

HAZİRAN 2018

Doktora–Matematik Bölümü

ERKAN AĞYÜZ

GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BERNSTEIN TIPLI POLİNOMLARIN ÜRETEÇ
FONKSİYONLARI VE ÖZELLİKLERİ

MATEMATİK BÖLÜMÜ
DOKTORA TEZİ

ERKAN AĞYÜZ
HAZİRAN 2018

**Bernstein Tipli Polinomların Üreteç Fonksiyonları ve
Özellikleri**

Gaziantep Üniversitesi

Matematik Bölümü

Doktora Tezi

Danışman

Prof. Dr. Mehmet AÇIKGÖZ

Erkan AĞYÜZ

Haziran 2018



© 2018 [Erkan AĞYÜZ]

T.C.
GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Tezin Adı: Bernstein Tipli Polinomların Üreteç Fonksiyonları ve Özellikleri

Öğrencinin, Adı Soyadı : Erkan AĞYÜZ

Tez Savunma Tarihi : 28.06.2018

Fen Bilimleri Enstitüsü onayı



Prof. Dr. Ahmet Necmeddin YAZICI

FBE Müdürü

Bu tezin Doktora tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylarım.



Prof. Dr. Adil KILIÇ

Enstitü ABD Başkanı

Bu tez tarafımdan okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.



Prof. Dr. Mehmet AÇIKGÖZ

Tez Danışmanı

Bu tez tarafımızca okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Doktora tezi olarak oy birliği ile kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri:

Prof. Dr. Yılmaz ŞİMŞEK

Prof. Dr. Mustafa ALKAN

Prof. Dr. Mehmet AÇIKGÖZ

Doç. Dr. Memet ŞAHİN

Dr. Öğr. Üyesi Mine MENEKŞE YILMAZ

İmzası



İlgili tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek ilgili tezde yer aldığını beyan ederim.

Erkan AĞYÜZ

ABSTRACT

GENERATING FUNCTIONS OF BERNSTEIN TYPE POLYNOMIALS AND THEIR PROPERTIES

AGYUZ, Erkan

Ph.D. Thesis, Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Mehmet AÇIKGÖZ

June 2018

96 pages

The main purpose of this thesis is to give Bernstein polynomials and various properties with related to these polynomials in analytic number theory depend on (p, q) -analysis. This thesis consists of seven chapters. First chapter is introduction and literature review. In the second chapter, some basic definitions, notations and theorems which will be used in the other chapters are given. In the third chapter, the results for (p, q) -Bernstein polynomials under (p, q) -integral operator and their relations between (p, q) -Gamma and (p, q) -Beta functions are obtained. In the fourth chapter, the generating function of (p, q) -Bernstein polynomials are given by using (p, q) -calculus and some properties for these polynomials are investigated by aid of generating function. In the fifth chapter, new two type (p, q) -Bernstein polynomials are given and some results and generating function by aid of these polynomials are obtained. In the sixth chapter, (p, q) -Beta polynomials are defined and some properties for these polynomials are investigated. In the seventh chapter, the conclusions in this thesis are presented.

Keywords: (p, q) -analysis, (p, q) -Bernstein polynomials, generating function, (p, q) -Beta polynomials.

ÖZET

BERNSTEIN TİPLİ POLİNOMLARIN ÜRETEÇ FONKSİYONLARI VE ÖZELLİKLERİ

AĞYÜZ, Erkan

Doktora Tezi, Matematik Bölümü

Danışman: Prof. Dr. Mehmet AÇIKGÖZ

Haziran 2018

96 sayfa

Bu tezin temel amacı; (p, q) -analizdeki Bernstein polinomlarını ve bu polinomlar ile ilgili analitik sayılar teorisindeki çeşitli özellikleri vermektir. Bu tez yedi bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş ve literatür taraması yapılmıştır. İkinci bölümde, tezin ilerideki bölümlerinde kullanılan tanım, kavram ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde, (p, q) -Bernstein polinomlarının integral operatörü altındaki sonuçları ile (p, q) -Gama ve (p, q) -Beta fonksiyonları arasındaki ilişki elde edilmiştir. Dördüncü bölümde, (p, q) -Bernstein polinomlarının üreteç fonksiyonu (p, q) -analiz yardımıyla verilmiş ve üreteç fonksiyonuna bağlı bunların bazı özellikleri incelenmiştir. Beşinci bölümde, iki yeni (p, q) -Bernstein polinomu tanımlanmış ve bu tanımlar yardımıyla polinomların üreteç fonksiyonları ile bazı özellikleri elde edilmiştir. Altıncı bölümde, Beta polinomlarının (p, q) -genelleştirilmesi tanımlanmış ve bu polinomların bazı özellikleri incelenmiştir. Yedinci bölümde tezde elde edilen sonuçlar verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: (p, q) -analiz, (p, q) -Bernstein polinomları, üreteç fonksiyonu, (p, q) -Beta polinomları.



Aileme...

TEŞEKKÜR

Doktora öğrenimim süresince tez çalışmamın planlanmasında, araştırılmasında, yürütülmesinde ve oluşumunda ilgi ve desteklerini esirgemeyen,engin bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım, yönlendirme ve bilgilendirmeleriyle çalışmamı bilimsel temeller ışığında şekillendiren, danışman hocam, Sayın Prof. Dr. Mehmet AÇIKGÖZ e ve tez jüri üyesi Sayın Prof. Dr. Yılmaz ŞİMŞEK e sonsuz minnet ve saygılarımı sunarım.

Maddi ve manevi desteklerini hiçbir zaman üzerimden eksik etmeyen sevgili annem Hilal AĞYÜZ, sevgili babam Zafer AĞYÜZ ve sevgili kardeşim Dt. Gürkan AĞYÜZ e sabırlarından ötürü şükranlarımı ve saygılarımı sunarım.

Son olarak bu çalışma sırasında verdiği burslarla bana destek olan bilimin ve bilim insanının destekçisi TÜBİTAK kurumuna teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ABSTRACT	v
ÖZET	vi
TEŞEKKÜR.....	viii
İÇİNDEKİLER.....	ix
TABLolar LİSTESİ	x
ŞEKİLLER LİSTESİ	xi
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	xii
1.GİRİŞ	1
2.TEMEL KAVRAMLAR.....	9
2.1 Kuantum (q -) Analiz	9
2.2 (p, q)-Analiz	13
2.3 Üreteç Fonksiyonları	18
2.4 p - Adık İntegral ve Uygulamaları	19
3.(p, q) -BERNSTEIN POLİNOMLARI VE ONLARIN BAZI TEMEL ÖZELLİKLERİ	22
3.1. (p, q)-Bernstein Operatörü ve Polinomları	22
3.2. (p, q)-Bernstein Polinomlarının (p, q)-Türev Operatörüne Bağlı Sonuçları	25
3.3 (p, q)-Bernstein Polinomlarının İntegral Temsilleri ve Onların Özel Fonksiyonlar ile İlişkisi	29
4.(p, q)-BERNSTEIN POLİNOMLARININ ÜRETEÇ FONKSİYONLARI VE ONLARIN ÖZELLİKLERİ	37
5.I. VE II. TİP (p, q)-BERNSTEIN POLİNOMLARI VE ÖZELLİKLERİ	47
5.1 I. Tip (p, q)-Bernstein Polinomları.....	47
5.2 II. Tip (p, q)-Bernstein Polinomları	53
6.(p, q) -BETA POLİNOMLARI VE ÖZELLİKLERİ	62
7.TARTIŞMA VE SONUÇ	72
KAYNAKLAR.....	74
ÖZGEÇMİŞ.....	80

TABLÖLAR LİSTESİ

Sayfa

Tablo 1.1.1. Bazı özel polinom aileleri ve onların üreteç fonksiyonları.....	1
Tablo 2.1.1. (p, q) -cebirsel operatörler.....	14
Tablo 2.1.2. Özel sayıların p -adik integraller yardımıyla üreteç fonksiyon temsilleri.....	21

ŞEKİLLER LİSTESİ

Sayfa

Şekil 3.1.1	Klasik, q ve (p, q) Bernstein polinomları arasındaki ilişki.....	23
Şekil 4.1.1	$F_k^{p,q}(x, t)$ üreteç fonksiyonunun grafiği.....	40
Şekil 5.1.1.	I. tip (p, q) -Bernstein polinomları.....	48
Şekil 5.1.2.	I. tip (p, q) -Bernstein polinomları üreteç fonksiyonu.....	49
Şekil 5.2.1.	II. tip (p, q) -Bernstein polinomları.....	53
Şekil 5.2.2.	II. tip (p, q) -Bernstein polinomları üreteç fonksiyonu.....	57
Şekil 6.1.1.	(p, q) -Beta tipli rasyonel fonksiyonlar.....	63
Şekil 6.1.2.	(p, q) -Beta polinomları.....	63
Şekil 6.1.3.	(p, q) -Beta tipli rasyonel fonksiyonların üreteç fonksiyonları.....	64
Şekil 6.1.4.	(p, q) -Beta polinomlarının üreteç fonksiyonları.....	65

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$B_n(f, x)$	Bernstein operatörü
$B_k^n(x)$	n . dereceden Bernstein Polinomları
$B_k^n(x, q)$	Bernstein polinomlarının q - Genellemesi
$B_n(f, x, p, q)$	(p, q) - Bernstein operatörü
$B_{k,n}(x, p, q)$	(p, q) - Bernstein polinomları
$[n]_q$	n in q benzeri
$d_q(f(x))$	$f(x)$ in q diferansiyeli
$D_q(f(x))$	$f(x)$ in q türevi
e_q^x	I. Tip q üstel fonksiyon
E_q^x	II. Tip q üstel fonksiyon
$\Gamma_q(t)$	q -Gama Fonksiyonu
$B_q(t, s)$	q -Beta Fonksiyonu
$[n]_{p,q}$	n in (p, q) benzeri
$D_{p,q}(f(x))$	$f(x)$ in (p, q) -türevi
$e_{p,q}(x)$	I. Tip (p, q) -üstel fonksiyon
$E_{p,q}(x)$	II. Tip (p, q) -üstel fonksiyon
$\Gamma_{p,q}(x)$	(p, q) -Gama fonksiyonu
$B_{p,q}(m, n)$	(p, q) -Beta fonksiyonu
$ord_p(a)$	a nın p adik değeri
$\mathbb{Z}_p$	p - Adik tamsayılar kümesi
$\mathbb{Q}_p$	p - Adik rasyonel sayılar kümesi
$F_k^{p,q}(x, t)$	(p, q) - Bernstein polinomlarının üreteç fonksiyonu

$B_{k,n}(x; p, q)$

I. tip Bernstein polinomları

$\mathfrak{B}_{k,n}^{p,q}(x)$

II. tip Bernstein polinomları

$M_{k,n}^{p,q}(x)$

(p, q) -Beta tipli rasyonel fonksiyonlar

$B_{k,n}^{p,q}(x)$

(p, q) -Beta polinomları



BÖLÜM 1

GİRİŞ

Klasik polinomların sonlu hesaplama yöntemleri, toplama, çıkarma ve çarpma gibi birçok cebirsel işleme uygun özelliğe sahip olması ve bu işlemler altında kapalı olması birçok özel polinom ailesinin matematik ve mühendislik problemlerinde kullanılmasına olanak vermektedir. Bu çalışmalar yapılırken önemli problemlerden birisi özel polinom ailelerinin üreteç fonksiyonuna sahip olup olmamasıdır. Eğer bir polinom ailesi üreteç fonksiyonuna sahip ise o polinom ailesi ile ilgili birçok yeni ve ilginç eşitlikler elde edilmektedir. Üreteç fonksiyonunun esas amacı başta kombinatorik olmak üzere analitik sayılar teorisindeki çözümü zor olan problemlere çözüm yolları ortaya koymaktır. Son zamanlarda birçok yazar birden fazla polinom ailesi üzerine çalışmaktadırlar [1-8]. Bazı özel polinom aileleri ve onların üreteç fonksiyonları aşağıda Tablo 1.1.1.deki gibi ifade edilir.

Tablo 1.1.1 Bazı özel polinom aileleri ve onların üreteç fonksiyonları.

Polinom Ailesi	Üreteç Fonksiyonu
Bernoulli Polinomları, $B_n(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{t^n}{n!} = \frac{te^{xt}}{e^t - 1}, t < 2\pi.$
Euler Polinomları, $E_n(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty} E_n(x) \frac{t^n}{n!} = \frac{2e^{xt}}{e^t + 1}, t < \pi.$
Genocchi Polinomları, $G_n(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty} G_n(x) \frac{t^n}{n!} = \frac{2te^{xt}}{e^t + 1}, t < \pi.$
Changee Polinomları, $Ch_n(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty} Ch_n(x) \frac{t^n}{n!} = \frac{2}{2+t} (1+t)^x.$
Daehee Polinomları, $D_n(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty} D_n(x) \frac{t^n}{n!} = \frac{\log(1+t)}{t} (1+t)^x.$

1912 yılında S.N. Bernstein daha sonra kendi ismiyle anılacak olan Bernstein polinomlarını tanımladı. Bunların yardımıyla $[0,1]$ de sürekli her fonksiyona yaklaşılabilecek bir operator tanımladı [9]. Buna göre, f fonksiyonu $[0,1]$ aralığında tanımlı olmak üzere,

$$B_n(f, x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \quad (1.1.1)$$

şeklinde tanımlanan operatöre Bernstein operatörü adı verilmiş olup bu operatör yardımıyla $[0,1]$ aralığındaki sürekli her f fonksiyonuna yaklaşılabılır. Burada

(1.1.1) de verilen $\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$ ifadesine n . dereceden Bernstein polinomları denir

ve $B_k^n(x)$ şeklinde gösterilir [10]. Bernstein polinomlarının kullanışlı olmasına imkan veren birçok önemli özellik ve algoritma bulunmaktadır. Bunlardan bazıları aşağıda verilmiştir [11]:

- **Simetri özelliği:** $x \in [0,1]$ ve $k = 0, 1, \dots, n$ için

$$B_k^n(x) = B_{n-k}^n(1-x)$$

özellği sağlanır.

- **Yineleme özelliği:** $n+1$. dereceden Bernstein polinomları, n . dereceden Bernstein polinomları yardımıyla

$$B_k^{n+1}(x) = t B_{k-1}^n(x) + (1-t) B_k^n(x)$$

olarak tanımlanır. Burada $k = 0, \dots, n+1$ için $k < 0$ veya $k > n$ ise $B_k^n(x) = 0$ dır.

- **Pozitif olma özelliği:** $B_k^n(x)$ polinomları $x \in [0,1]$ için $B_k^n(x) \geq 0$ özelliğine sahiptir. Bu özellik $[0,1]$ aralığı dışında geçerli değildir.
- **Birimin parçalanma özelliği:** $B_k^n(x)$ polinomları

$$\sum_{k=0}^n B_k^n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1^n$$

şeklinde gösterilebilir. Bu özellik $[0,1]$ aralığına kısıtlanmamaktadır.

- **Tek terimli tabanlarla ilişki özelliği:** n . dereceden Bernstein polinomları ve kuvvet tabanları arasında

$$x^k = \sum_{j=k}^n \frac{\binom{j}{k}}{\binom{n}{k}} B_j^n(x), \quad (1.1.2)$$

$$B_k^n(x) = \sum_{j=k}^n (-1)^{j-k} \binom{n}{j} \binom{j}{k} x^j$$

özellikleri bulunmaktadır. Burada $k = 0, 1, \dots, n$ olmak üzere $k = 0$ için (1.1.2) deki ilk eşitlik birimin parçalanma özelliğini vermektedir. Ayrıca $k = 1$ için

$$x = \frac{B_1^n(x) + B_2^n(x) + \dots + n B_n^n(x)}{n}$$

eşitliği elde edilir.

- **Bağımsız değişkenin ölçeklendirilmesi** $B_k^n(x)$ polinomları için $x \rightarrow rx$ dönüşümü yapılırsa $[0,1] \rightarrow [0,r]$ olur. $1-rx = (1-x) + (1-r)x$ göz önüne alınırsa

$$B_k^n(rx) = \binom{n}{k} (1-rx)^{n-k} (rx)^k \quad (1.1.3)$$

yazılır. (1.1.3) de ki eşitlikte Binom açılımı kullanılmasıyla

$$B_k^n(rx) = \sum_{j=k}^n B_k^j(r) B_j^n(x), \quad j = 0, \dots, n.$$

eşitliği elde edilir.

- **Türev özelliği:** $B_k^n(x)$ polinomları türev operatörü altında

$$\frac{d}{dt} B_k^n(x) = n [B_{k-1}^{n-1}(x) - B_k^{n-1}(x)]$$

şeklinde bir bağıntıya sahiptir. Burada $B_{-1}^{n-1}(x) \equiv 0$ ve $B_n^{n-1}(x) \equiv 0$ dır.

- **İntegral özelliği:** $B_k^n(x)$ polinomları integral operatörü altında

$$\int_0^x B_k^n(t) dt = \frac{1}{n+1} \sum_{j=k+1}^{n+1} B_j^{n+1}(x)$$

şeklinde bir eşitliğe sahiptir.

Bernstein polinomları tanımlandığı günden bu zamana kadar sadece matematik alanında değil istatistik ve mühendislik gibi diğer alanlarda da birçok araştırmacı için çalışılan önemli bir polinom ailesi olmuştur. Bu yapılan çalışmalardan bazılarını özetlemek gerekirse; Binom dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu olarak tanımlanan Bernstein polinomları olasılık ve istatistik teorisinde uygulama alanına sahiptir. Bernoulli dağılımında bir olayın iki durumu söz konusudur. Olay ya başarılıdır ya da başarısızdır. Bernoulli denemesindeki başarılı olayların sayısı r olmak üzere bu r olaylarının olasılığı

$$p_n(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, k = 0, 1, \dots, n$$

ile tanımlanır. Dağılım ve karar fonksiyonlarının düzgün tahminlerinde Bernstein polinomlarının uygulamaları görülmektedir [12-14].

Mühendislikte de istatistik biliminde olduğu gibi Bernstein polinomlarına rastlanmaktadır. Özellikle bilgisayar grafiklerinin elde edilmesinde kullanılan

$$\sum_{k=0}^n p_k B_{k,n}(u) \quad (1.1.4)$$

olarak bir Fransız mühendis olan Pierre Bezier tarafından otomobil tasarımı için geliştirilmiş olan Bezier eğrilerinde Bernstein polinomları ile karşılaşılmaktadır. (1.1.4) deki $B_{k,n}(u)$ ifadesi n . dereceden k . Bernstein polinomunu göstermektedir.

Otomobil tasarımı problemi ile ortaya çıkmış olan Bezier eğrileri son zamanlarda bilgisayar destekli tasarımlar ve bilgisayar grafiklerindeki gelişmeler yardımıyla tekrar ilgi görmeye başlamıştır. Bu alanda önemli çalışmalar ortaya koyan R. Goldman'a göre [15], serbest formlu olarak adlandırılan eğriler ve yüzeyler bir aracın kaputu, bir geminin gövdesi veya bir uçağın tüm gövdesi gibi insan yapımı nesneleri tanımlamaya

yardımcı olan düz şekillerdir. Bu insan yapımı olan şekillerin birkaç parametre ile kolay bir şekilde tarif edilmesi mümkün değildir. Bu problemten dolayı serbest form özelliğine sahip eğrileri ve yüzeyleri tanımlamak için Bernstein polinomları ve bu polinomların bazı genelleştirilmiş halleri alternatif bir çözüm olarak kullanılmaktadır. Bernstein polinomları kullanılarak elde edilen eğriler büyük ölçekli endüstriyel tasarımların ve üretim için kullanılan mekanik bileşenler ile montajların tasarımları için katkıda bulunmaktadır. Bezier eğrileri de tıpkı Bernstein polinomları gibi medikal fizik, biomedikal v.b. farklı alanlarda uygulamaya sahiptir [16].

Matematikte ise başta Yaklaşım Teorisi olmak üzere birçok alt dalda çalışılmıştır ve çalışılmaya devam edilmektedir [17-19]. Bernstein polinomları 2010 yılına kadar üreteç fonksiyonları tanımlanmadan birçok araştırmacı tarafından çalışılmıştır. 2010 yılında Simsek ve Acikgoz [20] q - Bernstein tipli polinomlar için bir üreteç fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımladılar.

$$\sum_{n=k}^{\infty} Y_n(k; x, q) \frac{t^n}{n!} = \frac{([x]t)^k}{k!} e^{[1-x]t} \quad (1.1.5)$$

Daha sonra, Açıkgoz ve Aracı [21], (1.1.5) de $q \rightarrow 1$ iken elde edilebilen Bernstein polinomlarının üreteç fonksiyonlarını aşağıdaki gibi tanımlamıştır.

$$\sum_{n=k}^{\infty} B_{k,n}(x) \frac{t^n}{n!} = \frac{(tx)^k}{k!} e^{t(1-x)}, t \in \mathbb{C}. \quad (1.1.6)$$

Bernstein polinomları için (1.1.6) da elde edilen yeni tanım birçok çalışmanın ortaya çıkmasına ilham kaynağı olmuştur. Örneğin; üreteç fonksiyonları yardımıyla Bernstein polinomları için yineleme bağıntıları ve türev formülleri gibi birçok yararlı sonuç bulunmuştur. Analitik sayılar teorisinde Frobenius-Euler ve Bernoulli polinomları gibi özel polinomlar ile Bernstein polinomları arasındaki ilişkiler araştırılmıştır [22]. Bernstein polinomlarının üreteç fonksiyonunun bazı özellikleri ile Beta tipli polinomların özellikleri kullanılarak Binom katsayıları ve onların tersleri ile Catalan sayılarını içeren bazı yeni eşitlikler elde edilmiştir [23]. Bazı özel hallerde Bernstein ve Beta tipli polinomları içeren yeni bir polinom ailesi ve onların üreteç fonksiyonu tanımlanmıştır [24].

Bir sonraki bölümde detaylı olarak verilecek olan q -analiz yardımıyla Bernstein polinomları için yeni eşitlikler ve bağıntılar içeren önemli çalışmalar ortaya çıkmıştır. 1996 yılında G. M. Phillips, Bernstein polinomlarının q -genellemesini

$$B_k^n(x, q) = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k (1-x)_q^{n-k} \quad (1.1.7)$$

olarak tanımlamış ve bu yeni polinom ailesinin bazı temel özelliklerini incelemiştir [25]. G. M. Phillips'in (1.1.7) deki tanımından ilham alınarak, Bernstein polinomları için yeni q -genellemelerine sahip tanımlar verilip bu tanımlar yardımıyla q -Bernstein polinomları için bazı sonuçlar ve q -Euler polinomları ile arasında yeni bağıntılar elde edilmiştir [26]. Z_p , p -adik tamsayılar, kümesi üzerinde q -Bernstein polinomları incelenmiş ve bu polinomların q -Stirling sayıları ile Carlitz tipli q -Bernoulli sayıları arasında ki bazı bağıntılar elde edilmiştir [27]. Z_p kümesi üzerinde tanımlı olan fermionik p -adik q -integral yardımıyla q -Bernstein ve q -Euler polinomları arasında bazı sonuçlar elde edilmiştir [28]. q -Bernstein tipli polinomlar için yeni bir üreteç fonksiyonu tanımlanmış ve bu üreteç fonksiyonu yardımıyla yineleme bağıntıları elde edilip bu üreteç fonksiyonuna Mellin dönüşümü uygulanarak q -Bernstein polinomlarının interpolasyonu elde edilmiştir [29]. q -Bernstein polinomları kullanılarak insan konuşmalarını tanımlamak için yazılımlar geliştirilmiştir [30]. q -Bernstein polinomları için q -Frobenius-Euler polinomları, l -fonksiyonları ve 2. tip q -Stirling sayıları ile ilişkili yeni bağıntılar ve eşitlikler elde edilmiştir [31].

2015 yılında M. Mursaleen ve ark. Bernstein operatörünün (p, q) -genellemesini

$$B_n(f, x) = \sum_{k=0}^n p^{\binom{k}{2} - \binom{n}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q} x^k (1-x)_{p,q}^{n-k} f\left(\frac{[k]_{p,q}}{[n]_{p,q}}\right), x \in [0, 1]. \quad (1.1.8)$$

olarak tanımlayıp bu yeni operatörün yakınsaklık özellikleri incelenmiştir [32].

(1.1.8) de verilen eşitlikteki

$$B_{k,n}^{p,q}(x) = p^{\binom{k}{2} - \binom{n}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q} x^k (1-x)_{p,q}^{n-k}$$

ifadesi n . mertebeden k . (p, q) -Bernstein polinomu olarak adlandırılır.

