

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**ELASTİK CİSİMLERDE İKİ BOYUTLU DOĞRUSAL SÜRTÜNMESİZ
TEMAS PROBLEMİNİN SONLU ELEMANLAR METODU İLE ANALİZİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Okan PINAR

İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı

Yapı Mühendisliği Programı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mehmet Hakkı OMURTAG

HAZİRAN 2018

**ELASTİK CİSİMLERDE İKİ BOYUTLU DOĞRUSAL SÜRTÜNMESİZ
TEMAS PROBLEMİNİN SONLU ELEMANLAR METODU İLE ANALİZİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**Okan PINAR
(501141030)**

İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı

Yapı Mühendisliği Programı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mehmet Hakkı OMURTAG

HAZİRAN 2018

İTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 501141030 numaralı Yüksek Lisans Öğrencisi Okan PINAR, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı “ELASTİK CİSİMLERDE İKİ BOYUTLU DOĞRUSAL SÜRTÜNMESİZ TEMAS PROBLEMİNİN SONLU ELEMANLAR METODU İLE ANALİZİ” başlıklı tezini aşağıdaki imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Tez Danışmanı : **Prof. Dr. Mehmet Hakkı OMURTAG**
İstanbul Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri : **Prof. Dr. Nihal Erath**
İstanbul Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Nazmiye Yahnioğlu
Yıldız Teknik Üniversitesi

.....

Teslim Tarihi : **31 MAYIS 2018**
Savunma Tarihi : **8 HAZİRAN 2018**





Dostlarım Murat ve İsmail'e



ÖNSÖZ

Bu çalışmada sürtünmesiz temas analizi ile ilgili incelemelerde bulunulmuştur. Öncelikle elastisite teorisinin üç boyutlu temel denklemleri ortaya konulmuş sonrasında problem iki boyuta indirgenmiştir. Sayısal bir yöntem olan sonlu elemanlar metodu ile problemin sayısal çözüm aşamalarından bahsedilmiştir. Daha sonra temas problemine özgü geometrik ilişkiler incelenmiş ve problemin sınır şartları ifade edilmiştir. Sınır değer probleminin çözümü için düğüm noktası-düğüm noktası, düğüm noktası - kenar ve kenar-kenar temas elemanlarının formülasyonu yapılmış ve örnek problemler çözülmüştür.

Tezin hazırlanması sürecinde yaptığı katkılardan dolayı tez danışmanım Prof. Dr. Mehmet Hakkı Omurtag'a teşekkürü borç bilirim. Ayrıca lisans ve yüksek lisans süreçlerinde gelişimime sağladığı katkı ve programlama öğretirken gösterdiği sabırdan dolayı Dr. Murat Yılmaz'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

8 HAZİRAN 2018

Okan PINAR
İnşaat Mühendisi



İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ	vii
İÇİNDEKİLER	ix
SEMBOLLER	xi
ŞEKİL LİSTESİ.....	xiii
ÖZET	xv
SUMMARY	xvii
1. GİRİŞ	1
1.1 Tezin Amacı.....	1
1.2 Literatür Araştırması	1
1.3 Yöntem	3
2. TEMEL ELASTİSİTE VE SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ	5
2.1 Elastisite Teorisinin Temel Denklemleri	5
2.1.1 Üç Boyutlu Elastisite Denklemleri	5
2.1.2 İki Boyutlu Elastisite	6
2.1.2.1 Düzlem Şekil Değiştirme.....	6
2.1.2.2 Düzlem Gerilme.....	7
2.1.3 Virtüel İş Denklemi	8
2.2 Sonlu Elemanlar Formülasyonu	9
2.2.1 İzoparametrik Eleman Formülasyonu	11
2.2.2 Sistem Matrisinin Oluşturulması.....	14
2.2.3 Sınır Şartlarının Sisteme Dahil Edilmesi.....	15
2.2.4 Örnek Problem.....	16
3. SÜRTÜNMESİZ TEMAS ANALİZİ.....	19
3.1 Sürtünmesiz Temas Kinematığı.....	19
3.2 Sınır şartları ve Lagrange Çarpanları Yöntemi.....	20
3.3 Temas Elemanları	22
3.3.1 Düğüm Noktası -Düğüm Noktası Temas Elemanı	22
3.3.2 Düğüm Noktası - Kenar Temas Elemanı.....	24
3.3.3 Kenar-Kenar Temas Elemanı.....	25
3.4 Örnek Problem.....	28
3.4.1 Düğüm Noktası-Düğüm Noktası Temas Elemanı ile Çözüm.....	28
3.4.2 Düğüm Noktası - Kenar Temas Elemanı ile Çözüm	32
3.4.3 Kenar-Kenar Temas Elemanı ile Çözüm	36
4. SAYISAL UYGULAMALAR.....	43
4.1 Silindirik Hertz Temas Problemi	43
4.2 Pim Detayı	44
4.3 Temas Halindeki Düzlem Kirişler	48

5. SONUÇ VE ÖNERİLER	53
KAYNAKLAR.....	55
ÖZGEÇMİŞ	59



SEMBOLLER

σ	: Gerilme tansörü
ϵ	: Şekil değiştirme tansörü
C	: Elastisite matrisi
Ω	: Tanım kümesi
Γ	: Tanım kümesi sınırı
x	: Şekil değiştirmiş konum vektörü
X	: Şekil değiştirmemiş konum vektörü
u	: Yer değiştirme vektörü
J	: Jacobien matrisi
K	: Rijitlik matrisi
q	: Eşdeğer dış yük vektörü
ξ	: Temel(master) elemanın birinci koordinatı, yüzey parametresi
η	: Temel(master) elemanın ikinci koordinatı
ϕ	: Şekil fonksiyonu vektörü
∇	: Gradyan operatörü
Γ_c	: Temas yüzeyi
$(.)^s$	: Temas (<i>slave</i>) yüzeyi ile ilgili terimler
$(.)^m$	: Hedef (<i>master</i>) yüzeyi ile ilgili terimler



ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Şekil 2.1 : Düzlem şekil değiştirme problemi.....	6
Şekil 2.2 : Düzlem gerilme problemi.....	8
Şekil 2.3 : Temel eleman dönüşümü	11
Şekil 2.4 : Dikdörtgen temel elemanın ϕ_1 şekil fonksiyonu	12
Şekil 2.5 : Tipik sonlu elemanlar ağı	15
Şekil 2.6 : Örnek düzlem gerilme problemi.....	17
Şekil 2.7 : Örnek düzlem gerilme problemine ait sonlu elemanlar ağı.....	17
Şekil 2.8 : Örnek düzlem gerilme probleminde x yönündeki u dağılımı	18
Şekil 3.1 : Başlangıç (sol) ve şekil değiştirmiş (sağ) cisim konfigürasyonu	19
Şekil 3.2 : Temas yüzeyi boyunca oluşan sınır şartları	21
Şekil 3.3 : Düğüm noktası - düğüm noktası temas elemanı geometrisi.....	23
Şekil 3.4 : Düğüm Noktası -Kenar Eleman Geometrisi.....	24
Şekil 3.5 : Kenar-kenar eleman geometrisi	26
Şekil 3.6 : Örnek temas problemi	28
Şekil 3.7 : Örnek temas probleminin sonlu eleman ağ yapısı ve düğüm noktası-düğüm noktası temas elemanları.....	29
Şekil 3.8 : Örnek temas probleminin düğüm noktası-düğüm noktası temas elemanına ait x yönü deplasmanları.....	32
Şekil 3.9 : Örnek temas probleminin Ansys'te düğüm noktası-düğüm noktası temas elemanları ile çözümünün x yönü deplasmanları.....	32
Şekil 3.10 : Örnek temas probleminin sonlu eleman ağ yapısı ve düğüm noktası-kenar temas elemanları.....	33
Şekil 3.11 : Örnek temas probleminin düğüm noktası-kenar temas elemanları kullanılan çözümün x yönü deplasmanları	36
Şekil 3.12 : Örnek temas probleminin Ansys ile düğüm noktası-kenar temas elemanları kullanılarak elde edilen çözümün x yönü deplasmanları .	36
Şekil 3.13 : Örnek temas probleminin sonlu eleman ağ yapısı ve düğüm noktası-kenar temas elemanları.....	37
Şekil 3.14 : Örnek temas probleminin kenar-kenar temas elemanları kullanılarak elde edilen çözümün x yönü deplasmanları	41
Şekil 3.15 : Örnek temas probleminin Ansys ile kenar-kenar temas elemanları kullanılarak elde edilen çözümün x yönü deplasmanları	41
Şekil 4.1 : Hertz silindir-rijit cisim temas problemi geometrisi.....	43
Şekil 4.2 : Hertz silindir-rijit cisim temas problemi sonlu eleman ağı	44
Şekil 4.3 : Hertz silindir-rijit cisim temas problemi σ_y dağılımı	44
Şekil 4.4 : Pim detayı geometrisi	45
Şekil 4.5 : Pim detayı sonlu eleman ağı.....	46
Şekil 4.6 : Pim detayı σ_x dağılımı.....	46

Şekil 4.7	: Pim detayı σ_y dağılımı.....	47
Şekil 4.8	: Pim detayı τ_{xy} dağılımı	47
Şekil 4.9	: Üst üste konulan kirişlerin geometrileri	48
Şekil 4.10	: Kirişlere ait sonlu eleman ağı	48
Şekil 4.11	: Kirişlerin y yönü deplasmanı.....	48
Şekil 4.12	: Kirişlerde oluşan σ_x dağılımı	49
Şekil 4.13	: Arasında açıklık bulunan kirişlerin geometrileri	49
Şekil 4.14	: Aralarında sırasıyla 5mm, 10mm, 15mm, 20mm ve 25mm açıklık bulunan kirişler için düşey deplasman dağılımları	50
Şekil 4.15	: Aralarında sırasıyla 5mm, 10mm, 15mm, 20mm ve 25mm açıklık bulunan kirişler için σ_x dağılımları.....	51



ELASTİK CİSİMLERDE İKİ BOYUTLU DOĞRUSAL SÜRTÜNMESİZ TEMAS PROBLEMİNİN SONLU ELEMANLAR METODU İLE ANALİZİ

ÖZET

Temas mekaniği, elastisite teorisinin birbirleriyle temas ile etkileşime giren cisimlerin davranışını inceleyen dalıdır. Bu sebeple katı cisimler ile ilgilenen her mühendislik dalında oldukça geniş bir uygulama alanı vardır. İnşaat mühendisliği özelinde ise yapı-zemin etkileşimi, yapı birleşim hesapları, deprem sönüm sistemleri tasarımında temas mekaniğinin uygulama alanına örnek olarak verilebilir.

Temas problemleri doğası gereği sahip olduğu karmaşık sınır şartlarından dolayı, analitik yöntemler oldukça kısıtlı imkanlar sunmaktadır. Bu sebeple problemlerin çözümünde sayısal yöntemlere oldukça sık başvurulmaktadır. Sonlu elemanlar metodu, temas probleminin çözümü için oldukça sık kullanılan metotlar arasındadır. Günümüzde ANSYS ve ABAQUS gibi pek çok paket program bünyesinde temas problemine özel elemanlar ve çözüm algoritmaları sunmaktadır. Mühendislik tasarımlarında, kullanılan eleman ve algoritmaların arkasındaki fikirlerin bilinmesi, program çıktılarını yorumlamak için oldukça önemlidir.

Tezin akışında ilk olarak sonlu elemanlar formülasyonuna zemin hazırlaması bakımından, üç boyutlu elastisitenin temellerinden bahsedilmiştir. Statik durumda en genel hareket denklemi olan diferansiyel denge denklemleri verilmiştir. Doğrusal, homojen bir cisim için genelleştirilmiş Hooke Kanunu kullanılarak gerilme ile şekil değiştirme arasındaki ilişkiler ortaya konmuştur. Son olarak yer değiştirmeler ve şekil değiştirmeler arasındaki bağıntılar ifade edilmiştir.

Bazı varsayımlar doğrultusunda üç boyutlu elastisite problemi iki boyuta indirgenebilmektedir. Tez kapsamında düzlem gerilme ve düzlem şekil değiştirme probleminin varsayımlarına değinilmiştir. Bu varsayımlar doğrultusunda üçüncü boyuttaki şekil değiştirmeler probleminden düşürülmüştür. Genelleştirilmiş bünye denklemleri ve diferansiyel denge denklemleri iki boyuta indirgenmiştir.

Diferansiyel denge denklemlerinin virtüel(keyfi) yer değiştirmeler ile çarpılıp hacim üzerinde integralinin alınması ile virtüel yer değiştirmenin cisim üzerinde yaptığı iş ortaya konmuştur. Diverjans teoremi kullanılarak gerilme sınır şartları denkleme dahil edilmiştir. Son olarak iki boyutlu sonlu elemanlar analizinde kullanılmak üzere virtüel iş ifadelerinin iki boyutlu hali elde edilmiştir.

Sonlu elemanlar formülasyonuna, eleman üzerindeki yer değiştirme ifadesinin şekil fonksiyonları vasıtasıyla düğüm noktası yer değiştirmeleri cinsinden ifadesi ile başlanmıştır. Şekil değiştirme ifadelerinin elde edilmesinin ardından bünye bağıntıları kullanılarak gerilmeler ifade edilmiş ve elde edilen bağıntılar virtüel iş ifadesine entegre edilmiştir. Virtüel yer değiştirmelerin keyfiliği kullanılarak sonlu eleman denklem takımı elde edilmiştir. Son olarak eleman rijitlik matrisleri ve dış yük vektörlerinin integral formları ortaya konmuştur.

Sonlu elemanlar metodunda iki ve üç boyutlu elemanlar için sıkça kullanılan, şekil fonksiyonlarının sistematik biçimde elde edilmesini sağlayan, integral sınırlarını basitleştiren ve Gauss-Legendre integrasyon metodunun kullanılmasını kolaylaştıran bir yöntem olan izoparametrik formülasyon tanıtılmıştır. Dörtgen eleman için temel(master) eleman ifade edilmiş ve şekil fonksiyonları elde edilmiştir. Global eksen takımı ile temel eksen takımının diferansiyel ilişkilerine değinilmiş ve dörtgen eleman için rijitlik matrisi elde edilmiştir.

Sonlu elemanlar metodunda sistem matrisinin oluşturulması 2 eleman üzerinde tarif edilmiş ve bu aşamanın sözde(pseudo) kodu verilmiştir. Ardından sistem matrisinde sınır şartları ifadelerinden bahsedilmiş ve deplasman yüklemelerinin dış yük vektörüne katkısına değinilmiştir.

Bölüm üçte sürtünmesiz temas analizinin temel kavramlarının tanıtılması ile giriş yapılmıştır. Birbirine temas eden iki cismin kinematik ilişkileri ortaya konulmuş, açıklık fonksiyonuna değinilmiştir. Ardından sürtünmesiz temas analizinin Signorini sınır şartları ortaya konulmuş ve virtüel iş denklemlerine bu sınır koşullarının entegrasyonundan bahsedilmiştir.

Sınır şartları tanımlanmış problemin çözümü için Lagrange çarpanları yönteminden bahsedilmiştir. Virtüel iş terimine dahil edilmiş olan temas terimi Lagrange çarpanları cinsinden ifade edilmiş ve varyasyon ifadeleri elde edilmiştir. Son olarak Lagrange çarpanlarının sistem matrisine etkisi ve çözüm algoritması verilmiştir.

Sınır şartları ve virtüel iş ifadesinin elastisite denklemlerine katılmasının ardından temas analizi ile ilgili eleman formülasyonlarına değinilmiştir. Bu çalışmanın kapsamındaki temas elemanları için geometrik ifadeler ortaya konulmuş, rijitlik matrisleri elde edilmiştir. Örnek bir elastisite problemi farklı temas elemanları ile çözülmüş ve sonuçları ANSYS ile karşılaştırılmıştır.

Son olarak formülasyonu yapılan temas elemanlarının sayısal uygulamaları yapılmıştır. Literatürde analitik çözümü mevcut olan silindirik bir cismin rijit düz bir cisme teması, problemin sahip olduğu simetri özelliğinden faydalanılarak çözülmüştür. Analitik ve sayısal çözüm birbiriyle karşılaştırılmıştır. Ardından çelik yapılarda sıkça kullanılan birden fazla plakanın temas yük aktardığı pimli bağlantı detayı problemi çözülmüştür. Sisteme deplasman yükü uygulanmış ve bu yük sonucu pim üzerinde oluşan gerilme dağılımı gösterilmiştir. Pimin üzerinde eğilme momentlerinin etkisinin olduğuna vurgu yapılmıştır. Üçüncü sayısal örnekte ise birbirine temas halinde bulunan üst üste istiflenmiş iki basit kirişin eğilme davranışı incelenmiştir. Ardından kirişler arasında başlangıç durumunda açıklık olması durumu ele alınmış ve analiz sonuçları gösterilmiştir.

2-D FRICTIONLESS CONTACT ANALYSIS OF ELASTIC CONTINUA WITH FINITE ELEMENT METHOD

SUMMARY

Contact mechanics, as a subdiscipline of elasticity theory, studies the behaviors of the solid bodies which are interacted each other by contacting. So, contact mechanics takes a wide place in engineering disciplines, which are interested to solid bodies. In the field of the structural engineering, some of the contact mechanics applications are structure-soil interactions, bridge supports, structural connection designs and earthquake damping systems.

By the nature of the problems, contact mechanics has complex boundary conditions, so analytic methods provide very small range of possibilities. Because of that, numerical methods has been frequently used to solve the problems. The finite element method is one of the featured contact mechanics solution methods. Nowadays, many programs like ANSYS and ABAQUS contains special finite element and solution algorithms for contact problems. While designing with these programs, it is valuable for engineers to have the knowledge of the theory behind in the aspect of interpreting the results.

Pioneer analitic solution on contact mechanics was found by Hertz who also proved existence of elecromagnetic wave. After that many famous researchers have glorious work on this topic both analitic and numeric such as Galin, Oden, Wriggers, Bathe etc. In variational aspect first work that explains general boundary conditions on contact surface was done by Signorini. These boundary conditions had similar characteristics between Krush-Kuhn-Tucker conditions which are necessary conditions of general constrained optimization problems. Fichera who was Signorini's student proved uniqueness of solution of frictionless contact problem by using virtual work principle and this study also was accepted birth of variational inequalities that is one of the main topic on applied mechanics and physics.

First topic in this study is fundamentals of elasticity, since it creates a foundation for finite element formulation. Differential equilibrium equations which are the most general motion equation in the static situations have been given. Basic relations which is between stains and displacement is introduced. After that, the relations between stress and strain have been revealed by using the generalized Hooke's Loaw in 3D for a lineer homogeneous body. Finally, the formulas have been established between surface tractions which are stress type boundary condition and stress tensor.

In the accordance of some assumptions, 3-dimensional elasticity problem can reduced to 2-dimension. With the scope of thesis, the assumptions of the plane stress and plane stress problem have been mentioned. By these assumptions, strains in the third dimension has been eliminated from the problem and stresses or strains in plane become main unknown of plane problems and other unknowns get zero or constant values. Then, the generalized constitutive equations and the differential equilibrium equations have been reduced to 2-dimension.

With explaining differential equation and boundary condition, the virtual work principle is introduced. By multiplying the differential equilibrium equations by the virtual displacements which are assumed as boundary conditions already satisfied and taking the integral on the volume, the work expression of the virtual displacements on the body has been acquired. Stress boundary conditions have been included in the virtual work equation with the assist of divergence theorem. Last form of virtual work equation represent that the work is done by internal forces must be equal to the work is done by external forces. Finally, a two-dimensional representation of virtual work expressions has been obtained for two-dimensional finite element analysis.

The finite element formulation is started with the expression of the displacement on the element in terms of nodal displacements through the shape functions which are interpolation functions over domain of element. Because of nodal displacements are independent of spatial coordinates, derivative of displacement is only related with shape functions. Stresses over element have been obtained by use of constitutive equations and the equations integrated to the virtual work expression. The finite element equation system has been gained by using arbitrariness of the virtual displacements. Finally, element stiffness matrices and equivalent load vector have been generated in integral form.

Isoparametric formulation has been introduced, which is frequently used for two and three-dimensional elements in the finite element method, which enables obtaining of the shape functions systematic way, which simplifies the integral bounds and the use of Gauss-Legendre integration method. Master element for the rectangular element has been represented and the shape functions of it has been acquired. Domain of the master element of rectangular element is square area bounded by -1 and 1 both dimensions. Differential relationships between global axis and master axis have been by Jacobian transformation. With explanation differential area in terms of master coordinates, stiffness matrix for the rectangular element has been generated in natural gauss numeric integration boundary.

System matrix in finite element method is union of all element's stiffness matrix. The assemblage process of system matrix is addition of the stiffness terms of degree of freedom in elements which are connected to same node. This process is described on 2 elements and the pseudo code of this phase is given. Displacement terms in all system can be explained as unknown nodal displacements and known nodal displacements which are boundary conditions. In similar approach external load vector can be separate two parts which are known boundary forces and unknown support reactions. Giving primacy unknown degree of freedom in numbering process enable separate system matrix into two part which first part of system match unknown displacement against known boundary forces and second part of system accord solved displacement and known displacement to support reaction.

By starting to Chapter 3, the basic concepts of the frictionless contact analysis is introduced. Kinematic relationships of two bodies, which are contacting each other, have been revealed and gap function has been mentioned. Gap function explained as distance between arbitrary point in slave surface and its perpendicular projection on master surface using by minimization of the distance phenomena. Then, boundary conditions of frictionless contact analysis have been defined and insertion of this boundary conditions to virtual work equations have been mentioned in integral form of multiplication of contact pressure and gap function.

In numerical contact mechanics there are lots of contact enforcement method such as Lagrange Multipliers method, penalty method, augmented Lagrange Multipliers method, direct constraint elimination method etc. Because of Lagrange Multipliers method can be called as semi-analytical way in numeric method, it is chosen for to treatment of contact constraints. For the solution of boundary condition defined problem, Lagrange multiplier method has been introduced. Contact term, which is inserted to the virtual work equation, has been expressed in terms of Lagrange multipliers and variation expressions have been acquired. Finally, the effect of the Lagrange multipliers on the system matrices has been shown and solution algorithm in pseudo code has been given.

After the inclusion of the boundary conditions and the virtual work expression into elasticity equations, element formulations about the contact analysis have been mentioned. Geometrical expressions, which are in the scope of this study, has been presented and stiffness matrices have been produced. An elasticity problem, as an example, has been solved by use of different contact elements and results have been compared to ANSYS. Results of the all contact element type are coincidence with Ansys results.

Finally, the numerical applications of the formulated contact elements are made. The contact problem of a cylindrical object to a flat object which has analitical solution has been solved with the aid of symmetry that the problem has. Error between numeric solution and analitical solution is obtained as 4%. Then, a pinned connection detail, which has a wide application in the steel structures, has been solved. The problem contains multibody contact and external loads are imposed system as displacement. Not only normal stress which is direction on load and shear stress but also bending stress are observed on the pin. In the third numerical application, the bending behaviour of two stacked simple beams, which are contacting each other at the begening, has been investigated. Vertical displacements are acquired as nearly half of analitical displacement of one beam resisting the same force. Then, the situation of initial gap between the beams has been handled and results has been shown.



1. GİRİŞ

1.1 Tezin Amacı

Temas mekaniği, iki ya da daha çok cismin temas ile etkileşime girdiği problemleri inceler. Sınır şartlarının karmaşık olmasından dolayı analitik yollarla çözülebilen problem sayısı sınırlıdır. Bu sebeple temas problemlerinin çözümünde çoğu zaman sayısal yöntemler tercih edilir. Günümüzde en sık kullanılan sayısal yöntemlerinden Sonlu Elemanlar Metodu, temas problemi çözümleri için de oldukça sık başvurulan bir yoldur.

Bilgisayar destekli modelleme(CAD) ve hesaplama(CAE) yöntemlerinin gelişimi, paket programların sağladığı olanaklar sayesinde, temas problemlerinin sayısal çözümleri daha ulaşılabilir hale gelmiştir. Bu sebeple modern mühendislik uygulamalarında temas analizinin kullanımı her geçen gün artmaktadır. Zemin-yapı etkileşimi, çelik bağlantı detay hesapları ve sürtünme prensibine dayalı sönüm sistemlerin tasarımı temas mekaniğinin yapı ve deprem mühendisliği alanındaki uygulamalarına örnek olarak gösterilebilir.

Yapılan çalışmada öncelikli olarak Sonlu Elemanlar Analizi'nin temelleri ve elastisite problemlerinin bu yöntem ile çözümünün açıklanması amaçlanmıştır. Temas analizi ile ilgili kavramların tanıtılması ve sınır şartlarının tarif edilmesi, virtüel iş denklemlere entegrasyonu ve çözüm algoritmaları hakkında bilgi verilmesi hedeflenmiştir. Literatürde geliştirilen temas elemanları hakkında bilgi vermek ve sonlu eleman ağ yapılarına uygun eleman seçimlerine ışık tutmak bu çalışmanın temel amaçları arasındadır.

