T.C.
ERCİYES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
FİZİK ANABİLİM DALI

# MİNİMAL UZUNLUK ALTINDA DUFFIN-KEMMER-PETIAU DENKLEMİNİN LİNEER POTANSİYEL SİSTEMİ İÇİN İNCELENMESİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Hazırlayan
Zeynep YAMAN

Danışman
Yrd. Doç. Dr. Ferhat TAŞKIN

Bu çalışma; Erciyes Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Birimi tarafından FBY-10-3401kodlu projeyle desteklenmiştir

Ocak 2012
KAYSERİ

## BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK

Bu çalışmadaki tüm bilgilerin, akademik ve etik kurallara uygun bir şekilde elde edildiğini beyan ederim. Aynı zamanda bu kural ve davranışların gerektirdiği gibi, bu çalışmanın özünde olmayan tüm materyal ve sonuçları tam olarak aktardığımı ve referans gösterdiğimi belirtirim.

Zeynep YAMAN

imza :

## YÖNERGEYE UYGUNLUK

**"MİNİMAL UZUNLUK ALTINDA DUFFIN-KEMMER-PETIAU DENKLEMİNİN LİNEER POTANSİYEL SİSTEMİ İÇİN İNCELENMESİ"** adlı Yüksek Lisans Tezi, Erciyes Üniversitesi Lisansüstü Tez Önerisi ve Tez Yazma Yönergesine uygun olarak hazırlanmıştır.

Tezi Hazırlayan
Zeynep YAMAN

Danışman
Yrd. Doç. Dr. Ferhat TAŞKIN

Fizik ABD Başkanı
Prof.Dr. Mehmet AKKURT

Yrd. Doç. Dr. Ferhat TAŞKIN danışmanlığında **Zeynep YAMAN** tarafından hazırlanan **"MİNİMAL UZUNLUK ALTINDA DUFFIN-KEMMER-PETIAU DENKLEMİNİN LİNEER POTANSİYEL SİSTEMİ İÇİN İNCELENMESİ"** adlı bu çalışma, jürimiz tarafından Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans** tezi olarak kabul edilmiştir.

26/ 06/ 2011

**JÜRİ :**

| | | |
|---|---|---|
| Danışman | : | Yrd.Doç. Dr. FERHAT TAŞKIN |
| Üye | : | Doç.Dr. Ahmet ERDİNÇ |
| Üye | : | Doç.Dr. Osman CANKO |

ONAY :

Bu tezin kabülü Enstitü Yönetim Kurulunun 07/02/2012 tarih ve 2012/08-07 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

07.02.2012

**Enstitü Müdürü**

Prof.Dr. Necmettin MARAŞLI

# ÖNSÖZ/TEŞEKKÜR

Tez çalışmamın tamamlanması süresince emeğini ve yardımını esirgemeyen, değerli fikir ve tecrübeleri ile büyük destek sağlayan saygı değer hocam Yrd. Doç. Dr. Ferhat TAŞKIN'a teşekkür ederim.

Tez çalışması esnasında bana destek olan arkadaşlarım Büşra PALANCIGİLLER, Nilgün KAYACI, Cennet ÜNAL, Ahmet ÖZCAN ve Mehmet SERDAR'a teşekkür ederim.

Bu tez çalışmasına maddi destek veren Erciyes Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Birimi'ne FBY-10-340 teşekkür ederim.

Ayrıca;çalışmalarım süresince gösterdikleri anlayıştan, maddi ve manevi desteklerinden dolayı; babam Turgut YAMAN, annem Elmas YAMAN, ablam Naime YAMAN ÇAVDAROĞLU ve kardeşim Eyüp YAMAN'a en içten dileklerimle teşekkürlerimi sunarım.

Zeynep YAMAN

Kayseri, Ocak 2012

# MİNİMAL UZUNLUK ALTINDA DUFFIN-KEMMER-PETIAU DENKLEMİNİN LİNEER POTANSİYEL SİSTEMİ İÇİN İNCELENMESİ

**Zeynep YAMAN**
**Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü**
**Yüksek Lisans Tezi, Ocak 2012**
**Danışman : Yrd. Doç. Dr. Ferhat TAŞKIN**

## KISA ÖZET

Göreli Duffin-Kemmer-Petiau denkleminin çözümleri spin-0 ve spin-1 parçacıklarının etkileşmelerinin hesaplanması ve modellenmesi için önemli rol oynamaktadır. Bilinen göreli yaklaşımda spin-0 ve spin-1 hadron çekirdekleri ile etkileşimi, spin-0 parçacıkları için ikinci mertebeden Klein-Gordon denklemi ve spin-1 parçacıkları için ikinci mertebeden Proca denklemi ile tanımlanmıştır. Duffin-Kemmer-Petiau denkleminin tıpkı göreli Dirac denklemi gibi birinci mertebeden ve Lorentz değişmezliğine sahip bir denklemdir.

Kuantum mekaniğinde yapılan çalışmalar konum ve momentum operatörü ile Hilbert uzayında standart Heisenberg cebri ile yapılmaktadır. Kuantum mekaniğinde minimum uzunluk gibi sonlu bir mesafe göz önüne alınmamıştır. Literatürde çok araştırılan sistemlerden biri de Lineer potansiyel problemidir.

Bu çalışmada, göreli Duffin-Kemmer-Petiau denklemi kullanılarak lineer potansiyel sisteminde çözümler elde edilmiştir. Çözümler spin-0 ve spin-1 durumlarında, minimum uzunluk altında, momentum uzayında ve vektör küresel harmonikler kullanılarak yapılmıştır. Spin-0 ve spin-1 durumları için enerji özdeğerleri ve özfonksiyonları elde edilmiştir.

**Anahtar Kelimeler**: Minimum Uzunluk, Duffin-Kemmer-Petiau Denklemi, Belirsizlik İlkesi, Planck Ölçeği

# INVESTIGATION OF THE DUFFIN-KEMMER-PETIAU EQAUTION WİTH LINEAR POTENTIAL IN THE PRESENCE OF MINIMAL LENGTH

**Zeynep YAMAN**
**Erciyes University, Graduate School of Natural and Applied Sciences**
**M. Sc. Thesis, February 2011**
**Supervisor: Assis. Prof. Ferhat TAŞKIN**

## ABSTRACT

Solution of the relativistic Duffin-Kemmer-Petiau equation for interaction of spin-0 and spin-1 calculation and modeling plays an important role. In the conventional relativistic approach, the interaction of spin-0 and spin-1 hadrons with different nuclei has been described by the second-order Klein-Gordon equation for spin-0 and Proca equation for spin-1 particles. Duffin-Kemmer-Petiau equation is first order and Lorentz invariance just relativistic Dirac equation.

Quantum mechanics where position and momentum operators acting on the Hilbert space of states verify the standard Heisenberg algebra. They do not take into account like the existence of a minimal observable length.

In this study, the linear and Coulomb potential systems solutions are obtained by using the relativistic Duffin-Kemmer-Petiau equation. Under the minimum length, solutions of spin-0 and spin-1 case investigate at the momentum space by using the vector spherical harmonics. The energy eigenvalues and eigenfunctionsbare obtained obtaine for spin-0 and spin-1 cases.

**Keywords**: Minimal length, Duffin-Kemmer-Petiau Equation, Uncertainty Principle, Planck-Scale

# İÇİNDEKİLER

**MİNİMAL UZUNLUK ALTINDA DUFFIN-KEMMER-PETIAU (DKP) DENKLEMİNİN LİNEER POTANSİYEL SİSTEMİ İÇİN İNCELENMESİ**

Sayfa

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK SAYFASI ........ i

YÖNERGEYE UYGUNLUK SAYFASI ........ ii

KABUL VE ONAY SAYFASI ........ iii

ÖNSÖZ ........ iv

KISA ÖZET ........ v

ABSTRACT ........ vi

İÇİNDEKİLER ........ vii

**GİRİŞ ........ 1**

**1. BÖLÜM**

**DKP DENKLEMİ YAPISI VE ÖZELLİKLERİ**

**1.1. Tanım ........ 5**

**1.2. Adjoint ve Korunumlu Akı Denklemleri ........ 6**

**1.3. Spinsiz Bozonlar İçin DKP Denkleminin Çözümü ........ 7**

**1.4. Spinsiz Bozonlar İçin Formalizm ........ 9**

**2. BÖLÜM**

**DKP DENKLEMİNİN LİNEER POTANSİYEL ALTINDA SPİN-0 ÇÖZÜMLERİ**

2.1. Minimum Uzunluk ........................................................................................................ 13
2.2. Minimum Uzunluk Altında DKP Denklemi ....................................................................... 14

3. BÖLÜM

DKP DENKLEMİNİN LİNEER POTANSİYEL ALTINDA SPİN-1 ÇÖZÜMLERİ

3.1. Minimum Uzunluk Altında DKP Denkleminin Spin-1 İçin İncelenmesi ................ 22

4. BÖLÜM

SONUÇ ve TARTIŞMA

4.1. Sonuç ve Tartışma .......................................................................................................... 31

KAYNAKLAR .......................................................................................................................... 33
ÖZGEÇMİŞ

# GİRİŞ

Göreli Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) denkleminin çözümleri bozonik parçacıkların etkileşmelerinin tanımlanmasında önemli rol oynamaktadır. Göreli kuantum mekaniğinde de kuantum mekaniğinde olduğu gibi dalga fonksiyonun çözümü çok önemlidir. Bilinen göreli yaklaşımda spin-0 ve spin-1 hadron çekirdekleri ile etkileşimi, spin-0 parçacıkları için ikinci mertebeden Klein-Gordon denklemi ve spin-1 parçacıkları için ikinci mertebeden Proca denklem ile tanımlanmıştır. Zamana ve uzaya bağlı ikinci mertebeden denklemin matematiksel çözümünün ve arkasındaki fiziğin çok zor olduğu iyi bilinmektedir. Bundan dolayı son yıllarda spin-0 ve spin-1 hadronlarının çekirdeklerle etkileşimi birinci mertebeden göreli DKP denklemi ile incelenmiştir. DKP denklemi tıpkı göreli Dirac denklemi gibi birinci mertebeden ve Lorentz değişmezliğine sahip bir denklemdir [43]. Araştırılabilecek önemli konulardan biri de spin-0 ve spin-1 için sırasıyla Klein-Gordon ve Proca denklemleri ile aynı sonucu verip vermediğidir [18]. DKP'nin büyük cebirsel karmaşıklığı nedeniyle Klein-Gordon ve Proca denklemlerine göre göz ardı edilmiştir. 1970'lerde spin-0 ve spin-1 durumlarının çözümleri araştırılmış ve DKP ve Klein-Gordon denklemi bazı deneysel verilerin teorik hesaplarında farklı sonuçlar verdiği görülmüştür. Ayrıca DKP denklemi yapısı gereği Klein-Gordon denklemine göre etkileşmeleri tanımlamada daha başarılıdır. Bu nedenle mezon-çekirdek etkileşmeleri için DKP modeli alternetif çözüm yöntemi olarak kullanılmıştır [21]. Çekirdek-çekirdek saçılmalarının içeriğini açıklamada geçmişte geliştirilmiş yaklaşım teknikleri mezon-çekirdek dağılımının verilerini daha iyi açıklamak için genelleştirilmiştir [13]. Bozonik parçacığının fermiyonik parçacığının bileşiminden oluştuğunu öngören teorinin ortaya atılmasıyla Döteron-çekirdek saçılma problemi bozon etkileşmesi olarak incelenmiştir [42]. Son otuz yıl içerisinde DKP denkleminin yeni alanlara uygulanması DKP'ye olan ilgiyi artırmıştır [1, 48]. Kuantum renk dinamiği [24] ve kovaryant hamiltonyen [34] alanlarında DKP ile çalışmalar yapılarak kullanım alanları daha da genişletilmiştir [44, 45]. $K^{\pm}$ çekirdek saçılmasının 5 boyutlu Galileo değişmezliğinin saçılma teorisindeki uygulaması [16, 40], Aharonov-Bohm potansiyeli [3, 5], Dirac osilatör etkileşmesinde [7], termodinamik özelliklerin çalışılması [4] DKP denklemi kullanılarak yapılan çalışmalardandır.