Bu yeni operatörün tanımlanması ile özellikle yaklaşım teorisindeki önemli operatörlerin birçoğu (p, q) analize taşınmıştır. Bu yapılan çalışmalardan bazıları aşağıdaki gibi verilir:

Bernstein-Stancu operatörünün (p, q) benzeri tanımlanarak Krovkin tipli yaklaşım teoremine bağlı bu operatörün yakınsaklık özellikleri incelenmiş ve bazı özel fonksiyonlar için operatörün yakınsaklık özellikleri karşılaştırılmıştır [33]. q -Bernstein-Schurer operatörünün (p, q) -genellemesi tanımlanmış ve bu yeni operatörün Korovkin tipli yaklaşım teoremi elde edilmiştir. Ayrıca süreklilik modülü kullanılarak bu operatörün yakınsaklığı incelenmiştir [34]. (p, q) - tamsayılarına bağlı Szasz-Mirakyan operatörünün yeni genellemeleri verilmiş ve sırasıyla sınırlı ve sınırsız aralıklarda bu yeni operatörün düzgün yakınsaklığı incelenmiştir [35]. (p, q) -Baskakov-Durrmeyer operatörlerinin Stancu tipli genelleştirilmeleri verilerek bu operatörler için yerel ve ağırlıklı yaklaşım özellikleri araştırılıp süreklilik modülü yardımıyla yakınsaklık aralıkları elde edilmiştir [36].

Bu tez yedi bölümden oluşmakta olup birinci bölüm giriş ve literatür araştırması kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde, sonraki bölümlerde elde edilecek sonuçlara hazırlık için gerekli tanım, teorem ve kavramlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde, (p, q) -Bernstein polinomları için bazı sonuçlar elde edilmiş olup bu polinomları (p, q) -türev ile (p, q) -integral altında sonuçları incelenmiştir. Ayrıca, bu sonuçların (p, q) -Gama ve (p, q) -Beta fonksiyonları ile ilişkisi elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde, (p, q) -Bernstein polinomları için üreteç fonksiyonu tanımlanmıştır. Bu fonksiyon yardımıyla, (p, q) -Bernstein polinomları için rekürans bağıntıları ve fonksiyonel denklemler elde edilmiştir.

Beşinci bölümde, modifiye edilmiş (p, q) -Bernstein polinomları tanımlanmıştır. Bu polinomları başta üreteç fonksiyonları olmak üzere yeni ve kullanışlı sonuçları elde edilmiştir.

Altıncı bölümde, (p, q) -Beta tipli rasyonel fonksiyonlar ve polinomları tanımlanmıştır. Bu fonksiyonlar ve polinomlar için başta üreteç fonksiyonları olmak üzere yeni ve kullanışlı sonuçları elde edilmiştir.

Yedinci bölüm, tartışma ve sonuç kısmına ayrılmıştır.



BÖLÜM 2

TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Kuantum (q -) Analiz

Bu bölümde kuantum analiz kavramı ve bu kavramın bazı temel özellikleri ve sonuçları verilecektir. Aşağıda verilecek olan sonuçlar Kac ve Cheung ın ''Quantum Calculus'' adlı kitabından alınmış olup daha fazla bilgi için ilgili kaynağa başvurulabilir [37].

Tanım 2.1.1: n herhangi bir pozitif tamsayı olmak üzere;

$$[n]_q = \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

şeklinde tanımlanan ifadeye n in q benzeri denir.

Bu tez boyunca q parametresi $0 < q < 1$ olarak tanımlanacaktır. Bazı q tamsayıları aşağıdaki gibi gösterilir:

$$[1]_q = 1$$

$$[2]_q = q + 1$$

$$[3]_q = q^2 + q + 1$$

$$[4]_q = q^3 + q^2 + q + 1$$

...

Tanım 2.1.2: $f(x)$ keyfi bir fonksiyon olmak üzere

$$d_q(f(x)) = f(qx) - f(x)$$

ifadesine $f(x)$ in q diferansiyeli denir.

q diferansiyel yardımıyla keyfi bir $f(x)$ fonksiyonunun q türevi aşağıdaki tanım yardımıyla verilir.

Tanım 2.1.3: $f(x)$ keyfi bir fonksiyon olmak üzere

$$D_q(f(x)) = \frac{d_q(f(x))}{d_q(x)} = \frac{f(qx) - f(x)}{qx - x}$$

ifadesine $f(x)$ fonksiyonunun q -türevi denir.

Klasik türev operatörünün sahip olduğu lineerlik (doğrusal) özelliği q -türev operatörü içinde sağlanmaktadır. Bir başka deyişle $f(x), g(x)$ keyfi iki fonksiyon ve a ile b keyfi sabitler olmak üzere

$$D_q(af(x) + bg(x)) = aD_q(f(x)) + bD_q(g(x))$$

özelligi sağlanmaktadır.

Klasik analizde fonksiyonların cebirsel işlemlerinin türev operatörü altında sahip olduğu özellikler q analizde de benzer olarak bulunmaktadır. Bu özellikler

- *Fonksiyonların çarpımının q -türevi*

$$D_q(f(x)g(x)) = f(qx)D_q(g(x)) + g(x)D_q(f(x))$$

- *Fonksiyonların bölümünün q -türevi*

$$D_q\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(qx)D_q(f(x)) - f(qx)D_q(g(x))}{g(x)g(qx)}$$

şeklindedir.

Tanım 2.1.4: $0 < q < 1$ olmak üzere

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q!}{[k]_q![n-k]_q!}$$

olarak tanımlanan eşitliğe q -Binom katsayısı denir. Burada $k \leq n$ olup $[n]_q! = [n]_q \cdot [n-1]_q \cdot \dots \cdot [1]_q$ olarak tanımlanıp n in q faktöriyel olarak adlandırılır.

Klasik anlamda binom katsayılarının sahip olduğu Pascal kuralı, q -Binom katsayıları için

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q &= \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q + q^k \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q \\ \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q &= q^{n-k} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q + \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.1.5: $f(x)$ N . dereceden herhangi bir fonksiyon ve c herhangi bir reel sayı olmak üzere $f(x)$ fonksiyonunun c civarındaki q -Taylor açılımı

$$f(x) = \sum_{j=0}^N (D_q^j f)(c) \frac{(x-c)_q^j}{[j]_q!}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.1.6: a herhangi bir reel sayı ve n bir doğal sayı olmak üzere

$$(x+a)_q^n = \sum_{j=0}^n \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q q^{\frac{j(j-1)}{2}} a^j x^{n-j}$$

ifadesine q -Binom açılımı denir ve $q \rightarrow 1^-$ durumunda klasik Binom açılımı elde edilir.

Birçok matematiksel kavramın q benzeri literatürde bulunduğu gibi üstel fonksiyonların ve integral operatörlerin de q benzerleri tanımlanmıştır. Üstel fonksiyonların q benzeri verilmeden önce literatürde Euler eşitlikleri olarak tanımlanan aşağıdaki seri açılımları verilecektir.

$$E_1 : (1+x)_q^\infty = \sum_{j=0}^{\infty} q^{\frac{j(j-1)}{2}} \frac{x^j}{(1-q) \cdot (1-q^2) \cdot \dots \cdot (1-q^j)}$$

$$E_2 : \frac{1}{(1-x)_q^\infty} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{(1-q) \cdot (1-q^2) \cdot \dots \cdot (1-q^j)}.$$

Bu eşitlikler sırasıyla Euler in birinci ve ikinci eşitliği olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.7: $0 < q < 1$ olmak üzere q - üstel fonksiyonlar

$$e_q^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{[j]_q!}$$

$$E_q^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{q^{\frac{j(j-1)}{2}} x^j}{[j]_q!}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.1.8: $D_q F(x) = f(x)$ olacak şekilde bir $F(x)$ fonksiyonu bulunabilirse, $F(x)$ e, $f(x)$ fonksiyonunun ters türevi denir ve

$$\int f(x) d_q x$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 2.1.9: $0 < q < 1$ ve $f(x)$ keyfi bir fonksiyon olmak üzere

$$\int f(x) d_q x = (1-q)x \sum_{j=0}^{\infty} q^j f(q^j x)$$

şeklinde tanımlanan seriye $f(x)$ fonksiyonunun q -Jackson integrali denir.

Teorem 2.1.10: $0 < q < 1$ olsun. $0 \leq \alpha < 1$ özelliğindeki bazı α değerleri için $|f(x)x^\alpha|, [0, A]$ aralığında sınırlı ise Jackson integrali $f(x)$ in bir q -ters türevi olan $F(x)$ fonksiyonuna yakınsar. Ayrıca, $F(0) = 0$ olmak üzere $F(x)$ fonksiyonu $x = 0$ da süreklidir.

Tanım 2.1.11: $0 < a < b$ olmak üzere belirli q -integral

$$\int_a^b f(x) d_q x = (1-q)b \sum_{j=0}^{\infty} q^j f(q^j b)$$

olmak üzere

$$\int_a^b f(x) d_q x = \int_0^b f(x) d_q x - \int_0^a f(x) d_q x$$

olarak tanımlanır. Belirli q -integrallerin tanımlanması Beta ve Gama fonksiyonlarının q -benzerlerinin tanımlanmasına imkan vermiştir.

Tanım 2.1.12: Herhangi bir $t > 0$ sayısı için

$$\Gamma_q(t) = \int_0^{\infty} x^{t-1} E_q^{-qx} d_q x$$

olarak tanımlanan fonksiyona q -Gamma fonksiyonu denir.

Klasik Gama fonksiyonun sahip olduğu bazı özelliklere q -Gama fonksiyonları da sahiptir. Bunların bazıları aşağıda verilmiştir.

- $\Gamma_q(t+1) = [t]_q \Gamma_q(t)$
- $\Gamma_q(n+1) = [n]_q!, n \geq 0$

Tanım 2.1.13: Herhangi $t, s > 0$ sayısı için

$$B_q(t, s) = \int_0^1 x^{t-1} (1-qx)_q^{s-1} d_q x$$

olarak tanımlanan fonksiyona q -Beta fonksiyonu denir.

2.2 (p, q) -Analiz

Chakrabarti ve Jagannathan'ın çalışmalarıyla [38] aynı zaman diliminde, Brodimas ve ark. [39] ile Arik ve ark. [40] birbirlerinden bağımsız şekilde fizik literatüründe (p, q) -sayılarına giriş yapmıştır. Aynı zaman diliminde herhangi bir bağlantı olmaksızın matematik ve fizik alanında kuantum grupları ile ilgili çalışmalar yapılmıştır. Örneğin, Wach ve White [41] matematik literatüründe Sterling sayılarını genişletmek ve bazı kombinatorik problemleri çalışmak amacıyla (p, q) -sayılarını

$$\frac{p^n - q^n}{p - q} \text{ şeklinde tanımlamıştır. Fizik literatüründe, Katriel ve Kibler [42] } (p, q)\text{-}$$

Binom katsayılarını tanımlayarak bozulmuş Boson operatörleri için bir (p, q) -Binom teoremi elde etmiştir. Burban ve Klimyk [43], (p, q) -türev, (p, q) -integrasyon ve (p, q) -hipergeometrik seriler üzerine çalışmıştır.

Bu bölümde (p, q) -analiz kavramı ve bu kavramın bazı temel özellikleri ve sonuçları verilecektir. (p, q) -analiz kavramı bu tezde literatürde tanımlanmış olan (p, q) -Bernstein polinomlarının bazı cebirsel özelliklerini incelemek, modifiye edilmiş (p, q) -Bernstein polinomlarını tanımlamak ve onların üreteç fonksiyonlarını elde etmek için kullanılacaktır. Aşağıda verilecek olan kavramlar Sadjang'ın "On the Fundamental Theorem of (p, q) -Calculus and Some (p, q) -Taylor Formulas" adlı makalesinden alınmış olup daha fazla bilgi için [44] kaynağına başvurulabilir.

Tanım 2.2.1: n herhangi bir tamsayı olsun. $0 < q < p \leq 1$ olmak üzere n sayısının (p, q) -benzeri

$$[n]_{p,q} = \frac{p^n - q^n}{p - q}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $p = 1$ alınırsa n in q - benzeri elde edilir.

Analizdeki matematiksel operatörlerin (p, q) -benzerleri aşağıdaki Tablo 2.1.1. yardımıyla verilir.

Tablo 2.1.1. (p, q) -Cebirsel Operatörler.

(p, q) -Toplam Kuralı	$\begin{aligned} [x + y]_{p,q} &= p^x [y]_{p,q} + q^y [x]_{p,q} \\ &= p^y [x]_{p,q} + q^x [y]_{p,q} \end{aligned}$
(p, q) -Fark Kuralı	$\begin{aligned} [x - y]_{p,q} &= q^{-y} ([x]_{p,q} + p^{x-y} [x]_{p,q}) \\ &= p^{-y} ([x]_{p,q} + q^{x-y} [y]_{p,q}) \end{aligned}$
(p, q) -Çarpım Kuralı	$\begin{aligned} [xy]_{p,q} &= [y]_{p^x, q^x} + [x]_{p,q} \\ &= [x]_{p^y, q^y} + [y]_{p,q} \end{aligned}$
(p, q) -Bölüm Kuralı	$\begin{aligned} \left[\frac{x}{y} \right]_{p,q} &= \frac{[x]_{p^{\frac{1}{y}}, q^{\frac{1}{y}}}}{[y]_{p^{\frac{1}{y}}, q^{\frac{1}{y}}}} \\ &= \frac{[x]_{p,q}}{[y]_{p^{\frac{x}{y}}, q^{\frac{x}{y}}}} \end{aligned}$

Tanım 2.2.2: x ve a keyfi birer reel sayı olmak üzere $(x - a)^n$ in (p, q) -benzeri

$$(x - a)_{p,q}^n = (x - a) \cdot (px - qa) \cdot \dots \cdot (p^{n-1}x - q^{n-1}a)$$

şeklinde tanımlanır. m ve n herhangi iki negatif olmayan tamsayı olmak üzere

$$(x - a)_{p,q}^{m+n} = (x - a)_{p,q}^m \cdot (p^m x - q^m a)_{p,q}^n$$

dir.

Tanım 2.2.3: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı herhangi bir fonksiyon olmak üzere $f(x)$ fonksiyonunun (p, q) -türevi

$$D_{p,q}(f(x)) = \frac{f(px) - f(qx)}{(p-q)x}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.2.4: f ve g herhangi iki fonksiyon ve $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f \cdot g$ nin (p, q) -türevi

$$\begin{aligned} D_{p,q}(f(x) \cdot g(x)) &= f(px)D_{p,q}(g(x)) + g(qx)D_{p,q}(f(x)) \\ &= g(px)D_{p,q}(f(x)) + f(qx)D_{p,q}(g(x)) \end{aligned}$$

şeklinde dir. Burada $x \in \mathbb{R}$ dir.

Tanım 2.2.5: (p, q) -Binom formülü

$$(a-b)_{p,q}^n = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q} p^{\binom{n-k}{2}} q^{\binom{k}{2}} (-1)^k a^{n-k} b^k$$

şeklinde tanımlanır.

(p, q) -hipergeometrik seriler aşağıdaki tanım yardımıyla verilir.

Tanım 2.2.6:

$$\begin{aligned} {}_r\Phi_s \left((a_{1p}, a_{1q}), \dots, (a_{rp}, a_{rq}), (b_{1p}, b_{1q}), \dots, (b_{sp}, b_{sq}), (p, q), z \right) \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left((a_{1p}, a_{1q}), \dots, (a_{rp}, a_{rq}), (p, q) \right)_n}{\left((b_{1p}, b_{1q}), \dots, (b_{sp}, b_{sq}), (p, q) \right)_n} z^n \left((-1)^n \left(\frac{q}{p} \right)^{\binom{n}{2}} \right)^{1+s-r} \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

Burada $\left((a_{1p}, a_{1q}), \dots, (a_{rp}, a_{rq}), (p, q) \right)_n = \prod_{j=1}^r \left((a_{jp}, a_{jq}), (p, q) \right)_n$ şeklinde tanımlıdır.

(2.1.1) in yardımıyla (p, q) -Binom katsayıları aşağıdaki tanım ile tekrar (2.1.2) deki gibi elde edilir.

Tanım 2.2.7:

$${}_r\Phi_s \left((a, b), -, (p, q), z \right) = \frac{\left((p, bz); (p, q) \right)_{\infty}}{\left((p, az); (p, q) \right)_{\infty}} \quad (2.1.2)$$

(2.1.2) de (a, b) yerine sırasıyla $(1, 0)$ ve $(0, 1)$ yazılırsa (p, q) -üstel fonksiyonları hipergeometrik seriler yardımıyla

$$e_{p,q}(x) = {}_r\Phi_s\left(\begin{matrix} (1, 0) \\ - \end{matrix}; (p, q), z\right)$$

$$E_{p,q}(x) = {}_r\Phi_s\left(\begin{matrix} (0, 1) \\ - \end{matrix}; (p, q), z\right)$$

yazılır. Ayrıca üstel fonksiyonların (p, q) -benzerleri aşağıdaki gibi de verilir.

$$e_{p,q}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p^{\binom{n}{2}} \frac{x^n}{((p, q); (p, q))_n}$$

ve

$$E_{p,q}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q^{\binom{n}{2}} \frac{x^n}{((p, q); (p, q))_n}$$

Tanım 2.2.8: $\left|\frac{q}{p}\right| < 1$ olmak üzere bir $f(x)$ fonksiyonunun (p, q) -integrali

$$\int f(x) d_{p,q}x = (p-q)x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^k}{p^{k+1}} f\left(\frac{q^k}{p^{k+1}}x\right)$$

şeklinde tanımlanır. Bu tanımdan yararlanarak belirli (p, q) -integralin

$$\int_0^a f(x) d_{p,q}x = (p-q)a \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^k}{p^{k+1}} f\left(\frac{q^k}{p^{k+1}}a\right)$$

olduğu kolaylıkla görülebilir. Burada a keyfi bir reel sayıdır.

Şimdi klasik analizde ve uygulamalı matematikte önemi olan Gama ve Beta fonksiyonlarının (p, q) - analizdeki tanımlarını verelim.

Tanım 2.2.9: x bir kompleks sayı olmak üzere (p, q) -Gama fonksiyonu

$$\Gamma_{p,q}(x) = \frac{(p-q)_{p,q}^{\infty}}{(p^x - q^x)_{p,q}^{\infty}} (p-q)^{1-x}$$

biçiminde tanımlanır. Burada $(p-q)_{p,q}^{\infty} := \prod_{n=0}^{\infty} (p^{n+1} - q^{n+1})$ olarak tanımlanır.

Gama fonksiyonunun sahip olduğu bazı özelliklere benzer özellikler (p, q) -Gama fonksiyonu içinde mevcuttur. Bunlardan bazıları aşağıdaki gibidir:

- $\Gamma_{p,q}(x+1) = [x]_{p,q} \Gamma_{p,q}(x)$
- $\Gamma_{p,q}(n+1) = [n]_{p,q}!$, n bir pozitif sayıdır.

Tanım 2.2.10: $m, n \in \mathbb{N}$ olsun. (p, q) -Beta fonksiyonu

$$B_{p,q}(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-qx)^{n-1} d_{p,q}x$$

dır.

Not 2.2.11: Tanım 2.2.10 da tanımlanan (p, q) -Beta fonksiyonu değişmeli değildir. Değişmeli (p, q) -Beta fonksiyonu

$$B_{p,q}(m, n) = \int_0^1 p^{\frac{m(m-1)}{2}} x^{m-1} (1-qx)^{n-1} d_{p,q}x$$

olarak tanımlanmıştır [45].

(p, q) -Gama fonksiyonu ve (p, q) -Beta fonksiyonu arasında ilginç ve kullanışlı özellikler bulunmaktadır. Bunlar aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$$B_{p,q}(m, n) = p^{\frac{(n-m)(2m+n-2)}{2}} \frac{\Gamma_{p,q}(m) \Gamma_{p,q}(n)}{\Gamma_{p,q}(m+n)}$$

$$B_{p,q}(m, n) = p^{\frac{2mn+m^2+n^2-3m-3n+2}{2}} \frac{\Gamma_{p,q}(m) \Gamma_{p,q}(n)}{\Gamma_{p,q}(m+n)}.$$

Not 2.2.12: (p, q) tamsayıları q tamsayıların genellemesidir. n bir tamsayı olmak üzere n in (p, q) benzeri

$$[n]_{p,q} = p^{n-1} [n]_{\frac{q}{p}}$$

olarak yazılabilir. Burada $p=1$ alınırsa n in q benzeri elde edilebilir fakat bunun tersi doğru değildir. Yani q tamsayıları yardımıyla (p, q) tamsayıları elde edilememektedir.

2.3 Üreteç Fonksiyonları

Üreteç fonksiyonları matematiğin birçok alanında kullanışlı uygulamalara sahiptir. Sürekli fonksiyonlar ile çalışmak bazen diziler ile çalışmaktan daha kolaydır. Bununla birlikte, dizilerin yapısı gereği diziler üzerinde matematiksel analiz yapmak kolay değildir. Bundan dolayı fonksiyonların dizilerini içeren problemlerin çözümleri için üreteç fonksiyonları çok kullanışlı matematiksel araçlardan biridir.

Üreteç fonksiyonlarını kullanarak elde edebileceğimiz ve kullanabilceğimiz matematiksel özellikler aşağıdaki gibidir [46]:

- Sayı dizileri için kesin bir formül elde edebilme.
- Yineleme formülleri elde edebilme. Çoğu zaman üreteç fonksiyonları yineleme bağıntılarından elde edilebilmektedir. Bununla birlikte, üreteç fonksiyonları kullanarak diziler ile ilgili yeni özellikler içeren yineleme bağıntıları da elde edilebilir.
- Diziler için ortalama ve bazı istatistiksel özellikler elde edebilme.
- Diziler için asimptotik formüller elde edebilme.
- Tek modlu olma ve konvekslik gibi özellikleri kanıtlayabilme. Bir dizi eğer ilk başta düzenli olarak artar ve daha sonra sürekli olarak azalır ise bu dizi tek modlu olarak adlandırılır. Çoğu kombinatorik dizi tek modlu olma özelliğine sahiptir ve bu tür teoremleri ispatlamak için birçok yöntem vardır. Üreteç fonksiyonları bu yöntemlerden biridir. Üreteç fonksiyonlarının analitik özellikleri katsayı dizilerinin artış ve azalışları ile ilgili yöntemler sunar.
- Bazı önemli matematiksel eşitlikleri kanıtlayabilme. Başta kombinatorik olmak üzere matematiğin çoğu dalında birçok eşitlikler bulunmaktadır. Üreteç fonksiyonları bu eşitlikleri ispatlama yollarından biridir.

Üreteç fonksiyonları aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 2.3.1: $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ bir fonksiyon dizisi olmak üzere

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n, |x| < R$$

ifadesine $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizi ailesinin üreteç fonksiyonu denir.

2.4 p - Adik İntegral ve Uygulamaları

p -adik analiz, başta analitik sayılar teorisi olmak üzere özel fonksiyonlar ve polinomlar teorisi gibi matematiğin bir çok alanında uygulamaya sahiptir. p -adik analiz yardımıyla başta Bernoulli ve Euler polinomları olmak üzere, Bernstein, Genocchi, Tanjant, Changhee v.b. polinom aileleri için sonuçlar türetilmiştir [47-51].

Bu bölümde p -adik analiz kavramına giriş yapılacak olup bu kavramın özelliklerinden bahsedilecektir. Daha sonra p -adik analiz yardımıyla sırasıyla Volkenborn integral, Fermionik p -adik integral, (ρ, q) -Volkenborn integral, Fermionik p -adik (ρ, q) -integral operatörlerinin tanımları verilecektir. Bu operatörlerden (ρ, q) -Volkenborn integral, Fermionik p -adik (ρ, q) -integral operatörleri tezin altıncı bölümünde kullanılacaktır. Aşağıda verilecek olan sonuçlarla ilgili daha fazla bilgi için ilgili kaynağa başvurulabilir [47].

Tanım 2.4.1: p bir asal sayı ve $a \in \mathbb{Z} / \{0\}$ olsun.

$$a \equiv 0 \pmod{p^m}$$

özellikindeki en büyük m tamsayısına a nın p -adik değeri denir. Örneğin;

$$\text{ord}_2 28 = 2$$

$$\text{ord}_3 1 = 0$$

$$\text{ord}_p 0 = \infty$$

dır.

a ve b nın p -adik değeri

- $\text{ord}_p(ab) = \text{ord}_p(a) + \text{ord}_p(b)$
- $\text{ord}_p(a/b) = \text{ord}_p(a) - \text{ord}_p(b)$

özelliklerine sahiptir.

Tanım 2.4.2: $\mathbb{Q}$ reel sayılar kümesi olmak üzere $\mathbb{Q}$ üzerinde p -adik norm

$$|x|_p = \begin{cases} \frac{1}{p^{\text{ord}_p x}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.4.3: p bir asal sayı, $a_n \in \mathbb{Z}$ olsun. $\mathbb{Z}_p$ p -adik tamsayıları göstermek üzere

$$\mathbb{Z}_p = \left\{ x \mid x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n p^n, a_n \in \{0, 1, 2, \dots, p-1\} \right\}$$

kümesine p -adik tamsayılar kümesi denir.

Tanım 2.4.4: p bir asal sayı, $a_n \in \mathbb{Z}$ olsun. $\mathbb{Q}_p$ p -adik tamsayıları göstermek üzere

$$\mathbb{Q}_p = \left\{ x \mid x = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n p^n, a_n \in \{0, 1, 2, \dots, p-1\} \right\}$$

kümesine p -adik rasyonel sayılar kümesi denir.

Tanım 2.4.4 de tanımlanan $\mathbb{Q}_p$ bir cisim olup $\overline{\mathbb{Q}_p}$, $\mathbb{Q}_p$ nin cebirsel kapanışı olmak üzere, $\mathbb{C}_p$, $\overline{\mathbb{Q}_p}$ cisminin $|\cdot|_p$ normuna göre tamlamasıdır [52-54].