1.2 Literatür Araştırması

Elastisite teorisinde temas analizinin ilk olarak Hertz'in iki elastik eliptik cismin temas problemini formüle etmesi ve cisimlerin üzerindeki gerilme dağılımını ortaya koymasıyla başladığı kabul edilir [1]. Sovyet araştırmacı Galin, başka bir Sovyet

araştırmacı olan Muskhelishvili'nin elastisite problemine dahil ettiği kompleks potansiyel yöntemini temas problemine adepte etmiş, iki ve üç boyutlu pek çok elastik temas problemin çözümünü ortaya koymuştur [2, 3]. Gladwell ve Johnson yapılan analitik çalışmaları özetlemesi ve plastisite teorisini temas problemine dahil etmeleri açısından önemli kaynaklardır [4–6]. Popov-Heß ise üç boyutlu temas problemlerini bir veya iki boyuta indirgeyerek yarı analitik olarak tabir edilebilecek yöntemler ile pratik çözümler sunmaktadır [7].

Öte yandan Signorini birbirine temas eden cisimler için eşitsizlik sınır koşullarını ifade eden ilk araştırmacıdır [8]. Signorini'nin öğrencisi olan Fichera ise sürtünmesiz temas problemini ilk defa varyasyonel bir eşitsizlik olarak ortaya koymuş ve çözümünün tekilliğini ispatlamıştır [9]. Duvaunt ve Lion ise sürtünmeli temas problemi, dinamik temas problemi ve viskoelastik temas problemi gibi pek çok önemli problemleri varyasyonel formda ifade etmişlerdir [10]. Oden and Kikuchi varyasyonel çalışmaları özetlemiş ve temas mekaniğini ile ilgili sonlu elemanlar analizinin matematiksel temellerini açıklamışlardır [11].

Yapısal problemlerde sonlu elemanlar analizi fikrini ilk ortaya koyan çalışmalar olarak Turner ve Argyris gösterilmektedir [12, 13]. Temas probleminin sonlu elemanlar analizlerine dahil olması ise Wilson ve Parsons, Chan ve Tuba veya Francavilla ve Zienkiewicz gibi araştırmacıların yayımları ile başlar [14–17]. Takip eden yıllarda bir çok araştırmacı temas mekaniği problemlerinin sonlu elemanlar yöntemi ile çözümünü inceleyen kitaplar yayımlamışlardır [18–21]. Bu kitaplarda statik ve dinamik problemler ele alınmış, çeşitli malzeme modelleri için çözüm yöntemleri ortaya konmuştur.

Son zamanda temas mekaniği üzerine yapılan çalışmalar Matematiksel zemini Wohlmuth tarafından ortaya konulan Mortar metodu üzerinde yoğunlaşmıştır [22]. Yöntem ile ilgili sürtünmeli ve sürtünmesiz temas problemleri özelinde pek çok araştırma ortaya konulmuştur. Bir başka güncel araştırma konusu ise pürüzlü yüzeye sahip cisimlerin temas analizleridir. Mikro ölçekte temas yüzeyinde farklı davranışlar sergileyen malzeme modelleri için sonlu elemanlar algoritmaları geliştirilmeye devam etmektedir [23].

1.3 Yöntem

Bu çalışma kapsamında öncelikli olarak sonlu elemanlar metodunun teorik zemini hazırlayan elastisite teorisi ve virtüel iş prensibi özetlenmiştir. Ardından düzlem elastisite problemin sonlu elemanlar ifadeleri ortaya koyulmuş ve izoparametrik eleman tekniğine değinilmiştir. Örnek bir elastisite problemi üzerinde sonlu elemanlar metodu akış şeması üzerinde durulmuştur.

Tez kapsamında temas analizi iki boyutlu cisimler üzerinde incelenmiştir. Bunun başlıca sebepleri

- Sade geometrik ifadeler
- Sonlu elemanlar ağının kolay elde edilebilir olması
- Temas mekaniğinin felsefesini iyi yansıtması

şeklinde sıralanabilir. İki boyutlu cisimlerin temas kinematiğine değinilmiş ve problemin sınır şartlarından bahsedilmiştir. Ardından Lagrange çarpanları yöntemi tanıtılmış ve temas yüzeyindeki virtüel iş ifadesi Lagrange çarpanları cinsinden ifade edilmiştir. Sonlu elemanlar analizinde kullanılmak üzere düğüm noktası-düğüm noktası, düğüm noktası-kenar ve kenar kenar eleman formülasyonları yapılmış ve örnek problem üzerinden elemanlar ANSYS ile karşılaştırılmıştır. Son olarak geliştirilen elemanlar karmaşık problemler üzerinde uygulanmış ve sonuçları tartışılmıştır.

2. TEMEL ELASTİSİTE VE SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ

2.1 Elastisite Teorisinin Temel Denklemleri

Elastisite teorisi uzun yıllardır araştırılan ve uygulama alanı oldukça geniş bir daldır. Literatürde pek çok önemli araştırmacı tarafından hazırlanmış oldukça değerli kaynaklar mevcuttur [24–28]. Tez kapsamında sayısal uygulamaya teorik zemini oluşturmasından dolayı elastisite teorisinden kısaca bahsedilmiştir.

2.1.1 Üç Boyutlu Elastisite Denklemleri

Diferansiyel bir cisim üzerinde kartezyen eksen takımı baz vektörleri doğrultusunda yazılan denge denklemleri

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + b_x &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + b_y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + b_z &= 0\end{aligned}\quad (2.1)$$

olarak verilmektedir. Indis notasyonu ile diferansiyel denge denklemleri ise

$$\sigma_{ji,j} + b_i = 0 \quad (2.2)$$

şeklinde ifade edilir. Simetrik davranış gösteren gerilme terimlerinin tansörel ifadesi

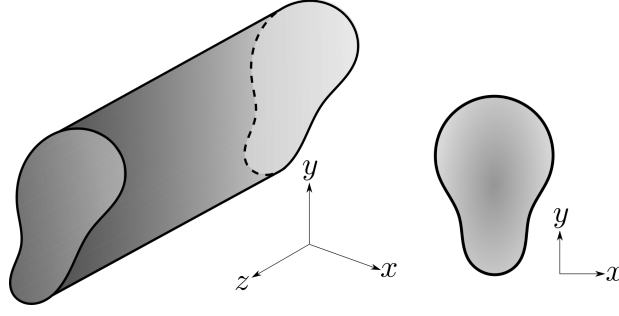
$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

olarak gösterilmiştir. Tıpkı gerilme tansörü gibi şekil değiştirme tansörü simetrik şekilde

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_x & 0.5\gamma_{yx} & 0.5\gamma_{zx} \\ 0.5\gamma_{xy} & \epsilon_y & 0.5\gamma_{zy} \\ 0.5\gamma_{xz} & 0.5\gamma_{yz} & \epsilon_z \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

tanımlanmaktadır. Lineer elastik bir cisimde yer ve şekil değiştirme bağıntıları denklem 2.5 ve 2.6 gösterilmiştir.

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.5)$$



Şekil 2.1 : Düzlem şekil değiştirme problemi

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad \gamma_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (2.6)$$

Genelleştirilmiş Hooke Kanununa göre izotropik cisimler için şekil değiştirmeler ve gerilmeler arasındaki ilişki vektörel formda

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\epsilon} \quad (2.7)$$

şeklinde ifade edilir. 2.7 de

$$\boldsymbol{\sigma}^T = \{ \sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{xz} \quad \tau_{yz} \} \quad (2.8)$$

$$\boldsymbol{\epsilon}^T = \{ \epsilon_x \quad \epsilon_y \quad \epsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{xz} \quad \gamma_{yz} \} \quad (2.9)$$

$$\mathbf{C} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & (1-\nu) & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & (1-\nu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-2\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2\nu) \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

olarak tanımlanır. Cismin sınırındaki gerilmelerin, gerilme tansörü ile ilişkisi

$$q_i = \sigma_{ij} n_j \quad (2.11)$$

şeklinde verilmektedir.

2.1.2 İki Boyutlu Elastisite

2.1.2.1 Düzlem Şekil Değiştirme

Bir boyutu diğer iki boyutuna göre çok uzun olan bir cisimde yer değiştirmelerin uzun boyuttan bağımsız olduğu kabul edilebilir (bkz Şekil 2.1). Bu tarz problemlere düzlem şekil değiştirme problemi denir.

Yer değiştirme ifadelerinin üçüncü boyuttan bağımsız olması varsayımından hareketle düzlem gerilme problemi için yer değiştirmeler

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y), \quad w = 0 \quad (2.12)$$

olarak tanımlanır. 2.12 deki ifadeler 2.5 ve 2.6 da yerine yazılırsa

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (2.13)$$

olarak elde edilir. Uzun doğrultudaki şekil değiştirme ifadeleri 2.12 deki varsayımlar doğrultusunda

$$\epsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad (2.14)$$

şeklinde elde edilir. 2.7 ifadesi 2.13 ve 2.14 kullanılarak

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & 0 \\ \nu & (1-\nu) & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.15)$$

şeklinde elde edilir. Uzun boyut doğrultusundaki gerilme ise

$$\sigma_z = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\epsilon_x + \epsilon_y) \quad (2.16)$$

şeklinde sabit olarak elde edilir. 2.2 ifadesi 2.14 kullanılarak

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + F_x &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + F_y &= 0 \end{aligned} \quad (2.17)$$

bulunur.

2.1.2.2 Düzlem Gerilme

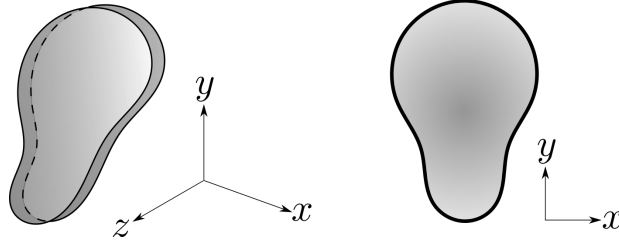
Bir boyutu diğer iki boyutuna göre oldukça kısa kalan cisimler için gerilme ifadelerinin diğer boyuttan bağımsız olduğu kabul edilmektedir (bkz şekil 2.2). Bu tarz problemler düzlem gerilme problemi olarak nitelenmektedir.

Gerilmelerin üçüncü boyuttan bağımsız olması varsayımından hareketle 2.8 ifadesi

$$\sigma_x = \sigma_x(x, y), \quad \sigma_y = \sigma_y(x, y), \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}(x, y), \quad \sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad (2.18)$$

şekline bürünmektedir. Düzlem dışı gerilmelerin sıfıra eşit olmasından dolayı düzlem dışı şekil değiştirmeler

$$\gamma_{xz} = \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0, \quad \gamma_{yz} = \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0 \quad (2.19)$$



Şekil 2.2 : Düzlem gerilme problemi

olarak elde edilir. Düzlem dışı dönme şekil değiştirmelerinin üçüncü boyuttan bağımsız olması varsayımıyla 2.5 ve 2.6 ifadesi

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (2.20)$$

şekline bürünmektedir. 2.7 ifadesi tersten yazılarak, 2.19 ve 2.20 kullanılarak

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.21)$$

şekline bürünmektedir. Düzlem gerilme problemi için diferansiyel denge denklemleri ise 2.17 de verilen ifade ile aynı olmaktadır. Bu tez kapsamında incelenen bütün problemler düzlem gerilme problemi olarak seçilmiştir.

2.1.3 Virtüel İş Denklemi

Dengede olan bir cisim keyfi (virtüel) bir yer değiştirme durumuna maruz kalsın. Bu yer değiştirmenin cisim üzerinde yapacağı toplam iş 2.2 kullanılarak

$$\iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + b_i \right) \delta u_i dV = 0 \quad (2.22)$$

şeklinde elde edilir. 2.22 ifadesindeki ilk terimi diverjans teoremi vasıtasıyla

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} \delta u_i dV = \oint_{\Gamma} \sigma_{ij} n_j \delta u_i dS - \iiint_{\Omega} \sigma_{ij} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_i} dV \quad (2.23)$$

olarak elde edilir. 2.23 da ikinci ifadedeki gerilme terimi 2.11 ifadesi ile değiştirilirse

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} \delta u_i dV = \iiint_{\Omega} \sigma_{ij} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_i} dV - \oint_{\Gamma} q_i \delta u_i dS \quad (2.24)$$

ifadesi elde edilir. Yer değiştirmelerin türev ifadeleri 2.5 ve 2.6 kullanılarak

$$\frac{\partial \delta u_i}{\partial x} = \delta \epsilon_{ij} \quad (2.25)$$

virtüel şekil değiştirmeler olarak yazılır ve 2.25 ve 2.24 ifadeleri 2.22’de yerine konularak

$$\iiint_{\Omega} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dV = \oint_{\Gamma} q_i \delta u_i dS + \iiint_{\Omega} b_i \delta u_i dV \quad (2.26)$$

virtüel iş denklemleri elde edilmektedir. 2.26 denkleminin sol tarafı iç, sağ tarafı ise dış tesirlerin elastik cisim üzerinde yaptığı işleri temsil eder.

Tansörel formdaki 2.26 denklemi vektörel formda ise

$$\iiint_{\Omega} \delta \vec{e}^T \cdot \vec{\sigma} dV = \oint_{\Gamma} \delta \vec{u}^T \cdot \vec{q} dS + \iiint_{\Omega} \delta \vec{u}^T \cdot \vec{b} dV \quad (2.27)$$

Bu tez kapsamındaki problemlerde hacimsel kuvvetin etkisi terk edilmiştir.

Düzlem problemde ise kalınlığın sabit kaldığı varsayımı ile 2.27 ifadesi

$$t \iint_{\Omega} \delta \vec{e}^T \cdot \vec{\sigma} dS = \oint_{\Gamma} \delta \vec{u}^T \cdot \vec{q} dl \quad (2.28)$$

olarak elde edilir. 2.28 de t kalınlık, q ise çizgisel yayılı yükür.

2.2 Sonlu Elemanlar Formülasyonu

Sonlu Elemanlar Metodu (SEM) diferansiyel denklemlerinin sayısal çözümü için ortaya konulan, mühendislik problem çözümlerinde oldukça sık kullanılan sayısal yöntemlerden biridir. Sonlu eleman formülasyonunda kullanılmak üzere yer değiştirmelerin düğüm noktası yer değiştirmeleri ve şekil fonksiyonları şeklinde ifadesi

$$u(x, y) = \phi_i(x, y) u_i = \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{u} \quad (2.29)$$

$$v(x, y) = \phi_i(x, y) v_i = \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{v} \quad (2.30)$$

şeklindedir. 2.29 ve 2.30 denklemleri 2.5 ile 2.6 de yerine konulursa şekil değiştirme ifadesi düğüm noktası deplasman değerlerine bağlı olarak

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \phi_i}{\partial x} u_i = \left\{ \frac{\partial \boldsymbol{\phi}^T}{\partial x} \quad 0 \right\} \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{Bmatrix} \quad (2.31)$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial \phi_i}{\partial y} v_i = \left\{ 0 \quad \frac{\partial \boldsymbol{\phi}^T}{\partial y} \right\} \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{Bmatrix} \quad (2.32)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \phi_i}{\partial y} u_i + \frac{\partial \phi_i}{\partial x} v_i = \left\{ \frac{\partial \phi^T}{\partial y} \quad \frac{\partial \phi^T}{\partial x} \right\} \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{Bmatrix} \quad (2.33)$$

ve bu ifade matris formunda toparlanırsa

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (2.34)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi^T}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \phi^T}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi^T}{\partial y} & \frac{\partial \phi^T}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

olarak elde edilir. B matrisi yer değiştirmelerden bağımsız olarak sadece şekil fonksiyonlarını içermesinden dolayı 2.34 ifadesinin varyasyonu

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \delta \mathbf{u} \quad (2.36)$$

olarak yazılır. Gerilme ifadelerinin 2.15 denklemi kullanılarak yer değiştirme ifadeleri cinsinden

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{u} \quad (2.37)$$

olarak elde edilir. Denklemler 2.36 ve 2.37 da verilen şekil değiştirme ile gerilme ifadeleri 2.28 de yerine konulursa

$$\delta \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} = \delta \mathbf{u}^T \mathbf{q} \quad (2.38)$$

olarak elde edilir. Burada

$$\mathbf{K} = t \iint_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dA \quad (2.39)$$

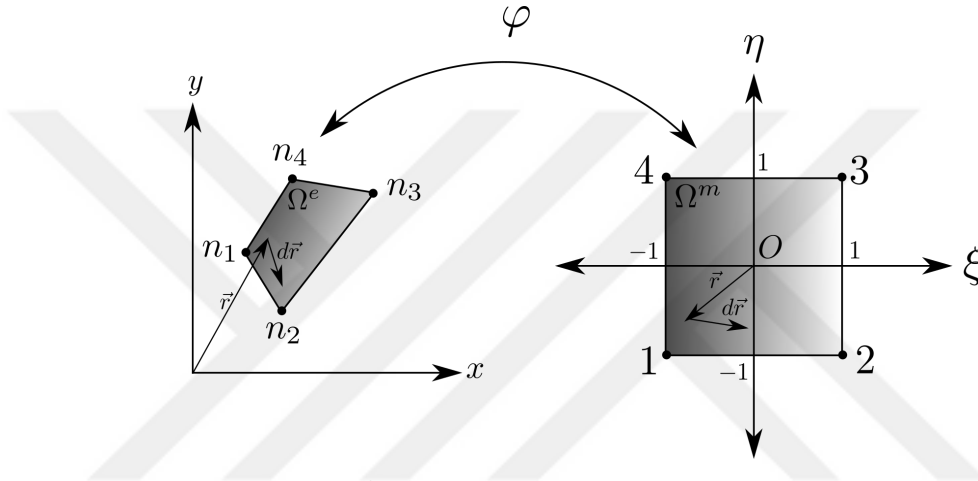
rijitlik matrisi,

$$\mathbf{q} = \oint_{\Gamma} \phi \mathbf{q} dl \quad (2.40)$$

eşdeğer dış yük vektörü olarak tanımlanmaktadır.

2.2.1 İzoparametrik Eleman Formülasyonu

2.39 de verilen ifadede şekil fonksiyonlarının çarpımının integralinin alınması gerekmektedir. Bu integrali cismin koordinatlarını kullanarak almak mümkündür. Bu durum Gauss integrasyon noktalarının yerlerinin ve integral sınırlarının elemandan elemana farklılık göstermesi anlamına gelmektedir. İntegral işleminin daha sistematik yapılabilmesi adına her eleman için bir koordinat dönüşümü yapılır. Ayrıca her eleman için farklı şekil fonksiyonu yazılması durumu da ortadan kalkmaktadır.



Şekil 2.3 : Temel eleman dönüşümü

Doğrusal dikdörtgen eleman için temel eleman üzerinde tarif edilen yer değiştirme ifadesi

$$u(\xi, \eta) = \{1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi\eta\} \cdot \{c_0 \quad c_1 \quad c_2 \quad c_3\}^T \quad -1 \leq \xi, \eta \leq 1 \quad (2.41)$$

olarak verilir. Burada $\mathbf{c}_i$ vektörü bilinmeyen polinom katsayılarıdır. Temel elemanın köşelerinde yer değiştirme fonksiyonunun düğüm noktası deplasman değerlerine eşit olması gerekliliği 2.42 te gösterilmiştir.

$$u(-1, -1) = u_1, \quad u(1, -1) = u_2, \quad u(1, 1) = u_3, \quad u(-1, 1) = u_4 \quad (2.42)$$

Temel eksenlerdeki yer değiştirme ifadeleri 2.41 de yerine konulup matris formda

$$\mathbf{A}\mathbf{c} = \mathbf{u} \quad (2.43)$$

şeklinde yazılabilmektedir. Burada temel elemanın köşe koordinatlarından oluşan katsayılar matrisi

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

olmaktadır. 2.43 de ifade edilen denklem takımının çözümü ile katsayılar

$$\mathbf{c} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u} \quad (2.45)$$

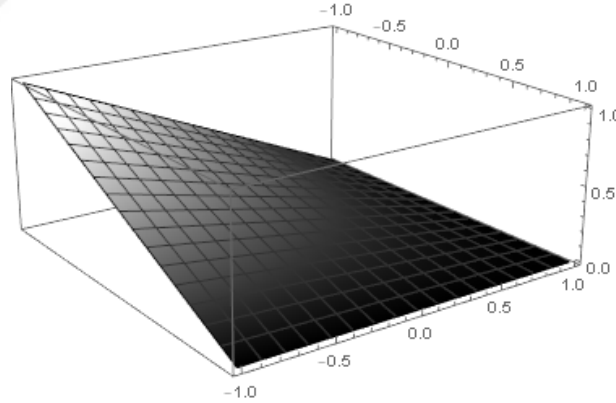
olarak bulunur. Denklem 2.45 dan elde edilen katsayılar 2.41 de yerine konulursa eleman üzerindeki yer değiştirme düğüm noktası yer değiştirme değerleri cinsinden

$$u(\xi, \eta) = \{1, \xi, \eta, \xi\eta\} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u} = \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{u} \quad (2.46)$$

olarak bulununur. Burada $\boldsymbol{\phi}$ vektörü

$$\boldsymbol{\phi} = \mathbf{A}^{-T} \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ \xi \\ \eta \\ \xi\eta \end{Bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{Bmatrix} (-1+\xi)(-1+\eta) \\ -(1+\xi)(-1+\eta) \\ (1+\xi)(1+\eta) \\ (-1+\xi)(1+\eta) \end{Bmatrix} \quad (2.47)$$

olup dörtgen elemanın şekil fonksiyonları olarak adlandırılmaktadır. ϕ_1 fonksiyonun üç boyutlu grafiği Şekil 2.4 de görülmektedir. Sonraki hesaplarda kullanılmak üzere



Şekil 2.4 : Dikdörtgen temel elemanın ϕ_1 şekil fonksiyonu

şekil fonksiyonu vektörünün gradyan matrisi 2.48 de tanımlanmıştır.

$$\nabla \boldsymbol{\phi} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial \xi} & \frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta - 1 & \xi - 1 \\ 1 - \eta & -\xi - 1 \\ \eta + 1 & \xi + 1 \\ -\eta - 1 & 1 - \xi \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

Koordinat düzleminde elemanın herhangi bir noktasına yönelen konum vektörünün temel koordinatlar cinsinden ifadesi

$$\mathbf{r}(x, y) = \begin{Bmatrix} X(\xi, \eta) \\ Y(\xi, \eta) \end{Bmatrix} \quad (2.49)$$

şeklindedir. 2.46 deki yer değiştirme ifadesine benzer şekilde eleman koordinatları şekil fonksiyonu ve düğüm noktası koordinatlarına bağlı olarak

$$X(\xi, \eta) = \phi^T \mathbf{X} \quad (2.50)$$

$$Y(\xi, \eta) = \phi^T \mathbf{Y} \quad (2.51)$$

olarak gösterilmektedir. 2.50 ve 2.51 denklemleri 2.49 de yerine konulursa konum vektörü temel koordinatlar cinsinden

$$r(x, y) = \phi^T \mathbf{X}_0 \quad (2.52)$$

elde edilir. 2.52 de

$$\mathbf{X}_0 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

olarak ifade edilen matris, elemanın koordinat matrisidir. Konum vektörünün tam diferansiyeli

$$dr = \begin{Bmatrix} dX \\ dY \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial X}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial X}{\partial \eta} d\eta \\ \frac{\partial Y}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial Y}{\partial \eta} d\eta \end{Bmatrix} \quad (2.54)$$

olarak yazılır. Bu ifade toparlanıp matris formda yazılırsa

$$dr = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{Bmatrix} = \mathbf{J} d\xi \quad (2.55)$$

şekline bürünür. 2.55 de global koordinatların temel koordinatlara göre türevini içeren matris *Jacobien* olarak isimlendirilir ve 2.52 yardımıyla

$$\mathbf{J} = \nabla \phi^T \mathbf{X}_0 \quad (2.56)$$

şeklinde hesaplanır.