Kuantum mekaniğinde konum ve momentum operatörü ile Hilbert uzayında yapılan çalışmalar standart Heisenberg cebri ile yapılmaktadır. Kuantum mekaniğinde minimum uzunluk gibi sonlu bir küçük alt sınır mesafesi göz önüne alınmamıştır. Ancak, gravitasyon kendi içerisinde çok küçük ölçeklerde sürekliliğini kaybetmektedir [31]. Kuantum alan teori içindeki gravitasyonun tanımı nedeniyle, gravitasyonun çok küçük ölçeklerde renormalize edilebilirliği bozulmaktadır ve yok edilemez ıraksamalarla karşılaşılmaktadır. Bu nedenle gravitasyon için ultraviyole bölgede etkin bir kesme üst veya alt sınırın (cutoff) belirlenmesi gerekliliği ortaya çıkmıştır. Kesme alt sınıra örnek olarak minimum ölçülebilir uzunluk verilebilir. Böyle bir minimum uzunlukla ilk defa Asd/CFT ilişkisinde [50] ve komütatif olmayan kuantum alan teoride [17] karşılaşılmıştır ve minimum uzunluğun Planck uzunluğuna yakın veya eşit olması gerektiği görülmüştür. Parçacılar için Planck uzunluğuna yakın mesafedeki yüksek enerjiyi yeteri kadar iyi ölçmek için gravitasyonel eğrilik tahmin edilmeye çalışılmakta ve böylece uzay-zaman yapısı önemli ölçüde zorlanmaktadır. Bu da kuantum mekaniğindeki belirsizlik ilkesine ek olarak Planck ölçeğinde meydana gelen uzay-zaman dalgalanmalarından kaynaklanan ek belirsizlikler oluşturmaktadır [58]. String teoride ve kuantum gravitasyon teorisinde kısa mesafe yapılarına ve belirsizlik ilkesine çok küçük mesafe skalalarında belirli düzeltmelerin yapılması gerekliliği öngörülmüştür [2, 22, 32, 41, 46, 47]. Bu gereklilik Kempf ve arkadaşları tarafından bir dizi çalışma yapılarak çalışılmıştır [28, 35–39]. Bu çalışmalarda kuantum mekaniğindeki kanonik komütasyon ilişkisi küçük bir düzeltme terimiyle birlikte aşağıdaki gibi alınmıştır.

$$\lfloor x_i, p_j \rfloor = i\hbar(\delta_{ij} + \alpha_{ijkl}x_k x_l + \beta_{ijkl}p_k p_l + \ldots), \tag{1}$$

Denklem (1) sayesinde konum ve momentum operatörleri için $\lfloor x_i, x_j \rfloor \neq 0$ ,$\lfloor p_i, p_j \rfloor \neq 0$ durumu ortaya çıkmaktadır. Bu kritik öneme sahip komütatif olmayan geometrik anzast [38] uygun şeçilen $\alpha$ ve $\beta$ matrisleri yardımıyla doğrulanabilir. Denklem (1)'in varlığı konum ve momentum belirlenmesinde sonlu alt bir sınırın olması gerektiğini ortaya koyar. Bu alt sınır tüm fiziksel durumlarda bulunan $\Delta x_0$ ve $\Delta p_0$ sonlu minimum belirsizlik formundadır. Aslında denklem (1)'de verilen yapı minimal uzunluk altında belirsizliğe eklenecek katkıyı içermektedir [38]. Yol integral yöntemi kullanılarak, komütatif olmayan geometriler yardımıyla kuantum alan teorisindeki farklı boyutlardaki ultraviole ve kızıl ötesi bölgelerin yeniden düzenlenebileceği Kempf tarafından gösterilmiştir [37]. Fakat yeniden düzenlenmiş küçük mesafelerdeki skalanın tam seti ve özellikle maksimum sınırlama durumlarındaki hesaplamalarda denklem (1)'de verilen eşitliğin özel durumu olan aşağıdaki denklem,

$$[x,p] = i\hbar(1+\beta p^2), \tag{2}$$

kullanılmıştır [39]. Diğer taraftan, minimal uzunluk aynı zamanda yüksek boyutlarla [28], koşan kuplaj sabitleriyle [29] ve karadelik fiziği [30] konularıyla da ilgili olabileceği gösterilmiştir. Ayrıca literatürde, minimum uzunluk formalizminin katılardaki toplu uyarılmalar ve yarı-parçacıklar gibi nokta-yapıda olmayan parçacıların ya da nükleonların ve çekirdek ve moleküller gibi kompozit parçacıkları tanımlamak için etkin bir teori sağlayabileceği düşünülmektedir [28–30, 54]. Bu durumda minimum uzunluk, düşünülen sistemin yapısının iç ölçek karakterizasyonu ve sistemin sonlu bir büyüklüğü olarak düşünülmektedir.

Son zamanlarda DKP denklemi kullanılarak farklı sistemlerin araştırıldığı görülmektedir. De Castro ve arkadaşları DKP denklemine vektör ve skaler kuplaj ekleyerek spin-0 ve spin-1 için bağlı durumları incelemişlerdir [9, 10, 14, 15]. Boumali spin-1 parçacığının Aharonov-Bohm potansiyeli altında [6], Casana ve arkadaşları bir boyutlu DKP osilatörünün çözümlerini ve iki boyutlu pseudoscaler potansiyeli altında DKP denklemlerinin çözümlerini elde etmiştir [11]. Falek ve Merad tarafından bozonik osilatör ve genelleştirilmiş bozonik osilatör minimal uzunluk yardımıyla spin-0 ve spin-1 durumlarını incelemişlerdir [19,20]. Ülkemizde minimum uzunluk altında DKP denklemi kullanılarak yapılmış ve literatüre girmiş bir çalışma bulunmamaktadır. Ancak DKP denklemi kullanılarak yapılan çalışmalar mevcuttur. DKP denklemi değişik potansiyeller için asimtotik iterasyon ve fonksiyon analiz yöntemi kullanarak çözülmüştür [8, 59, 60]. Söğüt, Havare ve arkadaşları tarafından DKP denklemi kullanılarak bir dizi çalışma yapılmıştır [25–27, 53, 55, 56]. DKP denklemi kullanılarak genişleyen evrende vektör bozonlar için kesin çözümler elde edilmiştir [57]. Ayrıca (1+1) bouyutlu Klein-Gordon denklemi minimal uzunluk altında lineer vektör ve skaler potansiyel sistemi için çözülmüştür [33]. Dirac denklemi kullanılarak genelleştirilmiş Dirac denklemi [49] ve Dirac osilatörü minimal uzunluk altında çalışılmıştır [51, 52]. Chargui ve arkadaşları tarafından minimal uzunluk altında bir boyutlu spin-0 Salpeter denklemi Coulomb potansiyel problemi için çözülmüştür [12].

2. bölümde spin-0 ve spin-1 durumları için kullanılacak olan göreli DKP denkleminin yapısı ve özellikleri verilecektir. Matematiksel hesapların bir kısmı verilecek ve hesaplar açık bir şekilde yapılmayacaktır.

3. bölümde lineer potansiyel için DKP denkleminin minimum uzunluk altında spin-0 durumu için analitik olarak sistemi tanımlayan diferansiyel denklem bulunacaktır ve ilgili dalga fonksiyonu kapalı formu verilecektir. Ayrıca enerji özdeğerleri açık olarak verilecektir. Minimal uzunluğun enerjiye katkısı açık şekilde gösterilecektir.

4. bölümde lineer potansiyel için DKP denkleminin minimum uzunluk altında spin-1 durumu için analitik olarak sistemi tanımlayan diferansiyel denklem bulunacaktır ve ilgili dalga fonksiyonu kapalı formu verilecektir. Ayrıca enerji özdeğerleri açık olarak verilecektir. Minimal uzunluğun enerjiye katkısı açık şekilde gösterilecektir.

# 1. BÖLÜM

## DKP DENKLEMİ YAPISI VE ÖZLELLİKLERİ

Bu bölümde spin-0 ve spin-1 durumları için kullanılacak olan göreli DKP denkleminin yapısı ve özellikleri verilecektir. Matematiksel hesapların bir kısmı verilecek ve hesaplar açık bir şekilde yapılmayacaktır.

### 1.1. Tanım

DKP denklemi göreli Dirac denklemi gibi birinci mertebeden ve Lorentz değişmezliğine sahip bir denklemdir. Ancak, Dirac denklemi yarım spinli fermiyonik sistemlere uygulanır. Birinci mertebeden göreli DKP denklemi kütlesi m olan spin-0 ve spin-1 parçacıkları için şu şekilde verilir,

$$\left(c\beta.\mathbf{p}+mc^2\right)\psi(\mathbf{r})=\beta^0 E\psi(\mathbf{r}), \tag{1.1}$$

burada $\beta^\mu$ iç değişim bağıntısı olarak belirtilir ve aşağıdaki eşitliği sağlar

$$\beta^\mu\beta^\nu\beta^\lambda+\beta^\lambda\beta^\nu\beta^\mu=g^{\mu\nu}\beta^\lambda+g^{\nu\lambda}\beta^\mu \quad ,\mu,\nu,\lambda=0,1 \tag{1.2}$$

$\beta^\mu$ indirgenemez üç matrisle temsil edilir. Spin-0 için $\beta^\mu$ $5\times5$ boyutunda matrisle verilir,

$$\beta^0=\begin{pmatrix}\Theta & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\beta^i=\begin{pmatrix}0 & \rho^i\\ -\rho^i_T & 0\end{pmatrix}, \tag{1.3}$$

$$\Theta=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\rho^1=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \tag{1.4}$$

$$\rho^2=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\rho^3=\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \tag{1.5}$$

Spin-1 için $\beta^\mu$ $10\times10$ boyutunda matrisle temsil edilir. Matrisler ($\beta$ ve $\beta^0$) aşağıda tanımlanan DKP cebirini sağlar

$$\beta^\mu\beta^\nu\beta^\lambda+\beta^\lambda\beta^\nu\beta^\mu=\rho^{\mu\nu}\beta^\lambda+\rho^{\nu\lambda}\beta^\mu. \tag{1.6}$$

Metrik tensörü $\rho^{\mu\nu} = diag(1,-1)$'dür. Spin-0 durumunda $5\times 5$ matrisleri $\beta^{\mu}$ tarafından verilen açık şekli aşağıdaki gibidir.

$$\beta^0 = \begin{pmatrix} \Theta & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta^i = \begin{pmatrix} 0 & \rho^i \\ -\rho^i_T & 0 \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

$$\Theta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho^1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

$$\rho^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.9}$$

Spin-1 durumunda $10\times 10$ matrisi $\beta^{\mu}$ tarafından verilen açık şekli aşağıdaki gibidir.

$$\beta^o = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0}^T & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \bar{0}^T & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \bar{0}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \beta^i = \begin{pmatrix} 0 & \bar{0} & e_i & \bar{0} \\ \bar{0}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -is_i \\ -e_i & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 \\ \bar{0}^T & -is_i & \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.10}$$

$S_1$ matrisli standart nonrelativistik $(3\times 3)$ $S=1$ matrisler, $\mathbf{0}$ sıfır matrisi, $\mathbf{I}$ birim matrisi göstermektedir. $\bar{0}$ ve $e_1$ matrisleri aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$\bar{0} = (0\,0\,0), e_1 = (1\,0\,0), \quad e_2 = (0\,1\,0), \quad e_3 = (0\,0\,1), \tag{1.11}$$

Burada $S_i$ $3\times 3$ spin-1 matrisleri aşağıda tanımlanmıştır,

$$s_1 = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad s_2 = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad s_3 = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.12}$$

## 1.2. Adjoint ve Korunumlu Akı Denklemleri

Adjoint DKP denkleminde (1.1) ve (1.2) denklemlerinden aşağıdaki denklem elde edilir

$$i\partial_\mu \overline{\psi}\beta^\mu + m\overline{\psi} = 0. \tag{1.13}$$

$\overline{\psi} = \psi^+\eta^0$ ile adjoint spinor için $\eta^0 = 2\beta^{0^2} - 1$ dır. (1.1) ve (1.13) denklemlerinden yararlanılarak süreklilik denklemi şu şekilde verilir

$$\partial_\mu(\overline{\psi}\beta^\mu\psi) = 0, \tag{1.14}$$

burada $\overline{\psi}\beta^\mu\psi$, 4 vektör yoğunluğunu$\left(\rho = \overline{\psi}\beta^0\psi, \mathbf{j} = \overline{\psi}\beta\psi\right)$ göstermektedir. DKP denkleminin fiziksel içeriğini göstermek için, Gordon ayrışması yapılabilir ve aşağıdaki gibi ifade edilir,

$$j^\mu = \overline{\psi}\beta^\mu\psi = \frac{1}{2m}\left(\overline{\psi}\beta^\mu\beta^\nu\partial_\nu\psi - \partial_\nu\overline{\psi}\beta^\nu\beta^\mu\psi\right), \tag{1.15}$$

(1.1), (1.7) ve (1.14) denklemleri kullanılarak $\nu=\mu$ ve $\nu\neq\mu$ terimlerine ayrılır.

$$j^{\mu}=j^{\mu}_{\nu=\mu}+j^{\mu}_{\nu\neq\mu}, \tag{1.16}$$

burada

$$\begin{aligned} j^{\mu}_{\nu=\mu} &\equiv j^{\mu}_{\text{yak.}}=\frac{i}{2m}\left(\overline{\psi}(\partial^{\mu}\psi)-(\partial^{\mu}\overline{\psi})\psi\right) \\ \rho_{\text{yak.}} &= \frac{i}{2m}\left\{\overline{\psi}\frac{\partial\psi}{\partial t}-\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial t}\psi\right\},\ \mathbf{j}_{\text{yak.}}=\frac{-i}{2m}\left\{\overline{\psi}(\nabla\psi)-(\nabla\overline{\psi})\psi\right\}\end{aligned} \tag{1.17}$$

ve

$$\begin{aligned} j^{\mu}_{\nu\neq\mu} &\equiv j^{\mu}_{\text{etk.}}=\frac{i}{2m}\partial_{\mu}(\overline{\psi}[\beta^{\mu},\beta^{\nu}]\psi) \\ \rho_{\text{etk.}} &= \frac{i}{2m}\nabla\left(\overline{\psi}\left[\beta^{0},\beta\right]\psi\right),\ \mathbf{j}_{\text{etk.}}=\frac{+i}{2m}\left(-\frac{\partial}{\partial t}(\overline{\psi}\left[\beta^{0},\beta\right]\psi)-\nabla\wedge\overline{\psi}(\beta\wedge\beta)\psi\right)\end{aligned} \tag{1.18}$$

olarak verilir. $j^{\mu}_{\nu=\mu}$ her $\beta$ matrisi için genel değildir ve Schrödinger teorisinde $\rho$ ve $j$ hemen hemen aynı biçimsellik ve benzer anlatımda verilmiştir. Bu DKP mevcut bileşeni $\overline{\psi}\beta^{\mu}\psi$ dir. Diğer bileşen, $\left(j^{\mu}_{\nu\neq\mu}\equiv(\rho_{\text{etk.}},j_{\text{etk.}})\right)$, iç değişken kombinasyonunun ortalama $\beta^{\mu}$ değeri dahil bazı iç hareketler ile ilişkilidir. DKP parçacıklarının elektromanyetik alanda polarizasyon yoğunluğu $\mathbf{P}$ ile $\overline{\psi}\left(\beta^{\mu},\beta^{\nu}\right)\psi$ ve manyetik yoğunluk $\mathbf{M}$ ile $\overline{\psi}(\beta\wedge\beta)\psi$ ilişkisi, $\rho_{\text{etk.}}=-\nabla.\mathbf{P}$ ve $\mathbf{j}_{\text{etk.}}=\frac{\partial P}{\partial t}+\nabla\wedge\mathbf{M}$. olarak verilir [23].

