GAZİ ÜNİVERSİTESİ

1926

BAZI MONOTON AYIRMA AKSİYOMLARI

Gözde HİMMETOĞLU ERGÜN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MAYIS 2018

Gözde HİMMETOĞLU ERGÜN tarafından hazırlanan "BAZI MONOTON AYIRMA AKSİYOMLARI" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Gazi Üniversitesi Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Çetin VURAL

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum. ..…………………

Başkan: Prof. Dr. Cemil YILDIZ

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum. …………………...

Üye: Doç. Dr. Sevda Sağıroğlu PEKER

Matematik Anabilim Dalı, Ankara Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum. …………………...

Tez Savunma Tarihi: 02/05/2018

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

…………………….…….

Prof. Dr. Sena YAŞYERLİ

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Gözde HİMMETOĞLU ERGÜN

02/05/2018

BAZI MONOTON AYIRMA AKSİYOMLARI

(Yüksek Lisans Tezi)

Gözde HİMMETOĞLU ERGÜN

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Mayıs 2018

ÖZET

Monoton normal uzaylar doğrusal sıralı topolojik uzayların bir genelleştirilmesidir. Bu çalışmada monoton normal ve monoton Hausdorff uzayların bazı özellikleri incelenmiştir. Ayrıca, bu uzaylar arasındaki ilişkiler incelenmiştir. İlaveten M_1, M_2, M_3 uzaylar ve bu uzayların yerel versiyonu olan m_1, m_2, m_3 uzaylar incelenmiştir.

Bilim Kodu	:	20405
Anahtar Kelimeler	:	Doğrusal sıralı topolojik uzay, monoton normal uzay, monoton Hausdorff uzay, Genelleştirilmiş metrik uzaylar
Sayfa Adedi	:	69
Danışman	:	Prof. Dr. Çetin VURAL

SOME MONOTONE SEPARATION AXIOMS

(M. Sc. Thesis)

Gözde HİMMETOĞLU ERGÜN

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

May 2018

ABSTRACT

Monotone normal spaces are a generalization of the linear ordered topological spaces. In this study, some properties of monotone normal and monotone Hausdorff spaces are examined. Also, we investigated the relations between these spaces. In addition, M_1, M_2, M_3 spaces and the m_1, m_2, m_3 spaces which are the local versions of these spaces are examined.

Science Code	:	20405
Key Words	:	Linear ordered topological space, monotone normal space, monotone Hausdorff space, generalized metric space
Page Number	:	69
Supervisor	:	Prof. Dr. Çetin VURAL

TEŞEKKÜR

Tez çalışmamın planlanmasında, araştırılmasında, yürütülmesinde ve oluşumunda ilgi ve desteğini esirgemeyen, engin bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım, yönlendirme ve bilgilendirmesiyle çalışmamı bilimsel temeller ışığında şekillendiren Sayın Prof. Dr. Çetin VURAL'a, ayrıca tezin yazımı esnasında maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ŞEKİLLER LİSTESİ

1. GİRİŞ

1950-1980 yılları arasında " Genelleştirilmiş Metrik Uzaylar" önemli bir araştırma temasıydı. Amaç, metrik uzay sınıfından daha büyük uzay sınıfları bulmaktı. Bu uzaylar bazı topolojik işlemler altında kapalı olmalı ve olabildiğince metrik uzayların istenen özelliklerini taşımalıydı. Ceder 1961 yılında M_1, M_2 ve M_3 uzaylarını tanımladı [1]. Daha sonra Borges 1966 yılında Ceder' in M_3 uzayını " Katmanlanabilir Uzay" olarak yeniden adlandırdı [2]. X bir topolojik uzay olmak üzere; her $U \subseteq X$ açık kümesi için X içinde

i. $U = \bigcup\{ G(n, U) : n \geq 1\} = \bigcup\{\overline{G(n, U)} : n \geq 1\}$
ii. $V \subseteq X$ açık ve $U \subseteq V$ ise, her $n \geq 1$ için $G(n, U) \subseteq G(n, V)$

şartlarını sağlayan bir $\{ G(n, U): n \in \mathbb{N}\}$ açık kümeler dizisi var ise, X uzayı katmanlanabilirdir denir.

Katmanlanabilirlik kuvvetli bir özelliktir. Katmanlanabilir uzay sınıfı bütün metrik uzayları içerir. Katmanlanabilirlik kalıtsaldır, sayılabilir çarpımsaldır ve kapalı fonksiyonlar altında korunur. Bununla birlikte parakompaktlık, Dugundji genişleme teoremi gibi metrik uzayların kuvvetli ve kullanışlı özelliklerinin çoğuna sahiptir. Katmanlanabilir uzaylar üzerine yaptığı 1966 yılındaki çalışmada Borges katmanlanabilir uzayların, daha sonra 1971 yılında Zenor tarafından monoton normallik olarak adlandırılacak olan, aşağıdaki özelliği sağladığını gösterdi [2]:

Eğer X uzayı katmanlanabilir ise, X uzayında $A \subseteq X$ kapalı, $U \subseteq X$ açık ve $A \subseteq U$ olacak biçimde bir (A, U) ikilisi için bir M(A, U) açık kümesi

i. $A \subseteq M(A, U) \subseteq \overline{M(A, U)} \subseteq U$
ii. $A \subseteq B$ ve $U \subseteq V$ koşulunu sağlayan bir (B, V) ikilisi için $M(A, U) \subseteq M(B, V)$

şartları sağlanacak biçimde vardır. Yukarıdaki şekilde tanımlanan monoton normallik özellikleri ile çalışmak bazı durumlarda zordur ve bu tanıma eşdeğer başka ifadeler vardır.

1996 yılında Buck tarafından monoton Hausdorff uzay adı verilen yeni bir uzay sınıfı elde edildi. Oldukça büyük bir uzay sınıfı olmasının yanı sıra monoton normallik özelliğine göre bazı avantajlara da sahip olduğu görüldü. Örneğin; monoton Hausdorff özelliğinin kutu çarpımı altında korunduğu Buck tarafından gösterildi [3].

Yine Ceder tarafından M_i-uzaylar arasındaki ilişkiler incelenmiş ve $M_1 \Rightarrow M_2 \Rightarrow M_3$ olduğunu ispatlanmıştır [1]. Daha sonra Gruenhage ve Junilla birbirlerinden bağımsız olarak $M_3 \Rightarrow M_2$ olduğunu ispatlamak suretiyle M_2 ve M_3 koşullarının denk koşullar olduğunu elde etmişlerdir [4-5]. Fakat yaklaşık 60 yıldır Ceder'in " M_3 uzay M_1 uzay mıdır? ", yani " Katmanlanabilir uzay σ-kapanışı koruyan bir tabana sahip midir? " sorusuna cevap bulunamamıştır. Her bir noktasının kapanışı koruyan bir yerel komşuluklar tabanına sahip olduğu katmanlanabilir uzayların M_1 uzay olduğunu ispat eden Ito' nun teoremi bu konuda büyük bir ilerlemedir [6].

Daha sonra Ceder' in tanımladığı M_i-uzayların yerelleştirmiş biçimi olan m_i-uzaylar Buck tarafından ele alınmış ve bazı sonuçlar elde edilmiştir [3]. m_i uzayların araştırılması esnasında bu uzayların monoton Hausdorff özelliği ile arasında kuvvetli bir ilişki olduğu bulunmuştur. Hatta bazı durumlarda bunların eşdeğer olduğu ispatlanmıştır.

2. ÖNBİLGİLER

Bu bölümde çalışmamızda yer alan bazı tanım ve teoremlere yer verilecektir.

2.1. Tanım

(X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. A kümesini kapsayan bir U açık kümesinin her N üst kümesine, A kümesinin komşuluğu denir, yani,

(N kümesi $A \subseteq X$ kümesinin bir komşuluğu) $\Leftrightarrow$ ($\exists\, U \subseteq X$: U açık ve $A \subseteq U \subseteq N$).

Eğer $A = \{x\}$ ise,

(N kümesi $x \in X$ noktasının bir komşuluğu) $\Leftrightarrow$ ($\exists\, U \subseteq X$: U açık ve $x \in U \subseteq N$).

x noktasını içeren U açık altkümesine de x in bir açık komşuluğu denir [7].

Herhangi bir $x \in X$ noktasının bütün komşulukları ailesi N(x) ile gösterilecektir.

2.2. Tanım

(X, τ) bir topolojik uzay ve $\beta \subseteq \tau$ olsun. τ topolojisinin her elemanı β nın bazı elemanlarının birleşimi olarak yazılabiliyor ise, β ya τ topolojisinin bir tabanı denir [7].

2.3. Tanım

(X, τ) bir topolojik uzay ve $x \in X$ olmak üzere x noktasının bütün komşuluklarının ailesi N(x) olsun. $E(x) \subseteq N(x)$ olmak üzere N(x) ailesinin her N elemanı için $E \subseteq N$ olacak şekilde bir $E \in E(x)$ varsa, E(x) ailesine X üzerindeki topolojiye göre, x noktasının komşuluklar tabanı denir [7].

2.4. Tanım

(X, τ) topolojik uzayının her noktasının sayılabilir bir komşuluklar tabanı varsa, X uzayına birinci sayılabilir uzay denir [7].

2.5. Tanım

(X, τ) bir topolojik uzay olsun. X uzayının farklı x ve y elemanları için bunlardan birini içeren ve diğerini içermeyen en az birer komşulukları varsa, yani

$\forall$ x, y $\in$ X, x $\neq$ y için $\exists$ N $\in$ N(x) ve $\exists$ M $\in$ N(y) komşulukları var öyle ki x$\notin$ M ve y$\notin$ N ise,

X topolojik uzayına T_1-uzay denir [7].

2.6. Tanım

(X, τ) bir topolojik uzay olsun. X uzayının farklı x ve y elemanlarının ayrık komşulukları varsa, yani

$\forall$ x, y $\in$ X, x $\neq$ y için $\exists$ N $\in$ N(x) ve $\exists$ M $\in$ N(y) komşulukları var öyle ki N $\cap$ M = $\emptyset$ ise,

X uzayına T_2-uzay (veya Hausdorff uzay) denir [7].

2.7. Tanım

(X, τ) bir topolojik uzay ve x $\in$ X olsun. X uzayının x noktasını içermeyen kapalı her K kümesi ile x noktasının ayrık komşulukları varsa, yani

x $\in$ X ve $\forall$ K $\subseteq$ X kapalı, x$\notin$K için $\exists$ N $\in$ N(x) ve $\exists$ M $\in$ N(K) komşulukları var öyle ki N $\cap$ M = $\emptyset$ ise,

X uzayına, x noktasında düzenli uzay denir [7].

Her x $\in$ X için x noktasında düzenli olan X uzayına düzenli uzay denir.

2.8. Tanım

(X, τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer, X uzayının herhangi iki kapalı, ayrık altkümesinin ayrık komşulukları varsa, yani

$K_1 \cap K_2 = \emptyset$ biçimindeki her $K_1, K_2 \subseteq X$ kapalı için $K_1 \subseteq U_1$ ve $K_2 \subseteq U_2$ olacak biçimde $\exists\ U_1, U_2 \subseteq X$ açıkları var öyle ki $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ ise,

X uzayına normal uzay denir [7].

2.9. Tanım

$\mathbb{R}$ üzerinde tabanı $\mathcal{B} = \{ [a, b) : a, b \in \mathbb{R} , a < b \}$ olan topolojiye Sorgenfrey doğrusu denir.

2.10. Tanım

P bir özellik olmak üzere P özelliğine sahip olan ailelerin sayılabilir birleşimi biçiminde yazılabilen ailelere σ-P özelliğine sahiptir denir.

2.11. Tanım

$(X, <)$ tam (lineer) sıralı bir küme, $a, b \in X$ ve $a < b$ olsun.

$(a, b) = \{ x \in X: a < x < b \}$,

$(a, \rightarrow) = \{ x \in X: a < x \}$,

$(\leftarrow, b) = \{ x \in X: x < b \}$

olmak üzere X kümesi üzerinde tabanı $\mathcal{B} = \{ (a, b), (a, \rightarrow), (\leftarrow, b): a, b \in X \text{ ve } a < b \}$ olan topolojiye X üzerinde lineer sıralama topolojisi denir ve X uzayına da doğrusal sıralı topolojik uzay (LOTS) denir.

2.12. Tanım

Doğrusal sıralı topolojik uzayların alt uzaylarına Genelleştirilmiş Sıralı Uzaylar denir.

2.13. Tanım

X bir topolojik uzay ve A, B ⊆ X olsun. Eğer $A \cap \overline{B} = \emptyset = B \cap \overline{A}$ ise, A ve B kümelerine ayrılmış kümelerdir denir.

2.14. Tanım

f: X → Y bir fonksiyon olsun. Her K ⊆ X kapalı için f(K), Y de kapalı ise, f ye kapalı fonksiyon denir.

Şimdi çalışmamızdaki bir örnekte yer alan topolojik grup tanımı verilecek ve her topolojik grubun düzenli olduğu görülecektir.

2.15. Tanım

(G, τ) bir topolojik uzay ve (G, $\bullet$) bir grup olsun. Eğer

$$\begin{aligned} f &: G \times G \to G \\ &(x, y) \to f(x, y) = x \bullet y \end{aligned} \quad \text{ve} \quad \begin{aligned} h &: G \to G \\ &x \to h(x) = x^{-1} \end{aligned}$$

fonksiyonları sürekli ise, (G, τ, $\bullet$) üçlüsüne bir topolojik grup denir.

Topolojik grupların düzenli olduklarını görmek için önce aşağıdaki iki lemmayı verelim.

2.16. Lemma

(G, τ, $\bullet$) bir topolojik grup ve g ∈ G olmak üzere

$$\begin{aligned} L_g &: G \to G \\ &x \to L_g(x) = g \bullet x \end{aligned}$$

sol öteleme fonksiyonu ve

$$\begin{aligned} R_g &: G \to G \\ &x \to R_g(x) = x \bullet g \end{aligned}$$

sağ öteleme fonksiyonu homeomorfizmdirler.

İspat:

$$L_g : G \to G$$
$$x \to L_g(x) = g \bullet x$$

fonksiyonunu ele alalım. (G, $\bullet$) bir topolojik grup olduğundan

$$f : G \times G \to G$$
$$(x, y) \to f(x, y) = x \bullet y$$

fonksiyonu süreklidir. $L_g(x) = f\,|_{\{g\}\times G}$ olduğundan L_g fonksiyonu süreklidir.

$L_g(x_1) = L_g(x_2)$ ise L_g fonksiyonunun tanımından $g \bullet x_1 = g \bullet x_2$ olup $g^{-1} \bullet (g \bullet x_1) = g^{-1} \bullet (g \bullet x_2)$ olduğundan $x_1 = x_2$ dir. Böylece L_g birebirdir.

Her $y \in G$ için $x = g^{-1} \bullet y \in G$ olduğundan L_g örtendir.

İddia ediyoruz ki $(L_g)^{-1} = L_{g^{-1}}$ dir. Gerçekten;

$$L_{g^{-1}} \circ L_g(x) = g^{-1}(g \bullet x) = x = I(x)$$

$$L_g \circ L_{g^{-1}}(x) = g(g^{-1} \bullet x) = x = I(x)$$

dir. $L_{g^{-1}} : G \to G$, her $x \in G$ için $L_{g^{-1}}(x) = g^{-1} \bullet x$ fonksiyonu verilsin. $(L_g)^{-1} = f\,|(g^{-1} \times G)$ olduğundan $(L_g)^{-1} = L_{g^{-1}}$ fonksiyonu süreklidir. Benzer şekilde R_g nin de homeomorfizm olduğu görülebilir.

2.17. Lemma

(G, τ, $\bullet$) bir topolojik grup ve (G, $\bullet$) grubunun birim elemanı e olsun. $e \in U$ biçimindeki her $U \subseteq G$ açığı için $e \in V$, $V^{-1} = V$ ve $V \bullet V \subseteq U$ olacak biçimde en az bir $V \subseteq G$ açığı vardır.

İspat:

$U \subseteq G$ açık ve $e \in U$ olsun.

$$\begin{aligned} f: G\times G &\to G \\ (x,y) &\to f(x,y) = x\bullet y \end{aligned}$$ sürekli ve $f(e,e) = e \in U$ olduğundan $e \in W$, $e \in T$ ve $f(W \times T) = W\bullet T \subseteq U$ olacak biçimde $W, T \subseteq G$ açıkları vardır.

$$\begin{aligned} g: G &\to G \\ x &\to g(x) = x^{-1} \end{aligned}$$ homeomorfizm olduğundan W^{-1} ve T^{-1} kümeleri de açıktır. Öyleyse $V = W\cap T \cap W^{-1}\cap T^{-1}$ denilirse; $V \subseteq G$ açık olup $e \in V$, $V^{-1} = V$ ve $V\bullet V \subseteq U$ sağlanır.

2.18. Teorem

Her G topolojik grubu düzenlidir.

İspat

e, G topolojik grubunun birim elemanı olmak üzere homojenlikten dolayı e için görmek yeterlidir, A, G topolojik grubunun herhangi bir kapalı altkümesi ve $e \not\in A$ olsun. Bu durumda $A \subseteq U$, $e \in V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde U ve V açık kümeleri vardır. Şöyle ki;

$e \not\in A$ ve $A \subseteq G$ kapalı olduğundan $e \in A^c$ ve $A^c \subseteq G$ açık olup önceki lemmadan $V^{-1}V \subseteq A^c$ ve $e \in V$ olacak biçimde bir $V \subseteq G$ açığı vardır. Yani $V^{-1}V \cap A = \emptyset$ olup $V \cap VA = \emptyset$ olmasını gerektirir. Dolayısıyla A kapalı kümesini içeren U açığını VA olarak alınabilir ki bu da ispatı tamamlar.

3. MONOTON NORMAL VE MONOTON HAUSDORFF UZAYLAR

Bu bölümde öncelikle monoton normal uzay tanımı verilecek, monoton normallikle ilgili bazı özellikler incelenecektir. Daha sonra monoton normal uzaydan daha geniş olan monoton Hausdorff uzaylar ele alınacaktır. Çalışmamızda yer alan bütün uzayların T_1-uzay olduğu kabul edilmiştir.

3.1. Monoton Normal Uzaylar

Bu kısımda monoton normal uzay kavramı ve bu tanıma eşdeğer olan ifadeler verilecektir. Ayrıca bazı topolojik özellikleri incelenecektir.

3.1.1. Tanım

X bir T_1-uzay olmak üzere X uzayının kapalı, ayrık altkümelerinin her (H, K) sıralı ikilisini G(H, K) açık kümesine götüren ve

MN1. $H \subseteq G(H, K) \subseteq \overline{G(H, K)} \subseteq X \setminus K$;

MN2. (H', K') kapalı, ayrık altkümelerin sıralı ikilisi olmak üzere eğer
$H \subseteq H'$ ve $K' \subseteq K$ ise, $G(H, K) \subseteq G(H', K')$

şartlarını sağlayan bir G fonksiyonu varsa, G fonksiyonuna monoton normallik operatörü, X uzayına da monoton normal uzay denir[3].

Eğer MN1, MN2 monoton normallik şartlarına ek olarak $H' \subseteq X$ kapalı olmak üzere $H' \subseteq G(H, K)$ olduğunda $G(H', K) \subseteq G(H, K)$ şartı sağlanıyorsa bu durumda G fonksiyonuna kuvvetli monoton normallik operatörü, X uzayına da kuvvetli monoton normal uzay denir[3].

Yukarıdaki şekilde tanımlanan monoton normallik özellikleri ile çalışmak bazı durumlarda zordur ve bu tanıma eşdeğer başka ifadeler vardır. Şimdi monoton normalliğin [8] de incelenen farklı karakterizasyonlarını verelim.

3.1.2.Teorem

Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

a) X bir monoton normal uzaydır.

b) X uzayının ayrılmış altkümelerinin her (S, T) sıralı ikilisini $G(S, T) \subseteq X$ açık kümesine götüren ve

i) $S \subseteq G(S, T) \subseteq \overline{G(S,T)} \subseteq X \setminus T$;

ii) (S', T') ayrılmış küme ikilisi için eğer $S \subseteq S'$ ve $T' \subseteq T$ ise, $G(S, T) \subseteq G(S', T')$

şartlarını sağlayan bir G fonksiyonu vardır.

c) C, X uzayında kapalı ve $p \in X \setminus C$ olmak üzere (p, C) ikilisini H(p, C) açık kümesine götüren ve

i) $p \in H(p, C) \subseteq X \setminus C$;

ii) Eğer D kapalı ve $p \notin C \supseteq D$ ise $H(p, C) \subseteq H(p, D)$;

iii) $p, q \in X$ için eğer $p \neq q$ ise $H(p, \{q\}) \cap H(q, \{p\}) = \emptyset$

şartlarını sağlayan bir H fonksiyonu vardır.

İspat

($b \Rightarrow a$): Ayrık, kapalı iki küme ayrılmış olduğu için ispat açıktır.

($a \Rightarrow c$): X T_1-uzay olduğundan her tek nokta kümesi kapalı olup ispat açıktır.

($c \Rightarrow b$): S ve T kümeleri X uzayının ayrılmış iki alt kümesi olsun. $S \cap \overline{T} = \emptyset$ olduğundan her $p \in S$ için $p \notin \overline{T}$ ve $\overline{T}$ kapalı olduğundan hipotezdeki koşulları sağlayan bir $H(p, \overline{T}) \subseteq X$ açığı vardır. G(S, T) açığını $G(S, T) = \bigcup\{H(p,\overline{T}) : p \in S\}$

biçiminde tanımlayalım. Her $p \in S$ için $p \in H(p, \overline{T})$ olduğundan $S \subseteq G(S, T)$ dir. Aynı zamanda $\overline{G(S,T)} \subseteq X \setminus T$ dir. Şöyle ki; $q \in T$ için $T \cap \overline{S} = \emptyset$ olduğundan $q \notin \overline{S}$ olup $q \in H(q, \overline{S})$ dır. Aynı zamanda $H(q, \overline{S}) \cap G(S,T) = \emptyset$ dir. Gerçekten; $H(q, \overline{S}) \cap G(S, T) \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda $z \in H(q, \overline{S}) \cap G(S, T)$ olacak biçimde bir z vardır. G(S, T) nin tanımından $z \in H(q, \overline{S}) \cap H(p, \overline{T})$ olacak biçimde bir $p \in S$ vardır. Aynı zamanda $p \in S$ olduğundan $\{p\} \subseteq \overline{S}$ olup $H(q, \overline{S}) \subseteq H(q, \{p\})$ dir. Benzer biçimde $q \in T$ olduğundan $\{q\} \subseteq \overline{T}$ olup $H(p, \overline{T}) \subseteq H(p, \{q\})$ dır. Böylece $H(q, \overline{S}) \cap H(p, \overline{T}) \subseteq H(q, \{p\}) \cap H(p, \{q\})$ olup hipotezin (iii) özelliğinden

$H(q, \{p\}) \cap H(p, \{q\}) = \emptyset$ olduğundan $H(q, \overline{S}) \cap H(p, \overline{T}) = \emptyset$ olur ki bu $z \in H(q, \overline{S}) \cap H(p, \overline{T})$ olması ile çelişir. Öyleyse $H(q, \overline{S}) \cap G(S, T) = \emptyset$ olup $q \notin \overline{G(S,T)}$ dir. $T \subseteq X \setminus \overline{G(S,T)}$ olup $\overline{G(S,T)} \subseteq X \setminus T$ dir. Şimdi $S' \cap \overline{T'} = \emptyset = T' \cap \overline{S'}$ olmak üzere $S \subseteq S'$ ve $T' \subseteq T$ olsun. $T' \subseteq T$ olduğundan $\overline{T'} \subseteq \overline{T}$ olup hipotezin (ii) özelliğinden her $p \in S$ için $H(p, \overline{T}) \subseteq H(p, \overline{T'})$ dır. Öyleyse $\bigcup_{p\in S} H(p,\overline{T}) \subseteq \bigcup_{p\in S} H(p,\overline{T'}) \subseteq \bigcup_{p\in S'} H(p,\overline{T'})$ olup $G(S, T) \subseteq G(S', T')$ dır.