Tanım 2.4.5: $f \in C^1(\mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{C}_p)$ olmak üzere

$$\int_{\mathbb{Z}_p} f(x) d_{\mu} x = \lim_{n \rightarrow \infty} p^{-n} \sum_{j=0}^{p^n-1} f(j)$$

eşitliğine Volkenborn integral denir. Burada $\mu(x) = \frac{1}{p^x}$ şeklinde tanımlıdır.

Tanım 2.4.6: $f \in C^1(\mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{C}_p)$ ve p tek bir asal sayı olsun.

$$\int_{\mathbb{Z}_p} f(x) d_{\mu_1} x = \lim_{n \rightarrow \infty} p^{-n} \sum_{j=0}^{p^n-1} f(j)$$

eşitliğine Fermionik p -adik integral denir. Burada $\mu(x) = \frac{(-1)^x}{p^x}$ şeklinde tanımlıdır.

Volkenborn ve Fermionik p -adik integraller kullanılarak Bernoulli, Euler ve Genocchi gibi özel polinom ve sayı ailelerinin başta üreteç fonksiyonları olmak üzere birçok özelliği elde edilmiştir. Bunlardan bazıları aşağıdaki gibidir:

Tablo 2.1.2 Özel sayıların p -adik integraller yardımıyla üreteç fonksiyon temsilleri.

Polinom Ailesi	Üreteç Fonksiyonu	Bağıntı
Bernoulli Sayıları	$\int_{\mathbb{Z}_p} e^{xt} d_{\mu(x)} = \frac{t}{e^t - 1}$	$B_n = \int_{\mathbb{Z}_p} x^n d_{\mu(x)}$
Euler Sayıları	$\int_{\mathbb{Z}_p} e^{xt} d_{\mu_{-1}(x)} = \frac{2}{e^t - 1}$	$E_n = \int_{\mathbb{Z}_p} x^n d_{\mu_{-1}(x)}$
Genocchi Sayıları	$\int_{\mathbb{Z}_p} e^{xt} d_{\mu_{-1}(x)} = \frac{2t}{e^t - 1}$	$\frac{G_{n+1}}{n+1} = \int_{\mathbb{Z}_p} x^n d_{\mu_{-1}(x)}$

q -Volkenborn ve Fermionik p -adik q -integral üzerinde (p, q) -analiz kullanılarak yapılan çalışmalar bulunmaktadır. Aracı ve ark. [55] (ρ, q) -Volkenborn integrali

$$\int_{\mathbb{Z}_p} f(x) d_{\mu_{\rho, q}}(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\rho^{p^N}}{[p^N]_{p, q}} \sum_{x=0}^{p^N-1} f(x) \left(\frac{q}{p} \right)^x$$

olarak tanımlamıştır. Bu tanım yardımıyla Carlitz's tipli q -Bernoulli polinomlarının (p, q) genellemesi

$$\beta_{n, a}(x; \rho, q) = \int_{\mathbb{Z}_p} \rho^{ay} [x+y]_{\rho, q}^n d_{\mu_{\rho, q}}(x)$$

tanımlanmıştır.

Benzer şekilde Duran ve Açıkgöz [56], fermionik p -adik (ρ, q) integrali

$$\int_{\mathbb{Z}_p} f(x) d_{\mu_{\rho, -q}}(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\rho^{p^N}}{[p^N]_{\rho, -q}} \sum_{x=0}^{p^N-1} f(x) \left(-\frac{q}{p} \right)^x$$

olarak tanımlanmıştır. Bu yeni tanım yardımıyla Carlitz's tipli q -Euler polinomlarının (p, q) genellemesi

$$\varepsilon_{n, a}(x; \rho, q) = \int_{\mathbb{Z}_p} \rho^{ay} [x+y]_{\rho, q}^n d_{\mu_{\rho, -q}}(x)$$

tanımlanmıştır.

BÖLÜM 3

(p, q) -BERNSTEIN POLİNOMLARI VE ONLARIN BAZI TEMEL ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde, Mursaleen ve ark. tarafından verilen (p, q) -Bernstein operatörleri ve polinomları tanımlanmış ve bu polinomların bazı özellikleri incelenmiştir. Daha sonra (p, q) -türev operatörü altında bu polinomların bazı yeni sonuçları elde edilmiştir. Ayrıca, (p, q) -integral operatörü altında bu polinomların (p, q) -Gama ve (p, q) -Beta fonksiyonları ile ilgili bazı yeni eşitlikler elde edilmiştir.

3.1. (p, q) -Bernstein Operatörü ve Polinomları

Tanım 3.1.1: $x \in [0, 1]$ ve $0 < q < p \leq 1$ olmak üzere, (p, q) -Bernstein operatörü

$$B_{n,p,q}(f, x) = \frac{1}{p^{\frac{n(n-1)}{2}}} \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q} p^{\frac{k(k-1)}{2}} x^k \prod_{s=0}^{n-k-1} (p^s - q^s x) f\left(\frac{[k]_{p,q}}{p^{k-n} [n]_{p,q}}\right)$$

olarak tanımlanır.

Tanım 3.1.2: $x \in [0, 1]$ ve $0 < q < p \leq 1$ olmak üzere, (p, q) -Bernstein polinomları

$$B_{k,n}(x; p, q) = \frac{1}{p^{\frac{n(n-1)}{2}}} \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q} p^{\frac{k(k-1)}{2}} x^k \prod_{s=0}^{n-k-1} (p^s - q^s x) \quad (3.1.1)$$

şeklinde tanımlanır.

Klasik, q ve (p, q) Bernstein polinomlarının arasındaki ilişki Şekil 3.1.1 deki gibidir:

$$\begin{array}{ccc}
& \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) x^k (1-x)^{n-k} \end{array} & \\
\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right]_q x^k (1-x)_q^{n-k} \end{array} & \xrightarrow{q \rightarrow 1^-} & \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right]_{p,q} x^k (1-x)_{p,q}^{n-k} \end{array} \\
& \xleftarrow{p=1} &
\end{array}$$

Şekil 3.1.1 Klasik, q ve (p, q) Bernstein polinomları arasındaki ilişki.

Sonuç 3.1.3: $0 < q < p \leq 1$ olsun. $n, k \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $k \leq n$ için

$$B_{k,n}(x; p, q) = \left(1 - x((q/p))^{n-k-1}\right) B_{k,n-1}(x; p, q) + x(qp^{-1})^{n-k} B_{k-1,n-1}(x; p, q)$$

dir.

İspat: İspat için ilk olarak (3.1.1) de verilen (p, q) -Bernstein polinomlarının tanımı ile (p, q) -Binom katsayılarının özelliğini göz önüne alırsak;

$$\begin{aligned}
B_{k,n}(x; p, q) &= \left[\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right]_{p,q} p^{\binom{k}{2} - \binom{n}{2}} x^k (1-x)_{p,q}^{n-k} \\
&= \left(p^k \left[\begin{array}{c} n-1 \\ k \end{array} \right]_{p,q} + q^{n-k} \left[\begin{array}{c} n-1 \\ k-1 \end{array} \right]_{p,q} \right) p^{\binom{k}{2} - \binom{n}{2}} x^k (1-x)_{p,q}^{n-k}.
\end{aligned} \tag{3.1.2}$$

eşitliği elde edilir. Buradan gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\begin{aligned}
B_{k,n}(x; p, q) &= \left[\begin{array}{c} n-1 \\ k \end{array} \right]_{p,q} p^{\binom{k}{2} - \binom{n-1}{2}} x^k (1-x)_{p,q}^{n-k-1} p^k (p^{n-k-1} - q^{n-k-1} x) \\
&\quad + q^{n-k} \left[\begin{array}{c} n-1 \\ k-1 \end{array} \right]_{p,q} p^{\binom{k-1}{2} - \binom{n-1}{2}} x^{k-1} (1-x)_{p,q}^{n-k} x (qp^{-1})^{n-k} \\
&= p^k (p^{n-k-1} - q^{n-k-1} x) B_{k,n-1}(x; p, q) + (qp^{-1})^{n-k} x B_{k-1,n-1}(x; p, q).
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Bu sonuç bize n . dereceden (p, q) -Bernstein polinomlarını $(n-1)$. dereceden (p, q) -Bernstein polinomlarının bir lineer kombinasyonu şeklinde (3.1.2) deki gibi ifade etmemize olanak sağlar.

Sonuç 3.1.4: $0 \leq x \leq 1$ ve $0 < p < q \leq 1$ için,

$$\frac{\left[p^{1-n} (1 + p^{-k}) (p^{n-k-1} - xq^{n-k-1}) \right]}{\left[\begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right]_{p,q}} B_{k,n-1}(x; p, q) = \frac{B_{k,n}(x; p, q)}{\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_{p,q}} + \frac{B_{k+1,n}(x; p, q)}{\left[\begin{matrix} n \\ k+1 \end{matrix} \right]_{p,q}}. \quad (3.1.3)$$

İspat: (3.1.3) eşitliğinin sağ tarafına (3.1.1) eşitliğini uygularsak;

$$\begin{aligned} & \frac{B_{k,n}(x; p, q)}{\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_{p,q}} + \frac{B_{k+1,n}(x; p, q)}{\left[\begin{matrix} n \\ k+1 \end{matrix} \right]_{p,q}} \\ &= \frac{\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_{p,q} p^{\binom{k}{2} - \binom{n}{2}} x^k (1-x)^{n-k}_{p,q} + \left[\begin{matrix} n \\ k+1 \end{matrix} \right]_{p,q} p^{\binom{k+1}{2} - \binom{n}{2}} x^k (1-x)^{n-k}_{p,q}}{\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_{p,q} \left[\begin{matrix} n \\ k+1 \end{matrix} \right]_{p,q}} \\ &= p^{\binom{k}{2} - \binom{n}{2}} x^k (1-x)^{n-k}_{p,q} + p^{\binom{k+1}{2} - \binom{n}{2}} x^k (1-x)^{n-k}_{p,q} \\ &= p^{\binom{k}{2} - \binom{n-1}{2}} x^k (1-x)^{n-k-1}_{p,q} \left[(p^{1-n} + p^{1-n-k}) (p^{n-k-1} - xq^{n-k-1}) \right] \\ &= p^{\binom{k}{2} - \binom{n-1}{2}} x^k (1-x)^{n-k-1}_{p,q} \left[p^{1-n} (1 + p^{-k}) (p^{n-k-1} - xq^{n-k-1}) \right] \\ &= \left[p^{1-n} (1 + p^{-k}) (p^{n-k-1} - xq^{n-k-1}) \right] \frac{\left[\begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right]_{p,q} p^{\binom{k}{2} - \binom{n-1}{2}} x^k (1-x)^{n-k-1}_{p,q}}{\left[\begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right]_{p,q}} \\ &= \left[p^{1-n} (1 + p^{-k}) (p^{n-k-1} - xq^{n-k-1}) \right] \frac{B_{k,n-1}(x; p, q)}{\left[\begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right]_{p,q}} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Not 3.1.5: Bu bölümde elde edilen sonuçlar [57] kaynağındaki klasik Bernstein polinomları için elde edilen sonuçların genellemesidir. Bu bölümdeki sonuçlar için $p = 1$ ve $q \rightarrow 1$ iken [57] de ki sonuçlar elde edilir.

3.2. (p, q) -Bernstein Polinomlarının (p, q) -Türev Operatörüne Bağlı Sonuçları

Bu bölümde (p, q) -Bernstein polinomları için (p, q) -türev operatörü altındaki sonuçlar incelenmiştir.

Sonuç 3.2.1: $0 \leq x \leq 1$ ve $0 < p < q \leq 1$ için,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d_{p,q}x} B_{k,n}(x; p, q) &= \frac{[n]_{p,q}}{q^k p^{n-k}} (q^k B_{k-1,n-1}(qx; p, q) - p B_{k,n-1}(qx; p, q)) \\ &= \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q} p^{\binom{k}{2} - \binom{n}{2}} \sum_{j=0}^{n-k} \begin{bmatrix} n-k \\ j \end{bmatrix}_{p,q} p^{\binom{n-k-j}{2}} q^{\binom{j}{2}} (-1)^j [k+j]_{p,q} x^{k+j-1}. \end{aligned}$$

İspat: (p, q) -türevin çarpım kuralından,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d_{p,q}x} B_{k,n}(x; p, q) &= \frac{d}{d_{p,q}x} \left(\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q} p^{\binom{k}{2} - \binom{n}{2}} x^k (1-x)_{p,q}^{n-k} \right) \\ &= \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q} p^{\binom{k}{2} - \binom{n}{2}} (-p^k x^k [n-k]_{p,q} (1-qx)_{p,q}^{n-k-1} + x^{k-1} [k]_{p,q} (1-qx)_{p,q}^{n-k}) \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

eşitliği elde edilir. (3.2.1) de gerekli düzenlemelerden sonra,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d_{p,q}x} (B_{k,n}(x; p, q)) &= \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_{p,q} p^{\binom{k}{2} - \binom{n}{2}} [n]_{p,q} x^{k-1} (1-qx)_{p,q}^{n-k} \\ &\quad - \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_{p,q} p^{\binom{k}{2} - \binom{n}{2}} p^k x^k [n]_{p,q} (1-qx)_{p,q}^{n-k-1} \\ &= [n]_{p,q} \left(p^{k-n} B_{k-1,n-1}(x; p, q) - \frac{p^{k-n+1}}{q^k} B_{k,n-1}(x; p, q) \right) \\ &= \frac{[n]_{p,q}}{q^k p^{n-k}} (q^k B_{k-1,n-1}(qx; p, q) - p B_{k,n-1}(qx; p, q)). \end{aligned}$$

elde edilir. (3.2.1) eşitliğinde (p, q) -Binom formülünü göz önüne alırsak

$$\begin{aligned} \frac{d}{d_{p,q}x} B_{k,n}(x; p, q) &= \frac{d}{d_{p,q}x} \left(\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q} p^{\binom{k}{2} - \binom{n}{2}} x^k (1-x)_{p,q}^{n-k} \right) \\ &= \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q} p^{\binom{k}{2} - \binom{n}{2}} \sum_{j=0}^{n-k} \begin{bmatrix} n-k \\ j \end{bmatrix}_{p,q} p^{\binom{n-k-j}{2}} q^{\binom{j}{2}} (-1)^j [k+j]_{p,q} x^{k+j-1} \end{aligned}$$

bulunur. Böylece istenilen eşitlik gösterilmiş olur.

Aynı dereceden iki tane (p, q) -Bernstein polinomunun çarpımının (p, q) -türevi

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{d_{p,q}x} \left(B_{k,n}(x; p, q) B_{l,n} \left(\left(\frac{q}{p} \right)^{n-k} x; p, q \right) \right) \\
&= \frac{d}{d_{p,q}x} \left(\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q} p^{\binom{k}{2} - \binom{n}{2}} x^k (1-x)^{n-k} \begin{bmatrix} n \\ l \end{bmatrix}_{p,q} p^{\binom{l}{2} - \binom{n}{2}} \left(\left(\frac{q}{p} \right)^{n-k} x \right)^l \left(1 - \left(\frac{q}{p} \right)^{n-k} x \right)^{n-l} \right) \quad (3.2.2) \\
&= \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q} \begin{bmatrix} n \\ l \end{bmatrix}_{p,q} p^{\binom{k}{2} + \binom{l}{2} - 2\binom{n}{2}} \left(\frac{q}{p} \right)^{(n-k)l} p^{-(n-k)(n-l)} \frac{d}{d_{p,q}x} \left(x^{k+l} (1-x)^{2n-k-l} \right).
\end{aligned}$$

(3.2.2) ifadesinin son eşitliğinde (p, q) -Binom formülü uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{d_{p,q}x} \left(B_{k,n}(x; p, q) B_{l,n} \left(\left(\frac{q}{p} \right)^{n-k} x; p, q \right) \right) \\
&= \left(\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q} \begin{bmatrix} n \\ l \end{bmatrix}_{p,q} p^{\binom{k}{2} + \binom{l}{2} - 2\binom{n}{2}} \left(\frac{q}{p} \right)^{(n-k)l} p^{-(n-k)(n-l)} \right. \\
&\quad \times \sum_{j=0}^{2n-k-l} \begin{bmatrix} 2n-k-l \\ j \end{bmatrix}_{p,q} p^{\binom{2n-k-l-j}{2}} q^{\binom{j}{2}} (-1)^j \frac{d}{d_{p,q}x} x^{k+l+j} \left. \right) \quad (3.2.3) \\
&= \left(\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q} \begin{bmatrix} n \\ l \end{bmatrix}_{p,q} p^{\binom{k}{2} + \binom{l}{2} - 2\binom{n}{2}} \left(\frac{q}{p} \right)^{(n-k)l} p^{-(n-k)(n-l)} \right. \\
&\quad \times \sum_{j=0}^{2n-k-l} \begin{bmatrix} 2n-k-l \\ j \end{bmatrix}_{p,q} p^{\binom{2n-k-l-j}{2}} q^{\binom{j}{2}} (-1)^j [k+l+j]_{p,q} x^{k+l+j-1} \left. \right)
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Aynı dereceden üç tane (p, q) -Bernstein polinomunun çarpımının (p, q) -türevi de benzer olarak,

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{d_{p,q}x} \left(B_{k,n}(x; p, q) B_{l,n} \left(\left(\frac{q}{p} \right)^{n-k} x; p, q \right) B_{r,n} \left(\left(\frac{q}{p} \right)^{2n-k-l} x; p, q \right) \right) \\
&= \left(\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q} \begin{bmatrix} n \\ l \end{bmatrix}_{p,q} \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_{p,q} p^{\binom{k}{2} + \binom{l}{2} + \binom{r}{2} - 3\binom{n}{2}} \left(\frac{q}{p} \right)^{(n-k)l + (2n-k-l)r} p^{-[(n-k)(n-l) + (2n-l-k)(n-r)]} \right. \\
&\quad \times \sum_{j=0}^{2n-k-l-r} \begin{bmatrix} 3n-k-l-r \\ j \end{bmatrix}_{p,q} p^{\binom{3n-k-l-r-j}{2}} q^{\binom{j}{2}} (-1)^j [k+l+r+j]_{p,q} x^{k+l+r+j-1} \left. \right) \quad (3.2.4)
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

(3.2.3) ve (3.2.4) sonuçları genelleştirilirse, n . dereceden s tane (p, q) -Bernstein polinomunun çarpımının (p, q) -türevi Sonuç 3.2.2 yardımıyla verilir.

Sonuç 3.2.2: $0 \leq x \leq 1$ ve $0 < p < q \leq 1$ için,

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d_{p,q}x} \left(B_{k_1,n}^{p,q}(x) \prod_{j=2}^s B_{k_j,n}^{p,q} \left(\left(\frac{q}{p} \right)^{(j-1)n - \sum_{l=1}^{j-1} k_l} x \right) \right) \\ &= \left(\prod_{y=1}^s \begin{bmatrix} n \\ k_y \end{bmatrix}_{p,q} \right) p^{\left(\sum_{y=1}^s \binom{k_y}{2} - s \binom{n}{2} \right)} p^{\left(\sum_{y=1}^s \binom{k_y}{2} - s \binom{n}{2} \right) + \left(\sum_{m=2}^s \left((m-1)n - \sum_{i=1}^{m-1} k_i \right) (n-2k_s) \right)} q^{\sum_{m=2}^s \left((m-1)n - \sum_{i=1}^{m-1} k_i \right) k_s} \\ & \times \left(\sum_{j=0}^{sn - (k_1 + \dots + k_s)} \begin{bmatrix} sn - (k_1 + \dots + k_s) \\ j \end{bmatrix}_{p,q} p^{\left(sn - (k_1 + \dots + k_s) - j \right)} q^{\binom{j}{2}} (-1)^j [k_1 + \dots + k_s + j]_{p,q} x^{k_1 + \dots + k_s + j-1} \right). \end{aligned}$$

Farklı derece ve mertebeden iki ve üç tane (p,q) -Bernstein polinomlarının çarpımının (p,q) -türevi (p,q) -Binom formülünü kullanarak sırasıyla aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d_{p,q}x} \left(B_{k,n}(x; p, q) B_{l,m} \left(\left(\frac{q}{p} \right)^{n-k} x; p, q \right) \right) \\ &= \left(\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q} \begin{bmatrix} m \\ l \end{bmatrix}_{p,q} p^{\binom{k}{2} + \binom{l}{2} - \binom{n}{2} - \binom{m}{2}} \left(\frac{q}{p} \right)^{(n-k)l} p^{-(n-k)(m-l)} \right. \\ & \quad \times \sum_{j=0}^{n-m-k-l} \begin{bmatrix} n-m-k-l \\ j \end{bmatrix}_{p,q} p^{\left(n-m-k-l-j \right)} q^{\binom{j}{2}} (-1)^j \frac{d}{d_{p,q}x} x^{k+l+j} \left. \right) \\ &= \left(\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q} \begin{bmatrix} m \\ l \end{bmatrix}_{p,q} p^{\binom{k}{2} + \binom{l}{2} - \binom{n}{2} - \binom{m}{2}} \left(\frac{q}{p} \right)^{(n-k)l} p^{-(n-k)(m-l)} \right. \\ & \quad \times \sum_{j=0}^{n-m-k-l} \begin{bmatrix} n-m-k-l \\ j \end{bmatrix}_{p,q} p^{\left(n-m-k-l-j \right)} q^{\binom{j}{2}} (-1)^j [k+l+j]_{p,q} x^{k+l+j-1} \left. \right) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{d_{p,q}x} \left(B_{k,n}(x; p, q) B_{l,m} \left(\left(\frac{q}{p} \right)^{n-k} x; p, q \right) B_{s,t} \left(\left(\frac{q}{p} \right)^{n+m-k-l} x; p, q \right) \right) \\
&= \left(\begin{aligned} & \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_{p,q} \left[\begin{matrix} m \\ l \end{matrix} \right]_{p,q} \left[\begin{matrix} t \\ s \end{matrix} \right]_{p,q} p^{\binom{k}{2} + \binom{l}{2} + \binom{s}{2} - \binom{n}{2} - \binom{m}{2} - \binom{t}{2}} \left(\frac{q}{p} \right)^{[(n-k)l + ((n+m)-(k+l))s]} p^{-[(n-k)(m-l) + ((n+m)-(k+l))(t-s)]} \\ & \times \sum_{j=0}^{n+m+t-k-l-s} \left[\begin{matrix} n+m+t-k-l-s \\ j \end{matrix} \right]_{p,q} p^{\binom{n+m+t-k-l-s-j}{2}} q^{\binom{j}{2}} (-1)^j \frac{d}{d_{p,q}x} x^{k+l+s+j} \end{aligned} \right) \\
&= \left(\begin{aligned} & \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_{p,q} \left[\begin{matrix} m \\ l \end{matrix} \right]_{p,q} \left[\begin{matrix} t \\ s \end{matrix} \right]_{p,q} p^{\binom{k}{2} + \binom{l}{2} + \binom{s}{2} - \binom{n}{2} - \binom{m}{2} - \binom{t}{2}} \left(\frac{q}{p} \right)^{[(n-k)l + ((n+m)-(k+l))s]} p^{-[(n-k)(m-l) + ((n+m)-(k+l))(t-s)]} \\ & \times \sum_{j=0}^{n+m+t-k-l-s} \left[\begin{matrix} n+m+t-k-l-s \\ j \end{matrix} \right]_{p,q} p^{\binom{n+m+t-k-l-s-j}{2}} q^{\binom{j}{2}} (-1)^j [k+l+s+j]_{p,q} x^{k+l+s+j-1} \end{aligned} \right).
\end{aligned}$$

Bu sonuçlar genelleştirilirse, farklı derece ve mertebeden s tane (p, q) -Bernstein polinomunun çarpımının (p, q) -türevi Sonuç 3.2.3 yardımıyla verilir.