## 1.3. Spinsiz Bozonlar İçin DKP Denkleminin Çözümü

DKP denklemi sabit çözümler içeren $\psi(r)=u(k)e^{-i(Et-k.r)}=u(k)e^{-ik.x}$ formunda aşağıdaki şekilde yazılır,

$$(k-m)\,u(k)=0, \tag{1.19}$$

burada $k=\beta^{\mu}k_{\mu}$ ve $u(k)$, x'ten bağımsız 5 bileşenli DKP spinördür. Hamiltonyen formunda, (1.1) ve (1.2) denklemlerinden yararlanılarak aşağıdaki şekilde yazılır,

$$Hu=\left(\delta.\mathbf{k}+\beta^{0}m\right)u=Eu, \tag{1.20}$$

burada $\delta = [\beta^0, \beta]$ dır . Hamiltonyenin matris formu aşağıdaki şekilde yazılır.

$$Hu = \begin{pmatrix} 0 & m & 0 & 0 & 0 \\ m & 0 & -k_1 & -k_2 & -k_3 \\ 0 & -k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} u = Eu \tag{1.21}$$

Özdeğer denkleminin çözümünden 3 farklı özdeğer elde edilir. Özdeğerler $\pm\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$ ve 0 dır. 0 özdeğer çözümü bu spinsiz parçaçıklar için beklenen bir değerdir. Genel bir parçacık durumunda spinlerin kendi özellikleri de görülür. Dönmeler altında DKP dalga fonksiyonunun dönüşüm özelliklerinden yararlanılarak, spin operatörü aşağıdaki gibi ifade edilir,

$$S_k = i\left[\beta^l, \beta^m\right] = i\varepsilon_{klm}\beta^l\beta^m, \qquad (k,l,m \text{ dönüşümsel}) \tag{1.22}$$

$$S_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & s_k \end{pmatrix}, \tag{1.23}$$

Burada $S_k$, 3$x$3 spin-1 matrisleridir. $\mathbf{S}^2$' nin özdeğeri iki kez dejenere olan 0 özdeğeriyle birlikte özel bir 3 kez dejenere 2 özdeğer oluşturur. Bu spin-1 çözümleri $S_3$ özdeğer ve helisite operatörü $\mathbf{S}.\hat{\mathbf{k}}$' da mevcuttur. Yörüngesel açısal momentum ile hamiltonyen komitasyonları

$$[H, \mathbf{L}] = -i(\delta \wedge \mathbf{k}), \tag{1.24}$$

yazılır ki bu da açısal momentumdaki eksikliği gösterir. Çünkü, spinle Hamiltonyenin komütasyonu,

$$[H, \mathbf{S}] = i(\delta \wedge \mathbf{k}), \tag{1.25}$$

şeklindedir. Toplam açısal momentum $(\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S})$ korunur ve Hamiltonyenle aşağıdaki komütasyon ilişkisine sahiptir.

$$[H, \mathbf{J}] = 0. \tag{1.26}$$

Dirac durumundaki gibi, Hamiltonyen bu serbest spinsiz bozonları helisite operatorü ile değiştirilir.

$$[H, \mathbf{S}.\hat{\mathbf{k}}] = 0 \qquad \left(\hat{\mathbf{k}} = \frac{\mathbf{k}}{k}\right). \tag{1.27}$$

Dikkat edilmelidir, çünkü bu sonuç beklendik bir durumdur ve $\mathbf{S}^2$, $S_3$ ve $\mathbf{S}.\hat{\mathbf{k}}$ değerlerinin tüm DKP spin durumlarında Hamiltonyenle komütasyonları sıfırdır. Dirac spin-1/2 serbestlik derecesini yansıtan 4-bileşenli vektörlerdir $2\left(2\times\frac{1}{2}+1\right)=4$. DKP spinsiz bozonlar yalnızca 2 serbestlik derecesinde 5 bileşeni vardır. DKP spinörünün 3 alt bileşenin varlığı fazladan serbestlik derecesinin varlığını yansıtır.

## 1.4. Spinsiz Bozonlar İçin Formalizm

Birinci mertebeden göreli DKP denklemi skaler potansiyel $U_s$ ve vektörel potansiyel $U_v^0$ ile birlikte aşağıdaki gibi ifade edilir,

$$\left(\beta.\mathbf{k}c+mc^2+U_s+\beta^0\mathbf{U}_v^0\right)\psi(\mathbf{r})=\beta^0E\psi(\mathbf{r}), \tag{1.28}$$

dalga fonksiyonu,

$$\psi(\mathbf{r})=\begin{pmatrix}\psi_{\text{üst}}\\ i\psi_{alt}\end{pmatrix} \quad \text{ile} \quad \psi_{\text{üst}}=\begin{pmatrix}\phi\\ \varphi\end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad \psi_{alt}=\begin{pmatrix}\mathbf{A}_1\\ \mathbf{A}_2\\ \mathbf{A}_3\end{pmatrix}, \tag{1.29}$$

burada $\psi_{\text{üst}}$ parçacık çözümlerini, $\psi_{alt}$ ise göreli katkının geleceği çözümleri içerir. Denklem (1.29) denklem (1.28)'de yerine yazılırsa,

$$i\rho.\mathbf{k}c\psi_{alt}=\left[\left(E-U_v^0\right)\varphi-\left(mc^2+U_s\right)\right]\psi_{\text{üst}} \tag{1.30a}$$

$$\rho_T.\mathbf{k}c\psi_{\text{üst}}=i\left(mc^2+U_s\right)\psi_{alt} \tag{1.30b}$$

elde edilir. Denklem (1.30) düzenlenirse aşağıdaki denklemler elde edilir,

$$\left(mc^2+U_s\right)\phi=\left(E-U_v^0\right)\varphi+\hbar c\nabla.\mathbf{A} \tag{1.31a}$$

$$\hbar c\nabla\phi=\left(mc^2+U_s\right)\mathbf{A} \tag{1.31b}$$

$$\left(mc^2+U_s\right)\varphi=\left(E-U_v^0\right)\phi \tag{1.31c}$$

burada $\mathbf{A}(A_1;A_2;A_3)$ bir vektördür. Denklem (1.31) da bütün özdeğerler de toplam açısal momentum $J=L+S$ dir, yani,

$$\mathbf{J}=\begin{pmatrix}\mathbf{L} & 0\\ 0 & \mathbf{L}+\mathbf{s}\end{pmatrix}, \tag{1.32}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\overline{\psi}\beta^0\mathbf{J}\psi\right)=0, \tag{1.33}$$

böylece merkezi potansiyelde bir DKP bozunu için (1.28) denkleminin öz fonksiyonu $J^2$, $J_3$ ile özdeğerde $E$, $J(J+1)$ ve $M$ ile gösterilir. Beş bileşenli dalga fonksiyonu $\psi$ aynı zamanda bir özfonksiyon olduğundan $J^2$ ve $J_3$ için özdeğer denklemi,

$$\mathbf{J}^2\begin{pmatrix}\psi_{\text{üst}}\\ \psi_{alt}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{L}^2\psi_{\text{üst}}\\ (\mathbf{L}+\mathbf{s})^2\psi_{alt}\end{pmatrix}=J(J+1)\begin{pmatrix}\psi_{\text{üst}}\\ \psi_{alt}\end{pmatrix}, \tag{1.34}$$

$$J_3\begin{pmatrix}\psi_{\text{üst}}\\ \psi_{alt}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}L_3\psi_{\text{üst}}\\ (L_3+s_3)\psi_{alt}\end{pmatrix}=M\begin{pmatrix}\psi_{\text{üst}}\\ \psi_{alt}\end{pmatrix}, \tag{1.35}$$

şeklindedir. Burada $L^2$ sistemin hareket sabiti değildir ve DKP spinörü olan $\psi$ 'de $L^2$ 'nin özfonksiyonu değildir. Fakat, $\psi_{\text{üst}}$ hem $L^2$ 'nin hemde $J^2$ 'nin özfonksiyonudur. Eğer $\psi_{\text{üst}}$ üzerine etki eden $L^2$ 'nin özdeğeri $l_{\text{üst}}(l_{\text{üst}}+1)$ ise $l_{\text{üst}}=J$ olur. Fakat bu $\psi_{alt}$ için geçerli değildir. Bu durumda dalga fonksiyonu

$$\psi_{JM}=\begin{pmatrix} f_{nJ}(r)Y_{JM}(\Omega)\\ g_{nJ}(r)Y_{JM}(\Omega)\\ i(\sum_L h_{nJL}(r)Y^M_{JL1}\Omega)\end{pmatrix}, \tag{1.36}$$

şeklindedir. Burada $Y_{JM}(\Omega)$ küresel harmonikler, $\mathbf{J}$ ve $\mathbf{Y}^{\mathbf{M}}_{\mathbf{JL1}}(\Omega)$ 'da normalize vektör küresel harmoniklerdir. Küresel harmonikler ve vektör küresel harmonikler için aşağıdaki eşitlikler bulunmaktadır [23]

$$\mathbf{Y}^M_{JL1}(\Omega)=\sum\nolimits_{\lambda,\mu}\langle JM\mid L\lambda 1\mu\rangle Y_{L\lambda}(\Omega)\chi_{1\lambda}, \tag{1.37}$$

$$\nabla.\left(f_{nJ}(r)\mathbf{Y}^M_{J,J+1,1}\right)=-\left(\frac{J+1}{2J+1}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{df(r)}{dr}+\frac{J+2}{r}f(r)\right)Y_{JM}, \tag{1.38}$$

$$\nabla\left(f_{nJ}(r)\mathbf{Y}^M_{J,J,1}\right)=0, \tag{1.39}$$

$$\nabla.\left(f_{nJ}(r)\mathbf{Y}^M_{J,J-1,1}\right)=\left(\frac{J}{2J+1}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{df(r)}{dr}-\frac{J-1}{r}f(r)\right)Y_{JM}, \tag{1.40}$$

$$\frac{\mathbf{r}}{r}Y_{JM}=-\left(\frac{J+1}{2J+1}\right)^{\frac{1}{2}}\mathbf{Y}^M_{J,J+1,1}+\left(\frac{J}{2J+1}\right)^{\frac{1}{2}}\mathbf{Y}^M_{J,J-1,1}, \tag{1.41}$$

$$\nabla Y_{JM}=\left(\frac{J+1}{2J+1}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{J}{r}\mathbf{Y}^M_{J,J+1,1}+\left(\frac{J}{2J+1}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{J+1}{r}\mathbf{Y}^M_{J,J-1,1}, \tag{1.42}$$

Yukarıdaki eşitliler denklem (1.31)'de kullanılarak birinci mertebeden denklemler aşağıdaki gibi elde edilir,

$$(E-U_v^0)\mathbf{f_{nJ}} = (mc^2+U_s)\mathbf{g_{nJ}}, \tag{1.43}$$

$$-\frac{1}{\alpha_J}\left(mc^2+U_s\right)h_{nJ,J+1} = \hbar c\left(\frac{df_{nJ}}{dr}-\frac{J}{r}f_{nJ}\right), \tag{1.44}$$

$$\frac{1}{\xi_J}\left(mc^2+U_s\right)h_{nJ,J-1}) = \hbar c\left(\frac{df_{nJ}}{dr}+\frac{J+1}{r}f_{nJ}\right), \tag{1.45}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\hbar c}[(mc^2+U_s)f_{nJ}-(E-U_v^0)g_{nJ}] = & -\ \alpha_J(\frac{dh_{nJ,J+1}}{dr}+\frac{J+1}{r}h_{nJ,J+1}) \\ & +\ \hbar c\xi_J(\frac{dh_{nJ,J-1}}{dr}-\frac{J-1}{r}h_{nJ,J-1})\end{aligned} \tag{1.46}$$

Burada $\alpha_J = \sqrt{(J+1)/(2J+1)}$ ve $\xi_J = \sqrt{J/(2J+1)}$ şeklindedir. Denklemleri daha basit yapıda göstermek için radyal fonksiyonları yeniden aşağıdaki gibi tanımlansın,

$$f_{nJ}(r) = \frac{F(r)}{r}, \qquad g_{nJ}(r) = \frac{G(r)}{r}, \qquad h_{nJJ\pm1} = \frac{H_{\pm1}(r)}{r}. \tag{1.47}$$

Denklem (1.47) kullanılarak radyal diferansiyel denklem sistemi,

$$(E-U_v^0)\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (mc^2+U_s)\mathbf{G}(\mathbf{r}) \tag{1.48}$$

$$-\frac{1}{\alpha_J}\left(mc^2+U_s\right)H_1(r) = \hbar c\left(\frac{dF(r)}{dr}-\frac{J}{r}F(r)\right) \tag{1.49}$$

$$\frac{1}{\xi_J}\left(mc^2+U_s\right)H_{-1}(r) = \hbar c\left(\frac{dF(r)}{dr}+\frac{J+1}{r}F(r)\right) \tag{1.50}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\hbar c}[(mc^2+U_s)F(r)-(E-U_v^0)G(r)] = & -\ \alpha_J(\frac{d}{dr}+\frac{J+2}{r})\mathbf{H_1}(\mathbf{r}) \\ & +\ \hbar c\xi_J(\frac{d}{dr}-\frac{J-1}{f})\mathbf{H_{-1}}(\mathbf{r})\end{aligned} \tag{1.51}$$

olarak elde edilir. Denklem (1.48) , (1.49) ve (1.50) denklemleri düzenlenerek $\mathbf{G}$, $\mathbf{H_1}$ ve $\mathbf{H_{-1}}$ fonksiyonları, $\mathbf{F}$ cinsinden (1.51)'de yerine yazılırsa aşağıdaki ikinci mertebeden denklem elde edilir,

