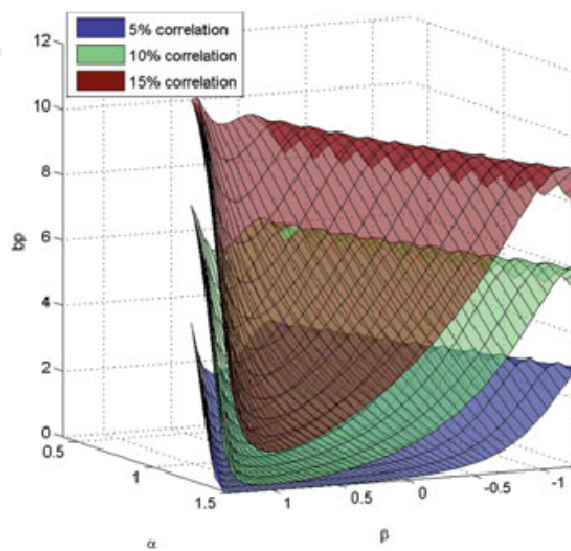
شکل ۲.۴: تغییرات اسپرد برای برش ۳٪-۶٪



شکل ۳.۴: تغییرات اسپرد برای برش ۶٪-۹٪



شکل ۴.۴: تغییرات اسپرد برای برش ۹٪-۱۲٪



شکل ۵.۴: تغییرات اسپرد برای برش ۱۲٪-۲۲٪

## ۲.۴ مدل $M_{G-NIG}$

در این بخش ابتدا تعریفی از توزیع  $M_{G-NIG}$  را که برای اولین بار در سال ۲۰۰۹ توسط یانگ<sup>۱</sup> و همکاران [۲۸] مطرح شده است، بیان و سپس مدل کاپولای تک عاملی تحت این توزیع را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۲.۱.۴. توزیع  $M_{G-NIG}$

توزیع  $M_{G-NIG}$  یک توزیع آمیخته<sup>۲</sup> متشکل از توزیع گاوسی و توزیع  $NIG$  است. متغیر تصادفی  $X \sim M_{G-NIG}$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$X = \begin{cases} U & \text{با احتمال } 1-p \\ V & \text{با احتمال } p \end{cases} \quad (۱۲.۴)$$

که در آن  $U, V \sim NIG(x; \alpha, \beta, \mu, \delta)$  یک متغیر تصادفی با توزیع نرمال استاندارد،  $p \in (0, 1)$  احتمال وقوع جزء گاوسی توزیع است و پارامترهای  $\alpha, \beta, \mu, \delta$  مطابق با آنچه که در تعریف توزیع  $NIG$  آمده است تعریف می‌شوند. تابع چگالی متغیر تصادفی  $X \sim M_{G-NIG}(x; 0, 1; \alpha, \beta, \mu, \delta; p)$  را با توجه به تابع چگالی توزیع  $NIG$  می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$f_{M_{G-NIG}}(x; 0, 1; \alpha, \beta, \mu, \delta; p) = \frac{p}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) + (1-p)f_{NIG}(x; \alpha, \beta, \mu, \delta). \quad (۱۳.۴)$$

## ۱.۲.۴ مدل تک عاملی کاپولای $M_{G-NIG}$

فرض کنیم بازده دارایی ابزار مالی  $i$  ام در سبد یعنی  $A_i$  از رابطه‌ی زیر تبعیت کند:

$$A_i = a_i M + \sqrt{1 - a_i^2} X_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (۱۴.۴)$$

<sup>۱</sup> Yang

<sup>۲</sup> Mixture Distribution

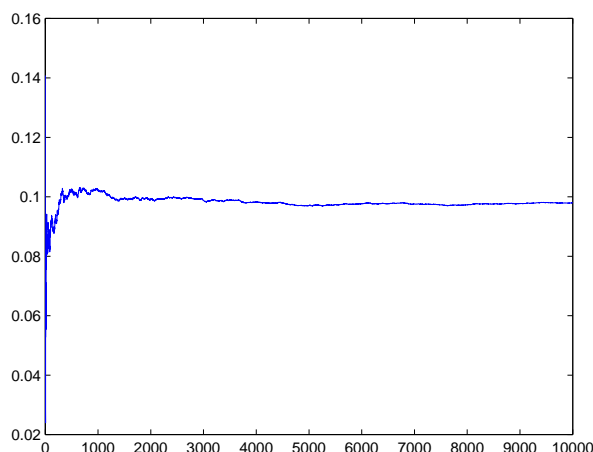
که در آن  $a_i$  مقدار ثابتی در بازه  $[0, 1]$ ،  $M$  عامل مشترک بازار و  $X_i$  عامل غیرسیستماتیک دارایی  $i$  ام است. همچنین  $M$  و  $X_i$  متغیرهای تصادفی مستقل از هم با توزیع‌های زیر باشند:

$$M \sim \mathcal{M}_{G-NIG}(0, 1; \alpha, \beta, -\beta \frac{\gamma^2}{\alpha^2} \frac{\gamma^3}{\alpha^2}; p), \quad (15.4)$$

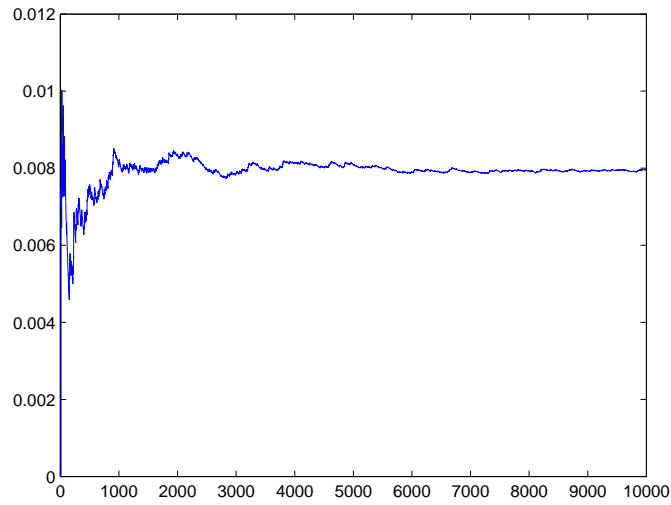
$$X_i \sim \mathcal{M}_{G-NIG}(0, 1; \frac{\sqrt{1-a_i^2}}{a_i} \alpha, \frac{\sqrt{1-a_i^2}}{a_i} \beta, -\frac{\sqrt{1-a_i^2}}{a_i} \beta \frac{\gamma^2}{\alpha^2}, \frac{\sqrt{1-a_i^2}}{a_i} \frac{\gamma^3}{\alpha^2}; p), \quad i = 1, \dots, n. \quad (16.4)$$

قابل ذکر است که در تعریف این مدل و تعیین تابع‌های توزیع دو عامل سیستماتیک و غیرسیستماتیک، دو ویژگی اساسی توزیع  $NIG$  یعنی ناوردائی مقیاسی و ناوردائی تحت پیچش اعمال شده است. الگوریتم به کار رفته برای این مدل نیز مشابه الگوریتمی است که در بخش پیش برای مدل  $NIG$  داشتیم. با این تفاوت که شبیه سازی زمان‌های نکول تحت این مدل با استفاده از توزیع  $\mathcal{M}_{G-NIG}$  صورت می‌گیرد که پارامترهای توزیع، مقادیر ثابت دارند. نتایج حاصل از این الگوریتم برای دو برش میانی را می‌توان در ادامه مشاهده نمود. پارامترهای مدل به صورت زیر در نظر گرفته شده‌اند:

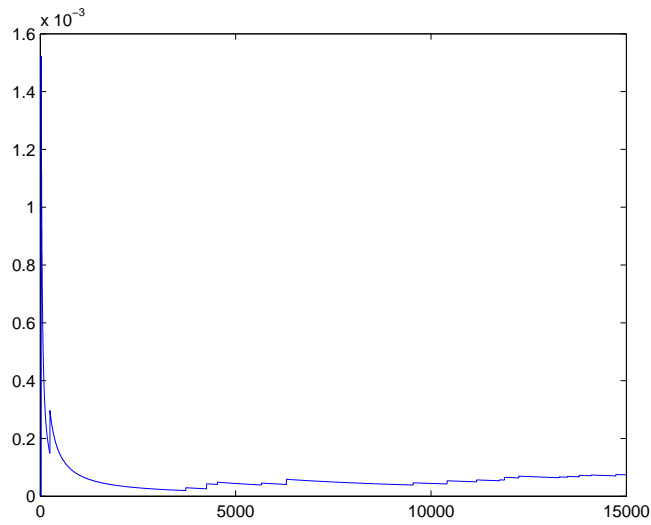
$$\alpha = 1/2, \quad \beta = -0/5, \quad p = 0/2, \quad \rho = 0/05, \quad \lambda = 0/15.$$