2.47 ve 2.55 ifadeleri kullanılarak şekil fonksiyonlarının global koordinatlara göre türevi

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} = J_{ji}^{-1} \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi_j} \quad (2.57)$$

olarak şekillenmektedir. 2.46 ve 2.57 kullanılarak yer değiştirmelerin global koordinatlara göre türevleri

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial \xi} \mathbf{J}_{1,1}^{-1} + \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta} \mathbf{J}_{1,2}^{-1} \right) \mathbf{u}_i \quad (2.58)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial \xi} \mathbf{J}_{2,1}^{-1} + \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta} \mathbf{J}_{2,2}^{-1} \right) \mathbf{u}_i \quad (2.59)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial \xi} \mathbf{J}_{1,1}^{-1} + \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta} \mathbf{J}_{1,2}^{-1} \right) \mathbf{v}_i \quad (2.60)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial \xi} \mathbf{J}_{2,1}^{-1} + \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta} \mathbf{J}_{2,2}^{-1} \right) \mathbf{v}_i \quad (2.61)$$

olarak hesaplanabilir. Hesaplanan yer değıştirme türevleri 2.35 de yerine konulursa

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi} \mathbf{J}_{1,1}^{-1} + \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi} \mathbf{J}_{1,2}^{-1} & \dots & \frac{\partial \phi_4}{\partial \xi} \mathbf{J}_{1,1}^{-1} + \frac{\partial \phi_4}{\partial \xi} \mathbf{J}_{1,2}^{-1} & 0 & \emptyset & 0 \\ 0 & \emptyset & 0 & \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi} \mathbf{J}_{2,1}^{-1} + \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi} \mathbf{J}_{2,2}^{-1} & \dots & \frac{\partial \phi_4}{\partial \xi} \mathbf{J}_{1,1}^{-1} + \frac{\partial \phi_4}{\partial \xi} \mathbf{J}_{2,2}^{-1} \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi} \mathbf{J}_{2,1}^{-1} + \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi} \mathbf{J}_{2,2}^{-1} & \dots & \frac{\partial \phi_4}{\partial \xi} \mathbf{J}_{1,1}^{-1} + \frac{\partial \phi_4}{\partial \xi} \mathbf{J}_{2,2}^{-1} & \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi} \mathbf{J}_{1,1}^{-1} + \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi} \mathbf{J}_{1,2}^{-1} & \dots & \frac{\partial \phi_4}{\partial \xi} \mathbf{J}_{1,1}^{-1} + \frac{\partial \phi_4}{\partial \xi} \mathbf{J}_{1,2}^{-1} \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

olarak elde edilir. İntegral hesaplarında kullanılmak üzere diferansiyel alan terimi

$$dA = ||d\mathbf{X} \times d\mathbf{Y}|| \quad (2.63)$$

olarak hesaplanır. 2.55 denklem 2.63 da yerine konulursa

$$dA = |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (2.64)$$

olarak bulunmaktadır. Denklemler 2.62 ve 2.64 2.39 ve 2.40 de yerine konulursa, dörtgen eleman için rijitlik matrisi ve kuvvet vektörü

$$\mathbf{K} = t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (2.65)$$

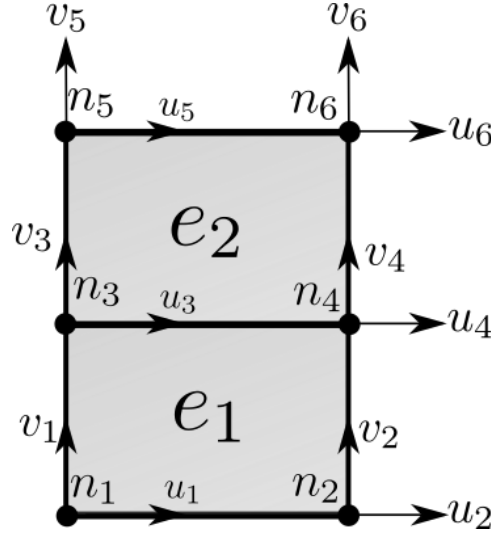
$$\mathbf{q} = \frac{l}{2} \oint_{-1}^1 \phi d\xi \quad (2.66)$$

olarak ifade edilebilir. 2.65 verilen integral ifadesi Gauss-Legendre yöntemi ile sayısal olarak hesaplanabilmektedir. Lineer eleman için iki noktalı Gauss-Legendre yöntemi seçilmesi sayısal integrallerin kesin sonuçlarına denk olmasını sağlar.

2.2.2 Sistem Matrisinin Oluşturulması

Virtüel iş teoremi kullanılarak eleman bazında elde edilen denklem takımının birleştirilmesi ile sistem denklem takımı elde edilir. Aynı düğüm noktasına bağlı elemanların rijitlik katkısının birleştirilmesi ile sistem denklem takımı elde edilir. Şekil 2.5 gösterilen sistemin rijitlik matrisi oluşturulmak istensin. Birinci elemanın denklem takımı

$$\begin{bmatrix} K_{1,1}^1 & K_{1,2}^1 & K_{1,3}^1 & \dots & K_{1,8}^1 \\ K_{2,1}^1 & K_{2,2}^1 & K_{2,3}^1 & \dots & K_{2,8}^1 \\ K_{3,1}^1 & K_{3,2}^1 & K_{3,3}^1 & \dots & K_{3,8}^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{8,1}^1 & K_{8,2}^1 & K_{8,3}^1 & \dots & K_{8,8}^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ v_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_1^1 \\ q_2^1 \\ q_3^1 \\ \vdots \\ q_8^1 \end{Bmatrix} \quad (2.67)$$



Şekil 2.5 : Tipik sonlu elemanlar ağı

olarak elde edilir. Benzer şekilde ikinci eleman için denklem takımı

$$\begin{bmatrix} K_{1,1}^2 & K_{1,2}^2 & K_{1,3}^2 & \dots & K_{1,8}^2 \\ K_{2,1}^2 & K_{2,2}^2 & K_{2,3}^2 & \dots & K_{2,8}^2 \\ K_{3,1}^2 & K_{3,2}^2 & K_{3,3}^2 & \dots & K_{3,8}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{8,1}^2 & K_{8,2}^2 & K_{8,3}^2 & \dots & K_{8,8}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ \vdots \\ v_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_1^2 \\ q_2^2 \\ q_2^2 \\ \vdots \\ q_8^2 \end{Bmatrix} \quad (2.68)$$

biçiminde elde edilir. 2.67 ve 2.68 denklem takımları bir araya getirilirse

$$\begin{bmatrix} K_{1,1}^1 & K_{1,2}^1 & K_{1,3}^1 & \dots & 0 \\ K_{2,1}^1 & K_{2,2}^1 & K_{2,3}^1 & \dots & 0 \\ K_{3,1}^1 & K_{3,2}^1 & K_{3,3}^1 + K_{1,1}^2 & \dots & K_{1,8}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & K_{8,1}^2 & \dots & K_{8,8}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ v_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_1^1 \\ q_2^1 \\ q_3^1 + q_1^2 \\ \vdots \\ q_8^2 \end{Bmatrix} \quad (2.69)$$

şeklinde ifade edilir. 2.69'da gözüktüğü üzere elemanların ortak serbestliklerine ait rijitlik ifadeleri sistem rijitlik matrisinde toplanarak ifade edilmiştir. Sistem rijitlik matrisinin oluşturulmasını daha sistematik ifade etmek gerekirse, sistemdeki bütün numaralandırılmış tüm serbestlikler

$$U_{ij} = u_{N_j}^i \quad (2.70)$$

olacak şekilde bağ matrisi tanımlanmaktadır. 2.70 de u_N serbestlik numarasını temsil etmektedir. Bahsi geçen bağ matrisi kullanılarak sistem matrisinin oluşturulma şeması Algoritma 1 de verilmiştir.

2.2.3 Sınır Şartlarının Sisteme Dahil Edilmesi

Deplasman tabanlı sonlu eleman formülasyonunda sınırda değeri belli olan ve bilinmeyen deplasmanlar denklemin sol tarafında, sağ tarafında ise bilinmeyen serbestliklere etkiyen dış yükler ve bilinen serbestlikler üzerinde oluşan mesnet tepkileri yer almaktadır. Serbestliklere numara verilirken bilinmeyen serbestliklere

Algorithm 1 Sistem matrisinin oluşturulması

```
1:  $elms \leftarrow$  bütün elemanlar
2:  $ndof \leftarrow$  toplam serbestlik sayısı
3:  $\mathbf{K}^{sis} \leftarrow \text{zeros}(ndof, ndof)$ 
4: procedure SET $\mathbf{K}^{sis}(elms)$ 
5:   for  $i, e$  in  $elms$  do
6:      $endof \leftarrow$  eleman serbestlik sayısı
7:      $\mathbf{K} \leftarrow$  eleman rijitlik matrisi
8:     while  $j < endof$  do
9:       while  $k < endof$  do
10:         $\mathbf{K}^{sis}[\mathbf{U}[i, j], \mathbf{U}[i, k]] += \mathbf{K}[j, k]$ 
11:      end while
12:    end while
13:  end for
14: end procedure
```

öncelik verildiği taktirde sonlu eleman denklem takımı

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \end{Bmatrix} \quad (2.71)$$

şekline bürünmektedir. 2.71 de $\mathbf{u}_1$ yer değiştirme değerı bilinmeyen serbestlikler, $\mathbf{u}_2$ yer değiştirme değerı bilinen serbestlikler, $\mathbf{q}_1$ dış yük vektörü, $\mathbf{q}_2$ ise mesnet tepkileri olarak ifade edilmektedir. $\mathbf{u}_2$ ve $\mathbf{q}_1$ vektörlerinin biliniyor olmasından faydalanılarak bilinmeyen deplasman değerleri

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{K}_{11}^{-1}(\mathbf{q}_1 - \mathbf{K}_{12}\mathbf{u}_2) \quad (2.72)$$

olarak elde edilir. 2.72 de elde edilen deplasmanlar kullanılarak mesnet tepkileri

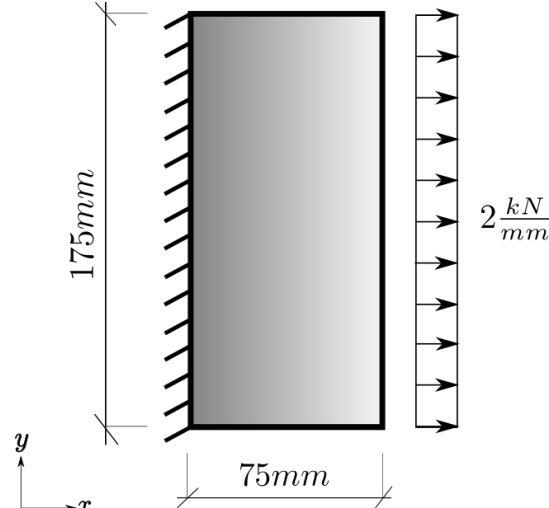
$$\mathbf{q}_2 = \mathbf{K}_{21}\mathbf{u}_1 + \mathbf{K}_{22}\mathbf{u}_2 \quad (2.73)$$

olarak hesaplanabilmektedir.

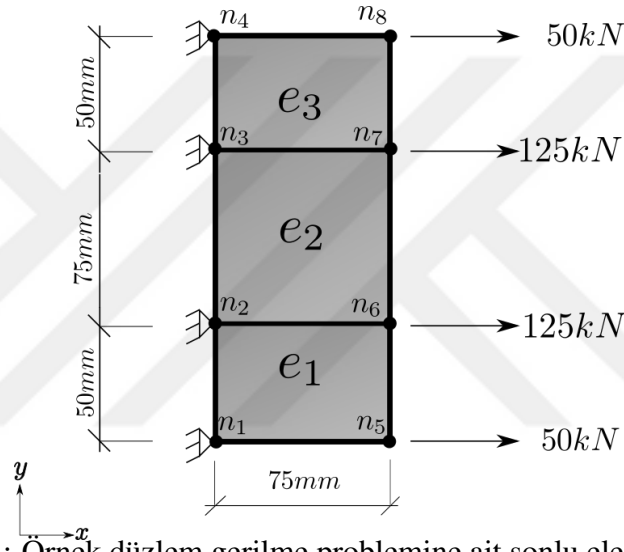
2.2.4 Örnek Problem

Tek yüzü ankastre mesnetli, karşıt yüzü ise çizgisel yayılı yük ile yüklü olan plağın geometrik özellikleri şekil 2.6 de verilmiştir. Plaka kalınlığı $t = 0.8mm$, plaka malzeme özellikleri ise $E = 200GPa$ ve $\nu = 0.3$ şeklindeyir. Problem şekil 2.7’de verilen 3 eleman ve 8 adet düğüm noktasından oluşan sonlu eleman ağı ile temsil edilmektedir. Birinci ve üçüncü elemana ait rijitlik matrisi

$$\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}_3 = \begin{bmatrix} 69841.3 & -23687.4 & -34920.6 & -11233.2 & 28571.4 & -2197.8 & -28571.4 & 2197.8 \\ -23687.4 & 69841.3 & -11233.2 & -34920.6 & 2197.8 & -28571.4 & -2197.8 & 28571.4 \\ -34920.6 & -11233.2 & 69841.3 & -23687.4 & -28571.4 & 2197.8 & 28571.4 & 2197.8 \\ -11233.2 & -34920.6 & -23687.4 & 69841.3 & -2197.8 & 28571.4 & 2197.8 & 28571.4 \\ 28571.4 & 2197.8 & -28571.4 & -2197.8 & 101587.3 & 30280.8 & -50793.7 & 81074.5 \\ -2197.8 & -28571.4 & 2197.8 & 28571.4 & 30280.8 & 101587.3 & -81074.5 & 50793.7 \\ -28571.4 & -2197.8 & 28571.4 & 2197.8 & -50793.7 & -81074.5 & 101587.3 & 30280.8 \\ 2197.8 & 28571.4 & -2197.8 & -28571.4 & -81074.5 & -50793.7 & 30280.8 & 101587.3 \end{bmatrix} \quad (2.74)$$



Şekil 2.6 : Örnek düzlem gerilme problemi



Şekil 2.7 : Örnek düzlem gerilme problemine ait sonlu elemanlar ağı

olarak elde edilmiştir. İkinci elemanın rijitlik matrisi ise

$$\mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} 79120.9 & -48351.6 & -39560.4 & 8791.2 & 28571.4 & -2197.8 & -28571.4 & 2197.8 \\ -48351.6 & 79120.9 & 8791.2 & -39560.4 & 2197.8 & -28571.4 & -2197.8 & 28571.4 \\ -39560.4 & 8791.2 & 79120.9 & -48351.6 & -28571.4 & 2197.8 & 28571.4 & -2197.8 \\ 8791.2 & -39560.4 & -48351.6 & 79120.9 & -2197.8 & 28571.4 & 2197.8 & -28571.4 \\ 28571.4 & 2197.8 & -28571.4 & -2197.8 & 79120.9 & 8791.2 & -39560.4 & -48351.6 \\ -2197.8 & -28571.4 & 2197.8 & 28571.4 & 8791.2 & 79120.9 & -48351.6 & -39560.4 \\ -28571.4 & -2197.8 & 28571.4 & 2197.8 & -39560.4 & -48351.6 & 79120.9 & 8791.2 \\ 2197.8 & 28571.4 & -2197.8 & -28571.4 & -48351.6 & -39560.4 & 8791.2 & 79120.9 \end{bmatrix} \quad (2.75)$$

şeklindedir. Sistemin rijitlik matrisi ise

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 69841.3 & -28571.4 & -11233.2 & -2197.8 & 0. & 0. & 0. & 0. \\ -28571.4 & 101587.3 & 2197.8 & -81074.5 & 0. & 0. & 0. & 0. \\ -11233.2 & 2197.8 & 148962.1 & 0. & 8791.2 & -2197.8 & 0. & 0. \\ -2197.8 & -81074.5 & -0. & 180708.2 & 2197.8 & -48351.6 & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 8791.2 & 2197.8 & 148962.1 & -0. & -11233.2 & 2197.8 \\ 0. & 0. & -2197.8 & -48351.6 & -0. & 180708.2 & 2197.8 & 81074.5 \\ 0. & 0. & 0. & 0. & -11233.2 & 2197.8 & 69841.3 & 28571.4 \\ 0. & 0. & 0. & 0. & -2197.8 & -81074.5 & 28571.4 & 101587.3 \end{bmatrix} \quad (2.76)$$

olarak elde edilmiştir. Eleman yük vektörleri

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_1^T &= 10^4 \times \{0. \quad 0. \quad 5. \quad 0. \quad 5. \quad 0. \quad 0. \quad 0.\}^T \\ \mathbf{q}_2^T &= 10^4 \times \{0. \quad 0. \quad 7.5 \quad 0. \quad 7.5 \quad 0. \quad 0. \quad 0.\}^T \\ \mathbf{q}_3^T &= 10^4 \times \{0. \quad 0. \quad 5. \quad 0. \quad 5. \quad 0. \quad 0. \quad 0.\}^T \end{aligned} \quad (2.77)$$

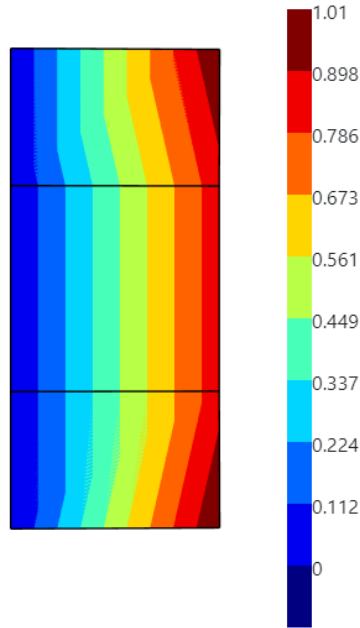
olarak hesaplanmıştır ve sistem yük vektörü

$$\mathbf{q}^T = 10^4 \times \{5. \quad 0. \quad 12.5 \quad 0. \quad 12.5 \quad 0. \quad 5. \quad 0.\}^T \quad (2.78)$$

şeklinde elde edilmiştir. 2.76 ve 2.78 2.38’de yerine konulup denklem takımı çözülürse deplasmanlar

$$\mathbf{u}^T = \{1.01 \quad 0.3717 \quad 0.8573 \quad 0.133 \quad 0.8573 \quad -0.133 \quad 1.01 \quad -0.3717\}^T \quad (2.79)$$

şeklinde elde edilmiş, problemin x yönündeki yer değiştirmeleri Şekil 2.8 de gösterilmiştir.



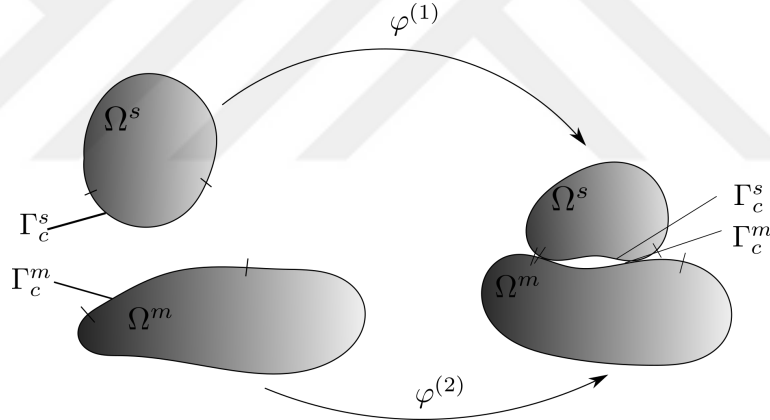
Şekil 2.8 : Örnek düzlem gerilme probleminde x yönündeki u dağılımı

3. SÜRTÜNMESİZ TEMAS ANALİZİ

Bu bölüm kapsamında birbiri ile temas halindeki iki cismin geometrik ilişkileri ve sürtünmesiz temas probleminin sınır şartlarından bahsedilecektir. Daha sonra Lagrange çarpanları yöntemi ile sınır şartlarının sonlu elemanlar formülasyonunda adapte edilmesi incelenecektir. Ardından düğüm noktası - düğüm noktası, düğüm noktası - kenar ve kenar - kenar temas elemanlarının formülasyonları yapılacaktır.

3.1 Sürtünmesiz Temas Kinematığı

Bir yüzey boyunca temas edecek iki cismin hareketini tarif etmek için cisimlerden birinin gözlemci olarak seçilmesi gerekmektedir. Yabancı dildeki kaynaklarda gözlemci olarak seçilen cisim *master* veya *target*, diğer cisim için ise *slave* veya *contact* olarak isimlendirilmektedir. Bu tez kapsamında gözlemci *hedef*, diğer cisim ise *temas* olarak adlandırılacaktır ve temas yüzeyine ait büyüklükler $(.)^s$, hedef yüzeye ait büyüklükler $(.)^m$ olarak gösterilecektir.



Şekil 3.1 : Başlangıç (sol) ve şekil değiştirmiş (sağ) cisim konfigürasyonu

Temas yüzeyinde seçilen herhangi bir noktanın, $0 \leq \xi \leq 1$ olacak şekilde parametrik hale getirilmiş hedef yüzeyine olan mesafenin karesi

$$L^2(\xi) = [\mathbf{x}^s - \mathbf{x}^m(\xi)]^T \cdot [\mathbf{x}^s - \mathbf{x}^m(\xi)] \quad (3.1)$$

şeklinde ifade edilir. Burada $\mathbf{x}$ şekil değiştirmiş cismin koordinatıdır (bkz Şekil 3.1). 3.1 ifadesinin diferansiyeli

$$\begin{aligned} 2LdL &= -d\mathbf{x}^m(\xi)^T \cdot [\mathbf{x}^s - \mathbf{x}^m(\xi)] - [\mathbf{x}^s - \mathbf{x}^m(\xi)]^T \cdot d\mathbf{x}^m(\xi) \\ &= -2[\mathbf{x}^s - \mathbf{x}^m(\xi)]^T d\mathbf{x}^m \end{aligned} \quad (3.2)$$

şeklinde elde edilebilir. İki cisim arasındaki açıklık iki cisim arasındaki minimum mesafe olarak tarif edilirse, açıklık noktasındaki yüzey parametresini elde etmek için 3.2 ifadesi yüzey parametresine göre minimize edilirse

$$\frac{dL}{d\xi} = -\frac{[\mathbf{x}^s - \mathbf{x}^m(\xi)]^T}{L} \cdot \frac{d\mathbf{x}^m(\xi)}{d\xi} = 0 \quad (3.3)$$

ifadesi elde edilir. 3.3’de ikinci ifade parametrik yüzeyin teğeti olmaktadır. Birbirinin skaler çarpımının 0’a eşit olması durumu sadece birbirlerine dik vektörler için geçerli olduğu düşünülürse, 3.3’de verilen ilk ifadenin yüzey teğetine dik yani yüzey normali doğrultusunda olması gerekliliği ortaya çıkmaktadır. O zaman temas yüzeyinde seçilen herhangi bir noktanın hedef yüzeye minimum mesafesi hedef yüzeydeki dik izdüşümüne olan mesafe, yüzey parametresi ise dik izdüşüm noktasını sağlayan değer olduğu anlaşılmaktadır. Bu pratik sonuçtan yola çıkılarak iki yüzey arasındaki açıklık ifadesi olarak

$$g = (\mathbf{x}^s - \bar{\mathbf{x}}^m) \cdot \bar{\mathbf{n}}^m \quad (3.4)$$

olarak söylenebilir. 3.4 de ifade edilen $\bar{\mathbf{x}}^m$ dik izdüşüm noktası, $\bar{\mathbf{n}}$ ise dik izdüşüm noktasındaki yüzey normali olmaktadır. 3.4 de şekil değiştirmiş cisim koordinatları yerine başlangıç koordinatları ve yer değiştirmeler yazıldığı taktirde

$$g = [(\mathbf{X}^s + \mathbf{u}^s) - (\bar{\mathbf{X}}^m + \bar{\mathbf{u}}^m)] \cdot \bar{\mathbf{n}}^m \quad (3.5)$$

ifadesi elde edilir. 3.5 denkleminde başlangıçta bilinen değerler olan şekil değiştirmemiş koordinatlar ve yüzey normali ile başlangıç açıklığı hesaplanabilmektedir.

$$g_0 = (\mathbf{X}^s - \bar{\mathbf{X}}^m) \cdot \bar{\mathbf{n}}^m \quad (3.6)$$

3.6 ifadesi 3.5’de yerine konulduğunda açıklık ifadesi başlangıç açıklığı ve deplasmanlara bağlı olarak

$$g = (\mathbf{u}^s - \bar{\mathbf{u}}^m) \cdot \bar{\mathbf{n}}^m + g_0 \quad (3.7)$$

şeklinde belirlenmektedir. Sonraki ifadelerde kullanılmak üzere 3.7 den faydalanılarak açıklık ifadesinin varyasyonu

$$\delta g = (\delta \mathbf{u}^s - \delta \bar{\mathbf{u}}^m) \cdot \bar{\mathbf{n}}^m \quad (3.8)$$

olarak elde edilir. 3.8’te küçük yer değiştirme teorisini kapsamında normal vektörünün sabit olduğu kabul edilmektedir.

3.2 Sınır Şartları ve Lagrange Çarpanları Yöntemi

3.1’de açıklandığı tarif edilen açıklık ifadesi kullanılarak temas yüzeyi boyunca birbiri üzerine geçmeme koşulu olarak

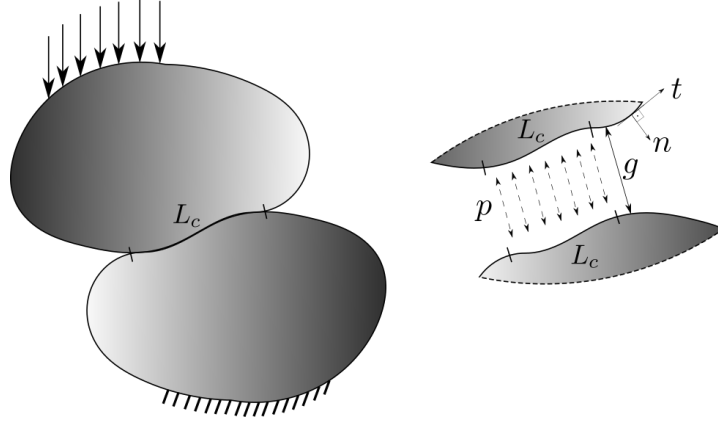
$$g \geq 0 \quad (3.9)$$

yazılabilmektedir. Şekil 3.2 de gözüktüğü üzere temas yüzeyi boyunca aktarılan gerilmenin sadece basınç olabilmesi sebebiyle yüzey boyunca oluşan basınç ifadesi için

$$p \leq 0 \quad (3.10)$$

eşitsizliği ortaya çıkmaktadır. Temas olayının gerçekleşmesinin mekanizması incelendiğinde önce açıklığın kapanması olayı gözlemlenecektir. Bu aşamada iki cisim arasında herhangi bir yük aktarımı söz konusu olmadığı için temas yüzeyindeki basınç gerilmesi $p = 0$ olmaktadır. Öte yandan açıklık kapandığı zaman $g = 0$ iki yüzey birbirine basınç aktaracaktır. Bu durum

$$pg = 0 \quad (3.11)$$



Şekil 3.2 : Temas yüzeyi boyunca oluşan sınır şartları

şeklinde sınır şartı olarak problemde belirlemektedir. Sürtünmesiz temas analizinde, denklemler 3.9, 3.10 ve 3.11 Signorini koşulları olarak anılmaktadır. Eşitsizlik kısıtına tabi optimizasyon problemi için bu koşullar Karush-Khan-Tucker koşulları olarak anılmaktadır.