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}-\frac{J(J+1)}{r^2}+\frac{(E-U_v^0)^2-(mc^2+U_s)^2}{(\hbar c)^2}\right)\mathbf{F}(\mathbf{r}) = 0. \tag{1.52}$$

Radyal denklem sistemlerinde Lorentz skaler ve vektörel potansiyelin bilindiği farzedilir. Burada geliştirilen yöntemle skaler ve vektör potansiyelin Lorentz tipi küresel simetrik olması şartıyla herhangi bir etkileşim için kullanılabilir. DKP spinörleri arasında karışık etkileşimler ve farklı bileşenler olduğu farzedilir. Denklem (1.36)'daki radyal dalga fonksiyonu normalizasyon koşulunu yerine getirmek zorundadır, yani,

$$\int \overline{\psi}_{JM}(r)\,\beta^0\psi_{JM}(r)\,dr = 1 \tag{1.53}$$

burada normalizasyon kovaryant olmayan yapıdadır ve diklik özellikleri kullanılarak küresel harmonikler üretilir. Denklem (1.53)' de verilen normalizasyon şartı,

$$\int_0^\infty Re\left[F^*(r)\,G(r)\right]dr = \frac{1}{2} \tag{1.54}$$

şeklinde yazılabilir. Bu bilindik Klein-Gordon normalizasyon durumundan önemli derecede farklıdır. DKP dalga fonksiyonunun özelliğinin uygulanmasını belirlemek için parite operatörü gerekir. Parite operatörü $\Pi = \eta^0 P^{(0)}$ şeklinde tanımlıdır. Burada,

$$\eta^0 = 2\beta^{0^2} - 1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1.55}$$

şeklinde tanımlıdır ve $P^{(0)}$ yörüngesel parite operatörüdür ($P^{(0)}\phi(\mathbf{r}) = \phi(-\mathbf{r})$)). Küresel harmonik $Y_{JM}$'in paritesi $(-1)^J$ dir ve vektörel küresel harmonikler $\mathbf{Y}^M_{J,J+1,1}$ ve $\mathbf{Y}^M_{J,J-1,1}$'in paritesi $(-1)^{J+1}$ dir. Bu nedenle parite operatörü dalga fonksiyonuna uygulanırsa,

$$\Pi\psi_{JM}(\mathbf{r}) = \eta^0 P^{(0)}\psi_{JM}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} -P^{(0)}\psi_{\text{üst}}(\mathbf{r}) \\ P^{(0)}\psi_{alt}(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = (-1)^J\psi_{JM}(r) \tag{1.56}$$

elde edilir. Dalga fonksiyonu iki yukarı üç aşağı bileşeni içermesine rağmen, $\psi_{JM}(\mathbf{r})$ nin paritesi $(-1)^J$ ile verilir.

Minimal uzunluk altında DKP denkleminin incelenmesi ve DKP denkleminin spin-0 ve spin-1 için çözümleri diğer bölümlerde verilecektir.

# 2. BÖLÜM

## DKP DENKLEMİNİN LİNEER POTANSİYEL ALTINDA SPİN-0 ÇÖZÜMLERİ

Bu bölümde lineer potansiyel için DKP denkleminin minimum uzunluk altında spin-0 durumu için analitik olarak sistemi tanımlayan diferansiyel denklem bulunacaktır ve ilgili dalga fonksiyonu kapalı formu verilecetir. Ayrıca enerji özdeğerleri açık olarak verilecektir. Minimal uzunluğun enerjiye katkısı açık bir şekilde gösterilecektir.

### 2.1. Minimum Uzunluk

Minimum uzunluk altında bir boyutlu kuantum mekaniğindeki konum ve momentum operatörleri arasındaki kanonik komütasyon ilişkisi biraz deforme edilmektedir. Heisenberg cebrindeki deformasyonlardan en basit yapısı aşağıdaki gibi tanımlanır,

$$[\hat{X},\hat{P}] = i\hbar(1+\beta\hat{p}^2), \tag{2.1}$$

burada $\beta \geq 0$ küçük deformasyon parametresidir. Denklem (2.1)'i tanımlayan $\hat{x}$ ve $\hat{p}$ operatörleri aşağıdaki gibidir,

$$\hat{X} = i\hbar[(1+\beta p^2)\frac{\partial}{\partial p} + \gamma p],$$

$$\hat{P} = p, \tag{2.2}$$

burada $\gamma$ sabit bir sayıdır. Denklem (2.1)'de verilen eşitliğin sonucu olarak Heisenberg belirsizlik ilkesinin en genel hali

$$(\Delta X)(\Delta P) \geq \frac{\hbar}{2}[1+\beta(\Delta X^2)] \tag{2.3}$$

olarak verilmektedir. Denklem (2.3) yardımıyla konum uzayındaki minimum uzunluk

$$(\Delta x)_{min} = \hbar\sqrt{\beta} \tag{2.4}$$

olarak elde edilir. Denklem (2.2)'de verilen operatörlerin yardımıyla iki dalga fonksiyonunun iç çarpımı için aşağıdaki ilişki tanımlanır,

$$<\phi|\Psi>=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp}{(1+\beta p^2)^{1-\frac{\gamma}{\beta}}}\phi^*(p)\Psi(p). \quad (2.5)$$

En genel haliyle vektör ve skaler potansiyellerle birlikte DKP denklemi denklem (2.2) 3. bölüm ve 4. bölümlerde spin-0 ve spin-1 çözümleri için kullanılarak enerji özdeğeri elde edilecektir.

## 2.2. Minimum Uzunluk Altında DKP Denklemi

Minimum uzunluk altında DKP denklemi normal formu ile aynıdır. Fakat sadece DKP denkleminde kullanılacak konum ve momentum yerine denklem (2.2)' de verilen konum ve momentum operatörleri kullanılır. En genel haliyle serbest DKP denklemi

$$\lfloor c\beta p+mc^2\rfloor\Psi=i\hbar\beta_0^0\Psi. \quad (2.6)$$

şeklinde verilir. Denklemde bulunan matrisler aşağıda tanımlanan DKP cebrini sağlar,

$$\beta^\mu\beta^\nu\beta^\lambda+\beta^\lambda\beta^\nu\beta^\mu=g^{\mu\nu}\beta^\lambda+g^{\nu\lambda}\beta^\mu,\quad(\mu,\nu,\lambda=0,1) \quad (2.7)$$

burada kullanılan $g^{\mu\nu}$ Minkowski metriğidir. Spin-0 durumunda $\beta^\mu$ matrisleri $5\times 5$ boyutundadır ve spin-1 durumunda $\beta^\mu$ matrisleri $10\times 10$ boyutundadır.

Kütlesi m olan serbest parçaçığın skaler veya vektör bozonu için DKP denklemi aşağıdaki gibidir,

$$(\beta^1 pc+mc^2+U_s+\beta^0U_v)\Psi(p)=\beta^0E\Psi(p). \quad (2.8)$$

Denklemdeki $\beta$ matrisleri

$$\beta^0=\begin{pmatrix}\Theta & \bar{0}\\ \bar{0}_T & \mathbf{0}\end{pmatrix},\beta^i=\begin{pmatrix}\hat{0} & \rho^i\\ -\rho_T^i & 0\end{pmatrix} \quad (2.9)$$

olarak verilirler ve burada $\hat{0},\bar{0},\mathbf{0}$ sırasıyla $2\times 2, 2\times 3, 3\times 3$ sıfır matrisleri

$$\Theta=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\rho^1=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\rho^2=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\rho^3=\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \quad (2.10)$$

şeklindedir. Denklem (2.8)'i sağlayan $\psi(p)$ spin-0 durumu için 5 bileşenli spin-1 durumu için 10 bileşenlidir.

$$\left(c\beta.\mathbf{p}+mc^2+U_s+\beta^0.U_v^0\right)\psi(\mathbf{p})=\beta^0E\psi(\mathbf{p}) \tag{2.11}$$

DKP denkleminde skaler ve vektörel potansiyeller için spin-0 için durumunda lineer potansiyeller aşağıdaki gibidir

$$U_s=S(x)=\lambda x,\ \ U_v=V(x)=kx \tag{2.12}$$

burada konum operatörünü denklem (2.2)'de verildiği gibi

$$X=i\hbar\left[(1+\alpha p^2)\frac{\partial}{\partial_p}+\gamma p\right] \tag{2.13}$$

olarak alınacaktır. Beş bileşenli dalga fonksiyonu

$$\Psi(p)^T=(n_1,n_2,n_3,n_4,n_5), \tag{2.14}$$

şeklindedir. Dalga fonksiyonu (2.11) denkleminde verilen lineer diferansiyel denkleminde S=0 için matrisi yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}&\left[\begin{pmatrix}0 & \rho^i\\ -\rho_T^i & 0\end{pmatrix}pc+mc^2+i\hbar\lambda\left[(1+\alpha p^2)\frac{\partial}{\partial p}+\gamma p\right]\right.\\ &\left.+\begin{pmatrix}\Theta & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\left(i\hbar k\left[(1+\alpha p^2)\frac{\partial}{\partial p}+\gamma p\right]-E\right)\right]\Psi(p)=0\end{aligned} \tag{2.15}$$

elde edilir. Matrisler açık olarak yazıldığında aşağıdaki denklem elde edilir,

$$\begin{aligned}&\left[\begin{pmatrix}0&0&-1&0&0\\0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}pc+mc^2+i\hbar\lambda\left[(1+\alpha p^2)\frac{\partial}{\partial p}+\gamma p\right]\right.\\ &\left.+\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\left(i\hbar k\left[(1+\alpha p^2)\frac{\partial}{\partial p}+\gamma p\right]-E\right)\right]\Psi(p)=0\end{aligned} \tag{2.16}$$

Matris işlemleri yapıldığında

$$\left[\begin{pmatrix}-pcn_3\\0\\pcn_1\\0\\0\end{pmatrix}+mc^2\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\\n_4\\n_5\end{pmatrix}+\lambda x\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\\n_4\\n_5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}kxn_2\\kxn_1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}En_2\\En_1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \tag{2.17}$$

bulunur. Denklem (2.17)' den yararlanılarak beş lineer diferansiyel denklem elde edilir. Bu denklemler aşağıda verildiği gibidir,

$$-pcn_3 + mc^2 n_1 + \lambda x n_1 + k x n_2 = E n_2, \quad (2.18a)$$

$$mc^2 n_2 + \lambda x n_2 + k x n_1 = E n_1, \quad (2.18b)$$

$$pcn_1 + mc^2 n_3 + \lambda x n_3 = 0, \quad (2.18c)$$

$$mc^2 n_4 + \lambda x n_4 = 0, \quad (2.18d)$$

$$mc^2 n_5 + \lambda x n_5 = 0. \quad (2.18e)$$

Elde edilen beş lineer denklemi çözmek için düzenlemeler yapılırsa, lineer denklemler

$$pcn_1 + (mc^2 + \lambda x) n_3 = 0, \quad (2.19a)$$

$$(mc^2 + \lambda x) n_2 = (E - kx) n_1, \quad (2.19b)$$

$$-pcn_3 + (mc^2 + \lambda x) n_1 = (E - kx) n_2, \quad (2.19c)$$

$$(mc^2 + \lambda x) n_4 = 0, \quad (2.19d)$$

$$(mc^2 + \lambda x) n_5 = 0. \quad (2.19e)$$

halini alır. Denklem (2.19d) ve (2.19e) yardımıyla $n_4 = 0$ ve $n_5 = 0$ bulunur. Diğer üç denklem ise lineer bağımlı bir yapıya sahiptir. Bu nedenle $n_2$ ve $n_3$ bileşenleri $n_1$ cinsinden ifade edilecektir. Denklem (2.19a) kullanılarak $n_3$' ün değeri aşağıdaki gibi bulunur,

$$n_3 = -\frac{pc}{mc^2 + \lambda x} n_1. \quad (2.20)$$

Benzer olarak (2.19b) denklemi kullanılarak $n_2$ için aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$n_2 = \left(\frac{E - kx}{mc^2 + \lambda x}\right) n_1. \quad (2.21)$$

Denklem (2.20) ve (2.21)'de bulunan değerler (2.19c) denkleminde yerine yazılırsa

$$[p^2c^2 + (mc^2 + \lambda x)^2 - (E - kx)^2] n_1 = 0 \quad (2.22)$$

elde edilir. Minimal uzunluk ifadesini ekleyebilmek için (2.22) denkleminde konum operatörü yerine (2.13) denklemindeki değeri yerine yazılırsa aşağıdaki denklem bulunur,

$$\left[p^2c^2 + (mc^2 + i\hbar\lambda[(1 + \alpha p^2)\frac{\partial}{\partial p} + \gamma p])^2 - (E - i\hbar k[(1 + \alpha p^2)\frac{\partial}{\partial p} + \gamma p])^2\right] n_1 = 0 \quad (2.23)$$

Denklem (2.23) oldukça karmaşık bir yapıya sahiptir. Bu nedenle literatürdeki çalışmalara benzer olarak $\gamma = 0$ alınarak daha basit bir denklem elde edilebilir. Böylece diferansiyel denklem daha basit bir yapıda ifade edilebilir. $\gamma = 0$ alınarak ve biraz düzenleme yapılarak aşağıdaki denklem kolaylıkla bulunur,

$$\Big[p^2c^2 + m^2c^4 + 2i\hbar(\lambda mc^2 + kE)[(1+\alpha p^2\frac{\partial}{\partial p})]$$
$$-\hbar^2(\lambda^2 - k^2)[(1+\alpha p^2\frac{\partial}{\partial p})]^2\Big] n_1 = 0. \quad (2.24)$$

Diferansiyel denklemi çözmek için denklem (2.24)'de değişken dönüşümü aşağıdaki gibi seçilebilir.

