



FUZZY VEKTÖR METRİK UZAYLAR

Şehla EMİNOĞLU

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MAYIS 2018

Şehla EMİNOĞLU tarafından hazırlanan "FUZZY VEKTÖR METRİK UZAYLAR" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Gazi Üniversitesi Matematik Anabilim Dalında DOKTORA TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Cüneyt ÇEVİK

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum.



Başkan: Prof. Dr. Bahri TURAN

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

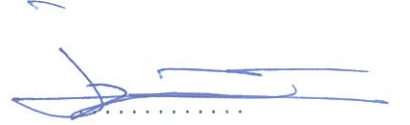
Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum.



Üye: Prof. Dr. İbrahim BÜYÜKYAZICI

Matematik Anabilim Dalı, Ankara Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum.



Üye: Prof. Dr. Hakan EFE

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum.



Üye: Doç. Dr. Murat OLGUN

Matematik Anabilim Dalı, Ankara Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum.



Tez Savunma Tarihi: 28/05/2018

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Doktora Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....
Prof. Dr. Sena YAŞYERLİ

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Şehla EMİNOĞLU

12/04/2018

FUZZY VEKTÖR METRİK UZAYLAR

(Doktora Tezi)

Şehla EMİNOĞLU

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Mayıs 2018

ÖZET

Fuzzy vektör metrik uzay odaklı bu çalışmamızda bir taraftan olasılıksal metrik uzaylar ve ilgili kavramlar, diğer taraftan da fuzzy kümeler teorisi ele alındı. Fuzzy kümeler teorisinin t-normlarla birlikte olasılıksal metrik uzay kavramlarıyla ilişkilendirilmesi neticesinde oluşturulan fuzzy metrik uzaylara değinildi ve örnekler verildi. Pozitif bir reel sayı olan t 'yi Riesz uzaylarından bir vektör olarak düşünerek literatürde ilk olarak fuzzy vektör metrik uzaylar tanımlandı. Daha sonra bu uzaylardaki bazı topolojik kavramlara ve yakınsaklık özelliklerine yer verildi. Ayrıca latis norm şartıyla fuzzy vektör metrik uzaylar için süreklilik güncellendi. Son olarak tanımlanan kusurlu fuzzy vektör çap kavramı yardımıyla önemli bazı teoremlerin ispatı yapıldı.

Bilim Kodu : 20404

Anahtar Kelimeler : Vektör metrik uzay, fuzzy metrik uzay, fuzzy vektör metrik uzay, kusurlu fuzzy vektör çap

Sayfa Adedi : 75

Danışman : Doç. Dr. Cüneyt ÇEVİK

FUZZY VECTOR METRIC SPACES

(Ph. D. Thesis)

Şehla EMİNOĞLU

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

May 2018

ABSTRACT

In our fuzzy vector metric spaces focused study were on one hand probabilistic metric spaces and related concepts, on the other hand the theory of fuzzy sets handled. Fuzzy metric spaces which are constructed by associating with the theory of fuzzy sets to the probabilistic metric spaces with t-norms were addressed and related examples were given. Here fuzzy vector metric spaces were first defined in the literature by considering t which is a positive real number as a vector from Riesz spaces. Then some topological concepts and convergence properties in these spaces were mentioned. Moreover, continuity for fuzzy vector metric spaces was updated with the lattice norm condition. Finally, some important theorems were proved with the help of the concept of defective fuzzy vector diameter.

Science Code : 20404

Key Words : Vector metric spaces, fuzzy metric spaces, fuzzy vector metric spaces, defective fuzzy vector diameter

Page Number : 75

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Cüneyt ÇEVİK

TEŞEKKÜR

Doktora eğitimim ve tez çalışmam süresince değerli zamanını ve bilgisini benimle paylaşan, fikir verip yol gösteren saygıdeğer hocam Doç. Dr. Cüneyt Çevik'e teşekkürü borç bilirim. Yine çalışmalarımda bana destek olan ve beni yönlendiren değerli hocalarım Prof. Dr. İbrahim Büyükyazıcı ve Prof. Dr. Hakan Efe'ye teşekkür ederim. Ayrıca eğitim hayatım boyunca karşılaştığım tüm engellere rağmen yanımda olan canım annem ve babama teşekkür etmek isterim. Aynı zamanda sabır ve fedakarlıkla bana maddi-manevi destek olan, beni motive eden kıymetli eşime ve varlıklarıyla bile bana pozitif enerji veren sevgili çocuklarıma teşekkür ediyorum.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ŞEKİLLERİN LİSTESİ	viii
SİMGELER VE KISALTMALAR	ix
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	3
2.1. Riesz Uzayları	3
2.2. Vektör Metrik Uzaylar	7
2.3. Üçgensel Normlar ve Üçgensel Conormlar	18
2.4. Olasılıksal Metrik Uzaylar	28
3. FUZZY METRİK UZAYLAR	37
3.1. Fuzzy Mantığı ve Kümeleri	37
3.2. Fuzzy Metrik Uzaylar	47
4. FUZZY VEKTÖR METRİK UZAYLAR	61
4.1. Fuzzy Vektör Metrik Uzaylar	61
5. SONUÇ	71
KAYNAKLAR	73
ÖZGEÇMİŞ	75

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 2.1. Dört temel t-normun üç boyutlu gösterimi	19
Şekil 2.2. Dört temel t-normun izdüşümü	20
Şekil 2.3. Dört temel t-conormun üç boyutlu gösterimi.....	23
Şekil 2.4. Dört temel t-conormun izdüşümü.....	24
Şekil 2.5. Nilpotent minimum t-normunun üç boyutlu gösterimi ve izdüşümü.....	27
Şekil 3.1. $\mu(x) = e^{-x^2}$ üyelik fonksiyonunun α -kesitleri.....	40
Şekil 3.2. Fuzzy kümelerin birleşimi ve kesişimi.....	42

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklamalar
$\tilde{A}$	Fuzzy kümesi
$\tilde{A}^c$	$\tilde{A}$ fuzzy kümesinin tümleyeni
$\tilde{A}_\alpha$	$\tilde{A}$ fuzzy kümesinin α -kesiti
$\tilde{A}_{\alpha+}$	$\tilde{A}$ fuzzy kümesinin güçlü α -kesiti
$B(x, r)$	x -merkezli r -yarıçaplı açık yuvar
$B[x, r]$	x -merkezli r -yarıçaplı kapalı yuvar
$B(x, r, t)$	Fuzzy metrik uzaydaki açık yuvar
$B[x, r, t]$	Fuzzy metrik uzaydaki kapalı yuvar
$B^E(x, r, t)$	Fuzzy vektör metrik uzaydaki açık yuvar
$B^E[x, r, t]$	Fuzzy vektör metrik uzaydaki kapalı yuvar
$d(A)$	A kümesinin çapı
E^+	E Riesz uzayının pozitif kısmı
F	Dağılım fonksiyonu
F_{xy}	x ve y arasındaki olasılıksal uzaklık
$l^- f$	f fonksiyonunun soldan limiti
$l^+ f$	f fonksiyonunun sağdan limiti
M	Fuzzy metrik
M^E	Fuzzy vektör metrik
P_x	X değerli projeksiyon dönüşümü
S	t-conorm
S_D	Güçlü t-conorm
S_M	Maksimum t-conorm
S_L	Lukasiewicz t-conorm
S_P	Olasılıksal toplam
$S(\tilde{A})$	$\tilde{A}$ fuzzy kümesinin destek kümesi
T	t-norm

Simgeler

Açıklamalar

T_D	Güçlü t-norm
T_L	Lukasiewicz t-norm
T_M	Minimum t-norm
T_P	Çarpımsal t-norm
$tv(p)$	p önermesinin doğruluk derecesi
U_{ab}	$[a, b]$ üzerindeki düzgün dağılım fonksiyonu
x^+	x vektörünün pozitif kısmı
x^-	x vektörünün negatif kısmı
$ x $	x vektörünün mutlak değeri
$\ x\ $	x vektörünün normu
(X, d, E)	Vektör metrik uzay
(X, F)	Olasılıksal metrik uzay
$(X, M, *)$	Fuzzy metrik uzay
$(X, M^E, *)$	Fuzzy vektör metrik uzay
$x_n \uparrow x$	(x_n) artan dizi ve $\sup x_n = x$
$x_n \downarrow x$	(x_n) azalan dizi ve $\inf x_n = x$
$x_n \xrightarrow{o} x$	Sıra yakınsak
$x_n \xrightarrow{d,E} x$	Vektörel yakınsak
$x_n \xrightarrow{M^E} x$	Fuzzy vektör metrik uzayda yakınsaklık
$x \vee y$	x ve y nin supremumu
$x \wedge y$	x ve y nin infimumu
Δ	Dağılım fonksiyonlarının kümesi
Δ^+	Uzaklık dağılım fonksiyonlarının kümesi
ε_a	a noktasındaki birim adım fonksiyonu
$\mu_{\tilde{A}}(x)$	x nesnesinin $\tilde{A}$ kümesindeki üyelik derecesi
$\nu_A(x)$	x nesnesinin A kümesine üye olmama derecesi
τ	Üçgensel fonksiyon

1. GİRİŞ

1965'te Zadeh tarafından ortaya atılan fuzzy kümeleri ve mantığı [22] klasik kümeler teorisini ve iki-değerli mantığı, tabiri caizse alt üst edip yepyeni bir bakış açısı getirmiştir. Her elemana bir üyelik derecesi atfeden bu bakış açısı başta matematikçiler olmak üzere birçok bilim insanı ve araştırmacının ilgi alanına girerek hızlı bir şekilde gelişip olgunlaştı. Daha sonra mantık, bilgisayar bilimleri, yapay zeka, yönetim bilimi, uzman sistemler, örüntü tanıma, robotik gibi çeşitli alanlara uygulandı.