Deklemler 3.9, 3.10 de belirtilen sınır şartlarını probleme dahil etmenin, Lagrange çarpanları metodu, penaltı metodu ve genişletilmiş (augmented) Lagrange çarpanları metodu gibi yöntemleri literatürde mevcuttur [18, 19]. Bu tez kapsamında sadece Lagrange çarpanları yönteminin üzerinde durulacaktır.

Lagrange çarpanları yöntemi, yüzey boyunca oluşan basınç gerilmesini problemin bir bilinmeyeni olarak ele alarak temas problemini karmaşık sınır değer problemine dönüştürmektedir. Metnin geri kalanında temas yüzeyinde oluşan basınç gerilmesi Lagrange çarpanlarının genel gösterim şekli olan λ sembolü ile temsil edilecektir.

Temas yüzeyi boyunca iş ifadesi

$$\Pi_c = \int_{\Gamma_c} \lambda g dA \quad (3.12)$$

şeklinde yazılmaktadır. 3.12 denkleminin varyasyonu

$$\delta \Pi_c = \int_{\Gamma_c} (\delta \lambda g + \lambda \delta g) dA \quad (3.13)$$

şeklinde elde edilmektedir. Temas gerilmelerinin bir bilinmeyen seçilmesinden dolayı 2.22 den farklı olarak gerilmelerin varyasyon ifadesi 3.13 de yer almaktadır. Lagrange çarpanları yönteminin akış şeması Algoritma 2 de verilmiştir.

Algorithm 2 Lagrange çarpanları çözüm algoritması

```
1: conElms ← bütün temas elemanları
2: procedure SOLVE CONTACT
3:   while doğru do
4:     solveSystem()
5:     çözüm ← doğru
6:     for elm in conElms do
7:       isActive ← elemanın aktifliği
8:        $\lambda$  ← eleman Lagrange çarpanı
9:       gap ← eleman açıklıklığı
10:      if isActive then
11:        if  $\lambda > 0$  then
12:          çözüm ← yanlış
13:          isActive ← yanlış
14:        end if
15:      else
16:        if gap < 0 then
17:          çözüm ← yanlış
18:          isActive ← doğru
19:        end if
20:      end if
21:    end for
22:    if çözüm then
23:      break
24:    end if
25:  end while
26: end procedure
```

3.3 Temas Elemanları

3.3.1 Düğüm Noktası -Düğüm Noktası Temas Elemanı

Düğüm noktası-düğüm noktası temas elemanı, Şekil 3.3 de gösterildiği üzere temas yüzeyinde seçilen bir düğüm noktasının hedef yüzeydeki tamamen veya kısmen örtüştüğü düğüm noktasına temas gerilmesi aktaran elemandır.

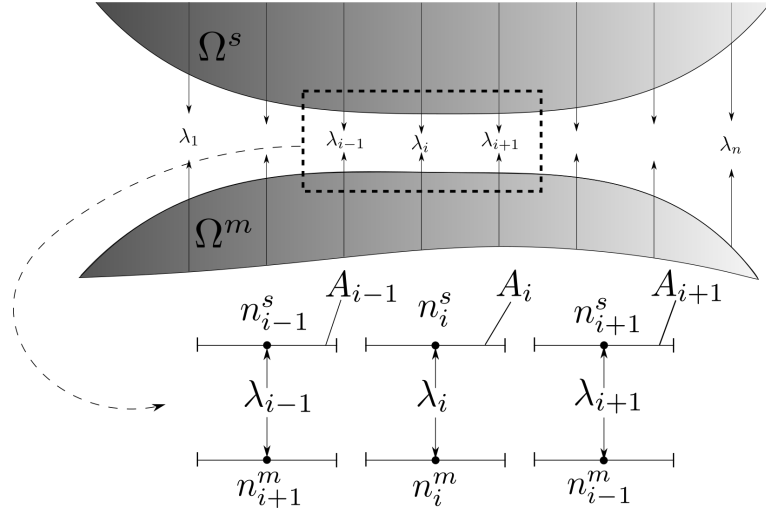
Eleman için açıklık ifadesi kapalı ve açık formu

$$g = (\mathbf{u}^s - \mathbf{u}^m)\mathbf{n} + g_0 \quad (3.14)$$

$$g = \left(\begin{Bmatrix} u^s \\ v^s \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} u^m \\ v^m \end{Bmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix} + g_0 \quad (3.15)$$

şeklindedir. 3.14 de verilen ilk açıklık ise

$$g_0 = \left(\begin{Bmatrix} X^s \\ Y^s \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} X^m \\ Y^m \end{Bmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix} = (X^s - X^m)n_1 + (Y^s - Y^m)n_2 \quad (3.16)$$



Şekil 3.3 : Düğüm noktası - düğüm noktası temas elemanı geometrisi

olmaktadır. 3.14 de serbestlikler tek bir vektörde toplandığında

$$g = \mathbf{u}^T \cdot \bar{\mathbf{n}} + g_0 \quad (3.17)$$

şekline bürünmektedir. 3.17 denklemindeki vektör tanımları

$$\mathbf{u}^T = \{u^s \quad v^s \quad u^m \quad v^m\} \quad (3.18)$$

$$\bar{\mathbf{n}}^T = [n_1 \quad n_2 \quad -n_1 \quad -n_2] \quad (3.19)$$

şeklinde olmaktadır. Açıklık ifadesinin varyasyonu ise

$$\delta g = \delta \mathbf{u}^T \cdot \bar{\mathbf{n}} \quad (3.20)$$

olarak elde edilmektedir. 3.17 ve 3.20 denklemleri 3.8 te yerine konulduğunda eleman üzerinde yazılan virtüel iş ifadesi

$$\delta W_c = \delta \mathbf{u}^T \iint_{\Gamma_c} \bar{\mathbf{n}} \lambda dA + \delta \lambda \iint_{\Gamma_c} (\bar{\mathbf{n}}^T \mathbf{u} \lambda + g_0) dA \quad (3.21)$$

olarak elde edilmektedir. 3.21 de verilen integral ifadesi elemanın tanımladığı alan üzerinde tanımlanmaktadır. Şekil 3.3 de gösterildiği üzere bu alan komşu elemanlar arasındaki mesafenin kalınlık ile çarpımı olarak tanımlanması kullanılarak virtüel iş ifadesi matris formda

$$\delta W_c = \{\delta \mathbf{u}^s \quad \delta \mathbf{u}^m \quad \delta \lambda\} \left(\begin{bmatrix} \emptyset & \emptyset & \mathbf{c}^s \\ \emptyset & \emptyset & \mathbf{c}^m \\ \mathbf{c}^{sT} & \mathbf{c}^{mT} & \emptyset \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^s \\ \mathbf{u}^m \\ \lambda \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \emptyset \\ \emptyset \\ \mathbf{g}_0 A \end{Bmatrix} \right) \quad (3.22)$$

olarak elde edilir. 3.22 ifadesinde

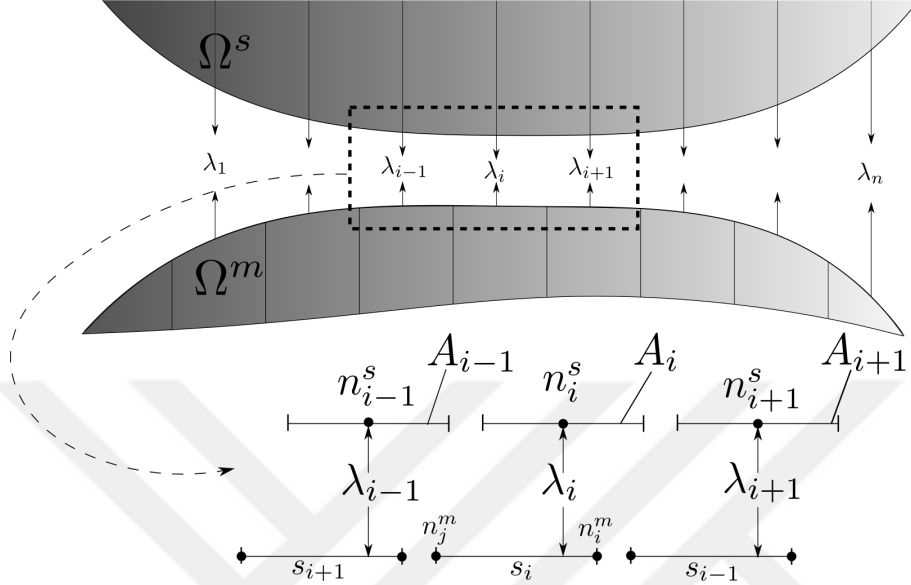
$$\mathbf{c}^{sT} = \{n_1 A \quad n_2 A\} \quad (3.23)$$

$$\mathbf{c}^{mT} = \{-n_1 A \quad -n_2 A\} \quad (3.24)$$

olmaktadır.

3.3.2 Düğüm Noktası - Kenar Temas Elemanı

Düğüm noktası - kenar temas elemanı, Şekil 3.4 de gösterildiği üzere temas yüzeyinde seçilen bir düğüm noktasının hedef yüzeydeki izdüşümü kenar elemanına temas gerilmesi aktaran elemandır. Eleman formülasyonuna geçmeden önce hedef yüzeydeki geometrik bilgiler tanımlanacaktır.



Şekil 3.4 : Düğüm Noktası -Kenar Eleman Geometrisi

Hedef yüzeyde izdüşüm kenar elemanın doğrultman vektörü ve boyu

$$L_{seg} = ||\mathbf{X}_j^m - \mathbf{X}_i^m|| \quad (3.25)$$

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{X}_j^m - \mathbf{X}_i^m}{L_{seg}} \quad (3.26)$$

olarak tarif edildikten sonra $\mathbf{e}_3$ düzleme dik birim vektör olmak üzere kenar elemanın normal

$$\mathbf{n} = \mathbf{t} \times \mathbf{e}_3 \quad (3.27)$$

şeklinde elde edilmektedir. Temas yüzeyindeki düğüm noktasının hedef yüzeye izdüşüm parametresi ve koordinatları

$$\bar{\xi} = \frac{1}{L_{seg}} (\mathbf{X}^s - \mathbf{X}_i^m) \cdot \mathbf{t} \quad (3.28)$$

$$\bar{\mathbf{X}}^m = (1 - \bar{\xi})\mathbf{X}_i^m + \bar{\xi}\mathbf{X}_j^m \quad (3.29)$$

şeklinde elde edilir. İlk açıklık ifadesi başlangıç konumunda temas yüzeyindeki düğüm noktası ile izdüşümü arasındaki mesafe 3.29 kullanılarak

$$g_0 = (\mathbf{X}^s - [(1 - \bar{\xi})\mathbf{X}_i^m + \bar{\xi}\mathbf{X}_j^m]) \cdot \mathbf{n} \quad (3.30)$$

olarak elde edilir. Açıklık ifadesi 3.7 denklemini kullanılarak kapalı halde

$$g = (\mathbf{u}^s - [(1 - \bar{\xi})\mathbf{u}_i^m + \bar{\xi}\mathbf{u}_j^m]) \cdot \mathbf{n} + g_0 \quad (3.31)$$

şeklinde ifade edilir. 3.31 denkleminin açık hali ise

$$g = \left(\begin{Bmatrix} u^s \\ v^s \end{Bmatrix} - (1 - \bar{\xi}) \begin{Bmatrix} u_i^m \\ v_i^m \end{Bmatrix} - \bar{\xi} \begin{Bmatrix} u_j^m \\ v_j^m \end{Bmatrix} \right)^T \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{Bmatrix} + g_0 \quad (3.32)$$

olarak elde edilir. 3.17 e benzer şekilde serbestlikler tek bir vektörde toplandığında açıklık ifadesi

$$g = \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{n}} + g_0 \quad (3.33)$$

şekline bürünmektedir. 3.33 denkleminde

$$\mathbf{u}^T = \{ \delta u^s \quad \delta v^s \quad \delta u_i^m \quad \delta v_i^m \quad \delta u_j^m \quad \delta v_j^m \} \quad (3.34)$$

$$\bar{\mathbf{n}}^T = \{ n_1 \quad n_2 \quad -(1 - \bar{\xi})n_1 \quad -(1 - \bar{\xi})n_2 \quad -\bar{\xi}n_1 \quad -\bar{\xi}n_2 \} \quad (3.35)$$

olmaktadır. Eşitlik ifadesinin varyasyonu

$$\delta g = \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{n}} \quad (3.36)$$

şekline elde edilmektedir. Denklemler 3.33 ve 3.36 ifadeleri 3.8 de yerine konulduğunda eleman üzerinde yazılan virtüel iş ifadesi

$$\delta W_c = \delta \mathbf{u}^T \iint_{\Gamma_c} \mathbf{c} \lambda dA + \delta \lambda \iint_{\Gamma_c} (\mathbf{n}^T \mathbf{c} + g_0) dA \quad (3.37)$$

olarak elde edilir. İntegral ifadesi temas yüzeyinde tarif edildiği için, düğüm noktası-düğüm noktası temas elemanına benzer şekilde integral içindeki alan ifadesi düğüm noktasının temsil ettiği alandan ibarettir (bkz. Şekil 3.4). 3.37 de integral ifadeleri

$$\delta W_c = \{ \delta \mathbf{u}^s \quad \delta \mathbf{u}^m \quad \delta \lambda \} \left(\begin{bmatrix} \emptyset & \emptyset & \mathbf{c}^s \\ \emptyset & \emptyset & \mathbf{c}^m \\ \mathbf{c}^{sT} & \mathbf{c}^{mT} & \emptyset \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^s \\ \mathbf{u}^m \\ \lambda \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \emptyset \\ \emptyset \\ \mathbf{g}_0 A \end{Bmatrix} \right) \quad (3.38)$$

şeklinde matris formda gösterilmektedir. 3.22 ifadesinde

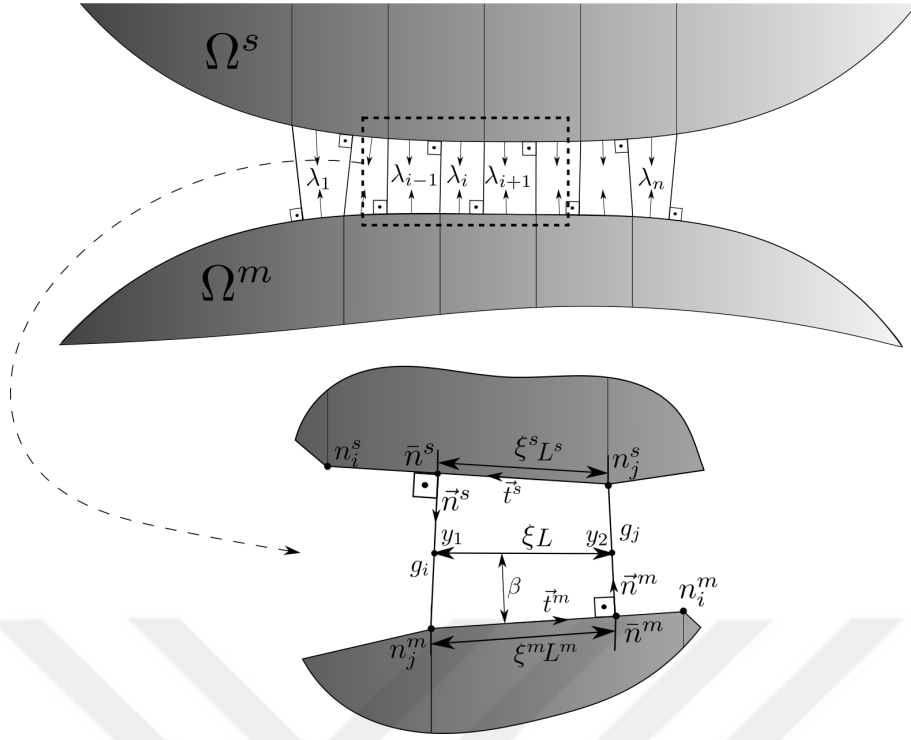
$$\mathbf{c}^{sT} = \{ n_1 A \quad n_2 A \} \quad (3.39)$$

$$\mathbf{c}^{mT} = \{ (\bar{\xi} - 1)n_1 A \quad (\bar{\xi} - 1)n_2 A \quad -\bar{\xi}n_1 A \quad -\bar{\xi}n_2 A \} \quad (3.40)$$

olarak tanımlanmaktadır.

3.3.3 Kenar-Kenar Temas Elemanı

Kenar-kenar temas elemanı, temas yüzeyinde seçilen herhangi bir kenar elemanı ile hedef yüzeyde bu eleman ile eşleşen kenar elemanın düğüm noktalarının birbiri üzerine karşılıklı iz düşürülmesi ile kısıtlanan alan üzerinden temas gerilmesini aktaran eleman tipidir (bkz Şekil 3.5). Bahsedilen kısıtlı alan bu noktadan sonra segment olarak isimlendirilecektir. Hedef yüzeydeki düğüm noktasının temas yüzeyine iz düşürülmesi sebebiyle Bölüm 3.3.1 ve Bölüm 3.3.2 de bahsedilen elemanlardan daha farklı bir yapıya sahiptir. Eleman düğüm noktası-kenar temas elemanına benzer şekilde düğüm notlarının birebir örtüşmediği ağlarda kullanılabilir.



Şekil 3.5 : Kenar-kenar eleman geometrisi

Şekil 3.5 de gösterilen hedef ve temas yüzeyindeki kenar elemanın geometrik özellikleri 3.25 - 3.28 denklemlerine benzer şekilde

$$L^m = \|\mathbf{X}_j^m - \mathbf{X}_i^m\| \quad (3.41)$$

$$L^s = \|\mathbf{X}_j^s - \mathbf{X}_i^s\| \quad (3.42)$$

$$\mathbf{t}^m = \frac{\mathbf{X}_j^m - \mathbf{X}_i^m}{L^m} \quad (3.43)$$

$$\mathbf{t}^s = \frac{\mathbf{X}_j^s - \mathbf{X}_i^s}{L^s} \quad (3.44)$$

olarak tanımlanmaktadır. Kenar normaleri 3.27 ifadesi kullanılarak hesaplanmaktadır. İz düşüm parametreleri karşılıklı olarak

$$\bar{\xi}^m = \frac{1}{L^m} (\mathbf{X}_i^s - \mathbf{X}_i^m) \cdot \mathbf{t}^m \quad (3.45)$$

$$\bar{\xi}^s = \frac{1}{L^s} (\mathbf{X}_i^m - \mathbf{X}_i^s) \cdot \mathbf{t}^s \quad (3.46)$$

şeklinde elde edilir. Segmenti oluşturan temas ve hedef yüzeydeki düğüm noktalarının karşılıklı izdüşümleri

$$\bar{\mathbf{X}}^m = (1 - \bar{\xi}^m) \mathbf{X}_i^m + \bar{\xi}^m \mathbf{X}_j^m \quad (3.47)$$

$$\bar{\mathbf{X}}^s = (1 - \bar{\xi}^s) \mathbf{X}_i^s + \bar{\xi}^s \mathbf{X}_j^s \quad (3.48)$$

olarak tanımlanır. Segmentin i ve j uçları için açıklık ifadeleri 3.7 kullanılarak

$$g_i = (\mathbf{u}_i^m - [(1 - \bar{\xi}^s) \mathbf{u}_i^s + \bar{\xi}^s \mathbf{u}_j^s]) \cdot \mathbf{n}^s + g_{i0} \quad (3.49)$$

$$g_j = (\mathbf{u}_i^s - [(1 - \bar{\xi}^m) \mathbf{u}_i^m + \bar{\xi}^m \mathbf{u}_j^m]) \cdot \mathbf{n}^m + g_{j0} \quad (3.50)$$

şeklinde tarif edilmektedir. 3.49 ve 3.50 denklemlerinde belirtilen ilk açıklıklar 3.30 ifadesi kullanılarak hesaplanabilmektedir. 3.49 ve 3.50 denklemlerinin varyasyon ifadeleri

$$\delta g_i = (\delta \mathbf{u}_i^m - [(1 - \bar{\xi}^s) \delta \mathbf{u}_i^s + \bar{\xi}^s \delta \mathbf{u}_j^s]) \cdot \mathbf{n}^s \quad (3.51)$$

$$\delta g_j = (\delta \mathbf{u}_i^s - [(1 - \bar{\xi}^m) \delta \mathbf{u}_i^m + \bar{\xi}^m \delta \mathbf{u}_j^m]) \cdot \mathbf{n}^m \quad (3.52)$$

olmaktadır.

Segmentin i ve j ucu için elde edilen açıklık ifadesinin eleman üzerinde tanımlanması için temas alanı tanımı yapılması gerekmektedir. Bölüm 3.3.1 ve Bölüm 3.3.2 de incelenen elemanların temas alanı tanımı ardışık elemanlar arasındaki mesafe olarak tanımlanmaktadır. Kenar-kenar temas elemanın geometrik özelliklerinden dolayı temas alanı tanımı temas veya hedef yüzey üzerinde yapılabileceği gibi ortalama bir değer ile de ifade edilebilmektedir. $0 \leq \beta \leq 1$ gibi bir açıklık parametresine bağlı segmentin i ve j uçlarının koordinatları

$$\mathbf{y}_1 = (1 - \beta) \mathbf{X}_i^m + \beta \bar{\mathbf{X}}^s \quad (3.53)$$

$$\mathbf{y}_2 = (1 - \beta) \mathbf{X}_i^s + \beta \bar{\mathbf{X}}^m \quad (3.54)$$

olarak tanımlanmaktadır ve segmentin boyu

$$L = \|\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1\| \quad (3.55)$$

olarak elde edilmektedir. Segment üzerindeki açıklık ifadesi, iki uçtaki açıklık ifadeleri kullanılarak

$$g = (1 - \xi) g_1 + \xi g_2 \quad (3.56)$$

olarak tarif edilebilir. 3.56 ifadesinde ξ segment parametresi olarak tarif edilmektedir. 3.56 ifadesinin varyasyonu

$$\delta g = (1 - \xi) \delta g_1 + \xi \delta g_2 \quad (3.57)$$

şeklinde elde edilir. 3.56 ve 3.57 denklemleri 3.13'de yerine konulursa kenar-kenar temas elemanı için virtüel iş ifadesi

$$\delta W_c = \int_{\Gamma_c} [(1 - \xi) \delta g_1 + \xi \delta g_2] \lambda dA + \int_{\Gamma_c} [(1 - \xi) g_1 + \xi g_2] \delta \lambda dA \quad (3.58)$$

olmaktadır. 3.58 de gerekli işlemler yapıldığında

$$\delta W_c = tL \left(\lambda \frac{\delta g_1 + \delta g_2}{2} + \delta \lambda \frac{g_1 + g_2}{2} + \delta \lambda \frac{g_0^m + g_0^s}{2} \right) \quad (3.59)$$

ifadesi olarak elde edilen virtüel iş terimindeki ifadeler 3.49 ve 3.50 ifadeleri kullanılarak

$$\begin{aligned} g_1 + g_2 = & \mathbf{u}_i^m \cdot [\mathbf{n}^s - (1 - \bar{\xi}^m) \mathbf{n}^m] + \mathbf{u}_j^m \cdot [-\bar{\xi}^m \mathbf{n}^m] + \\ & + \mathbf{u}_i^s \cdot [\mathbf{n}^m - (1 - \bar{\xi}^s) \mathbf{n}^s] + \mathbf{u}_j^s \cdot [-\bar{\xi}^s \mathbf{n}^s] \end{aligned} \quad (3.60)$$

olarak ifade edilir. Denklem 3.60 3.59 de yerine konulup ifadeler matris halde yazıldığında

$$\{\delta \mathbf{u}^s \quad \delta \mathbf{u}^m \quad \delta \lambda\} \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathbf{c}^s \\ 0 & 0 & \mathbf{c}^m \\ \mathbf{c}^s & \mathbf{c}^m & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^s \\ \mathbf{u}^m \\ \lambda \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{g}_0 A \end{Bmatrix} \right) \quad (3.61)$$

şeklinde elde edilir. 3.61 ifadesinde

$$\mathbf{c}^s = \frac{1}{2} A \{ n_1^m - (1 - \bar{\xi}^s) n_1^s \quad n_2^m - (1 - \bar{\xi}^s) n_2^s \quad -\bar{\xi}^s n_1^s \quad -\bar{\xi}^s n_2^s \} \quad (3.62)$$

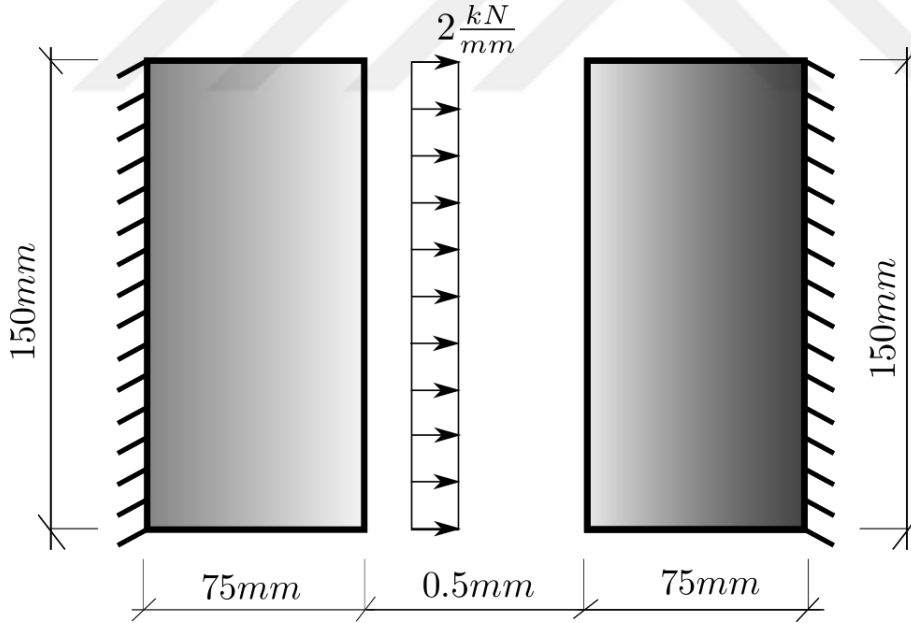
$$\mathbf{c}^m = \frac{1}{2} A \{ n_1^s - (1 - \bar{\xi}^m) n_1^m \quad n_2^s - (1 - \bar{\xi}^m) n_2^m \quad -\bar{\xi}^m n_1^m \quad -\bar{\xi}^m n_2^m \} \quad (3.63)$$

$$\bar{g}_0 = \frac{1}{2} (g_{i0} + g_{j0}) \quad (3.64)$$

şeklinde elde edilir.