شکل ۶.۴: شبیه سازی اسپرد برای برش ۳٪-۶٪ تحت مدل  $\mathcal{M}_{G-NIG}$



شکل ۷.۴: شبیه سازی اسپرد برای برش ۶٪-۹٪ تحت مدل  $MG-NIG$



شکل ۸.۴: شبیه سازی اسپرد برای برش ۹٪-۱۲٪ تحت مدل  $MG-NIG$

## ۳.۴ نتیجه‌گیری

در این پایان‌نامه هدف، بررسی روش‌های قیمت‌گذاری نوع خاصی از مشتقات اعتباری به نام تعهدات بدهی تضمین شده بود. در این راستا پس از بستر سازی برای معرفی این قرارداد و بازار آن، مدل‌های قیمت‌گذاری مبتنی بر مدل‌های عاملی و مدل‌های کاپولا مورد بررسی قرار گرفت. مدل تک عاملی کاپولای گاوسی به مدل استاندارد بازار مشتقات اعتباری تبدیل شده است. اما چندی است که محققان به عدم مطابقت این مدل با ویژگی‌های بازار پی برده‌اند. از این رو تلاش‌های متعددی جهت بهبود مدل مذکور صورت گرفته و تا کنون چندین رویکرد ارائه شده است. رویکرد مورد توجه در این پایان‌نامه استفاده از کاپولاهایی غیر گاوسی است که وابستگی در دم بیشتری دارند. از جمله می‌توان مدل‌های  $Student - t$ ،  $Double - t$ ،  $Marshall - Olkin$  و  $NIG$  را می‌توان نام برد. در مدل تک عاملی  $Double - t$  فرض بر این است که هر دو عامل سیستماتیک و غیر سیستماتیک دارای توزیع  $Student - t$  هستند. اما از آنجا که این توزیع تحت پیچش ناوردا نیست، بازده دارایی لزوماً دارای توزیع  $Student - t$  نخواهد بود. در نتیجه این مدل از نظر محاسباتی بسار پرهزینه و نیاز به بکارگیری روش‌های عددی زمان‌بر دارد. این در حالی است که در مدل کاپولای  $Student - t$ ، بازده دارایی دارای توزیع  $Student - t$  است. اما چون عامل سیستماتیک و غیر سیستماتیک مستقل از هم در نظر گرفته نمی‌شوند، این مدل جزء مدل‌های عاملی محسوب نمی‌شود. مشاهدات نشان می‌دهند نتایج حاصل از این مدل بسیار نزدیک به مدل تک عاملی کاپولای گاوسی است. در این میان خانواده‌ی توزیع‌های  $NIG$  دارای ویژگی‌هایی هستند که آن‌ها را برای محققان عرصه‌ی مالی جذاب می‌سازند. به‌طور کلی این خانواده از توزیع‌ها که زیرمجموعه‌ی توزیع‌های هیپربولیک هستند، وابسته به چهار پارامتر و جزء توزیع‌های با دم کلفت به شمار می‌روند. بعلاوه دارای ویژگی ناوردائی تحت پیچش در شرایط خاصی هستند و لذا تابع توزیع تجمعی، تابع چگالی و تابع معکوس توزیع به آسانی و سریع محاسبه می‌شوند. از این رو به عنوان مدل مورد بررسی در این پایان‌نامه انتخاب گردید و مورد بررسی قرار گرفت. با توجه به نتایج حاصل از روش شبیه سازی مونت کارلو تحت این مدل در فصل چهارم، می‌توان گفت

این مدل مطابقت خوبی با داده های بازار دارد. بخش دوم فصل چهارم نیز به مدل جدیدی با عنوان  $M_G-NIG$  اختصاص یافت. این مدل که از توزیع  $NIG$  بهره گرفته بود به عنوان یک تعمیم مناسب و قابل بررسی برای مدل تک عاملی کاپولای گاوسی در این پایان نامه مورد توجه قرار گرفت. در این مورد نیز بر اساس نتایج به دست آمده از روش شبیه سازی مونت کارلو، علی رغم اینکه مطالعه‌ی صورت گرفته در این زمینه به اتمام نرسیده است به نظر می رسد این مدل از قابلیت خوبی برای قیمت گذاری CDO تحت مدل های عاملی برخوردار باشد.

برای مطالعات آتی پیشنهاد می شود:

با توجه به اینکه در طول انجام مطالعات برای این پایان نامه، امکان دسترسی به داده های واقعی وجود نداشت، روش شبیه سازی مونت کارلو به کار گرفته شد. بهتر است در مراحل بعدی روش های قیمت گذاری بر اساس داده های واقعی مورد بررسی قرار گیرد.

اعمال روش های تقلیل واریانس نیز می تواند در بهبود نتایج حاصل از روش شبیه سازی مونت کارلو مفید واقع گردد.

بررسی رویکرد عوامل تصادفی در مدل های مورد نظر در این پایان نامه می تواند روند یافتن روش صحیح قیمت گذاری CDO ترکیبی و حتی سایر مشتقات اعتباری را تسریع بخشد.

به نظر می رسد استفاده از دیگر توزیع های آمیخته که از توزیع های با دم کلفت بهره می گیرند، نتایج نزدیک به داده های واقعی بازار ارائه کند.

مطالعات انجام گرفته در مورد مدل های مذکور در این پایان نامه در دی ماه ۱۳۹۰ در «دومین همایش ریاضیات و علوم انسانی» در دانشگاه علامه طباطبائی و همچنین در فروردین ماه سال جاری در کنفرانس Fifth International Conference MAF2012, Mathematical and Statistical Methods for

“Actuarial Sciences and Finance” در انستیتو علوم، ادبیات و هنر ونیز<sup>۱</sup> ارائه شده است.

همواره تلاش برای حل مسائل بومی از اهمیت زیادی برخوردار بوده است. از این رو در صدد برآمدیم

<sup>۱</sup> Istituto Veneto di Scienze Lettere ed Arti

بخشی از این پایان‌نامه را جهت نیل به هدف کاهش زیان‌های ناشی از ریسک اعتباری در کشور که امروزه در سیستم بانکداری مشهود است، به بحث بومی‌سازی قرارداد مورد مطالعه در این پایان‌نامه اختصاص دهیم. لذا در فصل بعد به موضوع مطالعاتی پیرامون بومی‌سازی قرارداد CDO می‌پردازیم.



## فصل پنجم

# مطالعاتی پیرامون بومی سازی قرارداد تعهدات بدهی تضمین شده

همانطور که پیشتر گفته شد، مشتقات ابزارهای مالی هستند که برای انتقال برخی اشکال ریسکها بین دو یا چند طرف قرارداد در بازارهای مالی کاربرد دارند. تقسیم بندی مشتقات بر اساس ریسکی که انتقال می دهند عبارتند از: مشتقات اعتباری، مشتقات نرخ ارز، مشتقات کالا، مشتقات سهام و غیره. در این میان مشتقات اعتباری که در پاسخ به نیاز نهادهای مالی و بانکها به تنوع سازی و امکان معامله ریسک اعتباری در بازارها عرضه شده اند، ریسک اعتباری را از یک ریسک غیر نقد شونده به ریسک نقد شونده همچون ریسک بازار تبدیل کرده اند. از مزیت های اساسی دیگر این ابزارهای مالی می توان به موارد زیر اشاره کرد:

- ایجاد بازارهای کامل تر: که تقسیم کاراتر ریسک و پایین تر بودن هزینه های واسطه های مالی را به دنبال دارد.
- پخش ریسک اعتباری: که باعث کاهش ریسک سیستماتیک می شود.

## • مدیریت کاراتر ریسک اعتباری

همانطور که می‌دانید در این پایان نامه به تعریف و نحوه‌ی قیمت‌گذاری نوع خاصی از مشتقات اعتباری به نام تعهد بدهی تضمین شده‌ی ترکیبی و روش‌های قیمت‌گذاری آن پرداختیم. در این فصل نیز سعی بر این است که آن را از نقطه نظر مطابقت با دیدگاه فقه اسلامی مورد توجه و بررسی قرار دهیم و پاسخی برای این سؤال بیابیم که آیا با توجه به ساختار تعریف شده برای این قرارداد، آیا امکان استفاده از آن برای کاهش ریسک اعتباری در بانکداری اسلامی وجود دارد یا خیر.

## ۱.۵ ادبیات و مبانی فقهی

ابواب فقهی به طور کلی به دو دسته‌ی معاملات و عبادات تقسیم می‌شوند. معاملات اموری هستند که صحت آن‌ها به قصد قربت نیاز ندارد. به عبارت دیگر هدف از آن‌ها تنظیم امور دنیوی است. عقود که در زمره‌ی معاملات محسوب می‌گردد، تنظیم‌کننده‌ی روابط بین دو طرف قرارداد است. ارکان اصلی یک عقد، شامل ایجاب و قبول است که لفظ، اشاره و یا فعل طرفین بر آن دلالت می‌کند. همینطور طرفین قرارداد می‌بایست بالغ، عاقل و مختار باشند [۳۲، ۳۰].

### ۱.۱.۵ عقود مورد استفاده در بانکداری بدون ربا

در این بخش چندین قرارداد مورد استفاده در بانکداری اسلامی را که ممکن است با بررسی فقهی قراردادهای تعهدات بدهی تضمین شده در ارتباط باشند، معرفی می‌کنیم.

- **مضاربه:** قراردادی است که به موجب آن یکی از طرفین (مالک) عهده دار تأمین سرمایه (نقدی) می‌گردد، با قید این مطلب که طرف دیگر (عامل) با آن تجارت کرده و در سود حاصله هر دو طرف شریک باشند.