Diğer taraftan 1942'de K. Menger iki nokta arasındaki mesafeyi bir sayıyla tanımlamaktan ziyade olasılıksal dağılım fonksiyonlarını kullanıp negatif olmayan bir t reel sayısı ile ilişkilendirerek istatistiksel metrik uzayları ya da şimdiki güncel kullanımı olan olasılıksal metrik uzay kavramını ortaya attı [16]. Burada F_{xy} bir uzaklık dağılım fonksiyonu iken $F_{xy}(t)$, x ve y arasındaki uzaklığın t sayısından az olma ihtimali olarak yorumlanır. Bununla birlikte her t için $x \neq y$ iken $F_{xy}(t) = 1$ eşitliğinin sağlanmadığı durumlarda klasik metrik uzaydaki üçgen eşitsizliğinin daha genel bir versiyonunu bulma ihtiyacı ortaya çıkmıştır. Bu nedenle Menger, birim kareden birim aralığa giden üçgensel fonksiyonları tanımladı. Böylelikle bu fonksiyonlarla oluşturduğu üçgen eşitsizliği ve olasılıksal metrik uzaylardaki ilk üç şartla birlikte Menger uzaylarını tanımlamış oldu. Bu durumda her metrik uzay ve olasılıksal metrik uzay bir Menger uzayıdır, fakat tersi doğru değildir. Daha sonra B. Schweizer ve A. Sklar bu konuya önemli katkıda bulundu [17, 18].

1975'te ise Kramosil ve Michálek fuzzy küme teorilerinden de faydalanarak Menger tarafından geliştirilen olasılıksal metrik kavramına eşdeğer bir gösterim oluşturup $(X, M, *)$ fuzzy metrik uzaylarını tanımladı [15]. 1994'de George ve Veeramani bu tanımda bazı değişiklikler yapıp yeni sonuçlar elde etti [8, 9].

Fuzzy vektör metrik uzay odaklı çalışma serüvenimizde Riesz uzaylarıyla ilgili temel kavram ve teorileri ikinci bölümde öncelikli olarak sunduk. Sonrasında uzaklık fonksiyonunun Riesz uzaylarında değer aldığı vektör metrik uzay kavramını tanıttık ve bazı sonuçları verdik. Devamında ise bu uzaydaki topolojik ve vektörel süreklilik kavramlarını ele alıp karşılaştırdık. Üçüncü kesimde öncelikle üçgensel normlar (t-normlar) ve dualleri olan üçgensel conormları (t-conormları) tanıtip en yaygın örneklerini grafikleriyle beraber gösterdik. Sonrasında t-normların sürekliliğine değindik. En son kesimde ise olasılıksal metrik uzayları ve üçgensel fonksiyonların keşfiyle ortaya çıkan Menger uzaylarını tanıttık. Ayrıca burada bu fonksiyonların özelliklerinin nasıl oluştuğunu adım adım ele aldık. Üçgen eşitsizliğinin evrensellik özelliğinden ötürü Menger uzaylarındaki τ fonksiyonu için ideal adayın t-normlar olduğuna ilişkin tespitlere yer verdik.

Fuzzy metrik kavramının nasıl oluştuğunu irdeleyebilmek için çalışmalarımızı işin tarihsel sürecini göz önünde bulundurarak ilerlettik. Böylelikle bir taraftan olasılıksal metrik uzayları ve ilgili kavramları bir taraftan da üçüncü bölümde yer vermiş olduğumuz fuzzy küme teorilerini ve mantığını inceledik. Burada fuzzy kümeleri ve mantığını klasik kümelerle ve klasik mantıkla karşılaştırdık. Fuzzy mantık, önermelerin doğruluk değerlerinin sıfırdan bire değişebildiği sonsuz değerli bir mantıktır. Birleşik önermelerin doğruluk değerlerini bulmak için ise t-norm ve t-conormlardan faydalandık. Ayrıca Zadeh'in yapmış olduğu farklı fuzzy küme tanımlarını hatırlattık. X evrensel kümesinin fuzzy alt kümelerinin cebirini tanımlamak için bu kümeler üzerindeki bazı işlemlerde yine üçgensel fonksiyonları kullandık. Kesin kümeler için geçerli olan üçüncünün olmazlığı ilkesi ve çelişki ilkesi gibi bazı formüllerin fuzzy kümelerde sağlanmadığını örnekleriyle gördük. Fuzzy bağıntılar ve fuzzy sayılara genel hatlarıyla kısaca değindik. İkinci kesimde ise literatürde yapılmış farklı fuzzy metrik tanımlarını verdik. Burada daha çok George ve Veeremani'nin [8]'de tanımlamış olduğu fuzzy metrik uzaylardaki bazı topolojik kavramlara ve teorilere ağırlık verdik. Sonrasında vermiş olduğumuz birçok örnekle konuyu pekiştirmeye çalıştık.

Tezimizin son bölümünde ise [8]'de George ve Veeremani'nin yapmış olduğu fuzzy metrik uzay tanımını esas aldık. Burada pozitif bir reel sayı olan t 'yi, tanıma zenginlik katmak ve tanımlı genelleştirebilmek amacıyla Riesz uzaylarından bir vektör olarak alıp literatürde ilk defa $(X, M^E, *)$ fuzzy vektör metrik uzaylarını tanımladık. Bu çerçevede, eğer t 'yi sürekli fonksiyonlar uzayından sabit bir fonksiyon olarak düşünersek bu durumda her fuzzy metriğin bir fuzzy vektör metrik olacağı sonucuna vardık. Ayrıca her vektör metrik uzayın da fuzzy vektör metrik uzay olduğunu tespit ettik. M^E fuzzy vektör metriğinin t 'ye bağlı olduğu durumlarda yani sabit olmayan fuzzy vektör metrik örneklerinde ise normlu Riesz uzaylarından ve latis norm şartından yararlandık. Böylece tanım kümesindeki sıra yakınsaklıktan görüntü kümesindeki yakınsaklığa geçiş yapabildik. Bu sayede ilgili fuzzy metrik şartı için sürekliliği güncellemiş olduk. Ayrıca kusurlu fuzzy vektör çap ve beliren kusurlu fuzzy vektör çapı tanımlayıp Cantor kesişim ve Baire teoremi gibi bazı teoremlerin ispatını bu tanımlar yardımıyla yaptık [7, 21].

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Riesz Uzayları

Bu kesimde, ilerleyen bölümlerde kullanacağımız bazı temel kavramları vereceğiz [1, 2].

2.1.1. Tanım

E bir reel vektör uzayı ve $\leq$, E 'de bir sıralama bağıntısı olsun.

i) Her $x, y, z \in E$ için $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$

ii) Her $\lambda \in \mathbb{R}^+$ ve her $x, y \in E$ için $x \leq y \Rightarrow \lambda x \leq \lambda y$ sağlamıyorsa E uzayına sıralı vektör uzayı denir.

$x \geq y$ nin farklı bir gösterimi $y \leq x$ dir. E sıralı vektör uzayı ve θ , E 'nin sıfır vektörü olsun. Bu durumda $\theta \leq x$ şartını sağlayan x elemanına E 'nin pozitif elemanı denir. Ayrıca $E_+ = \{x \in E : \theta \leq x\}$ ve $E^+ = \{x \in E : \theta \leq x \text{ ve } x \neq \theta\}$ olarak tanımlanır.

E sıralı vektör uzayı, her $x, y \in E$ için $\{x, y\}$ kümesinin supremumuna ve infumumuna sahipse Riesz uzayı ya da vektör latris olarak adlandırılır. Klasik gösterimler

$$x \vee y := \sup \{x, y\} \text{ ve } x \wedge y := \inf \{x, y\}$$

şeklindedir.

Riesz uzayının önemli örnekleri fonksiyonlar uzaylarıyla verilir. Bir Ω kümesi üzerindeki reel değerli fonksiyonların uzayı

$$f \leq g \text{ gerek ve yeter şart her } x \in \Omega \text{ için } f(x) \leq g(x)$$

noktasal sıralamasıyla bir sıralı vektör uzayıdır. Her $f, g \in E$ ikilisi için latris işlemleri

$$(f \vee g)(x) := \max \{f(x), g(x)\} \text{ ve } (f \wedge g)(x) := \min \{f(x), g(x)\}$$

şeklindedir. Şimdi fonksiyon uzaylarından elde ettiğimiz bazı Riesz uzayı örneklerini

verelim.

- Ω kümesi üzerinde tanımlı bütün reel değerli fonksiyonlar uzayı, $\mathbb{R}^\Omega$.
- Ω topolojik uzayı üzerindeki bütün reel değerli sürekli fonksiyonlar uzayı, $C(\Omega)$.
- Ω topolojik uzayı üzerindeki bütün reel değerli sürekli, sınırlı fonksiyonlar uzayı, $C_b(\Omega)$.
- Ω topolojik uzayı üzerindeki bütün reel değerli sınırlı fonksiyonlar uzayı, $\ell_\infty(\Omega)$.
- $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$ şartını sağlayan bütün reel değerli dizilerin uzayı, $\ell_p(0 < p < \infty)$.