Tanım 3.1.1 de verilen G monoton normallik operatörü, X uzayının kapalı, ayrık her (A, B) ikilisi için $G(A, B) \cap G(B, A) = \emptyset$ olacak biçimde ayarlanabilir. Şöyle ki; X monoton normal uzay olsun. Bu durumda X in bir G' monoton normallik operatörü vardır. $G(A, B)=G'(A,B) \setminus \overline{G'(B,A)}$ şeklinde tanımlanan G operatörü X uzayı üzerinde $G(A, B) \cap G(B, A) = \emptyset$ şartını sağlayan bir monoton normallik operatörüdür. Gerçekten; G', X üzerinde bir monoton normallik operatörü olduğundan $A \subseteq G'(A,B)$ ve $\overline{G'(B,A)} \subseteq X \setminus A$ olup $A \subseteq G(A, B)$ dir. MN1 şartının sağlandığını söyleyebilmek için $\overline{G(A,B)} \subseteq X \setminus B$ olduğunu da görelim. $x \in \overline{G(A,B)}$ olsun. O halde G operatörünün tanımından $x \in \overline{G'(A,B) \setminus \overline{G'(B,A)}}$ dir. Kabul edelim ki $x \notin X \setminus B$ olsun.O halde $x \in B$ ve G' monoton normallik operatörü olduğundan $B \subseteq G'(B, A) \subseteq \overline{G'(B,A)} \subseteq X \setminus A$ olup G'(B, A), x noktasını içeren bir açıktır. $x \in \overline{G(A,B)}$ olduğundan x noktasını içeren her açıkla, G(A, B) kümesinin arakesiti boş kümeden farklıdır. Yani $G'(B, A) \cap G(A, B) \neq \emptyset$ olup $G'(B, A) \cap (G'(A, B) \setminus \overline{G'(B,A)}) \neq \emptyset$ dir. Bu bir çelişkidir. O halde $x \in \overline{G(A,B)}$ için $x \in X \setminus B$ dir. Böylece MN1 şartı sağlanır.

Şimdi kapalı, ayrık kümelerin (A', B') sıralı ikilisi için $A \subseteq A'$ ve $B' \subseteq B$ olsun. Bu durumda $G(A, B) \subseteq G(A', B')$ olduğunu görmeliyiz. $x \in G(A, B)$ olsun. G nin tanımından $x \in G'(A, B) \setminus \overline{G'(B,A)}$ dir. Yani $x \in G'(A, B)$ ve $x \notin \overline{G'(B,A)}$ dir. G' monoton normallik operatörü olduğundan $x \in G'(A', B')$ ve $x \notin \overline{G'(B',A')}$ dir. Böylece $x \in G'(A', B') \setminus \overline{G'(B',A')}$ olup $x \in G(A', B')$ dir.

Monoton normal her uzay normaldir. Gerçekten; X monoton normal uzay ve G, X uzayı üzerinde bir monoton normallik operatörü olsun. O halde X uzayının kapalı, ayrık H, K kümeleri için $G(H, K) \cap G(K, H) = \emptyset$ biçiminde ayrık açıkları vardır. Bunun tersinin genelde doğru olmadığı Örnek 3.1.5 de görülecektir.

Şimdi monoton normal uzay olma özelliğinin açık kümelerle ilgili olan bir diğer karakterizasyonu ifade ve ispat edilecektir.

3.1.3. Teorem

Aşağıdakiler denktir:

a) X uzayı monoton normal uzaydır.
b) X uzayının her $x \in X$ noktası ve x in her açık U komşuluğu için x in öyle bir D(x,U) açık komşuluğu vardır ki bu D(x,U) açıkları

“$D(x,U) \cap D(y,V) \neq \emptyset \Rightarrow x \in V$ veya $y \in U$ “

koşulunu sağlar[9].

İspat

(a $\Rightarrow$ b): X uzayı monoton normal olsun. Bu durumda X uzayı üzerinde, Tanım 3.1.1 deki MN1 ve MN2 koşullarını sağlayan bir G monoton normallik operatörü vardır. Teorem 3.1.2 den sonra verilen bilgiye göre G operatörünün, X uzayının kapalı, ayrık altkümelerinin her sıralı (H,K) ikilisi için $G(H, K) \cap G(K, H) = \emptyset$ koşulunu sağladığını kabul etmek genelliği bozmaz. Her $x \in X$ ve x in her U açık komşuluğu için $D(x, U) = G(\{x\}, X \setminus U)$ biçiminde tanımlayalım. G monoton normallik operatörü olduğundan $x \in G(\{x\}, X \setminus U)$ olup D(x, U) x in bir açık komşuluğudur. Benzer şekilde herhangi bir $y \in X$ ve y nin herhangi bir V açık komşuluğu için D(y, V) tanımlanabilir. $x \notin V$ ve $y \notin U$ olsun. Bu durumda $x \neq y$ olup, X T_1-uzay ve G monoton normallik operatörü olduğundan $G(\{x\}, \{y\}) \cap G(\{y\}, \{x\}) = \emptyset$ dir. Aynı zamanda $\{y\} \subseteq X \setminus U$ olduğundan $G(x, X \setminus U) \subseteq G(\{x\}, \{y\})$ dir. Benzer biçimde G(

$y, X \setminus V) \subseteq G(\{y\}, \{x\})$ olup $D(x, U) \subseteq G(\{x\}, \{y\})$ ve $D(y, V) \subseteq G(\{y\}, \{x\})$ dir. Böylece $D(x, U) \cap D(y, V) = \emptyset$ dır.

(b $\Rightarrow$ a): X uzayının her x noktası ve x in her U komşuluğu için x in hipotezdeki koşulu sağlayan bir D(x, U) açık komşuluğu var olsun. X uzayının kapalı, ayrık altkümelerinin sıralı her (H, K) ikilisi için;

$$G(H, K) = \bigcup \{ D(x,U) \mid x \in H, U \text{ x in açık komşuluğu ve } U \cap K = \emptyset \}$$

biçiminde tanımlanan G operatörü X uzayı üzerinde bir monoton normallik operatörüdür. Şöyle ki;

Her $x \in X$ ve x in her U açık komşuluğu için D(x, U) x in açık bir komşuluğu olduğundan, X uzayının kapalı, ayrık altkümelerinin sıralı her (H, K) ikilisi için $G(H, K) \subseteq X$ açıktır. Şimdi G operatörünün MN1 koşulunu sağladığını görelim. H ve K, X uzayının kapalı, ayrık herhangi iki altkümesi olsun. Her $x \in H$ ve x in her U açık komşuluğu için $x \in D(x, U)$ olduğundan $H \subseteq G(H, K)$ dır. $\overline{G(H,K)} \subseteq X \setminus K$ olduğunu görmek için $\overline{G(H,K)} \cap K \neq \emptyset$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $y \in \overline{G(H,K)} \cap K$ olacak biçimde bir $y \in X$ vardır. $y \in K$ ve $K \cap H = \emptyset$ olduğundan $y \in X \setminus H$ dır. $X \setminus H \subseteq X$ açık olduğundan $y \in D(y, X \setminus H)$ dır. $D(y, X \setminus H) \subseteq X$ açık ve $y \in \overline{G(H,K)}$ olduğundan$D(y, X \setminus H) \cap G(H, K) \neq \emptyset$ olup $D(y, X \setminus H) \cap D(x, U) \neq \emptyset$ olacak biçimde bir $x \in H$ elemanı ve x in $U \cap K = \emptyset$ olacak biçimde bir U açık komşuluğu vardır. $D(y, X \setminus H) \cap D(x, U) \neq \emptyset$ olması $y \in U$ veya $x \in X \setminus H$ olmasını gerektirir ki bu $U \cap K = \emptyset$ ve $x \in H$ olması ile çelişir. Böylece $\overline{G(H,K)} \cap K \neq \emptyset$ kabulü yanlış olup $\overline{G(H,K)} \subseteq X \setminus K$ olmak zorundadır.

Şimdi de G operatörünün MN2 koşulunu sağladığını görelim. (H, K) ve (H', K') X uzayının kapalı, ayrık altkümelerinin iki sıralı ikilisi olmak üzere $H \subseteq H'$ ve $K' \subseteq K$ olsun. $G(H, K) \subseteq G(H', K')$ olduğunu görmeliyiz. $p \in G(H, K)$ olsun. Bu durumda $p \in D(x, U)$ olacak biçimde bir $x \in H$ ve x in $U \cap K = \emptyset$ olacak biçimde bir U açık komşuluğu vardır. $H \subseteq H'$ olduğundan $x \in H'$ ve $K' \subseteq K$ olduğundan $U \cap K' = \emptyset$ olup $p \in G(H', K')$ dır.

Şimdi monoton normal uzayın her alt uzayının da monoton normal uzay olduğunu görelim. Normal uzay olma özelliği sadece kapalı alt uzaylara göre kalıtsal olmasına rağmen monoton normal uzay olma özelliği kalıtsaldır.

3.1.4. Teorem

Monoton normal uzay olma özelliği kalıtsaldır[3].

İspat

X bir monoton normal uzay ve $Y \subseteq X$ olsun. $U \subseteq Y$ olmak üzere U kümesi Y alt uzayında açık ve $y \in U$ olsun. U kümesi Y alt uzayında açık olduğundan $U = Y \cap U'$ olacak biçimde bir $U' \subseteq X$ açığı vardır. $y \in U$ olduğundan $y \in U'$ dır. $y \in U'$ ve X monoton normal uzay olduğundan y nin Teorem 3.1.4 deki koşulu sağlayan X uzayında bir D(y, U') açık komşuluğu vardır. $D(y, U) = D(y, U') \cap Y$ olsun. D(y, U) açığı Y uzayı üzerinde Teorem 3.1.3 teki koşulu sağlar. Şöyle ki; y ve z, Y nin herhangi iki elemanı, U ve V, sırasıyla, y ve z nin Y altuzayında açık komşulukları olmak üzere, $z \notin D(y, U)$ ve $y \notin D(z, V)$ olsun. Böylece $z \notin D(y, U') \cap Y$ ve $y \notin D(z, V') \cap Y$ olup $y, z \in Y$ olduğundan $z \notin D(y, U')$ ve $y \notin D(z, V')$ dır. Böylece $D(y, U') \cap D(z, V') = \emptyset$ dır. $\left(D(y, U') \cap D(z, V')\right) \cap Y = \emptyset$ olup $D(y, U) \cap D(z, V) = \emptyset$ dir. Teorem 3.1.3 ten Y monoton normal uzaydır.

Monoton normal her uzayın normal olduğunu daha önceden ifade etmiştik. Tersinin doğru olmadığını aşağıdaki örnek ile görelim.

3.1.5. Örnek

Bölüm 3.3. de verilecek olan Niemytzki düzlemini X ile gösterelim. X uzayının ağırlığı $\omega(X)$ ve $I = [0,1]$ olmak üzere; $I^{\omega(X)}$ çarpım uzayı normal uzaydır, fakat monoton normal değildir. I kapalı aralığı kompakttır. Böylece $I^{\omega(X)}$ uzayı kompakttır. Kompakt her uzay normal olduğundan $I^{\omega(X)}$ normaldir. Kabul edelim ki $I^{\omega(X)}$ monoton normal uzay olsun. Teorem 3.1.4 den monoton normal uzay olma özelliği kalıtsal olduğundan $I^{\omega(X)}$ in her alt uzayı da monoton normaldir. X uzayı Tychonoff olduğundan $e: X \to I^{\omega(X)}$ gömme dönüşümü vardır. Bu durumda $e(X) \subseteq I^{\omega(X)}$ alt uzayı da monoton normal uzaydır. $e(X)$, X uzayına homeomorf olduğundan X uzayı monoton normaldir. Fakat bu X uzayının, Örnek 3.3.2 de gösterildiği gibi monoton normal olmamasıyla çelişir.

Monoton uzaylara duyulan ilginin bir nedeni de 4. Bölümde verilecek olan katmanlanabilir uzayların yanı sıra doğrusal sıralı topolojik uzayların bütün alt uzaylarının da bu özelliğe sahip olmasıdır. Altsıralanabilir uzay olarak adlandırılan bu uzayların monoton normal olduğunu söyleyebilmek için doğrusal sıralı topolojik uzayların monoton normal olduğunu görmek yeterlidir. O halde şimdi doğrusal sıralı topolojik uzayların monoton normal olduğunu görelim.

3.1.6. Teorem

Doğrusal sıralı topolojik uzaylar monoton normal uzaydır[9].

İspat

$(X, <)$ doğrusal sıralı bir topolojik uzay olmak üzere $\prec_w$, X üzerinde herhangi bir iyi sıralama bağıntısı olsun. Şimdi X uzayının her $x \in X$ noktası ve x in her açık U komşuluğu için Teorem 3.1.3 teki koşulları sağlayan bir $x \in D(x, U) \subseteq X$ açığının var olduğunu görelim. $U \subseteq X$ açık ve $x \in U$ olsun. (a, b), $(\leftarrow, b)$, $(a, \rightarrow)$ biçimindeki bütün aralıkların ailesi doğrusal sıralı topolojik uzaylar için taban olduğundan $x \in (a, b) \subseteq U$ olacak biçiminde (veya $x \in (a, \rightarrow) \subseteq U$ veya $x \in (\leftarrow, b) \subseteq U$) bir aralık vardır. $A_x = \{ p \in X \mid a < p < x \}$ ve $B_x = \{ p \in X \mid x < p < b \}$ olsun. Eğer $A_x \neq \emptyset$, $B_x \neq \emptyset$ ise bunların $\prec_w$ iyi sıralama bağıntısına göre birer en küçük elemanı vardır. Bunlar eğer varsa a_x ve b_x olsun.

$$D(x, U) = \begin{cases} (a_x, b_x) & ; A_x \neq \emptyset \text{ ve } B_x \neq \emptyset \\ [x, b_x) & ; A_x = \emptyset \text{ ve } B_x \neq \emptyset \\ (a_x, x] & ; A_x \neq \emptyset \text{ ve } B_x = \emptyset \\ \{x\} & ; A_x = \emptyset \text{ ve } B_x = \emptyset \end{cases}$$

biçiminde tanımlansın. $D(x, U) \subseteq U$ açık ve $x \in D(x, U)$ dur. Şimdi $y \in V \subseteq X$ açık olmak üzere ve $D(y, V)$ yukarıdaki biçimde tanımlanmışken eğer $D(x, U) \cap D(y, V) \neq \emptyset$ ise $x \in V$

veya $y \in U$ olduğunu görelim. Genelliği bozmadan $x < y$ olduğunu varsayalım. $A_x \neq \emptyset \neq A_y$ ve $B_x \neq \emptyset \neq B_y$ durumunda ispatı yapalım. Diğer durumlarda da benzer biçimde yapılabilir. $D(x, U) \cap D(y, V) \neq \emptyset$ iken mümkünse $x \notin V$ ve $y \notin U$ olsun. O halde; $(a_x, b_x) \cap (c_y, d_y) \neq \emptyset$ ve $x \notin (c, d)$ ve $y \notin (a, b)$ dir.

1. $x < y$
2. $(a_x, b_x) \cap (c_y, d_y) \neq \emptyset$
3. $x \notin (c, d)$ ve $y \notin (a, b)$

2 den dolayı $c_y < b_x$ olmak zorundadır. Aynı zamanda $x < c_y$ olmak zorundadır. Şöyle ki; $x \notin (c, d)$ olup $x \notin (c_y, d_y)$ olduğundan $x < c_y$ veya $x = c_y$ dir. Eğer $x = c_y$ ise; $c < c_y$ olduğundan $c < x$ olur ki bu durumda $c < x < y < d$ olduğundan $x \in (c, d)$ olur. O halde $x < c_y$ dir. Böylece; $x < c_y < b_x < b$ ve $c < c_y < b_x < y$ olup $x < c_y < b$ ve $c < b_x < y$ dir. $b_x \prec_w c_y$ ve $c_y \prec_w b_x$ olur ki bu bir çelişkidir. $x \in V = (c, d)$ veya $y \in U = (a, b)$ olmak zorundadır.

Monoton normal uzay olma özelliği kalıtsal olduğundan doğrusal sıralı topolojik uzayların her alt uzayı da monoton normaldir. Doğrusal sıralı topolojik uzayların alt uzaylarına altsıralanabilir uzay (veya genelleştirilmiş sıralı uzay) denildiğinden aşağıdaki sonuç verilebilir.

3.1.7. Sonuç

Altsıralanabilir uzaylar monoton normaldir.

3.1.8. Sonuç

$\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi, üzerindeki alışılmış topolojiyle, doğrusal sıralı bir uzay olduğundan monoton normal uzaydır.

Şimdi de monoton normallik özelliğinin kapalı fonksiyonlar altında korunduğu aşağıdaki teoremle ifade ve ispat edilecektir.

3.1.9. Teorem

f: X $\rightarrow$ Y sürekli, örten, kapalı bir fonksiyon olsun. X uzayı monoton normal uzay ise Y uzayı da monoton normal uzaydır[8].

İspat

X, monoton normal uzay ve G, X uzayı üzerinde bir monoton normallik operatörü olsun. H, K$\subseteq$ Y kapalı ve $H \cap K = \emptyset$ olmak üzereG'(H, K) = Y \ f (X \ G(f^{-1}(H), f^{-1}(K))) şeklinde tanımlanan G', Y üzerinde bir monoton normallik operatörüdür. Şöyle ki; H, K $\subseteq$ Y kapalı, $H \cap K = \emptyset$ ise f sürekli olduğundan f^{-1}(H), f^{-1}(K) $\subseteq$ X kapalı ve $f^{-1}(H) \cap f^{-1}(K) = \emptyset$ dir. G operatörü X uzayı için monoton normallik operatörü olduğundan G(f^{-1}(H), f^{-1}(K)) $\subseteq$ X açık olup X\G(f^{-1}(H),f^{-1}(K))$\subseteq$X kapalıdır. f kapalı fonksiyon olduğundan f (X \ G(f^{-1}(H), f^{-1}(K))) $\subseteq$ Y kapalı olup G'(H, K) $\subseteq$ Y açıktır.

MN1. H ve K, Y uzayının kapalı, ayrık altkümeleri olmak üzere, H $\subseteq$ G'(H, K) $\subseteq$ $\overline{G'(H,K)}$ $\subseteq$ Y \ K olduğunu görelim. G, X uzayı üzerinde monoton normallik operatörü olduğundan f^{-1}(H)$\subseteq$G(f^{-1}(H),f^{-1}(K)) olup X \ G(f^{-1}(H), f^{-1}(K)) $\subseteq$ f^{-1}(Y \ H) dir. Her iki tarafın f altındaki görüntüsü alınırsa f (X \ G(f^{-1}(H), f^{-1}(K))) $\subseteq$ Y \ H olur.Böylece H $\subseteq$ Y \ f (X \ G(f^{-1}(H), f^{-1}(K))) = G'(H, K) dır. Diğer yandan $\overline{G'(H,K)} \cap K \neq \emptyset$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda bir $y \in \overline{G'(H,K)} \cap K$ vardır. Az önce görüldüğü üzere K $\subseteq$ G'(K, H) dır. $y \in \overline{G'(H,K)}$ ve y $\in$ G'(K, H) olduğundan G'(K, H) $\cap$ G'(H, K) $\neq \emptyset$ olması gerekir ki bu bir çelişkidir. Yani $\overline{G'(H,K)}$ $\subseteq$ Y\K dir.

MN2. (H, K) ve (H', K'), Y nin kapalı, ayrık altkümelerinin iki sıralı ikilisi olmak üzere H $\subseteq$ H' ve K'$\subseteq$ K ise G'(H, K) $\subseteq$ G'(H', K') dir. Gerçekten; H', K' $\subseteq$Y kapalı ve ayrık olup f sürekli olduğundan f^{-1}(H'), f^{-1}(K') $\subseteq$ X kapalı ve ayrıktır. G X için monoton normallik operatörü olduğundan G(f^{-1}(H), f^{-1}(K)) $\subseteq$ G(f^{-1}(H'), f^{-1}(K')) dır. Bu durumda X\G(f^{-1}(H'),f^{-1}(K'))$\subseteq$X\G(f^{-1}(H),f^{-1}(K)olup f (X \ G(f^{-1}(H'), f^{-1}(K'))) $\subseteq$ f (X \ G(f^{-1}(H), f^{-1}(K))) dir. Böylece Y \ f (X \ G(f^{-1}(H), f^{-1}(K))) $\subseteq$ Y \ f (X \ G(f^{-1}(H'), f^{-1}(K'))) olup G'(H, K) $\subseteq$ G'(H', K') dır.

Monoton normal uzay olma özelliği sürekli fonksiyonlar altında korunmaz. Şöyle ki; ayrık topolojik uzaylar monoton normaldir. Bütün topolojik uzaylar, ayrık topolojik uzayların bir sürekli görüntüsü olarak yazılabildiğinden, bu kabul altında tüm uzayların monoton normal olması gerekir.

3.2. Monoton Hausdorff Uzaylar

Bu kısımda Buck tarafından tanımlanan monoton Hausdorff uzaylar incelenecektir[3].

3.2.1. Tanım

(X,τ) bir T_1-uzay, X in köşegeni Δ olmak üzere eğer, bir $g: (X \times X)\setminus \Delta \to \tau \setminus \{\emptyset\}$ fonksiyonu mevcut ve g fonksiyonu

MH1. $x \in g(x, y) \subseteq X$ açık komşuluk;

MH2. $g(x, y) \cap g(y, x) = \emptyset$;

MH3. $M \subseteq X$ herhangi bir alt uzay olmak üzere eğer

$x \in \overline{\bigcup\{g(y,x) : y \in M\}}$ ise $x \in \overline{M}$;

şartlarını sağlıyor ise, g fonksiyonuna X üzerinde bir monoton Hausdorff'luk operatörü, X uzayına da monoton Hausdorff uzay denir[3].