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\arctan(\sqrt{\alpha}p) \quad (2.25)$$

Denklemde $\rho$ dönüşümü yapılırsa, ikinci mertebeden diferansiyel denklem

$$\left[\frac{\tan^2(\sqrt{\lambda}p)c^2}{\alpha} + mc^2 - E^2 + 2i\hbar(mc^2\lambda + Ek)\frac{d^2}{d\rho^2} - \hbar^2(\lambda^2 - k^2)\frac{d}{d\rho}\right] n_1 = 0 \quad (2.26)$$

olarak bulunur. Denklemde düzenlemeler yapılırsa aşağıdaki denklem elde edilir,

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{2i\hbar(mc^2\lambda + Ek)}{\hbar^2(\lambda^2 - k^2)}\frac{d}{d\rho} - \frac{c^2tan^2(\sqrt{\alpha}\rho)}{\hbar^2\alpha}(\lambda^2 - k^2) - \frac{m^2c^4 - E^2}{\hbar^2(\lambda^2 - k^2)}\right] n_1 = 0. \quad (2.27)$$

İşlem kolaylığı olması için bazı kısaltmalar yapılabilir ve kısaltmalar,

$$\varepsilon = \frac{m^2c^4 - E^2}{\hbar^{2\alpha}(\lambda^2 - k^2)}, \quad \theta = \frac{mc^2\lambda + Ek}{\hbar\sqrt{\alpha}(\lambda^2 - k^2)}, \quad \delta = \frac{c}{\hbar\alpha\sqrt{(\lambda^2 - k^2)}} \quad (2.28)$$

olarak tanımlanmıştır. Kısaltmalar kullanılarak denklem (2.27)aşağıdaki şekli alır,

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2} - 2i\theta\sqrt{\alpha}\frac{d}{d\rho} - \alpha\delta^2tan^2(\sqrt{\alpha}\rho) - \alpha\varepsilon\right] n_1(\rho) = 0. \quad (2.29)$$

Denklem (2.29)'un çözümü için uygun dalga fonksiyonunun seçilmesidir. Dalga fonksiyonu seçiminde en önemli özellik fiziksel olmasıdır. Yani $p \to 0$ ve $p \to \infty$ durumlarında dalga fonksiyonu sonlu olmalıdır. $\rho(p \to 0)$ ve $\rho(p \to \infty)$ durumlarında $\rho$ sonlu yani $n_1$ sonlu kalmalıdır. Bu durumda $n_1$ için aşağıdaki gibi seçilebilir.

$$n_1 = e^{i\theta\sqrt{\alpha}\rho}f_n(\rho) \quad (2.30)$$

Denklem (2.29)' da dalga fonksiyonu kullanılırsa, diferansiyel denklem

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + (\theta^2\alpha - \alpha\varepsilon) - (\alpha\delta^2tan^2(\sqrt{\alpha}\rho))\right] f_n(\rho) = 0 \quad (2.31)$$

olarak elde edilir. Denklem (2.31) bilinen bir diferansiyel denklem formunda değildir. Bu nedenle $f_n(\rho)$ fonksiyonu için

$$f_n(\rho) = cos^{\nu}(\sqrt{\alpha}\rho)\varepsilon_n(\rho) \tag{2.32}$$

tanımlanırsa ve denklem (2.31) de kullanılırsa, diferansiyel denklem aşağıdaki gibi elde edilir

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} - 2\nu\sqrt{\alpha}tan(\sqrt{\alpha}\rho)\frac{\partial}{\partial\rho} + \alpha[\nu(\nu-1) - \delta^2]tan^2(\sqrt{\alpha}\rho) + \alpha(\theta^2 - \varepsilon - \nu)\right]\varepsilon_n(\rho) = 0. \tag{2.33}$$

Denklem (2.33)' in üçüncü terimi için

$$\nu(\nu-1) - \delta^2 = 0, \tag{2.34}$$

$$\nu = \frac{(1+\sqrt{1+4\delta^2})}{2} \tag{2.35}$$

alınarak $\tan^2\sqrt{\alpha}\rho$ terimi yok edilir ve denklem (2.34) yardımıyla $\nu$ ve $\delta$ arasında bir ilişki kurulmuş olur. Bu durumda denklem (2.33) aşağıdaki gibi elde edilir,

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} - 2\nu\sqrt{\alpha}tan(\sqrt{\alpha}\rho)\frac{\partial}{\partial\rho} + \alpha(\theta^2 - \varepsilon - \nu)\right]\varepsilon_n(\rho) = 0. \tag{2.36}$$

Denklemin bilindik diferansiyel denklem formuna çevrilmesi için aşağıdaki değişken dönüşümü tanımlansın

$$z = sin(\sqrt{\alpha}\rho). \tag{2.37}$$

Denklem (2.37)'nın denklem (2.36)'da kullanılmasıyla aşağıdaki bilindik denklem elde edilir

$$\left[(1-z^2)\frac{d^2}{dz^2} - (1+2\nu)z\frac{d}{dz} + (\theta^2 - \varepsilon - \nu)\right]\varepsilon_n(\rho) = 0. \tag{2.38}$$

Bulunan denklem aşağıdaki Gegenbauer diferansiyel denklemine benzemektedir.

$$\left[(1-z^2)\frac{d^2}{dz^2} - (1+2\nu)z\frac{d}{dz} + n'(n'+2\nu)\right]\varepsilon_n(\rho) = 0. \tag{2.39}$$

Bulunan (2.38) denklemi Gegenbauer diferansiyel denklemine benzediğinden dolayı (2.38) denkleminin 3. terimi ile Gegenbauer diferansiyel denkleminin 3. terimi arasında aşağıdaki gibi bir bağlantı kurulur ve gerekli işlemler yapılarak enerji özdeğeri elde edilir.

$$\theta^2 - \varepsilon - \nu = n'(n' + 2\nu) \tag{2.40}$$

Aşağıdaki kısaltmalar kullanılarak

$$\varepsilon = \frac{m^2c^4 - E^2}{\hbar^2\alpha(\lambda^2 - k^2)}, \quad \theta = \frac{mc^2\lambda + Ek}{\hbar\sqrt{\alpha}(\lambda^2 - k^2)}, \quad \delta = \frac{c}{\hbar\alpha\sqrt{(\lambda^2 - k^2)}} \tag{2.41}$$

ve denklem (2.35) kullanılarak denklem

$$\nu = \frac{1 + \sqrt{1 + 4(\frac{c}{\hbar\alpha\sqrt{\lambda^2 - k^2}}^2)}}{2} \tag{2.42}$$

halini alır. Bu durumda denklem (2.40) deki eşitlikte verilen değerler yerine yazılırsa

$$\frac{(mc^2\lambda + Ek)^2}{\hbar^2\alpha(\lambda^2 - k^2)^2} - \frac{m^2c^4 - E^2}{\hbar^2\alpha(\lambda^2 - k^2)} - \frac{1 + \sqrt{1 + 4(\frac{c}{\hbar\alpha\sqrt{\lambda^2 - k^2}})^2}}{2}$$
$$= n'(n' + 2(\frac{1 + \sqrt{1 + 4(\frac{c}{\hbar\alpha\sqrt{\lambda^2 - k^2}})^2}}{2}) \tag{2.43}$$

halini alır. Denklemlerde biraz düzenleme yapılırsa,

$$\frac{(mc^2\lambda + Ek)^2}{\hbar^2\alpha(\lambda^2 - k^2)^2} - \frac{m^2c^4 - E^2}{\hbar^2\alpha(\lambda^2 - k^2)} - (\frac{1}{2} + n')\sqrt{1 + \frac{4c^2}{\hbar^2\alpha^2(\lambda^2 - k^2)^2}} = n'^2 + \frac{2n' + 1}{2} \tag{2.44}$$

elde edilir. Denklemin sol tarafı aynı paydada toplanırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir,

$$\frac{(mc^2\lambda + Ek)^2 - (m^2c^4 - E^2)(\lambda^2 - k^2)}{\hbar^2\alpha(\lambda^2 - k^2)^2} - (\frac{1}{2} + n')\sqrt{1 + \frac{4c^2}{\hbar^2\alpha^2(\lambda^2 - k^2)^2}} =$$
$$n'^2 + \frac{2n' + 1}{2}. \tag{2.45}$$

Enerjiyi bulabilmek için denklem (2.45) den yararlanılacaktır ve bir dizi işlem yapılacaktır. Denklem (2.45) de payda eşitlemesi yapılırsa

$$\frac{[(mc^2\lambda + Ek)^2 - (m^2c^4 - E^2)(\lambda^2 - k^2) - (\frac{1}{2} + n')\hbar(\lambda^2 - k^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\hbar^2\alpha^2(\lambda^2 - k^2) + 4c^2}]}{\hbar^2\alpha(\lambda^2 - k^2)^2}$$
$$= n'^2 + \frac{2n' + 1}{2}, \tag{2.46}$$

Enerji ifadesini elde edebilmek için bazı işlemler yapılırsa

$$
\begin{aligned}
(mc^2\lambda+Ek)^2-(m^2c^4 &- E^2)(\lambda^2-k^2)-(\frac{1}{2}+n')\hbar(\lambda^2-k^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\hbar^2\alpha^2(\lambda^2-k^2)+4c^2} \\
&= n'^2\hbar^2\alpha(\lambda^2-k^2)^2+\hbar^2\alpha(n'+\frac{1}{2})(\lambda^2-k^2)^2, \qquad (2.47)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(mc^2\lambda+Ek)^2 &- (m^2c^4-E^2)(\lambda^2-k^2)-(\frac{1}{2}+n')\hbar(\lambda^2-k^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\hbar^2\alpha^2(\lambda^2-k^2)+4c^2} \\
&= \hbar^2\alpha(n'^2+n')(\lambda^2-k^2)^2+\frac{\hbar^2\alpha}{2}(\lambda^2-k^2)^2. \qquad (2.48)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(mc^2\lambda+Ek)^2 &- (m^2c^4-E^2)(\lambda^2-k^2)-(\frac{1}{2}+n')\hbar(\lambda^2-k^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\hbar^2\alpha^2(\lambda^2-k^2)+4c^2} \\
&= (n'^2+n'+\frac{1}{4})\hbar^2\alpha(\lambda^2-k^2)^2+\frac{\hbar^2\alpha}{4}(\lambda^2-k^2)^2. \qquad (2.49)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Denklem (2.49) de denklem (2.50) tanımı yapılır ve kullanılırsa

$$
n'^2+n'+\frac{1}{4}=n^2 \qquad (2.50)
$$

alırsak,

$$
\begin{aligned}
(mc^2\lambda+Ek)^2-(m^2c^4-E^2)(\lambda^2-k^2) &- (\frac{1}{2}+n')\hbar(\lambda^2-k^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\hbar^2\alpha^2(\lambda^2-k^2)+4c^2} \\
&= n^2\hbar^2\alpha(\lambda^2-k^2)^2+\frac{\hbar^2\alpha}{4}(\lambda^2-k^2)^2 \qquad (2.51)
\end{aligned}
$$

denklemi elde edilmiş olur. Hâlâ enerjiyi açık bir şekilde elde edilememiştir. Denklem (2.51) düzenlenerek

$$
\begin{aligned}
& m^2c^4\lambda^2+2mc^2E\lambda k+E^2k^2-m^2c^4\lambda^2+m^2c^4k^2+E^2\lambda^2-E^2k^2 \\
& -(\frac{1}{2}+n')\hbar(\lambda^2-k^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\hbar^2\alpha^2(\lambda^2-k^2)+4c^2}=n^2\hbar^2\alpha(\lambda^2-k^2)^2+\frac{\hbar^2\alpha}{4}(\lambda^2-k^2)^2 \qquad (2.52)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(mc^2k+E\lambda)^2-(\frac{1}{2}+n')\hbar(\lambda^2-k^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\hbar^2\alpha^2(\lambda^2-k^2)+4c^2} \\
=n^2\hbar^2\alpha(\lambda^2-k^2)^2+\frac{\hbar^2\alpha}{4}(\lambda^2-k^2)^2. \qquad (2.53)
\end{aligned}
$$

$$
n'+\frac{1}{2}=n \qquad (2.54)
$$

(2.54)'de yapılan tanımlama denklem (2.53) de kullanılırsa ve gerekli matematiksel işlemler yapılırsa

$$
\begin{aligned}
(mc^2k+E\lambda)^2-n\hbar(\lambda^2-k^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\hbar^2\alpha^2(\lambda^2-k^2)+4c^2} \\
=n^2\hbar^2\alpha(\lambda^2-k^2)^2+\frac{\hbar^2\alpha}{4}(\lambda^2-k^2)^2 \qquad (2.55)
\end{aligned}
$$

$$(mc^2k+E\lambda)^2$$

$$=n\hbar(\lambda^2-k^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\hbar^2\alpha^2(\lambda^2-k^2)+4c^2}+n^2\hbar^2\alpha(\lambda^2-k^2)^2+\frac{\hbar^2\alpha}{4}(\lambda^2-k^2)^2. \quad (2.56)$$

elde edilir. Denklem (2.56) de enerji ifadesi yanlız bırakılırsa aşağıdaki gibi bulunur

$$E= -mc^2\frac{k}{\lambda}\pm\frac{\lambda^2-k^2}{\lambda}\left[n^2\hbar^2\alpha+\frac{\hbar^2\alpha}{4}+\frac{n\sqrt{\hbar^2\alpha^2(\lambda^2-k^2)+4c^2}}{\sqrt{\lambda^2-k^2}}\right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.57)$$

DKP denkleminde minimal uzunluğun katkısı spin-0 için (1+1) boyutta lineer vektör ve skaler potansiyel için hesaplanmıştır. Hesaplama sırasında potansiyel trigonometrik bir potansiyele dönüştürülmüştür. $\tan^2(\sqrt{\alpha}p)$ potansiyel sorunu değişken değişimi yapılarak giderilmiştir. Bu potansiyel yüksek enerji durumları için $\pm\frac{\pi}{2}\sqrt{\alpha}$ kare sınırları içine yerleştirilmiştir. Enerji n ile artar ve n ile artan enerji özdeğerindeki sapma $n^2$ bağımlı teriminin katkısını gösterir. Bu katkı yüksek enerji alanında kısıtlamayı ve iyi bilinen görecelik teorisini açıklamaktadır. Uzay deformasyonu fiziksel sonuçları etkiler. Ayrıca enerji özdeğerinin diğer bir özelliği ise büyük n değerleri için enerji aralığı süreklidir. Dolayısıyla bizim sorunumuz büyük n için $\sqrt{\alpha}|\frac{(\lambda^2-k^2)}{\lambda}|$ frekansı ile göreli olmayan harmonik osilatörü tarif edilebilir. Enerji spekturumu $\alpha$ parametresi ile doğru orantılıdır ve enerjiye minimum katkı sağlamıştır. Enerjiyi artırıcı bir etkisi vardır. Skaler ve vektörel katkılar aynı ise enerjinin katkısı ayırtedilemez. $n=0$ olduğu durumda da minimum uzunluk altında enerji bulunmaktadır. Son olarak limit $\alpha=0$ iken enerji spektrumunu azaltır.