2.1.2. Teorem

E bir Riesz uzayı ve $x, y, z \in E$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır.

$$i) \ x \vee y = -[(-x) \wedge (-y)] \text{ ve } x \wedge y = -[(-x) \vee (-y)]$$

$$ii) \ x + y = x \wedge y + x \vee y$$

$$iii) \ x + (y \vee z) = (x + y) \vee (x + z) \text{ ve } x + (y \wedge z) = (x + y) \wedge (x + z)$$

$$iv) \ \text{Her } \alpha \geq 0 \text{ için } \alpha(x \vee y) = (\alpha x) \vee (\alpha y) \text{ ve } \alpha(x \wedge y) = (\alpha x) \wedge (\alpha y).$$

Bir Riesz uzayındaki herhangi bir x vektörünün pozitif kısmı, negatif kısmı ve mutlak değeri sırasıyla aşağıdaki biçimde tanımlanır.

$$x^+ := x \vee \theta, \quad x^- := (-x) \vee \theta \quad \text{ve} \quad |x| := x \vee (-x).$$

2.1.3. Teorem

E bir Riesz uzayı ve $x \in E$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır.

$$i) \ x = x^+ - x^-$$

$$ii) \ |x| = x^+ + x^-$$

$$iii) \ x^+ \wedge x^- = \theta.$$

2.1.4. Teorem

Bir E Riesz uzayındaki iki vektör x ve y olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır.

$$i) \ x = (x - y)^+ + x \wedge y$$

$$ii) \ x \vee y = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|) \text{ ve } x \wedge y = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$$

$$iii) \ |x - y| = x \vee y - x \wedge y$$

$$iv) \ |x| \vee |y| = \frac{1}{2}(|x + y| + |x - y|)$$

$$v) \ |x| \wedge |y| = \frac{1}{2}||x + y| - |x - y||$$

$$vi) \ |x + y| \wedge |x - y| = ||x| - |y||$$

$$vii) \ |x + y| \vee |x - y| = |x| + |y|.$$

2.1.5. Teorem

E bir Riesz uzayı olsun. Herhangi $x, y, z \in E$ için aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır.

$$i) \ ||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y| \text{ (Üçgen Eşitsizliği)}$$

$$ii) \ |x \vee z - y \vee z| \leq |x - y| \text{ ve } |x \wedge z - y \wedge z| \leq |x - y| \text{ (Birkhoff Eşitsizliği).}$$

İspat

$i) \ x + y \leq |x| + |y|$ ve $-x - y \leq |x| + |y|$ eşitsizlikleri sağlanır. Dolayısıyla $|x + y| = (x + y) \vee (-x - y) \leq |x| + |y|$ dir. Ayrıca $|x| = |(x + y) - y| \leq |x + y| + |y|$ eşitsizliğinden $|x| - |y| \leq |x + y|$ elde edilir. Aynı şekilde $|y| - |x| \leq |x + y|$ bulunabilir. Bu yüzden

$||x| - |y|| \leq |x + y|$ sağlanır.

$$\begin{aligned}
 ii) \ x \vee z - y \vee z &= [(x - z) \vee \theta + z] - [(y - z) \vee \theta + z] \\
 &= (x - z)^+ - (y - z)^+ \\
 &= [(x - y) + (y - z)]^+ - (y - z)^+ \\
 &\leq [(x - y^+) + (y - z)^+] - (y - z)^+ \\
 &= (x - y)^+ \leq |x - y|
 \end{aligned}$$

bulunur.

Benzer şekilde $y \vee z - x \vee z \leq |x - y|$ ve buradan da $|x \vee z - y \vee z| \leq |x - y|$ elde edilir. Diğer eşitsizlik de benzer yolla bulunur.

2.1.6. Tanım

E bir Riesz uzayı ve (x_n) E 'de bir dizi olsun. $n \geq m$ iken $x_n \leq x_m$ oluyorsa (x_n) 'e azalan denir ve $x_n \downarrow$ şeklinde gösterilir. $x_n \downarrow x$ sembolü, hem $x_n \downarrow$ hem de $\inf x_n = x$ olduğunu gösterir. $x_n \uparrow$ ve $x_n \uparrow x$ sembollerinin anlamı da benzerdir.

2.1.7. Tanım

E bir Riesz uzayı olsun. Her $x \in E_+$ ve $n \in \mathbb{N}^+$ için $\frac{1}{n}x \downarrow \theta$ ise E 'ye Arşimedian Riesz uzayı denir.

2.1.8. Tanım

E bir Riesz uzayı ve $A \subseteq E$ olsun. Her $y \in A$ için $y \leq x$ olacak şekilde en az bir $x \in E$ varsa A kümesi üstten sınırlıdır denir. Benzer şekilde her $y \in A$ için $y \geq x$ olacak şekilde en az bir $x \in E$ varsa A 'ya alttan sınırlıdır denir. Altan ve üstten sınırlı kümeye de sınırlı küme denir.

E Riesz uzayının boş olmayan üstten sınırlı her alt kümesinin supremumu (veya alttan

sınırlı her alt kümesinin infimumu) varsa E 'ye Dedekind tam denir. Eğer tanımdaki kümeler sayılabilir iseler E uzayına σ -Dedekind tam denir.

2.1.9. Tanım

E bir Riesz uzayı, $(x_n) \subseteq E$ ve $x \in E$ olsun. Her n için $|x_n - x| \leq y_n \downarrow \theta$ olacak şekilde bir (y_n) dizisi varsa (x_n) , x 'e sıra yakınsaktır denir ve $x_n \xrightarrow{o} x$ şeklinde gösterilir. Ayrıca her n ve p için $|x_n - x_{n+p}| \leq y_n \downarrow \theta$ olacak şekilde yine bir (y_n) dizisi varsa (x_n) 'e sıra-Cauchy (ya da o-Cauchy) denir.

2.1.10. Tanım

E bir Riesz uzayı ve $\|\cdot\|$ E üzerinde bir norm olsun. Her $x, y \in E$ için $|x| \leq |y|$ iken $\|x\| \leq \|y\|$ oluyorsa bu norma latis norm denir. Latis normla donatılmış Riesz uzayına normlu Riesz uzayı denir.

Normlu Riesz uzaylarında $\|x\| = \| |x| \|$ sağlandığı açıktır. Teorem 2.1.5 ile aşağıdaki eşitsizlikler yazılabilir.

$$\|x^+ - y^+\| \leq \|x - y\| \text{ ve } \| |x| - |y| \| \leq \|x - y\|.$$

2.2. Vektör Metrik Uzaylar

Bu kesimde uzaklık fonksiyonunun Riesz uzaylarında değer aldığı vektör metrik uzay kavramını ve bazı sonuçlarını vereceğiz. Ayrıca vektör metrik uzaylardaki iki farklı süreklilik tanımını ele alıp karşılaştıracakız [5, 6].

2.2.1. Tanım

X boş olmayan bir küme ve E bir Riesz uzayı olsun. Her $x, y, z \in E$ için

$$i) \theta \leq d(x, y),$$

$$ii) d(x, y) = \theta \Leftrightarrow x = y,$$

$$iii) d(x, y) = d(y, x),$$

$$iii) d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

şartları sağlanırsa $d : X \times X \rightarrow E$ dönüşümüne vektör metrik (ya da E -metrik) denir. Bu durumda (X, d, E) üçlüsü vektör metrik uzay olarak adlandırılır.

Her metrik uzayın bir vektör metrik uzay olduğu açıktır.

Örnek

E bir Riesz uzayı olsun ve $d : E \times E \rightarrow E$ dönüşümü her $x, y \in E$ için $d(x, y) = |x - y|$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda d bir vektör metriktir ve özel olarak mutlak değer metriği olarak adlandırılır.

Örnek

$$\mathbb{R}^2, (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ için } (x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 \leq x_2 \text{ ve } y_1 \leq y_2$$

şeklinde tanımlanan koordinat sıralamasıyla ve

$$(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 < x_2 \text{ ya da } x_1 = x_2, y_1 \leq y_2$$

şeklinde tanımlanan sözlüksel sıralamayla bir Riesz uzayıdır. Bu durumda $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = (\alpha|x_1 - x_2|, \beta|y_1 - y_2|)$ şeklinde tanımlanan $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dönüşümü bir vektör metriktir.

Örnek

$\alpha, \beta \geq 0$ ve $\alpha + \beta > 0$ için $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dönüşümü $d(x, y) = (\alpha|x - y|, \beta|x - y|)$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda d sözlüksel sıralamayla ya da koordinat sıralamasıyla bir vektör metriktir.

2.2.2. Tanım

(X, d, E) bir vektör metrik uzay olsun.

a) $(x_n) \subseteq X$ ve $x \in X$ olsun. Her n için $d(x_n, x) \leq a_n$ ve $a_n \downarrow \theta$ olacak şekilde E 'de bir (a_n) dizisi varsa (x_n) dizisi x 'e vektörel yakınsaktır (ya da E -yakınsaktır) denir ve $x_n \xrightarrow{d,E} x$ ile gösterilir.

b) $(x_n) \subset X$ olsun. Her n ve p için $d(x_n, x_{n+p}) \leq a_n$ ve $a_n \downarrow \theta$ olacak şekilde E 'de bir (a_n) dizisi varsa (x_n) 'ye E -Cauchy dizisidir denir.

c) X uzayındaki her E -Cauchy dizisi E -yakınsak ise X 'e E -tamdır denir.

d) $Y \subset X$ olsun. Her $(x_n) \subseteq Y$ için $x_n \xrightarrow{d,E} x$ iken $x \in Y$ ise Y kümesine E -kapalıdır denir.