Eğer monoton Hausdorff uzay olma şartlarına ek olarak $z \in g(x, y)$ iken $g(z, y) \subseteq g(x, y)$ şartı da sağlanıyorsa bu durumda g fonksiyonuna kuvvetli monoton Hausdorff' luk operatörü X uzayına da kuvvetli monoton Hausdorff uzay denir.

Monoton Hausdorff uzay ile ilgili bazı özellikler aşağıdaki teoremler ve sonuçlarla ifade edilecek, örnekler verilecektir.

Monoton normal uzaylarda olduğu gibi monoton Hausdorff uzay olma özelliği de alt uzaylara geçer.

3.2.2. Teorem

Monoton Hausdorff uzay olma özelliği kalıtsaldır[3].

İspat

X monoton Hausdorff uzay, g', X uzayı üzerinde bir monoton Hausdorff'luk operatörü ve $A \subseteq X$ olsun. p ve q, A alt uzayında birbirinden farklı noktalar olmak üzere

$g(p, q) = g'(p, q) \cap A$ biçiminde tanımlanan $g: (A \times A) \setminus \Delta_A \to \tau_A \setminus \{\emptyset\}$ fonksiyonu A uzayı üzerinde bir monoton Hausdorff ‘luk operatörüdür. Gerçekten;

MH1. $g'(p, q)$, X uzayı üzerinde p noktasını içeren bir açık komşuluk olduğundan $p \in A$ olduğundan $g'(p, q) \cap A$ kümesi A alt uzayında açık olup $g(p, q)$, A alt uzayı üzerinde p noktasını içeren açık bir komşuluktur.

MH2. $g(p, q) \cap g(q, p) = \emptyset$ olduğunu görelim. g', X uzayı üzerinde bir monoton Hausdorff’luk operatörü olduğundan $g'(p, q) \cap g'(q, p) = \emptyset$ dir. Böylece $A \cap (g'(p, q) \cap g'(q, p)) = \emptyset$ olup $(A \cap g'(p, q)) \cap (A \cap g'(q, p)) = \emptyset$ dır. Yani $g(p, q) \cap g(q, p) = \emptyset$ dir.

MH3. $M \subseteq A$ olmak üzere $p \in \overline{\bigcup\{g(q,p) : q \in M\}}^A$ olsun. $p \notin \overline{M}^A = \overline{M} \cap A$ olduğunu kabul edelim. $p \notin \overline{M}$ ve g', X uzayı üzerinde monoton Hausdorff’luk operatörü olduğundan $p \notin \overline{\bigcup\{g'(q,p) : q \in M\}}$ dır. Bu durumda $p \in U$ ve $U \cap \bigcup\{g'(q,p) : q \in M\} = \emptyset$ olacak biçimde bir $U \subseteq X$ açığı vardır. $p \in U$, $p \in A$ ve $U \subseteq X$ açık olduğundan $p \in U \cap A$ ve $U \cap A$ kümesi A alt uzayında açıktır. $\left(U \cap \bigcup\{g'(q,p) : q \in M\} \right) \cap A = \emptyset$ olup $(U \cap A) \cap \left(\bigcup\{g'(q,p) : q \in M\} \cap A \right) = \emptyset$ dir. Böylece $(U \cap A) \cap \bigcup\{g(q,p) : q \in M\} = \emptyset$ olur ki bu $p \in \overline{\bigcup\{g(q,p) : q \in M\}}^A$ olması ile çelişir. Böylece kabulümüz yanlış olup $p \in \overline{M}^A$ dır.

Şimdi monoton Hausdorff her uzayın düzenli olduğunu, dolayısıyla Hausdorff olduğunu görelim. Daha sonra birinci sayılabilir uzaylarda düzenli uzayın monoton Hausdorff ’luğa denk olduğu görülecektir.

3.2.3. Teorem

Monoton Hausdorff her uzay düzenli uzaydır[3].

İspat

X bir monoton Hausdorff uzay, g X uzayı üzerinde bir monoton Hausdorff’luk operatörü olsun. Ayrıca F, X uzayının kapalı bir alt kümesi, $x \in X$ ve $x \notin F$ olsun. F kapalı olduğundan $x \notin \overline{F}$ dır. X uzayı monoton Hausdorff olduğundan $x \notin \overline{\bigcup\{g(y,x) : y \in F\}}$ dır. Bu durumda

U ∩ ($\bigcup\{g(y,x) : y \in F\}$) = ∅ olacak biçimde x noktasının bir U açık komşuluğu vardır. Öte yandan her y ∈ F için x ≠ y olup y ∈ g(y, x) olduğundan F ⊆ $\bigcup_{y\in F} g(y,x)$ dır. $\bigcup_{y\in F} g(y,x) = V$ denilirse V ⊆ X açık ve U ∩ V = ∅ dır. Böylece U, V ⊆ X açık, x ∈ U, F ⊆ V ve U ∩ V = ∅ olup X uzayı düzenlidir.

Düzenli her uzay Hausdorff olduğundan bu teorem için aşağıdaki sonuç elde edilir:

3.2.4. Sonuç

Monoton Hausdorff her uzay Hausdorff uzaydır.

Fakat bunun tersi doğru değildir. Aşağıdaki örnekle Hausdorff her uzayın monoton Hausdorff uzay olmak zorunda olmadığı görülecektir.

3.2.5. Örnek

$D = \{ \frac{1}{n} \mid n = 1,2,\ldots\}$ olmak üzere $\tau = \{ T \mid \exists U \subseteq \mathbb{R}$ açık ve $\exists B \subseteq D$ için $T = U \setminus B \}$ ailesi $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi üzerinde bir topolojidir. Bu topoloji ile $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi Hausdorff uzaydır, fakat monoton Hausdorff uzay değildir.

Önce ($\mathbb{R}$, τ) uzayının Hausdorff olduğunu görelim.

$\mathbb{R}$ üzerinde standart topoloji τ_s ile gösterilmek üzere $\tau_s \subseteq \tau$ dur. Gerçekten; $T \in \tau_s$ olsun. $T \subseteq \mathbb{R}$ açık ve $\emptyset \subseteq D$ olduğundan $T = T \setminus \emptyset \in \tau$ dur. ($\mathbb{R}$,τ_s) topolojik uzayı Hausdorff uzay olduğundan ($\mathbb{R}$,τ) uzayı da Hausdorff' dur.

($\mathbb{R}$,τ) uzayının monoton Hausdorff uzay olmadığını söylemek için Teorem 3.2.3 den düzenli uzay olmadığını görmek yeterlidir.

$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}$ açık ve D ⊆ D için $\mathbb{R} \setminus D$ açık olup D kümesi τ topolojisine göre kapalıdır. $0 \notin D$ olup D'yi içeren her açık 0 noktasını da içerdiğinden 0 ∈ U, D ⊆ V olacak biçimde ayrık U, V açıkları bulunamaz. Şöyle ki D ⊆ V ve V açık olsun. Bu durumda V = T \ B olacak biçimde bir $T \subseteq \mathbb{R}$ açık ve bir B ⊆ D vardır. Kolayca görülebileceği üzere B = ∅ olmak zorundadır. Her n için $\frac{1}{n} \in D$ olup her n için $\frac{1}{n} \in V$ dir. $T \in \tau_s$ ve V =T olduğundan her n için $(\frac{1}{n} - r_n, \frac{1}{n} + r_n) \subseteq T$ ve $\lim_{n\to 0} rn = 0$ olacak biçimde bir $(r_n) \subseteq \mathbb{R}$ dizisi vardır. Böylece

$\bigcap_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n} - r_n, \frac{1}{n} + r_n) \subseteq T$ dir. $\bigcap_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n} - r_n, \frac{1}{n} + r_n) = \{0\}$ olduğundan $0 \in T$ olup $0 \in V$dir.

Teorem 3.2.3 de monoton Hausdorff her uzayın düzenli uzay olduğu ifade ve ispat edilmişti. Düzenli uzayın monoton Hausdorff olması için uzayın birinci sayılabilir olması gerektiği aşağıdaki teoremle verilecektir. Böylece sonuç olarak birinci sayılabilir topolojik uzaylarda düzenli uzay tanımı monoton Hausdorff uzay tanımına denktir.

3.2.6. Teorem

Birinci sayılabilir, düzenli her topolojik uzay monoton Hausdorff uzaydır[3].

İspat

X birinci sayılabilir ve düzenli bir topolojik uzay olsun. X birinci sayılabilir olduğundan her $x \in X$ noktasının sayılabilir ve kapsama bağıntısına göre artmayan bir $\{ V_n(x): n \in \mathbb{N} \}$ açık komşuluklar tabanı vardır. Şimdi, X uzayının birbirinden farklı herhangi iki x ve y elemanlarını alalım. $j(x) = \min \{ n \in \mathbb{N} : x \notin \overline{V_n(y)} \}$ olsun. j(x) in tanımından $x \notin \overline{V_{j(x)}(y)}$ olduğundan $V_{n_0}(x) \cap V_{j(x)}(y) = \emptyset$ olacak biçimde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Bu n_0 sayılarının en küçüğüne m(x, y) diyelim. Yani, $m(x, y) = \min\{ n \in \mathbb{N} : V_n(x) \cap V_{j(x)}(y) = \emptyset \}$ olsun.

İddia ediyoruz ki $g(x, y) = V_{m(x,y)}(x)$ biçiminde tanımlanan $g: (X \times X) \setminus \Delta \to \tau \setminus \{\emptyset\}$fonksiyonu X uzayı üzerinde bir monoton Hausdorff' luk operatörüdür, yani g fonksiyonu Tanım 3.2.1 in koşullarını sağlar. Şöyle ki;

MH1. Her $n \in \mathbb{N}$ için $V_n(x)$ x in bir açık komşuluğu olduğundan g(x, y) x in açık bir komşuluğudur.

MH2. X in $x \neq y$ biçimindeki herhangi iki x ve y elemanlarını alalım.

$g(x, y) \cap g(y, x) = V_{m(x,y)}(x) \cap V_{m(y,x)}(y) = \emptyset$ olduğunu görelim. m(x, y) nin tanımından $V_{m(x,y)}(x) \cap V_{j(x)}(y) = \emptyset$ olup $y \notin \overline{V_{m(x,y)}(x)}$ dir. $j(y) = \min\{n \in \mathbb{N} : y \notin \overline{V_n(x)} \}$ olduğundan $j(y) \leq m(x,y)$ olup $V_{m(x,y)}(x) \subseteq V_{j(y)}(x)$ dir. Öte yandan $m(y, x) = \min \{n \in \mathbb{N} : V_n(y) \cap V_{j(y)}(x) = \emptyset \}$ olduğundan $V_{m(y,x)}(y) \cap V_{j(y)}(x) = \emptyset$ dir. Öyleyse $V_{m(y,x)}(y) \cap V_{m(x,y)}(x)= \emptyset$ olup $g(x, y) \cap g(y, x) = \emptyset$ dir.

MH3. M kümesi X in herhangi bir alt uzayı ve $x \in X \setminus \overline{M}$ olsun. $x \notin \overline{\bigcup\{g(y,x) : y \in M\}}$ olduğunu görmeliyiz. $x \notin \overline{M}$ ve { $V_n(x)$: $n \in \mathbb{N}$ } ailesi x in komşuluklar tabanı ve X uzayı düzgün olduğundan $M \cap \overline{V_n(x)} = \emptyset$ olacak biçimde en az bir $n \in \mathbb{N}$ vardır. Bu n sayılarının en küçüğü k olsun, yani $k = \min\{ n \in \mathbb{N} : M \cap \overline{V_n(x)} = \emptyset \}$olsun. Öyleyse $M \cap \overline{V_k(x)} = \emptyset$ ve $n < k$ biçimindeki her $n \in \mathbb{N}$ için $M \cap \overline{V_n(x)} \neq \emptyset$ dir. Şimdi M nin herhangi bir y elemanını alalım. $x \notin \overline{M}$ olduğundan $x \notin M$ dir ve böylece $x \neq y$ dir. $M \cap \overline{V_k(x)} = \emptyset$ ve $y \in M$ olduğundan $y \notin \overline{V_k(x)}$ dır. Öyleyse j(y) nin tanımından $j(y) \leq k$ olup $V_k(x) \subseteq V_{j(y)}(x)$ dir. Aynı zamanda $m(y, x) = \min\{ n \in \mathbb{N} : V_n(y) \cap V_{j(y)}(x) = \emptyset\}$ olduğundan $V_{m(y,x)}(y) \cap V_{j(y)}(x) = \emptyset$ dir. $g(y, x) = V_{m(y,x)}(y)$ olduğundan $g(y, x) \cap V_{j(y)}(x) = \emptyset$ olup $V_k(x) \subseteq V_{j(y)}(x)$ olduğundan $g(y, x) \cap V_k(x) = \emptyset$ dir. Böylece her $y \in M$ için $g(y, x) \cap V_k(x) = \emptyset$ olup $\left(\bigcup_{y \in M} g(y,x)\right) \bigcap V_k(x) = \emptyset$ dir. Öyleyse $x \notin \overline{\bigcup_{y \in M} g(y,x)}$ dir.

Böylece g monoton Hausdorff' luk operatörü olup X uzayı monoton Hausdorff 'tur.

3.2.7. Sonuç

Birinci sayılabilir bir X topolojik uzayı için aşağıdakiler denktir:

i) X monoton Hausdorff uzaydır.
ii) X düzenli uzaydır.

Teorem 3.2.6 nın hiçbir hipotezi kaldırılamaz. Yani birinci sayılabilir uzay olup düzenli olmayan uzay veya düzenli uzay olup birinci sayılabilir olmayan uzaylar monoton Hausdorff olmak zorunda değildir. Örnekler ile görelim.

Aşağıdaki örnek ile birinci sayılabilir T_1-uzayların monoton Hausdorff olmak zorunda olmadığı görülecektir.

3.2.8. Örnek

$\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi, $\tau = \{ A \subseteq \mathbb{N} : A = \emptyset$ veya A^c sonlu $\}$ şeklinde tanımlanan sonlu tümleyenler topolojisi ile birinci sayılabilir uzaydır. Fakat düzenli uzay olmadığından monoton Hausdorff uzay değildir.

Önce, $\mathbb{N}$ nin bu topoloji ile birinci sayılabilir olduğunu görelim. Her $n \in \mathbb{N}$ için $B_n = \{ m \in \mathbb{N} : m \geq n \}$ olmak üzere $\mathcal{B} = \{ B_n : n \in \mathbb{N} \}$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $n \in B_n \in \tau$ dır. $T \subseteq \mathbb{N}$ açık ve $n \in T$ olsun. $T \in \tau$ ve $T \neq \emptyset$ olduğundan T^c sonlu olup bir en büyük elemanı vardır. Bu en büyük elemana k diyelim. Açıktır ki $B_{k+1} \subseteq T$ ve $n > k$ dır. O halde $n \in B_{k+1} \subseteq T$ olacak şekilde bir $B_{k+1} \in \mathcal{B}$ vardır. $\mathcal{B}$ ailesi n için bir sayılabilir komşuluklar tabanı olup $(\mathbb{N}, \tau)$ birinci sayılabilirdir. Şimdi $(\mathbb{N}, \tau)$ uzayının Hausdorff olmadığını, dolayısıyla düzenli uzay da olmadığını görelim. $U, V \subseteq \mathbb{N}$ açık ve $U \cap V = \emptyset$ olsun. $U, V \subseteq \mathbb{N}$ açık olduğundan U^c, V^c sonlu; $U \cap V = \emptyset$ olduğundan $U^c \cup V^c = \mathbb{N}$ olup $\mathbb{N}$ sonlu olur ki bu bir çelişkidir. O halde $(\mathbb{N}, \tau)$ uzayının ayrık açık iki altkümesi bulunamadığından Hausdorff uzay değildir. Dolayısıyla düzenli uzay da değildir.

Şimdi de aşağıdaki örnek ile birinci sayılabilir Hausdorff uzayların monoton Hausdorff olmak zorunda olmadığı görülecektir.

3.2.9. Örnek

$X = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y \geq 0\}$,

$P = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y > 0\}$,

$L = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y = 0\}$

olsun. $B(A, r)$, $\mathbb{R}^2$ deki A merkezli r yarıçaplı açık yuvarı göstermek üzere P kümesindeki her bir (x, y) noktasının komşuluğu $0 < \varepsilon < y$ için $B((x, y), \varepsilon)$ olsun. L kümesindeki her bir $(a, 0)$ noktasının komşuluğu ise, $\varepsilon > 0$ olmak üzere,

$\{(a, 0)\} \cup \{\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - a)^2 + y^2 < \varepsilon\} \cap P\}$

biçiminde olsun.

X kümesi üzerinde komşuluklar yardımıyla üretilen bu topoloji τ ile gösterilsin. X uzayı bu topolojiyle birinci sayılabilir bir Hausdorff uzaydır. Fakat düzenli uzay olmadığından monoton Hausdorff uzay değildir.

Öncelikle (X, τ) topolojik uzayının birinci sayılabilir uzay olduğunu görelim. $A = (a, b)$ olmak üzere

$$U(A,n)=\begin{cases} B(A,\frac{1}{n}) & ;b>0 \\ \{A\}\bigcup\left(\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:(x-a)^2+y^2<\frac{1}{n}\}\bigcap P\right) & ;b=0\end{cases}$$

olsun. $\mathcal{U}$ = { U(A, n) : n $\in\mathbb{N}$ } ailesi A noktasının sayılabilir bir komşuluklar tabanıdır. Gerçekten;

A ∈ U, U ∈ τ olsun.

- Eğer b = 0 ise;

  $A\in\{A\}\bigcup\left(\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:(x-a)^2+y^2<\varepsilon\}\bigcap P\right)\subseteq U$ olacak biçiminde bir $\epsilon>0$ vardır. $\frac{1}{\varepsilon}\leq n_0$ olacak biçimde bir $n_0\in\mathbb{N}$ alınırsa $\frac{1}{n_0}\leq\varepsilon$ olup $U(A, n_0)\subseteq U$ dur.

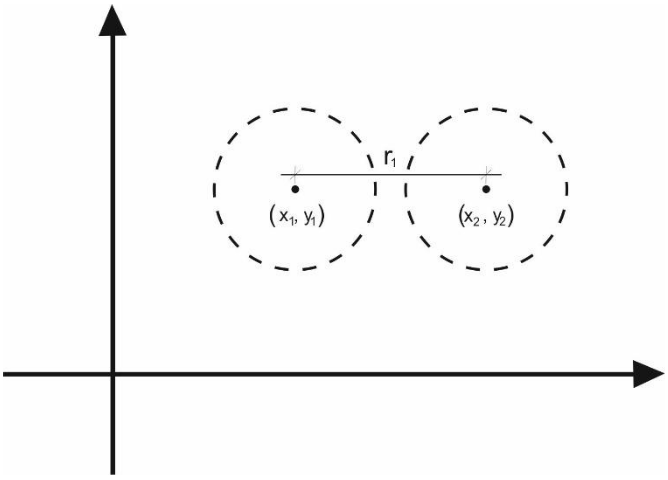
- Eğer b > 0 ise;

  $A\in B(A,\varepsilon)\subseteq U$ olacak biçimde bir $\epsilon>0$ vardır. $\frac{1}{\varepsilon}\leq n_0$ olacak biçimde bir $n_0\in\mathbb{N}$ alınırsa $B(A,\frac{1}{n_0})\subseteq B(A,\epsilon)\subseteq U$ olup $U(A, n_0)\subseteq U$ dur. Böylece
  $\mathcal{U}$ = { U(A, n) : n $\in\mathbb{N}$ } ailesi A noktasının sayılabilir bir komşuluklar tabanıdır.

Şimdi (X, τ) uzayının Hausdorff olduğunu görelim. (x_1, y_1), $(x_2, y_2)\in X$ ve $(x_1, y_1)\neq(x_2, y_2)$ olsun.

1.durum: $y_1, y_2>0$ ise; yani $(x_1, y_1), (x_2, y_2)\in P$ ise;

$r_1=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ olsun.



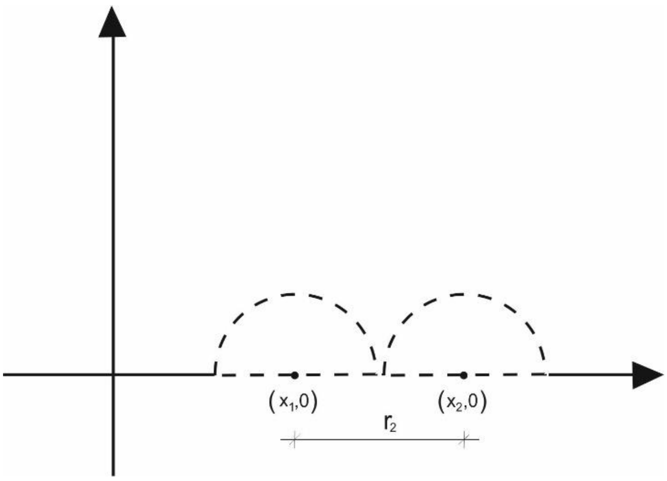
Şekil 3.1. Durum 1 in şekli

$0 < \lambda_1 < \min\{y_1, y_2, \frac{r_1}{2}\}$ olmak üzere

B((x_1, y_1), λ_1) ve B((x_2, y_2), λ_1) kümeleri aranılan ayrık açık komşuluklardır.

2. durum: $y_1 = 0 = y_2$ ise; yani $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in L$ ise;

$r_2 = |x_1 - x_2|$ olsun.

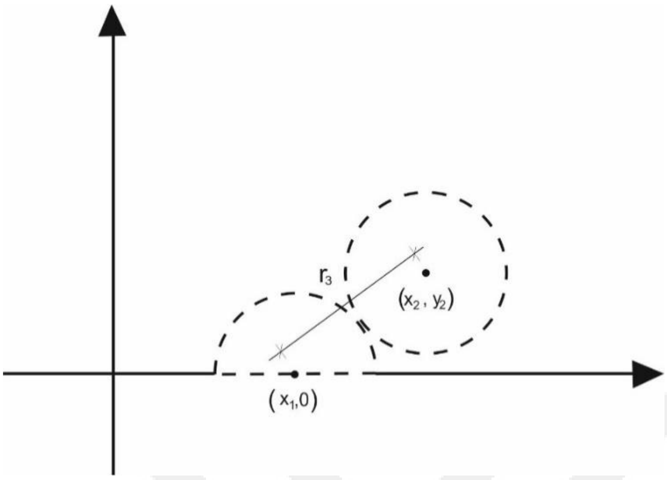


Şekil 3.2. Durum 2 nin şekli

$\left(B((x_1, 0), \frac{r_2}{2}) \cap P \right) \cup \{ (x_1, 0)\}$ ve $\left(B((x_2, 0), \frac{r_2}{2}) \cap P \right) \cup \{ (x_2, 0)\}$ kümeleri aranılan ayrık açık komşuluklardır.

3.durum: $y_1 = 0$ ve $y_2 > 0$ ise; yani $(x_1, 0) \in L$, $(x_2, y_2) \in P$ ise;

$r_3 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_2 - 0)^2}$ olsun.