- **مزارعه:** مزارعه آن است که صاحب زمین، زمین خود را در اختیار زارع بگذارد تا زراعت کند و سهم معینی از حاصل را به مالک دهد.
- **مساقات:** هرگاه کسی درختان میوه‌ی خود را تا مدت معینی به دیگری واگذار کند که در مقابل دریافت سهمی از میوه، باغ او را آبیاری و رسیدگی نماید این معامله را «مساقات» گویند.
- **جعاله:** جعاله عبارت است از تعهد شخص حقیقی یا حقوقی به پرداخت اجرت (جعل) معین در برابر انجام کار معین. شخص متعهد را جاعل و انجام‌دهنده‌ی کار را عامل گویند.
- **اجاره به شرط تملیک:** عقدی است که در آن مستأجر در زمان سررسید قرارداد و در صورت عمل به شرایط مندرج در قرارداد، عین مستأجره را مالک می‌شود.
- **سلف:** قرارداد سلف توافقی است بین دو طرف که خارج از بورس منعقد می‌شود و برای خرید یا فروش یک دارایی در آینده با قیمت مورد توافق دو طرف هنگام امضاء قرارداد کاربرد دارد و جزء قدیمی‌ترین و ابتدایی‌ترین قراردادهای مشتقه تلقی می‌شود.
- **قرض:** در قرارداد قرض، قرض‌دهنده مال را به مالکیت قرض‌گیرنده در می‌آورد و در مقابل، قرض‌گیرنده متعهد می‌شود عوض آنچه را که قرض کرده است به قرض‌دهنده برگرداند.
- **بیمه:** طبق ماده‌ی یک قانون بیمه‌ی ایران، بیمه عقدی است که به موجب آن، بیمه‌گر متعهد می‌شود در ازای دریافت وجه یا وجوهی از بیمه‌گذار، در صورت وقوع حادثه‌ای، خسارت وارده بر او را جبران نموده و یا وجهی بپردازد. وجه پرداختی توسط بیمه‌گذار را حق بیمه و آنچه را که بیمه می‌شود، موضوع بیمه می‌نامند.
- **ضمان:** عقدی است که در آن ضامن متعهد می‌شود دین شخصی دیگر (مضمون عنه) را به طلبکارش (مضمون له) بپردازد.
- **وکالت:** طبق ماده‌ی ۶۵۶ قانون مدنی، وکالت عقدی است که به موجب آن یکی از طرفین،

طرف دیگر را برای انجام امری نایب خود می‌نماید.

## ۲.۱.۵ بررسی فقهی قرارداد تعهد بدهی تضمین شده

### • تعهد بدهی تضمین شده‌ی فروش واقعی

در بانکداری بدون ربا، فرآیند توریق می‌بایست بر مبنای خرید و فروش دین صورت پذیرد. این روند می‌تواند در کاهش ریسک نقدینگی و ریسک اعتباری در نظام بانکداری اسلامی ایران نقش بسزایی داشته باشد. اکثر فقهای متأخر در مورد فروش دین به شخص ثالث توافق نظر دارند. در این نظام مالی می‌توان اوراق بهادار اسلامی‌ای چون صکوک<sup>۱</sup> را مورد توریق قرار داد. در این نوع CDO، بانک مجموعه‌ای از تسهیلات قابل نکول را که به مشتریان عرضه کرده است، به یک شرکت با هدف خاص (SPV) فروخته و SPV نیز به پشتوانه‌ی دارایی‌های موجود، اوراق بهادار منتشر می‌نماید.

### • تعهد بدهی تضمین شده‌ی ترکیبی

همانطور که پیش‌تر اشاره شد، در CDO ترکیبی SPV برای انتقال ریسک اعتباری و همچنین منتفع شدن از تفاوت سود حاصل از فروش سوآپ نکول اعتباری و سود پرداختی به دارندگان اوراق، یک سری اوراق بهادار با قیمت اسمی مشخص منتشر می‌نماید که این اوراق دارای سطوح اولویت متفاوتی بوده و کیفیت اعتباری آن‌ها یکسان نیست و SPV متعهد به پرداخت اصل و سود این اوراق می‌باشد. سپس SPV وجوه حاصل از این اوراق را به همراه سودهای حاصل از فروش سوآپ نکول اعتباری در دارایی‌های بدون ریسک سرمایه‌گذاری می‌کند که از محل بازده این سرمایه‌گذاری، سود دارندگان اوراق را پرداخت می‌نماید. بنابراین واضح

<sup>۱</sup> صکوک اوراق بهادار اسلامی است که به دلیل درگیر کردن یک دارایی مشخص فیزیکی و به میان آوردن قراردادهایی مانند اجاره و مضاربه، منطبق با قانون بانکداری بدون ربا است. صکوک جمعِ معرب واژه‌ی چک یعنی صک است. از انواع مهم صکوک می‌توان به صکوک اجاره، مضاربه و استصناع اشاره کرد.

است که دارایی‌های سبد در این شکل ترکیبی، پشتوانه‌ی اوراق بهادار قرار نمی‌گیرند. در اینجا جهت اسلامی و بومی کردن این ابزار مالی، تأیید آن بر مبنای موازین اسلامی الزامی است. باید توجه داشت که در بانکداری اسلامی، وام ماهیت قرض داشته و شرط زیاده بر آن حرام است. همچنین در بانکداری بدون ربا تخصیص منابع و ارائه‌ی تسهیلات به جای وام‌های ربوی به روش‌های مختلفی از جمله فروش اقساطی، اجاره به شرط تملیک، سلف، جعاله، خرید دین و... صورت می‌پذیرد. از طرفی در نظام مالی جهانی، اوراق منتشره، اوراق قرضه می‌باشد که ماهیت ربوی دارند؛ بنابراین به‌عنوان جایگزینی برای این اوراق در نظام مالی اسلامی، انواع اوراق اجاره، منفعت، استصناع، مضاربه، مزارعه، مساقات و اوراق مشارکت توصیه می‌گردد.

### ۳.۱.۵ بررسی فقهی رابطه‌ی بین بانک و SPV

همانطور که اشاره گردید در یک CDO ترکیبی SPV مالک سبد دارایی‌ها نیست. بلکه در ازاء فروش حمایت (مثل فروش سوآپ نکول اعتباری)، پرداخت‌های صرف را از خریدار سوآپ نکول اعتباری (بانک) دریافت می‌کند و این جریانات نقدی ثابت تا پایان زمان قرارداد و یا تا زمان وقوع یک رویداد اعتباری ادامه می‌یابد. بعد از وقوع رویداد اعتباری، فروشنده‌ی سوآپ نکول اعتباری به عنوان فروشنده‌ی حمایت بایستی نسبت به جبران زیان خریدار سوآپ اقدام نماید. در مورد ماهیت فقهی سوآپ نکول اعتباری، بررسی‌هایی انجام گردیده که صحت این ابزار تحت قرارداد بیمه، عقد ضمان و قرارداد جدید تأیید گردیده است.

### ۴.۱.۵ بررسی فقهی رابطه‌ی SPV و دارندگان اوراق

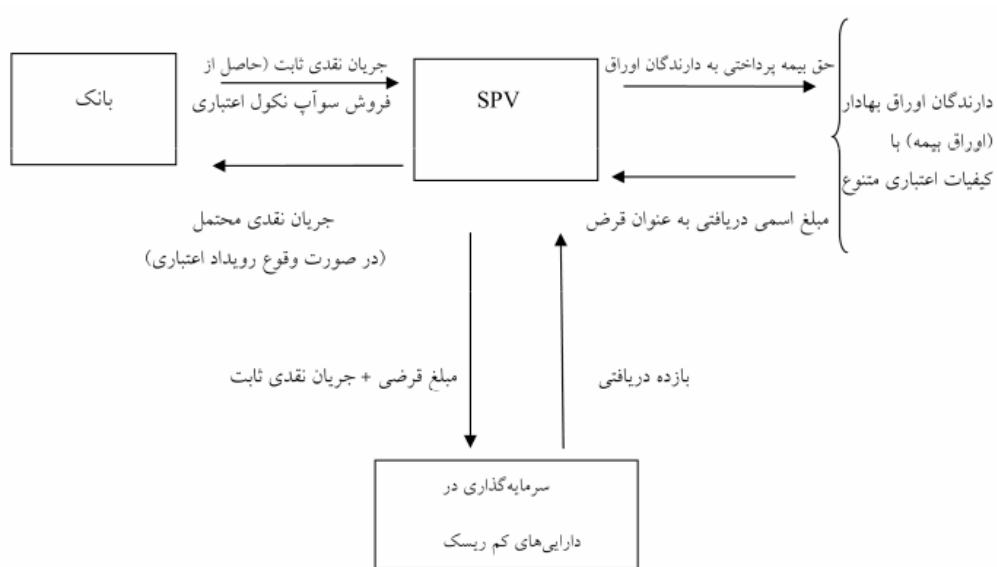
برای بررسی فقهی اوراق منتشره توسط SPV (رابطه‌ی دارندگان اوراق با ناشر)، می‌توان دو حالت ذیل را بررسی نمود:

## • اوراق منتشره به عنوان قرارداد بیمه به شرط قرض:

همانطور که در شکل ۱.۵ مشخص است، در این نوع قرارداد، SPV حق بیمه ای را به صورت دوره‌ای به دارندگان اوراق پرداخت می‌نماید و در عوض، دارندگان اوراق متعهد می‌شوند که در صورت بروز نکول در دارایی‌های بانک، میزان زیان را جبران نمایند و در صورت حدوث نکول دارایی‌ها، SPV به دلیل تعهد دارندگان اوراق مبنی بر جبران زیان احتمالی، حق بیمه‌ی آن‌ها را عوض زیان حاصل از نکول دارایی‌ها پرداخت نمی‌نماید. همچنین تحت عقد بیمه، SPV شرط می‌کند که دارنده‌ی اوراق مبلغی را که معادل قیمت اسمی اوراق مشابه در بازار است، به عنوان قرض تا سررسید معین به SPV بدهد که معمولاً سررسید قرض با قرارداد بیمه تطابق دارد. از آن جا که در قرض، مال به تملیک قرض گیرنده در می‌آید، SPV می‌تواند وجوه حاصل از فروش سوآپ نکول اعتباری و قرض دریافتی را در هر جایی که می‌خواهد سرمایه‌گذاری نماید و بخشی از سود حاصل را بابت حق بیمه به دارندگان اوراق پرداخت نماید. شرط مذکور شرایط لازم صحت شرط را - که در کتب فقهی مفصل بحث شده است - دارد. همانطور که بیان شد در بیمه لازم نیست که مقدار خسارت تعیین شود. بنابراین اگر قرار بر جبران هر مقدار خسارتی بگذارند، صحیح است. در اینجا نیز بسته به کیفیت اعتباری اوراق، میزان زیانی که دارندگان جبران آن را تعهد می‌کنند، متفاوت است.