Sonuç 3.2.3: $0 \leq x \leq 1$ ve $0 < p < q \leq 1$ için,

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{d_{p,q}x} \left(B_{k_1, n_1}^{p,q}(x) \prod_{j=2}^s B_{k_j, n_j}^{p,q} \left(\left(\frac{q}{p} \right)^{\sum_{y=1}^{s-1} (n_y - k_y)} x \right) \right) \\
&= \left(\prod_{y=1}^s \left[\begin{matrix} n_y \\ k_y \end{matrix} \right]_{p,q} \right) p^{\sum_{y=1}^s \binom{k_y}{2} - \binom{n_y}{2}} \left(\frac{q}{p} \right) p \\
& \times \left(\sum_{j=0}^{(n_1 + \dots + n_s) - (k_1 + \dots + k_s)} \left[\begin{matrix} (n_1 + \dots + n_s) - (k_1 + \dots + k_s) \\ j \end{matrix} \right]_{p,q} \right. \\
& \left. \times p^{\binom{(n_1 + \dots + n_s) - (k_1 + \dots + k_s) - j}{2}} q^{\binom{j}{2}} (-1)^j [k_1 + \dots + k_s + j]_{p,q} x^{k_1 + \dots + k_s + j - 1} \right).
\end{aligned}$$

$n_1, \dots, n_s \in \mathbb{N}$ olmak üzere farklı derecelerden (p, q) -Bernstein polinomlarının kuvvetlerinin çarpımının (p, q) -türevi

Sonuç 3.2.4: $0 \leq x \leq 1$ ve $0 < p < q \leq 1$ için,

$s=1$ için

$$\frac{d}{d_{p,q}x} (B_{k,n}^s(x; p, q)) = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q} p^{s \left(\binom{k}{2} - \binom{n}{2} \right)} \sum_{j=0}^{(n-k)s} \begin{bmatrix} (n-k)s \\ j \end{bmatrix}_{p,q} p^{\binom{(n-k)s-j}{2}} q^{\binom{j}{2}} [ks+j]_{p,q} x^{ks+j-1}$$

$s \geq 2$ için

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d_{p,q}x} \left(\prod_{j=2}^s \left(B_{k,n_j} \left(\left(\frac{q}{p} \right)^{\sum_{i=1}^{s-1} (n_i-k)m_i} x; p, q \right)^{m_j} \right) \right) \\ &= \left(\left(\prod_{i=1}^s \begin{bmatrix} n_i \\ k \end{bmatrix}_{p,q}^{m_i} p^{\left(\sum_{i=1}^s m_i \left[\binom{k}{2} - \binom{n_i}{2} \right] \right) - \left(\prod_{i=1}^s (n_i-k)m_i \right)} \right. \right. \\ & \quad \times \sum_{j=0}^{n_1 m_1 + \dots + n_s m_s - k(m_1 + \dots + m_s)} \begin{bmatrix} n_1 m_1 + \dots + n_s m_s - k(m_1 + \dots + m_s) \\ j \end{bmatrix}_{p,q} p^{\binom{n_1 m_1 + \dots + n_s m_s - k(m_1 + \dots + m_s) - j}{2}} q^{\binom{j}{2}} \\ & \quad \left. \left. \times [k(m_1 + \dots + m_s) + j]_{p,q} x^{k(m_1 + \dots + m_s) + j - 1} \right) \right) \end{aligned}$$

3.3 (p, q) -Bernstein Polinomlarının İntegral Temsilleri ve Onların Özel Fonksiyonlar ile İlişkisi

Bu bölümde (p, q) -Bernstein polinomunun tanımı ile (p, q) -Gama ve (p, q) -Beta fonksiyonu tanımından yararlanarak, (p, q) -Bernstein polinomları için bazı yeni teoremler ve sonuçlar verilecektir.

Teorem 3.3.1: $0 < q < p \leq 1$ olmak üzere, $n, k \in \mathbb{Z}^+$ için

$$\frac{\int_0^1 B_{k,n}(qx; p, q) d_{p,q}x}{p^{\binom{k}{2} - \binom{n}{2}} q^k} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q} \sum_{r=0}^{n-k} \begin{bmatrix} n-k \\ r \end{bmatrix}_{p,q} (-1)^r q^{\binom{n-k-r}{2} + k+r} p^{\binom{r}{2}} \frac{1}{[r+k+1]_{p,q}} \quad (3.3.1)$$

ve

$$\frac{\int_0^1 B_{k,n}(qx; p, q) d_{p,q}x}{p^{\binom{k}{2} - \binom{n}{2}} q^k} = p^{\frac{(n-k)(n+k+1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q} [k]_{p,q} [n-k]_{p,q} \frac{\Gamma_{p,q}(k) \Gamma_{p,q}(n-k)}{\Gamma_{p,q}(n+2)} \quad (3.3.2)$$

dir.

İspat: Teoremin ispatı için ilk olarak (p, q) -Bernstein polinomlarının tanımı ele alınarak;

$$\int_0^1 B_{k,n}(qx; p, q) d_{p,q} x = \int_0^1 \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q} p^{\binom{k}{2} - \binom{n}{2}} (qx)^k (1-qx)^{n-k} d_{p,q} x \quad (3.3.3)$$

yazılabilir. Buradan (p, q) -Binom formülünü, (3.3.3) eşitliğinin sağ tarafına uygulayıp katsayılar için gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\begin{aligned} \frac{\int_0^1 B_{k,n}(qx; p, q) d_{p,q} x}{p^{\binom{k}{2} - \binom{n}{2}} q^k} &= \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q} \int_0^1 x^k (1-qx)^{n-k} d_{p,q} x \\ &= \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q} \int_0^1 \sum_{r=0}^{n-k} \begin{bmatrix} n-k \\ r \end{bmatrix}_{p,q} (-1)^r q^{\binom{n-k-r}{2} + r} p^{\binom{r}{2}} x^{k+r} d_{p,q} x \quad (3.3.4) \\ &= \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q} \sum_{r=0}^{n-k} \begin{bmatrix} n-k \\ r \end{bmatrix}_{p,q} (-1)^r q^{\binom{n-k-r}{2} + r} p^{\binom{r}{2}} \int_0^1 x^{k+r} d_{p,q} x \\ &= \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q} \sum_{r=0}^{n-k} \frac{\begin{bmatrix} n-k \\ r \end{bmatrix}_{p,q} (-1)^r q^{\binom{n-k-r}{2} + r} p^{\binom{r}{2}}}{[k+r+1]_{p,q}} \end{aligned}$$

elde edilir.

Buna göre (3.3.1) nin ispatı tamamlanır. Şimdi (3.3.2) in doğruluğunu gösterelim. (p, q) -Beta fonksiyonunun tanımı göz önüne alınırsa;

$$\begin{aligned} \frac{\int_0^1 B_{k,n}(qx; p, q) d_{p,q} x}{p^{\binom{k}{2} - \binom{n}{2}} q^k} &= \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q} \int_0^1 x^k (1-qx)^{n-k} d_{p,q} x \\ &= \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q} B_{p,q}(k+1, n-k+1) \quad (3.3.5) \\ &= \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q} p^{\frac{(n-k)(n+k+1)}{2}} \frac{\Gamma_{p,q}(k+1) \Gamma_{p,q}(n-k+1)}{\Gamma_{p,q}(n+2)} \\ &= \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q} p^{\frac{(n-k)(n+k+1)}{2}} [k]_{p,q} [n-k]_{p,q} \frac{\Gamma_{p,q}(k) \Gamma_{p,q}(n-k)}{\Gamma_{p,q}(n+2)} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bu durumda ispat tamamlanır.

(3.3.4) ve (3.3.5) eşitliklerinin sağ tarafları tekrar ele alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.3.2 $k > -1$ ve $n > k - 1$ olmak üzere,

$$\sum_{r=0}^{n-k} \frac{\begin{bmatrix} n-k \\ r \end{bmatrix}_{p,q} (-1)^r q^{\binom{n-k-r}{2}+r} p^{\binom{r}{2}}}{[k+r+1]_{p,q}} = p^{\frac{(n-k)(n+k+1)}{2}} [k]_{p,q} [n-k]_{p,q} \frac{\Gamma_{p,q}(k) \Gamma_{p,q}(n-k)}{\Gamma_{p,q}(n+2)} \quad (3.3.6)$$

elde edilir.

n ve k nın bazı özel değerleri için (p, q) -Bernstein polinomunun integral temsili aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} \bullet \int_0^1 B_{0,1}(qx; p, q) d_{p,q}x &= \frac{p}{p+q} \\ \bullet \int_0^1 B_{1,1}(qx; p, q) d_{p,q}x &= \frac{p^2 q}{p+q} \\ \bullet \int_0^1 B_{0,2}(qx; p, q) d_{p,q}x &= \frac{(p^{-1}q)^2}{p^2 + pq + q^2} \\ \bullet \int_0^1 B_{1,2}(qx; p, q) d_{p,q}x &= \frac{pq^2}{p^2 + pq + q^2} \\ \bullet \int_0^1 B_{2,2}(qx; p, q) d_{p,q}x &= q^2 \end{aligned}$$

Şimdi iki tane (p, q) -Bernstein polinomunun çarpımının integral temsili ile ilgili aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 3.3.3: $0 < q < p \leq 1$ olmak üzere, $n, k \in \mathbb{Z}^+$ için

$$\begin{aligned} & \frac{\int_0^1 B_{k,n}(qx; p, q) B_{k,m} \left(\left(\frac{q}{p} \right)^{n-k+1} x; p, q \right) d_{p,q}x}{p^{-\left(\binom{n}{2} - 2\binom{k}{2} + \binom{m}{2} + nm + k - mk \right)} q^{-(k^2 - 2k - nk)}} \\ &= \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q} \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix}_{p,q} \sum_{r=0}^{2k} \frac{(-1)^r \begin{bmatrix} 2k \\ r \end{bmatrix}_{p,q} p^{\binom{r}{2}} q^{\binom{2k-r}{2}+r}}{[n+m+r-2k+1]_{p,q}} \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

ve

$$\begin{aligned}
& \frac{\int_0^1 B_{k,n}(qx; p, q) B_{k,m} \left(\left(\frac{q}{p} \right)^{n-k+1} x; p, q \right) d_{p,q} x}{p^{-\left(\binom{n}{2} - 2\binom{k}{2} + \binom{m}{2} + nm - mk + k \right)} q^{-(k^2 - 2k - nk)}} \\
&= \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q} \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix}_{p,q} p^{\frac{(n+m-2k)(n+m+2k+1)}{2}} \frac{\Gamma_{p,q}(n+m-2k+1) \Gamma_{p,q}(2k+1)}{\Gamma_{p,q}(n+m+2)}
\end{aligned} \tag{3.3.8}$$

dir.

İspat Teorem 3.3.1 için yapılan ispat yöntemine benzer bir yol ile Teorem 3.3.3 ün ispatı aşağıdaki gibi gösterilir.

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 B_{k,n}(qx; p, q) B_{k,m} \left(\left(\frac{q}{p} \right)^{n-k+1} x; p, q \right) d_{p,q} x \\
&= \int_0^1 \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q} p^{\binom{k}{2} - \binom{n}{2}} (qx)^k (1-qx)^{n-k} \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix}_{p,q} p^{\binom{k}{2} - \binom{m}{2}} \left(\left(\frac{q}{p} \right)^{n-k} x \right)^k \left(1 - \left(\frac{q}{p} \right)^{n-k} x \right)^{m-k} d_{p,q} x \\
&= \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q} \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix}_{p,q} \int_0^1 p^{\binom{k}{2} - \binom{n}{2}} (qx)^k (1-qx)^{n-k} p^{\binom{k}{2} - \binom{m}{2}} \left(\left(\frac{q}{p} \right)^{n-k} x \right)^k \left(1 - \left(\frac{q}{p} \right)^{n-k} x \right)^{m-k} d_{p,q} x
\end{aligned} \tag{3.3.9}$$

(3.3.9) ifadesi düzenlenirse;

$$\frac{\int_0^1 B_{k,n}(qx; p, q) B_{k,m} \left(\left(\frac{q}{p} \right)^{n-k+1} x; p, q \right) d_{p,q} x}{p^{-\left(\binom{n}{2} - 2\binom{k}{2} + \binom{m}{2} + nm - mk + k \right)} q^{-(k^2 - 2k - nk)}} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q} \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix}_{p,q} \int_0^1 x^{2k} (1-qx)^{n+m-2k} d_{p,q} x \tag{3.3.10}$$

elde edilir. (3.3.10) ifadesinde (p, q) -Binom formülü uygulanırsa;

$$\begin{aligned}
& \frac{\int_0^1 B_{k,n}(qx; p, q) B_{k,m} \left(\left(\frac{q}{p} \right)^{n-k+1} x; p, q \right) d_{p,q} x}{p^{-\left(\binom{n}{2} - 2\binom{k}{2} + \binom{m}{2} + nm - mk + k \right)} q^{-(k^2 - 2k - nk)}} \\
&= \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q} \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix}_{p,q} \sum_{r=0}^{2k} \begin{bmatrix} 2k \\ r \end{bmatrix}_{p,q} p^{\binom{r}{2}} q^{\binom{2k-r}{2}} (-1)^r \int_0^1 x^{n+m-2k+r} d_{p,q} x \\
&= \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q} \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix}_{p,q} \sum_{r=0}^{2k} \frac{\begin{bmatrix} 2k \\ r \end{bmatrix}_{p,q} p^{\binom{r}{2}} q^{\binom{2k-r}{2}} (-1)^r}{[n+m+r-2k+1]_{p,q}}
\end{aligned} \tag{3.3.11}$$

eşitliği bulunur. Böylece (3.3.7) ifadesi gösterilmiş olur. (3.3.10) ifadesi tekrar ele alınacak olursak;

$$\begin{aligned}
& \frac{\int_0^1 B_{k,n}(qx; p, q) B_{k,m} \left(\left(\frac{q}{p} \right)^{n-k+1} x; p, q \right) d_{p,q} x}{p^{-\left(\binom{n}{2} - 2\binom{k}{2} + \binom{m}{2} + nm - mk + k \right)} q^{-(k^2 - 2k - nk)}} \\
&= \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_{p,q} \left[\begin{matrix} m \\ k \end{matrix} \right]_{p,q} \int_0^1 x^{2k} (1 - qx)_{p,q}^{n+m-2k} d_{p,q} x \\
&= \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_{p,q} \left[\begin{matrix} m \\ k \end{matrix} \right]_{p,q} B_{p,q}(2k+1, n+m-2k+1) \\
&= \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_{p,q} \left[\begin{matrix} m \\ k \end{matrix} \right]_{p,q} p^{\frac{(n+m-2k)(n+m+2k+1)}{2}} \frac{\Gamma_{p,q}(n+m-2k+1) \Gamma_{p,q}(2k+1)}{\Gamma_{p,q}(n+m+2)}
\end{aligned} \tag{3.3.12}$$

bulunur.

Böylece (3.3.11) ve (3.3.12) eşitliklerinden Teorem 3.3.2 nin ispatı tamamlanmış olur. Bu son iki eşitlikten aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.3.4: $n > -m + 2k - 1$ ve $k > \frac{-1}{2}$ olmak üzere,

$$\sum_{r=0}^{2k} \frac{\left[\begin{matrix} 2k \\ r \end{matrix} \right]_{p,q} p^{\binom{r}{2}} q^{\binom{2k-r}{2}} (-1)^r}{\left[n+m+r-2k+1 \right]_{p,q}} = p^{\frac{2k(2n+2m-2k+1)}{2}} \frac{\Gamma_{p,q}(n+m-2k+1) \Gamma_{p,q}(2k+1)}{\Gamma_{p,q}(n+m+2)}.$$

Benzer düşünceyle üç tane (p, q) -Bernstein polinomunun integral temsili

$$\int_0^1 B_{k,n}(qx; p, q) B_{k,m} \left(\left(\frac{q}{p} \right)^{n-k+1} x; p, q \right) B_{k,s} \left(\left(\frac{q}{p} \right)^{n+m-2k} x; p, q \right) d_{p,q} x \tag{3.3.13}$$

olarak düşünülebilir. (3.3.13) ifadesi yardımıyla aşağıdaki Teorem 3.3.5 ve bu teoreme bağlı olarak Sonuç 3.3.6 verilir.

Teorem 3.3.5: $0 < q < p \leq 1$ olmak üzere, n, k, m ve $s \in \mathbb{Z}^+$ için

$$\frac{\int_0^1 B_{k,n}(qx; p, q) B_{k,m}\left(\left(\frac{q}{p}\right)^{n-k+1} x; p, q\right) B_{k,s}\left(\left(\frac{q}{p}\right)^{n+m-2k} x; p, q\right) d_{p,q} x}{p^{3\binom{k}{2} - \left(\binom{n}{2} + \binom{m}{2} + \binom{s}{2}\right) - [(n-k)(m-k) + (n+m-2k)(s-k)]} q^{3k} \left(\frac{q}{p}\right)^{2nk+mk-3k^2}} \quad (3.3.14)$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q} \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix}_{p,q} \begin{bmatrix} s \\ k \end{bmatrix}_{p,q} \sum_{r=0}^{3k} \frac{\begin{bmatrix} 3k \\ r \end{bmatrix}_{p,q} p^{\binom{r}{2}} q^{\binom{3k-r}{2}+r} (-1)^r}{[n+m+r-3k+1]_{p,q}}}{}$$

ve

$$\frac{\int_0^1 B_{k,n}(qx; p, q) B_{k,m}\left(\left(\frac{q}{p}\right)^{n-k+1} x; p, q\right) B_{k,s}\left(\left(\frac{q}{p}\right)^{n+m-2k} x; p, q\right) d_{p,q} x}{p^{3\binom{k}{2} - \left(\binom{n}{2} + \binom{m}{2} + \binom{s}{2}\right) - [(n-k)(m-k) + (n+m-2k)(s-k)]} q^{3k} \left(\frac{q}{p}\right)^{2nk+mk-3k^2}} \quad (3.3.15)$$

$$= \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q} \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix}_{p,q} \begin{bmatrix} s \\ k \end{bmatrix}_{p,q} p^{\frac{(n+m+s-3k)(n+m+s+3k+1)}{2}} \frac{\Gamma_{p,q}(3k+1) \Gamma_{p,q}(n+m+s-3k+1)}{\Gamma_{p,q}(n+m+s+2)}$$

dir.

Sonuç 3.3.6: $n > -m-s+3k-1$ ve $k > -\frac{1}{3}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} & \sum_{r=0}^{3k} \frac{\begin{bmatrix} 3k \\ r \end{bmatrix}_{p,q} p^{\binom{r}{2}} q^{\binom{3k-r}{2}+r} (-1)^r}{[n+m+r-3k+1]_{p,q}} \\ &= p^{(n+m+s-3k)(n+m+s+3k+1)} \frac{\Gamma_{p,q}(3k+1) \Gamma_{p,q}(n+m+s-3k+1)}{\Gamma_{p,q}(n+m+s+2)} \end{aligned} \quad (3.3.16)$$

dir. Teorem 3.3.5 ve Sonuç 3.3.6'nın ispatı önceki teoremlere benzer şekilde gösterilir.

Bu bölüm sonlu sayıda (p, q) -Bernstein polinomunun integral temsilini gösteren teorem ile bitirilecektir.

Teorem 3.3.7: $0 < q < p \leq 1$ olmak üzere $n_1, n_2, n_3, \dots, n_s, k \in \mathbb{Z}^+$ için

$$\begin{aligned}
& \frac{\int_0^1 B_{k,n}(qx; p, q) \prod_{i=1}^{s-1} B_{k, n_{i+1}} \left(\left(\frac{q}{p} \right)^{\sum_{l=1}^i n_l - ik} qx; p, q \right) d_{p,q} x}{p^{s \binom{k}{2} - \sum_{i=1}^s \binom{n_i}{2} - \left(\sum_{i=1}^{s-1} \left(\sum_{r=1}^i (n_r - ik)(n_{i+1} - k) \right) \right)} q^{sk} \left(\frac{q}{p} \right)^{k \sum_{i=1}^{s-1} (in_{s-i}) - k^2 \binom{s}{2}}} \\
&= \begin{bmatrix} n_1 \\ k \end{bmatrix}_{p,q} \begin{bmatrix} n_2 \\ k \end{bmatrix}_{p,q} \cdots \begin{bmatrix} n_s \\ k \end{bmatrix}_{p,q} \sum_{r=0}^{sk} \frac{\begin{bmatrix} sk \\ r \end{bmatrix}_{p,q} p^{\binom{r}{2}} q^{\binom{sk-r}{2} + r} (-1)^r}{[n_1 + \dots + n_s - r + 1]_{p,q}}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
& \frac{\int_0^1 B_{k,n}(qx; p, q) \prod_{i=1}^{s-1} B_{k, n_{i+1}} \left(\left(\frac{q}{p} \right)^{\sum_{l=1}^i n_l - ik} qx; p, q \right) d_{p,q} x}{p^{s \binom{k}{2} - \sum_{i=1}^s \binom{n_i}{2} - \left(\sum_{i=1}^{s-1} \left(\sum_{r=1}^i (n_r - ik)(n_{i+1} - k) \right) \right)} q^{sk} \left(\frac{q}{p} \right)^{k \sum_{i=1}^{s-1} (in_{s-i}) - k^2 \binom{s}{2}}} \\
&= \begin{bmatrix} n_1 \\ k \end{bmatrix}_{p,q} \begin{bmatrix} n_2 \\ k \end{bmatrix}_{p,q} \cdots \begin{bmatrix} n_s \\ k \end{bmatrix}_{p,q} B_{p,q}(sk+1, n_1 + n_2 + \dots + n_s - sk + 1) \\
&= \begin{bmatrix} n_1 \\ k \end{bmatrix}_{p,q} \begin{bmatrix} n_2 \\ k \end{bmatrix}_{p,q} \cdots \begin{bmatrix} n_s \\ k \end{bmatrix}_{p,q} \\
&\times \left(p^{\frac{[(n_1 + n_2 + \dots + n_s - sk)(n_1 + n_2 + \dots + n_s + sk + 1)]}{2}} \frac{\Gamma_{p,q}(sk+1) \Gamma_{p,q}(n_1 + n_2 + \dots + n_s - sk + 1)}{\Gamma_{p,q}(n_1 + n_2 + \dots + n_s + 2)} \right)
\end{aligned}$$

dir. Bu eşitliklerinden aşağıdaki sonuç yazılabilir.

Sonuç 3.3.8: $n_1 + n_2 + \dots + n_s - sk > -1$ ve $k > -\frac{1}{s}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
& \sum_{r=0}^{sk} \frac{\begin{bmatrix} sk \\ r \end{bmatrix}_{p,q} p^{\binom{r}{2}} q^{\binom{sk-r}{2} + r} (-1)^r}{[n_1 + \dots + n_s - r + 1]_{p,q}} \\
&= p^{\frac{[(n_1 + n_2 + \dots + n_s - sk)(2(sk+1) + n_1 + n_2 + \dots + n_s - sk - 1)]}{2}} \frac{\Gamma_{p,q}(sk+1) \Gamma_{p,q}(n_1 + n_2 + \dots + n_s - sk + 1)}{\Gamma_{p,q}(n_1 + n_2 + \dots + n_s + 2)}
\end{aligned}$$

dir.

Teorem 3.3.7 ve Sonuç 3.3.8 bu bölümde verilen teorem ve sonuçların bir genellemesi olup, ispatları daha önce ispatlanan özel durumlara benzer şekilde yapılır.

Not 3.3.9: Bu bölümde elde edilen sonuçlar ve teoremler [58] kaynağındaki q - Bernstein polinomları için elde edilen sonuçların ve teoremlerin genellemesidir. Bu bölümdeki sonuçlar ve teoremler için $p = 1$ iken [58] de ki sonuçlar ve teoremler elde edilir.



BÖLÜM 4

(p, q) -BERNSTEIN POLİNOMLARININ ÜRETEÇ FONKSİYONLARI VE ONLARIN ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde [59] daki benzer metodlar kullanılarak (p, q) -Bernstein polinomlarının üreteç fonksiyonunun tanımı (p, q) -analiz yardımıyla verilecektir. Bu tanımdan hareketle bu polinomların üreteç fonksiyonu ile elde edilebilecek (p, q) anlamında yeni ve ilginç bazı özellikler, sonuçlar ve teoremler şeklinde verilecektir. Ayrıca üreteç fonksiyonunun bağlı olduğu parametrelerin bazı özel değerleri için Mathematica yardımıyla çizilmiş bu fonksiyonun grafiği de bu bölümde gösterilecektir.

İlk olarak (p, q) -Bernstein polinomları için (p, q) -analiz yardımıyla aşağıdaki gibi alternatif bir tanım verilir.

Tanım 4.1.1: (p, q) -Bernstein polinomları aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$B_{k,n}(x; p, q) = \frac{p^{\binom{k}{2} - \binom{n}{2}} ((1, x); (p, q))_k ((p^k, q^{k+1}); (p, q))_{n-k} x^k}{((p, q); (p, q))_{n-k}}. \quad (4.1.1)$$

Bu bölüm boyunca (p, q) -Bernstein polinomları için Tanım 4.1.1 göz önüne alınacak olup, (4.1.1) ile tanımlanan bu polinomlar için üreteç fonksiyonu iki farklı şekilde Tanım 4.1.2 ile aşağıdaki gibi verilir.

Tanım 4.1.2: $0 < q < p \leq 1$ ve $F_k^{p,q}(x, t)$ ile $\mathcal{F}_k^{p,q}(x, t, c)$, (p, q) -Bernstein polinomlarının üreteç fonksiyonları olmak üzere;

$$F_k^{p,q}(x,t) = \sum_{n=k}^{\infty} B_{k,n}(x;p,q) \frac{t^n}{[n]_{p,q}!} \quad (4.1.2)$$

ve

$$\mathcal{F}_k^{p,q}(x,t,c) = \sum_{n=k}^{\infty} B_{k,n}(x;p,q) \frac{t^n}{((1,c);(p,q))_n} \quad (4.1.3)$$

olarak tanımlanır.