Şekil 3.3. Durum 3 ün şekli

$\lambda_3 < \min\{\frac{r_3}{2}, y_2\}$ olmak üzere

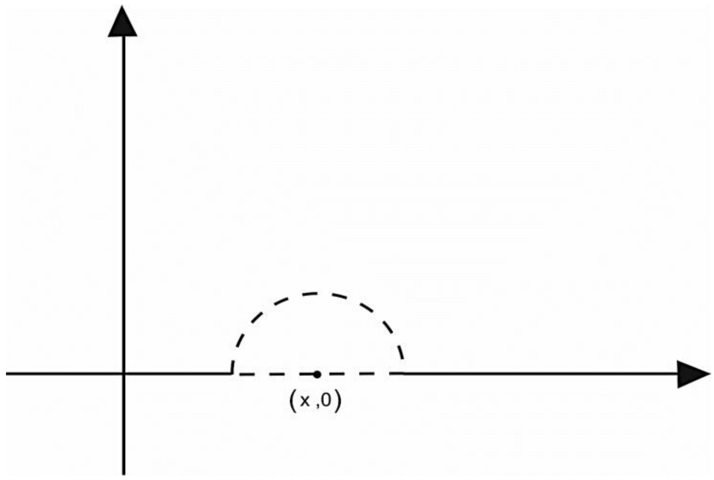
$\big(B((x_1, 0), \lambda_3) \cap P\big) \cup \{(x_1, 0)\}$ ve $B((x_2, y_2), \lambda_3)$ kümeleri aranılan ayrık açık komşuluklardır.

<u>4.durum</u>: $y_1 > 0$ ve $y_2 = 0$ ise; yani $(x_1, y_1) \in P$, $(x_2, 0) \in L$ ise;

3. durumdakine benzer biçimde ayrık açık komşuluklar bulunabilir.

Sonuç olarak (X, τ) uzayı Hausdorff'dur.

Şimdi X uzayının düzenli olmadığını görelim:



Şekil 3.4. Uzayın düzenli olmadığına dair alınan noktanın komşuluğu

$(x, 0) \in L$ ve $r > 0$ olmak üzere $(x, 0)$ noktasının $U((x, 0), r) = \big(B((x, 0), r) \cap P\big) \cup \{(x, 0)\}$ komşuluğunu alalım.

Kabul edelim ki (X, τ) topolojik uzayı düzenli uzay olsun. O halde $(x, 0) \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U((x, 0), r)$ olacak biçimde bir $V \subseteq X$ açığı vardır.

$(x, 0) \in V$, $V \subseteq X$ açık olup $(x, 0) \in U((x, 0), \varepsilon) \subseteq V$ olacak biçimde bir $\varepsilon > 0$ vardır. Bu durumda $\overline{U((x,0),\varepsilon)} \subseteq \overline{V} \subseteq U((x, 0), r)$, yani $\overline{U((x,0),\varepsilon)} \subseteq U((x, 0), r)$ dır.

$(x + \frac{\varepsilon}{2}, 0) \neq (x, 0)$ ve $(x + \frac{\varepsilon}{2}, 0) \in \overline{U((x,0),\varepsilon)}$ olduğundan $(x + \frac{\varepsilon}{2}, 0) \in U((x, 0), r)$ olmasını gerektirir. Fakat bu $U((x, 0), r) \cap L = \{(x, 0)\}$ olmasıyla çelişir. O halde (X, τ) topolojik uzayı düzenli uzay değildir. Dolayısıyla Teorem 3.2.3 den (X, τ) topolojik uzayı monoton Hausdorff değildir.

Şimdi vereceğimiz örnek düzenli uzay olan fakat ne birinci sayılabilir ne de monoton Hausdorff olan bir uzay örneğidir. Bu örnek katmanlanabilir uzay tanımı ve bu uzay ile ilgili teoremleri içerdiğinden Bölüm 4 ü okuduktan sonra incelenmesi önerilir.

3.2.10. Örnek

X uzayı, ω_1 ilk sayılamaz ordinal olmak üzere, $2^{\omega_1} = \{ f \mid f: \omega_1 \to \{-1, 1\}\}$ topolojik grubunun yoğun, sayılabilir alt uzayı ve G de X uzayını içeren 2^{ω_1} topolojik grubunun en küçük alt grubu olsun. Yani $2^{\omega_1} = \{ f \mid f: \omega_1 \to \{-1, 1\} \}$ olmak üzere $X \subseteq 2^{\omega_1}$, X sayılabilir, $\overline{X} = 2^{\omega_1}$ ve

$X \subseteq G \leq 2^{\omega_1}$ dir. Bu durumda G nin her a elemanı $n \in \mathbb{N}$, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ ve $r_1, r_2, \ldots, r_n = 1$ olmak üzere, $a = x_1^{r_1} \bullet \ldots \bullet x_n^{r_n}$ biçimindedir. X uzayı sayılabilir olduğundan G sayılabilirdir. Öte yandan X uzayının katmanlanamaz bir uzay olduğu [10] da gösterilmiştir. Katmanlanamaz uzay olduğundan M_3-uzay değildir. Teorem 4.1.12 den sayılabilir monoton Hausdorff uzaylar M_3-uzay olduğundan X uzayı monoton Hausdorff uzay değildir. Monoton Hausdorff'luk kalıtsal bir özellik olduğundan G monoton Hausdorff değildir. Ayrıca G topolojik grup olduğundan düzenlidir. G birinci sayılabilir uzay olmadığından, düzenli uzay olması monoton Hausdorff olması için yeterli olmamıştır. Monoton Hausdorff uzay olma özelliği kalıtsal olduğundan 2^{ω_1} topolojik grubu da monoton Hausdorff değildir.

Teorem 3.2.2 ve Örnek 3.2.10 dan dolayı aşağıdaki sonuç elde edilir.

3.2.11. Sonuç

X uzayı $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ topolojik uzaylarının Tychonoff çarpımı olsun. Eğer sayılamaz çoklukta X_α uzayı için, $|X_\alpha| \geq 2$ ise X uzayı monoton Hausdorff değildir[3].

İspat

Hipotezdeki şartları sağlayan X uzayı 2^{ω_1} uzayının bir kopyasını içerdiğinden ve monoton Hausdorff uzay olma özelliği kalıtsal olduğundan X uzayı monoton Hausdorff değildir.

Son olarak keyfi sayıdaki monoton Hausdorff uzayların kutu çarpımının monoton Hausdorff olduğunu görelim. Önce kutu çarpımını hatırlayalım.

3.2.12. Tanım

Topolojik uzayların $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ ailesinin Kartezyen çarpım kümesi $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ ile gösterilsin. Her $\alpha \in A$ için G_α, X_α uzayında açık olmak üzere $\prod_{\alpha\in A} G_\alpha$ şeklinde tanımlanan kümeye <u>açık kutu</u> denir. Bütün bu açık kutuları taban olarak kabul eden, $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ üzerinde tanımlanan topolojiye <u>kutu topolojisi</u> denir. $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ uzayı bu kutu topolojisi ile $\square_{\alpha\in A} X_\alpha$ şeklinde gösterilir[3].

3.2.13. Teorem

Eğer her $\alpha \in A$ için X_α topolojik uzayı monoton Hausdorff uzay ise $\square_{\alpha\in A} X_\alpha$ uzayı da monoton Hausdorff uzaydır[3].

İspat

Her $\alpha \in A$ için g_α, X_α uzayı üzerinde monoton Hausdorff'luk operatörü ve $X = \square_{\alpha\in A} X_\alpha$ olsun. $p = (p_\alpha)_{\alpha\in A} \in X$, $x = (x_\alpha)_{\alpha\in A} \in X$ ve $p \neq x$ olsun. Her $\alpha \in A$ için $U_\alpha(p, x) = \begin{cases} X_\alpha, & p_\alpha = x_\alpha; \\ g_\alpha(p_\alpha, x_\alpha), & p_\alpha \neq x_\alpha; \end{cases}$ olmak üzere $g(p, x) = \prod_{\alpha\in A} U_\alpha(p, x)$ biçiminde tanımlanan g fonksiyonu X uzayı üzerinde bir monoton Hausdorff'luk operatörüdür.

$p = (p_\alpha)_{\alpha\in A}$ ve $x = (x_\alpha)_{\alpha\in A}$ X uzayında farklı noktalar olsun. Bu durumda $p_\beta \neq x_\beta$ olacak şekilde bir $\beta \in A$ vardır.

MH1. Her $\alpha \in A$ için $U_\alpha(p, x)$ açık olduğundan $g(p, x)$ p noktasının açık komşuluğudur.

MH2. $p_\beta \neq x_\beta$ ve g_β monoton Hausdorff 'luk operatörü olduğundan $g_\beta(p_\beta, x_\beta) \cap g_\beta(x_\beta, p_\beta) = \emptyset$ olup $g(p, x) \cap g(x, p) = \emptyset$ dir.

MH3. $M \subseteq X$ ve $p = (p_\alpha)_{\alpha\in A} \notin \overline{M}$ olmak üzere $p \notin \overline{\bigcup\{g(x, p) : x \in M\}}$ olduğunu görelim. $p \notin \overline{M}$ ise $p \in U$ ve $U \cap M = \emptyset$ olacak biçimde bir $U \subseteq X$ açığı vardır. U, X üzerindeki kutu topolojiye göre açık ve $p \in U$ olduğundan $p \in \prod_{\alpha\in A} T_\alpha \subseteq U$ olacak biçimde $\overline{T}_\alpha \subseteq X_\alpha$ açık alt kümeleri vardır. $V = U \setminus (\prod_{\alpha\in A} \overline{\bigcup\{g_\alpha(x_\alpha, p_\alpha) : x_\alpha \in X_\alpha \setminus T_\alpha\}})$ olsun. Her $\alpha \in A$ için $p_\alpha \in T_\alpha$ olup her $\alpha \in A$ için $p_\alpha \notin X_\alpha \setminus T_\alpha$ dır. Her $\alpha \in A$ için $T_\alpha \subseteq X_\alpha$ açık olduğundan her $\alpha \in A$ için $p_\alpha \notin \overline{X_\alpha \setminus T_\alpha}$ dır. $p_\alpha \notin \overline{X_\alpha \setminus T_\alpha}$ ve g_α monoton Hausdorff 'luk operatörü olduğundan $p_\alpha \notin \overline{\bigcup\{g_\alpha(x_\alpha, p_\alpha) : x_\alpha \in X_\alpha \setminus T_\alpha\}}$ dır. Şimdi $V \cap \left\{\bigcup\{g(x, p) : x \in M\}\right\} = \emptyset$ olduğunu görelim. Kabul edelim ki $V \cap \left\{\bigcup\{g(x, p) : x \in M\}\right\} \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda $z \in V \cap \left\{\bigcup\{g(x, p) : x \in M\}\right\}$ olacak biçimde bir $z = (z_\alpha)_{\alpha\in A}$ vardır. $z \in \left\{\bigcup\{g(x,p) : x \in M\}\right\}$ olduğundan $z \in g(x', p)$ olacak biçimde bir $x' \in M$ vardır. Böylece $x_\alpha' = p_\alpha$ olacak biçimindeki her $\alpha \in A$ için $z_\alpha \in g_\alpha(x_\alpha', p_\alpha)$ dir. Aynı zamanda $z \in V$ olduğundan her $\alpha \in A$ için $z_\alpha \notin \bigcup\{g_\alpha(x_\alpha, p_\alpha) : x_\alpha \in X_\alpha \setminus T_\alpha\}$ dır. Öyleyse her $\alpha \in A$ için $x_\alpha' \in X_\alpha \setminus T_\alpha$ dır. Böylece her $\alpha \in A$ için $x_\alpha' \notin T_\alpha$ olup $x' \notin U$ dur. $x' \in U$ ve $x' \in M$ olması $U \cap M = \emptyset$ olmasıyla çelişir. O halde $V \cap \left\{\bigcup\{g(x,p) : x \in M\}\right\} = \emptyset$ olup $p \notin \overline{\bigcup\{g(x,p) : x \in M\}}$ dir. Böylece g, X uzayı üzerinde bir monoton Hausdorff'luk operatörü olup X uzayı monoton Hausdorff uzaydır.

Eğer her $\alpha \in A$ için X_α topolojik uzayı kuvvetli monoton Hausdorff uzay ise $\square_{\alpha\in A} X_\alpha$ uzayı da kuvvetli monoton Hausdorff uzaydır. İspatı benzer şekilde olup ek olarak $z \in g(p, x)$ ise $g(z, x) \subseteq g(p, x)$ olduğunun görülmesi yeterlidir. Şöyle ki;

$z \in g(p, x)$ ise her α için $z_\alpha \in g_\alpha(p_\alpha, x_\alpha)$ olup her α için X_α kuvvetli monoton Hausdorff uzay olduğundan her α için $g_\alpha(z_\alpha, x_\alpha) \subseteq g_\alpha(p_\alpha, x_\alpha)$ dır. Her α için $g_\alpha(z_\alpha, x_\alpha) \subseteq g_\alpha(p_\alpha, x_\alpha)$ olduğundan $g(z, x) \subseteq g(p, x)$ dır.

Teorem 3.2.6 birinci sayılabilir uzaydan, her noktada doğrusal sıralı komşuluklar tabanına sahip, Davis tarafından lob-uzay diye tanımlanan, bir uzaya genişletilebilir. İspatı da benzer şekildedir[11].

3.2.14. Tanım

X uzayının her x noktasının " $\supseteq$" ters içerme bağıntısına göre doğrusal sıralı bir komşuluklar tabanı varsa, X uzayına lob-uzay denir.

3.2.15 Teorem

Düzenli lob-uzayları monoton Hausdorff' dur[3].

Şimdi ise Al-Bsoul tarafından ispatı verilen, bir topolojik uzayın açık öz alt kümelerinin monoton Hausdorff olması durumunda uzayın kendisinin de monoton Hausdorff olduğunu görelim.

3.2.16. Teorem

(X, τ) topolojik uzayının her açık öz alt kümesi monoton Hausdorff uzay ise X uzayı monoton Hausdorff uzaydır[12].

İspat

y_1, y_2, y_3 X uzayında birbirinden farklı noktalar olmak üzere her i = 1,2,3 için $Y_i = X \setminus \{y_i\}$ olsun. X in her açık öz alt uzayı monoton Hausdorff olduğundan her i = 1,2,3 için Y_i üzerinde $g_i : (Y_i \times Y_i) \setminus \Delta_{Y_i} \to \tau_{Y_i} \setminus \{\varnothing\}$ monoton Hausdorff'luk operatörü vardır. $g : (X \times X) \setminus \Delta \to \tau \setminus \{\emptyset\}$ operatörü her x, y ∈ X, x ≠ y için

$$g(x, y) = \begin{cases} g_1(x, y) & ; x \neq y_1 \neq y \\ g_2(x, y_1) & ; x \neq y_2, y = y_1 \\ g_2(y_1, y) & ; x = y_1, y \neq y_2 \\ g_3(x, y) & ; \{x, y\} = \{y_1, y_2\} \end{cases}$$

biçiminde tanımlansın. X uzayı bu operatör ile monoton Hausdorff uzaydır. Şöyle ki;

x, y ∈ X ve x ≠ y olsun.

MH1. $x \in g(x, y) \subseteq X$ açık komşuluktur. Gerçekten; g_1, g_2, g_3 monoton Hausdorff 'luk operatörü olduğundan her biri x noktasının birer açık komşuluğu olup g(x, y) nin tanımından açıktır.

MH2. x ≠ y için $g(x, y) \cap g(y, x) = \emptyset$ dir. Gerçekten;

g_1, g_2, g_3 monoton Hausdorff 'luk operatörü olduğundan

- $x \neq y_1 \neq y_2$ ise $g_1(x,y) \cap g_1(y,x) = \emptyset$;
- $x \neq y_2$ ve $y = y_1$ ise $g_2(x,y_1) \cap g_2(y_1,x) = \emptyset$;
- $x = y_1$ ve $y \neq y_2$ ise $g_2(y_1,y) \cap g_2(y,y_1) = \emptyset$;
- $\{x, y\} = \{y_1,y_2\}$ ise $g_3(x,y) \cap g_3(y,x) = \emptyset$;

olup g(x, y) nin tanımından açıktır.

MH3. M, X uzayının herhangi bir alt kümesi olmak üzere $x \notin \overline{M}$ olduğunda

$x \notin \overline{\bigcup\{g(y,x) : y \in M\}}$ olduğunu görelim. $x \notin \overline{M}$ olsun. $x = y_1$ ve $x \neq y_1$ olmak üzere iki durum vardır.

1.durum: $x = y_1$ ise;

$y_1 \notin \overline{M}$ olup $y_1 \notin \overline{M}^{Y_2}$ dir. $y_2 \notin M$ ve $y_2 \in M$ durumlarını inceleyelim:

a) Eğer $M \subseteq Y_2$ ise yani $y_2 \notin M$ ise;

g_2, Y_2 üzerinde monoton Hausdorff 'luk operatörü olduğundan $y_1 \notin \overline{M}^{Y_2}$ olması

$y_1 \notin \overline{\bigcup\{g_2(y,y_1) : y \in M\}}^{Y_2}$ olmasını gerektirir. $y_1 \in Y_2$ olduğundan

$y_1 \notin \overline{\bigcup\{g_2(y,y_1) : y \in M\}}$ dir. $y_2 \notin M$ olduğundan her $y \in M$ için $y \neq y_2$ olup g operatörünün tanımından $g_2(y,y_1) = g(y,y_1)$ dir. Aynı zamanda $x = y_1$ olduğundan $x \notin \overline{\bigcup\{g(y,x) : y \in M\}}$ dir.

b) $y_2 \in M$ ise;

$$\overline{\bigcup\{g(y,y_1) : y \in M\}} = \overline{\bigcup(\{g(y,y_1) : y \in M \setminus \{y_2\}\} \cup g(y_2,y_1))}$$

$$= \overline{\bigcup\{g(y,y_1) : y \in M \setminus \{y_2\}\}} \cup \overline{g(y_2,y_1)}$$

$$= \overline{\bigcup\{g(y,y_1) : y \in M \setminus \{y_2\}\}} \cup \overline{g_3(y_2,y_1)}$$

dir. Aynı zamanda $y \neq y_2$ biçimindeki her $y \in M$ için $g(y,y_1) = g_2(y,y_1)$ olduğundan ve $y_1 \notin \overline{M}^{Y_2}$ olduğundan $y_1 \notin \overline{\bigcup\{g_2(y,y_1) : y \in M \setminus \{y_2\}\}}^{Y_2}$ dir. $y_1 \in Y_2$ olduğundan $y_1 \notin \overline{\bigcup\{g_2(y,y_1) : y \in M \setminus \{y_2\}\}}$ dir. Aynı zamanda $y_1 \in g_3(y_1,y_2)$ ve $g_3(y_1,y_2) \cap g_3(y_2,y_1) = \emptyset$ olduğundan $y_1 \notin \overline{g_3(y_2,y_1)}$ dir. Öyleyse $y_1 \notin \overline{\bigcup\{g(y,y_1) : y \in M\}}$ olup $x = y_1$ olduğundan $x \notin \overline{\bigcup\{g(y,x) : y \in M\}}$ dır.

2.durum: $x \neq y_1$ ise;

y_1 ve y_2 nin M kümesinin elemanı olup olmaması halleri ile ilgili dört farklı durum ortaya çıkar:

a) $y_1, y_2 \in M$ ise;

1. Durum (b) ye benzer biçimde;

$\overline{\bigcup\{g(y,x): y \in M\}} = (\overline{\bigcup\{g_1(y,x): y \in M \setminus \{y_1\}\}}) \cup \overline{g_2(y_1,x)}$ olup böylece

$x \notin \overline{\bigcup\{g(y,x): y \in M\}}$ dir.

b) $y_1 \notin M$, $y_2 \in M$ ise;

Her $y \in M$ için $g(y, x) = g_1(y,x)$ ve g_1, monoton Hausdorff 'luk operatörü

olduğundan $x \notin \overline{\bigcup\{g(y,x): y \in M\}}$ dir.

c) $y_1 \notin M$, $y_2 \notin M$ ise;

2. durum (b) ile benzer şekildedir.

d) $y_1 \in M$, $y_2 \notin M$ için;

- $x = y_2$ ve $y = y_1$ ise;

  $x \notin \overline{M}$ olduğundan $y_2 \notin \overline{M}^{Y_3}$ dir. $y_1, y_2 \in Y_3$ ve g_3, Y_3 üzerinde monoton Hausdorff'luk operatörü olduğundan $g(y, x) = g(y_1, y_2) = g_3(y_1, y_2)$ dir. $y_2 \in g_3(y_2, y_1)$ ve $g_3(y_1, y_2) \cap g_3(y_2, y_1) = \emptyset$ olduğundan $y_2 \notin \overline{g_3(y_1,y_2)}^{Y_3}$ dir. $y_2 \in Y_3$ olduğundan her $y \in M$ için $y_2 \notin \overline{g_3(y_1,y_2)}$ dir. Böylece $x \notin \overline{g(y,x)}$ dir.
- $x \neq y_2$ ve $y = y_1$ ise;

  $x \neq y_2$ olmak üzere her $y = y_1 \in M$ için $g(y, x) = g_2(y, x) = g_2(y_1, x)$ dir. $x \notin \overline{M}$ ve g_2, Y_2 üzerinde monoton Hausdorff 'luk operatörü olduğundan $x \notin \overline{\bigcup\{g_2(y,x): y \in M\}}^{Y_2}$ dir. $x \in Y_2$ olduğundan $x \notin \overline{\bigcup\{g_2(y,x): y \in M\}}$ olup $x \notin \overline{\bigcup\{g_2(y,x): y \in M\}}^{Y_2}$ dir.
- $x = y_2$ ve $y \neq y_1$ ise;

  $x \notin \overline{M}$ olduğundan $y_2 \notin \overline{M}^{Y_1}$ dır. Böylece g_1, Y_1 üzerinde monoton Hausdorff 'luk operatörü olduğundan $y_2 \notin \overline{\bigcup\{g_1(y,y_2): y \in M\}}^{Y_1}$ dır. $y_2 \in Y_1$ olduğundan

$y_2 \notin \overline{\bigcup\{g_1(y,y_2): y \in M\}}$ dir. $y \neq y_1$ için g(y, x) = g(y, y_2) = g_1(y, y_2) olduğundan $x \notin \overline{\bigcup\{g(y,x): y \in M\}}$ dir.

- $x \neq y_2$ ve $y \neq y_1$ ise;

  Her y ∈ M için g(y, x) = g_1(y, x) olup g_1 monoton Hausdorff 'luk operatörü olduğundan $x \notin \overline{\bigcup\{g_1(y,x): y \in M\}}$ dir.

Böylece X monoton Hausdorff uzaydır.

Şimdi monoton Hausdorff uzay olma özelliğinin kapalı fonksiyonlar altında korunmadığını bir örnekle inceleyelim. İnceleyeceğimiz örneğin daha iyi anlaşılabilmesi için bölüm uzayı ve bölüm dönüşümü kavramlarını hatırlatalım.