3.4 Örnek Problem

Şekil 3.6 de verilen düzlem gerilme problemi Şekil 2.6 de verilen tek tarafından mesnetlenmiş plakanın yük doğrultusuna $g = 0.5mm$ lik bir açıklık ile tek tarafından mesnetlenmiş başka bir plaka ile temas problemi incelenecektir. Bölüm 3.3.1, 3.3.2 ve 3.3.3 anlatılan temas elemanları ile problem ayrı ayrı çözülecektir. Şekil 2.8 den gözüktüğü üzere probleminin çözümünde ilk açıklığın kapanması ve sağ taraftaki plakaya yük aktarımının olması beklenmektedir.



Şekil 3.6 : Örnek temas problemi

3.4.1 Düğüm Noktası-Düğüm Noktası Temas Elemanı ile Çözüm

Şekil 3.6 de verilen düzlem gerilme problemi Şekil 3.7 de verilen ağ yapısı ve dört adet düğüm noktası-düğüm noktası temas elemanı ile temsil edilecektir. Soldaki plakanın kenar düğüm noktaları temas, sağdaki plakanın kenar düğüm noktaları ise hedef düğüm noktaları olarak seçilmiştir. İlk temas elemanının özellikleri

eleman matrisleri kullanılarak plakalara ait sistem matrisleri

$$\mathbf{K}^s = \begin{bmatrix} 69841.3 & -28571.4 & -11233.2 & -2197.8 & 0. & 0. & 0. & 0. \\ -28571.4 & 101587.3 & 2197.8 & -81074.5 & 0. & 0. & 0. & 0. \\ -11233.2 & 2197.8 & 139682.5 & 0. & -11233.2 & -2197.8 & 0. & 0. \\ -2197.8 & -81074.5 & 0. & 203174.6 & 2197.8 & -81074.5 & 0. & 0. \\ 0. & 0. & -11233.2 & 2197.8 & 139682.5 & -0. & -11233.2 & 2197.8 \\ 0. & 0. & -2197.8 & -81074.5 & -0. & 203174.6 & 2197.8 & -81074.5 \\ 0. & 0. & 0. & 0. & -11233.2 & 2197.8 & 69841.3 & 28571.4 \\ 0. & 0. & 0. & 0. & -2197.8 & -81074.5 & 28571.4 & 101587.3 \end{bmatrix} \quad (3.73)$$

$$\mathbf{K}^m = \begin{bmatrix} 69841.3 & 28571.4 & -11233.2 & 2197.8 & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 28571.4 & 101587.3 & -2197.8 & -81074.5 & 0. & 0. & 0. & 0. \\ -11233.2 & -2197.8 & 139682.5 & 0. & -11233.2 & 2197.8 & 0. & 0. \\ 2197.8 & -81074.5 & 0. & 203174.6 & -2197.8 & -81074.5 & 0. & 0. \\ 0. & 0. & -11233.2 & -2197.8 & 139682.5 & 0. & -11233.2 & 2197.8 \\ 0. & 0. & 2197.8 & -81074.5 & 0. & 203174.6 & -2197.8 & 81074.5 \\ 0. & 0. & 0. & 0. & -11233.2 & -2197.8 & 69841.3 & 28571.4 \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 2197.8 & -81074.5 & -28571.4 & 101587.3 \end{bmatrix} \quad (3.74)$$

olarak elde edilir. Yük vektörü ise 2.66 yardımıyla

$$\mathbf{q}^s = 10^4 \times \{5. \quad 0. \quad 10. \quad 0. \quad 10. \quad 0. \quad 5. \quad 0.\}^T \quad (3.75)$$

$$\mathbf{q}^m = \{0. \quad 0. \quad 0. \quad 0. \quad 0. \quad 0. \quad 0. \quad 0.\}^T \quad (3.76)$$

olarak elde edilir ve ayrık iki plakanın sonlu elemanlar denklem takımı

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^s & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}^m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^s \\ \mathbf{u}^m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}^s \\ \mathbf{q}^m \end{Bmatrix} \quad (3.77)$$

$$\mathbf{u}^s = \{u_5 \quad v_5 \quad u_6 \quad v_6 \quad u_7 \quad v_7 \quad u_8 \quad v_8\}^T \quad (3.78)$$

$$\mathbf{u}^m = \{u_9 \quad v_9 \quad u_{10} \quad v_{10} \quad u_{11} \quad v_{11} \quad u_{12} \quad v_{12}\}^T \quad (3.79)$$

olarak yazılır ve denklem takımının çözümünden deplasmanlar

$$\mathbf{u}^s = \{0.996 \quad 0.3397 \quad 0.8581 \quad 0.098 \quad 0.8581 \quad -0.098 \quad 0.996 \quad -0.3397\}^T \quad (3.80)$$

$$\mathbf{u}^m = \{0.0 \quad 0.0 \quad 0.0 \quad 0.0 \quad 0.0 \quad 0.0 \quad 0.0 \quad 0.0\}^T \quad (3.81)$$

şeklinde hesaplanır. 3.80 ve 3.81 de elde edilen deplasman değerleri ile 3.17 kullanılarak elemanlar için yeni açıklık ifadeleri

$$g_1 = \{0.9960 \quad -0.3397\} \{-1.0 \quad 0.\}^T + 0.5 = -0.4960 \quad (3.82)$$

$$g_2 = \{0.8581 \quad -0.0980\} \{-1.0 \quad 0.\}^T + 0.5 = -0.3581 \quad (3.83)$$

$$g_3 = \{0.8581 \quad 0.0980\} \{-1.0 \quad 0.\}^T + 0.5 = -0.3581 \quad (3.84)$$

$$g_4 = \{0.9960 \quad 0.3397\} \{-1.0 \quad 0.\}^T + 0.5 = -0.4960 \quad (3.85)$$

olarak elde edilir. 3.82 - 3.85 de hesaplanan açıklık ifadelerinin hepsinin negatif çıkması ile, bir sonraki iterasyon adımı bütün temas elemanlarının sisteme dahil

edilmesi gerekliliğini göstermektedir. Bütün elemanlarda 3.23 ve 3.24 ifadelerinin hesaplanması ile

$$\mathbf{c}_1^s = \{-20 \ 0\} \quad \mathbf{c}_1^m = \{20 \ 0\} \quad (3.86)$$

$$\mathbf{c}_2^s = \{-40 \ 0\} \quad \mathbf{c}_2^m = \{40 \ 0\} \quad (3.87)$$

$$\mathbf{c}_3^s = \{-40 \ 0\} \quad \mathbf{c}_3^m = \{40 \ 0\} \quad (3.88)$$

$$\mathbf{c}_4^s = \{-20 \ 0\} \quad \mathbf{c}_4^m = \{20 \ 0\} \quad (3.89)$$

olarak elde edilir. Aktif elemanlar ile oluşan yeni denklem takımı

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^s & \emptyset & \mathbf{K}_c^s \\ \emptyset & \mathbf{K}^m & \mathbf{K}_c^m \\ \mathbf{K}_c^{sT} & \mathbf{K}_c^{mT} & \emptyset \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^s \\ \mathbf{u}^m \\ \boldsymbol{\lambda} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}^s \\ \mathbf{q}^m \\ \mathbf{g} \end{Bmatrix} \quad (3.90)$$

şekline bürünmektedir. 3.90 de

$$\mathbf{K}_c^s = \begin{bmatrix} 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & -20. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & -40. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & -40. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ -20. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \end{bmatrix} \quad (3.91)$$

$$\mathbf{K}_c^m = \begin{bmatrix} 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 20. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 40. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 40. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 20. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \end{bmatrix} \quad (3.92)$$

$$\mathbf{g} = -\{10. \ 20. \ 20. \ 10.\}^T \quad (3.93)$$

$$\boldsymbol{\lambda} = \{\lambda_1 \ \lambda_2 \ \lambda_3 \ \lambda_4\}^T \quad (3.94)$$

olarak tanımlanmaktadır. Temas elemanlarının dahil edildiği yeni denklem takımının çözümü ile bilinmeyenler

$$\mathbf{u}^s = [0.748 \ 0.2539 \ 0.6791 \ 0.073 \ 0.6791 \ -0.073 \ 0.748 \ -0.2539] \quad (3.95)$$

$$\mathbf{u}^m = [0.248 \ 0.0858 \ 0.1791 \ 0.025 \ 0.1791 \ -0.025 \ 0.248 \ -0.0858] \quad (3.96)$$

$$\boldsymbol{\lambda} = [-640.0789 \ -511.4652 \ -511.4652 \ -640.0789] \quad (3.97)$$

olarak bulunur. Elde edilen yeni çözüm ile elemanların açıklıkları 3.17 kullanılarak

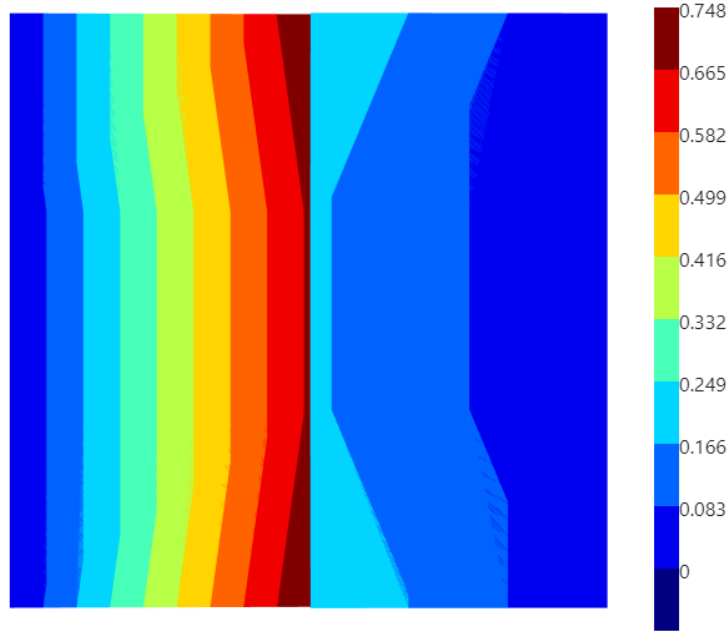
$$g_1 = (\{0.748 \ -0.254\} - \{0.248 \ 0.086\}) \{-1.0 \ 0.\}^T + 0.5 = 0 \quad (3.98)$$

$$g_2 = (\{0.679 \ -0.073\} - \{0.179 \ 0.025\}) \{-1.0 \ 0.\}^T + 0.5 = 0 \quad (3.99)$$

$$g_3 = (\{0.679 \ 0.073\} - \{0.179 \ -0.025\}) \{-1.0 \ 0.\}^T + 0.5 = 0 \quad (3.100)$$

$$g_4 = (\{0.748 \ 0.254\} - \{0.248 \ -0.086\}) \{-1.0 \ 0.\}^T + 0.5 = 0 \quad (3.101)$$

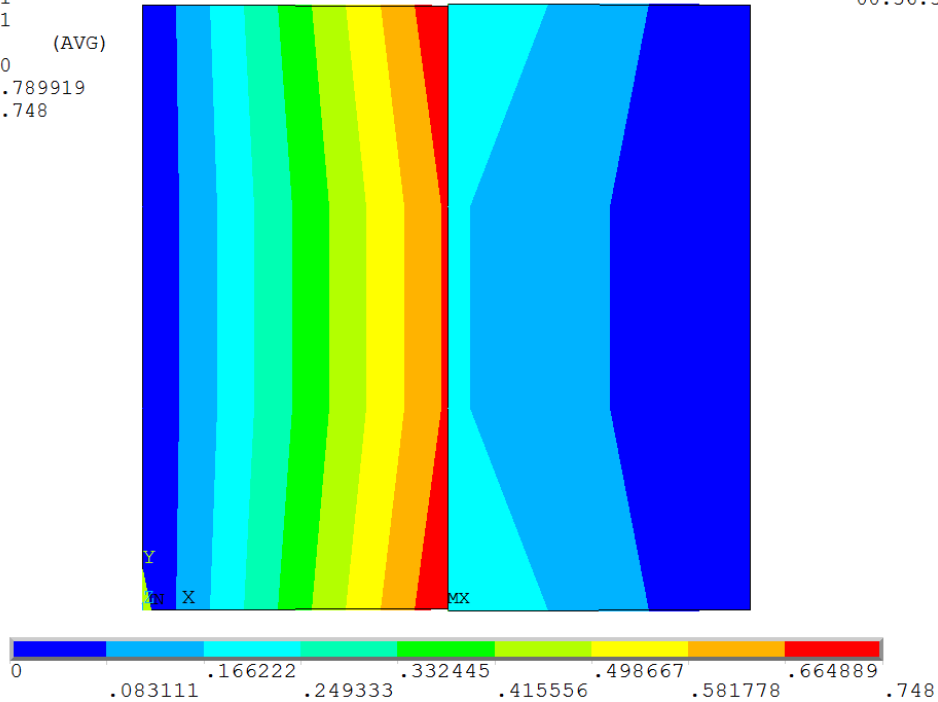
olarak elde edilir. 3.98-3.101 de elde edilen bütün açıklık ifadelerinin sıfıra eşit olması ve 3.97 da elde edilen bütün Lagrange çarpanlarının negatif olması ile problem çözüme ulaşmıştır. x yönündeki deplasman değerleri Şekil 3.8 de görülmektedir. Aynı problemin x yönü yer değiştirmelerinin Ansys ile çözümü Şekil 3.9 de verilmiştir. İki sonucun da birbiri ile örtüştüğü gözlemlenmiştir.



Şekil 3.8 : Örnek temas probleminin düğüm noktası-düğüm noktası temas elemanına ait x yönü deplasmanları

1
NODAL SOLUTION
STEP=1
SUB =1
TIME=1
UX (AVG)
RSYS=0
DMX =.789919
SMX =.748

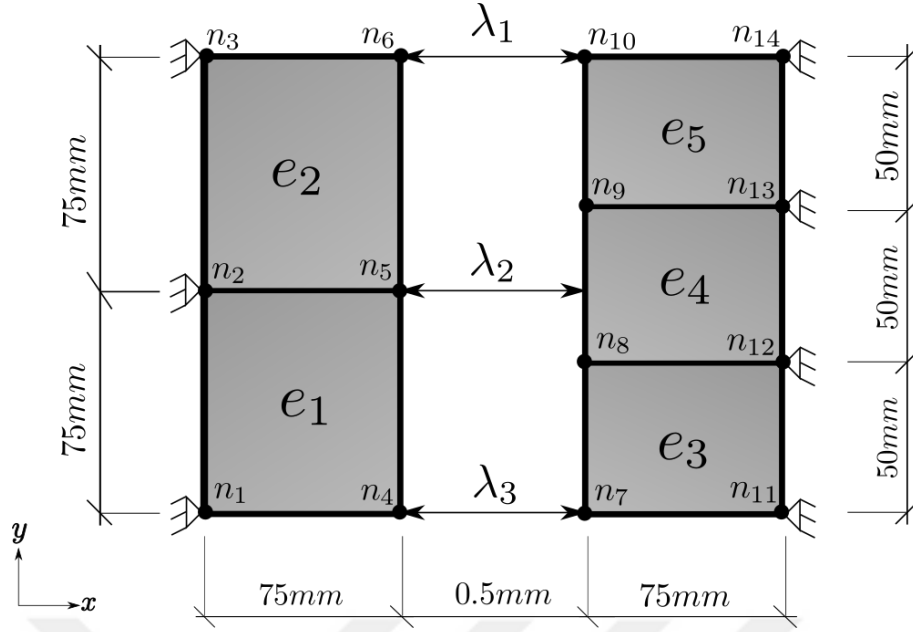
ANSYS
R16.0
MAY 29 2018
00:36:35



Şekil 3.9 : Örnek temas probleminin Ansys'te düğüm noktası-düğüm noktası temas elemanları ile çözümünün x yönü deplasmanları

3.4.2 Düğüm Noktası - Kenar Temas Elemanı ile Çözüm

Şekil 3.6 de verilen düzlem gerilme problemi Şekil 3.10 de verilen ağ yapısı ve üç adet düğüm noktası-kenar temas elemanı ile temsil edilecektir. Soldaki plakanın kenar düğüm noktaları temas, sağdaki plakanın kenar düğüm noktaları ise hedef düğüm



Şekil 3.10 : Örnek temas probleminin sonlu eleman ağ yapısı ve düğüm noktası-kenar temas elemanları

noktaları olarak seçilmiştir. İlk temas elemanı ile ilgili geometrik özellikler

$$L_{seg1} = ||X_{10} - X_9|| = 50. mm \quad (3.102)$$

$$\mathbf{t}_1 = \frac{X_9 - X_{10}}{L_{seg1}} = \{0. \quad -1.\}^T \quad (3.103)$$

$$\mathbf{n}_1 = t_2 \times e_3 = \{-1 \quad 0\}^T \quad (3.104)$$

$$\bar{\xi}_1 = \frac{1}{L_{seg1}} (\mathbf{x}^s - \mathbf{x}_i^m) \cdot \mathbf{t}_1 = 0 \quad (3.105)$$

$$A_1 = \frac{||\mathbf{X}_6 - \mathbf{X}_5||}{2} 0.8 = 30mm^2 \quad (3.106)$$

olarak elde edilir. Elemanın ilk açıklığı 3.30 kullanılarak

$$g_{01} = \left(\left\{ \begin{matrix} 75. \\ 150. \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} 75.5 \\ 150. \end{matrix} \right\} \right) \cdot \left\{ \begin{matrix} -1. \\ 0. \end{matrix} \right\} = 0.5 \quad (3.107)$$

şeklinde hesaplanır. Benzer şekilde diğer elemanların geometrik özellikleri ve ilk açıklıkları

$$\mathbf{t}_2 = \mathbf{t}_3 = \{0. \quad -1.\}^T \quad (3.108)$$

$$\mathbf{n}_2 = \mathbf{n}_3 = \{-1 \quad 0\}^T \quad (3.109)$$

$$\bar{\xi}_2 = 0.5 \quad \bar{\xi}_3 = 1. \quad (3.110)$$

$$g_{02} = g_{03} = 0.5 \quad (3.111)$$

$$A_2 = 60mm^2 \quad A_3 = 30mm^2 \quad (3.112)$$

şeklinde ifade edilmektedir.

Geometrik özellikler elde edildikten sonra çözümün ilk adımı olarak bütün temas elemanları devre dışı bırakılarak sonlu eleman çözümü yapılır. Bölüm 2.2.4 de verilen eleman matrisleri kullanılarak plakalara ait sistem matrisleri

$$\mathbf{K}^s = \begin{bmatrix} 79120.9 & -28571.4 & 8791.2 & -2197.8 & 0. & 0. \\ -28571.4 & 79120.9 & 2197.8 & -48351.6 & 0. & 0. \\ 8791.2 & 2197.8 & 158241.8 & 0. & 8791.2 & -2197.8 \\ -2197.8 & -48351.6 & 0. & 158241.8 & 2197.8 & -48351.6 \\ 0. & 0. & 8791.2 & 2197.8 & 79120.9 & 28571.4 \\ 0. & 0. & -2197.8 & -48351.6 & 28571.4 & 79120.9 \end{bmatrix} \quad (3.113)$$

$$\mathbf{K}^m = \begin{bmatrix} 69841.3 & 28571.4 & -11233.2 & 2197.8 & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 28571.4 & 101587.3 & -2197.8 & -81074.5 & 0. & 0. & 0. & 0. \\ -11233.2 & -2197.8 & 139682.5 & 0. & -11233.2 & 2197.8 & 0. & 0. \\ 2197.8 & -81074.5 & 0. & 203174.6 & -2197.8 & -81074.5 & 0. & 0. \\ 0. & 0. & -11233.2 & -2197.8 & 139682.5 & 0. & -11233.2 & 2197.8 \\ 0. & 0. & 2197.8 & -81074.5 & 0. & 203174.6 & -2197.8 & 81074.5 \\ 0. & 0. & 0. & 0. & -11233.2 & -2197.8 & 69841.3 & 28571.4 \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 2197.8 & -81074.5 & -28571.4 & 101587.3 \end{bmatrix} \quad (3.114)$$

olarak elde edilir. Yük vektörü ise 2.66 yardımıyla

$$\mathbf{q}^{sT} = 10^4 \times \{7.5 \quad 0. \quad 15. \quad 0. \quad 7.5 \quad 0.\} \quad (3.115)$$

$$\mathbf{q}^{mT} = \{0. \quad 0. \quad 0. \quad 0. \quad 0. \quad 0. \quad 0. \quad 0.\} \quad (3.116)$$

olarak elde edilir ve ayrık iki plakanın sonlu elemanlar denklem takımı

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^s & \emptyset \\ \emptyset & \mathbf{K}^m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^s \\ \mathbf{u}^m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}^s \\ \mathbf{q}^m \end{Bmatrix} \quad (3.117)$$

$$\mathbf{u}^s = \{u_4 \quad v_4 \quad u_5 \quad v_5 \quad u_6 \quad v_6\}^T \quad (3.118)$$

$$\mathbf{u}^m = \{u_7 \quad v_7 \quad u_8 \quad v_8 \quad u_9 \quad v_9 \quad u_{10} \quad v_{10}\}^T \quad (3.119)$$

olarak yazılır ve denklem takımının çözümünden deplasmanlar

$$\mathbf{u}^{sT} = \{0.9744 \quad 0.3288 \quad 0.8305 \quad 0. \quad 0.9744 \quad -0.3288\} \quad (3.120)$$

$$\mathbf{u}^{mT} = \{0.0 \quad 0.0 \quad 0.0 \quad 0.0 \quad 0.0 \quad 0.0 \quad 0.0 \quad 0.0\} \quad (3.121)$$

şeklinde hesaplanır.