Not

$x_n \xrightarrow{d,E} x$ olsun. Bu durumda x limiti tektir ve (x_n) dizisinin her alt dizisi x noktasına E -yakınsar. Ayrıca $y_n \xrightarrow{d,E} y$ ise, $d(x_n, y_n) \xrightarrow{o} d(x, y)$ olur.

2.2.3. Tanım

(X, d, E) bir vektör metrik uzay ve A , X 'in boş olmayan bir alt kümesi olsun. Eğer $\sup \{d(x, y) : x, y \in A\}$ E içinde mevcutsa, A kümesinin E -çapı

$$d(A) = \sup \{d(x, y) : x, y \in A\}$$

biçiminde tanımlanır.

Ayrıca her $x, y \in A$ için $d(x, y) \leq a$ olacak şekilde E 'de bir $a > 0$ varsa A kümesi E -sınırlıdır denir.

2.2.4. Teorem

(X, d, E) bir vektör metrik uzay olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır.

i) Her E -yakınsak dizi bir E -Cauchy dizisidir.

ii) Her E -Cauchy dizisi E -sınırlıdır.

iii) Bir (x_n) E -Cauchy dizisi, $x_{n_k} \xrightarrow{d,E} x$ olacak şekilde bir (x_{n_k}) alt dizisine sahipse, bu durumda $x_n \xrightarrow{d,E} x$ olur.

iv) Eğer (x_n) ve (y_n) E -Cauchy dizisi iseler, bu durumda $(d(x_n, y_n))$ de bir sıra-Cauchy olur.

İspat

i) X 'de $x_n \xrightarrow{d,E} x$ olsun. E 'de $a_n \downarrow \theta$ olacak şekilde bir (a_n) dizisi olduğundan ve her n ve p için

$$d(x_n, x_{n+p}) \leq d(x_n, x) + d(x_{n+p}, x) \leq a_n + a_{n+p} \leq 2a_n$$

sağlandığından (x_n) , X uzayında bir E -Cauchy dizisi olur.

ii) (x_n) , X 'de bir E -Cauchy dizisi olsun. E 'de $a_n \downarrow \theta$ olacak şekilde bir (a_n) dizisi olduğu ve her n ve p için $d(x_n, x_{n+p}) \leq a_n$ sağlandığı için $d(x_n, x_{n+p}) \leq a_1$ elde edilir bu da (x_n) 'nin X uzayında E sınırlı olduğunu gösterir.

iii) (x_n) E -Cauchy dizisi $x_{n_k} \xrightarrow{d,E} x$ olacak şekilde bir (x_{n_k}) alt dizisine sahip olsun. Ayrıca her n için $n \leq n_k$ iken $n_k = n + p$ olsun. Bu durumda E 'de $a_n \downarrow \theta$ ve $b_n \downarrow \theta$ olacak şekilde (a_n) ve (b_n) dizileri vardır ve

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n+p}) + d(x_{n+p}, x) \leq a_n + b_{n+p} \leq a_n + b_n$$

sağlanır. Yani (x_n) , X 'de bir E -yakınsak dizidir.

iv) E uzayında $a_n \downarrow \theta$, $b_n \downarrow \theta$ ve

$$|d(x_n, y_n) - d(x_{n+p}, y_{n+p})| \leq d(x_n, x_{n+p}) + d(y_n, y_{n+p}) \leq a_n + b_n$$

olacak şekilde (a_n) ve (b_n) dizileri var olduğundan $(d(x_n, y_n))$ dizisi E 'de bir α -Cauchy dizisi olur.

2.2.5. Tanım

(X, d, E) bir vektör metrik uzay, $x \in X$, $r > \theta$ olsun. Bu durumda x -merkezli r -yarıçaplı açık ve kapalı yuvarı sırasıyla

$$B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$$

$$B[x, r] = \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$$

biçiminde tanımlarız.

$A \subseteq X$ olsun. Her $x \in A$ için $B(x, r) \subseteq A$ olacak şekilde $r > \theta$ sayısı varsa A kümesi açıktır denir. Her $B(x, r)$ açık yuvarı, açık bir kümedir. Aynı şekilde her $B[x, r]$ kapalı yuvarı, kapalı bir kümedir. Açık alt kümelerden oluşan $\tau_{d,E}$ koleksiyonu X üzerinde bir topolojidir ve bu topolojiye vektör metrik topoloji denir.

2.2.6. Tanım

(X, d, E) bir vektör metrik uzay ve $Y \subseteq X$ olsun.

i) Her $r > \theta$ ve $x \in X$ için $B(x, r) \cap Y \neq \emptyset$ ise Y kümesine $\tau_{d,E}$ -yoğundur denir.

ii) Her $x \in X$ için Y kümesinde $x_n \xrightarrow{d,E} x$ olacak şekilde bir (x_n) dizisi varsa Y 'ye E -yoğundur denir.

Sonuç

(X, d, E) bir vektör metrik uzay ve $Y \subseteq X$, E -Arşimedyan olsun. Eğer Y $\tau_{d,E}$ -yoğun ise Y , E -yoğun olur.

2.2.7. Teorem

E Dedekind tam Riesz uzayı ve X E -tam vektör metrik uzay olsun. X 'in boş olmayan E -kapalı alt kümelerinin azalan bir (F_n) dizisi için $d(F_n) \xrightarrow{o} \theta$ ise, $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ bir tek noktadan oluşur.

İspat

$F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ olsun. Hipotezden her $n \in \mathbb{N}^+$ için $F_n \neq \emptyset$ dir. Bu durumda her n için $x_n \in F_n$ olacak biçimde bir $(x_n) \subseteq X$ dizisi oluşturulabilir. Her n ve p için $d(x_n, x_{n+p}) \leq d(F_n)$ olduğundan (x_n) dizisi bir E -Cauchy dizisi olur. X vektör metrik uzayı, E -tam olduğu için $x_n \xrightarrow{d,E} x$ olacak şekilde bir $x \in X$ vardır. F_n kümeleri azalan ve E -kapalı olduğundan $x_{n+p} \in F_n$ elde edilir. Bu durumda her n için $x \in F_n$ olur.

Şimdi $x, y \in F$ olduğunu farz edelim. Bu durumda her n için $d(x, y) \leq d(F_n)$ olur ve E Dedekind tam olduğundan $d(x, y) = \theta$ elde edilir. Bu da $x = y$ demektir. Yani F kümesi bir tek noktadan oluşur.

2.2.8. Teorem (Baire teoremi)

(X, d, E) bir E -tam vektör metrik uzay olsun. E Dedekind tam ise X bir Baire uzayıdır.

İspat

(X, d, E) bir E -tam vektör metrik uzayı olsun. Ayrıca (A_n) , X 'in $\tau_{d,E}$ -yoğun açık alt kümelerinin bir dizisi iken $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ olsun. X 'in bir Baire uzayı olduğunu göstermek için her $x \in X$ ve $r > \theta$ için $B(x, r)$ açık yuvarıyla A kümesinin kesişiminin boş olmadığını göstermek gerekir. A_1 açık ve X 'de $\tau_{d,E}$ -yoğun olduğundan $a \in E$ için

$B[y_1, r_1] \subset B(x, r) \cap A_1$ olacak şekilde $y_1 \in X$ ve $\theta < r_1 < a$ vardır. A_2 açık ve $\tau_{d,E}$ -yoğun olduğundan $a/2 \in E$ için $B[y_2, r_2] \subset B(y_1, r_1) \cap A_2$ olacak şekilde $y_2 \in X$ ve $\theta < r_2 < a/2$ vardır. Tümevarımla aynı şekilde devam edilirse her n için

$$B[y_{n+1}, r_{n+1}] \subset B(y_n, r_n) \cap A_{n+1} \subset B[y_n, r_n] \text{ ve } r_n < a/n$$

olacak şekilde X uzayında bir (y_n) ve E 'de bir (r_n) dizisi elde edilir. Teorem 2.2.7'den $\bigcap_{n=1}^{\infty} B[y_n, r_n]$ kümesi tek bir noktadan oluşur. Bu durumda

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B[y_n, r_n] \subset B(x, r) \cap A$$

olduğundan $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ elde edilir.

Şimdi vektör metrik uzaylardaki topolojik ve vektörel süreklilik kavramlarını verelim [5].

2.2.9. Tanım

(X, d, E) ve (Y, ρ, F) iki vektör metrik uzay, $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon ve $x \in X$ olsun.

i) Her $b > \theta_F$ için $y \in X$ ve $d(x, y) < a$ iken $\rho(f(x), f(y)) < b$ olacak şekilde E içinde bir $a > \theta_E$ varsa f fonksiyonuna x noktasında topolojik olarak süreklidir denir. f , X uzayının her noktasında topolojik olarak süreklirse f 'ye topolojik süreklidir denir.

ii) $(x_n) \subseteq X$ olsun. X 'de $x_n \xrightarrow{d, E} x$ iken Y 'de $f(x_n) \xrightarrow{\rho, F} f(x)$ oluyorsa f fonksiyonuna x noktasında vektörel olarak süreklidir denir. f , X 'in her noktasında vektörel olarak süreklirse f 'ye vektörel süreklidir denir.

2.2.10. Teorem

(X, d, E) ve (Y, ρ, F) vektör metrik uzaylar ve F Arşimedyan Riesz uzayı olsun. Eğer $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonu topolojik süreklirse, f vektörel süreklidir.