# 3. BÖLÜM

## DKP DENKLEMİNİN LİNEER POTANSİYEL ALTINDA SPİN-1 ÇÖZÜMLERİ

Bu bölümde minimal uzunluk altında DKP denkleminin lineer potansiyel sistemi spin-1 durumu için analitik olarak sistemi tanımlayan diferansiyel denklem elde edilecek ve ilgili dalga fonksiyonu kapalı formda verilecektir.

### 3.1. Minimum Uzunluk Altında DKP Denkleminin Spin-1 İçin İncelenmesi

Burada $\beta^{\mu}$ $(\mu = 0,1,2,3)$ iç değişkenlerdir. Spin-1 parçacıkları için $\beta^{\mu}$ $10 \times 10$ matrisleri olmak üzere, matrisler

$$\beta^{o} = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0}^{T} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \bar{0}^{T} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \bar{0}^{T} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad \beta^{i} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{0} & e_i & \bar{0} \\ \bar{0}^{T} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -is_i \\ -e_i & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 \\ \bar{0}^{T} & -is_i & \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

$$\bar{0} = (0\,0\,0), \quad e_1 = (1\,0\,0), \quad e_2 = (0\,1\,0), \quad e_3 = (0\,0\,1), \tag{3.2}$$

şeklindedir. Burada $S_i$ $3 \times 3$ spin-1 matrisleri aşağıda tanımlandığı gibidir,

$$s_1 = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad s_2 = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad s_3 = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

Birinci mertebeden göreli DKP denklemi skaler potansiyeli $U_s$ ve vektörel potansiyel $U_v$ ile birlikte aşağıdaki gibi verilir,

$$(\beta^{\backprime} pc + mc^2 + U_s + \beta^0 U_v)\Psi(p) = \beta^0 E \Psi(p). \tag{3.4}$$

DKP denkleminde skaler ve vöktörel potansiyeller için S=1 durumunda lineer potansiyeller aşağıda verildiği gibidir,

$$U_s = S(x) = \lambda x, \;\; U_v = V(x) = kx. \tag{3.5}$$

Konum operatörü aşağıdaki (3.6) eşitliğinde verildiği gibidir,

$$X = i\hbar\left[(1+\alpha p^2)\frac{\partial}{\partial_p}+\gamma p\right]. \tag{3.6}$$

10 bilinenli dalga fonksiyonu (3.7)' de verilmiştir.

$$\Psi(p)^T = (\varphi, A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3) \tag{3.7}$$

$S=1$ için $10\times 10$ matrisi denklem (3.4)' de yerine yazılırsa,

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & \bar{0} & e_i & \bar{0} \\ \bar{0}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -is_i \\ -e_i & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 \\ \bar{0}^T & -is_i & \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix} pc + mc^2 + \lambda x + \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0}^T & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \bar{0}^T & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \bar{0}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} kx\right]\Psi(p) = 0 \tag{3.8}$$

şeklini alır. Bulunan yeni eşitlikte (3.7)' de verilen dalga fonksiyonu yerine yazılırsa,

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & \bar{0} & e_i & \bar{0} \\ \bar{0}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -is_i \\ -e_i & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 \\ \bar{0}^T & -is_i & \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix} pc + mc^2 + \lambda x + \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0}^T & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \bar{0}^T & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \bar{0}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} kx\right]\begin{pmatrix} \varphi \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = 0 \tag{3.9}$$

(3.9) denklemi elde edilir. (3.9)'da gerekli işlemler yapılırsa,

$$\left[\begin{pmatrix} pcB_1 \\ \frac{-i\hbar pcC_2}{\sqrt{2}} \\ \frac{-i\hbar pc(C_1+C_3)}{\sqrt{2}} \\ \frac{-i\hbar pcC_2}{\sqrt{2}} \\ -pc\varphi \\ 0 \\ 0 \\ \frac{-i\hbar pcA_2}{\sqrt{2}} \\ \frac{-i\hbar pc(A_1+A_3)}{\sqrt{2}} \\ \frac{-i\hbar pcA_2}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + mc^2\begin{pmatrix} \varphi \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} + \lambda x\begin{pmatrix} \varphi \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ kxB_1 \\ kxB_2 \\ kxB_3 \\ kxA_1 \\ kxA_2 \\ kxA_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 \\ EB_1 \\ EB_2 \\ EB_3 \\ EA_1 \\ EA_2 \\ EA_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

sonucuna varılır. Bu eşitlikten ise 10 lineer denklem elde edilir. Bulunan lineer denklemler aşağıda gösterildiği gibidir,

$$pcB_1 + (mc^2 + \lambda x)\varphi = 0, \tag{3.11a}$$
$$-\frac{i\hbar pcC_2}{\sqrt{2}} + (mc^2 + \lambda x)A_1 = (E - kx)B_1, \tag{3.11b}$$
$$-\frac{i\hbar pc(C_1 + C_3)}{\sqrt{2}} + (mc^2 + \lambda x)A_2 = (E - kx)B_2, \tag{3.11c}$$
$$-\frac{i\hbar pcC_2}{\sqrt{2}} + (mc^2 + \lambda x)A_3 = (E - kx)B_3, \tag{3.11d}$$
$$-pc\varphi + (mc^2 + \lambda x)B_1 = (E - kx)A_1, \tag{3.11e}$$
$$(mc^2 + \lambda x)B_2 = (E - kx)A_2, \tag{3.11f}$$
$$(mc^2 + \lambda x)B_3 = (E - kx)A_3, \tag{3.11g}$$
$$-\frac{i\hbar pcA_2}{\sqrt{2}} + (mc^2 + \lambda x)C_1 = 0, \tag{3.11h}$$
$$-\frac{i\hbar pc(A_1 + A_3)}{\sqrt{2}} + (mc^2 + \lambda x)C_2 = 0, \tag{3.11i}$$
$$-\frac{i\hbar pcA_2}{\sqrt{2}} + (mc^2 + \lambda x)C_3 = 0. \tag{3.11j}$$

Bulunan 10 lineer denklemde aşağıdaki kısaltmalar yapılırsa,

$$\varphi^T = (A_2, A_3, B_1) \ \Phi^T = (B_2, B_3, A_1) \ \Theta^T = (C_3, -C_2, \phi) \tag{3.12}$$

Bulunan 10 lineer denklemlerde kısaltmaları uygulayabilmek için uygun gruplandırma işlemi yapılırsa,

$$pcB_1 + (mc^2 + \lambda x)\phi = 0, \tag{3.13a}$$
$$-\frac{i\hbar pc(A_1 + A_3)}{\sqrt{2}} + (mc^2 + \lambda x)C_2 = 0, \tag{3.13b}$$
$$-\frac{i\hbar pcA_2}{\sqrt{2}} + (mc^2 + \lambda x)C_3 = 0. \tag{3.13c}$$

$$-\frac{i\hbar pc(C_1 + C_3)}{\sqrt{2}} + (mc^2 + \lambda x)A_2 = (E - kx)B_2, \tag{3.14a}$$
$$-\frac{i\hbar pcC_2}{\sqrt{2}} + (mc^2 + \lambda x)A_3 = (E - kx)B_3, \tag{3.14b}$$
$$-pc\phi + (mc^2 + \lambda x)B_1 = (E - kx)A_1. \tag{3.14c}$$

$$-\frac{i\hbar pcC_2}{\sqrt{2}} + (mc^2 + \lambda x)A_1 = (E - kx)B_1, \tag{3.15a}$$
$$(mc^2 + \lambda x)B_2 = (E - kx)A_2, \tag{3.15b}$$
$$(mc^2 + \lambda x)B_3 = (E - kx)A_3. \tag{3.15c}$$

$$-\frac{i\hbar pcA_2}{\sqrt{2}}+(mc^2+\lambda x)C_1 = 0. \tag{3.16}$$

elde edilir. Yapılan gruplandırmalarda

$$\varphi^T=(A_2,A_3,B_1)\ \Phi^T=(B_2,B_3,A_1)\ \Theta^T=(C_3,-C_2,\phi) \tag{3.17}$$

kısaltmalarını yapılırsa, aşağıdaki lineer denklemler elde edilir.

$$pc\varphi+(mc^2+\lambda x)\Theta = 0, \tag{3.18}$$

$$(mc^2+\lambda x)\Phi = (E-kx)\varphi, \tag{3.19}$$

$$-pc\Theta+(mc^2+\lambda x)\varphi = (E-kx)\Phi. \tag{3.20}$$

Üç lineer deklemi tek lineer denkleme indirmek için denklem (3.18)'da $\Theta$ değeri (3.19)'de $\Phi$ yalnız bıraklılrsa ve yalnız bırakılan ifadeleri denklem (3.20) de yerine yazılırsa üç lineer denklem tek lineer denkleme indirgenir. (3.18), (3.19) ve (3.20) denklemlerinde gerekli işlemler yapılarak aşağıdaki denklem elde edilir,

$$[p^2c^2+(mc^2+\lambda x)^2-(E-kx)^2]\varphi=0. \tag{3.21}$$

Bulunan lineer denklem denklem (3.6)'da kullanılarak aşağıdaki denklem elde edilir

$$p^2c^2+(mc^2+i\hbar\lambda[(1+\alpha p^2)\frac{\partial}{\partial p}+\gamma p])^2-(E-i\hbar\hbar k[(1+\alpha p^2)\frac{\partial}{\partial p}+\gamma p])^2\phi=0 \tag{3.22}$$

Bulunan yeni denklem çok karmaşık bir yapıya sahip olduğu için literatürdeki çalışmalara benzer olarak $\gamma=0$ alınır. Böylelikle denklem karmaşasından kurtulmuş olunur ve işlemler yapılırsa aşağıdaki denklem elde edilir. Bulunan yeni denklemi çözmek için $\rho$ dönüşümü yapılırsa,

$$\left[\frac{\tan^2(\sqrt{\lambda}p)c^2}{\alpha}+mc^2-E^2+2i\hbar(mc^2\lambda+Ek)\frac{d^2}{d\rho^2}-\hbar^2(\lambda^2-k^2)\frac{d}{d\rho}\right]\phi=0 \tag{3.23}$$

elde edilir. Bulunan yeni denklemde,

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\arctan(\sqrt{\alpha}p) \tag{3.24}$$

dönüşümü yapılırsa yeni denklem ikinci dereceden diferansiyel denklem olarak bulunur

$$\left[p^2c^2+m^2c^4-E^2+2i\hbar(mc^2\lambda+Ek)\frac{d}{d\rho}-\hbar^2(\lambda^2-k^2)\frac{d^2}{d\rho^2}\right]\phi=0. \tag{3.25}$$

Denklem düzenlendiğinde aşağıdaki denklem elde edilir,

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2}-\frac{2i\hbar(mc^2\lambda+Ek)}{\hbar^2(\lambda^2-k^2)}\frac{d}{d\rho}-\frac{c^2\tan^2(\sqrt{\alpha}\rho)}{\hbar^2(\lambda^2-k^2)}-\frac{m^2c^4-E^2}{\hbar^2(\lambda^2-k^2)}\right]\phi=0 \tag{3.26}$$

işlem kolaylığı olması için (3.26) denkleminde aşağıdaki gibi kısaltmalar yapılırsa,

$$\varepsilon=\frac{m^2c^4-E^2}{\hbar^{2\alpha}(\lambda^2-k^2)},\quad \theta=\frac{mc^2\lambda+Ek}{\hbar\sqrt{\alpha}(\lambda^2-k^2)},\quad \delta=\frac{c}{\hbar\alpha\sqrt{(\lambda^2-k^2)}} \tag{3.27}$$

ve kısaltmalar denklem (3.26)da kullanılırsa denklem (3.28) elde edilir,

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2}-2i\theta\sqrt{\alpha}\frac{d}{d\rho}-\alpha\delta^2\tan^2(\sqrt{\alpha}\rho)-\alpha\varepsilon\right]\phi=0. \tag{3.28}$$

(3.28) denklemini çözebilmek için uygun bir dalga fonksiyonu seçilmelidir. Dalga fonksiyonunun fiziksel olması gerektiği için (3.29)'deki gibi seçilir. Denklemin fiziksel olması demek $p\to 0$ ve $p\to\infty$ durumunda dalga fonksiyonu sonlu olmasıdır. Dalga fonksiyonu aşağıdaki gibi alınabilir.

$$\phi(\rho)=e^{i\theta\sqrt{\alpha}\rho}f_n(\rho) \tag{3.29}$$

Seçilen dalga fonksiyonu ile (3.28) denkleminde değişken dönüşümü yapılırsa,

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+(\theta^2\alpha-\alpha\varepsilon)-(\alpha\delta^2\tan^2(\sqrt{\alpha}\rho)\right]f_n(\rho)\;=\;0. \tag{3.30}$$

bulunur. Bulunan denklem bilinen formatta olmadığı için,

$$f_n(\rho)\;=\;\cos^{\nu}(\sqrt{\alpha}\rho)\varepsilon_n(\rho) \tag{3.31}$$

(3.30) denkleminde tekrar bir dönüşüm yapılırsa,

$$\begin{aligned}\Bigg[\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}-2\nu\sqrt{\alpha}\tan(\sqrt{\alpha}\rho)\frac{\partial}{\partial\rho}\;&+\;\alpha[\nu(\nu-1)-\delta^2]\tan^2(\sqrt{\alpha}\rho)\\ &+\;\alpha(\theta^2-\varepsilon-\nu)\Bigg]\varepsilon_n(\rho)=0\end{aligned} \tag{3.32}$$