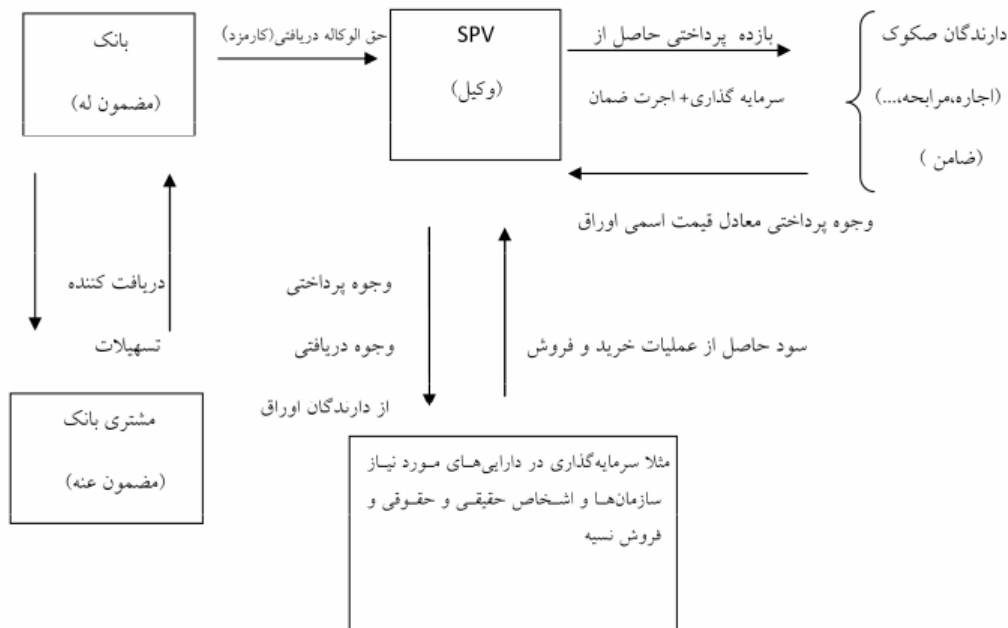
## • انتشار صکوک ذیل عقود اجاره و غیره به شرط ضمان:

در این حالت سعی بر این است که متناسب با شرایط و زیرساختهای موجود در کشور، راه‌حل عملی‌تری جهت استفاده از این ابزار مشتقه پیشنهاد گردد. به همین خاطر در این حالت تغییراتی در CDO اعمال می‌شود که در عین این که کارکردهای یک CDO ترکیبی متعارف حفظ می‌گردد، این ابزار را ساده‌تر و عملیاتی‌تر نیز می‌سازد. همانطور که در شکل ۲.۵ ملاحظه می‌گردد، در این حالت SPV به جای اینکه با انتشار سوآپ نکول اعتباری، جبران نکول احتمالی مشتریان بانک را تعهد کند، به ازای دریافت مبلغی به عنوان کارمزد (حق الوکاله) از سوی بانک



شکل ۱.۵: اوراق منتشره به عنوان قرارداد بیمه

وکیل می‌گردد که برای متقاضیان تسهیلات بانک ضامن پیدا کند. SPV برای تأمین مالی اقدام به انتشار اوراقی تحت عقود اجاره، مضاربه، مشارکت یا غیره نموده و وجوه مازاد افراد را جمع‌آوری کرده و متناسب با نوع اوراق، سرمایه‌گذاری لازم را به عمل آورده و سود حاصل از سرمایه‌گذاری را به دارندگان اوراق می‌دهد. علاوه بر سود اوراق، ناشر (SPV) به نیابت از بانک مبلغی (درصدی) نیز به عنوان اجرت ضمانت به دارندگان اوراق داده و در عوض از دارندگان اوراق خواسته می‌شود که جبران نکول احتمالی مشتریان بانک را ضمانت کنند. این عقد ضمانت به عنوان شرط ضمن عقد ذیل عقود بیع مرابحه، مضاربه، اجاره و ... قرار می‌گیرد و به خریداران صکوک اعلان می‌گردد. چنین شرطی، شرایط لازم صحت شرط را دارا می‌باشد. SPV علاوه بر بهره بردن از مزایای تأمین مالی از طریق انتشار صکوک، از تفاوت حق الوکاله دریافتی از بانک و اجرت پرداختی بابت ضمانت نیز منتفع می‌گردد.



شکل ۲.۵: اوراق منتشره به عنوان قرارداد اجاره و غیره به شرط ضمان

## ۵.۱.۵ نتیجه گیری

امروزه با توجه به افزایش رو به رشد مطالبات معوق بانکی کشور و فقدان سیستم مدیریت کارای ریسک اعتباری، به نظر می‌رسد فراهم آوردن بستری مناسب جهت عملیاتی شدن مشتقه‌ی اعتباری CDO سبب گردد تا بسیاری از مشکلات اعتباری بانکها و مؤسسات اعتباری برطرف شود. نوع ترکیبی این ابزار به دلیل داشتن خاصیت تأمین مالی و همچنین به دلیل عدم خرید و فروش دین در آن، بر نوع فروش واقعی آن ترجیح دارد.

بر اساس بررسی‌های فقهی انجام شده، نتیجه این شد که اوراق منتشره بایستی از نوع اوراق بیمه باشند که در این صورت برای توجیه وجه نقدی که SPV از دارندگان اوراق دریافت می‌کند، آن وجه نقد را ذیل عقد قرض دریافت می‌کند (بیمه به شرط قرض). راه حل دوم آن است که اوراق منتشره، اوراق مشارکت و یا انواع صکوک باشد که در این جا نیز برای انتقال ریسک اعتباری بانک، از عقد ضمان

استفاده نمودیم. بدین معنی که اوراق در قالب عقد خاصی منتشر گردیده که شرط ضمان نیز ضمن آن عقد خاص لحاظ شده و مانعی برای چنین شرطی وجود ندارد (مثلاً اجاره به شرط ضمان در صکوک اجاره).

در پایان، ذکر چند نکته ضروری به نظر می‌رسد:

- لازم است ساز و کاری طراحی گردد که مسئله‌ی عدم تقارن اطلاعات و خطر اخلاقی<sup>۱</sup> بین ضامن و مضمون له در مورد کیفیت اعتباری مشتریان بانک و تسهیلات ارائه شده مرتفع گردد.
- با توجه به این که در مورد دوم، ضامن بدون اجازه‌ی بدهکار، پرداخت جریان‌های نقدی وی را تعهد کرده است، بنابراین حق رجوع به بدهکار را ندارد. بنابراین لازم است ساز و کاری ارائه شود که امکان مطالبه‌ی وجوه پرداختی از بدهکار توسط بانک یا خود ضامن فراهم گردد. به عنوان یک راهکار، بانک ذیل عقود خود با مشتریان، وکالت در یافتن ضامن را برای آنها شرط می‌کند که در ادامه این وکالت را به SPV می‌سپارد تا او این کار را انجام دهد. در اینصورت مشکل عدم اجازه‌ی ضامن از مضمون عنه و احکام آن مبنی بر عدم حق مراجعه‌ی ضامن به مضمون عنه برطرف می‌شود. در مرحله‌ی بعد که رابطه‌ی بین بانک و SPV مطرح است، از تعهداتی که بانک باید ذیل عقد وکالت بدهد، آن است که ملزم به تعیین صندوقی جهت برگشت بدهی‌های مشتریان نکول کرده شود و مبلغ دریافتی را به SPV و او نیز به دارندگان اوراق بدهد. این تعهد در قالب شرط ضمن عقد (وکالت در ضمان) بلامانع است.
- این امکان وجود دارد که متقاضیان تسهیلات بانکی را رتبه‌بندی اعتباری نموده و ضمانت یا بیمه با توجه به رتبه‌ی اعتباری آنها انجام گیرد. به عنوان مثال فرض کنید که SPV دو یا سه نوع صکوک با کیفیت اعتباری و بازده متنوع منتشر نماید. در این صورت دارندگان اوراق کم کیفیت، ضامن ثلثی از مشتریان بانک می‌شوند که بدحساب‌تر محسوب می‌گردند. دارندگان اوراق با کیفیت متوسط، ضامن ثلث دیگری از مشتریان با رتبه اعتباری متوسط و دارندگان

<sup>۱</sup> Moral Hazard

اوراق با کیفیت بالا، ضامن آن دسته از مشتریانی می‌شوند که دارای رتبه اعتباری بهتری هستند.

- با توجه به ماهیت این ابزار به نظر می‌رسد که ماهیتش به بیمه نزدیک‌تر باشد. ولی چون در کشور، اوراقی به نام اوراق بیمه منتشر نگردیده، برای ساده‌تر و عملیاتی‌تر شدن این ابزار می‌توان از ابزارهای مالی اسلامی موجود همانند صکوک اجاره و غیره به شرط ضمان استفاده نمود.