3.120 ve 3.121 de elde edilen deplasman değerleri ile 3.32 kullanılarak elemanlar için yeni açıklık ifadeleri

$$g_1 = \{0.9744 \quad -0.3288\} \{-1.0 \quad 0.\}^T + 0.5 = -0.4744 \quad (3.122)$$

$$g_2 = \{0.8305 \quad 0.\} \{-1.0 \quad 0.\}^T + 0.5 = -0.3305 \quad (3.123)$$

$$g_3 = \{0.9744 \quad 0.3288\} \{-1.0 \quad 0.\}^T + 0.5 = -0.4744 \quad (3.124)$$

olarak elde edilir. 3.122 - 3.124 de hesaplanan açıklık ifadelerinin hepsinin negatif çıkması ile, bir sonraki iterasyon adımında bütün temas elemanlarının sisteme dahil

edilmesi gerekliliğini göstermektedir. Bütün elemanlarda 3.39 ve 3.40 ifadelerinin hesaplanması ile

$$\mathbf{c}_1^s = \{-30. \ 0.\} \quad \mathbf{c}_1^m = \{30. \ 0. \ 0. \ 0.\} \quad (3.125)$$

$$\mathbf{c}_2^s = \{-60 \ 0\} \quad \mathbf{c}_2^m = \{30. \ 0. \ 30. \ 0.\} \quad (3.126)$$

$$\mathbf{c}_3^s = \{-30. \ 0.\} \quad \mathbf{c}_3^m = \{0. \ 0. \ 30. \ 0.\} \quad (3.127)$$

olarak elde edilir. Aktif elemanlar ile oluşan yeni denklem takımı

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^s & \emptyset & \mathbf{K}_c^s \\ \emptyset & \mathbf{K}^m & \mathbf{K}_c^m \\ \mathbf{K}_c^{sT} & \mathbf{K}_c^{mT} & \emptyset \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^s \\ \mathbf{u}^m \\ \boldsymbol{\lambda} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}^s \\ \mathbf{q}^m \\ \mathbf{g} \end{Bmatrix} \quad (3.128)$$

şekline bürünmektedir. 3.128 de

$$\mathbf{K}_c^s = \begin{bmatrix} 0. & 0. & 0. & 0. & -30. & 0. \\ 0. & 0. & -60. & 0. & 0. & 0. \\ -30. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \end{bmatrix} \quad (3.129)$$

$$\mathbf{K}_c^m = \begin{bmatrix} 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 30. & 0. \\ 0. & 0. & 30. & 0. & 30. & 0. & 0. & 0. \\ 30. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \end{bmatrix} \quad (3.130)$$

$$\mathbf{g}^T = -\{15. \ 30. \ 15.\} \quad (3.131)$$

$$\boldsymbol{\lambda} = \{\lambda_1 \ \lambda_2 \ \lambda_3\}^T \quad (3.132)$$

olarak tanımlanmaktadır. Temas elemanlarının dahil edildiği yeni denklem takımının çözümü ile bilinmeyenler

$$\mathbf{u}^s = [0.7809 \ 0.264 \ 0.6487 \ 0. \ 0.7809 \ -0.264] \quad (3.133)$$

$$\mathbf{u}^m = [0.2809 \ -0.0992 \ 0.1487 \ -0.0293 \ 0.1487 \ 0.0293 \ 0.2809 \ 0.0992] \quad (3.134)$$

$$\boldsymbol{\lambda} = [-401.376 \ -432.750 \ -401.376] \quad (3.135)$$

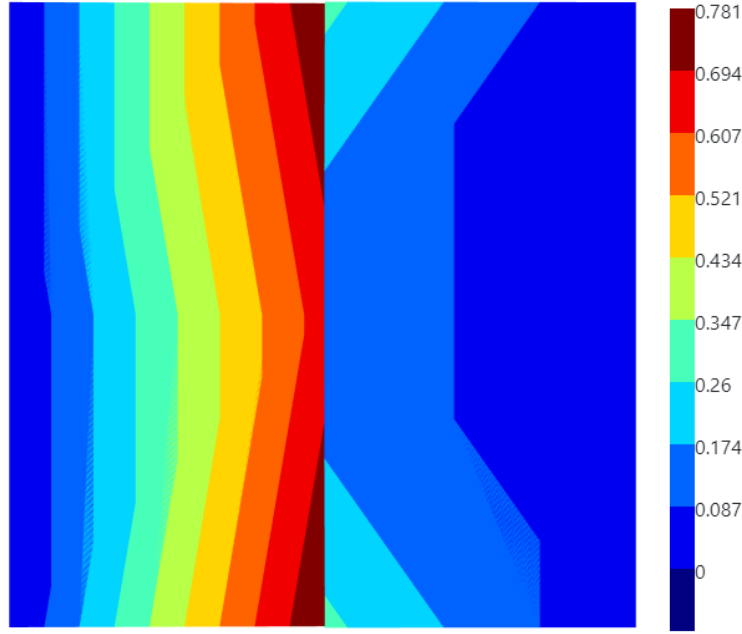
olarak bulunur. Elde edilen yeni çözüm ile elemanların açıklıkları 3.17 kullanılarak

$$g_1 = \left(\begin{Bmatrix} 0.7809 \\ -0.264 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0.2809 \\ 0.0992 \end{Bmatrix} \right) \{-1.0 \ 0.\} + 0.5 = 0 \quad (3.136)$$

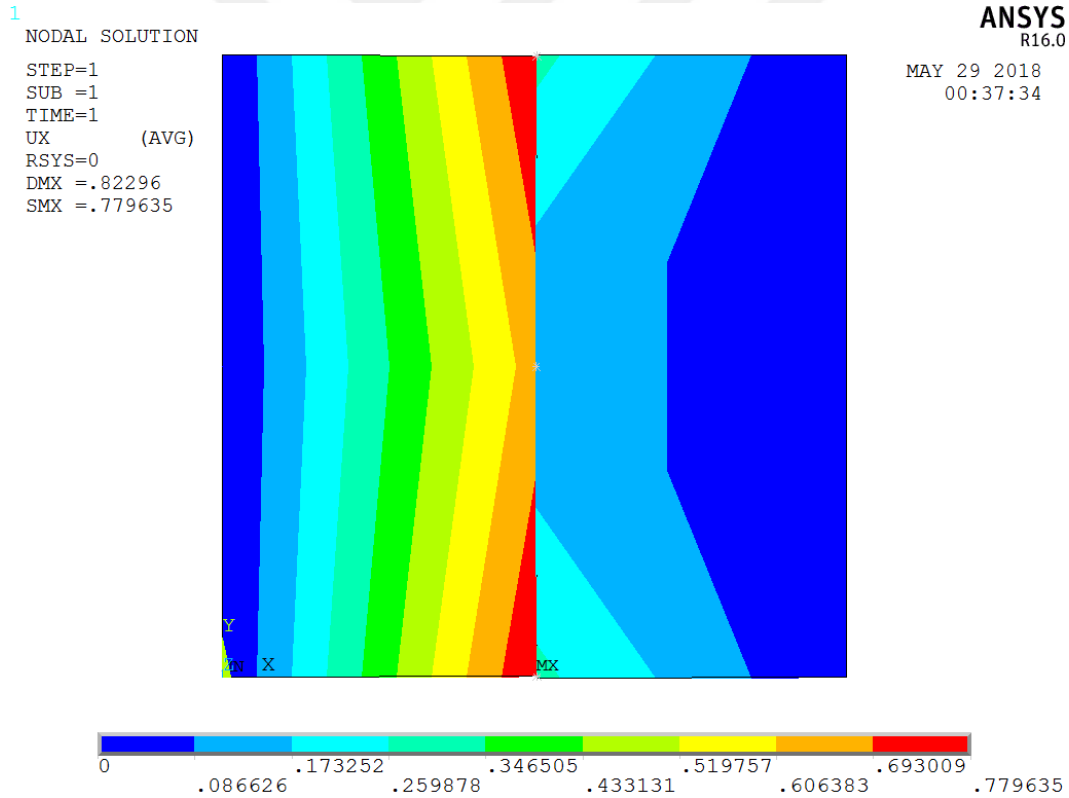
$$g_2 = \left(\begin{Bmatrix} 0.6487 \\ -0. \end{Bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} 0.1487 \\ 0.0293 \end{Bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} 0.1487 \\ -0.0293 \end{Bmatrix} \right) \{-1.0 \ 0.\} + 0.5 = 0 \quad (3.137)$$

$$g_3 = \left(\begin{Bmatrix} 0.7809 \\ 0.264 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0.2809 \\ -0.0992 \end{Bmatrix} \right) \{-1.0 \ 0.\} + 0.5 = 0 \quad (3.138)$$

olarak elde edilir. 3.136-3.138 de elde edilen bütün açıklık ifadelerinin sıfıra eşit olması ve 3.135 da elde edilen bütün Lagrange çarpanlarının negatif olması ile problem çözüme ulaşmıştır. x yönündeki deplasman değerleri Şekil 3.11 de görülmektedir. Aynı problemin x yönü yer değiştirmelerinin Ansys ile çözümü Şekil 3.12 de verilmiştir. İki sonuç arasında maksimum deplasman değerinde %0.2'lik bir fark gözlemlenmiştir.



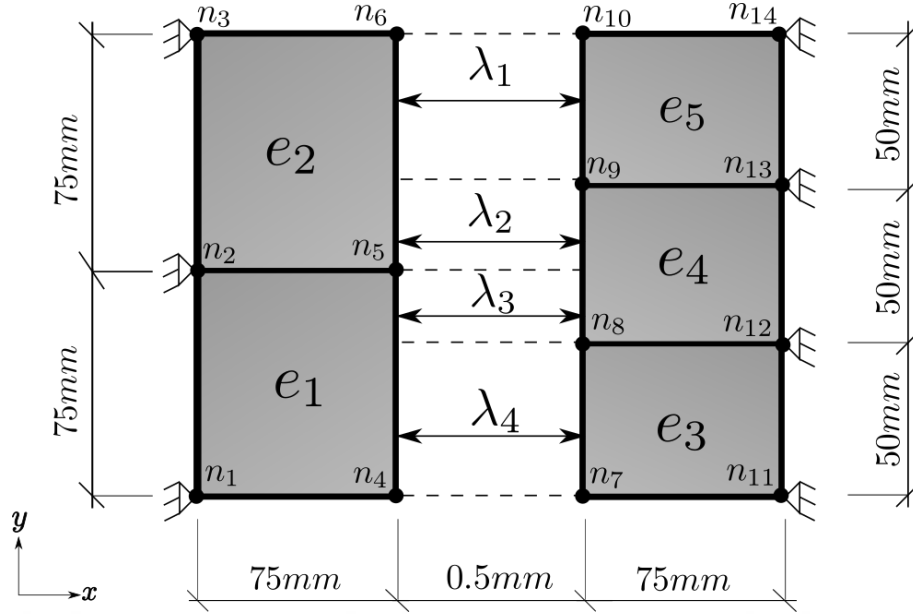
Şekil 3.11 : Örnek temas probleminin düğüm noktası-kenar temas elemanları kullanılan çözümün x yönü deplasmanları



Şekil 3.12 : Örnek temas probleminin Ansys ile düğüm noktası-kenar temas elemanları kullanılarak elde edilen çözümün x yönü deplasmanları

3.4.3 Kenar-Kenar Temas Elemanı ile Çözüm

Şekil 3.6 de verilen düzlem gerilme problemi Şekil 3.13 de verilen ağ yapısı ve dört adet kenar-kenar temas elemanı ile temsil edilecektir. Soldaki plakanın kenar düğüm noktaları temas, sağdaki plakanın kenar düğüm noktaları ise hedef düğüm noktaları



Şekil 3.13 : Örnek temas probleminin sonlu eleman ağ yapısı ve düğüm noktası-kenar temas elemanları

olarak seçilmiştir. İlk temas elemanı ile ilgili geometrik özellikler

$$L_1^m = \|X_9 - X_{10}\| = 50. \text{ mm} \quad (3.139)$$

$$L_1^s = \|X_6 - X_5\| = 75. \text{ mm} \quad (3.140)$$

$$\mathbf{t}_1^m = \frac{X_9 - X_{10}}{L_1^m} = \{0 \quad -1\} \quad (3.141)$$

$$\mathbf{t}_1^s = \frac{X_6 - X_5}{L_1^s} = \{0 \quad 1\} \quad (3.142)$$

$$\mathbf{n}_1^m = \mathbf{t}_1^m \times \mathbf{e}_3 = \{-1. \quad 0.\} \quad (3.143)$$

$$\mathbf{n}_1^s = \mathbf{t}_1^s \times \mathbf{e}_3 = \{1. \quad 0.\} \quad (3.144)$$

$$\bar{\xi}_{i_1} = \frac{1}{L_1^m} (\mathbf{X}_6 - \mathbf{X}_{10}) \cdot \mathbf{t}_1^m = 0. \quad (3.145)$$

$$\bar{\xi}_{j_1} = \frac{1}{L_1^s} (\mathbf{X}_9 - \mathbf{X}_5) \cdot \mathbf{t}_1^s = 0.333 \quad (3.146)$$

$$\bar{X}_{i_1} = (1 - \bar{\xi}_{i_1}) \mathbf{X}_i^m + \bar{\xi}_{j_1} \mathbf{X}_i^m = \{75.5 \quad 150.\}^T \quad (3.147)$$

$$\bar{X}_{j_1} = (1 - \bar{\xi}_{j_1}) \mathbf{X}_i^s + \bar{\xi}_{j_1} \mathbf{X}_i^s = \{75. \quad 100.\}^T \quad (3.148)$$

olarak elde edilir. Elemanın ilk açıklığı 3.30 kullanılarak

$$g_{0i_1} = \left(\begin{Bmatrix} 75. \\ 150. \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 75.5 \\ 150. \end{Bmatrix} \right) \cdot \begin{Bmatrix} -1. \\ 0. \end{Bmatrix} = 0.5 \quad (3.149)$$

$$g_{0j_1} = \left(\begin{Bmatrix} 75.5 \\ 100. \end{Bmatrix} - 0.333 \begin{Bmatrix} 75. \\ 75. \end{Bmatrix} - 0.667 \begin{Bmatrix} 75. \\ 150. \end{Bmatrix} \right) \cdot \begin{Bmatrix} 1. \\ 0. \end{Bmatrix} = 0.5 \quad (3.150)$$

şeklinde hesaplanır. Elemanın temas alanının hesaplanması için $\beta = 0.5$ seçilirse 3.53 ve 3.54 ifadeleri

$$\mathbf{Y}_{i1} = 0.5 \begin{Bmatrix} 75.0 \\ 150.0 \end{Bmatrix} + 0.5 \begin{Bmatrix} 75.5 \\ 150.0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 75.25 \\ 150.0 \end{Bmatrix} \quad (3.151)$$

$$\mathbf{Y}_{j1} = 0.5 \begin{Bmatrix} 75.0 \\ 100.0 \end{Bmatrix} + 0.5 \begin{Bmatrix} 75.5 \\ 100.0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 75.25 \\ 100.0 \end{Bmatrix} \quad (3.152)$$

olarak bulunur ve elemanın temas alanı 3.55 kullanılarak

$$A_1 = \|\mathbf{Y}_{j1} - \mathbf{Y}_{i1}\|t = 40mm^2 \quad (3.153)$$

şeklinde hesaplanır. Diğer elemanların geometrik özellikleri ve ilk açıklıkları benzer şekilde

$$\mathbf{n}_{i2} = \{1. \ 0.\} \quad \mathbf{n}_{j2} = \{-1. \ 0.\} \quad (3.154)$$

$$\mathbf{n}_{i3} = \{-1. \ 0.\} \quad \mathbf{n}_{j3} = \{1. \ 0.\} \quad (3.155)$$

$$\mathbf{n}_{i4} = \{1. \ 0.\} \quad \mathbf{n}_{j4} = \{-1. \ 0.\} \quad (3.156)$$

$$\bar{\xi}_{i2} = 0.333 \quad \bar{\xi}_{j2} = 0.5 \quad (3.157)$$

$$\bar{\xi}_{i3} = 0.5 \quad \bar{\xi}_{j3} = 0.667 \quad (3.158)$$

$$\bar{\xi}_{i4} = 0.667 \quad \bar{\xi}_{j4} = 1. \quad (3.159)$$

$$g_{0i2} = g_{0j2} = 0.5 \quad (3.160)$$

$$g_{0i3} = g_{0j3} = 0.5 \quad (3.161)$$

$$g_{0i4} = g_{0j4} = 0.5 \quad (3.162)$$

$$A_2 = A_3 = 20mm^2 \quad A_4 = 40mm^2 \quad (3.163)$$

olarak elde edilmektedir.

Geometrik özellikler elde edildikten sonra çözümün ilk adımı olarak bütün temas elemanları devre dışı bırakılarak sonlu eleman çözümü yapılacaktır. Bölüm 3.3.2 de verilen sonlu eleman ağı çözümü ile aynı olduğu için sonuçlar direkt 3.120 ve 3.121 da verildiği gibidir.

3.120 ve 3.121 de elde edilen deplasman değerleri ile 3.32 kullanılarak elemanlar için yeni açıklık ifadeleri

$$g_{i1} = \begin{Bmatrix} 0.9744 \\ -0.3288 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} -1.0 \\ 0. \end{Bmatrix}^T + 0.5 = -0.4744 \quad (3.164)$$

$$g_{j1} = -0.333 \begin{Bmatrix} 0.9744 \\ -0.3288 \end{Bmatrix} - 0.667 \begin{Bmatrix} 0.8305 \\ -0. \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1.0 \\ 0. \end{Bmatrix}^T + 0.5 = -0.378 \quad (3.165)$$

$$g_{i2} = g_{j1} = -0.378 \quad (3.166)$$

$$g_{j2} = \begin{Bmatrix} 0.8305 \\ 0. \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -1.0 \\ 0. \end{Bmatrix}^T + 0.5 = -0.3305 \quad (3.167)$$

$$g_{i3} = g_{j2} = -0.3305 \quad (3.168)$$

$$g_{j3} = -0.667 \begin{Bmatrix} 0.8305 \\ 0. \end{Bmatrix} - 0.333 \begin{Bmatrix} 0.9744 \\ 0.3288 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1.0 \\ 0. \end{Bmatrix}^T + 0.5 = -0.378 \quad (3.169)$$

$$g_{i4} = g_{j3} = -0.378 \quad (3.170)$$

$$g_{i4} = \begin{Bmatrix} 0.9744 \\ 0.3288 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} -1.0 \\ 0. \end{Bmatrix}^T + 0.5 = -0.4744 \quad (3.171)$$

olarak elde edilir. 3.164 - 3.171 de hesaplanan açıklık ifadelerinin hepsinin negatif çıkması ile, bir sonraki iterasyon adımında bütün temas elemanlarının sisteme dahil edilmesi gerekliliğini göstermektedir. Bütün elemanlarda 3.62 ve 3.63 ifadelerinin hesaplanması ile

$$\mathbf{c}_1^s = \{20. \ 0. \ 20. \ 0.\} \quad \mathbf{c}_1^m = \{-13.3333 \ 0. \ -26.6667 \ 0.\} \quad (3.172)$$

$$\mathbf{c}_2^s = \{-16.6667 \ 0. \ -3.3333 \ 0.\} \quad \mathbf{c}_2^m = \{5. \ 0. \ 15. \ 0.\} \quad (3.173)$$

$$\mathbf{c}_3^s = \{-16.6667 \ 0. \ -3.3333 \ 0.\} \quad \mathbf{c}_3^m = \{15. \ 0. \ 5. \ 0.\} \quad (3.174)$$

$$\mathbf{c}_4^s = \{-13.3333 \ 0. \ -26.6667 \ 0.\} \quad \mathbf{c}_4^m = \{20. \ 0. \ 20. \ 0.\} \quad (3.175)$$

olarak elde edilir. Aktif elemanlar ile oluşan yeni denklem takımı

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^s & \emptyset & \mathbf{K}_c^s \\ \emptyset & \mathbf{K}^m & \mathbf{K}_c^m \\ \mathbf{K}_c^{sT} & \mathbf{K}_c^{mT} & \emptyset \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^s \\ \mathbf{u}^m \\ \boldsymbol{\lambda} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}^s \\ \mathbf{q}^m \\ \mathbf{g} \end{Bmatrix} \quad (3.176)$$

şekline bürünmektedir. 3.176 de

$$\mathbf{K}_c^s = \begin{bmatrix} 0. & 0. & -13.3333 & 0. & -26.6667 & 0. \\ 0. & 0. & -16.6667 & 0. & -3.3333 & 0. \\ -3.3333 & 0. & -16.6667 & 0. & 0. & 0. \\ -26.6667 & 0. & -13.3333 & 0. & 0. & 0. \end{bmatrix} \quad (3.177)$$

$$\mathbf{K}_c^m = \begin{bmatrix} 0. & 0. & 0. & 0. & 20. & 0. & 20. & 0. \\ 0. & 0. & 5. & 0. & 15. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 15. & 0. & 5. & 0. & 0. & 0. \\ 20. & 0. & 20. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \end{bmatrix} \quad (3.178)$$

$$\mathbf{g}^T = -\{15. \ 30. \ 15.\} \quad (3.179)$$

$$\mathbf{u}^s = \{u_4 \ v_4 \ u_5 \ v_5 \ u_6 \ v_6\}^T \quad (3.180)$$

$$\mathbf{u}^m = \{u_7 \ v_7 \ u_8 \ v_8 \ u_9 \ v_9 \ u_{10} \ v_{10}\}^T \quad (3.181)$$

$$\boldsymbol{\lambda} = \{\lambda_1 \ \lambda_2 \ \lambda_3 \ \lambda_4\}^T \quad (3.182)$$

olarak tanımlanmaktadır. Temas elemanlarının dahil edildiği yeni denklem takımının çözümü ile bilinmeyenler

$$\mathbf{u}^s = [0.7336 \ 0.2463 \ 0.6691 \ 0. \ 0.7336 \ -0.2463] \quad (3.183)$$

$$\mathbf{u}^m = [0.2444 \ -0.0845 \ 0.1799 \ -0.0246 \ 0.1799 \ 0.0246 \ 0.2444 \ 0.0845] \quad (3.184)$$

$$\boldsymbol{\lambda} = [-503.2164 \ -320.7066 \ -320.7066 \ -503.2164] \quad (3.185)$$

olarak bulunur. Elde edilen yeni çözüm ile elemanların açıklıkları 3.49, 3.50 ve 3.56 kullanılarak

$$g_{i1} = \left(\begin{Bmatrix} 0.7336 \\ -0.2463 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0.2444 \\ 0.0845 \end{Bmatrix} \right) \cdot \begin{Bmatrix} -1.0 \\ 0. \end{Bmatrix}^T + 0.5 = 0.011 \quad (3.186)$$

$$g_{j1} = \left(\begin{Bmatrix} 0.1799 \\ 0.0246 \end{Bmatrix} - \frac{1}{3} \begin{Bmatrix} 0.7336 \\ -0.2463 \end{Bmatrix} - \frac{2}{3} \begin{Bmatrix} 0.6691 \\ 0. \end{Bmatrix} \right) \cdot \begin{Bmatrix} 1.0 \\ 0. \end{Bmatrix}^T + 0.5 = -0.011 \quad (3.187)$$

$$g_1 = g_{i1} + g_{j1} = 0. \quad (3.188)$$

$$g_{i2} = g_{j1} = -0.011 \quad (3.189)$$

$$g_{j2} = \left(\begin{Bmatrix} 0.6691 \\ 0. \end{Bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} 0.1799 \\ 0.0246 \end{Bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} 0.1799 \\ -0.0246 \end{Bmatrix} \right) \cdot \begin{Bmatrix} -1.0 \\ 0. \end{Bmatrix}^T + 0.5 = 0.011 \quad (3.190)$$

$$g_2 = g_{i2} + g_{j2} = 0. \quad (3.191)$$

$$g_{i3} = g_{j2} = 0.011 \quad (3.192)$$

$$g_{j3} = \left(\begin{Bmatrix} 0.1799 \\ -0.0246 \end{Bmatrix} - \frac{2}{3} \begin{Bmatrix} 0.6691 \\ 0. \end{Bmatrix} - \frac{1}{3} \begin{Bmatrix} 0.7336 \\ 0.2463 \end{Bmatrix} \right) \cdot \begin{Bmatrix} 1.0 \\ 0. \end{Bmatrix}^T + 0.5 = -0.011 \quad (3.193)$$

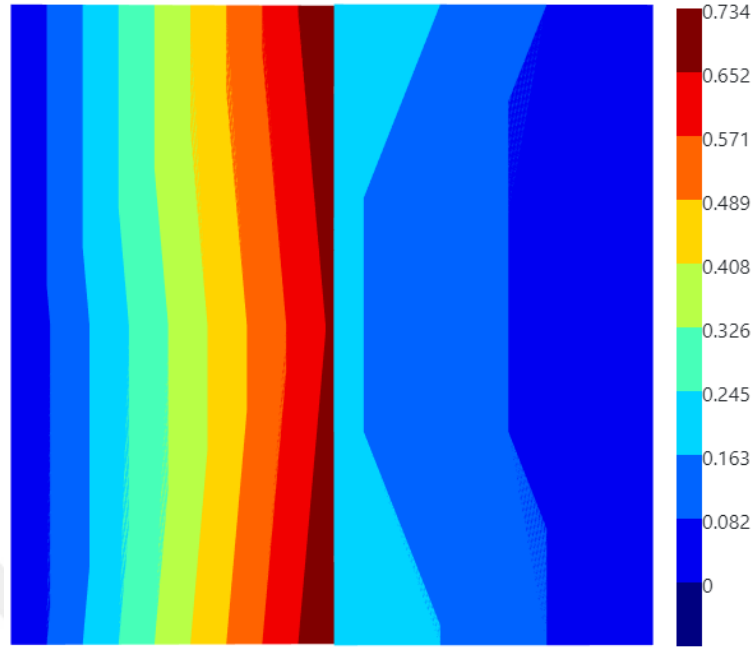
$$g_3 = g_{i3} + g_{j3} = 0. \quad (3.194)$$

$$g_{i4} = g_{j3} = -0.011 \quad (3.195)$$

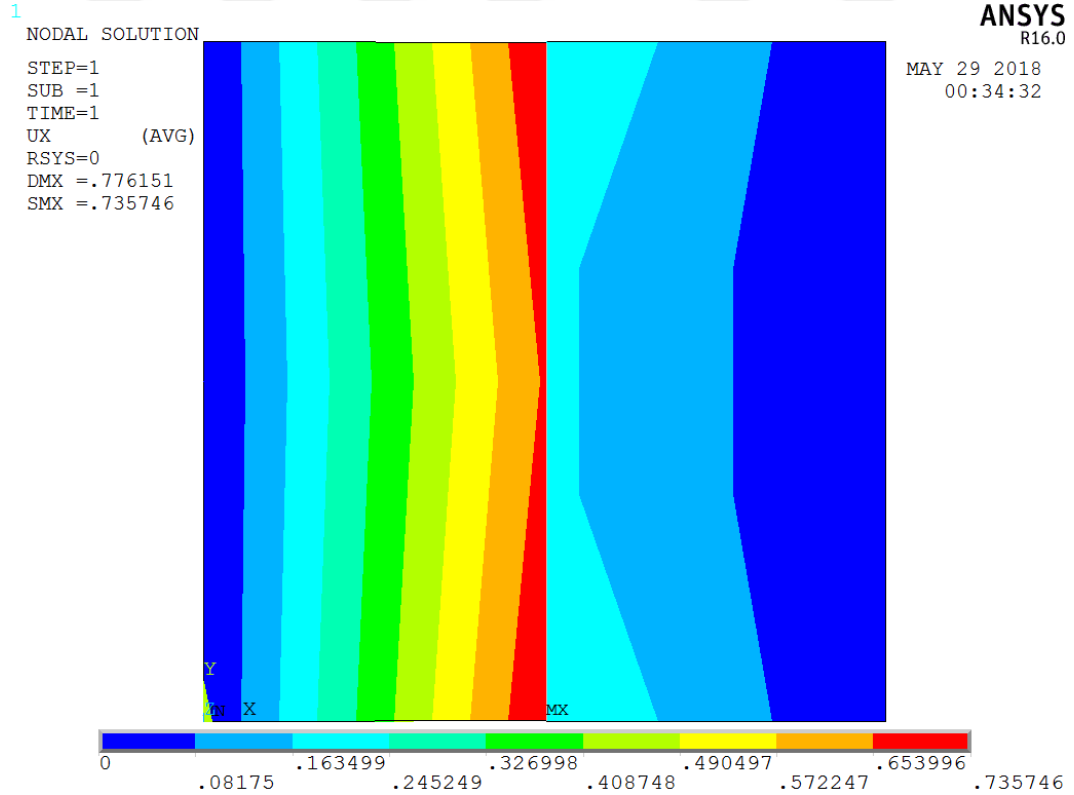
$$g_{i4} = \left(\begin{Bmatrix} 0.7336 \\ 0.2463 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0.2444 \\ 0.0845 \end{Bmatrix} \right) \cdot \begin{Bmatrix} -1.0 \\ 0. \end{Bmatrix}^T + 0.5 = 0.011 \quad (3.196)$$

$$g_4 = g_{i4} + g_{j4} = 0. \quad (3.197)$$

olarak elde edilir. 3.188,3.191, 3.194 ve3.197 de elde edilen bütün açıklık ifadelerinin sıfıra eşit olması ve 3.185 da elde edilen bütün Lagrange çarpanlarının negatif olması ile problem çözüme ulaşmıştır. x yönündeki deplasman değerleri Şekil 3.11 de görülmektedir. Aynı problemin x yönü yer değiştirmelerinin Ansys ile çözümü Şekil 3.15 de verilmiştir. İki sonuç arasında maksimum deplasman değerinde %0.2'lik bir fark gözlemlenmiştir.