X bir topolojik uzay, F_1, F_2, … , F_n X in kapalı, ayrık altkümeleri olsun. O zaman $\mathcal{P} = \{ F_1, F_2, \ldots, F_n \} \cup \{ \{x\}: x \in X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} F_i \}$ ailesi X uzayının bir ayrışımıdır. Bu ayrışımın tanımladığı denklik bağıntısı E olsun. Yani;

$x\,E\,y \Leftrightarrow (\exists i: 1 \leq i \leq n: \{x, y\} \subseteq F_i)$ veya $(x, y \in X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} F_i$ ve $x = y)$ dir. Böylece denklik sınıflarının kümesi; $p_i \in F_i$ olmak üzere

$X|_E = \{ [p_1], [p_2], \ldots, [p_n] \} \cup \{ [x]: x \in X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} F_i \}$ dir. Böylece

$Y = \{ p_1, p_2, \ldots, p_n \} \cup \{x \in X: x \notin \bigcup_{i=1}^{n} F_i \}$ denilirse $X \setminus E \simeq Y$ olduğunu görmek kolaydır.

$$f: X \to Y : x \to f(x) = \begin{cases} p_i; & \exists! i : x \in F_i \text{ ise} \\ x; & x \notin \bigcup_{i=1}^{n} F_i \text{ ise} \end{cases}$$

olmak üzere Y üzerine f fonksiyonunu sürekli yapan en ince topolojiyi yani bölüm topolojisini koyalım. O zaman Y üzerindeki topoloji τ_Y olmak üzere $\tau_Y = \{ V \subseteq Y: f^{-1}(V) \subseteq X \text{ açık}\}$ dir. Şimdi f nin kapalı olduğunu görelim. K ⊆ X kapalı olsun. $f^{-1}f(K) = \bigcup_{i=1}^{n}\{F_i : F_i \cap K \neq \varnothing\} \cup K$ dır. Şöyle ki;

- $x \in f^{-1}f(K)$ olsun. $f(x) \in f(K)$ dır. $x \notin \bigcup_{i=1}^{n}\{F_i : F_i \cap K \neq \emptyset\}$ olduğunda $x \notin \bigcup_{i=1}^{n} F_i$ dir. Çünkü; $x \in \bigcup_{i=1}^{n} F_i$ olduğunda $F_j \cap K = \emptyset$ ve $x \in F_j$ olacak biçimde bir $j > 0$ sayısı vardır. Böylece $f(x) = p_j$ olup $f(x) \in f(K)$ olduğundan $p_j \in f(K)$ dır. Bu durumda $f(z) = p_j$

  olacak biçimde bir $z \in K$ vardır. Buradan $z \in F_j$ olup $F_j \cap K = \emptyset$ olması ile çelişir. O halde $x \notin \bigcup_{i=1}^{n} F_i$ dir. Böylece $f(x) = x$ olup $f(x) \in f(K)$ olduğundan $x \in f(K)$ dır. Bu durumda $x = f(z)$ olacak biçimde bir $z \in K$ vardır. $x \neq p_1, p_2, \ldots, p_n$ olduğundan

  $f(z) = z$ olmak zorundadır. Böylece $x = z \in K$ olup $x \in K$ dır.

- $x \in K$ ise $K \subseteq f^{-1}f(K)$ olduğundan $x \in f^{-1}f(K)$ dır. $x \in \bigcup_{i=1}^{n}\{F_i : F_i \cap K \neq \emptyset\}$ ise; $F_j \cap K \neq \emptyset$ ve $x \in F_j$ olacak biçimde bir j sayısı vardır. $F_j \cap K \neq \emptyset$ olduğundan

  $f(z) = p_j$ olacak biçimde bir $z \in F_j \cap K$ vardır. Ayrıca $x \in F_j$ olduğundan $f(x) = p_j$ olup

  $f(x) = f(z)$ dir. $z \in K$ olduğundan $f(z) \in f(K)$ olup $x \in f^{-1}f(K)$ dır.

$f^{-1}f(K) = \bigcup_{i=1}^{n}\{F_i : F_i \cap K \neq \emptyset\} \cup K$ olduğundan $f^{-1}f(K) \subseteq X$ kapalı olup $f(K) \subseteq Y$ kapalıdır. Böylece f dönüşümü kapalıdır.

Şimdi vereceğimiz monoton Hausdorff uzay olma özelliğinin kapalı fonksiyonlar altında korunmadığına dair olan örnek, yukarıda verdiğimiz bölüm uzayı ve bölüm dönüşümünün $i = 1, 2$ halini içerir.

3.2.17. Örnek

X uzayı monoton Hausdorff uzay olsun, fakat normal uzay olmasın. (Örnek 3.3.2 de incelenecek olan Niemytzki düzlemi böyle bir uzaydır.) X normal uzay olmadığından X uzayının açıklar ile ayrıştırılamayan ayrık iki A ve B kapalı altkümesi vardır. Herhangi bir $a \in A$ ve $b \in B$ alalım. $Y = \{a, b\} \cup \{x : x \in X \setminus (A \cup B)\}$ olmak üzere

$$f: X \to Y \; ; \; p \to f(p) = \begin{cases} a; & p \in A \text{ ise}, \\ b; & p \in B \text{ ise}, \\ p; & p \notin A \cup B \text{ ise}, \end{cases}$$

biçiminde tanımlansın. Y üzerine f dönüşümünü sürekli kılan en ince $\tau_Y = \{ V \subseteq Y : f^{-1}(V) \subseteq X \text{ açık}\}$ bölüm dönüşümünü konduralım. Önceki sayfada gösterildiği üzere f bölüm dönüşümü kapalıdır. Y uzayının monoton Hausdorff uzay olmadığını söylemek için Hausdorff olmadığını görmek yeterlidir. Kabul edelim ki Y Hausdorff uzay olsun. Bu durumda $a, b \in Y$, $a \neq b$ olduğundan $a \in U$, $b \in V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak biçimde $U, V \subseteq Y$ açıkları vardır. f nin tanımından $f(A) = \{a\}$, $f(B) = \{b\}$ olduğundan $f(A) \subseteq U$ ve $f(B) \subseteq V$ olup $A \subseteq f^{-1}(U)$, $B \subseteq f^{-1}(V)$ dir.$f^{-1}(U), f^{-1}(V) \subseteq X$ açık ve $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = \emptyset$ olduğundan bu A ve B nin açıklar ile ayrıştırılamaması ile çelişir. Dolayısıyla Y uzayı Hausdorff değildir.

3.3. Monoton Hausdorff ve Monoton Normal Uzaylar Arasındaki İlişki ve Örnekler

Aşağıdaki teoremle monoton normal ve monoton Hausdorff uzaylar arasındaki ilişki verilmiştir.

3.3.1. Teorem

Monoton normal her uzay monoton Hausdorff uzaydır[3].

İspat

X monoton normal uzay, H X uzayı üzerinde Teorem 3.1.2 (c) deki koşulları sağlayan bir monoton normallik operatörü olsun. $x \neq y$ biçimindeki her $x, y \in X$ için $g(x, y) = H(x, \{y\})$ biçiminde tanımlansın. İddia ediyoruz ki g X uzayı üzerinde bir monoton Hausdorff 'luk operatörüdür. Şöyle ki;

$p, q \in X$ için $p \neq q$ olsun.

MH1. $p \in H(p, \{q\}) \subseteq X$ açık olduğundan $g(p, q)$ X uzayında p nin açık bir komşuluğudur.

MH2. Teorem 3.1.2. c (iii) den $g(p, q) \cap g(q, p) = \emptyset$ dir.

MH3. M, X uzayının herhangi bir alt kümesi olsun. $p \notin \overline{M}$ olduğunda

$p \notin \overline{\bigcup\{g(q,p): q \in M\}}$ olduğunu görelim. $p \notin \overline{M}$ olsun. Kabul edelim ki $p \in \overline{\bigcup\{g(q,p): q \in M\}}$ olsun. $p \notin \overline{M}$ olduğundan $p \in U$ ve $U \cap M = \emptyset$ olacak biçimde bir $U \subseteq X$ açığı vardır. O halde $p \notin U^c$, $U^c \subseteq X$ kapalıdır. Teorem 3.1.2.c (i) den $p \in H(p, U^c) \subseteq (U^c)^c = U$ dur. Böylece $U \cap M = \emptyset$ olduğundan $H(p, U^c) \cap M = \emptyset$ dir. Ayrıca $p \in \overline{\bigcup\{g(q,p): q \in M\}}$ olduğundan p noktasını içeren her açıkla $\bigcup\{g(q,p): q \in M\}$ kümesinin arakesiti boş kümeden farklı olup $H(p, U^c) \cap \bigcup\{g(q,p): q \in M\} \neq \emptyset$ dir. O halde $H(p, U^c) \cap g(q_0, p) \neq \emptyset$ olacak biçimde bir $q_0 \in M$ vardır. $U \cap M = \emptyset$ ve $q_0 \in M$ olduğundan $q_0 \notin U$ dur. Böylece $q_0 \in U^c$, yani $\{q_0\} \subseteq U^c$ olup Teorem 3.1.2.c (ii) den $H(p, U^c) \subseteq H(p, \{q_0\}) = g(p, q_0)$ dır. Bu ise $g(p, q_0) \cap g(q_0, p) \neq \emptyset$ olmasını gerektirir ki bu da Teorem 3.1.2 c (iii) ile çelişir. O halde $p \notin \overline{M}$ iken $p \notin \overline{\bigcup\{g(q,p): q \in M\}}$ dir.

Bu teoremin tersi genelde doğru değildir. Yani monoton Hausdorff her uzay monoton normal olmak zorunda değildir. Aşağıda verilen Niemytzki düzlemi ve Sorgenfrey düzlemi bunun en iyi örnekleridir.

Önce Niemytzki düzlemini verelim.

$L = \{ (x, y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} : y \geq 0\}$,

$L_1 = \{ (x, 0): x \in \mathbb{R} \}$ ve $L_2 = L \setminus L_1$

olsun. Her $(x, y) \in L$ için (x, y) noktasının $\mathcal{U}((x, y))$ komşuluklar tabanını şöyle tanımlayalım: $(x, y) \in L$ alalım.

- $y = 0$ ise, yani $(x, 0) \in L_1$ ise;

  her $r > 0$ için $U((x, 0), r)$ x-eksenine $(x, 0)$ noktasında teğet olan r-yarıçaplı çemberin

  içinde kalan L içindeki tüm noktaların kümesi olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için

  $U_n((x, 0)) = U((x, 0), \frac{1}{n}) \cup \{(x, 0)\}$ biçiminde tanımlansın.

- $y > 0$ ise, yani $(x, y) \in L_2 = L \setminus L_1$ ise;

her $r > 0$ için U((x, y), r) kümesi (x, y) merkezli, r-yarıçaplı çemberin içindeki L

içinde kalan tüm noktaların kümesi olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için

$U_n((x, y)) = U((x, y), \frac{1}{n})$ biçiminde tanımlansın.

Böylece her $(x, y) \in L$ için $\mathcal{U}((x, y)) = \{ U_n((x, y), n) : n \in \mathbb{N} \}$ ailesi tanımlanmış oldu. Her $(x, y) \in L$ için $\mathcal{U}((x, y))$ ailesi (x, y) noktasının bir komşuluklar tabanıdır. Gerçekten; $A = (x_0, y_0)$ ve $A \in T \subseteq L$ açık olsun.

- $y_0 = 0$ ise;

  $A \in \{A\} \bigcup U((x,0),\varepsilon) \subseteq T$ olacak biçimde bir $\varepsilon > 0$ vardır. $\frac{1}{\varepsilon} \leq n_0$ olacak biçimde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ alınırsa $\frac{1}{n_0} \leq \varepsilon$ olup $U_{n_0}((x_0,0)) \subseteq U_\varepsilon((x_0,0)) \subseteq T$ dir.

- $y_0 > 0$ ise;

  $A \in U((x_0,y_0),\varepsilon) \subseteq T$ olacak biçimde bir $\varepsilon > 0$ vardır. $\frac{1}{\varepsilon} \leq n_0$ olacak biçimde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ alınırsa $\frac{1}{n_0} \leq \varepsilon$ olup $U_{n_0}((x_0,y_0)) \subseteq U_\varepsilon((x_0,y_0)) \subseteq T$ dir.

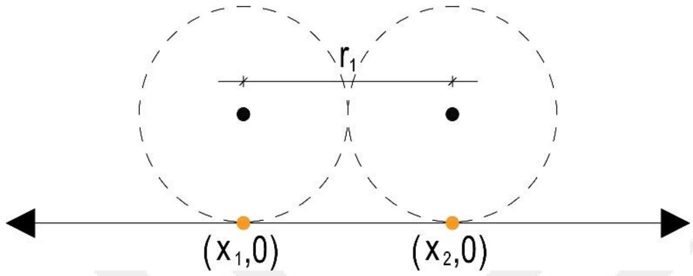
  Böylece $\mathcal{U}(A) = \{ U_n((x_0,y_0), n) : n \in \mathbb{N} \}$ ailesi $A = (x_0, y_0)$ noktasının bir komşuluklar tabanıdır. L kümesi üzerinde yukarıdaki biçimde tanımlanan komşuluklar tabanı yardımıyla üretilen topolojik uzay Niemytzki düzlemi olarak adlandırılır. L kümesi üzerinde tanımlanan bu topoloji bundan sonra τ_N ile gösterilecek.

3.3.2. Örnek

L Niemytzki düzlemi monoton Hausdorff uzaydır, fakat monoton normal uzay değildir.

Önce Niemytzki düzleminin monoton Hausdorff uzay olduğunu görelim. A= (x_1, y_1), D = $(x_2, y_2) \in$ L için L uzayı üzerinde g: (L × L)\Δ→ τ(L) \ { ∅ } operatörünü aşağıdaki gibi tanımlayalım.

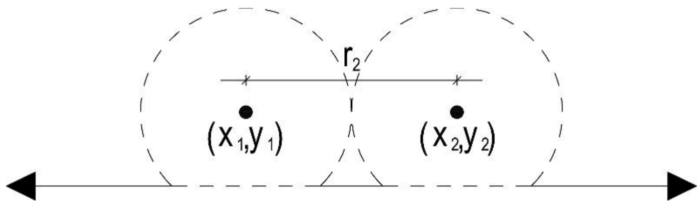
1. Durum: $y_1 = 0 = y_2$ ise; yani A, D ∈ L_1 ise;



Şekil 3.5. Durum 1 in şekli

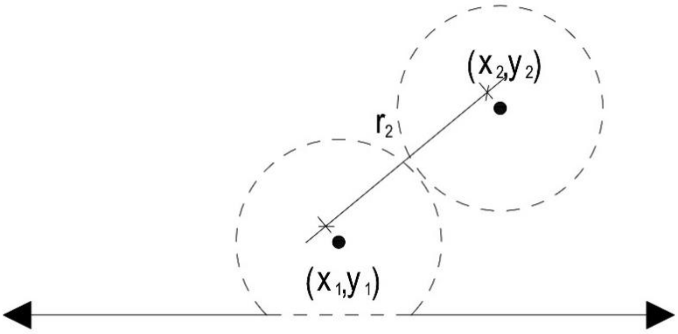
$r_1 = |x_1 - x_2|$ olsun. $\lambda_1 = \frac{r_1}{2}$ olmak üzere g(A, D) = U(A, λ_1) ∪ {A} ve g(D, A) = U(D, λ_1) ∪ {D} olsun.

2. Durum: y_1, $y_2 > 0$ ise; yani A, D ∈ L_2 = L \ L_1 ise;



Şekil 3.6. Durum 2 nin şekli

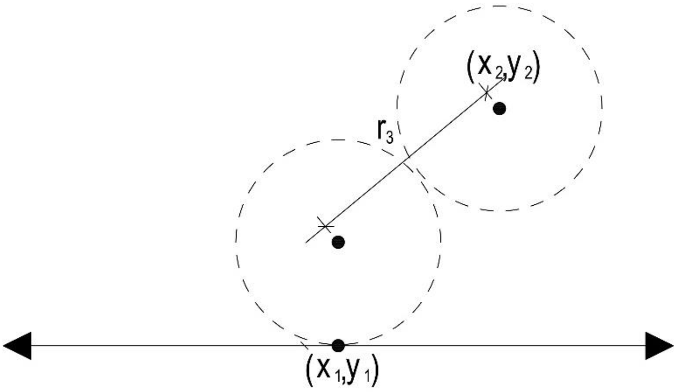
veya



Şekil 3.7. Durum 2 nin alternatif şekli

$r_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ olsun. $\lambda_2 = \frac{r_2}{2}$ olmak üzere g(A, D) = U(A, λ_2) ve g(D, A) = U(D, λ_2) olsun.

3. Durum: $y_1 = 0$ ve $y_2 > 0$ ise; yani $A \in L_1$, $D \in L_2$ ise;



Şekil 3.8. Durum 3 ün şekli

$r_3 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + y_2^{\,2}}$ olsun. $\lambda_3 = \frac{r_3}{4}$ olmak üzere g(A, D) = U(A, $2\lambda_3$) ∪ {A} ve g(D, A) = U(D, λ_3) olsun.

4. Durum: $y_1 > 0$ ve $y_2 = 0$ ise; yani $A \in L_2$, $D \in L_1$ ise;

3. Duruma benzer biçimde tanımlanabilir.

M, Öklid uzayının herhangi bir alt kümesi olsun. M nin x-ekseni üzerindeki tüm elemanlarının kümesi N_M ile gösterilsin ve $R_M = M \setminus N_M$ diyelim.

Yukarıdaki şekilde tanımlanan g operatörünün MH1 ve MH2 şartlarını sağladığı açıktır.

Şimdi ise g operatörünün MH3 şartını sağladığını görelim.

$A \notin \overline{M}$ olduğunda $A \notin \overline{\bigcup_{E\in M} g(E,A)}$ olduğunu görelim. $A \notin \overline{M}$ ise $A \in U$ ve $U \cap M = \emptyset$ olacak biçimde bir U açığı vardır.

1. Durum: $A \in U_{r_0} = U(A, r_0) \cup \{A\} \subseteq U$ olacak biçimde bir $r_0 > 0$ vardır. Her $E \in M$ için;

$E \in N_M$ ise; $(U(E, r) \cup \{E\}) \cap (U(A, r_0) \cup \{A\}) = \emptyset$ şartını sağlayan bir r bulunabilir. Benzer şekilde $E \in R_M$ ise; $U(E, r) \cap (U(A, r_0) \cup \{A\}) = \emptyset$ şartını sağlayan bir r bulunabilir. Böylece $U_{r_0} \cap \bigcup_{E\in M} g(E,A) = \emptyset$ olacak biçimde bir

U_{r_0} açığı var olup $A \notin \overline{\bigcup_{E\in M} g(E,A)}$ dir.

2. Durum: $A \in U(A, r_0) \subseteq U$ olacak biçimde bir $r_0 > 0$ vardır. Her $E \in M$ için;

$E \in N_M$ ise; $(U(E, r) \cup \{E\}) \cap U(A, r_0) = \emptyset$ şartını sağlayan bir r bulunabilir. Benzer şekilde $E \in R_M$ ise; $U(E, r) \cap U(A, r_0) = \emptyset$ şartını sağlayan bir r bulunabilir. Böylece $U(A, r_0) \cap \bigcup_{E\in M} g(E,A) = \emptyset$ olacak biçimde

bir $U(A, r_0)$ açığı var olup $A \notin \overline{\bigcup_{E\in M} g(E,A)}$ dir.

3. Durum: $A \in U_{r_0} = U(A, r_0) \cup \{A\} \subseteq U$ olacak biçimde bir $r_0 > 0$ vardır. Her $E \in M$ için;

$E \in N_M$ ise; $(U(E, r) \cup \{E\}) \cap (U(A, r_0) \cup \{A\}) = \emptyset$ şartını sağlayan bir r bulunabilir. Benzer şekilde $E \in R_M$ ise; $U(E, r) \cap (U(A, r_0) \cup \{A\}) = \emptyset$ şartını sağlayan bir r bulunabilir. Böylece $U_{r_0} \cap \bigcup_{E \in M} g(E, A) = \emptyset$ olacak biçimde bir U_{r_0} açığı var olup $A \notin \overline{\bigcup_{E \in M} g(E, A)}$ dir.

4. Durum: 2. Duruma benzerdir.

Niemytzki düzlemi monoton Hausdorff uzaydır. Şimdi ise bu düzleminin normal uzay olmadığını görelim. $L_1 = \{ (x, 0): x \in \mathbb{R} \}$ Niemytzki düzleminin kapalı bir alt kümesidir. Şöyle ki; L_1 in kapalı olduğunu görmek için hiçbir yığılma noktasının olmadığını görmek yeterlidir. Yani $\tilde{L}_1 = \emptyset$ olduğunu görmeliyiz. $\tilde{L}_1 \neq \emptyset$ olduğunu kabul edelim. $(x, y) \in L$ olmak üzere $(x, y) \in \tilde{L}_1$ olsun.

- $y = 0$ ise; yani $(x, y) = (x, 0) \in L_1$ olması durumunda;

  $(x, 0) \in \tilde{L}_1$ ise her $T \subseteq L$ açık ve $(x, 0) \in T$ için $(T \setminus \{(x, 0)\}) \cap L_1 \neq \emptyset$ dir. Yani x-eksenine $(x, 0)$ noktasında teğet olan ve L içinde kalan $\frac{1}{n} > 0$ yarıçaplı bütün $U((x,0),\frac{1}{n})$ çemberleri için $\left(U((x,0),\frac{1}{n}) \bigcup \{(x,0)\}\right) \setminus \{(x,0)\} \bigcap L_1 \neq \emptyset$ dir. Yani $U((x,0),\frac{1}{n}) \cap L_1 \neq \emptyset$ olur ki bu bir çelişkidir. Çünkü $U((x,0),\frac{1}{n})$ kümesi x-ekseni üzerinde hiçbir nokta içermez.

- $y \neq 0$ ise; yani $(x, y) \in L_2$ olması durumunda;

  $(x, y) \in \tilde{L}_1$ ise her $T \subseteq L$ açık ve $(x, y) \in T$ için $(T \setminus \{(x, y)\}) \cap L_1 \neq \emptyset$ dir. Yani her $n \in \mathbb{N}$ için (x, y)- merkezli, $\frac{1}{n}$ yarıçaplı çemberin içindeki noktalardan L içinde kalanların kümesi olan $U((x,y),\frac{1}{n})$ için $U((x,y),\frac{1}{n})\setminus\{(x, y)\} \cap L_1 \neq \emptyset$ dir. Ancak $\frac{1}{n_0} < y$ biçimindeki bir $n_0 \in \mathbb{N}$ için $U((x,y),\frac{1}{n_0}) \bigcap L_1 = \emptyset$ olacağından bu bir çelişkidir.

Böylece $\tilde{L}_1 = \emptyset$ olup her $P \subseteq L_1$ için $P = \emptyset$ dir. O halde L_1 in her P altkümesi de kapalıdır.