Tanım 4.1.2 de verilen (4.1.2) ile (4.1.3) eşitlikleri arasında aşağıdaki bağıntı elde edilir.

$$\begin{aligned} F_k^{p,q}(x,t) &= \sum_{n=k}^{\infty} B_{k,n}(x;p,q) \frac{t^n}{[n]_{p,q}!} \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} B_{k,n}(x;p,q) \frac{(p-q)^n t^n}{((p,q),(p,q))_n} \\ &= \mathcal{F}_k^{p,q}((1,x),(p-q)t,(p,q)) \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

(4.1.3) eşitliğinde (4.1.1) eşitliğinin sağ tarafındaki ifade yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_k^{p,q}(x,t,c) &= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{p^{\binom{k}{2}-\binom{n}{2}} ((1,x);(p,q))_k ((p^k,q^{k+1});(p,q))_{n-k} x^k t^n}{((p,q);(p,q))_{n-k} ((1,c);(p,q))_n} \\ &= \frac{x^k t^k p^{\binom{k}{2}}}{((1,c);(p,q))_k} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{p^{-\binom{n}{2}} ((1,x);(p,q))_k ((p^k,q^{k+1});(p,q))_{n-k} t^{n-k}}{((p,q);(p,q))_{n-k} ((p^k,cq^k);(p,q))_{n-k}} \\ &= {}_2\Phi_1((1,x),(p^k,q^{k+1});(p^k,cq^k),(p,q),t) \frac{x^k t^k p^{\binom{k}{2}-\binom{n}{2}}}{((1,c);(p,q))_k} \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

eşitliği elde edilir. (4.1.4) eşitliğinin sağ tarafı tekrar ele alınıp gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\begin{aligned}
& \mathcal{F}_k^{p,q}((1,x), (p-q)t, (p,q)) \\
&= \sum_{n=k}^{\infty} B_{k,n}(x; p, q) \frac{(p-q)^n t^n}{((p,q), (p,q))_n} \\
&= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{p^{\binom{k}{2} - \binom{n}{2}} ((1,x); (p,q))_k ((p^k, q^{k+1}); (p,q))_{n-k} x^k}{((p,q); (p,q))_{n-k}} \frac{(p-q)^n t^n}{((p,q), (p,q))_n} \quad (4.1.6) \\
&= \frac{p^{\binom{k}{2}} (x(p-q)t)^k}{((p,q); (p,q))_k} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{((1,x); (p,q))_{n-k} ((p^k, q^{k+1}); (p,q))_{n-k}}{((p,q); (p,q))_{n-k} ((p^{k+1}, q^{k+1}); (p,q))_{n-k}} t^{n-k} \\
&= {}_1\Phi_0((1,x), -; (p,q), (p-q)t) \frac{p^{\binom{k}{2} - \binom{n}{2}} (x(p-q)t)^k}{((p,q); (p,q))_k}
\end{aligned}$$

(4.1.6) eşitliğinde gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\begin{aligned}
&= \frac{p^{\binom{k}{2} - \binom{n}{2}} (x(p-q)t)^k ((p, x(p-q)t), (p,q))_{\infty}}{((p,q); (p,q))_k ((p, (p-q)t), (p,q))_{\infty}} \\
&= p^{\binom{k}{2} - \binom{n}{2}} \frac{(xt)^k}{[k]_{p,q}!} \frac{((p, x(p-q)t), (p,q))_{\infty}}{((p, (p-q)t), (p,q))_{\infty}} \quad (4.1.7) \\
&= p^{\binom{k}{2} - \binom{n}{2}} \frac{(xt)^k}{[k]_{p,q}!} \frac{e_{p,q}((p-q)t)}{e_{p,q}((p-q)xt)}.
\end{aligned}$$

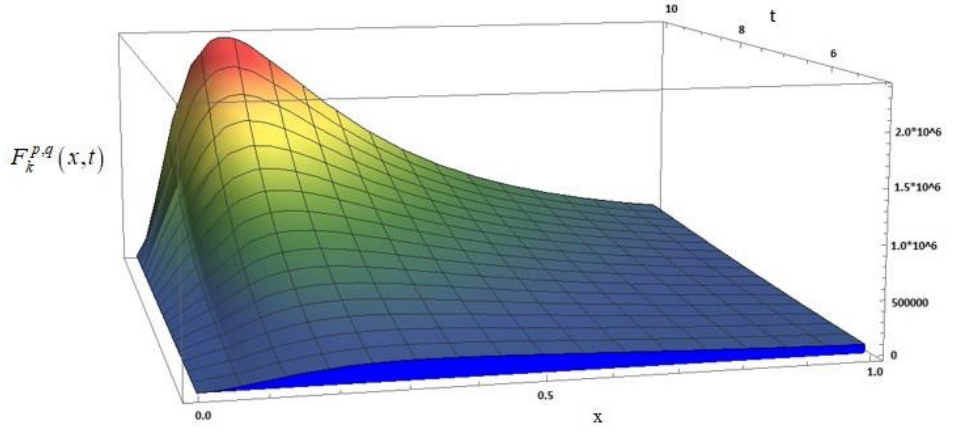
elde edilir. (4.1.4) ve (4.1.7) yardımıyla (p,q) -Bernstein polinomlarının üreteç fonksiyonunu ifade eden aşağıdaki teorem verilir.

Teorem 4.1.3: $0 < q < p \leq 1$ için;

$$F_k^{p,q}(x, t) = \sum_{n=k}^{\infty} B_{k,n}(x; p, q) \frac{t^n}{[n]_{p,q}!} = p^{\binom{k}{2} - \binom{n}{2}} \frac{(xt)^k}{[k]_{p,q}!} \frac{\varepsilon_{p,q}(t)}{\varepsilon_{p,q}(xt)} \quad (4.1.8)$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 4.1.3 de tanımlanan $F_k^{p,q}(x, t)$ üreteç fonksiyonunun bazı özel k, p, q ve t değerleri için grafiği Şekil 4.1.1 de aşağıdaki gibi gösterilir.



Şekil 4.1.1. $F_k^{p,q}(x,t)$ üretç fonksiyonunun grafiği

Teorem 4.1.3 yardımıyla (p,q) -Bernstein polinomları için birçok kullanışlı bağıntı ve sonuç elde edilir. (4.1.8) ifadesini k ve z ye bağlı olarak seriye açarsak;

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} F_k^{p,q}(x,t) z^k &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(xzt)^k}{[k]_{p,q}!} p^{\binom{k}{2}} \right) p^{-\binom{n}{2}} \frac{e_{p,q}(t)}{e_{p,q}(xt)} \\ &= p^{-\binom{n}{2}} \frac{\varepsilon_{p,q}(xzt) \varepsilon_{p,q}(t)}{\varepsilon_{p,q}(xt)} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Buna göre aşağıdaki sonuç verilir.

Sonuç 4.1.4: $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ve $0 < q < p \leq 1$ için;

$$\sum_{k=0}^{\infty} F_k^{p,q}(x,t) z^k = p^{-\binom{n}{2}} \frac{\varepsilon_{p,q}(xzt) \varepsilon_{p,q}(t)}{\varepsilon_{p,q}(xt)} \quad (4.1.9)$$

dır.

(4.1.9) eşitliğinde $z = 1$ alınırsa;

$$\sum_{k=0}^{\infty} F_k^{p,q}(x,t) = p^{-\binom{n}{2}} \varepsilon_{p,q}(t) \quad (4.1.10)$$

elde edilir. (4.1.8) ifadesinin her iki tarafının k ya bağlı olarak seriye açılmasıyla

$$\sum_{k=0}^{\infty} F_k^{p,q}(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=k}^{\infty} B_{k,n}(x; p, q) \frac{t^n}{[n]_{p,q}!} \right) \quad (4.1.11)$$

eşitliği elde edilir. (4.1.10) ve (4.1.11) eşitliklerinin sağ tarafları için sırasıyla Taylor seri açılımı ve Cauchy çarpımı uygulanırsa;

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{[n]_{p,q}!} \left(\sum_{k=0}^n B_{k,n}(x; p, q) \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{[n]_{p,q}!} \quad (4.1.12)$$

eşitliği elde edilir.

(4.1.12) eşitliğinde $\frac{t^n}{[n]_{p,q}!}$ katsayı karşılaştırması yapılırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.1.5: $0 < q < p \leq 1$ için

$$\sum_{k=0}^n B_{k,n}(x; p, q) = 1. \quad (4.1.13)$$

(4.1.8) eşitliğinde tanımlanan üreteç fonksiyonu

$$\mathcal{E}_{p,q}(xt) F_k^{p,q}(x, t) = p^{\binom{k}{2} - \binom{n}{2}} \frac{(xt)^k}{[k]_{p,q}!} \mathcal{E}_{p,q}(t) \quad (4.1.14)$$

olarak tekrar yazılır.

Üreteç fonksiyonunun tanımı ve (p, q) -üstel fonksiyonunun Taylor seri açılımından

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^{\binom{n}{2}} \frac{(xt)^n}{[n]_{p,q}!} \sum_{k=n}^{\infty} B_{k,n}(x; p, q) \frac{(t)^n}{[n]_{p,q}!} = p^{\binom{k}{2} - \binom{n}{2}} \frac{(xt)^k}{[k]_{p,q}!} \sum_{n=0}^{\infty} p^{\binom{n}{2}} \frac{(t)^n}{[n]_{p,q}!} \quad (4.1.15)$$

eşitliği elde edilir. (4.1.15) eşitliğine Cauchy çarpımı uygulanırsa;

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{n-k} \begin{bmatrix} n \\ l \end{bmatrix}_{p,q} x^l p^{\binom{l}{2}} B_{k,n-l}(x; p, q) \right) \frac{(t)^n}{[n]_{p,q}!} = \sum_{n=0}^{\infty} x^k p^{\binom{n}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q} \frac{t^n}{[n]_{p,q}!} \quad (4.1.16)$$

eşitliği elde edilir.

(4.1.16) eşitliğinde $\frac{t^n}{[n]_{p,q}!}$ katsayı karşılaştırması yapılırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.1.6: $0 < q < p \leq 1$ için;

$$\sum_{l=0}^{n-k} \begin{bmatrix} n \\ l \end{bmatrix}_{p,q} x^l p^{\binom{l}{2}} B_{k,n-l}(x; p, q) = x^k p^{\binom{n}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q} \quad (4.1.17)$$

dır.

(4.1.8) eşitliğinde tanımlanan (p, q) -Bernstein polinomlarının x e bağlı (p, q) -türevi

$$\begin{aligned} D_{p,q,x} (F_k^{p,q}(x, t)) &= D_{p,q,x} \left(p^{\binom{k}{2} - \binom{n}{2}} \frac{(xt)^k}{[k]_{p,q}!} \frac{\varepsilon_{p,q}(t)}{\varepsilon_{p,q}(xt)} \right) \\ &= p^{\binom{k}{2} - \binom{n}{2}} \frac{t^k \varepsilon_{p,q}(t)}{[k]_{p,q}!} D_{p,q,x} \left(\frac{x^k}{\varepsilon_{p,q}(xt)} \right) \end{aligned} \quad (4.1.18)$$

şeklinde elde edilir. (4.1.18) eşitliği bölümün (p, q) -türevi özelliğinden,

$$\begin{aligned} D_{p,q,x} (F_k^{p,q}(x, t)) &= p^{\binom{k}{2} - \binom{n}{2}} \frac{t^k \varepsilon_{p,q}(t)}{[k]_{p,q}!} \left[(px)^k D_{p,q,x} \left(\frac{1}{\varepsilon_{p,q}(xt)} \right) + \frac{1}{\varepsilon_{p,q}(qxt)} [k]_{p,q} x^{k-1} \right] \end{aligned} \quad (4.1.19)$$

şeklinde yazılır.

$$D_{p,q,x} \left(\frac{1}{\varepsilon_{p,q}(xt)} \right) = \varepsilon_{p,q}(pxt) \text{ eşitliği göz önüne alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.}$$

Sonuç 4.1.7: $0 < q < p \leq 1$ için;

$$D_{p,q,x} (F_k^{p,q}(x, t)) = p^{\binom{k}{2} - \binom{n}{2}} \frac{t^k \varepsilon_{p,q}(t)}{[k]_{p,q}!} \left[(px)^k \varepsilon_{p,q}(pxt) + \frac{1}{\varepsilon_{p,q}(qxt)} [k]_{p,q} x^{k-1} \right] \quad (4.1.20)$$

dir. Burada $\max \left\{ \left| \frac{q}{p} \right|, |x|, |y| \right\} < 1$ ve $|t| < 1 / \left| 1 - \frac{q}{p} \right|$ dir.

$F_k^{p,q}(x, t)$ üreteç fonksiyonun her iki tarafı $e_{p,q}(xt)$ ile çarpılırsa;

$$\varepsilon_{p,q}(xt)F_k^{p,q}(x,t) = p^{\binom{k}{2}-\binom{n}{2}} \frac{(xt)^k}{[k]_{p,q}!} \varepsilon_{p,q}(t) \quad (4.1.21)$$

eşitliği elde edilir. (4.1.21) eşitliğin her iki tarafının t ye bağlı (p,q) -türevi alınır;

$$\begin{aligned} D_{p,q,t}(\varepsilon_{p,q}(xt)F_k^{p,q}(x,t)) &= D_{p,q,t} \left(p^{\binom{k}{2}-\binom{n}{2}} \frac{(xt)^k}{[k]_{p,q}!} \varepsilon_{p,q}(t) \right) \\ &= \frac{p^{\binom{k}{2}-\binom{n}{2}} x^k}{[k]_{p,q}!} D_{p,q,t}(t^k \varepsilon_{p,q}(t)) \end{aligned} \quad (4.1.22)$$

olur. (4.1.22) eşitliğine (p,q) -türevin çarpım kuralı uygulanırsa;

$$\begin{aligned} F_k^{p,q}(x,pt)\varepsilon_{p,q}(xpt) + \varepsilon_{p,q}(xqt)D_{p,q,t}(F_k^{p,q}(x,t)) \\ = p^{\binom{k}{2}-\binom{n}{2}} \frac{x^k}{[k]_{p,q}!} (\varepsilon_{p,q}(pt)[k]_{p,q} t^{k-1} + (qt)^k \varepsilon_{p,q}(pt)) \end{aligned} \quad (4.1.23)$$

eşitliği elde edilir. $F_k^{p,q}(x,t)$ nin tanımından aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.1.8: $0 < q < p \leq 1$ için;

$$\begin{aligned} D_{p,q,x}(F_k^{p,q}(x,t)) &= \frac{p^{k-1} \varepsilon_{p,q}(pt)x}{\varepsilon_{p,q}(qt)} F_{k-1}^{p,q}(x,t) \\ &\quad + \frac{q^k \varepsilon_{p,q}(pt)x}{\varepsilon_{p,q}(qt)} F_k^{p,q}(x,qt) - \frac{\varepsilon_{p,q}(xpt)}{\varepsilon_{p,q}(xqt)} F_k^{p,q}(x,qt). \end{aligned} \quad (4.1.24)$$

$F_k^{p,q}(x,t)$ de $x \rightarrow xy$ alınır;

$$F_k^{p,q}(xy,t) = p^{\binom{k}{2}-\binom{n}{2}} \frac{(xyt)^k}{[k]_{p,q}!} \frac{\varepsilon_{p,q}(t)}{\varepsilon_{p,q}(xyt)} \quad (4.1.25)$$

eşitliği elde edilir. (4.1.25) kullanılarak

$$\begin{aligned}
F_k^{p,q}(xy, t) &= p^{\binom{k}{2} - \binom{n}{2}} \frac{(xyt)^k}{[k]_{p,q}!} \frac{\varepsilon_{p,q}(t)}{\varepsilon_{p,q}(xyt)} \\
&= p^{\binom{k}{2} - \binom{n}{2}} \frac{(xyt)^k}{[k]_{p,q}!} \frac{\varepsilon_{p,q}(t)}{\varepsilon_{p,q}(xt)} \frac{\varepsilon_{p,q}(xt)}{\varepsilon_{p,q}(xyt)} \\
&= p^{\binom{n}{2} - \binom{s}{2} - \binom{l}{2}} \frac{[l]_{p,q}! [s]_{p,q}!}{[k]_{p,q}!} x^{k-l-s} y^{k-s} t^{k-l-s} \\
&\quad \times \left(p^{\binom{l}{2} - \binom{n}{2}} \frac{(xt)^l}{[l]_{p,q}!} \frac{\varepsilon_{p,q}(t)}{\varepsilon_{p,q}(xt)} \right) \left(p^{\binom{s}{2} - \binom{n}{2}} \frac{(xt)^s}{[s]_{p,q}!} \frac{\varepsilon_{p,q}(t)}{\varepsilon_{p,q}(xt)} \right) \\
&= p^{\binom{n}{2} - \binom{s}{2} - \binom{l}{2}} \frac{[l]_{p,q}! [s]_{p,q}!}{[k]_{p,q}!} x^{k-l-s} y^{k-s} t^{k-l-s} F_l^{p,q}(x, t) F_s^{p,q}(x, yt)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Buna göre aşağıdaki sonuç verilir.

Sonuç 4.1.9: $0 < q < p \leq 1$ için;

$$F_k^{p,q}(xy, t) = p^{\binom{n}{2} - \binom{s}{2} - \binom{l}{2}} \frac{[l]_{p,q}! [s]_{p,q}!}{[k]_{p,q}!} x^{k-l-s} y^{k-s} t^{k-l-s} F_l^{p,q}(x, t) F_s^{p,q}(x, yt).$$

Burada $\max \left\{ \left| \frac{q}{p} \right|, |x|, |y| \right\} < 1$ ve $|t| < 1 / \left| 1 - \frac{q}{p} \right|$ dir.

$F_k^{p,q}(x, t)$ üreteç fonksiyonunun tanımında $k = 0$ alınırsa;

$$\begin{aligned}
F_0^{p,q}(x, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} B_{0,n}(x; p, q) \frac{t^n}{[n]_{p,q}!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} p^{-\binom{n}{2}} \prod_{l=0}^{n-1} (p^l - xq^l) \frac{t^n}{[n]_{p,q}!}
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca $F_k^{p,q}(x, t)$ için sırasıyla $x \rightarrow xy$ ve $x \rightarrow y$ ile $t \rightarrow xt$ yazılırsa;

$$F_k^{p,q}(xy, t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_{k,n}(xy; p, q) \frac{t^n}{[n]_{p,q}!} \quad (4.1.26)$$

ve

$$F_k^{p,q}(y, xt) = \sum_{n=0}^{\infty} B_{k,n}(y; p, q) \frac{(xt)^n}{[n]_{p,q}!} \quad (4.1.27)$$

eşitlikleri bulunur. (4.1.26) ve (4.1.27) eşitlikleri Sonuç 4.1.6 da yerine yazılıp gerekli işlemler yapılırsa sonuç aşağıdaki gibi elde edilir.

Sonuç 4.1.10: $0 < q < p \leq 1$ için;

$$B_{k,n}(xy; p, q) = \sum_{j=0}^{n-k} p^{-\binom{j}{2}} B_{n-j,n}(x; p, q) B_{k,n-j}(y; p, q).$$

Sonuç 4.1.7 ve $F_k^{p,q}(x, t)$ de $k=0$ ve $y=t$ alınır;

$$B_{0,n}(xt; p, q) = \sum_{j=0}^n p^{-\binom{j}{2}} B_{n-j,n}(x; p, q) B_{0,n-j}(t; p, q)$$

ve

$$B_{0,n}(x; p, q) = p^{-\binom{n}{2}} \prod_{j=0}^{n-1} (p^j - xq^j)$$

eşitlikleri elde edilir. Üstteki eşitlikte j yerine $n-j$ alınıp gerekli düzenlemeler yapıldıktan sonra sonuç aşağıdaki gibi verilir.

Sonuç 4.1.11: $0 < q < p \leq 1$ için;

$$p^{-\binom{n}{2}} \prod_{l=0}^{n-1} (p^l - xtq^l) = \sum_{j=0}^n p^{-\left(\binom{j}{2} + \binom{n-j}{2}\right)} B_{j,n}(x; p, q) \prod_{l=0}^{j-1} (p^l - tq^l).$$

Sonuç 4.1.8 de t yerine $\frac{1}{t}$ alınır;

$$p^{-\binom{n}{2}} \prod_{l=0}^{n-1} (p^l - xt^{-1}q^l) = \sum_{j=0}^n p^{-\left(\binom{j}{2} + \binom{n-j}{2}\right)} B_{j,n}(x; p, q) \prod_{l=0}^{j-1} (p^l - t^{-1}q^l) \quad (4.1.28)$$

eşitliği elde edilir. Üstteki eşitliğin her iki tarafı t^n ile çarpılırsa;

$$p^{-\binom{n}{2}} \prod_{l=0}^{n-1} (tp^l - xq^l) = \sum_{j=0}^n p^{-\left(\binom{j}{2} + \binom{n-j}{2}\right)} B_{j,n}(x; p, q) \prod_{l=0}^{j-1} (tp^l - q^l) t^{n-j} \quad (4.1.29)$$

eşitliği elde edilir. $F_k^{p,q}(x, t)$ nin tanımını kullanarak

$$t^{n-j} \prod_{l=0}^{j-1} (tp^l - q^l) = (-1)^j q^{\binom{j}{2}} t^{n-j} \prod_{l=0}^{j-1} \left(1 - t \left(\frac{q}{p}\right)^{-l}\right) = (-1)^j q^{\binom{j}{2}} \frac{B_{n-j,n}\left(t; \frac{p}{q}\right)}{\left[\begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right]_{\frac{p}{q}}} \quad (4.1.30)$$

eşitlikleri elde edilir. Son iki eşitlikten, Marsden' in eşitliğinin (p, q) genellemesi Sonuç 4.1.12 yardımıyla aşağıdaki gibi verilir.

Sonuç 4.1.12:

$$p^{-\binom{n}{2}} \prod_{l=0}^{n-1} (tp^l - xq^l) = \sum_{j=0}^n p^{-\left(\binom{j}{2} + \binom{n-j}{2}\right)} (-1)^j q^{\binom{j}{2}} \frac{B_{j,n}(x; p, q) B_{n-j,n}\left(t; \frac{p}{q}\right)}{\left[\begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right]_{\frac{p}{q}}}, \left| \frac{p}{q} \right| > 1.$$

Not 4.1.13: Bu bölümde elde edilen teorem ve sonuçlar [59] kaynağındaki q -Bernstein polinomları için elde edilen sonuçların genellemesidir. Bu bölümdeki teorem ve sonuçlar için $p = 1$ iken [59] da ki sonuçlar elde edilir.

BÖLÜM 5

I. VE II. TİP (p, q) -BERNSTEIN POLİNOMLARI VE ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde, literatürde tanımlanmış ve üzerinde çalışılmış olan modifiye edilmiş Bernstein polinomlarından bazıları (p, q) analize taşınmıştır. Şimsek tarafından [60] da tanımlanan q -Bernstein polinomlarının, (p, q) benzeri tanımlanmıştır. Daha sonra bu tanım yardımıyla başta polinomların üreteç fonksiyonları olmak üzere birçok özelliği elde edilmiştir. Bununla birlikte T. Kim [62] tarafından tanımlanmış olan q -Bernstein polinomlarının da (p, q) benzerleri bu bölümde tanımlanmış ve özellikleri incelenmiştir.

5.1 I. Tip (p, q) -Bernstein Polinomları

Bu bölümde [60] kaynağından faydalanılarak, ilk olarak (p, q) -Bernstein polinomları için yeni bir tanım verilecektir. Bu tanımdan hareketle bazı yeni özellikler ve eşitlikler elde edilecektir.

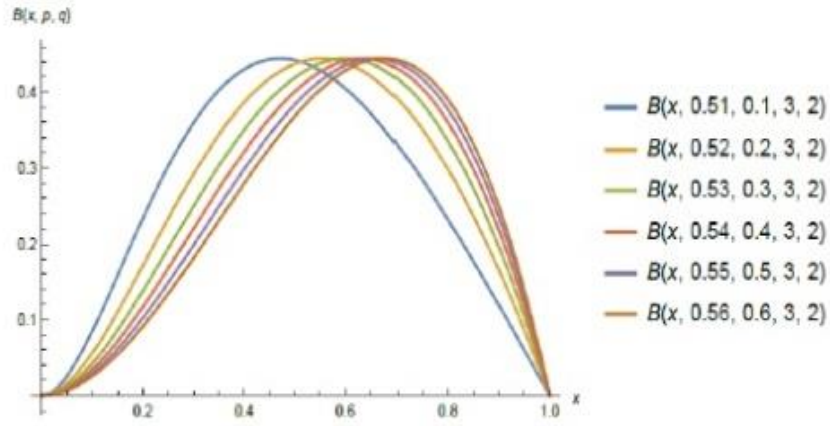
Tanım 5.1.1: $k, n \in \mathbb{N}$ olsun. $k \leq n$ olmak üzere;

$$B_{k,n}(x; p, q) = \binom{n}{k} p^{(1-x)k} [x]_{p,q}^k q^{(n-k)x} [1-x]_{p,q}^{n-k} \quad (5.1.1)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $0 < q < p \leq 1$ dir.

$p = 1$ iken (5.1.1) de verilen I. tip (p, q) - Bernstein polinomları [60] da tanımlanan polinomlara indirgenir.

Tanım 5.1.1 de verilen I. tip (p, q) - Bernstein polinomları, bazı özel değerler için Şekil 5.1.1. yardımıyla aşağıdaki gibi gösterilir.



Şekil 5.1.1. I. tip (p, q) -Bernstein polinomları.

İlk olarak bu polinomların üreteç fonksiyonları elde edilir. Üreteç fonksiyonu tanımlandığı taktirde bu polinomların bir çok yeni özellikleri gösterilir. Üreteç fonksiyonunun tanımı Teorem 5.1.2 yardımıyla aşağıdaki gibidir.