Şekil 3.14 : Örnek temas probleminin kenar-kenar temas elemanları kullanılarak elde edilen çözümün x yönü deplasmanları



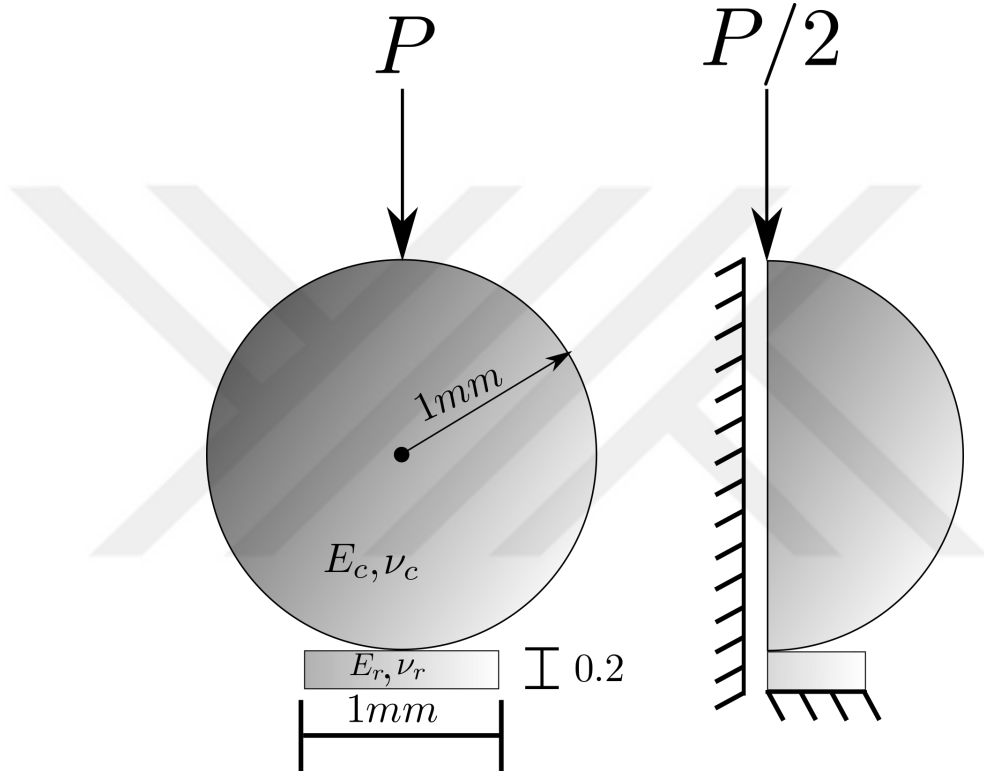
Şekil 3.15 : Örnek temas probleminin Ansys ile kenar-kenar temas elemanları kullanılarak elde edilen çözümün x yönü deplasmanları



4. SAYISAL UYGULAMALAR

4.1 Silindirik Hertz Temas Problemi

Literatürde analitik çözümü bulunan temas problemlerinden biri olan, üzerine $P = 100N$ noktasal kuvvet uygulanan elastik silindirik bir cismin rijit düz bir cisme noktasal teması incelenecektir. Şekil 4.1 de gözüktüğü üzere problemin simetri özelliğinden



Şekil 4.1 : Hertz silindir-rijit cisim temas problemi geometrisi

faydalanılarak, matematik model simetri ekseninin yarısı ile sınırlandırılan bir alan için kurulmuştur. Elastik cismin malzeme ve geometrik özellikleri

$$E_e = 7000MPa \quad \nu_e = 0.3 \quad r = 1mm \quad t = 1mm \quad (4.1)$$

ve rijit cismin malzeme özellikleri

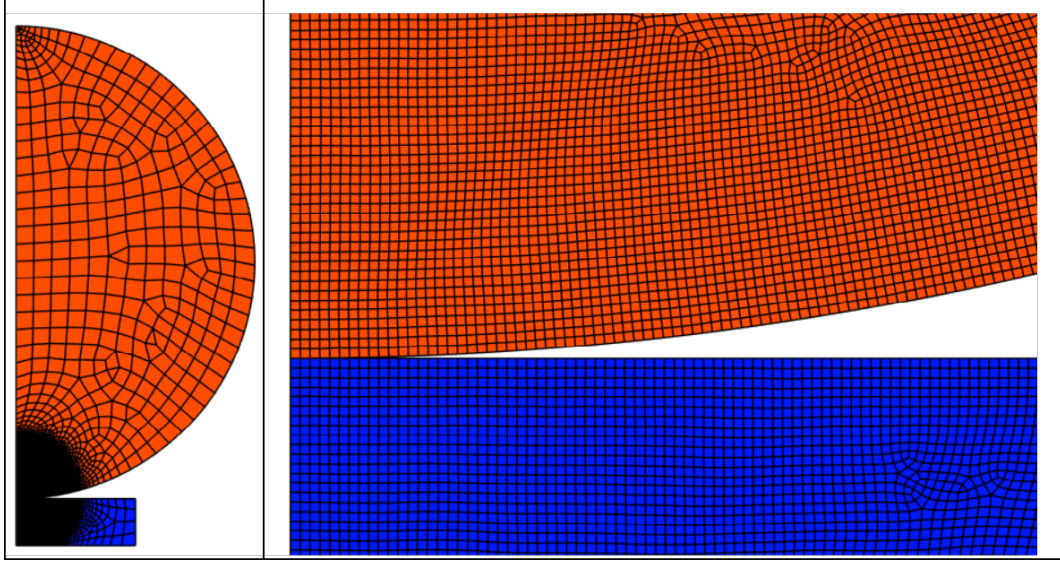
$$E_r = 100000MPa \quad \nu_r = 0.45 \quad t = 1000mm \quad (4.2)$$

olarak seçilmiştir. Problemin temas noktasında oluşan maksimum gerilme analitik çözümden

$$p_0 = \sqrt{\frac{P}{\pi r t} \frac{E}{1 - \nu_e^2}} = 494.8MPa \quad (4.3)$$

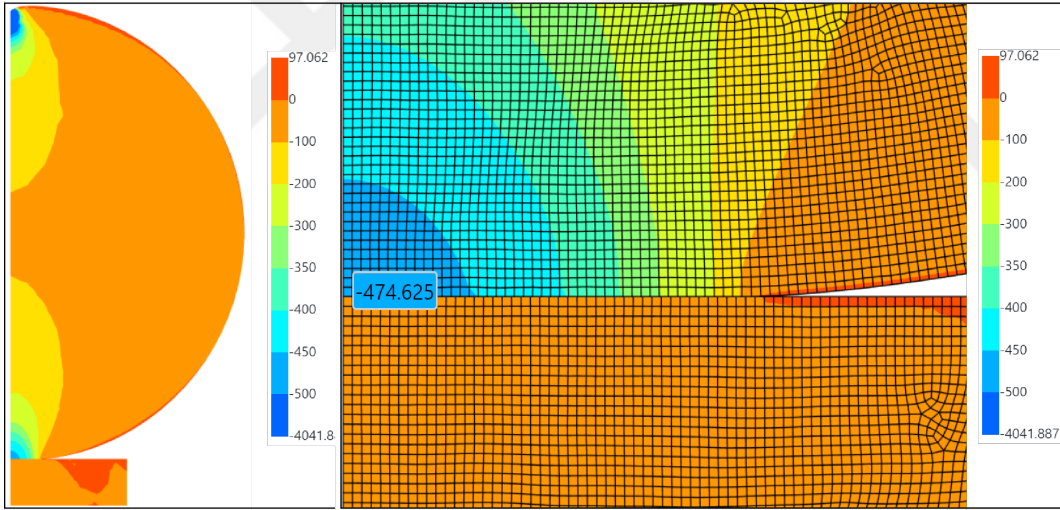
olarak elde edilmiştir [29].

Problemi temsil eden sonlu eleman ağı Şekil 4.2 de görülmektedir. Silindirik cisim 6467 adet düğüm noktası ve 16'sı üçgen 6325'si dörtgen olmak üzere toplam 6341 adet



Şekil 4.2 : Hertz silindir-rijit cisim temas problemi sonlu eleman ağı

eleman ile, rijit cisim ise 5410 adet düğüm noktası ve 10'u üçgen 5284'ü dörtgen olan toplam 5294 adet eleman ile temsil edilmektedir. Temas bölgesinde ise 54 adet düğüm noktası-düğüm noktası temas elemanı bulunmaktadır.



Şekil 4.3 : Hertz silindir-rijit cisim temas problemi σ_y dağılımı

Şekil 4.3 de y yönündeki normal gerilme dağılımı verilmiştir. Y yönünde bulunan maksimum gerilme 474.6 MPa gözlemlenmiştir ve analitik çözüme göre bağlı olarak

$$e = \frac{|494.8 - 474.6|}{494.8} 100 = \%4.1 \quad (4.4)$$

olarak hesaplanmıştır.

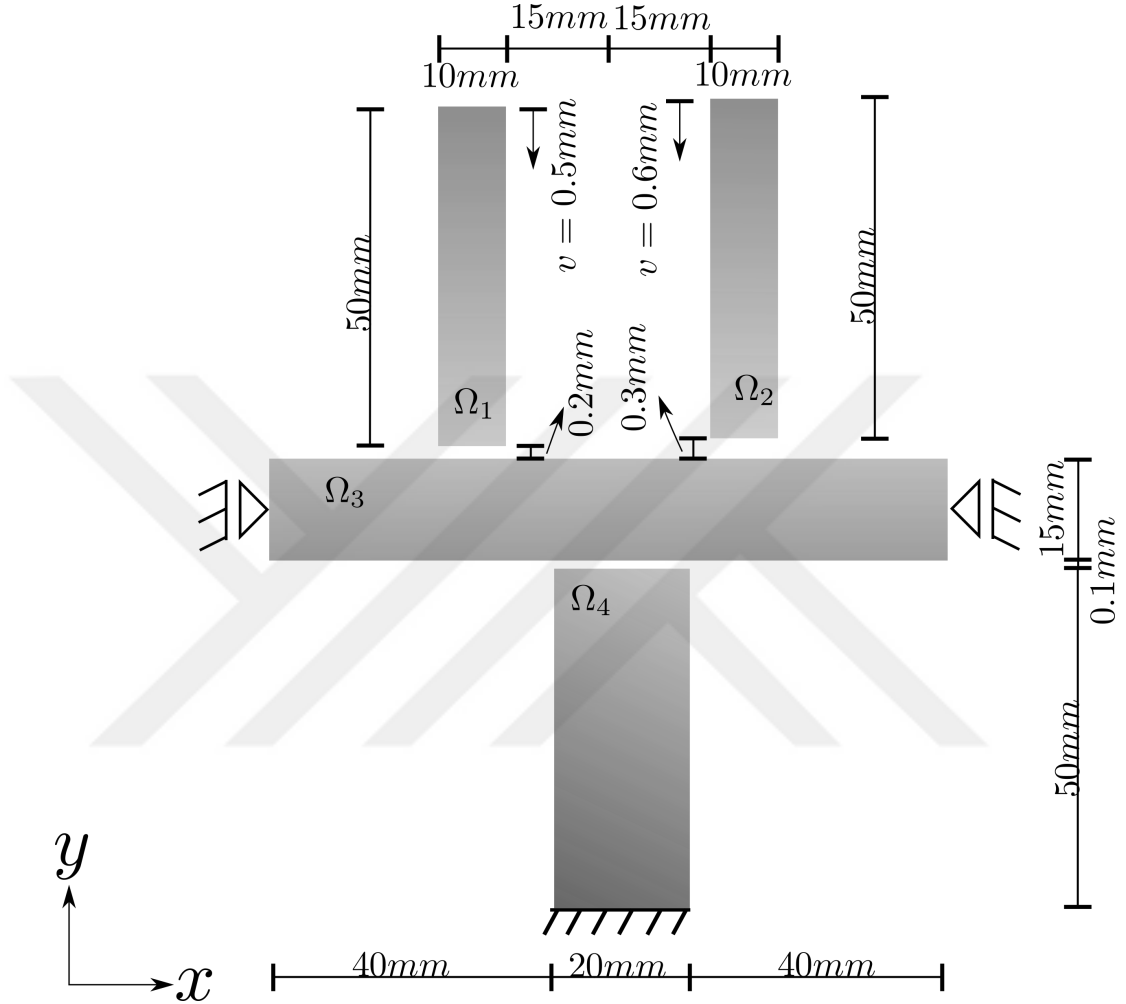
4.2 Pim Detayı

Şekil 4.4 de gözüken 4 cismin birbirine temas ile yük aktaracağı pim problemi incelenecektir. Sistemin yük aktarma sistematığı çelik bağlantılarında sıkça kullanılan pimli detaylara benzediği için problem bu şekilde isimlendirilmiştir. Problemdeki

bütün plakalar için malzeme sabitleri ve plaka kalınlıkları

$$E = 200000GPa \quad \nu = 0.3 \quad t = 5mm \quad (4.5)$$

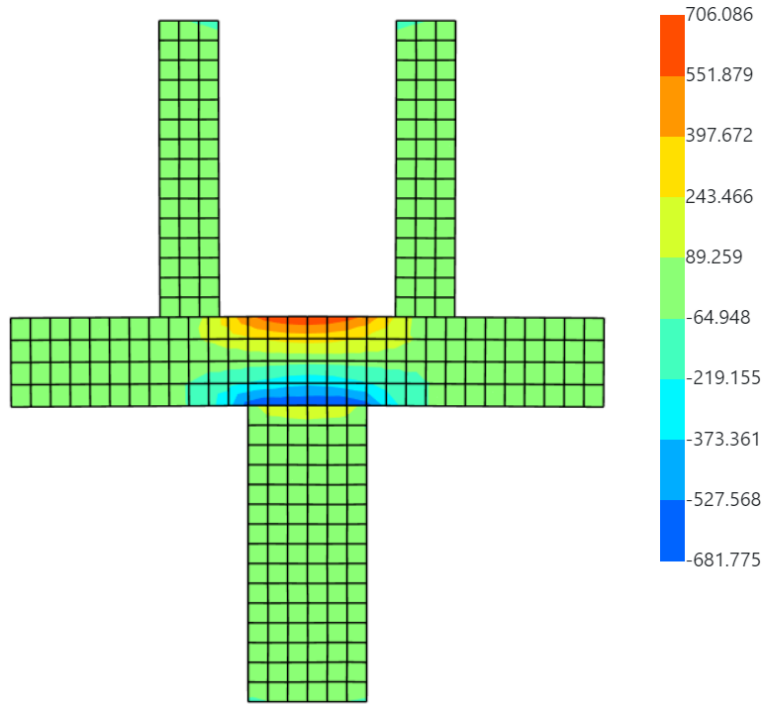
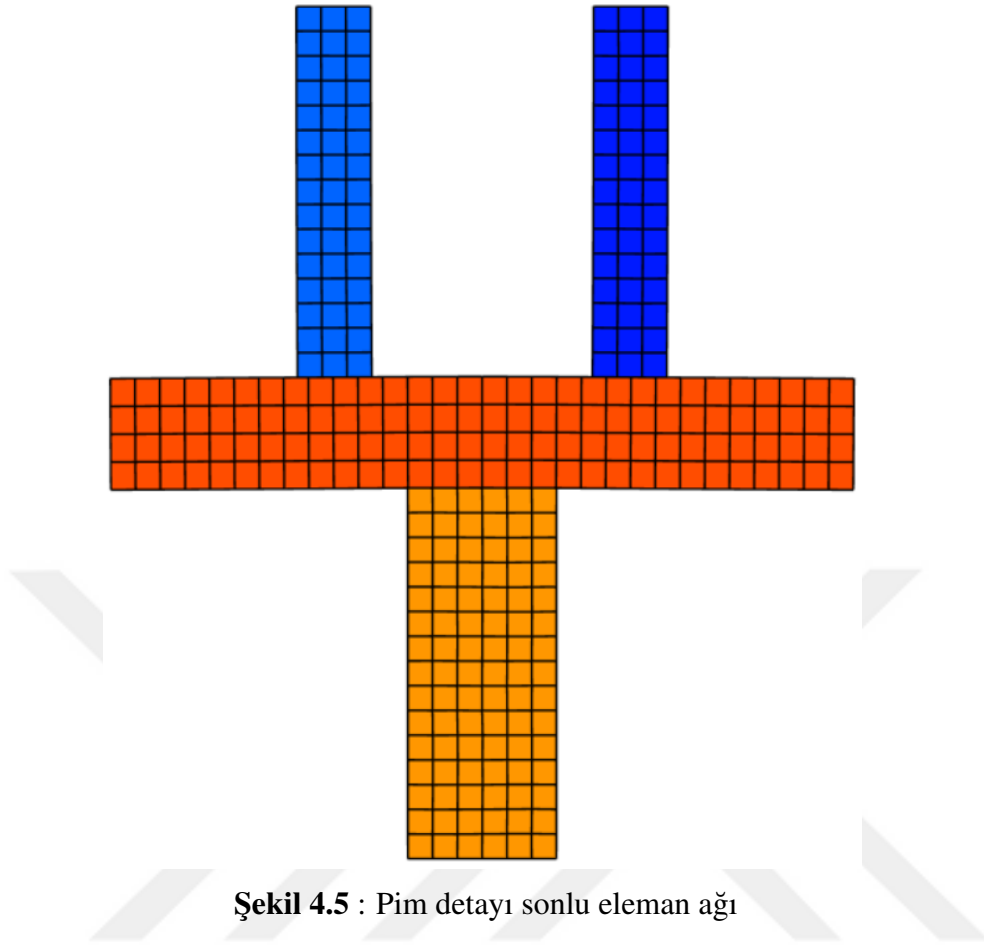
Üstteki iki plakaya sırasıyla $0.5mm$ ve $0.6mm$ deplasman yükü verilmiştir. Altta ki plaka ise alt tarafından mesnetlidir.

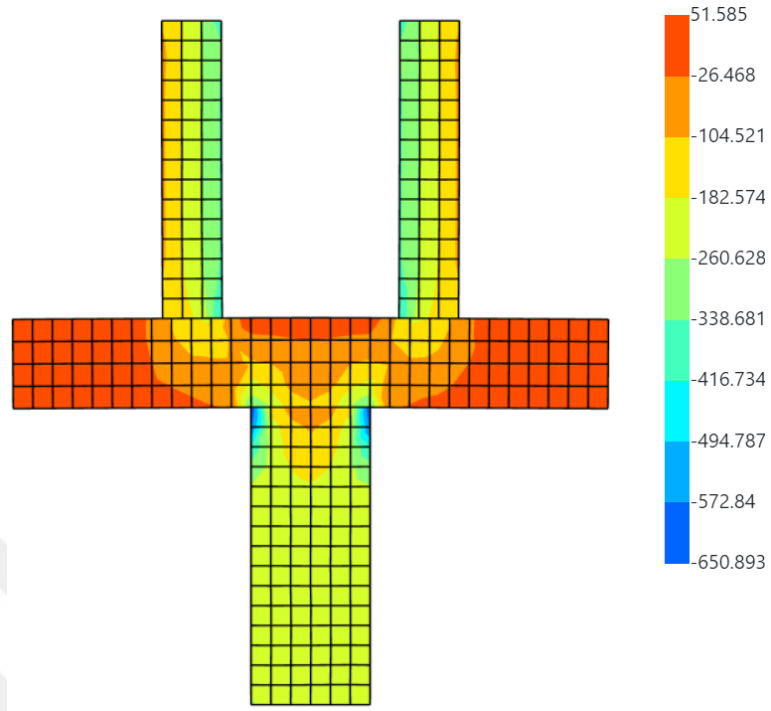


Şekil 4.4 : Pim detayı geometrisi

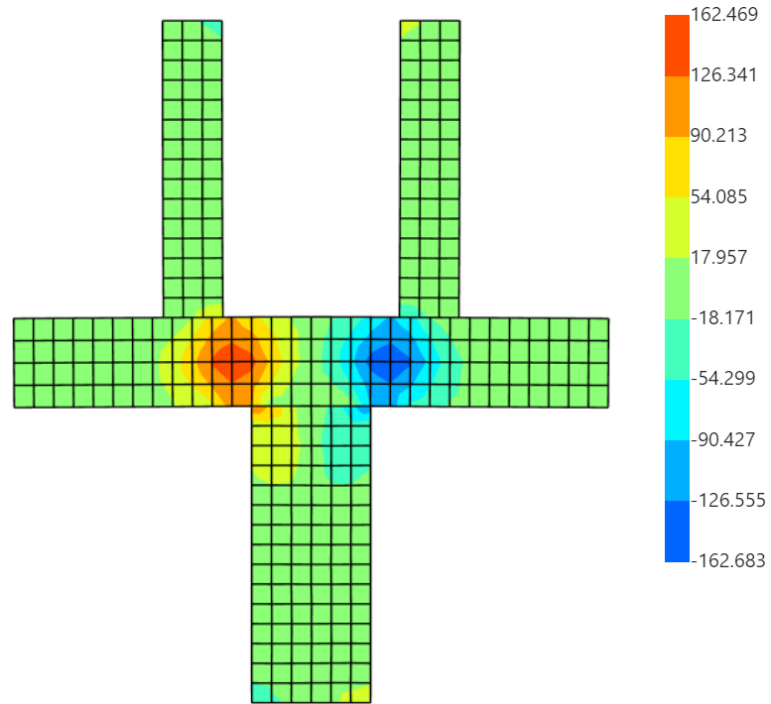
Probleme ait sonlu eleman ağı Şekil 4.5 de verilmiştir. Pimin üst temas bölgesinde sonlu elemanlar ağının birbirini tutmamasından dolayı düğüm noktası-kenar temas elemanları alt tarafta ise düğüm noktası-düğüm noktası temas elemanları kullanılmıştır.