# پیوست آ

## پیوست

### ۱. آ اثبات گزاره ۱.۶.۲

گزاره ۱.۶.۲ امید ریاضی ضرر برش را می‌توان به صورت زیر نیز نوشت:

$$EL_{(K_1, K_2)}(t) = \frac{1}{K_2 - K_1} \left( \int_{K_1}^{\infty} (x - K_1) dF(t, x) - \int_{K_2}^{\infty} (x - K_2) dF(t, x) \right).$$

اثبات.

$$\begin{aligned} EL_{(K_1, K_2)}(t) &= \frac{1}{K_2 - K_1} \int_{K_1}^{\infty} (\min(x, K_2) - K_1) dF(t, x) \\ &= \frac{1}{K_2 - K_1} \left( \int_{K_1}^{K_2} (x - K_1) dF(t, x) + \int_{K_2}^{\infty} (K_2 - K_1) dF(t, x) \right) \\ &= \frac{1}{K_2 - K_1} \left( \int_{K_1}^{\infty} (x - K_1) dF(t, x) - \int_{K_2}^{\infty} (x - K_1) dF(t, x) \right) \\ &\quad + \int_{K_2}^{\infty} (K_2 - K_1) dF(t, x) \\ &= \frac{1}{K_2 - K_1} \left( \int_{K_1}^{\infty} (x - K_1) dF(t, x) - \int_{K_2}^{\infty} (x - K_2) dF(t, x) \right) \end{aligned}$$

□

## ۲. آ. اثبات گزاره‌ی ۲.۲.۳

گزاره‌ی ۲.۲.۳ برای هر  $p$  و  $x$  در  $(0, 1]$  داریم:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\lfloor mx \rfloor} \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k} = \begin{cases} 0, & \text{اگر } x < p, \\ 1, & \text{اگر } x > p. \end{cases}$$

اثبات. فرض کنیم  $S_m$  تعداد ۱ها در  $m$  آزمایش مستقل برنولی باشد، که در آن ۱ با احتمال  $p$  ظاهر می‌شود. آنگاه، بنا به قانون اعداد بزرگ،  $\frac{S_m}{m}$  وقتی  $m$  به  $\infty$  میل می‌کند به  $p$  همگرا است. تابع توزیع  $\frac{S_m}{m}$  را در نظر بگیرید:

$$F_m(x) := \mathbb{P}\left[\frac{S_m}{m} \leq x\right].$$

از آنجا که همگرایی به‌طور تصادفی، همگرایی در توزیع را نتیجه می‌دهد،  $F_m(x) \rightarrow F(x)$  وقتی  $m \rightarrow \infty$  که  $F(x)$  تابع توزیع متغیر تصادفی  $x_p \equiv p$  است:

$$F(x) := \mathbb{P}[x_p \leq x] = \begin{cases} 0, & \text{اگر } x < p, \\ 1, & \text{اگر } x > p. \end{cases}$$

قابل ذکر است که:

$$\begin{aligned} F_m(x) &= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k} \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor mx \rfloor} \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k}, \end{aligned}$$

□

که  $[a]$  در آن نشان‌دهنده‌ی قسمت صحیح  $a$  است.

### ۳.آ اثبات لم ۱.۴.۳

لم ۱.۴.۳ در مدل واسیچک، امید ریاضی ضرر برش میانی  $(K_1, K_2)$  با فرض بازیافت صفر در زمان  $t$  برابر است با:

$$EL_{(K_1, K_2)}(t) = \frac{\Phi_2(-\Phi^{-1}(K_1), C(t), \rho) - \Phi_2(-\Phi^{-1}(K_2), C(t), \rho)}{K_2 - K_1},$$

که  $\Phi_2$  در آن تابع توزیع نرمال دو متغیره است و همینطور ماتریس کوواریانس عبارت است از:

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{1-a^2} \\ -\sqrt{1-a^2} & 1 \end{pmatrix}.$$

اثبات. با استفاده از انتگرال گیری جز به جز داریم:

$$\begin{aligned} \int_K^1 (x - K) dF(t, x) &= F(t, x)(x - K) \Big|_K^1 - \int_K^1 F(t, x) dx \\ &= 1 - K - \int_K^1 F(t, x) dx \end{aligned} \quad (1.آ)$$

به همین ترتیب برای تابع  $F(t, x) = \Phi\left(\frac{\sqrt{1-a^2}\Phi^{-1}(x) - C(t)}{a}\right)$

$$\int_K^1 (x - K) dF(t, x) = (1 - K) - \int_K^1 \Phi\left(\frac{\sqrt{1-a^2}\Phi^{-1}(x) - C(t)}{a}\right) dx. \quad (2.آ)$$

(2.آ) را می توان به صورت زیر نیز نوشت:

$$\int_K^1 (x - K) dF(t, x) = \int_K^1 \left(1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{1-a^2}\Phi^{-1}(x) - C(t)}{a}\right)\right) dx. \quad (3.آ)$$

توجه شود که

$$\begin{aligned} 1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{1-a^2}\Phi^{-1}(x) - C(t)}{a}\right) &= 1 - \int_{-\infty}^{\frac{\sqrt{1-a^2}\Phi^{-1}(x) - C(t)}{a}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \\ &= \int_{\frac{\sqrt{1-a^2}\Phi^{-1}(x) - C(t)}{a}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy. \end{aligned}$$

برمی‌گردیم به (۳.آ) و برای سمت راست تساوی داریم:

$$\int_K^1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{1 - a^2} \Phi^{-1}(x) - C(t)}{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy dx. \quad (4.آ)$$

حال با تغییر متغیر  $x' = -\Phi^{-1}(x)$ ، که معادل است با  $X = \Phi(-x')$ ، نتیجه می‌گیریم:

$$dx = -\Phi'(-x') dx' = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x'^2}{2}} dx'.$$

حدود انتگرال از  $-\Phi^{-1}(K)$  تا  $-\Phi^{-1}(1) = -\infty$  است. پس برای (۴.آ) داریم:

$$\begin{aligned} & \int_{-\Phi^{-1}(K)}^{-\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{1 - a^2} x' + C(t)}{a} \left( -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Phi'(-x') e^{-\frac{y^2}{2}} \right) dy dx' \\ &= \int_{-\Phi^{-1}(K)}^{-\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{1 - a^2} x' + C(t)}{a} \left( -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x'^2 + y^2}{2}} \right) dy dx' \\ &= \int_{-\infty}^{-\Phi^{-1}(K)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{1 - a^2} x' + C(t)}{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x'^2 + y^2}{2}} dy dx'. \end{aligned} \quad (5.آ)$$

با تغییر متغیر  $y' = -\left( ay + \sqrt{1 - a^2} x' \right)$  یعنی  $y = -\frac{\sqrt{1 - a^2} x' + y'}{a}$ ، داریم:

$$dy = -\frac{dy'}{a}$$

و حدود انتگرال به صورت زیر خواهد بود:

از

$$-a \left( -\frac{\sqrt{1 - a^2} x' + C(t)}{a} \right) - \sqrt{1 - a^2} x' = C(t)$$

تا

$$-\left( a\infty + \sqrt{1 - a^2} x' \right) = -\infty.$$

آنگاه (۵.آ) را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$\int_{-\infty}^{-\Phi^{-1}(K)} \int_{C(t)}^{-\infty} \left( -\frac{1}{\sqrt{2\pi}a} e^{-\frac{x'^2 + \frac{(\sqrt{1-a^2}x' + y')^2}{a^2}}{2}} \right) dy' dx'$$

$$\int_{-\infty}^{-\Phi^{-1}(K)} \int_{-\infty}^{C(t)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}a} e^{-\frac{x'^2 + 2\sqrt{1-a^2}x'y' + y'^2}{2a^2}} dy' dx'. \quad (6.A)$$

می‌دانیم که بردار  $(XY)$  با توزیع نرمال دو متغیره با ماتریس کوواریانس  $\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{pmatrix}$  تابع توزیعی

به شکل زیر دارد:

$$\phi_2(x, y, \Sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sqrt{1-\nu^2}}} e^{-\frac{x^2 - 2\nu xy + y^2}{2(1-\nu^2)}} dy dx. \quad (7.A)$$

پس تابع تحت انتگرال مضاعف در (5.A)، تابع چگالی یک بردار تصادفی  $(X'Y')$  با توزیع نرمال دو

متغیره است که در آن  $\nu = -\sqrt{1-a^2}$  و لذا (5.A) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\int_{-\infty}^{-\Phi^{-1}(K)} \int_{-\infty}^{C(t)} \phi_2(x', y', \rho) dy' dx' = \Phi_2(-\phi_{-1}(K), C(t), \rho) \quad (8.A)$$

با ماتریس کوواریانس:

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{1-a^2} \\ -\sqrt{1-a^2} & 1 \end{pmatrix}.$$

□

## ۴.۱.۴ اثبات لم ۴.۱.۴

لم ۴.۱.۴ تابع چگالی متغیر تصادفی  $X \sim NIG(\alpha, \beta)$  را به شکل زیر نیز می‌توان نوشت:

$$f_{NIG}(x; \alpha, \beta, \mu, \delta) = \frac{\delta \alpha \cdot \exp(\delta \gamma + \beta(x - \mu))}{\pi \cdot \sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2}} K_1 \left( \alpha \sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2} \right),$$

که در آن  $K_1(w) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \exp(-\frac{1}{\sqrt{\pi}} w(t + t^{-1})) dt$  تابع بسل تعدیل شده‌ی نوع سوم<sup>۱</sup> بوده و

$$\gamma := \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \text{ است.}$$

اثبات. ابتدا روابط مربوط به توابع چگالی توزیع‌های گاوسی و گاوسی معکوس را در (۱.۴) جایگذاری

می‌کنیم:

$$\begin{aligned} & f_{NIG}(x; \alpha, \beta, \mu, \delta) \\ &= \int_0^\infty f_N(x; \mu + \beta y, y) \cdot f_{IG}(y; \delta\gamma, \gamma^2) dy \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\pi y}} \exp\left(-\frac{(x - \mu - \beta y)^2}{y}\right) \cdot y^{-\frac{\gamma}{2}} \frac{\delta}{\sqrt{\pi}} \exp(\delta\gamma) \cdot \exp\left(-\frac{1}{\gamma} \left(\frac{\delta^2}{y} + \gamma y\right)\right) dy \\ &= \frac{\delta}{\sqrt{\pi}} \exp(\delta\gamma + \beta(x - \mu)) \cdot \int_0^\infty y^{-\frac{\gamma}{2}} \exp\left(-\frac{1}{\gamma} \left(\frac{(x - \mu)^2}{y} + \delta^2 + \alpha^2 y\right)\right) dy. \end{aligned}$$