Şimdi L_1 in herhangi bir P altkümesini alalım. $P \subseteq L_1$ ve $L_1 \setminus P \subseteq L_1$ olduğundan P ve $L_1 \setminus P$ kümeleri kapalıdır.

L uzayının normal olduğunu kabul edelim. Öyleyse ayrık olan A ve $L_1 \setminus A$ kümeleri ayrık açık altkümelerle ayrılabilir. O halde; her $A \subseteq L_1$ için $A \subseteq U_A$, $L_1 \setminus A \subseteq V_A$ ve $U_A \cap V_A = \emptyset$ olacak biçimde U_A, V_A açıkları vardır.

Q rasyonel sayılar kümesini göstermek üzere $C = \{(p, q) \in Q \times Q: q > 0\}$ olsun. L kümesindeki her açık C den en az bir nokta içerdiğinden C, L içinde yoğundur.

Her $P \subseteq L_1$ için $C_P = U_P \cap C$ diyelim. Şimdi $P \neq R$ biçimindeki her $P, R \subseteq L_1$ için $C_P \neq C_R$ olduğunu görelim. $P, R \subseteq L_1$ ve $P \neq R$ olsun. $P \setminus R \neq \emptyset$ olduğunu kabul edelim. Eğer $R \setminus P \neq \emptyset$ ise aynı ispat tekrarlanır. $P \setminus R \subseteq U_P \cap V_R$ olduğundan $U_P \cap V_R \neq \emptyset$ dir. $U_P, V_R \subseteq L_1$ açık olduğundan $U_P \cap V_R \subseteq L_1$ açıktır. $\emptyset \neq U_P \cap V_R \subseteq L_1$ açık ve $\overline{C} = L$ olduğundan $(U_P \cap V_R) \cap C \neq \emptyset$ dir. $(U_P \cap C) \cap V_R \neq \emptyset$ olup $C_P \cap V_R \neq \emptyset$ dir. Aynı zamanda $U_R \cap V_R = \emptyset$ ise $V_R \subseteq U_R^c$ olduğundan $\emptyset \neq C_P \cap V_R \subseteq C_P \cap U_R^c$ olup $C_R = C \cap U_R$ olduğundan da $C_P \cap U_R^c \subseteq C_P \setminus C_R$ dir. Böylece $C_P \neq C_R$ olup bu bir çelişkidir. Çünkü c Continuum' u göstermek üzere L_1 in 2^c farklı alt kümesi varken C nin sadece c farklı alt kümesi vardır, yani 2^c çoklukta P varken c çoklukta C_P vardır ve bu bir çelişkidir. O halde L uzayı normal değildir. Dolayısıyla monoton normal uzay da değildir.

$\mathbb{R}^2$ üzerinde tabanı $\mathcal{B} = \{ [a, b) \times [c, d): a, b, c, d \in \mathbb{R}, a < b, c < d \}$ olan topolojiye Sorgenfrey düzlemi denir. Şimdi de Sorgenfrey düzleminin monoton Hausdorff uzay olduğunu fakat monoton normal uzay olmadığını görelim. Normal uzay olmadığını söyleyebilmek için önce aşağıdaki lemmayı verelim. Bu lemma diğer birçok kaynağın yanısıra [9] da da bulunabilir.

Jones’ ın Lemması:

X bir topolojik uzay ve D X in yoğun bir altuzayı olmak üzere, X uzayının $|K| \geq 2^{|D|}$ olacak biçimde kapalı ve ayrık bir K altuzayı varsa X uzayı normal değildir.

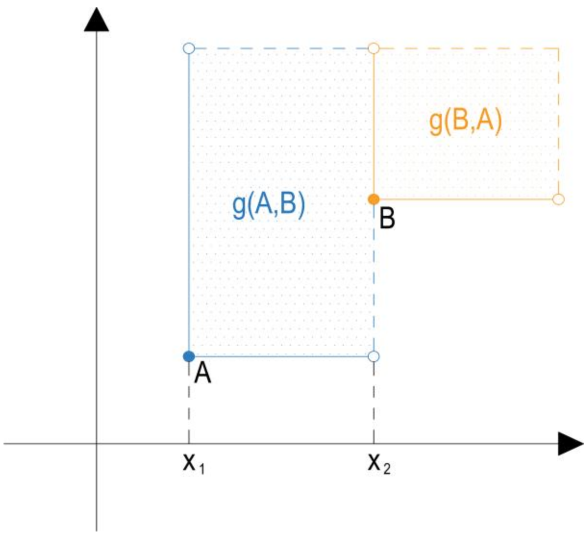
Özel olarak $|D| \leq \aleph_0$ için, eğer X ayrılabilir bir topolojik uzay ve X uzayının $|K| \geq c$ olacak biçimde kapalı, ayrık bir K altkümesi varsa, Jones’ ın lemmasından X uzayı normal değildir. (Burada c $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinin kardinalitesidir.) S, Sorgenfrey doğrusu ve Q, rasyonel sayılar kümesini göstermek üzere $S = \overline{Q}$ ve Q sayılabilir olduğundan S uzayı ayrılabilirdir. Ayrılabilirlik c çarpımsal olduğundan ayrılabilir iki uzayın çarpımı da ayrılabilirdir. Böylece $S \times S$, Sorgenfrey düzlemi ayrılabilirdir. Öyleyse Jones’ ın lemmasından $S \times S$ Sorgenfrey düzleminin $|K| \geq c$ olacak biçimde kapalı, ayrık K altuzayı bulunamaz.

3.3.3. Örnek

Sorgenfrey düzlemi monoton Hausdorff uzaydır, fakat monoton normal uzay değildir.

$A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2) \in S \times S$ ve $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$ için $S \times S$ üzerinde $g: [(S \times S) \times (S \times S)]\backslash\Delta \to \tau(S \times S) \backslash\{\emptyset\}$ operatörünü aşağıdaki gibi tanımlayalım.

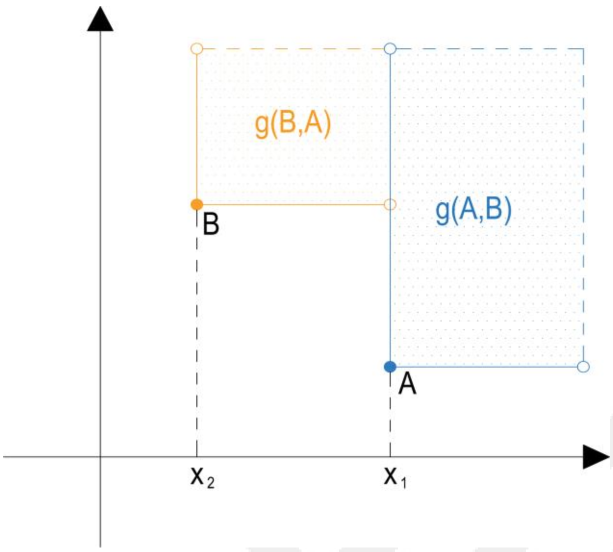
1. Durum: $x_1 < x_2$ ise;



Şekil 3.9. Durum 1 in şekli

$g(A, B) = [x_1, x_2) \times [y_1, \infty)$ ve $g(B, A) = [x_2,\infty) \times [y_2, \infty)$ olsun.

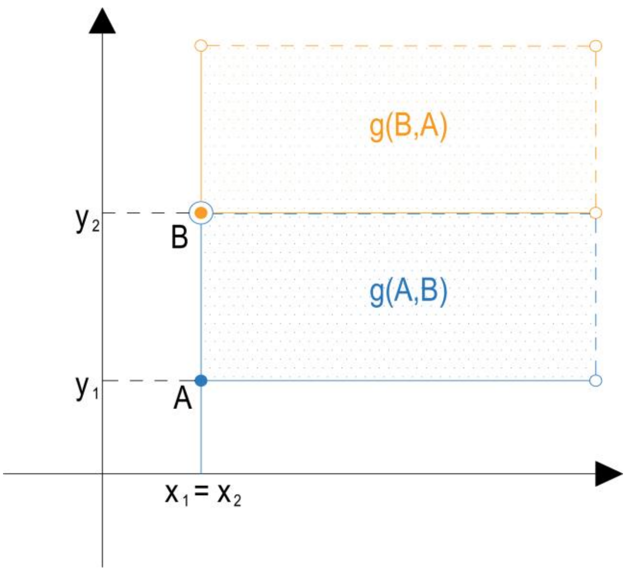
2. Durum: $x_2 < x_1$ ise;



Şekil 3.10. Durum 2 nin şekli

$g(A, B) = [x_1, \infty) \times [y_1, \infty)$ ve $g(B, A) = [x_2, x_1) \times [y_2, \infty)$ olsun.

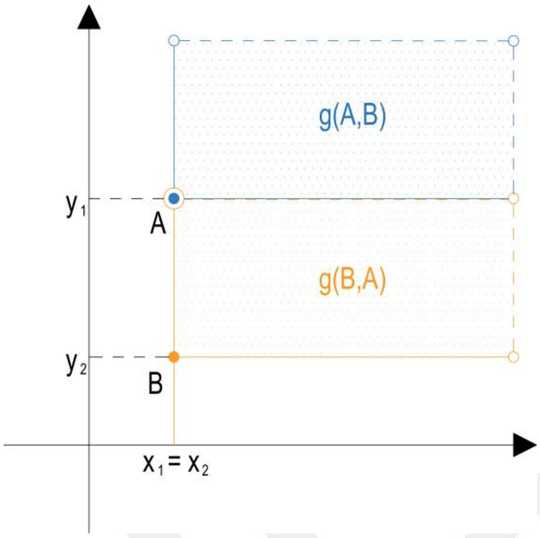
3. Durum: $x_1 = x_2$ ve $y_1 < y_2$ ise;



Şekil 3.11. Durum 3 ün şekli

$g(A, B) = [x_1, \infty) \times [y_1, y_2)$ ve $g(B, A) = [x_1, \infty) \times [y_2, \infty)$ olsun.

4. Durum: $x_1 = x_2$ ve $y_2 < y_1$ ise;



Şekil 3.12. Durum 4 ün şekli

$g(A, B) = [x_1, \infty\ ) \times [y_1, \infty\ )$ ve $g(B, A) = [x_1, \infty) \times [y_2, y_1\ )$ olsun.

g operatörünün MH1, MH2 ve MH3 koşullarını sağladığını görelim.

MH1. g operatörünün tanımından her durum için $A \in g(A,B) \subseteq X$ açık komşuluğu olduğu açıktır.

MH2. $A = (x_1, y_1), B = (x_2, y_2) \in S \times S$ için $A \neq B$ ise $g(A, B) \cap g(B, A) = \emptyset$ dir.

Şöyle ki;

1. Durum: $x_1 < x_2$ ise;

$g(A, B) = [x_1, x_2\ ) \times [y_1, \infty\ )$ ve $g(B, A) = [x_2, \infty) \times [y_2, \infty\ )$ için

$[x_1, x_2\ ) \cap [x_2, \infty) = \emptyset$ olduğundan $g(A, B) \cap g(B, A) = \emptyset$ dir.

2. Durum: $x_2 < x_1$ ise;

$g(A, B) = [x_1, \infty\ ) \times [y_1, \infty\ )$ ve $g(B, A) = [x_2, x_1) \times [y_2, \infty\ )$ için

$[x_1, \infty) \cap [x_2, x_1) = \emptyset$ olduğundan $g(A, B) \cap g(B, A) = \emptyset$ dir.

3. Durum: $x_1 = x_2$ ve $y_1 < y_2$ ise;

$g(A, B) = [x_1, \infty) \times [y_1, y_2)$ ve $g(B, A) = [x_1, \infty) \times [y_2, \infty)$ için

$[y_1, y_2) \cap [y_2, \infty) = \emptyset$ olduğundan $g(A, B) \cap g(B, A) = \emptyset$ dir.

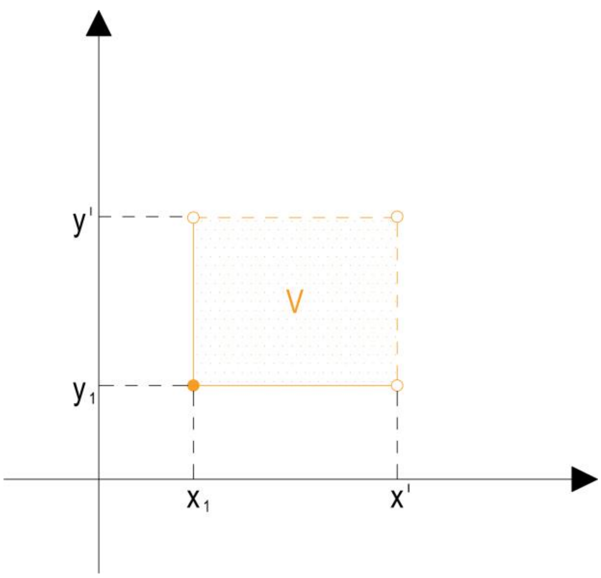
4. Durum: $x_1 = x_2$ ve $y_2 < y_1$ ise;

$g(A, B) = [x_1, \infty) \times [y_1, \infty)$ ve $g(B, A) = [x_1, \infty) \times [y_2, y_1)$ için

$[y_1, \infty) \cap [y_2, y_1) = \emptyset$ olduğundan $g(A, B) \cap g(B, A) = \emptyset$ dir.

MH3. $M \subseteq X$ olmak üzere $A \in \overline{\bigcup_{E \in M} g(E, A)}$ ise $A \in \overline{M}$ dır. Şöyle ki;

$A = (x_1, y_1) \notin \overline{M}$ olsun. $A \in U$ ve $U \cap M = \emptyset$ olacak biçimde bir $U \subseteq S \times S$ açığı vardır. Bu durumda $(x_1, y_1) \in [x_1, x') \times [y_1, y') \subseteq U$ olacak biçimde birer $x', y' \in S$ vardır. $[x_1, x') \times [y_1, y') = V$ alınırsa $V \cap M = \emptyset$ dir.



Şekil 3.13. V açığının gösterimi

$E = (x_E, y_E) \in M$ için

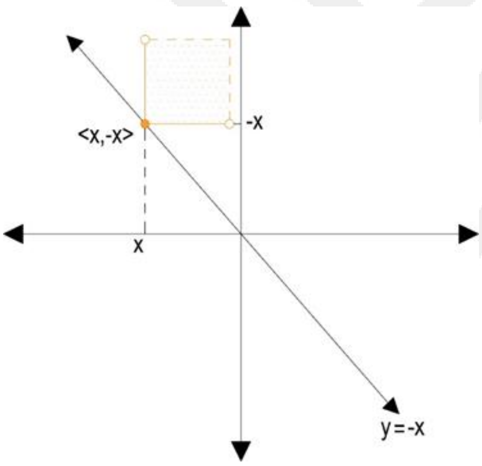
$$g(E, A) = \begin{cases} [x_E, \infty) \times [y_E, \infty); & x' < x_E \text{ise} \\ [x_E, x) \times [y_E, \infty); & x_E < x_1 \text{ise} \\ [x_1, \infty) \times [y_E, \infty); & x_1 = x_E, y' \leq y_E \text{ise} \\ [x_1, \infty) \times [y_E, y_1); & x_1 = x_E, y_E < y_1 \text{ise} \end{cases}$$

olmak üzere $V \cap g(E, A) = \emptyset$ olduğu kolayca görülebilir.

Şimdi Sorgenfrey düzleminin normal uzay olmadığını görelim.

$\langle x, y\rangle$ düzlemde bir noktayı göstermek üzere $K = \{ \langle x, y\rangle : y = -x \} \subseteq S \times S$ olsun.

Hausdorff uzaylarda sürekli fonksiyonların grafikleri kapalı olduğundan $K \subseteq S \times S$ kapalıdır.



Şekil 3.14. K altuzayı ve üzerinde tanımlanan açık komşuluk

K üzerine $S \times S$ Sorgenfrey düzleminden indirgenen altuzay topolojisi ayrık (diskret) topolojidir. Şöyle ki;

Her $\langle x, -x\rangle \in K$ için $S \times S$ de bu noktayı içeren her açıkla K kümesinin arakesiti yine $\{\langle x,-x\rangle\}$ tek nokta kümesidir. Yani her $\langle x,-x\rangle \in K$ için $K \cap \left([x, x+\varepsilon) \times [-x, -x+\varepsilon)\right) = \{\langle x, -x \rangle\}$ olacak biçimde bir $\varepsilon > 0$ vardır. Böylece $\{\langle x, -x\rangle\}$ tek nokta kümesi K da açık olup K kümesi bu topoloji ile ayrıktır. Aynı zamanda $|K| = |\mathbb{R} \times \mathbb{R}| = |\mathbb{R}| = c$ olduğundan Jones' ın lemmasından $S \times S$ Sorgenfrey düzlemi normal değildir, dolayısıyla monoton normal uzay değildir.

4. M_i-UZAYLAR VE m_i-UZAYLAR

4.1. M_i-uzaylar

Bu kısımda öncelikle M_i uzay tanımları için gerekli olan tabanlarla ilgili tanımlar verilecektir. Daha sonra Ceder'in M_i uzayları tanımlanacaktır. Borges tarafından tanımlanan katmanlanabilir uzay tanımı verilerek bu tanımın M_3-uzaya denk olduğu ispatlanacaktır. Son olarak da monotonluk özelliklerinin bu uzaylarla ilişkisini ifade eden teoremler ispatlanacaktır.

İlk olarak M_i-uzayların tanımlarında kullanılan yarı taban, ikili taban ve destekli (cushioned) taban ve kapanışı koruyan aile tanımlarını verelim.

4.1.1. Tanım

X bir topolojik uzay, Ɓ X uzayının altkümelerinin bir ailesi olmak üzere eğer her $x \in X$ ve x in her U açık komşuluğu için $x \in \overset{o}{B} \subseteq B \subseteq U$ olacak biçimde bir $B \in$ Ɓ varsa Ɓ ailesine X uzayı için bir yarı taban denir[1].

4.1.2. Tanım

X bir topolojik uzay olmak üzere Ƥ$=\{ (P_1, P_2): P_1 \subseteq X, P_2 \subseteq X$ ve P_1 açık $\}$ olsun. Her $x \in X$ ve $x \in U$ biçimindeki her U açığı için $x \in P_1 \subseteq P_2 \subseteq U$ olacak biçimde bir $(P_1, P_2) \in$ Ƥ var ise Ƥ ailesine X uzayı için bir ikili taban denir[1].

4.1.3 Tanım

X bir topolojik uzay ve Ƥ $= \{(P_1, P_2): P_1, P_2 \subseteq X$ ve $P_1 \subseteq P_2 \}$ kümesi X uzayının bir ikili ailesi olmak üzere, her Ƥ' ⊆ Ƥ için $\overline{\bigcup_{(P_1,P_2)\in P'} P_1} \subseteq \bigcup_{(P_1,P_2)\in P'} P_2$ ise Ƥ ailesine destekli (cushioned) aile denir[1].

4.1.4. Tanım

X bir topolojik uzay, $\mathcal{A}$, X uzayının altkümelerinin bir ailesi olmak üzere eğer her $\Im \subseteq \mathcal{A}$ için

$\bigcup\{\overline{B} : B \in \Im\} = \overline{\bigcup\{B : B \in \Im\}}$ ise $\mathcal{A}$ ailesine kapanışı koruyan bir aile denir[1].

Şimdi M_1, M_2, M_3 uzayları ve katmanlanabilir uzay tanımları verilecektir.

4.1.5. Tanım

X düzenli uzayı σ-kapanışı koruyan bir tabana sahip ise X uzayına M_1-uzay denir[3].

4.1.6. Tanım

X düzenli uzayı σ-kapanışı koruyan bir yarı tabana sahip ise X uzayına M_2-uzay denir[3].

4.1.7. Tanım

σ-destekli bir ikili tabana sahip olan T_1-uzaylara M_3-uzay denir[3].

4.1.8. Tanım

X bir topolojik uzay olmak üzere her $U \subseteq X$ açık altkümesi için X uzayının açık alt kümelerinin

i) Her n için $\overline{U_n} \subseteq U$;

ii) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n = U$;

iii) $U \subseteq V \Rightarrow \forall$ n için $U_n \subseteq V_n$

şartlarını sağlayan bir $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi varsa X uzayına katmanlanabilir uzay denir[9].

Ceder tarafından M_i-uzaylar arasındaki ilişkiler incelenmiş ve uzayın M_1-uzay olmasının M_2-uzay olmasını gerektirdiği, M_2-uzay olmasının da M_3-uzay olmasını gerektirdiği ispatlanmıştır[1]. Daha sonra Gruenhage ve Junilla birbirlerinden bağımsız olarak M_2 ve M_3 koşullarının denk koşullar olduğunu elde etmişlerdir [4-5].

Şimdi M_3-uzay ile katmanlanabilir uzayın denk olduklarını görelim.

4.1.9. Teorem

X topolojik uzayının katmanlanabilir uzay olması için gerekli ve yeterli şart X uzayının M_3-uzay olmasıdır[9].

İspat:

X katmanlanabilir bir topolojik uzay olsun. X uzayının her U açık alt kümesi için X uzayının açık alt kümelerinin tanım 4.1.8 deki koşulları sağlayan bir $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi vardır. Her n için $\mathfrak{I}_n = \{ (U_n, U) : U \subseteq X \text{ açık} \}$ olmak üzere $\mathfrak{I} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{I}_n$ ailesi X uzayı için σ-destekli bir ikili tabandır. Şöyle ki; önce ikili taban olduğunu görelim. Her n için $\overline{U_n} \subseteq U$ olduğundan $U_n \subseteq U$ sağlanır. $x \in X$ ve $U \subseteq X$ açık olmak üzere $x \in U$ olsun. $U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$ olduğundan $x \in U_k$ olacak biçimde bir $k \in \mathbb{N}$ vardır. Öyleyse $(U_k, U) \in \mathfrak{I}_k$ ve $x \in U_k \subseteq U$ olup $\mathfrak{I}$ bir ikili tabandır. Şimdi $\mathfrak{I}$ ailesinin X uzayı için σ-destekli olduğunu görelim. Bunun için her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathfrak{I}_n$ ailesinin destekli aile olduğunu görmeliyiz. Herhangi bir $k \in \mathbb{N}$ alalım. $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{I}_n$ olsun. $\overline{\bigcup_{(U_k, U)\in\mathfrak{R}} U_k} \subseteq \bigcup_{(U_k, U)\in\mathfrak{R}} U$ olduğunu görmeliyiz. $\bigcup_{(U_k, U)\in\mathfrak{R}} U = W$ kümesi açık olduğundan Tanım 4.1.8 koşullarını sağlayan bir $\{W_n : n \in \mathbb{N}\}$ açıklar dizisi vardır. $(U_k, U) \in \mathfrak{R}$ olacak biçimdeki her U için $U \subseteq W$ olduğundan Tanım 4.1.8.(iii) den $(U_k, U) \in \mathfrak{R}$ biçimindeki her (U_k, U) için $U_k \subseteq W_k$ dır. Öyleyse $\bigcup_{(U_k, U)\in\mathfrak{R}} U_k \subseteq W_k$ olup $\overline{\bigcup_{(U_k, U)\in\mathfrak{R}} U_k} \subseteq \overline{W_k}$ dır. Tanım 4.1.8. (i) den $\overline{W_k} \subseteq W$ olduğundan $\overline{\bigcup_{(U_k, U)\in\mathfrak{R}} U_k} \subseteq W = \bigcup_{(U_k, U)\in\mathfrak{R}} U$ dır. Böylece her $k \in \mathbb{N}$ için $\mathfrak{I}_k$ destekli bir aile olup $\mathfrak{I}$ σ-desteklidir.