Sistem üzerinde oluşan gerilme dağılımları Şekil 4.6-Şekil 4.8 de gösterilmiştir. Pim tipi bağlantıların genellikle sadece basit kesme ve ezilme etkilerine maruz kaldığı düşünülmektedir. Fakat Şekil 4.6 de görüldüğü üzere plakaların yerleşiminden dolayı pimde eğilme etkileri de ortaya çıkmaktadır. Bu durum 2016 yılında yürürlüğe giren Çelik Yapıların Tasarım, Hesap ve Yapım Esaslarına Dair Yönetmelik'te bahsedilmektedir [30].





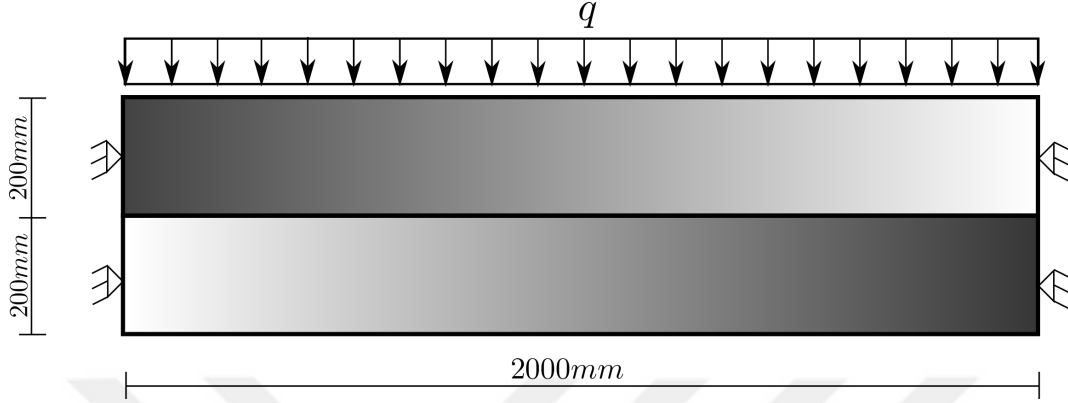
Şekil 4.7 : Pim detayı σ_y dağılımı



Şekil 4.8 : Pim detayı τ_{xy} dağılımı

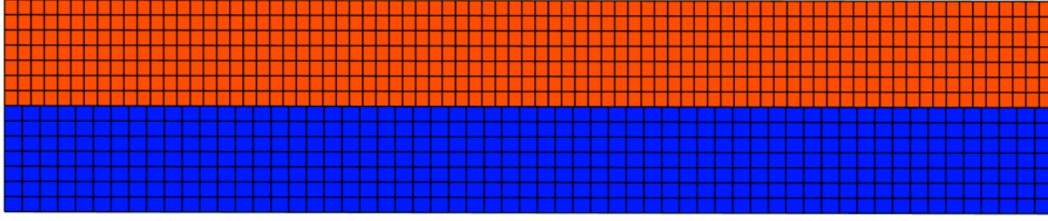
4.3 Temas Halindeki Düzlem Kirişler

Birbiri üzerine konulmuş, kalınlıkları $t = 5mm$ olan ve iki ucundan basit mesnetlenmiş kirişler Şekil 4.9’de görülmektedir. Üstteki kiriş $q = 40N/mm$ düşey yayılı yük ile



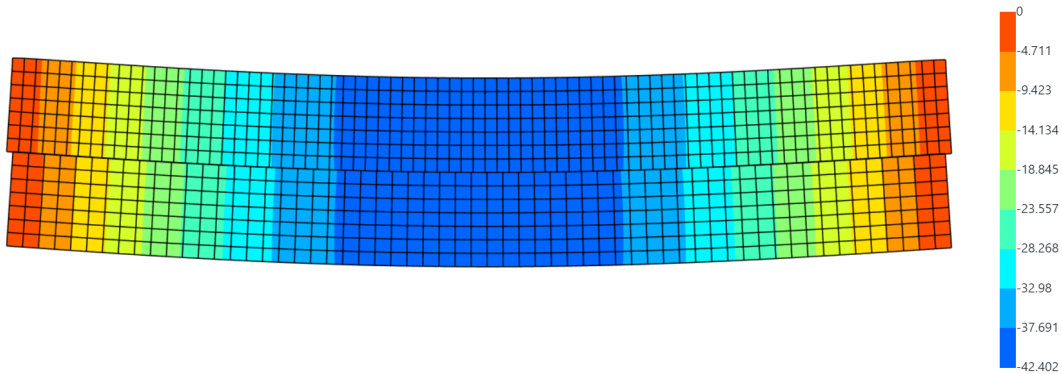
Şekil 4.9 : Üst üste konulan kirişlerin geometrileri

yüklenmiştir. Kirişlerin ikisinin de malzeme özellikleri aynı olup $E = 30000MPa$ ve $\nu = 0.2$ dir.

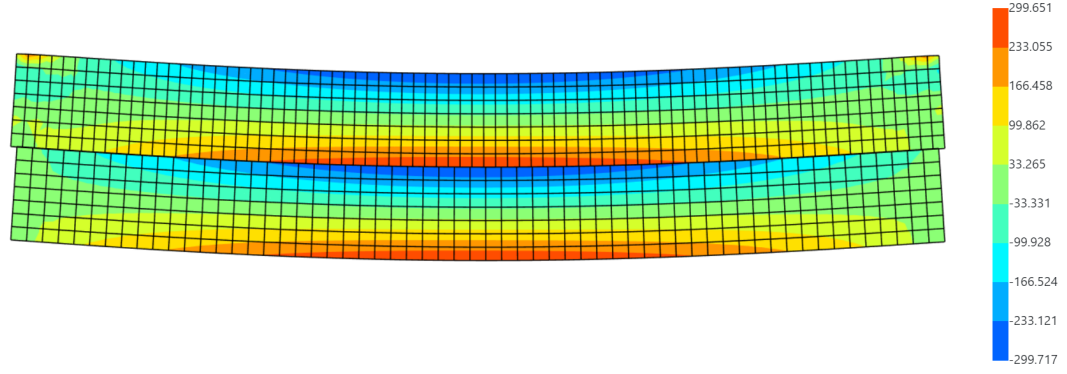


Şekil 4.10 : Kirişlere ait sonlu eleman ağı

Problemi temsil eden sonlu elemanlar ağı Şekil 4.10 de verilmiştir. Üstteki kiriş x doğrultusunda 80 parçaya alttaki kiriş ise 60 parçaya bölünmüştür. Her iki kiriş y yönünde 8 parçaya bölünmüştür ve kirişleri oluşturan bütün elemanlar dörtgendir. İki kiriş birbirine temas eden kenarında toplam 137adet kenar-kenar temas elemanı kullanılmıştır.



Şekil 4.11 : Kirişlerin y yönü deplasmanı



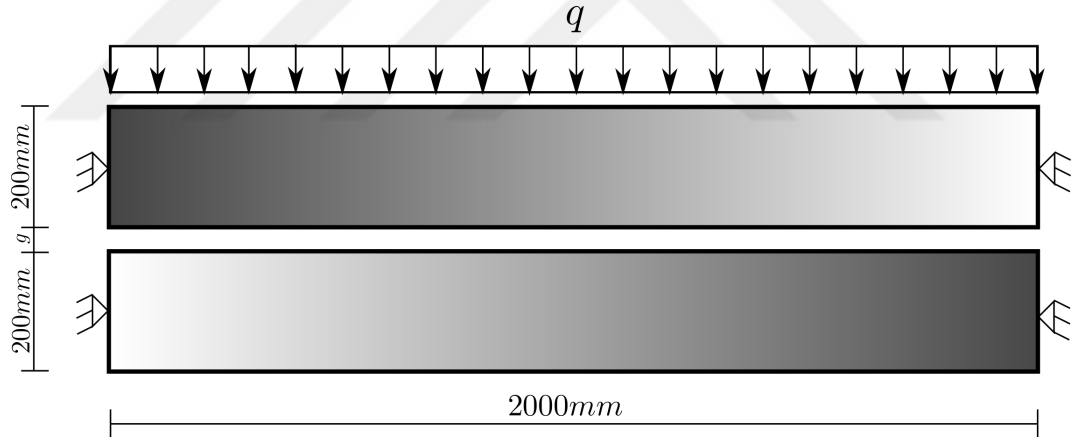
Şekil 4.12 : Kirişlerde oluşan σ_x dağılımı

Sonlu eleman analizine ait y yönü düşey deplasman ve x yönü gerilme dağılımı Şekil 4.11 ve Şekil 4.12 de verilmiştir. Altta ki kiriş olmadan sadece üst kirişe ait deplasman

$$\delta = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI} = 83.33mm \quad (4.6)$$

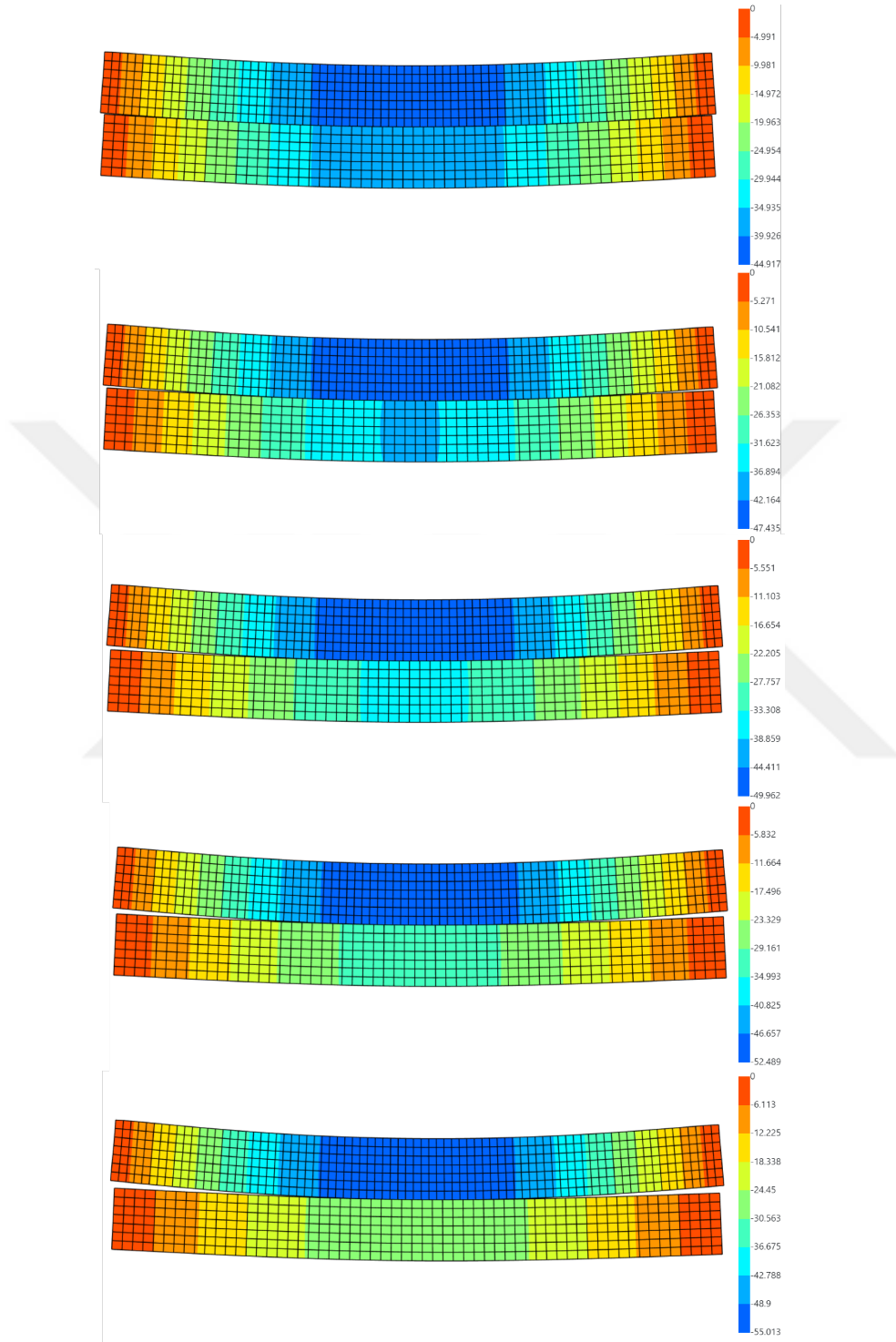
olarak hesaplanmaktadır. Beklendiği gibi üst kirişin deplasmanı yarı yarıya azalmaktadır.

Kirişlerin arasındaki açıklık sırasıyla $5mm$, $10mm$, $15mm$, $20mm$ ve $25mm$ olacak şekilde sistemin analizi yapılmıştır (bkz. Şekil 4.13).

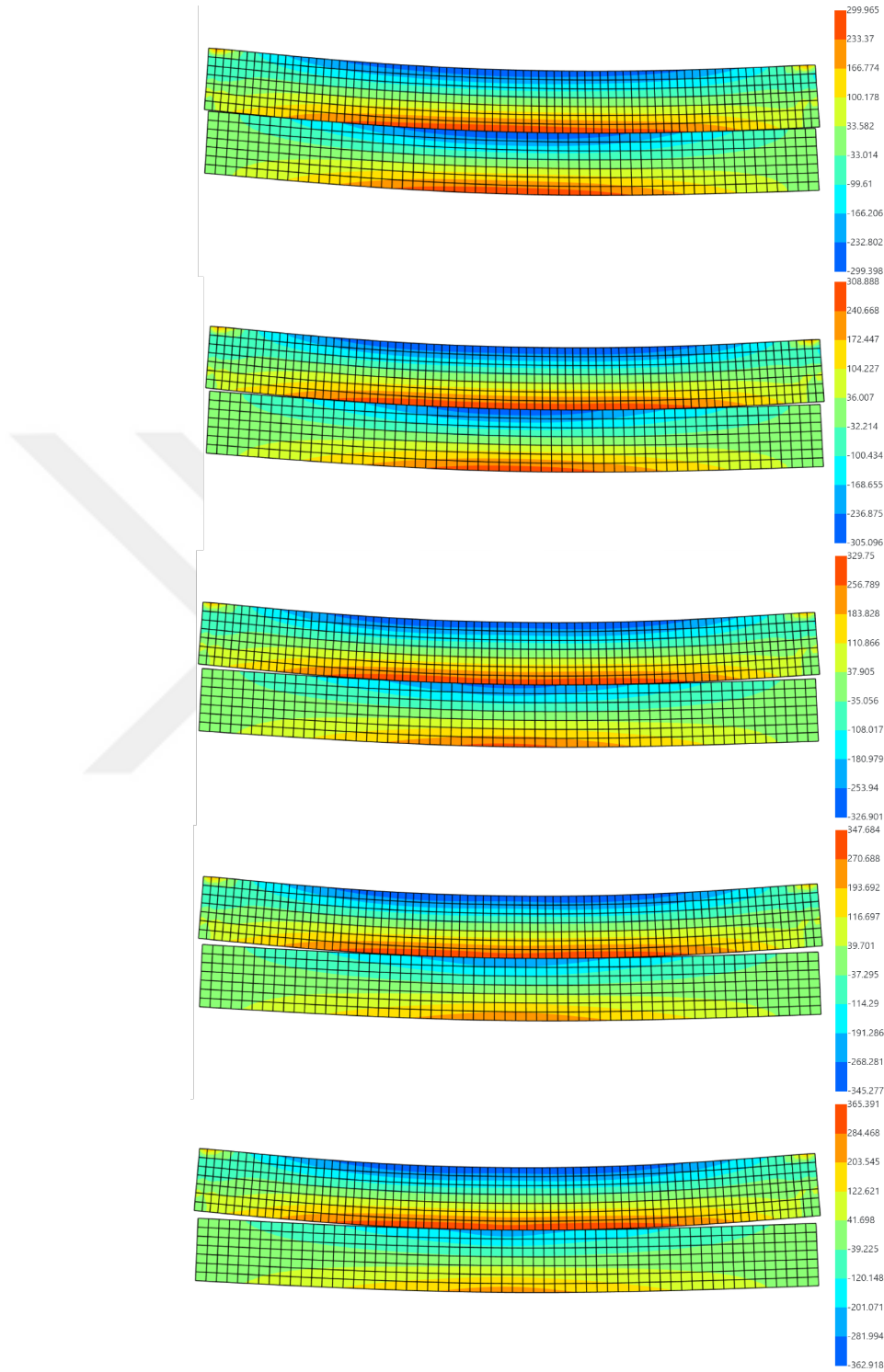


Şekil 4.13 : Arasında açıklık bulunan kirişlerin geometrileri

Elde edilen analiz sonuçları Şekil 4.14 ve Şekil 4.15 de gösterilmiştir.



Şekil 4.14 : Aralarında sırasıyla 5mm, 10mm, 15mm, 20mm ve 25mm açıklık bulunan kirişler için düşey deplasman dağılımları



Şekil 4.15 : Aralarında sırasıyla 5mm, 10mm, 15mm, 20mm ve 25mm açıklık bulunan kirişler için σ_x dağılımları



5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Hazırlanan bu çalışma kapsamında sürtünmesiz temas analizinde Lagrange çarpanları yönteminin kullanımı açıklanmış ve çeşitli elemanların formülasyonu verilmiştir. Bahsi geçen elemanlar ile örnek bir temas problemi çözülmüş ve sonuçları Ansys ile karşılaştırılmıştır. Bu karşılaştırmalar doğrultusunda maksimum deplasman değerlerinde

- düğüm noktası - düğüm noktası elemanında Ansys ile aynı
- düğüm noktası - kenar elemanında Ansys ile %0.2 farklı
- kenar - kenar elemanında Ansys ile %0.2 farklı

sonuç elde edilmiştir. Yapılan karşılaştırmalarda tez kapsamında formülasyonu verilen elemanların, genel olarak doğruluğu kabul edilmiş Ansys ile örtüştüğü gözükmemektedir. Ayrıca çözümü analitik olarak bilinen elastik bir silindirik cismin rijit düz bir cisme temas problemi oldukça fazla eleman temas elemanı içeren sonlu eleman ağı ile çözülmüştür. Çözümün sonucunda analitik çözüme % 4 mertebesinde yaklaşmıştır.

Çalışma kapsamında formülasyonu verilen düğüm noktası-düğüm noktası, düğüm noktası-kenar ve kenar-kenar temas elemanları geometrik ilişkilerin karmaşıklığına göre sırayla açıklanmıştır. Düğüm noktası-düğüm noktası temas elemanı formülasyonu kolay ve işlem yoğunluğu az olması ile beraber birbirini tamamen karşılayan sonlu eleman ağları ile kullanılabilir. Temas analizleri birden fazla cisim içerdiği için bu temas elemanın kullanılacağı problemlerde sonlu eleman ağı özel algoritmalar gerektirmektedir. Düğüm noktası-kenar ve kenar-kenar temas elemanlarında ise böyle bir zorunluluk yoktur.

Temas analizlerinde cisimlerin birbirine aktardıkları gerilmeler cisimlerin temas bölgesinde gerilme yığılmaları yaratabilmektedir. Cisim içinde oluşan gerilme dağılımının daha sağlıklı elde edilmesi için olası temas bölgelerindeki sonlu eleman ağında sıklaştırmaya gidilmelidir. Eleman üzerinde tarif edilen gerilmenin ortalama olmasından dolayı kenar-kenar temas elemanında bir miktar iç içe girme durumu oluşmaktadır. Bu durum temas bölgesinde sonlu eleman ağını yoğun tutmak ile sınırlandırılabilmesi için bu elemanın kullanılacağı sonlu eleman analizlerinde temas bölgesi sonlu eleman ağı titizlikle üretilmelidir.



KAYNAKLAR

- [1] **Hertz, V.H.H.** (1882). Ueber die Berührung fester elastischer Körper (On the contact of elastic solids), *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, 92(1), 156 – 171.
- [2] **Muskhelishvili, N.I.** (1933). Some basic problems of the mathematical theory of elasticity (J.R.M. Radok, Çev.). Groningen:Noordhoff International Publishing.
- [3] **Galin, L.A.** (1953). Contact problems of the theory of elasticity. Moscow:Nauka.
- [4] **Gladwell, G.M.L.** (1980). Contact problems in the classical theory of elasticity. Alpen an den Rijn:Sijthoff and Noordhoff
- [5] **Johnson, K.L.** (1985). Contact mechanics. London: Cambridge University Press
- [6] **Galin, L.A. ve Gladwell, G.M.L (Eds.).** (2008). *Solid Mechanics and Its Applications: Vol. 155*. Contact problems. The legacy of L.A. Galin. Dordrecht: Springer
- [7] **Popov, V.L. ve Heß, M.** (2015). Method of dimensionality reduction in contact mechanics and friction. Berlin:Springer
- [8] **Signorini, A.** (1933). Sopra alcune questioni di elastostatica. *Atti della Societa Italiana per il Progresso delle Scienze*
- [9] **Fichera, G.** (1973). Boundary Value Problems of Elasticity with Unilateral Constraints. In:C.Truesdell (Eds.) *Linear Theories of Elasticity and Thermoelasticity* (pp.391-424). Berlin:Springer.
- [10] **Duvaut, G. ve Lions, J.L.** (1976). Inequalities in Mechanics and Physics. Berlin:Springer.
- [11] **Kikuchi, N. ve Oden, J. T.** (1988). *Studies in Applied and Numerical Mathematics: Vol. 8*. Contact problems in elasticity:A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods. Philadelphia: Siam
- [12] **Turner, M.J., Dill, E. H., Martin, H.C. ve Melosh, R.J.** (1960). Large deflection of structures subject to heating and external load. *J. Aero Sci.* 27.pp.97-106.
- [13] **Argyris, J.H.** (1964). Recent advances in matrix methods of structural analysis. London: Pergamon Press

- [14] **Wilson, E.A. ve Parsons, B.** (1970). Finite element analysis of elastic contact problems using differential displacements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2. pp.387-395.
- [15] **Chan, S.H. ve Tuba, I.S.** (1971). A finite element method for contact problems in solid bodies. *International Journal of Mechanical Sciences*, 13. pp.615-639.
- [16] **Wilson, E.A. ve Parsons, B.** (1973). Finite element analysis of elastic contact problems using differential displacements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2. pp.387-395.
- [17] **Francavilla, A. and Zienkiewicz, O.C.** (1975). A note on numerical computation of elastic contact problems *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 9. pp.913-924.
- [18] **Laursen, T.A.** (2002). Computational contact and impact mechanics. Berlin:Springer
- [19] **Wriggers, P.** (2006). Computational Contact Mechanics(2. Baskı). Berlin:Springer
- [20] **Borst, R., Criseld, M.A., Remmers, J.J.C. ve Verhoosel, C.V** (2012). *Computational mechanics: Vol.2. Non-linear finite element analysis of solids and structures*(2.Baskı). West Sussex: Wiley
- [21] **Bathe, K.J.** (2014). Finite Element Procedures(2. Baskı). New Jersey: Prentice Hall
- [22] **Wohlmuth, B.I.** (2000). A mortar nite element method using dual spaces for the lagrange multiplier. *SIAM, Journal of Numerical Analysis*, 38 pp.989-1012.
- [23] **Sitzmann, S., Willner, K., Wohlmuth, B.I.** (2016). Variationally consistent quadratic finite element contact formulations for finite deformation contact problems on rough surfaces
- [24] **Green, A.E. ve Zerna, W.** (1968). Theoretical elasticity. (2. Baskı). New York:Dover Publications.
- [25] **Goodier, J.N. ve Timoshenko, S.** (1970). Theory of elasticity. (3. Baskı). New York.McGraw-Hill Book Company.
- [26] **Hughes, T.J.R. ve Marsden, J.E.** (1994). Mathematical foundations of elasticity. New York:Dover Publications.
- [27] **Boresi, A.P., Chong, K.P. ve Lee, J.D.** (2011). Elasticity in engineering mechanics. New Jersey:John Wiley & Sons.
- [28] **Sadd, M. H.** (2014). Elasticity. Theory,applications and numerics (3. Baskı). Oxford:Academic Press.
- [29] **Williams, J. A. ve Dwyer-Joyce, R.S** (2001). Contact between solid surface. In B. Bharat (Eds.), *Modern tribology handbook: Volume One* (p 124). Florida: CRC Press LLC

[30] Çelik Yapıların Tasarım, Hesap ve Yapım Esaslarına Dair Yönetmelik (2016),
Kısım 13.10.3.





ÖZGEÇMİŞ



Ad Soyad :Okan Pınar

Doğum Tarihi ve Yeri :27.06.1991/BURSA

E-posta :okanpin@gmail.com

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans:** 2014, İstanbul Teknik Üniversitesi, İnşaat Fakültesi, İnşaat Mühendisliği

MESLEKİ DENEYİMLER VE ÖDÜLLER:

- Haziran 2014 - Mayıs 2015 ... A-Teknik Proje-Müşavirlik firmasında proje mühendisi ve yazılımcı olarak çalışmıştır.
- Mayıs 2015 - ... ENG Metal Yapı Eng&Const firmasında proje mühendisi ve yazılımcı olarak çalışmaktadır.