حال با جایگذاری  $y = \frac{\sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2}}{\alpha w}$  داریم:

$$\begin{aligned} & f_{NIG}(x; \alpha, \beta, \mu, \delta) \\ &= \frac{\delta}{\sqrt{\pi}} \exp(\delta\gamma + \beta(x - \mu)) \cdot \int_0^\infty \frac{\alpha^2 w^2}{\delta^2 + (x - \mu)^2} \\ & \cdot \exp\left(-\frac{1}{\gamma} \left(\frac{\alpha w((x - \mu)^2 + \delta^2)}{\sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2}} + \alpha^2 \frac{\sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2}}{\alpha w}\right)\right) \frac{\sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2}}{\alpha w^2} dw \\ &= \frac{\delta}{\sqrt{\pi}} \exp(\delta\gamma + \beta(x - \mu)) \cdot \int_0^\infty \frac{\alpha}{\sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2}} \\ & \cdot \exp\left(-\frac{1}{\gamma} \left(\alpha \sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2} (w + w^{-1})\right)\right) dw \\ &= \frac{\delta \alpha \cdot \exp(\delta\gamma + \beta(x - \mu))}{\pi \cdot \sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2}} K_1\left(\alpha \sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2}\right). \end{aligned}$$

□

## ۵.۱.۴ اثبات لم ۵.آ

لم ۵.۱.۴ تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی  $X \sim \mathcal{NIG}(\alpha, \beta, \mu, \delta)$  عبارت است از:

$$M_X(t) = \exp(\mu t) \frac{\exp(\delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2})}{\exp(\delta\sqrt{\alpha^2 - (\beta + t)^2})}. \quad (۹.آ)$$

اثبات. می‌دانیم برای هر تابع چگالی  $f$  رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1,$$

برای تابع چگالی  $\mathcal{NIG}$  داریم:

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\delta\alpha \cdot \exp(\delta\gamma + \beta(x - \mu))}{\pi \cdot \sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2}} K_1\left(\alpha\sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2}\right) dx \\ &= \frac{\delta\alpha}{\pi} \exp(\delta\gamma - \beta\mu) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{K_1\left(\alpha\sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2}\right) e^{\beta x}}{\sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2}} dx, \end{aligned}$$

مشاهده می‌شود:

$$\left( \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{K_1\left(\alpha\sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2}\right) e^{\beta x}}{\sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2}} dx \right)^{-1} = \frac{\delta\alpha}{\pi} \exp(\delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} - \beta\mu).$$

حال برای تابع مولد گشتاور داریم:

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \mathbb{E}[e^{tX}] \\ &= \frac{\delta\alpha}{\pi} \exp(\delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} - \beta\mu) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{K_1\left(\alpha\sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2}\right) e^{(\beta+t)x}}{\sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2}} dx \\ &= \frac{\delta\alpha}{\pi} \exp(\delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} - \beta\mu) \frac{\pi}{\delta\alpha} \exp\left(-\delta\sqrt{\alpha^2 - (\beta + t)^2} + (\beta + t)\mu\right) \\ &= \exp(\mu t) \frac{\exp(\delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2})}{\exp(\delta\sqrt{\alpha^2 - (\beta + t)^2})}. \end{aligned}$$

□

## ۶.آ اثبات دو ویژگی اساسی توزیع $NIG$

دو ویژگی اساسی توزیع  $NIG$

(الف) ناوردائی مقیاسی: برای یک متغیر تصادفی  $X \sim NIG(\alpha, \beta, \mu, \delta)$  و یک اسکالر  $c$ ،  $cX$

دارای توزیع  $NIG$  به صورت زیر است:

$$cX \sim NIG\left(\frac{\alpha}{c}, \frac{\beta}{c}, c\mu, c\delta\right). \quad (۱۰.آ)$$

(ب) ناوردائی تحت پیچش: مجموع  $X \sim NIG(\alpha, \beta, \mu_1, \delta_1)$  و  $Y \sim NIG(\alpha, \beta, \mu_2, \delta_2)$  که

مستقل از هم هستند نیز دارای توزیع  $NIG$  به شکل زیر است:

$$X + Y \sim NIG(\alpha, \beta, \mu_1 + \mu_2, \delta_1 + \delta_2). \quad (۱۱.آ)$$

اثبات.

(i) با توجه به ویژگی‌های تابع مولد گشتاور می‌دانیم:

$$M_{cX}(t) = M_X(ct).$$

پس، می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} M_{cX}(t) &= \exp(\mu ct) \frac{\exp\left(\delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}\right)}{\exp\left(\delta\sqrt{\alpha^2 - (\beta + ct)^2}\right)} \\ &= \exp(c\mu t) \frac{\exp\left(c\delta\sqrt{\left(\frac{\alpha}{c}\right)^2 - \left(\frac{\beta}{c}\right)^2}\right)}{\exp\left(c\delta\sqrt{\left(\frac{\alpha}{c}\right)^2 - \left(\frac{\beta}{c} + t\right)^2}\right)} \end{aligned}$$

که در واقع تابع مولد گشتاور  $NIG\left(\frac{\alpha}{c}, \frac{\beta}{c}, c\mu, c\delta\right)$  است.

(ii) بنا به ویژگی‌های تابع مولد گشتاور، برای دو متغیر مستقل از هم  $X$  و  $Y$  داریم:

$$M_{X+Y}(t) = M_X(t)M_Y(t).$$

پس برای  $X \sim \mathcal{NIG}(\alpha, \beta, \mu_1, \delta_1)$  و  $Y \sim \mathcal{NIG}(\alpha, \beta, \mu_2, \delta_2)$  می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} M_{X+Y}(t) &= \exp(\mu_1 t) \frac{\exp(\delta_1 \sqrt{\alpha^2 - \beta^2})}{\exp(\delta_1 \sqrt{\alpha^2 - (\beta + t)^2})} \exp(\mu_2 t) \frac{\exp(\delta_2 \sqrt{\alpha^2 - \beta^2})}{\exp(\delta_2 \sqrt{\alpha^2 - (\beta + t)^2})} \\ &= \exp((\mu_1 + \mu_2)t) \frac{\exp((\delta_1 + \delta_2) \sqrt{\alpha^2 - \beta^2})}{\exp((\delta_1 + \delta_2) \sqrt{\alpha^2 - (\beta + t)^2})} \end{aligned}$$

که در واقع تابع مولد گشتاور  $\mathcal{NIG}(\alpha, \beta, \mu_1 + \mu_2, \delta_1 + \delta_2)$  است.

□



## مراجع

- [1] Altman, E. Financial ratios, discriminant analysis and the prediction of corporate bankruptcy. *Journal of Finance*, 1968.
- [2] Andersen, L., Sidenius J. Extensions to the gaussian copula: random recovery and random factor loadings. *Journal of Credit Risk*, pp. 29–70, 2005.
- [3] Andersen, L., Sidenius, J., Basu, S. All your hedges in one basket. *Journal of Risk*, pp. 67–72, 2003.
- [4] Black, F., Scholes, M. The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, 1973.
- [5] Bluhm, C., Overbeck, L., Wagner, C. An Introduction to Credit Risk Modelling. *CRC Press*, 2002.
- [6] Burtschell, X., Gregory, J., Laurent, J. P. A comparative analysis of CDO pricing models. *Journal of Derivatives*, pp. 9-37, 2009.
- [7] Credit Suisse Financial Products A credit risk management framework. , 1997.

- [8] Duffie, D., Singleton, K. J. Credit Risk: Pricing, Measurement, and Management. *Princeton University Press*, 2003.
- [9] Frey, R., McNeil, A., Nyfeler, M. Copulas and credit models. *Journal of Risk* pp. 111–113, 2001.
- [10] Hull, J., White A. Valuation of a CDO and an n-th to default CDS without a Monte Carlo simulation. *The Journal of Derivatives*, pp. 8–23, 2004.
- [11] Hull, J., Predescu, M., White, A. The Valuation of a correlation-dependent credit derivatives using a structural model. *Working Paper*, 2005.
- [12] Jarrow, R., Turnbull, S. Pricing options on financial securities subject to default risk. *Journal of Finance*, 1995.
- [13] Kalemanova, A., Schmid B. Werner R. The normal inverse Gaussian distribution for synthetic CDO pricing. *The Journal of Derivatives*, pp. 80–93, 2007.
- [14] Lando, D. On cox processes and credit risky securities. *Review of Derivatives Research*, pp. 99–120, 1998.
- [15] Laurent, L.P., Gregory, J. Basket default swaps, CDO's and factor copulas. *Journal of Risk*, pp. 103–122, 2005.
- [16] Li, D.X. The valuation of basket credit derivatives. *CreditMetrics Monitor*, pp. 34–50, 1998.
- [17] Li, D.X. On default correlation: a copula approach. *Journal of Fixed Income*, pp. 43–54, 2000.