İspat

$x_n \xrightarrow{d,E} x$ olsun. Bu durumda her n için $d(x_n, x) \leq a_n \downarrow \theta_E$ olacak şekilde bir $(a_n) \subseteq E$ dizisi vardır. $b \in F$ ve $b > \theta_F$ olsun. f fonksiyonunun x noktasındaki topolojik sürekliliğinden dolayı her n için $\rho(f(x), f(x_n)) < (1/n)b$ iken $d(x, x_n) < b_n$ olacak şekilde E uzayında $b_n = b_n((1/n)b; x)$ elemanları vardır. Daha sonra her n için $\rho(f(x_n), f(x)) < (1/n)b$ iken $d(x_n, x) \leq a_n < c_n$ olacak şekilde E 'de $c_n = a_n \vee b_n$ elemanları bulunabilir. F Arşimedyan Riesz uzayı olduğu için $(1/n)b \downarrow \theta_F$ elde edilir. Dolayısıyla $f(x_n) \xrightarrow{\rho,F} f(x)$ olur.

2.2.11. Teorem

(X, d, E) ve (Y, ρ, F) vektör metrik uzaylar ve $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır.

i) F Dedekind σ -tam ve f vektörel sürekliyse, $d(x_n, x) \downarrow \theta_E$ iken $\rho(f(x_n), f(x)) \downarrow \theta_F$ olur.

ii) E Dedekind σ -tam ve $d(x_n, x) \downarrow \theta_E$ iken $\rho(f(x_n), f(x)) \downarrow \theta_F$ oluyorsa bu durumda f vektörel sürekli olur.

iii) E ve F Dedekind σ -tam olsun. Bu durumda f fonksiyonunun vektörel sürekli olması için gerek ve yeter şart $d(x_n, x) \downarrow \theta_E$ iken $\rho(f(x_n), f(x)) \downarrow \theta_F$ olmasıdır.

İspat

i) $d(x_n, x) \downarrow \theta_E$ ise $x_n \xrightarrow{d,E} x$ dir. f fonksiyonunun vektörel sürekliliğinden dolayı her n için $\rho(f(x_n), f(x)) \leq b_n \downarrow \theta_F$ olacak şekilde $(b_n) \subseteq F$ dizisi vardır. Daha sonra F 'nin Dedekind σ -tamlığından $\rho(f(x_n), f(x)) \downarrow \theta_F$ elde edilir.

ii) $x_n \xrightarrow{d,E} x$ olsun. Bu durumda vektörel yakınsaklığın tanımından her n için $d(x_n, x) \leq a_n \downarrow \theta_E$ olacak şekilde bir $(a_n) \subseteq E$ dizisi vardır. Daha sonra E uzayının Dedekind σ -tamlığından $d(x_n, x) \downarrow \theta_E$ elde edilir. Hipotezden $\rho(f(x_n), f(x)) \downarrow \theta_F$ dir bu da

$f(x_n) \xrightarrow{\rho, F} f(x)$ demektir.

iii) İspat, (i) ve (ii) şartının bir sonucu olarak elde edilir.

Örnek

(X, d, E) bir vektör metrik uzay olsun. Ayrıca X uzayında $x_n \xrightarrow{d, E} x$ ve $y_n \xrightarrow{d, E} y$ olacak şekilde (x_n) ve (y_n) dizileri var olsun. Bu durumda $d(x_n, y_n) \xrightarrow{o} d(x, y)$ olur ve $d : X \times X \rightarrow E$ fonksiyonu vektörel süreklidir. Burada $E, |\cdot|$ mutlak değer vektör metriğiyle, X^2 ise her $z = (x_1, y_1), w = (x_2, y_2)$ için $\tilde{d}(z, w) = d(x_1, x_2) + d(y_1, y_2)$ şeklinde tanımlanan vektör metrikle bir vektör metrik uzaydır.

2.2.12. Teorem

(X, d, E) ve (Y, ρ, F) vektör metrik uzaylar ve $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonu vektörel sürekli olsun. Bu durumda her F -kapalı $B \subseteq Y$ için $f^{-1}(B) \subseteq X$, E -kapalıdır.

İspat

$(x_n) \subseteq f^{-1}(B)$ ve $x_n \xrightarrow{d, E} x$ olsun. f vektörel sürekli olduğundan $f(x_n) \xrightarrow{\rho, F} f(x)$ elde edilir. Hipotezden B , F -kapalı olduğundan $x \in f^{-1}(B)$ olur. Yani $f^{-1}(B)$, E -kapalıdır.

2.2.13. Tanım

E ve F Riesz uzayları olsun.

i) Her $a = (e_1, f_1), b = (e_2, f_2) \in E \times F$ için iki-mutlak değerli vektör metrik olarak adlandırılan $|\cdot| : (E \times F) \times (E \times F) \rightarrow (E \times F)$ dönüşümü

$$|a - b| = (|e_1 - e_2|, |f_1 - f_2|)$$

biçiminde tanımlanır. Bu durumda $E \times F$ bir vektör metrik uzay olur.

ii) $d : X \times X \rightarrow E$ ve $\rho : X \times X \rightarrow F$ sırasıyla X üzerindeki E ve F değerli vektör metrikler olsun. Her $x, y \in X$ için çift-vektör metrik olarak adlandırılan $\delta : X \times X \rightarrow E \times F$ dönüşümü

$$\delta(x, y) = (d(x, y), \rho(x, y))$$

biçiminde tanımlanır.

Örnek

(X, d, E) ve (Y, ρ, F) vektör metrik uzaylar olsun.

i) $f : X \rightarrow E$ ve $g : X \rightarrow F$ dönüşümleri vektörel sürekli olsun. Bu durumda her $x \in X$ için $h(x) = (f(x), g(x))$ şeklinde tanımlanan $h : X \rightarrow E \times F$ dönüşümü δ çift-vektör metriğiyle ve $|\cdot|$ iki-mutlak değerli vektör metrikle vektörel sürekli dir.

ii) $p_E : E \times F \rightarrow E$ ve $p_F : E \times F \rightarrow F$ projeksiyon dönüşümleri olsun. Her $x \in X$ için $h : X \rightarrow E \times F$ dönüşümü $h(x) = (f(x), g(x))$ şeklinde tanımlansın ve $f = p_E h$ ve $g = p_F h$ olsun. Bu durumda h vektörel sürekliyse, p_E ve p_F vektörel sürekli olduğu için f ve g de vektörel sürekli olur.

2.2.14. Tanım

(X, d, E) ve (Y, ρ, F) vektör metrik uzaylar olsun. Her $z = (x_1, y_1), w = (x_2, y_2) \in X \times Y$ için çarpımsal vektör metrik olarak adlandırılan $\pi : (X \times Y) \times (X \times Y) \rightarrow E \times F$ dönüşümü

$$\pi(z, w) = (d(x_1, x_2), \rho(y_1, y_2))$$

biçiminde tanımlanır. Bu durumda $(X \times Y, \pi, E \times F)$ bir vektör metrik uzay olur. Ayrıca $X \times Y$ üzerinde tanımlanan sırasıyla X ve Y değerli projeksiyon dönüşümleri p_X ve p_Y de vektörel sürekli olur. $f : (Z, \delta, G) \rightarrow (X \times Y, \phi, E \times F)$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda f 'nin vektörel sürekli olması için gerek ve yeter şart hem $p_X f$ hem de $p_Y f$

fonksiyonlarının vektörel sürekli olmasıdır.

Örnek

(X, d, E) ve (Y, ρ, E) vektör metrik uzaylar ve $f : X \rightarrow E$ ve $g : Y \rightarrow E$ dönüşümleri vektörel sürekli olsun. Bu durumda her $x \in X, y \in Y$ için $h(x, y) = |f(x) - g(y)|$ şeklinde tanımlanan $h : X \times Y \rightarrow E$ dönüşümü çarpımsal vektör metrik π ve mutlak değerli vektör metrik $|\cdot|$ ile vektörel sürekli.

Örnek

(X, d, E) ve (Y, ρ, F) vektör metrik uzaylar ve $f : X \rightarrow E$ ve $g : Y \rightarrow F$ dönüşümleri vektörel sürekli olsun. Bu durumda her $x \in X$ ve $y \in Y$ için $h(x, y) = (f(x), g(y))$ şeklinde tanımlanan $h : X \times Y \rightarrow E \times F$ dönüşümü çarpımsal vektör metrik π ve iki-mutlak değerli vektör metrik $|\cdot|$ ile vektörel sürekli.

Yukarıdaki örneklerin bir sonucu olarak aşağıdakiler elde edilir.

Sonuç

i) $f : (X, d, E) \rightarrow (Y, \eta, G)$ ve $g : (X, \rho, F) \rightarrow (Z, \xi, H)$ fonksiyonları vektörel sürekli olsun. Ayrıca her $x \in X$ için $h : X \rightarrow Y \times Z$ fonksiyonu $h(x) = (f(x), g(x))$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda $h, E \times F$ -değerli çift-vektör metrik δ ve $G \times H$ -değerli çarpımsal vektör metrik π ile vektörel sürekli.

ii) G bir Riesz uzayı ve $f : (X, d, E) \rightarrow G$ ve $g : (Y, \rho, F) \rightarrow G$ fonksiyonları vektörel sürekli olsun. Ayrıca her $x \in X$ ve $y \in Y$ için $h : X \times Y \rightarrow G$ fonksiyonu $h(x, y) = |f(x) - g(y)|$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda $h, E \times F$ -değerli çarpımsal vektör metrik π ve mutlak değerli vektör metrik $|\cdot|$ ile vektörel sürekli.

iii) $f : (X, d, E) \rightarrow (Z, \eta, G)$ ve $g : (Y, \rho, F) \rightarrow (W, \xi, H)$ fonksiyonları vektörel sürekli olsun ve her $x \in X$ ve $y \in Y$ için $h : X \times Y \rightarrow Z \times W$ fonksiyonu $h(x, y) = (f(x), g(y))$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda h , $E \times F$ -değerli ve $G \times H$ -değerli çarpımsal vektör metrik π ile vektörel süreklidir.