Şimdi X bir M_3-uzay ve $\mathfrak{I} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{I}_n$ X uzayı için σ-destekli bir ikili taban olsun. $U \subseteq X$ açık olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $U_n = \bigcup \{ P_1 : \exists P_2 \text{ için } (P_1, P_2) \in \mathfrak{I}_n \text{ ve } P_2 \subseteq U \}$ olsun.

$\{ U_n: n \in \mathbb{N} \}$ açıklar dizisi Tanım 4.1.8 koşullarını sağlar. Gerçekten; her n için $\overline{U_n} = \overline{\bigcup\{P_1 : \exists P_2 \text{ için} (P_1, P_2) \in \mathfrak{I}_n \text{ ve} P_2 \subseteq U\}}$ ve $\mathfrak{I}_n$ destekli aile olduğundan $\overline{U_n} \subseteq U$ dır. Her $n \in \mathbb{N}$ için $U_n \subseteq U$ olup $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n \subseteq U$ dır. Diğer taraftan $x \in U$ olsun. $\mathfrak{I}$ ikili taban olduğundan $x \in P_1 \subseteq P_2 \subseteq U$ olacak biçimde bir $n \in \mathbb{N}$ ve bir $(P_1, P_2) \in \mathfrak{I}_n$ vardır. Böylece $x \in \bigcup \{ P_1: \exists P_2 \text{ için } (P_1, P_2) \in \mathfrak{I}_n \text{ ve } P_2 \subseteq U \}$ olup $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$ dir. Böylece $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n = U$ dur. $U \subseteq V$ olsun. $x \in P_1 \subseteq P_2 \subseteq U \subseteq V$ olup U_n nin tanımından her n için $U_n \subseteq V_n$ olduğu açıktır.

Aşağıda görüldüğü gibi katmanlanabilir uzaylar kapalı alt kümeler yardımı ile de karakterize edilebilir:

4.1.10. Teorem

X uzayının katmanlanabilir olması için gerekli ve yeterli koşul τ' X uzayının bütün kapalıların ailesini göstermek üzere;

i) $K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G(n,K) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{G(n,K)}$;

ii) $K \subseteq F \Rightarrow$ Her n için $G(n, K) \subseteq G(n, F)$

şartlarını sağlayan bir G: $\mathbb{N} \times \tau' \to \tau$ operatörünün var olmasıdır[9].

İspat

X katmanlanabilir uzay ve $K \subseteq X$ kapalı olsun. $K^c \subseteq X$ açık olduğundan açık alt kümelerin;

i) Her n için $\overline{U_n} \subseteq K^c$;

ii) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n = K^c$;

iii) $K^c \subseteq V$ ve V açık $\Rightarrow$ Her n için $U_n \subseteq V_n$

şartlarını sağlayan bir $\{ U_n: n \in \mathbb{N} \}$ dizisi vardır.

Her n için $\overline{U_n} \subseteq K^c$ olduğundan her n için $K \subseteq (\overline{U_n})^c$ dir. $(\overline{U_n})^c = G(n, K)$ denirse her n için $K \subseteq G(n, K)$ olur. Her n için $\overline{U_n} \subseteq K^c$ olduğundan $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{U_n} \subseteq K^c$ dir. Dolayısıyla $K \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (\overline{U_n})^c$

dır. $(\overline{U_n})^c = G(n, K)$ olduğundan $K \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{G(n,K)}$ dır. $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{G(n,K)} \subseteq K$ olduğunu görmek için kabul edelim ki $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{G(n,K)} \cap K^c \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda bir $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{G(n,K)} \setminus K$ vardır. Böylece her n için $x \in \overline{G(n,K)}$ ve $x \notin K$ dır. $x \in K^c = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$ olup $x \in U_{n_0}$ olacak biçimde bir n_0 vardır. $x \in U_{n_0} \subseteq X$ açık ve her n için $x \in \overline{G(n,K)}$ olduğundan $G(n_0, K) \cap U_{n_0} \neq \emptyset$ dir. $(\overline{U_{n_0}})^c = G(n_0, K)$ olduğundan $(\overline{U_{n_0}})^c \cap U_{n_0} \neq \emptyset$ olur ki bu bir çelişkidir. O halde $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{G(n,K)} \subseteq K$ dır. $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{G(n,K)} \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G(n,K)$ olduğunu görelim. $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{G(n,K)}$ olsun. Kabul edelim ki $x \notin \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G(n,K)$ olsun. Bu durumda $x \notin G(n_0, K)$ olacak biçimde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. $G(n_0, K)$ nın tanımından $x \notin (\overline{U_{n_0}})^c \subseteq K^c = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$ dir. Her n için $x \in \overline{G(n,K)}$ olduğundan $G(n, K) \cap K^c \neq \emptyset$ olup $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{U_n} \cap (\overline{U_n})^c \neq \emptyset$ olur ki bu bir çelişkidir. Böylece $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{G(n,K)} \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G(n,K)$ dır. Şimdi $K, F \subseteq X$ kapalı ve $K \subseteq F$ olsun. $F^c \subseteq K^c$ olup her n için $V_n \subseteq U_n$ dır. Bu durumda her n için $\overline{V_n} \subseteq \overline{U_n}$ olup her n için $(\overline{U_n})^c \subseteq (\overline{V_n})^c$ dir. Yani her n için $G(n, K) \subseteq G(n, F)$ dir. Diğer yandan hipotezdeki şartları sağlayan bir G fonksiyonu var olsun. $U \subseteq X$ açık olsun. $U^c \subseteq X$ kapalıdır. Her n için $(\overline{G(n,U^c)})^c = U_n$ denilirse $\{ U_n \colon n \in \mathbb{N} \}$açıklar dizisi katmanlanabilir uzay şartlarını sağlar. Gerçekten; her n için $U^c \subseteq G(n, U^c)$ olduğundan $U^c \subseteq \overline{G(n,U^c)}$ olup $\overline{G(n,U^c)}^c \subseteq U$ dır. Böylece her n için $U_n \subseteq U$ dır. Ayrıca her n için $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{G(n,U^c)}^c = (\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{G(n,U^c)})^c = (U^c)^c = U$ dır. Diğer taraftan $V \subseteq X$ açık olmak üzere $U \subseteq V$ olsun. Bu durumda hipotezden her n için $G(n, V^c) \subseteq G(n, U^c)$ dir. Böylece her n için $\overline{G(n,V^c)} \subseteq \overline{G(n,U^c)}$ olup yine her n için $\overline{G(n,U^c)}^c \subseteq \overline{G(n,V^c)}^c$ dir. Yani $U_n \subseteq V_n$ dir.

Bir çarpım uzayının monoton normal olması için gereken iki önemli özellikten biri uzayın katmanlanabilir olmasıdır. Aşağıdaki teoremle bunu görelim.

4.1.11. Teorem

X ve Y topolojik uzaylar olmak üzere, $X \times Y$ çarpım uzayı monoton normal ise ya X uzayının sayılabilir her alt kümesi kapalıdır ya da X uzayı katmanlanabilirdir[8].

İspat:

$X \times Y$ çarpım uzayı monoton normal olsun. X in sayılabilir herhangi bir $M' = \{ x_n : n \in \mathbb{N} \}$ altkümesini alalım. Kabul edelim ki M' alt kümesi kapalı olmasın. O halde $\overline{M'} \setminus M' \neq \emptyset$ olup $p \in \overline{M'} \setminus M'$ olacak biçimde bir $p \in X$ noktası vardır. $M = M' \cup \{p\}$ denilirse $X \times Y$ monoton normal uzay ve monoton normal uzay olma özelliği kalıtsal özellik olduğundan $M \times Y$ alt uzayı da monoton normal uzaydır. Böylece $M \times Y$ monoton normal uzayı üzerinde bir monoton normallik operatörü vardır. Her $F \subseteq Y$ kapalı kümesi için;

$H_F = \{ (x, y) \in M \times Y : y \in F \text{ ve } x \neq p \}$ ve

$K_F = \{ (p, y) \in M \times Y : y \notin F \}$

olsun. Her $F \subseteq Y$ kapalı alt kümesi için H_F ve K_F kümeleri $M \times Y$ uzayının ayrılmış alt kümeleridir. Gerçekten;

$\overline{H_F} \cap K_F \neq \emptyset$ olsun. O halde $(a, b) \in \overline{H_F} \cap K_F$ olacak biçimde $(a, b) \in M \times Y$ vardır. Yani $(a, b) \in \overline{H_F}$ ve $(a, b) \in K_F$ dir. $(a, b) \in K_F$ olduğundan $a = p$ ve $b \notin F$ dir. Diğer taraftan $(p, b) \in \overline{H_F}$ ve $F \subseteq Y$ kapalı olup $(p, b) \in M \times F^c \subseteq M \times Y$ açık olduğundan $(M \times F^c) \cap H_F \neq \emptyset$ dir. Yani $x \in M$, $y \notin F$ olacak biçimde bir $(x, y) \in H_F$ vardır. Bu ise $(x, y) \in H_F$ olduğunda $y \in F$ olmasıyla çelişir. Benzer şekilde $\overline{K_F} \cap H_F \neq \emptyset$ olsun. O halde $(a, b) \in \overline{K_F} \cap H_F$ olacak biçimde $(a, b) \in M \times Y$ vardır. Böylece $a \neq p$ ve $b \in F$ dir. $\{p\} \subseteq X$ kapalı, $(a, b) \in \overline{K_F}$ ve $(a, b) \in \{p\}^c \times F$ olduğundan $(\{p\}^c \times F) \cap K_F \neq \emptyset$ dir. Yani $z \in \{p\}^c$, $y \in F$ olacak biçimde bir $(z, y) \in K_F$ vardır. Bu ise $(z, y) \in K_F$ olmasıyla çelişir.

Her n için $T(n, F) = \{ y \in Y : (m_n, y) \in G(H_F, K_F) \}$ olsun. Her n için T(n, F) operatörü Teorem 4.1.10 koşullarını sağlar. Şöyle ki;

i) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} T(n,F) = F$ olduğunu görelim. y ∈ F olsun. Her n ∈ ℕ için $m_n \neq p$ ve y ∈ F olduğundan $(m_n, y) \in H_F \subseteq G(H_F, K_F)$ dir. Yani her n ∈ ℕ için y ∈ T(n, F) dır. Böylece $y \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} T(n,F)$ olup $F \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} T(n,F)$ dir.

Diğer taraftan $y \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} T(n,F) \setminus F$ olsun. Her n ∈ ℕ için y ∈ T(n, F) ve y ∉ F dir. Her n ∈ ℕ için y ∈ T(n, F) olduğundan her n ∈ ℕ için $(m_n, y) \in G(H_F, K_F)$ dir.
Ayrıca y ∉ F olduğundan K_F nin tanımından $(p, y) \in K_F \subseteq G(K_F, H_F)$ dır.

$(p, y) \in U \times V \subseteq G(K_F, H_F)$ olacak şekilde birer U ⊆ X, V ⊆ Y açıkları vardır.

Böylece p ∈ U, U ⊆ X açıktır.

p noktası M' kümesinin limit noktası ve p ∈ U, U ⊆ X açık olduğundan $m_{n0} \in U$

olacak biçimde bir n_0 vardır. $(m_{n0}, y) \in U \times V \subseteq G(K_F, H_F)$ dir. Bu her

n için $(m_n, y) \in G(H_F, K_F)$ ve $G(H_F, K_F) \cap G(K_F, H_F) = \emptyset$ olması ile çelişir.

Öyleyse $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} T(n,F) \subseteq F$ olup $F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} T(n,F)$ dir.

$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{T(n,F)} = F$ olduğunu görelim. $y \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{T(n,F)}$ olsun. Kabul edelim ki y ∉ F olsun.

Her n ∈ ℕ için $y \in \overline{T(n,F)}$ olduğundan y nin her açık komşuluğu ve her n ∈ ℕ için U ∩ T(n, F) ≠ ∅ dir.

Diğer yandan y ∉ F olduğundan $y \in F^c$, $F^c \subseteq X$ açıktır. Böylece her n için $F^c \cap T(n, F) \neq \emptyset$ olup $z \in F^c \cap T(n, F)$ olacak biçimde bir z ∈ X vardır.
z ∉ F olduğundan $(p, z) \in K_F \subseteq G(K_F, H_F)$ dır. Bu durumda
$(p, z) \in V \times W \subseteq G(K_F, H_F)$ olacak biçimde birer V ⊆ X ve W ⊆ Y açıkları vardır. p ∈ V, V ⊆ X açık ve $p \in \overline{M'}$ olduğundan
$m_{n0} \in V$ olacak biçimde bir n_0 vardır. Bu da $(m_{n0}, z) \in V \times W \subseteq G(K_F, H_F)$

olması demektir ki z ∈ T(n, F) olduğu için $(m_n, z) \in G(H_F, K_F)$ olmasıyla çelişir.

Böylece $y \in F$ olup $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{T(n,F)} \subseteq F$ dir. (i) den $F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{T(n,F)}$ dir.

ii) $F \subseteq C$ ise $T(n, F) \subseteq T(n, C)$ olduğunu görelim. $F \subseteq C$ ve $y \in T(n, F)$ olsun. Bu durumda $(m_n, y) \in G(H_F, K_F)$ dir. $F \subseteq C$ olduğundan $H_F \subseteq H_C$ dir. $(p, y) \in K_C$ ise $y \notin C$ olup $y \notin F$ dir. Dolayısıyla $(p, y) \in K_F$ olduğundan $K_C \subseteq K_F$ dir. $H_F \subseteq H_C$ ve $K_C \subseteq K_F$ olduğundan $G(H_F, K_F) \subseteq G(H_C, K_C)$ dir. $(m_n, y) \in G(H_F, K_F)$ ve $G(H_F, K_F) \subseteq G(H_C, K_C)$ olduğundan $(m_n, y) \in G(H_C, K_C)$ dir. Yani $y \in T(n, C)$ dir.

Aşağıdaki teoremle monoton Hausdorff uzay olma özelliğinin katmanlanabilir uzay olma özelliği ile ilişkisi verilecektir.

4.1.12. Teorem

X topolojik uzayı sayılabilir ve monoton Hausdorff uzay ise M_3-uzaydır[3].

İspat

X sayılabilir ve monoton Hausdorff bir uzay ve g, X uzayı için monoton Hausdorff 'luk operatörü olsun. Her $x \in X$ için $\mathcal{V}_x$, x noktasının komşuluklar tabanı olmak üzere her $V(x) \in \mathcal{V}_x$ için $P_1^{V(x)} = X \setminus \overline{\bigcup\{g(y,x) : y \in X \setminus V(x)\}}$ ve $P_2^{V(x)} = V(x)$ olsun. $P^{V(x)} = (P_1^{V(x)}, P_2^{V(x)})$ olmak üzere $P_x = \{ P^{V(x)} : V(x) \in \mathcal{V}_x \}$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda $P = \bigcup_{x\in X} P_x$, X uzayı için σ-destekli ikili tabandır. Şöyle ki;

$x \in X$ ve U, x noktasının bir açık komşuluğu olsun. O halde $V(x) \subseteq U$ olacak şekilde bir $V(x) \in \mathcal{V}_x$ vardır. Önce P nin X uzayı üzerinde bir ikili taban olduğunu görelim. Yani $x \in P_1^{V(x)} \subseteq P_2^{V(x)} \subseteq U$ dir. Gerçekten; $x \in V(x)$ olup $x \notin (V(x))^c$ dir. Bu durumda

$x \notin \overline{\bigcup\{g(y,x): y \in X \setminus V(x)\}}$ dır. Yani $x \in X \setminus \overline{\bigcup\{g(y,x): y \in X \setminus V(x)\}}$ olup $x \in P_1^{v(x)}$ dir. $P_1^{v(x)} \subseteq P_2^{v(x)}$ olduğunu söylemek için $X \setminus \overline{\bigcup\{g(y,x): y \in X \setminus V(x)\}} \subseteq V(x)$ olduğu gösterilmelidir. $p \notin V(x)$ olsun. $p \in (V(x))^c$ dir. Dolayısıyla $p \in \overline{\bigcup\{g(y,x): y \in X \setminus V(x)\}}$ dır. Yani $p \notin X \setminus \overline{\bigcup\{g(y,x): y \in X \setminus V(x)\}}$ olup $X \setminus \overline{\bigcup\{g(y,x): y \in X \setminus V(x)\}} \subseteq V(x)$ dir. Her $x \in X$ için P_x in destekli aile olduğunu görelim. Yani $\mathcal{V}_x' \subseteq \mathcal{V}_x$ olmak üzere $P_x' = \{(P_1^{v(x)}, P_2^{v(x)}): V(x) \in \mathcal{V}_x'\}$ için $\overline{\bigcup\{P_1^{V(x)}: V(x) \in \upsilon_x'\}} \subseteq \bigcup\{P_2^{V(x)}: V(x) \in \upsilon_x'\}$ olduğunu görelim. Kabul edelim ki $y_0 \notin \bigcup\{P_2^{V(x)}: V(x) \in \upsilon_x'\}$ olsun. $P_2^{v(x)} = V(x)$ olduğundan $y_0 \notin \bigcup\{V(x): V(x) \in \upsilon_x'\}$ dir. Yani her $V(x) \in \mathcal{V}_x'$ için $y_0 \notin V(x)$ dır. Bu durumda her $V(x) \in \mathcal{V}_x'$ için $g(y_0, x) \subseteq \overline{\bigcup\{g(y,x): y \in X \setminus V(x)\}}$ dir. Yani $P_1^{V(x)}$ tanımından her $V(x) \in \mathcal{V}_x'$ için $g(y_0, x) \cap P_1^{V(x)} = \emptyset$ dir. Böylece $y_0 \notin \overline{\bigcup\{P_1^{V(x)}: V(x) \in \upsilon_x'\}}$ dır. P_x destekli ve X sayılabilir olduğundan P, X uzayı üzerinde σ-destekli bir ikili tabandır.

4.2. m_i-uzaylar

Bu bölümde Ceder' in tanımladığı M_i-uzayların yerelleştirmiş biçimi olan m_i-uzaylar tanımlanarak aralarındaki ilişkilere yer verilmiştir. Buck tarafından m_i-uzayların araştırılması esnasında bu uzayların monoton Hausdorff özelliği ile arasında kuvvetli bir ilişki olduğu bulunmuştur. Hatta bazı durumlarda bunların eşdeğer olduğu ispatlanmıştır[3].

4.2.1. Tanım

Her $x \in X$ için x noktasının kapanışı koruyan bir komşuluklar tabanı varsa X uzayına m_1-uzay denir[3].

4.2.2 Tanım

Her $x \in X$ için x noktasının kapanışı koruyan bir komşuluklar yarı tabanı varsa X uzayına m_2-uzay denir[3].

4.2.3. Tanım

Her $x \in X$ için x noktasının destekli ikili komşuluklar tabanı varsa X uzayına m_3-uzay denir[3].

m_i-uzaylar arasındaki ilişkileri vermeden önce birinci sayılabilir uzayların m_1-uzay olduğu görülecektir. Daha sonra m_3-uzay ile monoton Hausdorff uzaylar arasındaki ilişkiler incelenecektir.

4.2.4. Teorem

Birinci sayılabilir uzaylar m_1-uzaydır[3].

İspat

X uzayı birinci sayılabilir uzay olsun. Bu durumda her $x \in X$ için x noktasının sayılabilir ve iç içe azalan komşuluklar tabanı vardır. Yani her $x \in X$ noktasının her $n \in \mathbb{N}$ için $U_{n+1} \subseteq U_n$ olacak biçimde bir $\sigma(x) = \{ U_n : n \in \mathbb{N} \}$ komşuluklar tabanı vardır.

$I \subseteq \mathbb{N}$ olsun. Her $n \in I$ için $U_n \subseteq \bigcup_{n\in I} U_n$ olduğundan her $n \in I$ için $\overline{U_n} \subseteq \overline{\bigcup_{n\in I} U_n}$ olup $\bigcup_{n\in I} \overline{U_n} \subseteq \overline{\bigcup_{n\in I} U_n}$ dir. Ayrıca $I \subseteq \mathbb{N}$ olduğundan I kümesi bir en küçük elemana sahiptir. Bu en küçük eleman m alınırsa $\bigcup_{n\in I} U_n = U_m$ olur ki bu durumda $\overline{\bigcup_{n\in I} U_n} = \overline{U_m}$ dır. $\overline{U_m} \subseteq \bigcup_{n\in I} \overline{U_n}$ olduğundan $\overline{\bigcup_{n\in I} U_n} \subseteq \bigcup_{n\in I} \overline{U_n}$ dir. Sonuç olarak her $I \subseteq \mathbb{N}$ için $\bigcup_{n\in I} \overline{U_n} = \overline{\bigcup_{n\in I} U_n}$ olur ki bu da her $x \in X$ için $\sigma(x)$ kümesinin kapanışı koruyan komşuluklar tabanı olduğunu ispatlar.

X uzayının her x noktasının "$\supseteq$" bağıntısına göre doğrusal sıralı bir komşuluklar tabanı varsa X uzayına lob-uzay denirdi ki böylece birinci sayılabilir uzayların bir genişlemesi olan lob-uzayların da m_1-uzay olduğu sonucu elde edilir.

4.2.5 Sonuç

Lob-uzaylar m_1-uzaydır[9].

Şimdi ise m_3-uzayın her alt kümesinin de m_3-uzay olduğunu görelim.

4.2.6. Teorem

m_3-uzay olma özelliği kalıtsaldır[3].

İspat

X m_3-uzay ve $Y \subseteq X$ olsun. $y \in Y$ alalım. $y \in X$ olduğundan y nin destekli bir $\mathcal{P}_y = \{ (P_1, P_2): P_1, P_2 \subseteq X\}$ ikili komşuluklar tabanı vardır. Bu durumda $P_y^Y = \{ (P_1 \cap Y, P_2 \cap Y): (P_1, P_2) \in \mathcal{P}_y \}$ biçiminde tanımlanan aile $y \in Y$ için destekli ikili bir komşuluklar tabanıdır. Gerçekten;$T \subseteq Y$, T alt kümesi Y de açık ve $y \in T$ olsun. $T \subseteq Y$ açık olduğundan $T = V \cap Y$ olacak biçimde bir $V \subseteq X$ açığı vardır. $y \in V$ olup X m_3-uzay olduğundan $y \in P_1 \subseteq P_2 \subseteq V$ olacak biçimde bir $(P_1, P_2) \in \mathcal{P}_y$ vardır. Böylece $y \in P_1 \cap Y \subseteq P_2 \cap Y \subseteq T$ olup $\mathcal{P}_y^Y$ $y \in Y$ için ikili komşuluklar tabanıdır. Şimdi $\mathcal{P}_y^Y$ nin $y \in Y$ için destekli olduğunu görelim. $y \in \overline{\bigcup(P_1 \cap Y)}^Y$ olsun. Bu durumda $y \in \overline{\bigcup(P_1 \cap Y)} \cap Y$ olup $y \in \overline{\bigcup(P_1 \cap Y)}$ dir. $y \in \overline{\bigcup P_1} \cap \overline{Y}$ ve $\mathcal{P}_y$ destekli olduğundan $y \in \bigcup P_2 \cap \overline{Y}$ dır. Böylece $y \in \bigcup(P_2 \cap Y)$ olur ki bu da ispatı tamamlar.