Teorem 5.1.2: $B_{k,n}(x; p, q)$ I. tip (p, q) -Bernstein polinomları olmak üzere bu polinomların üreteç fonksiyonu;

$$F_{k;p,q}(t; x) = \frac{p^{(1-x)k} [x]_{p,q}^k t^k}{k!} e^{q^x [1-x]_{p,q} t} \quad (5.1.2)$$

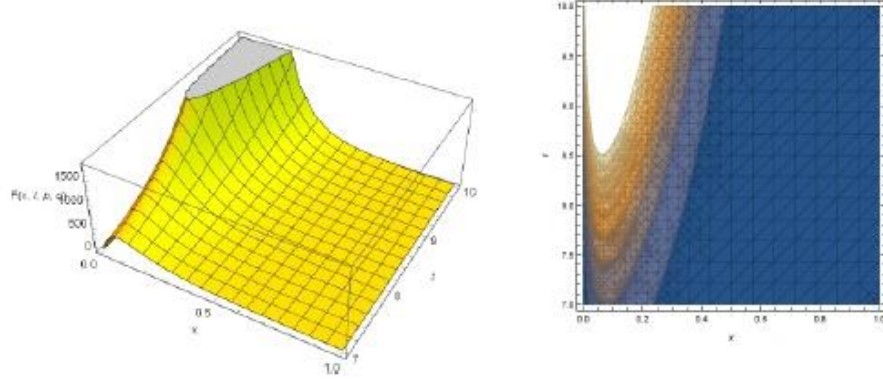
dir.

İspat (5.1.1) de tanımlanan I. tip (p, q) -Bernstein polinomlarının tanımından;

$$\begin{aligned} F_{k;p,q}(t; x) &= \sum_{n=0}^{\infty} B_{k,n}(x; p, q) \frac{t^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} p^{(1-x)k} [x]_{p,q}^k t^k e^{q^x [1-x]_{p,q} t} \frac{t^n}{n!} \\ &= \frac{p^{(1-x)k} [x]_{p,q}^k t^k}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n-k)x} [1-x]_{p,q}^{n-k} \frac{t^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= \frac{p^{(1-x)k} [x]_{p,q}^k t^k}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} q^{nx} [1-x]_{p,q}^n \frac{t^n}{n!} \\ &= \frac{p^{(1-x)k} [x]_{p,q}^k t^k}{k!} e^{q^x [1-x]_{p,q} t}. \end{aligned}$$

Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 5.1.2 de tanımlanan üreteç fonksiyonu bazı özel değerler için Şekil 5.1.2 yardımıyla aşağıdaki gibi gösterilir.



Şekil 5.1.2. I. tip (p, q) -Bernstein polinomlarının üreteç fonksiyonu.

Elde edilen üreteç fonksiyonu yardımıyla (p, q) -Bernstein polinomları için aşağıdaki sonuçlar verilir.

Sonuç 5.1.3: $k \leq n$ ve $0 < q < p \leq 1$ için;

$$\sum_{k=0}^n B_{k,n}(x; p, q) = 1 \quad (5.1.3)$$

dir.

İspat Üreteç fonksiyonu tanımından;

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} F_{k;p,q}(t; x) &= \frac{p^{(1-x)k} [x]_{p,q}^k t^k}{k!} e^{q^x [1-x]_{p,q} t} \\ &= e^{q^x [1-x]_{p,q} t} \sum_{k=0}^{\infty} \left(p^{(1-x)} [x]_{p,q} \right)^k \frac{t^k}{k!} \\ &= e^{(q^x [1-x]_{p,q} + p^{(1-x)} [x]_{p,q}) t} \end{aligned}$$

elde edilir. (p, q) -toplam kuralından;

$$e^{(q^x [1-x]_{p,q} + p^{(1-x)} [x]_{p,q}) t} = e^t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}$$

yazılabilir. Tekrar Tanım 5.1.1 göz önüne alınıp bu tanıma Cauchy çarpımı uygulanırsa;

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} B_{k,n}(x; p, q) \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n B_{k,n}(x; p, q) \right) \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \quad (5.1.4)$$

elde edilir. (5.1.4) de $\frac{t^n}{n!}$ in katsayıları karşılaştırılırsa ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 5.1.4: $k \leq n$ ve $0 < q < p \leq 1$ için;

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_{k,n}(x; p, q) \frac{t^n}{n!} = \left(1 - [2]_{\frac{q}{p}} \right)^n \quad (5.1.5)$$

dir. Burada $\left| \frac{q}{p} \right| < 1$ dir.

İspat Üreteç fonksiyonu tanımından

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k F_{k;p,q}(t; x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^{(1-x)k} [x]_{p,q}^k t^k}{k!} e^{q^x [1-x]_{p,q} t} \\ &= e^{(q^x [1-x]_{p,q} - p^{(1-x)} [1-x]_{p,q}) t} \end{aligned} \quad (5.1.6)$$

(5.1.6) eşitliğinde gerekli düzenlemeler yapılsa;

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \sum_{n=0}^{\infty} B_{k,n}(x; p, q) \frac{t^n}{n!} &\stackrel{\text{Cauchy çarpımı}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k B_{k,n}(x; p, q) \frac{t^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - [2]_{\frac{q}{p}} \right)^n \frac{t^n}{n!} \end{aligned} \quad (5.1.7)$$

elde edilir. (5.1.7) eşitliğinde $\frac{t^n}{n!}$ katsayıları eşitlenirse ispat tamamlanmış olur.

I. tip (p, q) -Bernstein polinomları için alternatif bir tanım olarak aşağıdaki tanım verilir.

Tanım 5.1.5: $k \leq n$ ve $0 < q < p \leq 1$ için;

$$B_{k,n}(x; p, q) = \binom{n}{k} [x]_{\frac{q}{p}}^k \left(1 - [x]_{\frac{q}{p}} \right)^{n-k},$$

olarak tanımlanır. Burada, $p^{(1-x)k} [x]_{p,q}^k = [x]_{\frac{q}{p}}^k$ ve $q^{(n-k)x} [1-x]_{p,q}^{n-k} = \left(1 - [x]_{\frac{q}{p}}\right)^{n-k}$ şeklindedir.

I. tip (p, q) -Bernstein polinomlarının üreteç fonksiyonunun t ye göre v -mertebeden türevini içeren aşağıdaki sonuç verilir.

Sonuç 5.1.6: $0 < q < p \leq 1$ için;

$$\frac{\partial^v F_{k;p,q}(t; x)}{\partial t^v} = \sum_{j=0}^v B_{j,v}(x; p, q) F_{k-j}^{p,q}(x, t).$$

İspat İspat için öncelikle I. tip (p, q) -Bernstein polinomlarının üreteç fonksiyonu

$$A = \frac{(p^{(1-x)k} [x]_{p,q}^k t^k)}{k!}, B = e^{q^x [1-x]_{p,q} t}$$

şeklinde tanımlanır. Daha sonra Leibniz kuralı gereği,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^v F_{k;p,q}(t; x)}{\partial t^v} &= \sum_{j=0}^v \binom{v}{j} \frac{(p^{(1-x)k} [x]_{p,q}^k t^{k-j})}{(k-j)!} (q^x [1-x]_{p,q})^{v-j} e^{q^x [1-x]_{p,q} t} \\ &= \sum_{j=0}^v \binom{v}{j} p^{(1-x)j} [x]_{p,q}^j (q^x [1-x]_{p,q})^{v-j} \frac{(p^{(1-x)(k-j)} [x]_{p,q}^{k-j} t^{k-j})}{(k-j)!} e^{q^x [1-x]_{p,q} t} \\ &= \sum_{j=0}^v B_{j,v}(x; p, q) F_{k-j}^{p,q}(x, t) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 5.1.7: $k \leq n$ ve $0 < q < p \leq 1$ için;

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_{k,n}(x; p, q)}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\binom{n}{k} [x]_{(q/p)}^k (1 - [x]_{(q/p)})^{n-k} \right) \\ &= \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^x \log\left(\frac{q}{p}\right)^n}{\left(\frac{q}{p} - 1\right)} (B_{k-1,n-1}(x; p, q) - B_{k,n-1}(x; p, q)). \end{aligned}$$

İspat Sonuç klasik anlamdaki türev tanımından kolaylıkla elde edilebilir.

Bu bölüm son olarak I. tip (p, q) -Bernstein polinomları için Laplace dönüşümü yardımıyla aşağıdaki sonuç verilerek tamamlanır.

Sonuç 5.1.8: $k \leq n$ ve $0 < q < p \leq 1$ için;

$$\sum_{n=0}^{\infty} [x]_{\frac{q}{p}} B_{k,n}(x; p, q) \frac{t^n}{n!} = 1$$

dir.

İspat (5.1.5) eşitliğindeki I. tip (p, q) -Bernstein polinomlarının tanımını ele alarak aşağıdaki eşitlikler yazılabilir:

$$\begin{aligned} e^{\left[\frac{x}{p}\right]_q t} \sum_{n=0}^{\infty} B_{k,n}(x; p, q) \frac{t^n}{n!} &= \frac{\left[\frac{x}{p}\right]_q^k t^k}{k!} e^t \\ e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} B_{k,n}(x; p, q) \frac{t^n}{n!} &= \frac{\left[\frac{x}{p}\right]_q^k t^k}{k!} e^{-\left[\frac{x}{p}\right]_q t} \end{aligned} \quad (5.1.8)$$

(5.1.8) ifadesindeki ikinci eşitliğin t ye göre integrali alınır;

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{k,n}(x; p, q)}{n!} \int_0^{\infty} e^{-t} t^n dt = \frac{\left[\frac{x}{p}\right]_q^k}{k!} \int_0^{\infty} t^k e^{-\left[\frac{x}{p}\right]_q t} dt \quad (5.1.9)$$

eşitliği elde edilir. $f(t) = t^k$ fonksiyonu için Laplace dönüşümü yardımıyla (5.1.9) eşitliğinin her iki tarafına Laplace dönüşümü uygulanırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{k,n}(x; p, q)}{n!} n! = \frac{\left[\frac{x}{p}\right]_q^k}{k!} \frac{k!}{\left[\frac{x}{p}\right]_q^{k+1}} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{x}{p}\right]_q B_{k,n}(x; p, q) = 1$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Not 5.1.9: Bu bölümde elde edilen teorem ve sonuçlar [60,61] kaynaklarındaki Bernstein ve q - Bernstein polinomları için elde edilen sonuçların genellemesidir. Bu bölümdeki teorem ve sonuçlar için $p = 1$ ve $q \rightarrow 1$ iken [60,61] deki sonuçlar elde edilir.

5.2 II. Tip (p, q) -Bernstein Polinomları

Bu bölümde, [61] kaynağında ki q -Bernstein polinomları için elde edilmiş olan bazı özelliklerin ve [62] kaynağında ki bazı sonuçların tanımladığımız yeni tip (p, q) -Bernstein polinomları için yansımaları incelenip sonuçlar halinde verilecektir.

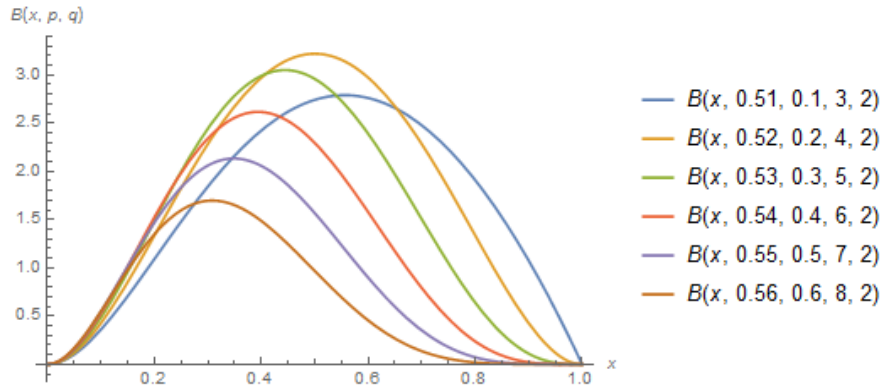
Tanım 5.2.1: $0 < q < p \leq 1$ olsun. $n, k \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $k \leq n$ için;

$$\mathfrak{B}_{k,n}^{p,q}(x) = \binom{n}{k}_{p,q} [x]_{p,q}^k [1-x]_{p,q}^{n-k} \quad (5.2.1)$$

dir.

Tanım 5.2.1 de $p=1$ alınırsa T. Kim [59] da tanımladığı modifiye edilmiş q -Bernstein polinomları elde edilir. Eğer $p=1$ iken $q \rightarrow 1^-$ yaklaşırsa klasik Bernstein polinomları elde edilir [9,10].

(5.2.1) ile tanımlanan polinomların p, q, k ve n değişkenlerinin bazı özel değerleri için karşılık gelen sonuçları Şekil 5.2.1. yardımıyla verilir.



Şekil 5.2.1. II. tip (p, q) -Bernstein polinomları.

(5.2.1) de tanımlanan polinomların bazı özellikleri sonuçlar ve teoremler yardımıyla verilir. İlk olarak n . dereceden (p, q) -Bernstein polinomlarının $n-1$. dereceden polinomların lineer kombinasyonu olarak Sonuç 5.2.2 yardımıyla elde edilir.

Sonuç 5.2.2: $x \in [0,1]$, $k \leq n$ ve $0 < q < p \leq 1$ için

$$\mathfrak{B}_{k,n}^{p,q}(x) = [1-x]_{p,q} \mathfrak{B}_{k,n-1}^{p,q}(x) + [x]_{p,q} \mathfrak{B}_{k-1,n-1}^{p,q}(x).$$

İspat $\mathfrak{B}_{k,n}^{p,q}(x)$ polinomunun tanımı ve Binom katsayılarının özelliklerinden

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_{k,n}^{p,q}(x) &= \binom{n}{k} [x]_{p,q}^k [1-x]_{p,q}^{n-k} \\ &= \left(\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \right) [x]_{p,q}^k [1-x]_{p,q}^{n-k} \\ &= \binom{n-1}{k} [x]_{p,q}^k [1-x]_{p,q}^{n-k} + \binom{n-1}{k-1} [x]_{p,q}^k [1-x]_{p,q}^{n-k} \\ &= [1-x]_{p,q} \binom{n-1}{k} [x]_{p,q}^k [1-x]_{p,q}^{n-k-1} + [x]_{p,q} \binom{n-1}{k-1} [x]_{p,q}^{k-1} [1-x]_{p,q}^{n-k} \\ &= [1-x]_{p,q} \mathfrak{B}_{k,n-1}^{p,q}(x) + [x]_{p,q} \mathfrak{B}_{k-1,n-1}^{p,q}(x). \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 5.2.3 (p,q) -Bernstein polinomlarının klasik Bernstein polinomları gibi simetri özelliğine sahip olduğunu gösterir.

Sonuç 5.2.3: $x \in [0,1]$, $k \leq n$ ve $0 < q < p \leq 1$ için

$$\mathfrak{B}_{n-k,n}^{p,q}(1-x) = \mathfrak{B}_{k,n}^{p,q}(x).$$

İspat (5.2.1) eşitliğinde $x \rightarrow 1-x$ ve $k \rightarrow n-k$ yazılırsa

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_{n-k,n}^{p,q}(1-x) &= \binom{n}{n-k} [1-x]_{p,q}^{n-k} [1-(1-x)]_{p,q}^{n-(n-k)} \\ &= \binom{n}{k} [1-x]_{p,q}^{n-k} [x]_{p,q}^k \\ &= \mathfrak{B}_{k,n}^{p,q}(x). \end{aligned}$$

Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 5.2.4 de n . dereceden $n-k$ tane (p,q) -Bernstein polinomunun $n+1$. dereceden sırasıyla k ve $k+1$ tane $n+1$. dereceden (p,q) -Bernstein polinomlarının lineer kombinasyonu olarak yazılabileceği gösterilir.

Sonuç 5.2.4: $x \in [0,1]$, $k \leq n$ ve $0 < q < p \leq 1$ için,

$$\left(p^{-x} + (1 - p^{-x}q^{1-x})[x]_{p,q}\right) \mathfrak{B}_{n-k,n}^{p,q}(x) = \left(\frac{n-k+1}{k}\right) \mathfrak{B}_{k,n+1}^{p,q}(x) + \left(\frac{k+1}{n+1}\right) \mathfrak{B}_{k+1,n+1}^{p,q}(x)$$

dir.

Sonuç 5.2.5: $x \in [0,1]$, $k \leq n$ ve $0 < q < p \leq 1$ için,

$$\mathfrak{B}_{k,n}^{p,q}(x) = \left(\frac{n-k+1}{k}\right) \left(\frac{[x]_{p,q}}{[1-x]_{p,q}}\right) \mathfrak{B}_{k-1,n}^{p,q}(x).$$

İspat $\mathfrak{B}_{k,n}^{p,q}(x)$ in (5.2.1) de ki tanımından

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_{k,n}^{p,q}(x) &= \binom{n}{k} [x]_{p,q}^k [1-x]_{p,q}^{n-k} \\ &= \left(\frac{n-k+1}{k}\right) \binom{n}{k-1} [x]_{p,q}^k [1-x]_{p,q}^{n-k} \\ &= \left(\frac{n-k+1}{k}\right) \left(\frac{[x]_{p,q}}{[1-x]_{p,q}}\right) \binom{n}{k-1} [x]_{p,q}^{k-1} [1-x]_{p,q}^{n-k+1} \\ &= \left(\frac{n-k+1}{k}\right) \left(\frac{[x]_{p,q}}{[1-x]_{p,q}}\right) \mathfrak{B}_{k-1,n}^{p,q}(x) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece istenen eşitlik gösterilmiş olur.

(p,q) -Binom formülü yardımıyla aşağıdaki sonuç (p,q) -Bernstein polinomları için alternatif bir tanım verir:

Sonuç 5.2.6: $x \in [0,1]$, $k \leq n$ ve $0 < q < p \leq 1$ için,

$$\mathfrak{B}_{k,n}^{p,q}(x) = \sum_{l=0}^{n-k} \binom{k+l}{k} \binom{n}{k+l} p^{-(n+l-k)x} q^{(1-x)l} (-1)^l [x]_{p,q}^{k+l}$$

İspat $\mathfrak{B}_{k,n}^{p,q}(x)$ ve Gauss binom formülünden

$$\begin{aligned}
\mathfrak{B}_{k,n}^{p,q}(x) &= \binom{n}{k} [x]_{p,q}^k [1-x]_{p,q}^{n-k} \\
&= \binom{n}{k} [x]_{p,q}^k \left(p^{-x} + (1-p^{-x}q^{1-x})[x]_{p,q} \right)^{n-k} \\
&= \binom{n}{k} [x]_{p,q}^k \sum_{l=0}^{n-k} \binom{n-k}{l} p^{-(n-k)x} p^{-xl} q^{(1-x)l} (-1)^l [x]_{p,q}^l \\
&= \sum_{l=0}^{n-k} \binom{k+l}{k} \binom{n}{k+l} p^{-(n+l-k)x} q^{(1-x)l} (-1)^l [x]_{p,q}^{k+l}.
\end{aligned}$$

Böylece istenilen eşitlik gösterilir.

II. tip (p, q) -Bernstein polinomlarının türev operatörü altında yansıması ispatsız olarak verilir:

Sonuç 5.2.7: $x \in [0,1]$, $k \leq n$ ve $0 < q < p \leq 1$ için,

$$\frac{d}{dx}(\mathfrak{B}_{k,n}^{p,q}(x)) = \mathfrak{B}_{k-1,n}^{p,q}(x) \left[\frac{[1-x]_{p,q} (q^x \log(q) - p^x \log(p))}{n-k} + \frac{[x]_{p,q} (p^{1-x} \log(p) - q^{1-x} \log(q))}{k} \right].$$

II. tip (p, q) -Bernstein polinomlarının üreteç fonksiyonu Teorem 5.2.8 yardımıyla verilir.

Teorem 5.2.8: $x \in [0,1]$, $k \leq n$ ve $0 < q < p \leq 1$ için,

$$F_k^{p,q}(t; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{B}_{k,n}^{p,q}(x) \frac{t^n}{n!} = \frac{[x]_{p,q}^k t^k}{k!} e^{[1-x]_{p,q} t}, t \in \mathbb{C}. \quad (5.2.2)$$

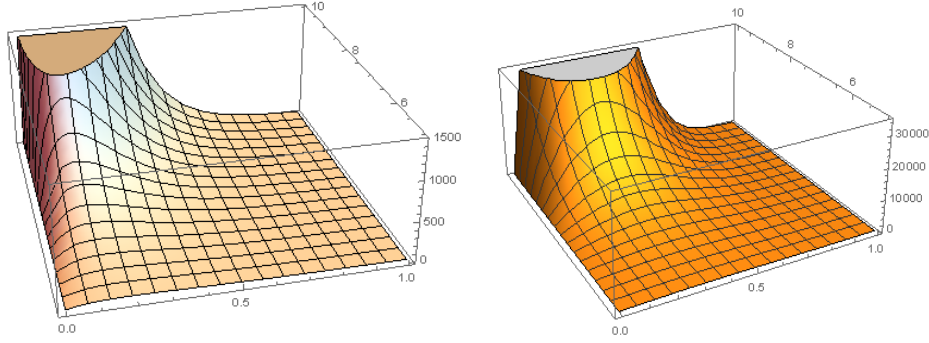
dir.

İspat $\mathfrak{B}_{k,n}^{p,q}(x)$ polinomlarının tanımından;

$$\begin{aligned}
F_k^{p,q}(t; x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{B}_{k,n}^{p,q}(x) \frac{t^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{k} [x]_{p,q}^k [1-x]_{p,q}^{n-k} \frac{t^n}{n!} \\
&= \frac{[x]_{p,q}^k t^k}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} [1-x]_{p,q}^{n-k} \frac{t^{n-k}}{(n-k)!} \\
&= \frac{[x]_{p,q}^k t^k}{k!} e^{[1-x]_{p,q} t}.
\end{aligned}$$

Böylece istenilen eşitlik gösterilir.

$\mathfrak{S}_{k,n}^{p,q}(x)$ polinomlarının üreteç fonksiyonu p, q, k ve n değişkenlerinin bazı özel değerleri için Şekil 5.2.2. de ki gibi gösterilir:



Şekil 5.2.2 II. tip (p, q) -Bernstein polinomlarının üreteç fonksiyonu.

Üreteç fonksiyonu tanımlanan özel polinomların birçok yeni ve kullanışlı özellikleri bu fonksiyonlar yardımıyla elde edilir. Bundan sonra verilecek olan sonuçlar ve teoremler bu özellikleri içermektedir.

Sonuç 5.2.9: $x \in [0,1]$, $k \leq n$ ve $0 < q < p \leq 1$ için,

$$\frac{\partial^v (F_k^{p,q}(t, x))}{\partial t^v} = \sum_{j=0}^v \mathfrak{S}_{j,v}^{p,q}(x) F_{k-j}^{p,q}(t; x). \quad (5.2.3)$$

İspat (5.2.3) eşitliğini göstermek için öncelikle $F_k^{p,q}(t; x)$ fonksiyonu aşağıdaki gibi düzenleyip

$$A = \frac{[x]_{p,q}^k t^k}{k!} \text{ ve } B = e^{[1-x]_{p,q} t}$$

(5.2.3) eşitliğine Leibniz kuralı uygulanırsa;

$$\begin{aligned} \frac{\partial^v (F_k^{p,q}(t, x))}{\partial t^v} &= \sum_{j=0}^v \binom{v}{j} \frac{[x]_{p,q}^k t^{k-j}}{(k-j)!} [1-x]_{p,q}^{v-j} e^{[1-x]_{p,q} t} \\ &= \sum_{j=0}^v \binom{v}{j} [x]_{p,q}^j [1-x]_{p,q}^{v-j} \frac{[x]_{p,q}^{k-j} t^{k-j}}{(k-j)!} e^{[1-x]_{p,q} t} \\ &= \sum_{j=0}^v \mathfrak{S}_{j,v}^{p,q}(x) F_{k-j}^{p,q}(t; x) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece istenilen eşitlik gösterilmiş olur.

Sonuç 5.2.10: $x \in [0,1]$, $k \leq n$ ve $0 < q < p \leq 1$ için,

$$\begin{aligned} & \left(p^{-x} + (1 - p^{-x} q^{1-x}) \right) \mathfrak{S}_{k,n}^{p,q}(x) \\ &= \frac{1}{n+1} \left((k+1) \mathfrak{S}_{k+1,n+1}^{p,q}(x) + (n-k+1) \mathfrak{S}_{k,n+1}^{p,q}(x) \right). \end{aligned} \quad (5.2.4)$$

İspat (5.2.4) eşitliğini göstermek için öncelikle aşağıdaki eşitlik ele alınır;

$$\left([x]_{p,q} t \right)^b F_k^{p,q}(t; x) = \frac{(k+b)!}{k!} F_{k+b}^{p,q}(t; x) \quad (5.2.5)$$

yazılabilir. (5.2.5) den aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$[x]_{p,q}^b \mathfrak{S}_{k,n}^{p,q}(t; x) = \frac{n!(k+b)!}{k!(n+b)!} \mathfrak{S}_{k+b,n+b}^{p,q}(t; x). \quad (5.2.6)$$

(5.2.6) eşitliğinde $b=1$ alınır;

$$[x]_{p,q} \mathfrak{S}_{k,n}^{p,q}(t; x) = \frac{k+1}{n+1} \mathfrak{S}_{k+1,n+1}^{p,q}(t; x) \quad (5.2.7)$$

elde edilir. Diğer taraftan (5.2.2) de tanımlanan üreteç fonksiyonu aşağıdaki gibi tekrar ifade edilir:

$$\left([x]_{p,q} t \right)^{-b} F_k^{p,q}(t; x) = \frac{(k-b)!}{k!} F_{k-b}^{p,q}(t; x)$$

üreteç fonksiyonunun tanımından

$$[1-x]_{p,q}^b \mathfrak{S}_{k,n}^{p,q}(x) = \frac{n!(n+b-k)!}{(n-k)!(n+b)!} \mathfrak{S}_{k,n+b}^{p,q}(x) \quad (5.2.8)$$

eşitliği elde edilir. (5.2.7) de $b=1$ alınıp (5.2.8) ile birleştirilirse istenilen eşitlik gösterilir.