2.2.15. Önerme

$(X \times Y, \pi, E \times F)$ çarpımsal vektör metrikle bir vektör metrik uzay olsun. Ayrıca $(z_n) = (x_n, y_n) \subseteq X \times Y$ bir dizi ve $z = (x, y) \in X \times Y$ olsun. Bu durumda $z_n \xrightarrow{\pi, E \times F} z$ gerek ve yeter şart $x_n \xrightarrow{d, E} x$ ve $y_n \xrightarrow{\rho, F} y$.

2.3. Üçgensel Normlar ve Üçgensel Conormlar

Klasik metrik uzaylardaki üçgen eşitsizliğini istatistiksel metrik uzaylara (ya da şimdiki güncel kullanımı olan olasılıksal metrik uzaylara) genelllemek için kullanılan üçgensel normlar (ya da kısaca t-normlar) ilk olarak 1942'de Karl Menger tarafından tanımlanmıştır [16]. Daha sonra bu konuyla ilgili birçok yayın yapılmıştır [4, 14, 18].

2.3.1. Tanım

$T : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ ikili bir işlem olsun. Her $x, y, z \in [0, 1]$ için

- i) $T(x, y) = T(y, x)$ (değişme özelliği)
- ii) $T(x, T(y, z)) = T(T(x, y), z)$ (birleşme özelliği)
- iii) $y \leq z$ iken $T(x, y) \leq T(x, z)$ (monotonluk)
- iv) $T(x, 1) = x$ (sınırlılık şartı)

şartları sağlanırsa T 'ye üçgensel norm veya t-norm denir.

Sürekli t-normlar için literatürde $T(x, y)$ yerine $x \star y$ gösterimi kullanılır. Fuzzy metrik uzaylar bölümünde biz de bu şekilde kullanacağız.

Örnek

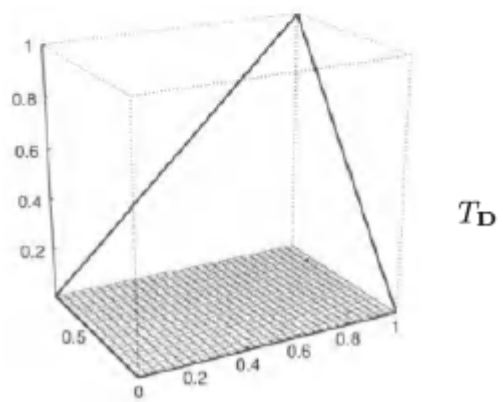
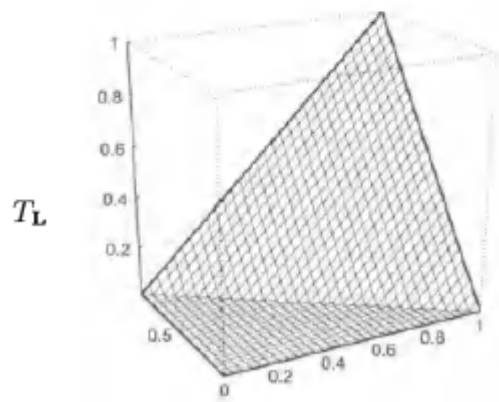
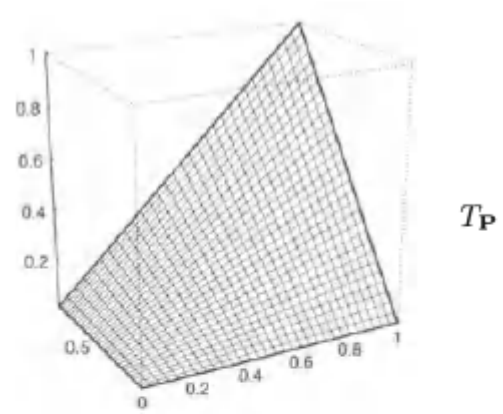
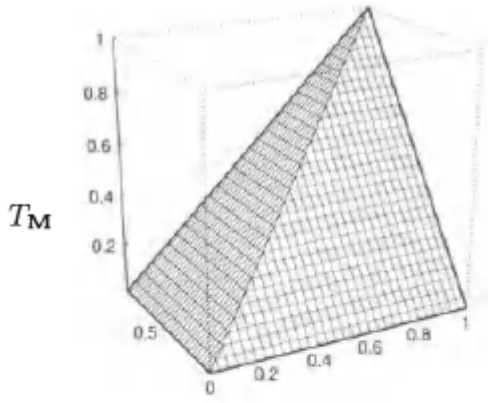
En yaygın kullanılan dört t-normu ve grafiklerini aşağıdaki biçimde verebiliriz.

$$T_M(x, y) = \min(x, y) \text{ (minimum)}$$

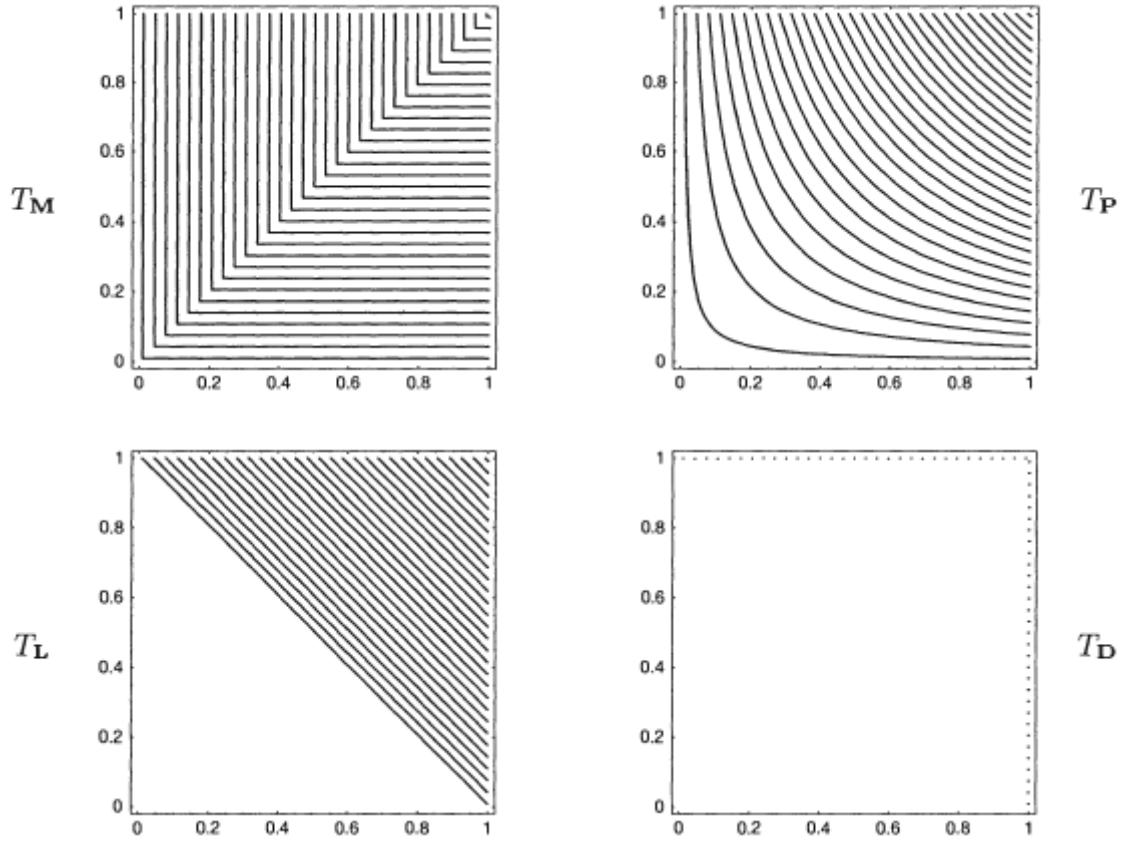
$$T_P(x, y) = x \times y \text{ (çarpımsal)}$$

$$T_L(x, y) = \max(x + y - 1, 0) \text{ (Lukasiewicz t-norm)}$$

$$T_D(x, y) = \begin{cases} 0 & , (x, y) \in [0, 1)^2 \\ \min(x, y) & , \text{diğer} \end{cases} \text{ (Güçlü t-norm)}$$



Şekil 2.1. Dört temel t-normun üç boyutlu gösterimi



Şekil 2.2. Dört temel t-normun izdüşümü

Sonuç

Tanımdan her T t-normu için aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

i) Her $x \in [0, 1]$ için $T(0, x) = T(x, 0) = 0$ ve $T(1, x) = x$ dir. Bu durumda bütün t-normlar $[0, 1]^2$ birim karesinin sınırında çakışır.

ii) t-normun değişme ve monotonluk özelliğinden $x_1 \leq x_2$ ve $y_1 \leq y_2$ iken $T(x_1, y_1) \leq T(x_1, y_2) = T(y_2, x_1) \leq T(y_2, x_2) = T(x_2, y_2)$ olur.

t-normlar birim kareden birim aralığa giden fonksiyonlar olduğundan t-normların karşılaştırılması da noktasal sıralamayla yapılır.

iii) Her T t-normu ve her $(x, y) \in (0, 1)^2$ için $T(x, y) \geq 0 = T_D(x, y)$ elde edilir. Bu yüzden en zayıf t-norm T_D ve en kuvvetli t-norm ise T_M olur.

$$T_D \leq T \leq T_M.$$

iv) En çok kullanılan dört t-norm için ise aşağıdaki sıralamayı verebiliriz.

$$T_D < T_L < T_P < T_M.$$

2.3.2. Tanım

i) Herhangi bir T t-normu sürekliyse ve $0 < x < 1$ iken $T(x, x) < x$ şartını sağlıyorsa Arşimedyen olarak adlandırılır.

ii) Herhangi bir T t-normu sürekliyse ve $x > 0$ ve $y < z$ iken $T(x, y) < T(x, z)$ şartını sağlıyorsa kesin (tam, mutlak) olarak adlandırılır.