Yeni denklem yukarıda verildiği gibi bulunur. Bulunan (3.32) denkleminde üçüncü terim

$$\nu(\nu-1)-\delta^2=0 \tag{3.33}$$

$$\nu = \frac{(1+\sqrt{1+4\delta^2})}{2} \tag{3.34}$$

şeklinde alınarak yok edilir ve bu ifade ile $\nu$ ve $\delta$ arasında bir bağlantı kurulmuş olur. Denklemde üçüncü terim yok edildiğinde yeni denklem (3.35) verildiği gibi bulunur

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} - 2\nu\sqrt{\alpha}\tan(\sqrt{\alpha}\rho)\frac{\partial}{\partial\rho} + \alpha(\theta^2 - \varepsilon - \nu)\right]\varepsilon_n(\rho) = 0. \tag{3.35}$$

Bulunan son denklemin bilinen forma gelmesi için aşağıdaki değişken dönüşümü yapılır,

$$z = \sin(\sqrt{\alpha}\rho) \tag{3.36}$$

(3.36)'de tanımlanan dönüşümün (3.35) denkleminde kullanılmasıyla

$$\left[(1-z^2)\frac{d^2}{dz^2} - (1+2\nu)z\frac{d}{dz} + (\theta^2 - \varepsilon - \nu)\right]\varepsilon_n(\rho) = 0 \tag{3.37}$$

(3.37) denklemi kolaylıkla elde edilir. Elde edilen (3.37) denklemi aşağıda verilen Gegenbauer diferansiyel denklem yapısındadır.

$$\left[(1-z^2)\frac{d^2}{dz^2} - (1+2\nu)z\frac{d}{dz} + n'(n'+2\nu)\right]\varepsilon_n(\rho) = 0. \tag{3.38}$$

Elde edilen (3.37) denklemi Gegenbauer yapısında olduğunda dolayı (3.37) denkleminin 3. terimi ile Gegenbauer diferansiyel denkleminin 3. terimi arasında aşağıdaki gibi bir bağlantı kurulur ve gerekli işlemler yapılarak enerji kolaylıkla bulunur.

$$\theta^2 - \varepsilon - \nu = n'(n'+2\nu), \tag{3.39}$$

Daha önce elde edilen aşağıdaki kısaltmalar aşağıdaki gibidir.

$$\varepsilon = \frac{m^2c^4 - E^2}{\hbar^{2\alpha}(\lambda^2 - k^2)}, \quad \theta = \frac{mc^2\lambda + Ek}{\hbar\sqrt{\alpha}(\lambda^2 - k^2)}, \quad \delta = \frac{c}{\hbar\alpha\sqrt{(\lambda^2 - k^2)}} \tag{3.40}$$

(3.34) denkleminde (3.40) de verilen kısalmalar yerine yazılarak işlemler yapılır.

$$\nu = \frac{1 + \sqrt{1 + 4(\frac{c}{\hbar\alpha\sqrt{\lambda^2 - k^2}}^2)}}{2} \tag{3.41}$$

$$\frac{(mc^2\lambda + Ek)^2}{\hbar^2\alpha(\lambda^2 - k^2)} - \frac{m^2c^4 - E^2}{\hbar^2\alpha(\lambda^2 - k^2)} - \frac{1 + \sqrt{1 + 4(\frac{c}{\hbar\alpha\sqrt{\lambda^2 - k^2}})^2}}{2}$$
$$= n'(n' + 2(\frac{1 + \sqrt{1 + 4(\frac{c}{\hbar\alpha\sqrt{\lambda^2 - k^2}})^2}}{2})) \tag{3.42}$$

Yeni denklem yukarıdaki gibi olur. Gerekli işlemler yapılırsa,

$$\frac{(mc^2\lambda+Ek)^2}{\hbar^2\alpha(\lambda^2-k^2)}-\frac{m^2c^4-E^2}{\hbar^2\alpha(\lambda^2-k^2)}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{4c^2}{\hbar^2\alpha^2(\lambda^2-k^2)}}$$
$$=n'^2+n'+n'\sqrt{1+1+\frac{4c^2}{\hbar^2\alpha^2(\lambda^2-k^2)}}, \quad (3.43)$$

(3.43) denklemi elde edilir. Elde edilen yeni denklemde kareköklü ifadeyi aynı tarafa alınıp işlem yapılırsa,

$$\frac{(mc^2\lambda+Ek)^2}{\hbar^2\alpha(\lambda^2-k^2)}-\frac{m^2c^4-E^2}{\hbar^2\alpha(\lambda^2-k^2)}-(\frac{1}{2}+n')\sqrt{1+\frac{4c^2}{\hbar^2\alpha^2(\lambda^2-k^2)}}=n'^2+\frac{2n'+1}{2}, \quad (3.44)$$

Yeni denklem (3.44) şeklinde olur. (3.44) denkleminin sağ tarafı aynı paydada toplanırsa (3.45) denklemi bulunur

$$\frac{[(mc^2\lambda+Ek)^2-(m^2c^4-E^2)(\lambda^2-k^2)-(\frac{1}{2}+n')\hbar(\lambda^2-k^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\hbar^2\alpha^2(\lambda^2-k^2)+4c^2}]}{\hbar^2\alpha(\lambda^2-k^2)^2}$$
$$=n'^2+\frac{2n'+1}{2}. \quad (3.45)$$

Enerjiyi bulabilmek için (3.45) denkleminde gerekli işlemler yapılırsa,

$$\begin{aligned}(mc^2\lambda+Ek)^2 &- (m^2c^4-E^2)(\lambda^2-k^2)-(\frac{1}{2}+n')\hbar(\lambda^2-k^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\hbar^2\alpha^2(\lambda^2-k^2)+4c^2}\\ &= n'^2\hbar^2\alpha(\lambda^2-k^2)^2+\hbar^2\alpha(n'+\frac{1}{2})(\lambda^2-k^2)^2, \quad (3.46)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(mc^2\lambda+Ek)^2 &- (m^2c^4-E^2)(\lambda^2-k^2)-(\frac{1}{2}+n')\hbar(\lambda^2-k^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\hbar^2\alpha^2(\lambda^2-k^2)+4c^2}\\ &= \hbar^2\alpha(n'^2+n')(\lambda^2-k^2)^2+\frac{\hbar^2\alpha}{2}(\lambda^2-k^2)^2, \quad (3.47)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(mc^2\lambda+Ek)^2 &- (m^2c^4-E^2)(\lambda^2-k^2)-(\frac{1}{2}+n')\hbar(\lambda^2-k^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\hbar^2\alpha^2(\lambda^2-k^2)+4c^2}\\ &= (n'^2+n'+\frac{1}{4})\hbar^2\alpha(\lambda^2-k^2)^2+\frac{\hbar^2\alpha}{4}(\lambda^2-k^2)^2. \quad (3.48)\end{aligned}$$

bulunur.

$$n'^2+n'+\frac{1}{4}=n^2 \quad (3.49)$$

Bulunan (3.48) denkleminde işlem kolaylığı olması için yukarıdaki kısaltma yapılırsa,

$$\begin{aligned}(mc^2\lambda+Ek)^2 &- (m^2c^4-E^2)(\lambda^2-k^2)-(\frac{1}{2}+n')\hbar(\lambda^2-k^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\hbar^2\alpha^2(\lambda^2-k^2)+4c^2}\\ &= n^2\hbar^2\alpha(\lambda^2-k^2)^2+\frac{\hbar^2\alpha}{4}(\lambda^2-k^2)^2\end{aligned} \tag{3.50}$$

eşitliği elde edilmiş olur. Enerjinin açık şekilde elde edilmesi için terimler açılırsa

$$\begin{aligned}&m^2c^4\lambda^2+2mc^2E\lambda k+E^2k^2-m^2c^4\lambda^2+m^2c^4k^2+E^2\lambda^2-E^2k^2\\ -(\frac{1}{2}+n')\hbar(\lambda^2-k^2)^{\frac{3}{2}}&\sqrt{\hbar^2\alpha^2(\lambda^2-k^2)+4c^2}=n^2\hbar^2\alpha(\lambda^2-k^2)^2+\frac{\hbar^2\alpha}{4}(\lambda^2-k^2)^2\end{aligned} \tag{3.51}$$

ilk ve ikinci terimlerin işlemleri yapılırsa,

$$\begin{aligned}(mc^2k+E\lambda)^2-(\frac{1}{2}+n')\hbar(\lambda^2-k^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\hbar^2\alpha^2(\lambda^2-k^2)+4c^2} &=\\ n^2\hbar^2\alpha(\lambda^2-k^2)^2+\frac{\hbar^2\alpha}{4}(\lambda^2-k^2)^2&\end{aligned} \tag{3.52}$$

elde edilir. Bulunan denklemde aşağıdaki tanımlama yapılırsa,

$$n'+\frac{1}{2}=n \tag{3.53}$$

$$\begin{aligned}(mc^2k+E\lambda)^2-n\hbar(\lambda^2-k^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\hbar^2\alpha^2(\lambda^2-k^2)+4c^2} &=\\ n^2\hbar^2\alpha(\lambda^2-k^2)^2+\frac{\hbar^2\alpha}{4}(\lambda^2-k^2)^2&\end{aligned} \tag{3.54}$$

denklemi bulunur. Bulunan denklemde birinci terim yanlız bırakılırsa,

$$\begin{aligned}&(mc^2k+E\lambda)^2=\\ n\hbar(\lambda^2-k^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\hbar^2\alpha^2(\lambda^2-k^2)+4c^2}&+n^2\hbar^2\alpha(\lambda^2-k^2)^2+\frac{\hbar^2\alpha}{4}(\lambda^2-k^2)^2\end{aligned} \tag{3.55}$$

(3.55) denklemi bulunur. Sonuç olarak enerji özdeğeri aşağıdaki gibi elde edilir

$$E=-mc^2\frac{k}{\lambda}\pm\frac{\lambda^2-k^2}{\lambda}\left[n^2\hbar^2\alpha+\frac{\hbar^2\alpha}{4}+\frac{n\sqrt{\hbar^2\alpha^2(\lambda^2-k^2)+4c^2}}{\sqrt{\lambda^2-k^2}}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{3.56}$$

DKP denkleminde minimal uzunluğun katkısı spin-1 için (1+1) boyutta lineer vektör ve skaler potansiyel için çözümleri yapılarak enerji özdeğeri elde edilmiştir. İşlemler sırasında potansiyel trigonometrik bir potansiyele dönüştürülmüştür. $\tan^2(\sqrt{\alpha}p)$ potansiyel sorunu değişken değişimi yapılarak giderilmiştir. Bu potansiyel yüksek enerji durumları için $\pm\frac{\pi}{2}\sqrt{\alpha}$ kare sınırları içine yerleştirilmiştir. Enerji n ile artar ve n ile artan enerji özdeğerindeki sapma $n^2$ bağımlı teriminin katkısını gösterir. Bu katkı yüksek enerji alanında kısıtlamayı ve iyi bilinen görecelik teorisini açıklıyor. Uzay deformasyonu fiziksel sonuçları etkiler. Ayrıca enerji özdeğerin diğer bir özelliği ise büyük n için enerji aralığı süreklidir. Dolayısıyla bizim sorunumuz büyük n için $\sqrt{\alpha}|\frac{(\lambda^2-k^2)}{\lambda}|$ frekansı ile göreli olmayan harmonik osilatörü tarif edilebilir. Enerji spekturumu $\alpha$ parametresi ile dogru orantılıdır ve enerjiye minimum katkı sağlamıştır.Enerjiyi artırıcı bir etkisi vardır. Skaler ve vektörel katkılar aynı ise enerjinin katkısı ayırtedilemez. $n = 0$ olduğu durumda da minimum uzunluk altında enerji bulunmaktadır. Son olarak limit $\alpha = 0$ iken enerji spektrumunu azaltır.

# 4. BÖLÜM

## SONUÇ, TARTIŞMA ve ÖNERİLER

Göreli DKP denkleminin çözümleri bozonik parçacıkların etkileşmelerinin tanımlanmasında önemli rol oynamaktadır. Son yıllarda spin-0 ve spin-1 hadronlarının çekirdeklerle etkileşimi birinci mertebeden göreli DKP denklemi ile incelenmiştir. DKP denklemi tıpkı göreli Dirac denklemi gibi birinci mertebeden ve Lorentz değişmezliğine sahip bir denklemdir [43]. DKP'nin büyük cebirsel karmaşıklığı nedeniyle Klein-Gordon ve Proca denklemlerine göre göz ardı edilmiştir. DKP denklemi yapısı gereği Klein-Gordon denklemine göre etkileşmeleri tanımlamada daha başarılıdır. Bu nedenle mezon-çekirdek etkileşmeleri için DKP modeli alternatif çözüm yöntemi olarak kullanılmıştır [21]. Minimum uzunluk formalizminin katılardaki toplu uyarılmalar ve yarı-parçacıklar gibi nokta-yapıda olmayan parçacıların ya da nükleonların ve çekirdek ve moleküller gibi kompozit parçacıkları tanımlamak için etkin bir teori sağlayabileceği düşünülmektedir [28–30, 54]. Bu durumda minimum uzunluk, düşünülen sistemin yapısının iç ölçek karakterizasyonu ve sistemin sonlu bir büyüklüğü olarak düşünülmektedir. Spin-0 ve spin-1 durumları için kullanılacak olan göreli DKP denkleminin yapısı ve özellikleri verilmiştir. Matematiksel hesapların bir kısmı verilmiştir ve hesaplar açık bir şekilde yazılmamıştır.