- [18] Lucas, D. CDO handbook. *J.P. Morgan, Global Structured Finance Research*, 2001.
- [19] McGinty, L., Beinstein E. Ahluwalia R. Watts M. Introducing base correlation. *J.P. Morgan, Credit Derivatives Strategy*, pp. 1–4, 2004.
- [20] McKinsey and Company CreditPortfolioView 2.0. *Technische Dokumentation*, 2001.
- [21] Merton, R. On the pricing of corporate debt: the risk structure of interest rates. *The Journal of Finance*, 1974.
- [22] O’Kane, D., Schloegl L. An analytical portfolio credit model with tail dependence. *Quantitative Credit Research. Lehman Brothers*, 2003.
- [23] Schlösser, A. Pricing And Risk Management of Synthetic CDOs. *Springer*, 2011.
- [24] Schoenbucher, P. Taken to the limit: simple and not-so-simple loan loss distributions. *Working paper*, 2000.
- [25] Trinh, M., Thompson, R., Devarajan, M. Relative value of CDO tranches: a view through ASTERION. *Quantitative Credit Research. Lehman Brothers*, 2005.
- [26] Vasicek, O. The loan loss distribution.. *Working paper, KMV*, 1997.
- [27] Wilson, T. Portfolio credit risk, part i. *Journal of Risk*, 1997.
- [28] Wilson, T. Portfolio credit risk, part ii. *Journal of Risk*, 1997.

[29] Yang, R., Qin, X., Chen, T. CDO pricing using single factor  $\mathcal{M}_{G-NIG}$  copula model with stochastic correlation and random factor loading. of Mathematics Analysis and Applications, pp. 73-80, 2009.

[۳۰] پورمولا، سید محمد هاشم. توحیدی، محمد. احمدی، سعید. بررسی کاربرد مشتقه اعتباری در CDO مدیریت ریسک اعتباری و تأمین مالی از دیدگاه فقه شیعه. نشریه دانشگاه امام صادق.

[۳۱] شاکری حسین آباد، مجتبی. مدل سازی توزیع ضرر سبد اعتباری با استفاده از متغیرهای پیشگوی کمکی و مفهوم فریلتی. پایان نامه کارشناسی ارشد، ۱۳۹۰.

[۳۲] موسویان، سید عباس. موسوی بیوکی، سید محمد مهدی. مدیریت ریسک اعتباری در بانکداری اسلامی از طریق سواب نکول اعتباری. فصلنامه علمی پژوهشی اقتصاد اسلامی، ۱۳۸۸.

[۳۳] نانکلی، شهاب. بررسی مدل های عاملی برای محاسبه ریسک اعتباری سبد وام ها. پایان نامه کارشناسی ارشد، ۱۳۹۰.

# واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Legal Arbitrage	آربیتراژ قانونی
Survival Probability	احتمال بقاء
Default Probability	احتمال نکول
Credit Default Option	اختیار نکول اعتباری
Credit Spread Option	اختیار اسپرد اعتباری
Par Value	ارزش اسمی
Market Value	ارزش بازاری
Cadlag: Continue à Droite, Limite à Gauche	از راست پیوسته و دارای حد چپ
Credit Spread	اسپرد اعتباری
Annual Spread	اسپرد سالانه
Waterfall Principle	اصل آبشار
Credit Scoring	اعتبارسنجی
Credit Score	امتیاز اعتباری
Floating Rate Note	اوراق با نرخ شناور
Mortgage-Backed Securities	اوراق بهادار با پشتوانه‌ی رهنی
Commercial Mortgage-Backed Securities	اوراق بهادار با پشتوانه‌ی رهنی تجاری
Fixed-Coupon Bonds	اوراق قرضه با کوپن ثابت
Callable Bonds	اوراق قرضه‌ی برگشت‌پذیر
Zero-Coupon Bonds	اوراق قرضه بدون کوپن

Sovereign Debt	اوراق قرضه‌ی خارجی
Corporate Bonds	اوراق قرضه‌ی شرکتی
Convertible Bonds	اوراق قرضه‌ی قابل تبدیل
Bullet Payment	بازپرداخت بطور یک‌جا و در زمان سررسید
Tranche	برش
Senior Tranche	برش مقدم
Junior Tranche	برش مؤخر
Mezzanine Tranche	برش‌های میانی
Physically	به‌طور فیزیکی/غیر نقدی
Upfront Payment	پرداخت اولیه
Contingent Payment	پرداخت شرطی
Premium Payments	پرداخت‌های صرف
Hedge	پوشش ریسک
Funded	تأمین شده/با بودجه‌ی اولیه
Unfunded	تأمین نشده/با بودجه‌ی اولیه
Percentile-to-Percentile Transform	تبدیل صدک-به-صدک
Settlement	تسویه
In Cash	تسویه‌ی نقدی
Original Obligation	تعهد مرجع اولیه
Collateralized Debt Obligations	تعهدات بدهی تضمین شده
Synthetic Collateralized Debt Obligations	تعهدات بدهی تضمین شده‌ی تصنعی
Collateralized Loan Obligations	تعهدات وامی تضمین شده

Collateralized Bond Obligations	تعهدات ورقه‌ای تضمین شده
Restructuring of Debt	تغییر ساختار بدهی
Almost Surely	تقریباً حتمی
Deterioration of Credit Quality	تقلیل کیفیت اعتباری
Asset Volatility	تلاطم دارایی
Diversification	تنوع بخشی
Securitization	توریق
Mixture Distribution	توزیع آمیخته
Heavy-Tailed Distribution	توزیع دم کلفت
Inverse Gaussian Distribution	توزیع گاوسی معکوس
Yield	ثمر
Standard Brownian Motion	حرکت براونی استاندارد
Risk Buyer	خریدار ریسک
Credit Line	خط اعتباری
Underlying Asset	دارایی پایه
Underestimate	دست کم گرفتن
Credit Rating	رتبه بندی اعتباری
Credit Event	رویداد اعتباری
Market Risk	ریسک بازار
Basis Risk	ریسک پایه
Prepayment Risk	ریسک پیش پرداخت
High Market Concentration Risk	ریسک تمرکز بالای بازار

Counterparty Risk.....	ریسک طرف قرارداد
Operational Risk.....	ریسک عملیاتی
Legal Risk.....	ریسک قانونی
Systematic Mispricing.....	ریسک قیمت گذاری ناصحیح سیستماتیک
Inflation Risk.....	ریسک کاهش قدرت خرید/ریسک تورم
Model Risk.....	ریسک مدل
Interest Rate Risk.....	ریسک نرخ بهره
Liquidity Risk.....	ریسک نقدینگی
Exchange Rate Risk.....	ریسک نوسان نرخ ارز
Agency Risk.....	ریسک نمایندگی
Time to Default.....	زمان مانده تا نکول
Loss Given Default.....	زیان ناشی از نکول
Heterogeneous Finite Portfolio.....	سبد متنهائی ناهمگن
Maturity.....	سررسید
Economic Capital.....	سرمایه اقتصادی
Regulatory Capital.....	سرمایه قانونی
First to Default Swap.....	سواپ اولین نکول
Total Return Swap.....	سواپ بازده کامل
Credit Spread Swap.....	سواپ اسپرد اعتباری
Credit Default Swap.....	سواپ نکول اعتباری
nth to Default Swap.....	سواپ n امین نکول
Risk Contribution and Credit Concentration.....	سهام ریسک و تمرکز اعتباری

Expert Systems	سیستم‌های خبره
Standard Tranch CDS Indices	شاخص‌های CDS برش‌بندی شده‌ی استاندارد
Artificial Neural networks	شبکه‌های عصبی مصنوعی
Intensity	شدت
Special Purpose Vehicle	شرکت با هدف خاص
Option Premium	صرف اختیار
CDS Premium	صرف CDS
Common Market Factor	عامل بازاری مشترک
Systematic Factors	عامل‌های سیستماتیک
Idiosyncratic Factors	عامل‌های غیر سیستماتیک
Market Intransparency	عدم شفافیت بازار
Issuer	عرضه‌کننده‌ی ورق قرضه
Inaccessible	غیر قابل دسترسی
Distance to Default	فاصله تا نکول
Counting Process	فرآیند شمارشی
Analytical Hierarchy Process	فرآیند سلسله مراتب تحلیلی
Large Homogeneous Portfolio Assumption	فرض سبد وسیع همگن
Short Selling	فروش عاریتی
Protection Seller	فروشنده‌ی حمایت
Risk Seller	فروشنده‌ی ریسک
Strike Price	قیمت اعمال
Principal Amount	مقدار اصلی

Archimedean Copulas . . . . .	کاپولاهای ارشمیدسی
Correlation Smile . . . . .	لبخند همبستگی
Bond Holder . . . . .	مالک ورق قرضه
Exposure at Default . . . . .	مانده در نکول
Linear Probability Model . . . . .	مدل احتمال خطی
Structural Models . . . . .	مدل‌های ساختاری
Affine Intensity Models . . . . .	مدل‌های شدت آفین
CIR Intensity Models . . . . .	مدل‌های شدت CIR
Reduced Form Models . . . . .	مدل‌های کاهشده
Discrimination Analysis Models . . . . .	مدل‌های مبتنی بر تحلیل ممیزی
HJM Forward Default rate . . . . .	مدل‌های نرخ آتی نکول HJM
Nearest Neighbour Models . . . . .	مدل‌های نزدیک‌ترین همسایگی
Documentation . . . . .	مستند سازی
Credit Derivatives . . . . .	مشتقات اعتباری
Single Name Credit Derivatives . . . . .	مشتقات اعتباری تک اسمی
Securitization-Based Credit Derivatives . . . . .	مشتقات اعتباری مبتنی بر توریق
Failure to Pay . . . . .	ناتوانی در پرداخت
Convolution . . . . .	ناوردائی تحت پیچش
Scaling . . . . .	ناوردائی مقیاسی
Mean Rate of Return . . . . .	نرخ بازده میانگین
Proportional Cash Payout Rate . . . . .	نرخ عایدات نقدی نسبی
Recovery Rate . . . . .	نرخ بازیافت