Sonuç 5.2.11: $x \in [0,1]$, $k \leq n$ ve $0 < q < p \leq 1$ için,

$$\sum_{j=0}^{n-k} \binom{n}{j} \mathfrak{S}_{k,n-j}^{p,q}(x) (p^{-x} q^{1-x})^j [x]_{p,q}^{j-k} = p^{-x(n-k)} \binom{n}{k}$$

dir.

İspat (5.2.2) ile tanımlanan üreteç fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{E}_{k,n}^{p,q}(x) \frac{t^n}{n!} e^{(p^{-x}q^{1-x}[x]_{p,q})t} = \frac{[x]_{p,q}^k t^k}{k!} e^{p^{-x}t} \quad (5.2.9)$$

elde edilir. (5.2.9) eşitliğinin sol tarafındaki $e^{(p^{-x}q^{1-x}[x]_{p,q})t}$ ifadesi ile sağ tarafındaki $e^{p^{-x}t}$ ifadesi Taylor serisine açılıp (5.2.9) da yerine yazılırsa:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{E}_{k,n}^{p,q}(x) \frac{t^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} (p^{-x}q^{1-x})^n \frac{([x]_{p,q})^n t^n}{n!} = \frac{[x]_{p,q}^k t^k}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} (p^{-x})^n \frac{t^n}{n!} \quad (5.2.10)$$

elde edilir. (5.2.10) ifadesinin sol tarafına Cauchy çarpımı uygulayıp $\frac{t^n}{n!}$ ifadesinin katsayı karşılaştırılması yapılırsa istenilen eşitlik gösterilir.

Sonuç 5.2.12: $x \in [0,1]$, $k \leq n$ ve $0 < q < p \leq 1$ için,

$$\sum_{j=0}^{n-k} \binom{n}{j} (-p^{-x})^j \mathfrak{E}_{k,n-j}^{p,q}(x) = \binom{n}{k} (-1)^{n-k} (p^{-x}q^{1-x})^{n-k} [x]_{p,q}^n$$

İspat Sonuç 5.2.11 deki ispat'a benzer şekilde ispatlanır.

Teorem 5.2.13:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \mathfrak{E}_{k,n}^{p,q}(x) E_{n-k} = \frac{[x]_{p,q}^k}{k!} G_n^{(k)}([1-x]_{p,q}).$$

Burada E_{n-k} ve $G_n^{(k)}([1-x]_{p,q})$ ifadeleri, sırasıyla, Euler sayıları ve k . mertebeden Genocchi sayılarını belirtir.

İspat Üreteç fonksiyonu tanımından

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{S}_{k,n}^{p,q}(x) \frac{t^n}{n!} &= \frac{[x]_{p,q}^k t^k}{k!} e^{[1-x]_{p,q} t} \\
&= \frac{[x]_{p,q}^k t^k}{k!} e^{[1-x]_{p,q} t} \frac{(e^t + 1)^k 2^k}{(e^t + 1)^k 2^k} \\
&= \left(\frac{2t}{e^t + 1} \right)^k e^{[1-x]_{p,q} t} \frac{[x]_{p,q}^k}{k! 2^k} (e^t + 1)^k \\
&= \frac{\left(\frac{2t}{e^t + 1} \right)^k e^{[1-x]_{p,q} t} [x]_{p,q}^k}{2^k k!} \\
&= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} G_n^{(k)}([1-x]_{p,q}) \frac{t^n}{n!} [x]_{p,q}^k}{\sum_{n=0}^{\infty} E_n^{(k)} \frac{t^n}{n!}} \quad (5.2.11)
\end{aligned}$$

elde edilir. (5.2.11) eşitliğinde gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{S}_{k,n}^{p,q}(x) \frac{t^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} E_n^{(k)} \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} G_n^{(k)}([1-x]_{p,q}) \frac{t^n}{n!} \frac{[x]_{p,q}^k}{k!} \quad (5.2.12)$$

elde edilir. (5.2.12) eşitliğine Cauchy çarpımı uygulanıp $\frac{t^n}{n!}$ in katsayı karşılaştırması yapılırsa istenilen eşitlik gösterilir.

Teorem 5.2.14:

$$\mathfrak{S}_{k,n}^{p,q}(x) = [x]_{p,q} \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} B_l^{(k)}([1-x]_{p,q}) S(n-l, k).$$

Burada $B_l^{(k)}([1-x]_{p,q})$ ve $S(n-l, k)$ ifadeleri, sırasıyla, k . mertebeden Bernoulli polinomlarını ve 2. tip Stirling sayılarını ifade etmektedir.

İspat Teorem 5.2.13 ün ispatında olduğu gibi üreteç fonksiyonu tanımı yardımıyla

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{S}_{k,n}^{p,q}(x) \frac{t^n}{n!} &= \frac{[x]_{p,q}^k t^k}{k!} e^{[1-x]_{p,q} t} \\
&= \frac{[x]_{p,q}^k t^k}{k!} e^{[1-x]_{p,q} t} \frac{(e^t + 1)^k}{(e^t + 1)^k} \\
&= \left(\frac{t}{e^t + 1} \right)^k e^{[1-x]_{p,q} t} \frac{(e^t + 1)^k}{k!} [x]_{p,q}^k \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(k)} ([1-x]_{p,q}) \frac{t^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} S(n, k) \frac{t^n}{n!}.
\end{aligned} \tag{5.2.13}$$

(5.2.13) eşitliğinde Cauchy çarpımı uygulanıp $\frac{t^n}{n!}$ in katsayı karşılaştırması yapılırsa ispat tamamlanmış olur.

Not 5.2.15: Bu bölümde elde edilen teorem ve sonuçlar [61,62] kaynaklarındaki Bernstein ve q - Bernstein polinomları için elde edilen sonuçların genellemesidir. Bu bölümdeki teorem ve sonuçlar için $p=1$ ve $q \rightarrow 1$ iken [61,62] de ki sonuçlar elde edilir.

BÖLÜM 6

(p, q) -BETA POLİNOMLARI VE ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde Bhandri ve Vignat [63] tarafından Volkenborn integrallerin olasılık teorisine uygulamasında ortaya çıkan Beta polinomlarının (p, q) benzerleri tanımlanmıştır. Bununla birlikte [63] de yapılanlardan esinlenerek Beta polinomları, Beta tipli rasyonel fonksiyonlar ve onların q benzerleri için bazı önemli ve ilginç eşitlikler ile sonuçlar Şimşek tarafından çalışılmıştır [64-66]. Tanımladığımız (p, q) -Beta polinoma ve (p, q) -Beta tipli rasyonel fonksiyonlara Şimşek tarafından kullanılan metodlar uygulanmıştır [64].

Bu metodlar kullanılarak tanımladığımız fonksiyonlar ve polinomlar için başta üreteç fonksiyonları olmak üzere modifiye (p, q) -Bernstein polinomları ile aralarındaki bağıntı ve (ρ, q) -Volkenborn ve (ρ, q) - p adık Volkenborn integral yardımıyla ifade edilen birçok yeni eşitlikler ve sonuçlar elde edilmiştir.

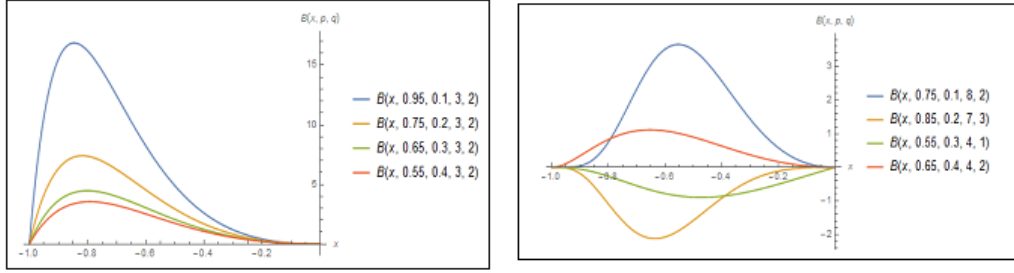
İlk olarak (p, q) -Beta tipli rasyonel fonksiyonları ve polinomları için yeni birer tanım sırasıyla Tanım 6.1.1 ve Tanım 6.1.2 yardımıyla aşağıdaki gibi verilir.

Tanım 6.1.1: $x \in [-1, 0]$ ve k ile n pozitif tamsayılar olsun. $0 < q < p \leq 1$ olmak üzere;

$$M_{k,n}^{p,q}(x) = [x]_{p,q}^k [1+x]_{p,q}^{n-k} \quad (6.1.1)$$

şeklinde tanımlanır. (6.1.1) de verilen tanım $p = 1$ ve $q \rightarrow 1$ iken [64] de verilen Beta tipli rasyonel fonksiyonların tanımının bir genellemesidir.

k, n, p ve q nun bazı özel değerler için (6.1.1) de tanımlanan (p, q) -Beta tipli rasyonel fonksiyonların grafikleri aşağıda Şekil 6.1.1.deki gibidir:



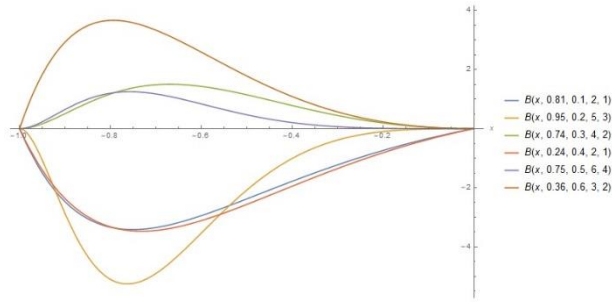
Şekil 6.1.1. (p, q) -Beta tipli rasyonel fonksiyonlar.

Tanım 6.1.2: $x \in [-1, 0]$ ve k ile n pozitif tamsayılar olmak üzere $k \leq n$ ve $0 < q < p \leq 1$ için;

$$B_{k,n}^{p,q}(x) = [x]_{p,q}^k [1+x]_{p,q}^{n-k} \quad (6.1.2)$$

şeklinde tanımlanır. (6.1.2) de verilen tanım $p = 1$ ve $q \rightarrow 1$ iken [64] de verilen Beta tipli polinomların tanımının bir genellemesidir.

k, n, p ve q nun bazı özel değerler için (6.1.2) de tanımlanan (p, q) -Beta polinomlarının grafiği aşağıda Şekil 6.1.2.deki gibidir:



Şekil 6.1.2. (p, q) -Beta polinomları.

(p, q) -Beta polinomları için alternatif bir tanım aşağıda Tanım 6.1.3 yardımıyla verilir.

Tanım 6.1.3: $x \in [-1, 0]$ olsun. $0 < q < p \leq 1$ olmak üzere;

$$B_{k,n}^{p,q}(x) = \sum_{l=0}^{n-k} \binom{n-k}{l} p^{lx} q^{n-k-l} [x]_{p,q}^{n-l} \quad (6.1.3)$$

Bernstein polinomları ve diğer özel polinom aileleri için olduğu gibi (p, q) Beta tipli rasyonel fonksiyonlar ve (p, q) Beta polinomları için üreteç fonksiyonu tanımlandığı takdirde bu polinomların birçok yeni özellikleri ve eşitlikleri elde edilir.

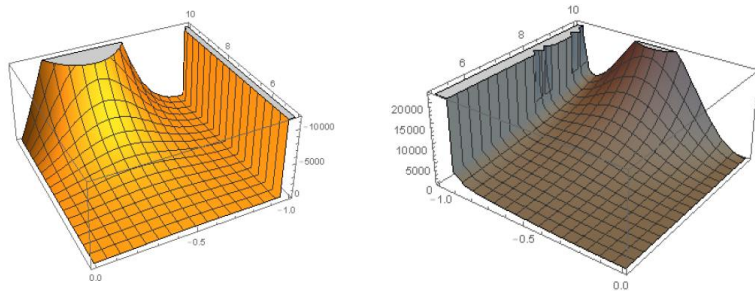
(p, q) -Beta tipli rasyonel fonksiyonlarının üreteç fonksiyonu tanımı Tanım 6.1.4 deki gibidir.

Tanım 6.1.4: $M_{k,n}^{p,q}(x)$, (p, q) -Beta tipli rasyonel fonksiyonlar olmak üzere bu fonksiyonların üreteç fonksiyonu;

$$h_k^{p,q}(x, t) = \left(\frac{[x]_{p,q}}{[1+x]_{p,q}} \right)^k e^{t[1+x]_{p,q}} = \sum_{n=0}^{\infty} M_{k,n}^{p,q}(x) \frac{t^n}{n!} \quad (6.1.4)$$

şeklinde tanımlanır. (6.1.4) de verilen üreteç fonksiyonu $p=1$ ve $q \rightarrow 1$ iken [64] de verilen Beta tipli rasyonel fonksiyonların üreteç fonksiyonunun bir genellemesidir.

Burada t, q ve $p \in \mathbb{C}$, $x \neq -1$ ve $\left| \frac{q}{p} \right| < 1$ dir. $M_{k,n}^{p,q}(x)$ fonksiyonlarının (6.1.4) de tanımlanan üreteç fonksiyonlarının k, t, p ve q nun bazı özel değerleri için karşılık gelen sonuçları aşağıdaki grafikler yardımıyla Şekil 6.1.3 de verilir:



Şekil 6.1.3. (p, q) -Beta tipli rasyonel fonksiyonların üreteç fonksiyonları.

(6.1.4) de tanımlanan üreteç fonksiyonlarının bazı özellikleri;

- $h_k^{p,q}(x, t) = [1+x]_{p,q} e^{[1+x]_{p,q} t} = \frac{\partial}{\partial t} e^{[1+x]_{p,q} t},$

- $h_k^{p,q}(x, -t)h_k^{p,q}(x, t) = \left(\frac{[x]_{p,q}}{[1+x]_{p,q}} \right)^{2k},$
- $h_k^{p,q}(x, t)e^{-q^x t} = \left(\frac{[x]_{p,q}}{[1+x]_{p,q}} \right)^k e^{(p[x]_{p,q})t},$
- $h_0^{p,q}(x, t) = e^{t[1+x]_{p,q}}$
 $h_0^{p,q}(0, t) = 0$

şeklinde verilir.

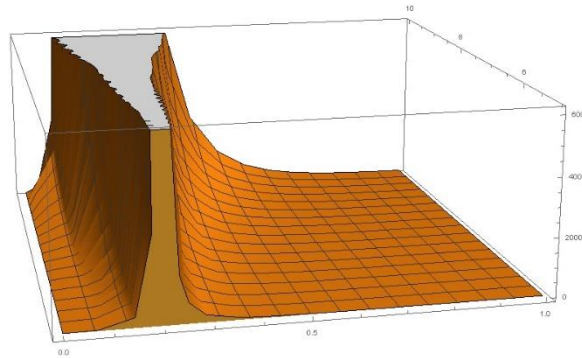
(p, q) -Beta polinomlarının üreteç fonksiyonunun tanımı Tanım 6.1.5 yardımıyla aşağıdaki gibi verilir.

Tanım 6.1.5: $B_{k,n}^{p,q}(x)$, (p, q) -Beta polinomları olmak üzere bu polinomların üreteç fonksiyonu;

$$F_k^{p,q}(x, t) = \left(\frac{[x]_{p,q}}{[1+x]_{p,q}} \right)^k e^{t[1+x]_{p,q}} - \sum_{n=0}^{k-1} \frac{[x]_{p,q}^k}{[1+x]_{p,q}^{k-n}} \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} B_{k,n}^{p,q}(x) \frac{t^n}{n!}, \quad (6.1.5)$$

şeklinde tanımlanır. (6.1.5) de verilen üreteç fonksiyonu $p=1$ ve $q \rightarrow 1$ iken [64] de verilen Beta polinomlarının üreteç fonksiyonu tanımının bir genellemesidir.

$B_{k,n}^{p,q}(x)$ polinomlarının (6.1.5) de tanımlanan üreteç fonksiyonlarının k, t, p ve q nun bazı özel değerleri için karşılık gelen sonuçları aşağıdaki Şekil 6.1.4 yardımıyla verilir:



Şekil 6.1.4. (p, q) -Beta polinomlarının üreteç fonksiyonları.

$M_{k,n}^{p,q}(x)$ Beta tipli rasyonel fonksiyonlarının x ve k için verilen özel değerlere bağlı bir sonucu aşağıdaki Sonuç 6.1.6 yardımıyla verilir.

Sonuç 6.1.6:

$$M_{1,n}^{p,q}(1) = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} p^j q^{n-j-1}.$$

İspat (6.1.4) de sırasıyla k ve x yerine 1 alınırsa

$$\begin{aligned} h_1^{p,q}(1, t) &= \left(\frac{[1]_{p,q}}{[1+1]_{p,q}} \right) e^{t[1+1]_{p,q}} \\ &= \left(\frac{[1]_{p,q}}{[2]_{p,q}} \right) e^{t[2]_{p,q}} \\ &= \frac{e^{t(p+q)}}{p+q} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. $e^{t(p+q)}$ nun Taylor seri açılımının kullanılmasıyla,

$$\begin{aligned} h_1^{p,q}(1, t) &= \frac{e^{t(p+q)}}{p+q} \\ &= \frac{1}{p+q} \sum_{n=0}^{\infty} (p+q)^n \frac{t^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (p+q)^{n-1} \frac{t^n}{n!}. \end{aligned} \tag{6.1.6}$$

$h_k^{p,q}(x, t)$ üreteç fonksiyonu ve Binom teoreminden;

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_{1,n}^{p,q}(1) \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{n-1} \left(\binom{n-1}{j} p^j q^{n-j-1} \right) \frac{t^n}{n!} \tag{6.1.7}$$

eşitliği elde edilir. (6.1.7) de $\frac{t^n}{n!}$ in katsayılarının karşılaştırılmasıyla ispat tamamlanır.

$M_{k,n}^{p,q}(x)$ polinomlarının k ya bağlı toplam sembolü altında ki sonucu aşağıdaki gibidir.

Sonuç 6.1.7:

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k M_{k,n}^{p,q}(x) = \frac{(p^{n+1} + (-1)^n) [x]_{p,q}^{n+1} + q^{x(n+1)}}{(p+1)[x]_{p,q} + q^x} \quad (6.1.8)$$

İspat (6.1.1) de tanımlanan (p, q) -Beta tip rasyonel fonksiyonların tanımından

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (-1)^k M_{k,n}^{p,q}(x) &= [1+x]_{p,q}^n \sum_{k=0}^n \left(\frac{(-1)^k [x]_{p,q}}{[1+x]_{p,q}} \right)^k \\ &= [1+x]_{p,q}^n \frac{1 - \left(\frac{[x]_{p,q}}{[1+x]_{p,q}} \right)^{n+1}}{1 - \frac{[x]_{p,q}}{[1+x]_{p,q}}} \\ &= [1+x]_{p,q}^n \frac{p^{n+1} [x]_{p,q}^{n+1} + q^{x(n+1)} + (-1)^n [x]_{p,q}^{n+1}}{(p+1)[x]_{p,q} + q^x} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 6.1.8:

$$\sum_{k=0}^{\infty} M_{k,n}^{p,q}(x) = \frac{[1+x]_{p,q}^{n+1}}{(p-1)[x]_{p,q} + q^x}.$$

İspat Bir önceki sonucun ispatına benzer şekilde,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} M_{k,n}^{p,q}(x) &= [1+x]_{p,q}^n \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{[x]_{p,q}}{[1+x]_{p,q}} \right)^k \\ &= [1+x]_{p,q}^n \frac{1}{1 - \frac{[x]_{p,q}}{[1+x]_{p,q}}} \\ &= [1+x]_{p,q}^n \frac{[1+x]_{p,q}}{(p-1)[x]_{p,q} + q^x} \end{aligned}$$

dir. Burada $\left| \frac{[x]_{p,q}}{[1+x]_{p,q}} \right| < 1$ dir. Böylece istenilen eşitlik gösterilir.

$M_{k,n}^{p,q}(x)$ polinomları için $h_k^{p,q}(x,t)$ üreteç fonksiyonları kullanılarak aşağıdaki eşitlik elde edilir.

Sonuç 6.1.9:

$$\sum_{l=0}^n \binom{n}{l} M_{0,l}^{p,q}(x) (-q^x)^{n-l} = p^n [x]_{p,q}^n$$

dir.

İspat (p,q) -Beta tipli rasyonel fonksiyonların üreteç fonksiyonu için aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$h_0^{p,q}(x,t) e^{-q^x t} = e^{(p[x]_{p,q})t}$$

(6.1.6) eşitliğinin her iki tarafında Taylor açılımı kullanılırsa;

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} M_{0,n}^{p,q}(x) \frac{t^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-q^x)^n \frac{t^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (p[x]_{p,q})^n \frac{t^n}{n!} \quad (6.1.9)$$

(6.1.9) eşitliğinin sol tarafına Cauchy çarpımı uygulanıp gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^n \binom{n}{l} M_{0,n}^{p,q}(x) (-q^x)^{n-l} \right) \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (p[x]_{p,q})^n \frac{t^n}{n!} \quad (6.1.10)$$

elde edilir. (6.1.10) da $\frac{t^n}{n!}$ in katsayı karşılaştırılması ile ispat tamamlanır.

Sonuç 6.1.10:

$$M_{k,n}^{p,q}(x) [1+x]_{p,q}^k = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} p^{xj} q^{(n-j)} [x]_{p,q}^{n+k-j}.$$

İspat $h_k^{p,q}(x,t) e^{-p^x t} = \left(\frac{[x]_{p,q}}{[1+x]_{p,q}} \right)^k e^{(q[x]_{p,q})t}$ eşitliğini göz önüne alarak;

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} M_{k,n}^{p,q}(x) \frac{t^n}{n!} \right) = \left(\frac{[x]_{p,q}}{[1+x]_{p,q}} \right)^k \left(\sum_{n=0}^{\infty} (p^x)^n \frac{t^n}{n!} \right) \sum_{n=0}^{\infty} (q[x]_{p,q})^n \frac{t^n}{n!} \quad (6.1.11)$$

eşitliği elde edilir. (6.1.11) eşitliğinin sağ tarafına Cauchy çarpımı uygulanır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa istenilen eşitlik gösterilir.

II. tip (p, q) -Bernstein polinomları ve (p, q) -Beta polinomları arasındaki ilişki aşağıdaki sonuç yardımıyla verilir:

Sonuç 6.1.11:

$$B_{k,n}^{p,q}(x^{2a}) = \frac{[x^a]_{p^{x^a}, q^{x^a}}^k}{[x^a]_{p^{1+x^a}, q^{1+x^a}}^k} \mathfrak{B}_{k,n}^{p,q}(x^a) B_{k,n}^{p,q}(x^a).$$

Burada $\mathfrak{B}_{k,n}^{p,q}(x^a) = \binom{n}{k} [x^a]_{p,q}^k [1-x^a]_{p,q}^{n-k}$ II. tip modifiye edilmiş (p, q) -Bernstein polinomları olarak tanımlanır.

İspat Modifiye edilmiş Bernstein polinomlarının tanımından

$$\begin{aligned} B_{k,n}^{p,q}(x^{2a}) &= \binom{n}{k} [x^{2a}]_{p,q}^k [1-x^{2a}]_{p,q}^{n-k} \\ &= \binom{n}{k} [x^{2a}]_{p,q}^k [(1-x^a)(1+x^a)]_{p,q}^{n-k} \end{aligned}$$

yazılabilir.

(6.1.7) de eşitliğin sağ tarafında iki sayının çarpımının (p, q) -benzeri uygulanırsa;

$$\begin{aligned} B_{k,n}^{p,q}(x^{2a}) &= \binom{n}{k} [x^a]_{p^{x^a}, q^{x^a}}^k [x^a]_{p,q}^k [1-x^a]_{p^{1+x^a}, q^{1+x^a}}^{n-k} [1+x^a]_{p,q}^{n-k} \\ &= \frac{[x^a]_{p^{x^a}, q^{x^a}}^k}{[x^a]_{p^{1+x^a}, q^{1+x^a}}^k} \left(\binom{n}{k} [x^a]_{p^{1+x^a}, q^{1+x^a}}^k [1-x^a]_{p^{1+x^a}, q^{1+x^a}}^{n-k} \right) ([x^a]_{p,q}^k [1+x^a]_{p,q}^{n-k}) \\ &= \frac{[x^a]_{p^{x^a}, q^{x^a}}^k}{[x^a]_{p^{1+x^a}, q^{1+x^a}}^k} \mathfrak{B}_{k,n}^{p,q}(x^a) B_{k,n}^{p,q}(x^a). \end{aligned}$$

Böylece istenilen eşitlik gösterilmiş olur.