Lineer potansiyel için DKP denkleminin minimum uzunluk altında spin-0 ve spin-1 durumları için analitik olarak sistemi tanımlayan diferansiyel denklem bulunmuştur ve ilgili dalga fonksiyonu kapalı formu elde edilmiştir. Ayrıca enerji özdeğerleri açık olarak verilmiştir. Minimal uzunluğun enerjiye tatkısı açık bir şekilde gösterilecektir. Her iki durum içinde enerji özdeğerleri birbirine eşit olduğu görülmüştür.

Bu çalışmada DKP denkleminde minimal uzunluğun katkıları spin-0 ve spin-1 durumları için $(1+1)$ boyutta lineer vektör ve skaler potansiyel çözümleri ayrı ayrı hesaplanmıştır. Hesaplamalar sırasında potansiyeller trigonometrik bir potansiyele dönüştürülmüştür. $tan^2(\sqrt{\alpha}\rho)$ potansiyel sorunu değişken dönüşümü yapılarak giderilmiştir. Hesaplamalar sonucunda enerji özdeğerinin aynı olduğu görülmüştür.Çünkü spin-0 ve spin-1'i temsil eden lineer diferansiyel denklemler aynıdır. Enerji özdeğerinde minimal uzunluğun katkısı $\alpha$ ile doğru orantılıdır ve n ile hızla büyür. n ile hızla büyüyen enerji özdeğerindeki sapma minimal uzunlukta $n^2$ bağımlı teriminin katkısını göstermektedir. Ayrıca her iki durumda da $n=0$ durumunda dahi bir enerji bulunmaktadır. Bu durum kuantum mekaniğindeki harmonik osilatörün özelliğine benzer bir özellik olarak karşımıza çıkmaktadır. Bu çalışmada $(1+1)$ boyutta çözümler elde edilmiştir. Başka bir çalışmada $(3+1)$ boyutunda çalışma yapılabilir.

## KAYNAKLAR

1. Ait-Tahar, S., l Khalili, J. S., Nedjadi, Y., 1995. A relativistic model for alpha-nucleus elastic-scattering. , **Nuclear Physics A, 589**: 307–319

2. Amati, D., Cialfaloni, M., Veneziano, G., 1989. Can Spacetime Be Probed Below The String Size. **Phyics Letters B, 216**: 41–47

3. Boumali, A., 2004. The spin 0 particle in an Aharanov-Bohm potential. **Canadian Journal of Physics, 82**: 67–74

4. Boumali, A., 2007. One-dimensional thermal properties of the Kemmer oscillator. , **Physica Scripta, 76**: 669pp.

5. Boumali, A., 2007. Spin-1 particle in the presence of the Aharonov-Bohm potential. **Canadian Journal of Physics, 85**: 1417–1429

6. Boumali, A., 2008. On the eigensolution of the one-dimensional DuffinKemmer-Petiau oscillator. **Journal of Mathematical Physics, 49**: 022302pp.

7. Boumali, A., Chetouani, L., 2005. Exact solutions of the Kemmer equation for a Dirac oscillator. **Physics Letters A, 346**: 261–268

8. Boztosun, I., Karakoc, M., Yasuk, F., Durmus, A., 2006. Asymptotic iteration method solutions to the relativistic Duffin-Kemmer-Petiau equation. **Journal of Mathematical Physics, 47**: 062301pp.

9. Cardoso, T. R., Castro, L. B., de Castro, A. S., 2010. Effects Due to a Scalar Coupling on the Particle-Antiparticle Produntion in the Duffin-Kemmer-Petiau Theory. **International Journal of Theoretical, 49**: 10–17

10. Cardoso, T. R., Castro, L. B., de Castro, A. S., 2010. On the nonminimal vector coupling in the DuffinKemmer-Petiau theory and the confinement of massive bosons by a linear potential. **Journal of Physics A-Mathematical And Thearetical, 43**: 055306pp.

11. Casana, R., Pazetti, M., Pimentel, B. M., Valverde, J. S., 2009. Pseudoclassical mechanics for the spin-0 and-1 particles. **Nuovo Cimento Della Societa Italiana Dı Fisica B-Basic Topics In Physics, 124**: 485–498

12. Chargui, Y., Trabelsi, A., Chetouani, L., 2010. The one-dimensional spinless Salpeter Coulomb problem with minimal length. **Physics Letters A, 374**: 2243–2247

13. Clark, B. C., Hama, S., Kalmermann, G., Mercer, R., Ray, L., 1985. Relativistic Impulse Approximation for Meson-Nucleus Scattering in the Kemmer-Duffin- Petiau Formalism. **Physical Review Letter, 55**: 592pp.

14. de Castro, A. S., 2010. On Duffin-Kemmer-Petiau particles with a mixed minimal-nonminimal vector coupling and the nondegenerate bound-states for the one-dimensional inversely linear background. **Journal of Mathematical Physics, 51**: 102302pp.

15. de Castro, A. S., 2011. Bound states of the Duffin-Kemmer-Petiau equation with a mixed minimal-nonminimal vector cusp potential. **Journal of Physics A-Mathematical And Theoretical, 44**: 035201pp.

16. de Montigny, M., Khanna, F. C., Santana, A. E., Santos, E. S., Vianna, J. D. M., 2000. Galilean covariance and the Duffin-Kemmer-Petiau equation. **Journal of Physics A, 33**: L273

17. Douglas, M. R., Nekrasov, N. A., 2001. Noncommutation field theory. **Reviews of Modern Physics, 73**: 977–1029

18. Fainberg, V., Pimentel, B., 2000. Duffin-Kemmer-Petiau and Klein-Cordon-Fock equations for electromagnetic, ang-Mills and external gravitational field interactions: proof of equivalence. **, Physics Letters A, 271**: 16pp.

19. Falek, M., Merad, M., 2009. Bosanic oscillator in the presence of a minimal length. **Journal of Mathematical Physics, 50**: 023508pp.

20. Falek, M., Merad, M., 2010. A generalized bosonic in the presence of a minimal length. **Journal of Mathematical Physics, 51**: 033516pp.

21. Friedman, E., Kaelbermann, G., 1986. Kemmer-Duffin-Petiau equation for pionic atoms and anomalous strong interaction effects. **Physical Review C ,, 34**: 2244–2247

22. Garay, L. J., 1995. Quantum-Gravity And Minimum Length. **International Journal Of Modern Physics A, 10**: 145–166

23. Gencer, S., 2011. Sixth order anharmonic Duffin-Kemmer-Petiau oscillator. pp. 4–13

24. Gribov, V., 1999. QCD at large and short distances (annotated version). **Europian Physical Journal C, 10**: 71pp.

25. Havare, A., Aydogdu, O., Yetkin, T., 04. Exact solution of the massles DKP Equation in a nonstationary Godetype cosmological universe. **International Journal of Modern Physics D, 13**: 935–944

26. Havare, A., Korunur, M., Aydogdu, O., Salti, M., Yetkin, T., 2005. Exact solution of the photon equation in anisotropic spacetimes. **Internation Journal of Modern PhySics D, 14**: 957–971

27. Havare, A., Yetkin, T., 2002. Exact solution of the photon equation in stationary Godel-type and Godel Spacetimes. **Classical And Quantum Gravity**, **19**: 2783–2791

28. Hossenfelder, S., 2004. The minimal length and large extra dimensions. **Modern Physics Letters A, 19**: 2727–2744

29. Hossenfelder, S., 2004. Running coupling with length. **Physical Review D, 70**: 1054003pp.

30. Hossenfelder, S., 2004. Suppressed black hole production from minimal length. **Physics Letters B, 592**: 92–98

31. Hossenfelder, S., 2006. A note on theories with a minimal length. **Classical and Quantum Gravity**, **23**: 1815–1821

32. Jaeckel, M. T., Reynaud, S., 1994. Gravitation Quantum Limit For Length Measurements. **Physics Letters A, 185**: 143–14

33. Jana, T. K., Roy, P., 2009. Exact solution of teh Klein-Gordon equation in the presence of a minimal length. **Physics Letters A, 373**: 1239–41

34. Kanatchikov, I., 2000. the Duffin-Kemmer-Petiau formulation of the covariant Hamiltonian dynamics in field theory. **Report on Mathematical Physics,, 46**: 107pp.

35. Kempf, A., 1992. Quantum Group-Symmetrical Fock Spaces With Bargmann-Fock Representation. **Leters In Mathematical Physics, 26**: 1–12

36. Kempf, A., 1993. Quantum Group Symmetrical Bargmann-Fock Space-Integral-Kernnels. **Green-FunctionsiDriving Forces Journal Of Mathematical Physics, 34**: 969–987

37. Kempf, A., 1994. Quantum Group And Quantum-Field Theorywith Nonzero Minimal Uncertaintes In Positions And Momenta. **Czechoslovak Journal of Physic, 44**: 1041–1048

38. Kempf, A., 1994. Uncertainty Relation In Quantum-Mechanics With Quntum Group Symmetry. **Journal of Mathematica Physics, 35**: 4483–4496

39. Kempf, A., Mangano, G., Mann, R. B., 1995. Hilbert-Space Representation Of the Minimal Length Uncertainty Relation. **Physical Review D, 52**: 1108–1118

40. Kerr, L. K., Clark, B. C., Hama, S., Ray, L., Hoffmann, G., 2000. Theoretical and experimental K+ plus nucleus total and reaction cross sections from the KDP-RIA model. **Progres of Theoritical Physics, 103**: 321pp.

41. Konishi, K., Paffuti, G., Provero, P., 1990. Minimum Physical Length And The Generalized Uncertainty Principle In string Theory. **Physics Letters B, 234**: 276–284

42. Kozack, R. E., Clark, B. C., Hama, S., Mishra, V. K., Mercer, R. L., Ray, L., 1989. Spin-one Kemmer-Duffin-Petiau equations and intermediate-energy deuteron-nucleus scattering. **Physical Review C, 40**: 2181pp.

43. Krajcik, R., Nieto, M., 1977. Historical development of the Bhabha first-order relativistic wave equations for arbitrary spin. **American Journal of Physics, 45**: 818pp.

44. Lunardi, J. T., Monzani, L. A., Pimental, B. M., Valverde, J. S., 2000. Duffin-Kemmer-Petiau Theory in the Causal Approach. **Int J Mod Phys A,, 17**: 205pp.

45. Lunardi, J. T., Pimentel, B. M., Teixeiri, R. G., Valverde, R. T., 2000. Remarks on Duffin-Kemmer-Petiau theory and gauge invariance. **Physics Letters A, 268**: 165pp.

46. Maggiore, M., 1993. The Algebreic Structure Of The Generalized Uncertainty Principle. **Physics Letters B, 319**: 83–86

47. Maggiore, M., 1994. Quantum Groups,Gravity And The Generalized Uncertainty Principle. **Physical Review D, 49**: 5182–5287

48. Nedjadi, Y., Barrett, R. C., 1995. Meson nuclear-interaction in the Kemmer-Duffin-Petiau formalism. **Nuclear Physics A, 585**: 311c–312c

49. Nozari, K., Karami, M., 2005. Minimal length and generalized Dirac equation. **Modern Physics Letters A, 20**: 3095–3103

50. Peet, A. W., Polchinski, J., 1999. UV-IR relations in AdS dynamics. **Physical Review D, 59**: 065011pp.

51. Quesne, C., Tkachuk, V. M., 2005. Dirac oscillator with nonzero minimal uncertainty in position. **Journal of Physics A-Mathematical And General, 38**: 1747–1765

52. Sadeghi, J., 2007. Dirac oscillator with minimal lengths and free particle on AdS(2) and S-2. **Journal of Mathematical Physics, 48**: 113508pp.

53. Salti, M., Havare, A., 2005. On the equivalence of the massless Dkp Equation and the Maxwell equations in the Shuwer. **Modern Physics Letters A, 20**: 451–465

54. Sastry, R. R., 2000. Quantum mechanics of smeared particles. **Journal of physics A, 33**: 8305–8318

55. Sogut, K., Havare, A., 2006. Spin-1 particle in an electrical field in (1+1)-dimensional Schrodinger spacetime. **Classical And Quntum Gravity, 23**: 7129–7142

56. Sogut, K., Havare, A., 2010. Scattering of vector bosons by an asymmetric Hulthen potential. **Journal of Physics A-Mathematical And General, 43**: 225204pp.

57. Sucu, Y., Unal, N., 2005. Vector bosons in the expanding universe. **European Physical Journal C, 44**: 287–291

58. Townsend, P. K., 1976. Small-scale structure of spacetime as the origin of the gravitational constant. **Physical Review D, 15**: 2795–2801

59. Yasuk, F., Berkdemir, C., Berkdemir, A., Onem, C., 2005. Exact solutions of the Duffin-Kemmer-Petiau equation for the deformed Hulthen potential. **Physica Scripta, 71**: 340–343

60. Yasuk, F., Karakoc, M., Boztosun, I., 2008. The relativistic Duffin-Kemmer-Petiau sextic ossillator. **Physica Scripta**, **78**: 045010pp.

# ÖZGEÇMİŞ

## KİŞİSEL BİLGİLER

Adı, Soyadı: Zeynep YAMAN
Uyruğu: Türkiye (TC)
Doğum Tarihi ve Yeri: 1 Şubat 1986, Konya
Medeni Durumu: Bekâr
Tel: +90 312 210 22 92
email: zynp_yaman_42@windowslive.com
Yazışma Adresi: Bosna Hersek Mah. Zakir sok. Anıl Sitesi B Blok 14/5 Selçuklu/KONYA

## EĞİTİM

| Derece | Kurum | Mezuniyet Tarihi |
|---|---|---|
| Lisans | EÜ Fen-Edebiyat Fakültesi | 2009 |
| Lise | Orhan Şaik Gökyay Lisesi, Kastamonu | 2003 |

## YABANCI DİL

İngilizce