Hazard Rate	نرخ مخاطره
Attachment Point	نقطه‌ی حد بالا
Detachment Point	نقطه‌ی حد پایین
Tail Dependence	وابستگی در دم
Loan	وام
Lender	وام‌دهنده
Borrower	وام‌گیرنده یا قرض‌گیرنده
Implied Correlation	همبستگی ضمنی
Arbitrage CDOs	CDO های آربیتراژی
Balance Sheet CDOs	CDO های ترازنامه‌ای
True Sale CDOs	CDO های فروش واقعی
Market Value CDOs	CDO های مبتنی بر ارزش بازار
Cash Flow CDOs	CDO های وجوه نقد
Forward CDS	CDS پیش‌رو

# واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Affine Intensity Models	مدل‌های شدت آفین
Agency risk	ریسک نمایندگی
Almost Surely	تقریباً حتمی
Analytical Hierarchy Process	فرآیند سلسله مراتب تحلیلی
Annual Spread	اسپرد سالانه
Arbitrage CDOs	CDO های آربیتراژی
Archimedean Copulas	کاپولاهای ارشمیدسی
Artificial Neural Networks	شبکه‌های عصبی مصنوعی
Asset-Backed Securities	اوراق قرضه با پشتوانه‌ی دارایی
Asset Volatility	تلاطم دارایی
Attachment Point	نقطه‌ی حد بالا
Balance Sheet CDOs	CDO های ترازنامه‌ای
Bankruptcy	ورشکستگی
Basis Risk	ریسک پایه
Basket Default Swap	سواب نکول سبد
Bond	ورق قرضه
Bond Holder	مالک ورق قرضه
Borrower	وام‌گیرنده/ قرض‌گیرنده
Bullet Payment	بازپرداخت بطور یک‌جا و در زمان سررسید

Callable Bond	ورق قرضه‌ی برگشت‌پذیر
Cadlag: Continue à Droite, Limite à Gauche	از راست پیوسته و دارای حد چپ
Cash Flow CDO	CDO های وجوه نقد
CDS Premium	صرف CDS
CIR Intensity Models	مدل‌های شدت CIR
Collateralized Bond Obligations	تعهدات ورقه‌ای تضمین شده
Collateralized Debt Obligations	تعهدات بدهی تضمین شده
Collateralized Loan Obligations	تعهدات وامی تضمین شده
Commercial Mortgage-Backed Securities	اوراق قرضه با پشتوانه‌ی رهنی تجاری
Common Market Factor	عامل بازاری مشترک
Contingent Payment	پرداخت شرطی
Convertible Bond	ورق قرضه‌ی قابل تبدیل
Convolution	ناوردائی تحت پیچش
Corporate Bond	ورق قرضه‌ی شرکتی
Correlation Smile	لبخند هبستگی
Counterparty Risk	ریسک طرف قرارداد
Counting Process	فرآیند شمارشی
Credit Default Option	اختیار نکول اعتباری
Credit Default Swap	سواپ نکول اعتباری
Credit Spread Option	اختیار اسپرد اعتباری
Credit Spread Swap	سواپ اسپرد اعتباری
Credit Event	رویداد اعتباری

Credit Line	خط اعتباری
Credit Migration	گذر اعتباری
Credit Rating	رتبه‌بندی اعتباری
Credit Risk	ریسک اعتباری
Credit Score	امتیاز اعتباری
Credit Scoring	اعتبارسنجی
Credit Spread	اسپرد اعتباری
Default Probability	احتمال نکول
Detachment Point	نقطه‌ی حد پائین
Deterioration of Credit Quality	تقلیل کیفیت اعتباری
Discrimination Analysis Models	مدل‌های مبتنی بر تحلیل ممیزی
Distance to Default	فاصله تا نکول
Documentation	مستند سازی
Economic Capital	سرمایه‌ی اقتصادی
Equity Tranche	برش سهام
Exchange Rate Risk	ریسک نوسان نرخ ارز
Expert Systems	سیستم‌های خبره
Exposure at Default	مانده در نکول
Failure to Pay	ناتوانی در پرداخت
First to Default Swap	سواپ اولین نکول
Fixed-Coupon Bonds	اوراق قرضه با کوپن ثابت
Floating Rate Notes	اوراق با نرخ شناور

Forward CDS	پیش‌رو CDS
Funded	تأمین‌شده/با بودجه‌ی اولیه
Hazard Rate	نرخ مخاطره
Heavy Tailed Distribution	توزیع دم کلفت
Hedge	پوشش ریسک
Heterogeneous Finite Portfolio	سبد متناهی ناهمگن
High Market Concentration Risk	ریسک تمرکز بالای بازار
HJM Forward Default Rate Models	مدل‌های نرخ آتی نکول HJM
Idiosyncratic Factors	عوامل‌های غیر سیستماتیک
Implied Correlation	همبستگی ضمنی
Inaccessible	غیر قابل دسترسی
In Cash	تسویه‌ی نقدی
Inflation Risk	ریسک نرخ تورم
Intensity	شدت
Interest Rate Risk	ریسک نرخ بهره
Inverse Gaussian Distribution	توزیع گاوسی معکوس
Issuer	عرضه‌کننده
Junior Tranche	برش مؤخر
Large Homogeneous Portfolio Assumption	فرض سبد وسیع همگن
Legal Risk	ریسک قانونی
Lender	وام دهنده
Linear Probability Model	مدل احتمال خطی

Liquidity Risk	ریسک نقدینگی
Loan	وام
Loss Given Default	زیان ناشی از نکول
Market Intransparency	عدم شفافیت بازار
Market Risk	ریسک بازار
Market Value	ارزش بازاری
Market Value CDOs	CDO های مبتنی بر ارزش بازار
Maturity	سررسید
Mean Rate of Return	نرخ بازده میانگین
Mixture Distribution	توزیع آمیخته
Model Risk	ریسک مدل
Mortgage-Backed Securities	اوراق قرضه با پشتوانه‌ی رهنی
Nearest Neighbour Model	مدل نزدیکترین همسایگی
nth to Default Swap	سوآپ n امین نکول
Option Premium	صرف اختیار
Operational Risk	ریسک عملیاتی
Original Obligation	تعهد مرجع اولیه
Par Value	ارزش اسمی
Percentile-to-Percentile Transform	تبدیل صدک-به-صدک
Physically	بطور فیزیکی یا غیر نقدی
Prepayment Risk	ریسک پیش‌پرداخت
Premium Payments	پرداخت‌های صرف

Principal Amount	مقدار اصلی
Proportional Cash Payout Rate	نرخ عایدات نقدی نسبی
Protection Buyer	خریدار حمایت
Protection Seller	فروشنده‌ی حمایت
Recovery Rate	نرخ بازیافت
Reduced Form Models	مدل‌های کاهشیده
Regulatory Arbitrage	آرbitراژ قانونی
Regulatory Capital	سرمایه‌ی قانونی
Restructuring of Debt	تغییر ساختار بدهی
Risk Buyer	خریدار ریسک
Risk Concentration and Credit Concentration	سهم ریسک و تمرکز اعتباری
Risk Seller	فروشنده‌ی ریسک
Scaling	ناوردائی مقیاسی
Securitization-Based Credit Derivatives	مشتقات اعتباری مبتنی بر توریق
Settlement	تسویه
Short Selling	فروش عاریتی
Single Name Credit Derivatives	مشتقات اعتباری تک اسمی
Sovereign Debt	اوراق قرضه‌ی خارجی
Special Purpose Vehicle	شرکت با هدف خاص
Standard Brownian Motion	حرکت براونی هندسی
Standard Tranched CDS Indices	شاخص‌های CDS برش‌بندی شده‌ی استاندارد
Strike Price	قیمت اعمال

Structural Models	مدل‌های ساختاری
Survival Probability	احتمال نکول
Synthetic Collateralized Debt Obligations	تعهدات بدهی تضمین شده‌ی ترکیبی
Systematic Factors	عامل‌های سیستماتیک
Systematic Mispricing	ریسک قیمت‌گذاری ناصحیح سیستماتیک
Tail Dependence	وابستگی در دم
Time to Default	زمان مانده تا نکول
Total Return Swap	سوآپ بازده کامل
Tranche	برش
True Sale CDOs	CDO های فروش واقعی
Underestimate	دست کم گرفتن
Underlying Asset	دارایی پایه
Upfront Payment	پرداخت اولیه
Waterfall Principle	اصل آبشار
Yield	ثمر
Zero-Coupon Bonds	اوراق قرضه بدون کوپن

## Abstract

In recent years, credit derivatives have revolutionized the trading and management of credit risk and have turned into an important tool for transferring and hedging this kind of risk. Credit default swaps (CDSs) and collateralized debt obligations (CDOs) are among the well-known credit derivatives whose pricing poses challenging problems to the financial mathematics literature. Among the most popular approaches to price CDOs, the one factor Gaussian copula model, due mainly to its computational efficiency, has become the market standard for multi-name credit derivatives. However, it has become clear that this standard model is not capable of explaining the observed prices of different tranches on a single basket. In this thesis, at first we will introduce a specific type of CDOs, called synthetic CDO, its standard model of pricing and the model's deficiencies. Then we will explore two extensions of this model, i.e.  $NIG$  model and a novel model based on the mixture copula model, obtained by combining the  $NIG$  distribution with a Gaussian one, called the  $M_{G-NIG}$  copula model and compare them in a numerical framework and via the Monte Carlo methods of simulation. At the end we will discuss the possibility of implementing this contract into Islamic banking and in Iran's banking.

**Keywords:** *default risk, credit derivatives, synthetic CDOs, default correlation, factor copulas, large homogeneous portfolio approximation, NIG model,  $M_{G-NIG}$  model.*



**Institute for Advanced Studies  
in Basic Sciences**  
Gava Zang, Zanjan, Iran

# Investigating the Valuation of Credit Derivatives of Collateralized Debt Obligation Type

Master's Thesis

**Monire Atarabasi**

Supervisor: **Dr. Ali Foroush Bastani**

*September 2012*