Aracı ve ark.[53] ile Duran ve Açıkgöz [54], Volkenborn integral ve p -adic Volkenborn integralin (p, q) analizde ki yansımalarını aşağıdaki gibi sırasıyla tanımladılar.

$$\int_{Z_p} f(x) d\mu_{\rho, q} x = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\rho^{p^N}}{[p^N]_{\rho, q}} \sum_{x=0}^{p^N-1} f(x) \left(\frac{q}{\rho} \right)^x \quad (6.1.12)$$

ve

$$\int_{Z_p} f(x) d\mu_{\rho, -q} x = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\rho^{p^N}}{[p^N]_{\rho, -q}} \sum_{x=0}^{p^N-1} f(x) \left(\frac{-q}{\rho} \right)^x.$$

Bu çalışmalarda ayrıca Carlitz's tip (ρ, q) -Bernoulli ve Euler sayılarının Witt tipi formüllerini de sırasıyla;

$$\int_{Z_p} p^{ay} [y]_{p, q}^n d\mu_{\rho, q} y = \beta_{n, a}(\rho, q) \quad (6.1.13)$$

ve

$$\int_{Z_p} p^{ay} [y]_{p, -q}^n d\mu_{\rho, -q} y = \varepsilon_{n, a}(\rho, q)$$

şeklinde tanımladılar.

(6.1.13) de tanımlanan polinomların (p, q) -Beta polinomları ile arasındaki bağıntılar aşağıdaki sonuç yardımıyla verilir.

Sonuç 6.1.12:

$$\int_{Z_p} B_{k, n}^{p, q}(x) d\mu_{\rho, q} x = \sum_{l=0}^{n-k} \binom{n-k}{l} \beta_{n-l, l}(\rho, q) \quad (6.1.14)$$

ve

$$\int_{Z_p} B_{k, n}^{p, q}(x) d\mu_{\rho, -q} x = \sum_{l=0}^{n-k} \binom{n-k}{l} \varepsilon_{n-l, l}(\rho, q) \quad (6.1.15)$$

dir.

İspat (6.1.3) ile tanımlanan eşitliğin her iki tarafının Z_p altında (ρ, q) -Volkenborn integral ile işleme alınmasıyla

$$\begin{aligned} \int_{Z_p} B_{k,n}^{p,q}(x) d\mu_{\rho,q} x &= \int_{Z_p} \sum_{l=0}^{n-k} \binom{n-k}{l} p^{lx} q^{n-k-l} [x]_{p,q}^{n-l} d\mu_{\rho,q} x \\ &= \sum_{l=0}^{n-k} \binom{n-k}{l} q^{n-k-l} \int_{Z_p} p^{lx} [x]_{p,q}^{n-l} d\mu_{\rho,q} x \\ &= \sum_{l=0}^{n-k} \binom{n-k}{l} \beta_{n-l,l}(\rho, q) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (6.1.14) eşitliği ispatlanır. (6.1.15) in ispatı için $q \rightarrow -q$ alınıp benzer işlemler yapılırsa istenilen eşitlik gösterilmiş olur.

Not 6.1.13: Bu bölümde elde edilen teoremler ve sonuçlar [64,65] kaynaklarındaki Beta polinomları için elde edilen sonuçların genellemesidir. Bu bölümdeki teoremler ve sonuçlar için $p = 1$ ve $q \rightarrow 1$ iken [64,65] deki teoremler ve sonuçlar elde edilir.

BÖLÜM 7

TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tezde öncelikle Bernstein polinomlarının tanımı verilip bu polinomların öneminden ve çeşitli bilim dallarında ki kullanım alanlarından bahsedilen bir literatür taraması yapılmıştır.

Tezin ikinci bölümünde temel kavramlardan ve tezin gelişiminde temel yapıların başında gelen (p, q) -analizden bahsedilmiştir.

Tezin üçüncü bölümünde, Mursaleen ve ark. [30] tarafından tanımlanan (p, q) -Bernstein polinomlarının bazı özellikleri ile bu polinomların (p, q) -türev ve (p, q) -integral operatörü altındaki özellikleri ve (p, q) -Gama ve (p, q) -Beta fonksiyonları ile ilgili özellikleri elde edilmiştir. Bu bölümde elde edilen sonuçlar ve teoremler [58] de elde edilen sonuçlar ve teoremlerin genellemesidir.

Tezin dördüncü bölümünde, [57] de ki benzer metod yardımıyla (p, q) -Bernstein polinomlarının üreteç fonksiyonları elde edilmiştir. Bu üreteç fonksiyonu yardımıyla (p, q) -Bernstein polinomları için birçok yeni rekürans bağıntıları ve çeşitli fonksiyonel eşitlikler verilmiştir. Bu bölümde elde edilen sonuçlar ve teoremler [57] de elde edilen sonuçlar ve teoremlerin genellemesidir.

Tezin beşinci bölümünde, iki farklı tipte (p, q) -Bernstein polinomu tanımı verilmiştir. Bu polinomların başta üreteç fonksiyonları olmak üzere birçok yeni ve kullanışlı özellikleri verilmiştir. Ayrıca bu polinomların ve onların üreteç fonksiyonları için seçilen bazı özel değerlere bağlı grafikleri Mathematica programı yardımıyla elde edilmiştir. Bu bölümde elde edilen sonuçlar ve teoremler [60-62] da elde edilen sonuçlar ve teoremlerin genellemesidir.

Tezin altıncı bölümünde, [64-66] da ki benzer metodlar yardımıyla (p, q) -Beta tipli rasyonel fonksiyonlar ve (p, q) -Beta polinomları tanımlanmıştır. Bu fonksiyonlar ve polinomlar için üreteç fonksiyonları ve fonksiyonel eşitlikler verilmiştir. Ayrıca

beşinci bölümdeki gibi bu fonksiyonlar ve polinomlar ile onların üreteç fonksiyonlarının bazı özel değerlere bağlı grafikleri Mathematica programı yardımıyla elde edilmiştir. Bu bölümde elde edilen sonuçlar ve teoremler [64,65] de elde edilen sonuçlar ve teoremlerin genellemesidir.

Tezin özgün kısmı olarak nitelenebilecek Bölüm 3 ile Bölüm 6 arasında elde edilen sonuçların, eşitliklerin ve rekürans bağıntılarının başta kombinatorik ile analitik sayılar teorisi olmak üzere yaklaşım teorisi, istatistik ve bilgisayar destekli geometrik dizayn alanlarında faydalı olacağı düşünülmektedir.



KAYNAKLAR

- [1] Srivastava, H. M. (2000). Some formulas for the Bernoulli and Euler polynomials at rational arguments. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. Vol. **129**, No. 1. Cambridge University Press.
- [2] Kim, T. (2008). Symmetry p -adic invariant integral on $\mathbb{Z}_p$ for Bernoulli and Euler polynomials. *Journal of Difference Equations and Applications*. **14. 12**, 1267-1277.
- [3] Ozden, H., Simsek Y., Srivastava H. M. (2010). A unified presentation of the generating functions of the generalized Bernoulli, Euler and Genocchi polynomials. *Computers & Mathematics with Applications*. **60.10 (2010)**, 2779-2787.
- [4] Simsek, Y. (2006). Twisted (h, q) -Bernoulli numbers and polynomials related to twisted (h, q) -zeta function and L-function. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. **324.2**, 790-804.
- [5] Acikgoz, M., Erdal D., Araci S. (2011). A New approach to-Bernoulli numbers and-Bernoulli polynomials related to-Bernstein polynomials. *Advances in Difference Equations* **2010.1**, 951764.
- [6] Simsek, Y. (2010). Complete sum of products of (h, q) -extension of Euler polynomials and numbers. *Journal of Difference Equations and Applications*. **16.11 (2010)**, 1331-1348.
- [7] Dere, R., Simsek Y. (2011). Genocchi polynomials associated with the Umbral algebra. *Applied Mathematics and Computation*. 218.3 **(2011): 756-761**.
- [8] Araci, S. (2014). Novel identities involving Genocchi numbers and polynomials arising from applications of umbral calculus. *Applied Mathematics and Computation*. **233 (2014)**, 599-607.
- [9] Lorentz, G. G. (2012). Bernstein polynomials. American Mathematical Society.
- [10] Bernstein, S. N. (1912). Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur la calcul des probabilités, Comm. Soc. Math. Charkow Sér., **2 13**, 1–2.

- [11] Farouki, R. T. (2012). The Bernstein polynomial basis: A centennial retrospective. *Computer Aided Geometric Design*. **29. 6**, 379-419.
- [12] Petrone, S. (1999). Bayesian density estimation using Bernstein polynomials. *Canadian Journal of Statistics* **27.1**, 105-126.
- [13] Petrone, S. (1999) Random Bernstein polynomials. *Scandinavian Journal of Statistics*. **26. 3**, 373-393.
- [14] Simsek, Y. (2014). Generating functions for the Bernstein type polynomials: a new approach to deriving identities and applications for the polynomials. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, **43(1)**.
- [15] Goldman, R. (2009). An integrated introduction to computer graphics and geometric modeling. CRC Press.
- [16] Simsek, B., Yardimci, A. (2016). Using Bezier Curves in Medical Applications. *Filomat*, **30.4**, 937-943.
- [17] Ostrovska, S. (2003). q -Bernstein polynomials and their iterates. *Journal of Approximation Theory*. **123.2**, 232-255.
- [18] Il'inskii, A., Ostrovska S. (2002). Convergence of generalized Bernstein polynomials. *Journal of Approximation Theory*, **116.1**, 100-112.
- [19] Gadjiev, A. D., Orhan, C. (2002). Some approximation theorems via statistical convergence. *The Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 129-138.
- [20] Simsek, Y., Acikgoz, M. (2010). A New Generating Function of (q) Bernstein-Type Polynomials and Their Interpolation Function. In *Abstract and Applied Analysis*. **Vol. 2010**.
- [21] Acikgoz, M., Araci, S. (2010). On the generating function for Bernstein polynomials. *AIP Conference Proceedings*. **1281(1)**.
- [22] Araci, S., Acikgoz, M. (2012). A note on the Frobenius-Euler numbers and polynomials associated with Bernstein polynomials. *arXiv preprint arXiv:1205.6590*.
- [23] Simsek, Y. (2016). Combinatorial Identities Associated with Bernstein Type Basis Functions. *Filomat*. **30 (7)**, 1683-1689.
- [24] Simsek, Y. (2014). A new class of polynomials associated with Bernstein and beta polynomials. *Mathematical Methods in the Applied Sciences* **37 (5)**, 676-685.

- [25] Phillips, G. M. (1996). On generalized Bernstein polynomials. *Numerical Analysis: AR Mitchell 75th Birthday Volume*. 263-269.
- [26] Bayad, A., Kim T. (2011). Identities involving values of Bernstein, q -Bernoulli, and q -Euler polynomials. *Russian Journal of Mathematical Physics*. **18** (2).
- [27] Kim, T., Choi, J., Kim, Y. H. (2010). Some identities on the q -Bernstein polynomials, q -Stirling number and q -Bernoulli numbers. *arXiv preprint arXiv:1006.2033*.
- [28] Araci, S., Erdal, D., Seo, J. J. (2011). A Study on the Fermionic p -Adic q -Integral Representation on $\mathbb{Z}_p$ Associated with Weighted q -Bernstein and q -Genocchi Polynomials. In *Abstract & Applied Analysis*, 1-10.
- [29] Simsek, Y., Acikgoz, M. (2010). A New Generating Function of (q) Bernstein-Type Polynomials and Their Interpolation Function. In *Abstract and Applied Analysis*, Vol. **2010**.
- [30] Karacı, A., Büyükyazıcı İ., Aktümen M. (2010). Recognition of human speech using q -Bernstein polynomials. *Int. J. Comput. Appl.*, **2** (5), 22-28.
- [31] Simsek, Y., Bayad A., Lokesha V. (2012). q -Bernstein polynomials related to q -Frobenius–Euler polynomials, l -functions, and q -Stirling numbers. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. **35** (8). 877-884.
- [32] Mursaleen, M., Khursheed J. A., Khan A. (2015). On (p, q) -analogue of Bernstein operators. *Applied Mathematics and Computation*. **266**. 874-882.
- [33] Mursaleen, M., Khursheed J. A., Khan A. (2015). Some approximation results by (p, q) -analogue of Bernstein–Stancu operators. *Applied Mathematics and Computation*. **264**, 392-402.
- [34] Mursaleen, M., Khursheed J. A., Khan A. (2015). Some approximation results by (p, q) -analogue of Bernstein–Stancu operators. *Applied Mathematics and Computation*. **264**, 392-402.
- [35] Acar, T. (2016). (p, q) -Generalization of Szász–Mirakyan operators. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. **39** (10), 2685-2695.
- [36] Acar, T., Purshottam N. A., Kumar A. S. (2018). On a Modification of (p, q) -Szász–Mirakyan Operators. *Complex Analysis and Operator Theory*. **12** (1), 155-167.

- [37] Kac, V., Cheung, P. (2001). *Quantum calculus*. Springer Science & Business Media.
- [38] Chakrabarti, R., Jagannathan, R. (1991). A (p, q) -oscillator realization of two-parameter quantum algebras. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **24** (13), L711.
- [39] Brodimas G., Jannussis A., Mignani R. (1991). Two-parameter quantum groups, *Universita di Roma Preprint*, **820**.
- [40] Arik M., Demircan E., Turgut T., Ekinici L., Mungan M. (1992). Fibonacci oscillators. *Z. Phys. C: Particles and Fields*, **55**, 89-95.
- [41] Wachs M., White D. (1991). p, q -Stirling numbers and set partition statistics. *J. Combin. Theory A*, **56**, 27-46.
- [42] Katriel J., Kibler M. (1992). Normal ordering for deformed boson operators and operatorvalued deformed Stirling numbers. *J. Phys. A: Math. Gen.*, **25**, 2683-2691.
- [43] Burban M., Klimyk A. U. (1994). P,Q-differentiation, P,Q-integration and P,Q hypergeometric functions related to quantum groups. *Integral Transforms and Special Functions*, **2**, 15-36.
- [44] Jagannathan, R., Rao, K. S. (2006). Two-parameter quantum algebras, twin-basic numbers, and associated generalized hypergeometric series. *arXiv preprint math/0602613*.
- [45] Milovanović, G. V., Gupta, V., Malik, N. (2018). (p, q) -Beta functions and applications in approximation. *Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana*, **24** (1), 219-237.
- [46] Wilf H. S. (1994). *Generatingfunctionology*. Second Edition, Academic Press, 1994.
- [47] Koblitz, N. (1977). *p-adic Numbers, p-adic Analysis, and Zeta-Functions*. New York: Springer-Verlag.
- [48] Kim S. D., Kim, T., Dolgy, D. V., Rim, S. H. (2013). Some new identities of Bernoulli, Euler and Hermite polynomials arising from umbral calculus. *Advances in Difference Equations*, **2013** (1).
- [49] Kim, T. (2007). On the analogs of Euler numbers and polynomials associated with p -adic q -integral on Z_p at $q = -1$. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **331** (2), 779-792.

- [50] Ryoo, C. S. (2014). A numerical investigation on the zeros of the tangent polynomials. *J. Appl. Math. & Informatics*, **32** (3-4), 315-322.
- [51] Jang, L. C., Kim, W. J., Simsek, Y. (2010). A study on the p -adic integral representation on associated with Bernstein and Bernoulli polynomials. *Advances in Difference Equations*, **2010** (1), 163217.
- [52] Schikhof, W., H. (1984). *Ultrametric Calculus: An Introduction to p -Adic Analysis*. Cambridge University Press.
- [53] Kim, T. (2006). A note on p -adic invariant integral in the rings of p -adic integers. arXiv:math/0606097 [math.NT].
- [54] Kim, T. (2002). q -Volkenborn integration. *Russian Journal of Mathematical Physics*. **9**, 288-299.
- [55] Araci, S., Duran, U., Acikgoz, M. (2017). (ρ, q) -Volkenborn integration. *Journal of Number Theory*, **171**, 18-30.
- [56] Duran, U., Acikgoz, M. (2018). On (ρ, q) -Euler numbers and polynomials associated with (ρ, q) -Volkenborn integrals. *International Journal of Number Theory*, **14** (01), 241-253.
- [57] Joy, K. I. (2000). Bernstein polynomials. *On-Line Geometric Modeling Notes*, **13**.
- [58] Kim, T. (2011). Some Identities on the q -Integral Representation of the Product of Several q -Bernstein-Type Polynomials. *Abstract and Applied Analysis*, Vol. **2011**.
- [59] Goldman, R., Simeonov, P., Simsek, Y. (2014). Generating functions for the q -Bernstein bases. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, **28(3)**, 1009-1025.
- [60] Simsek, Y. (2017). On parametrization of the q -Bernstein basis functions and their applications. *Journal of Inequalities and Special Polynomials*, **8(1)**, 158-169.
- [61] Simsek, Y. (2013). Functional equations from generating functions: a novel approach to deriving identities for the Bernstein basis functions. *Fixed Point Theory and Applications*, **2013(1)**, 80.
- [62] Kim, T., Jang, L. C., Yi, H. (2010). A note on the modified-bernstein polynomials. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2010, Article ID 706483, 12 pages.

- [63] Bhandari, A., Vignat, C. (2012). A probabilistic interpretation of the Volkenborn integral. *arXiv preprint arXiv:1201.3701*.
- [64] Simsek, Y. (2015). Beta-type polynomials and their generating functions. *Applied Mathematics and Computation*, **254**, 172-182.
- [65] Simsek, Y. (2014). A new class of polynomials associated with Bernstein and beta polynomials. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **37**(5), 676-685.
- [66] Simsek, Y. (2017). Matrix Representation for the Beta Type Polynomials. *Appl. Math*, **11**(1), 183-187.



ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı ve Soyadı : Erkan AĞYÜZ
Uyruğu : TC
Doğum yeri ve Tarihi : Gaziantep 11.03.1986
Medeni Hali : Bekar
Telefon : 0532 383 17 67
Email : agyuz@gantep.edu.tr
erkanagyuz@hotmail.com

EĞİTİM BİLGİLERİ

Derece	Mezun olduğu okul	Mezuniyet yılı
Yüksek Lisans	Gaziantep Üniversitesi	2012
Lisans	Eskişehir Osmangazi Üniversitesi	2009
Lise	Gaziantep Lisesi	2003

YAYINLAR

Uluslararası Yayınlar

- **Y.1. Erkan AGYUZ, Mehmet ACIKGOZ (2018).** On the Study of Modified (p, q) -Bernstein Polynomials and Their Applications. International Journal of Advanced and Applied Sciences, 5-1, 61-65, Doi: 10.21883/ijaas.2018.01.008.
- **Y.2. Erkan AGYUZ, Mehmet ACIKGOZ (2018).** A Note on (p, q) -Bernstein Polynomials and Their Applications Based on (p, q) -Calculus. Journal of Inequalities and Applications, 2018, 2018(81).
- **Y.3. Erkan AGYUZ, Mehmet ACIKGOZ (2018).** A Note on Bernstein Polynomials Based on (p, q) -Calculus. AIP Conference Proceeding. (In Press)

- **Y.4. Erkan AGYUZ**, Mehmet ACIKGOZ (2018). A New Type Bernstein Polynomials Depend on (p, q) -Integers. AIP Conference Proceeding. (In Press)
- **Y.5. Erkan AGYUZ**, Mehmet ACIKGOZ (2017). Integral Representations of Several (p, q) -Bernstein Polynomials and Their Applications. Journal of Mathematical and Computational Mathematics, 7(3), 563-605., ISSN: 1927-5307.
- **Y.6. Erkan AGYUZ**, Mehmet ACIKGOZ (2016). Applications of Z-Transform to Some Elementary Functions in q - and (p, q) -Calculus. Turkish Journal of Analysis and Number Theory, 4(6), 164-167., doi:10.12691/tjant-4-6-3.
- **Y.7. Fatma Gül GÜRKAN**, Mehmet ACIKGOZ, **Erkan AGYUZ** (2016). A Study on the Mixed-Type Polynomials Related to Boole Polynomials. Afrika Matematika, 28(1), 279-290., Doi: 10.1007/s13370-016-0446-8.
- **Y.8. Erkan AGYUZ**, Serkan ARACI, Mehmet ACIKGOZ (2015). A Symmetric Identity on the q -Genocchi Polynomials of Higher Order Under D3. Proc. Jangjeon Math. Soc., 2, 177-187.
- **Y.9. Serkan ARACI**, **Erkan AGYUZ**, Mehmet ACIKGOZ (2015). On a q -Analogue of Some Numbers and Polynomials. Journal of Inequalities and Applications, 2015(19), doi:10.1186/s13660-014-0542-y.
- **Y.10. Serkan ARACI**, Mehmet ACIKGOZ, **Erkan AGYUZ** (2014). On the Dirichlet's Type of Eulerian Polynomials. Mathematical Sciences, 8:131.

BİLDİRİLER

Uluslararası Bildiriler

- **B.1. Erkan AGYUZ**, Mehmet ACIKGOZ (2017). A Note on the (p, q) -Beta Polynomials and Their Properties. International Conference on Mathematics and Mathematics Education (ICMME-2017) May 11-13, Şanlıurfa, Turkey.
- **B.2. Erkan AGYUZ**, Mehmet ACIKGOZ (2017). On the Bernstein Polynomials and Their Properties in (p, q) -Calculus. International Conference on Mathematics and Mathematics Education (ICMME-2017) May 11-13, Şanlıurfa, Turkey.

- **B.3. Erkan AGYUZ, Mehmet ACIKGOZ (2017).** The Generating Function of (p, q) -Bernstein Polynomials and Their Properties Based on (p, q) -Calculus. 6th International Eurasian Conference on Mathematical Science and Applications. (IECMSA-2017) August 15-18, Budapest, Hungary.
- **B.4. Erkan AGYUZ, Mehmet ACIKGOZ (2017).** A Note on Bernstein Polynomials Based on (p, q) -Calculus. The 6th Symposium on Generating Functions of Special Polynomials and Their Applications. (GFSNP 2017) September 25-30 , Thessaloniki, Greece.
- **B.5. Erkan AGYUZ, Mehmet ACIKGOZ (2017).** A New Type Bernstein Polynomials Depend on (p, q) -Integers. The 6th Symposium on Generating Functions of Special Polynomials and Their Applications. (GFSNP 2017) September 25-30 , Thessaloniki, Greece.
- **B.6. Erkan AGYUZ, Mehmet ACIKGOZ (2017).** New Type Polynomials Families Based on Post Quantum Analysis. 4th International Conference on Pure & Applied Sciences. (ICPAS-2017) November 23-25 İstanbul, Turkey.
- **B.7. Erkan AGYUZ, Mehmet ACIKGOZ (2017).** q -Bernstein Polynomials and Their Applications on $[a, b]$. 4th International Conference on Pure & Applied Sciences. (ICPAS – 2017) November 23-25 İstanbul, Turkey.
- **B.8. Fatma Gül GURKAN, Mehmet ACIKGOZ, Erkan AGYUZ (2016).** A Note on the Mixed Type Polynomials Related to Boole Polynomials. International Conference on Natural Science and Engineering (ICNASE'16) March 19-20 Kilis, Turkey.
- **B.9. Erkan AGYUZ, Mehmet ACIKGOZ (2016).** Some New Results in Z-Transforms Under the q - and (p, q) -Calculus. International Conference on Quantum Science and Applications. (ICQSA – 2016) May 25-27 Eskişehir, Turkey.
- **B.10. Erkan AGYUZ, Mehmet ACIKGOZ (2016).** Integral Representations of Multiplications of bernstein Polynomials and Their Relations with Special Functions in the (p, q) -Calculus, International Conference on Pure & Applied Sciences. (ICPAS – 2016) June 1-5 İstanbul, Turkey.
- **B.11. Erkan AGYUZ, Mehmet ACIKGOZ, Serkan ARACI (2015).** Symmetric Identities on the q -Genocchi Polynomials of Higher Order under D3. The

28th International Conference on The Jangjeon Mathematical Society (ICJMS-2015)
May 15-19, Antalya, Türkiye.

Ulusal Bildiriler

- **U.1. Erkan Ağyüz**, Sabri BİRLİK (2012). Robot Hareketlerinin Topolojisi. Fırat Üniversitesi 2. Öğrenci Çalıştayı, 27-28 Nisan, Elazığ, Türkiye.
- **U.2. Erkan Ağyüz**, Sabri BİRLİK (2011). Topolojik Robotlar Üzerine. 24. Ulusal Matematik Sempozyumu, 07-10 Eylül, Bursa, Türkiye.
- **U.3. Erkan Ağyüz**, Sabri BİRLİK (2010). Topoloji ve Robotlar. Ankara Matematik Günleri (AMG'10) Ankara, Türkiye.

Ödüller

- Tübitak Yurtiçi Doktora Bursu (2012)
- YÖK Akademik Teşvik Ödülü (2015)
- YÖK Akademik Teşvik Ödülü (2016)
- YÖK Akademik Teşvik Ödülü (2017)

Editörlük ve Hakemlik

Gaziantep University Journal of Social Sciences (Ulakbim, DOAJ, Mendeley) adlı dergide Editör yardımcısı (2017-)

Yabancı Dil Bilgisi

Yabancı Dil	Sınav Türü	Puan
İngilizce	ÜDS	68.75