Sonuç

i) T bir kesin t-norm ise bu durumda $x < u$ ve $y < v$ iken $T(x, y) < T(u, v)$ sağlanır.

ii) Her kesin T t-normu Arşimedyandır fakat tersi genelde doğru değildir. Örneğin; T_M t-normu Arşimedyen değildir bu yüzden kesin de değildir, T_P kesindir dolayısıyla aynı zamanda Arşimedyandır, T_L Arşimedyandır fakat kesin değildir. T_D t-normu ise sürekli değildir aynı zamanda ne Arşimedyandır ne de kesindir.

Şimdi üçgensel normların duali olan üçgensel conormların tanımını verelim.

2.3.3. Tanım

$S : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ ikili bir işlem olsun. Her $x, y, z \in [0, 1]$ için

i) $S(x, y) = S(y, x)$ (değişme özelliği)

ii) $S(x, S(y, z)) = S(S(x, y), z)$ (birleşme özelliği)

iii) $y \leq z$ iken $S(x, y) \leq S(x, z)$ (monotonluk)

iv) $S(x, 0) = x$ (sınırlılık şartı)

şartları sağlanırsa S 'ye üçgensel conorm veya t-conorm denir.

2.3.4. Önerme

$S : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ işleminin bir t-conorm olması için gerek ve yeter şart her $x, y \in [0, 1]$ için

$$S(x, y) = 1 - T(1 - x, 1 - y) \quad (2.1)$$

olacak şekilde bir T t-normunun var olmasıdır.

İspat

T bir t-norm olsun. Bu durumda (2.1)'de tanımlanan S fonksiyonu t-conormun dört şartını da sağlar. Diğer taraftan S bir t-conorm ise her $x, y \in [0, 1]$ için

$$T(x, y) = 1 - S(1 - x, 1 - y) \quad (2.2)$$

olacak şekilde bir $T : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonunu tanımlayalım. Bu durumda T 'nin bir t-norm olduğu ve (2.1)'i sağladığı açıktır.

(2.1)'de verilen S t-conormu, T 'nin dual t-conormu olarak ve (2.2)'de verilen T t-normu da S 'nin dual t-normu olarak adlandırılır. Ayrıca (2.1)'de verilen duallikten dolayı t-normların birçok özelliği t-conormlar için de verilebilir.

Örnek

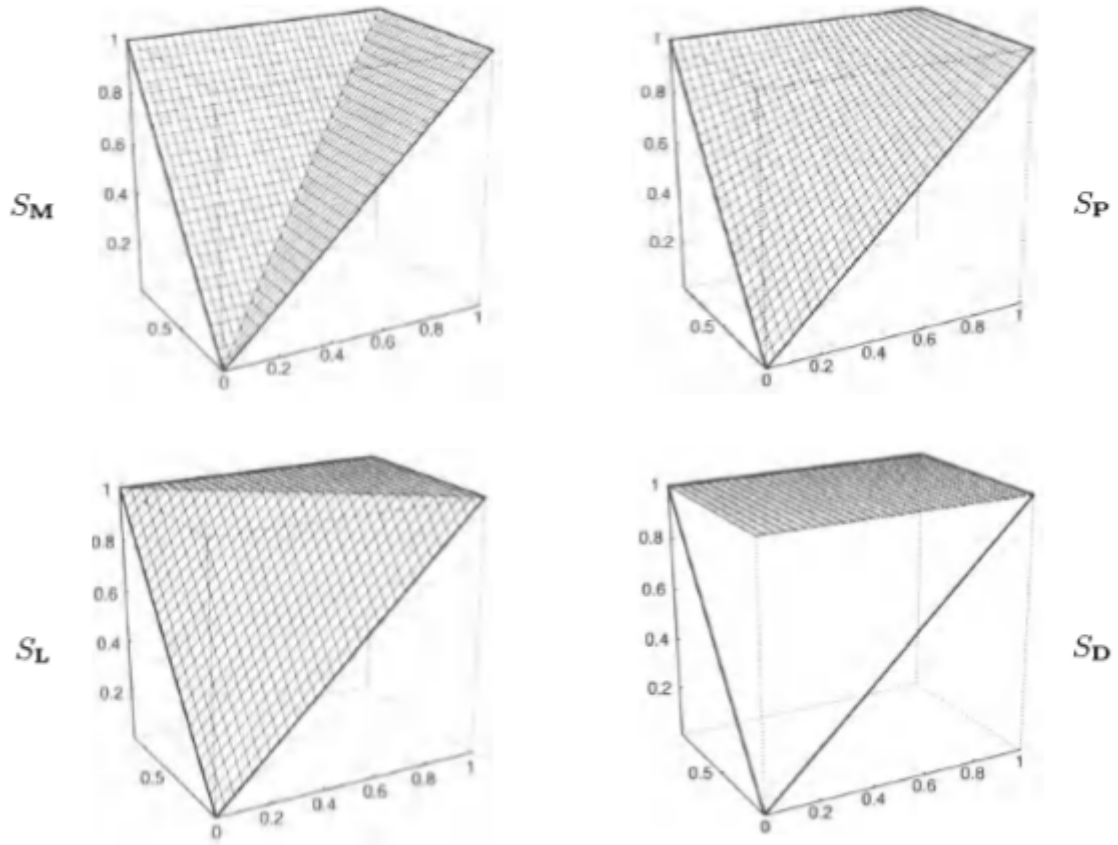
En yaygın kullanılan dört t-conormu ve grafiklerini aşağıdaki biçimde verebiliriz.

$$S_M(x, y) = \max(x, y) \text{ (maksimum)}$$

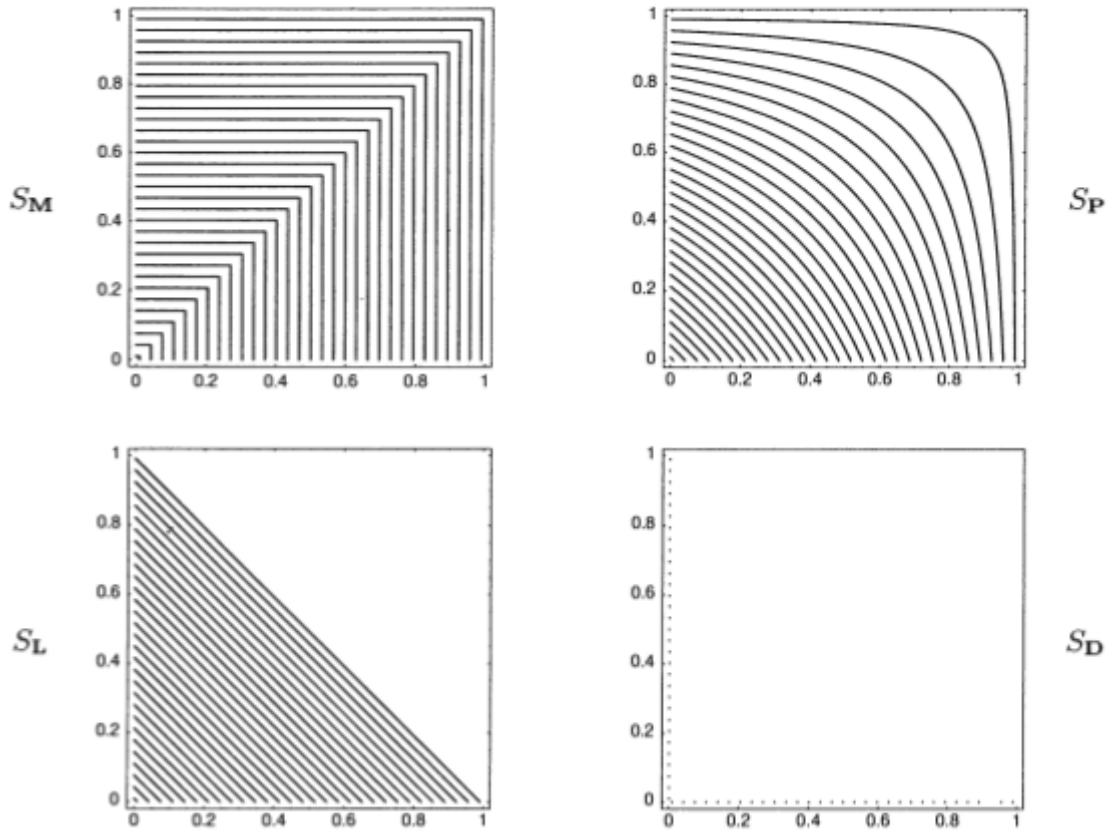
$S_P(x, y) = x + y - x.y$ (olasılıksal toplam)