Araştırmalar sonucunda monoton Hausdorff uzay olma özelliği ile m_i uzayları arasında kuvvetli ilişkiler bulunmuş hatta eşdeğer oldukları durum elde edilmiştir[3]. Monoton Hausdorff her uzayın m_3-uzay olduğunu, tersinin ise sadece Hausdorff uzaylarda geçerli olduğunu görelim.

4.2.7 Teorem

Monoton Hausdorff her uzay m_3-uzaydır[3].

İspat

g, X uzayı üzerinde bir monoton Hausdorff 'luk operatörü ve $\mathcal{V}_x$, $x \in X$ için komşuluklar tabanı olsun. Her $V \in \mathcal{V}_x$ için $P_1^v = X \setminus \overline{(\bigcup\{g(y,x) : y \in X \setminus V\})}$ ve $P_2^v = V$ olmak üzere $P_x = \{ (P_1^v, P_2^v): V \in \mathcal{V}_x \}$ şeklinde tanımlansın. Her $x \in X$ için P_x, x noktasının destekli ikili komşuluklar tabanıdır. Gerçekten; U, $x \in X$ noktasının bir komşuluğu olsun. O halde $x \in V \subseteq U$ olacak biçimde bir $V \in \mathcal{V}_x$ vardır. $P_1^V \subseteq P_2^V$ dır. Şöyle ki $p \notin V$ olsun. Bu durumda $p \in \overline{(\bigcup\{g(y,x) : y \in X \setminus V\})}$, dolayısıyla $p \notin X \setminus \overline{(\bigcup\{g(y,x) : y \in X \setminus V\})}$ dir. Ayrıca $x \in V$ olup $x \in X \setminus \overline{(\bigcup\{g(y,x) : y \in X \setminus V\})}$ olduğundan $x \in P_1^V$ dir. Böylece P_x, x noktasının ikili komşuluklar tabanıdır. $\mathcal{V}_x{}' \subseteq \mathcal{V}_x$ için $P_x{}' = \{ (P_1^V, P_2^V) : V \in \mathcal{V}_x{}' \} \subseteq P_x$ olmak üzere P_x desteklidir. Şöyle ki $y_0 \notin \bigcup P_2^V$ olsun. Yani her $V \in \mathcal{V}_x{}'$ için $y_0 \notin V$ dir. $g(y_0, x) \subseteq \overline{(\bigcup\{g(y,x) : y \in X \setminus V\})}$ ve $\overline{(\bigcup\{g(y,x) : y \in X \setminus V\})} = (P_1^V)^c$ olduğundan her $V \in \mathcal{V}_x{}'$ için $g(y_0, x) \cap P_1^V = \emptyset$ dir. Yani $y_0 \notin \overline{\bigcup\{P_1^V : V \in \mathcal{V}_x{}'\}}$ dır.

4.2.8. Teorem

Hausdorff olan her m_3-uzay monoton Hausdorff uzaydır[3].

İspat

X Hausdorff uzayı m_3-uzay ve $x \in X$ olsun. $P_x = \{ (P_{\alpha,x}{}^1, P_{\alpha,x}{}^2) : \alpha \in A_x \}$, x noktası için destekli komşuluklar ikili tabanı olsun. Her $x, y \in X$, $x \neq y$ için

$$g(x, y) = \left(\bigcup_{\alpha \in A_x} \{P_{\alpha,x}{}^1 : y \notin P_{\alpha,x}{}^2\} \right) \setminus \overline{\left(\bigcup_{\beta \in A_y} \{P_{\beta,y}{}^1 : x \notin P_{\beta,y}{}^2\} \right)}$$

biçiminde tanımlansın. Bu durumda g(x, y), x noktası için açık komşuluktur. Gerçekten;

X uzayı Hausdorff uzay olduğundan her $x, y \in X$, $x \neq y$ için $x \in U$, $y \in V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak biçimde birer $U, V \subseteq X$ açıkları vardır. $x \in U$ ve P_x, x noktasının ikili komşuluklar tabanı olduğundan $x \in P_{\alpha,x}{}^1 \subseteq P_{\alpha,x}{}^2 \subseteq U$ olacak biçimde bir $(P_{\alpha,x}{}^1, P_{\alpha,x}{}^2) \in P_x$ vardır. Ayrıca $y \in V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olup $y \notin P_{\alpha,x}{}^2$ olduğundan $x \in \left(\bigcup_{\alpha \in A_x} \{P_{\alpha,x}{}^1 : y \notin P_{\alpha,x}{}^2\} \right)$ dir. Diğer yandan $P_y = \{ (P_{\beta,y}{}^1, P_{\beta,y}{}^2) : \beta \in A_y \}$, y noktası için destekli olduğundan $\overline{\bigcup P_{\beta,y}{}^1} \subseteq \bigcup P_{\beta,y}{}^2$ dir.

X uzayı Hausdorff olduğundan $x \notin \bigcup P_{\beta,y}{}^2$ olup $x \notin \overline{\bigcup P_{\beta,y}{}^1}$ dir. Dolayısıyla

$x \notin \overline{\left(\bigcup_{\beta \in A_y} \{P_{\beta,y}{}^1 : x \notin P_{\beta,y}{}^2\}\right)}$ olup $x \in g(x, y)$ dir.

$x \neq y$ için $g(x, y)$ ve $g(y, x)$ aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$g(x, y) = \left(\bigcup_{\alpha \in A_x} \{P_{\alpha,x}{}^1 : y \notin P_{\alpha,x}{}^2\}\right) \setminus \overline{\left(\bigcup_{\beta \in A_y} \{P_{\beta,y}{}^1 : x \notin P_{\beta,y}{}^2\}\right)},$$

$$g(y, x) = \left(\bigcup_{\beta \in A_y} \{P_{\beta,y}{}^1 : x \notin P_{\beta,y}{}^2\}\right) \setminus \overline{\left(\bigcup_{\alpha \in A_x} \{P_{\alpha,x}{}^1 : y \notin P_{\alpha,x}{}^2\}\right)}.$$

Kabul edelim ki $g(x, y) \cap g(y, x) \neq \emptyset$ olsun. $z \in g(x, y) \cap g(y, x)$ olacak biçimde bir z vardır. $z \in g(x, y)$ olup $z \notin \overline{\left(\bigcup_{\beta \in A_y} \{P_{\beta,y}{}^1 : x \notin P_{\beta,y}{}^2\}\right)}$ dir. Yani her $\beta \in A_y$ için $z \notin P_{\beta,y}{}^1$ dir. Benzer şekilde $z \in g(y, x)$ olup $z \in \left(\bigcup_{\beta \in A_y} \{P_{\beta,y}{}^1 : x \notin P_{\beta,y}{}^2\}\right)$ dir. Yani $z \in P_{\beta,y_0}{}^1$ olacak biçimde bir $\beta_0 \in A_y$ vardır. Bu bir çelişkidir.

$x \notin \overline{M}$ olsun. Yani $x \in U$ ve $U \cap M = \emptyset$ olacak biçimde bir $U \subseteq X$ açık kümesi vardır. P_x, x noktası için cushioned komşuluklar ikili taban ve $x \in U$ olduğundan $x \in P_{\alpha',x}{}^1 \subseteq P_{\alpha',x}{}^2 \subseteq U$ olacak biçimde bir $\left(P_{\alpha',x}{}^1, P_{\alpha',x}{}^2\right) \in P_x$ vardır. $U \cap M = \emptyset$ olduğundan $P_{\alpha',x}{}^2 \cap M = \emptyset$ dir. $z \in P_{\alpha',x}{}^1$ olsun. $P_{\alpha',x}{}^2 \cap M = \emptyset$ olduğundan her $y \in M$ için $y \notin P_{\alpha',x}{}^2$ dir. Bu durumda $z \in \left(\bigcup_{\alpha \in A_x} \{P_{\alpha,x}{}^1 : y \notin P_{\alpha,x}{}^2\}\right)$ olup $z \in \overline{\left(\bigcup_{\alpha \in A_x} \{P_{\alpha,x}{}^1 : y \notin P_{\alpha,x}{}^2\}\right)}$ dir. Yani her $y \in M$ için $z \notin g(y, x)$ dir. $z \in P_{\alpha',x}{}^1$ ve her $y \in M$ için $z \notin g(y, x)$ olduğundan $x \notin \overline{(\bigcup\{g(y, x) : y \in M\})}$ dir.

Teorem 4.2.7 ve Terorem 4.2.8 den Hausdorff uzaylarda m_3-uzay tanımı ile monoton Hausdorff uzay tanımının eşdeğer olduğu sonucuna varılır.

4.2.9 Sonuç

X Hausdorff uzay olmak üzere X uzayının monoton Hausdorff olması için gerekli ve yeterli koşul X in m_3-uzay olmasıdır.

Şimdi ise m_i-uzaylar arasındaki ilişkileri verelim. Görünüşte m_i-uzayları arasında, m_1-uzay olduğunda m_2-uzay, m_2-uzay olduğunda ise m_3-uzay olmasını beklenir. Her komşuluklar tabanı komşuluklar yarı tabanı olduğundan her m_1-uzayın m_2-uzay olduğu açıktır. Fakat m_2-uzayın m_3-uzay olması için uzayın düzenli olması gerekir. Şöyle ki; Örnek 3.2.9 da tanımlanan topolojik uzayın Hausdorff ve birinci sayılabilir uzay olduğu fakat düzenli olmadığı gösterilmişti. Bu uzay birinci sayılabilir uzay olduğundan m_1-uzaydır. Düzenli uzay olmadığından monoton Hausdorff değildir. Yani m_3-uzay değildir. Böylece her m_1-uzay m_3-uzay değildir. Eğer uzay düzenli ise, m_1-uzay olması m_2-uzay olmasını, m_2 –uzay olması m_3–uzay olmasını gerektirir. Düzenli m_2-uzayın m_3-uzay olduğunu görelim.

4.2.10. Teorem

Düzenli m_2-uzaylar m_3-uzaydır[3].

İspat

X uzayı düzenli ve m_2-uzay olsun. Bu durumda her $x \in X$ için $U_x = \{ U_{\alpha,x} : \alpha \in A \}$ olacak biçimde kapanışı koruyan komşuluklar yarı tabanı vardır. $\mathcal{P} = \{ (\overset{o}{U}_{\alpha,x} , \overline{U_{\alpha,x}}): \alpha \in A\}$ ve U, x noktasının bir komşuluğu olsun. X düzenli uzay olduğundan $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$ olacak biçimde bir V açığı vardır. U_x, x noktasının komşuluklar yarı tabanı olduğundan $x \in \overset{o}{U}_{\alpha',x} \subseteq \overline{U_{\alpha',x}} \subseteq V$ olacak biçimde bir $\alpha' \in A$ vardır. $x \in \overset{o}{U}_{\alpha',x} \subseteq \overline{U_{\alpha',x}} \subseteq U$ olup $\mathcal{P}$ komşuluklar ikili tabanıdır. $\mathcal{P}$ nin destekli olduğunu görelim. $A' \subseteq A$ için

Ƥ' = { ($\overset{\circ}{U}_{\alpha,x}$, $\overline{U_{\alpha,x}}$): $\alpha \in A'\} \subseteq$ Ƥ olsun. $\overline{\bigcup\{\overset{\circ}{U}_{\alpha,x} : \alpha \in A'\}} \subseteq \overline{\bigcup\{U_{\alpha,x}\ \alpha \in A'\}}$ ve U_x, kapanışı koruyan taban olduğundan $\overline{\bigcup\{U_{\alpha,x}\ \alpha \in A'\}} = \bigcup\{\overline{U_{\alpha,x}} : \alpha \in A'\}$ olup Ƥ desteklidir.

Her m_1-uzay, m_2-uzay olduğundan ve Teorem 4.2.10 dan aşağıdaki sonuç elde edilir.

4.2.11. Sonuç

Düzenli her m_1 uzay m_3 uzaydır[3].

Düzenli her m_1 uzay m_3 uzay olduğundan ve Teorem 4.2.8 den Hausdorff uzaylarda monoton Hausdorff uzay olma özelliğinin m_3-uzay tanımına eşdeğer olduğundan aşağıdaki sonuç elde edilir.

4.2.12. Sonuç

Düzenli, Hausdorff her m_1 uzay monoton Hausdorff uzaydır[3].

Son olarak kuvvetli monoton Hausdorff ve kuvvetli monoton normal uzayların m_2-uzayı olduğunu görelim.

4.2.13. Teorem

X uzayı kuvvetli monoton Hausdorff uzay ise m_2-uzaydır[3].

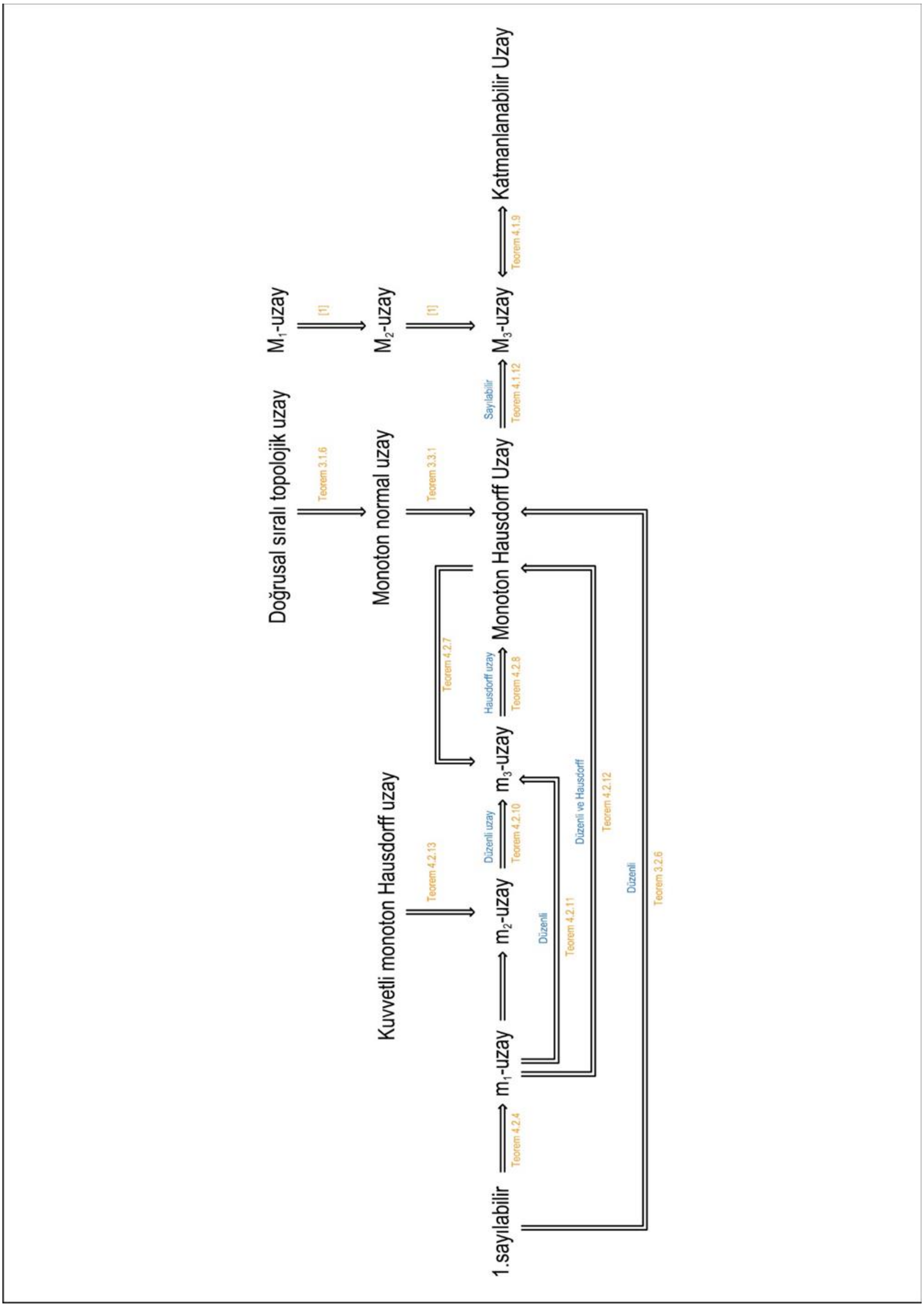
İspat

g, X uzayı üzerinde bir kuvvetli monoton Hausdorff 'luk operatörü, $x \in X$ ve $\mathcal{V}$, x noktasının komşuluklar tabanı olsun. Her $V \in \mathcal{V}$ için $V^* = X \setminus (\bigcup\{g(y,x) : y \in X \setminus V\})$ şeklinde tanımlansın. Her $y \in X \setminus V$ için g(y, x) açık, açıkların keyfi birleşimleri de açık olduğundan $(\bigcup\{g(y,x) : y \in X \setminus V\})$ açık, dolayısıyla V* kapalıdır. Her $y \notin V$ için $g(y, x) \notin V^*$ olup $y \notin V^*$ dir. Yani $V^* \subseteq V$ dır. Her $V \in \mathcal{V}$ için V* ların ailesini $\mathcal{V}^*$ ile gösterelim. Her $V \in \mathcal{V}$ için $x \notin X \setminus V = \overline{X \setminus V}$ olup X uzayı kuvvetli monoton Hausdorff uzay olduğundan $x \notin \overline{(\bigcup\{g(y,x) : y \in X \setminus V\})}$, yani $x \in X \setminus \overline{(\bigcup\{g(y,x) : y \in X \setminus V\})}$ dır.

$X \setminus \overline{(\bigcup\{g(y,x) : y \in X \setminus V\})} \subseteq (V^*)^o$ dır. Gerçekten; $(\bigcup\{g(y,x) : y \in X \setminus V\}) = G$ denilirse $V^* = X \setminus G$ dir. $x \in X \setminus \overline{G}$ olsun. $x \in (\overline{G})^c = (G^c)^o = (X \setminus G)^o = (V^*)^o$ dır.

U, x noktasının bir komşuluğu olsun. $x \in V \subseteq U$ olacak biçimde bir $V \in \mathcal{V}$ vardır. O halde $x \in (V^*)^o \subseteq V^* \subseteq V \subseteq U$ olup $\mathcal{V}^*$,x noktası için komşuluklar yarı tabanıdır.

$(\mathcal{V}^*)' \subseteq \mathcal{V}^*$ olsun. $\bigcup\{\overline{V^*} : V \in (\mathcal{V}^*)'\} = \bigcup\{V^* : V \in (\mathcal{V}^*)'\} \subseteq \overline{\bigcup\{V^* : V \in (\mathcal{V}^*)'\}}$ dır. Diğer yandan $z \notin \bigcup\{V^* : V \in (\mathcal{V}^*)'\}$ olsun. V^* ın tanımından her $V^* \in (\mathcal{V}^*)'$ için $z \in (\bigcup\{g(y,x) : y \in X \setminus V\})$ dır. Bu durumda her $V^* \in (\mathcal{V}^*)'$ için $z \in g(y, x)$ olacak biçimde $y \in X \setminus V$ vardır. X uzayı kuvvetli monoton Hausdorff uzay olduğundan her $V^* \in (\mathcal{V}^*)'$ için $z \in g(y, x) \Rightarrow g(z, x) \subseteq g(y, x) \subseteq (\bigcup\{g(y,x) : y \in X \setminus V\})$ dır. Her $V^* \in (\mathcal{V}^*)'$ için V^*ın tanımından $g(z, x) \cap V^* = \emptyset$, yani $g(z, x) \cap \bigcup\{V^* : V \in (\mathcal{V}^*)'\} = \emptyset$ olup $z \notin \overline{\bigcup\{V^* : V \in (\mathcal{V}^*)'\}}$ dır. $\mathcal{V}^*$ kapanışı korur.



Şekil 4.1. Çalışmada yer alan bazı teoremlerin birbirleri ile ilişkisinin şematik gösterimi

KAYNAKLAR

1. Ceder, J. G. (1961). Some generalizations of metric spaces. *Pasific Journal of Mathematics*, 11(1) 105-125.

2. Borges, C. (1966). On stratifiable spaces. *Pacific Journal of Mathematics*, 17(1), 1-16.

3. Buck, R. E. (1996). Some weaker monotone separation and basis properties. *Topology and its Applications*, 69(1), 1- 12.

4. Gruenhage, G. (1976). Stratifiable spaces are M_2. *Topology Proceedings*, 1, 221-226.

5. Junilla, H. J. K. (1978). Neighbornets. *Pasific Journal of Mathematics*, 76(1), 83-108.

6. Ito, M. (1985). M_3 spaces whose every point has a closure preserving outer base are M_1. *Topology and its Applications*. 19(1), 65-69.

7. Yıldız, C. (2013). *Genel Topoloji*. (4. Baskı). Ankara: Gazi Kitabevi.

8. Heath, R.W., Lutzer, D.J., Zenor,P.L. (1973). Monotonically Normal Spaces. *Transactions of the American Mathematical Society*, 178, 481-493.

9. Kunen, K., Vaughan, J. (1984) *Handbook of Set-Theoretic Topology*. Netherlands: Elsevier Science Publishing Company.

10. Heath, R.W. (1989). Monotone normality in topological groups, *Serija Mathematics*, 3, 13-18.

11. Davis, S. W.(1978). Spaces with linearly ordered local bases, *Topology Proceedings*, 3, 37-51.

12. Al-Bsoul, A. (2007). Characterization of Monotonically Hausdorff Spaces. *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences*, 2(14), 693-700.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı	: HİMMETOĞLU ERGÜN, Gözde
Uyruğu	: T.C.
Doğum tarihi ve yeri	: 21.07.1989, Ordu
Medeni hali	: Evli
Telefon	: 0 (506) 415 27 80
e-mail	: gozde.himmetoglu@gazi.edu.tr

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Yüksek lisans	Gazi Üniversitesi /Matematik Bölümü	Devam Ediyor
Lisans	Gazi Üniversitesi /Matematik Bölümü	2013
Lise	Keçiören Anadolu Lisesi	2007

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

1. Himmetoğlu Ergün, G. (2016). *Monoton Normal ve Monoton Hausdorff Uzaylar*, 11. Ankara Matematik Günleri Sempozyumunda Sunulmuştur, Ankara, Türkiye.

Hobiler

Kitap okumak, araştırma yapmak, matematik.

GAZİLİ OLMAK AYRICALIKTIR...