$S_L(x, y) = \min(x + y, 1)$ (Lukasiewicz t-conorm veya sınırlı toplam)

$$S_D(x, y) = \begin{cases} 1 & , (x, y) \in (0, 1]^2, \\ \max(x, y) & , \text{diğer.} \end{cases} \quad (\text{Güçlü t-conorm})$$



Şekil 2.3. Dört temel t-conormun üç boyutlu gösterimi



Şekil 2.4. Dört temel t-conormun izdüşümü

Sonuç

i) Önerme 2.3.4'daki ispat her bir t-normun başka bir t-conormun dual işlemi olduğunu gösterir. Bu durumda (T_M, S_M) , (T_P, S_P) , (T_L, S_L) ve (T_D, S_D) t-norm ve t-conorm çiftleri karşılıklı olarak birbirleriyle dualdirler.

ii) Her $x \in [0, 1]$ için $S(1, x) = S(x, 1) = 1$ ve $S(0, x) = x$ sağlandığından bütün t-conormlar $[0, 1]^2$ birim karesinin sınırında çakışır.

iii) Duallik sıralamayı değiştirir. Yani S_1 ve S_2 t-conormları sırasıyla T_1 ve T_2 t-normlarının dualleri olsun ve $T_1 \leq T_2$ sağlansın. Bu durumda $S_1 \geq S_2$ elde edilir. Bu yüzden en zayıf t-conorm S_M ve en kuvvetli t-conorm ise S_D olur.

$$S_M \leq S \leq S_D$$

iv) En çok kullanılan dört t-conorm için aşağıdaki sıralamayı verebiliriz.

$$S_M < S_P < S_L < S_D$$

Fuzzy metrik uzaylarda sürekli t-normlara ihtiyacımız olduğundan şimdi t-normların sürekliliğini inceleyelim. Güçlü t-norm T_D ve güçlü t-conorm S_D 'nin sürekli olmadığı açıktır. Sürekliliğin yanısıra alt-yarı ve üst-yarı sürekliliği de ele alacağız. Her $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in [0, 1]^{\mathbb{N}}$ dizileri için $F(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n, y_n)$ sağlanıyorsa F sürekli denir. Ayrıca $[0, 1]^2$ birim karesi kompakt olduğundan F fonksiyonunun sürekliliği, düzgün sürekliliğine denktir.

2.3.5. Önerme

$T : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ azalmayan bir fonksiyon olsun. Bu durumda T 'nin sürekli olması için gerek ve yeter şart T 'nin her bir bileşende sürekli olmasıdır. Yani her $x_0, y_0 \in [0, 1]$ için hem $T(x_0, \cdot) : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ düşey kesiti hem de $T(\cdot, y_0) : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ yatay kesiti her bir değerde sürekli.

İspat

$T : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonu sürekli olsun. Bu durumda T 'nin her bileşende sürekli olduğu açıktır.

Diğer taraftan T fonksiyonu her bir bileşende sürekli olsun. Her $\varepsilon > 0$ ve $(x_0, y_0) \in [0, 1]^2$ için $(x_n), (y_n) \subseteq [0, 1]$ dizileri sırasıyla (x_0) ve (y_0) noktasına yakınsayan diziler olsun. Şimdi her $n \in \mathbb{N}$ için

$$a_n \leq x_n \leq b_n \text{ ve } a_n \uparrow x_0, b_n \downarrow x_0,$$

$$c_n \leq y_n \leq d_n \text{ ve } c_n \uparrow y_0, d_n \downarrow y_0,$$

olacak şekilde dört monoton dizi oluşturalım. T fonksiyonunun ikinci bileşende sürekli olması $T(x_0, \cdot)$ düşey kesitinin sürekli olması demektir. Yani, T 'nin monotonluğundan dolayı her $n \geq N$ için

$$T(x_0, y_0) - \varepsilon < T(x_0, c_N) \leq T(x_0, y_n) \leq T(x_0, d_N) < T(x_0, y_0) + \varepsilon$$

olacak şekilde $N \in \mathbb{N}$ vardır. T ikinci bileşende sürekli olduğu için $T(., c_N)$ ve $T(., d_N)$ yatay kesitleri sürekli. Bu durumda yine T fonksiyonunun monotonluğundan dolayı her $m \geq M$ ve $n \geq N$ için

$$T(x_0, c_N) - \varepsilon < T(a_M, c_N) \leq T(x_m, y_n) \leq T(b_M, d_N) < T(x_0, d_N) + \varepsilon$$

olacak şekilde $M \in \mathbb{N}$ bulunur. $K = \max(M, N)$ olsun. Bu durumda her $k \geq K$ için

$$T(x_0, y_0) - 2\varepsilon < T(x_k, y_k) < T(x_0, y_0) + 2\varepsilon$$

elde edilir. Bu da $(T(x_k, y_k))$ dizisinin $T(x_0, y_0)$ noktasına yakınsadığını gösterir. Yani T fonksiyonu (x_0, y_0) noktasında sürekli.

2.3.6. Tanım

$T : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ bir fonksiyon ve $(x_0, y_0) \in [0, 1] \times [0, 1]$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için

$$(x, y) \in (x_0 - \delta, x_0] \times (y_0 - \delta, y_0] \text{ iken } T(x, y) > T(x_0, y_0) - \varepsilon,$$

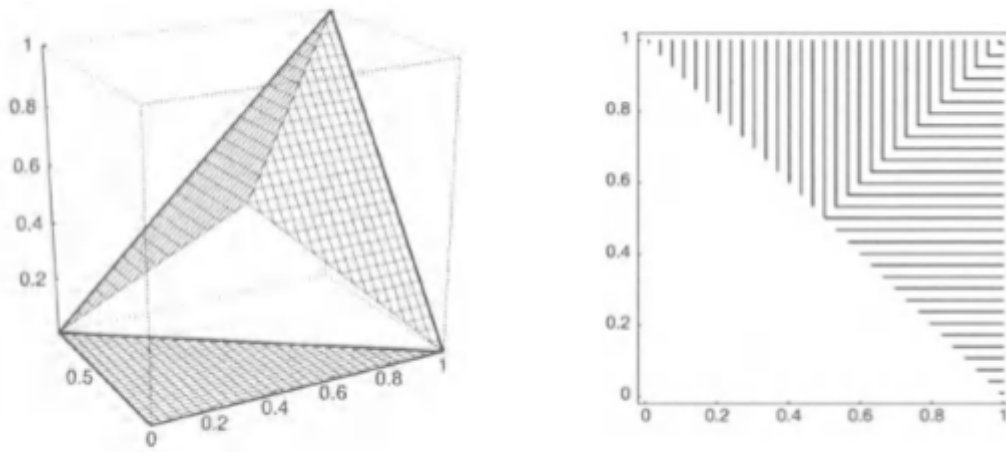
$$(x, y) \in [x_0, x_0 + \delta) \times [y_0, y_0 + \delta) \text{ iken } T(x, y) < T(x_0, y_0) + \varepsilon,$$

olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı varsa T 'ye sırasıyla alttan ve üstten yarı sürekli denir.

Örnek

$$T^{nM}(x, y) = \begin{cases} 0 & , \quad x + y \leq 1, \\ \min(x, y) & , \quad \text{diğer,} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon bir t- normdur ve nilpotent minimum olarak adlandırılır. T^{nM} alt-yarı sürekli fakat üst-yarı sürekli değildir. Dolayısıyla sürekli de değildir. Güçlü çarpım olarak adlandırılan T_D t-normu ise üstten yarı sürekli fakat alttan yarı sürekli değildir.



Şekil 2.5. Nilpotent minimum t-normunun üç boyutlu gösterimi (solda) ve izdüşümü (sağda)

Not

Bir T t-normunun alttan (üstten) yarı sürekli olması için gerek ve yeter şart $S(x, y) = 1 - T(1 - x, 1 - y)$ şeklinde verilen dual S t-conormunun sırasıyla üstten (alttan) yarı sürekli olmasıdır.

2.3.7. Önerme

$T : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ azalmayan bir fonksiyon olsun. T 'nin alttan yarı sürekli olması için gerek ve yeter şart T 'nin her bir bileşende soldan sürekli olmasıdır. Yani her $x_0, y_0 \in [0, 1]$ ve her $(x_n), (y_n) \in [0, 1]^{\mathbb{N}}$ için

$$\sup\{T(x_n, y_0) | n \in \mathbb{N}\} = T(\sup\{x_n | n \in \mathbb{N}\}, y_0),$$

$$\sup\{T(x_0, y_n) | n \in \mathbb{N}\} = T(x_0, \sup\{y_n | n \in \mathbb{N}\}) \text{ sağlanır.}$$

Aynı şekilde yine $T : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ azalmayan fonksiyonu için üst yarı süreklilik her bir bileşen için sağdan sürekliliğe denktir. Ayrıca herhangi bir t-normun değişme özelliğinden dolayı alttan (üstten) yarı sürekli olması için gerek ve yeter şart ilk bileşeninde soldan (sağdan) sürekli olmasıdır.

2.3.8. Tanım

Herhangi bir T t-normu ya da S t-conormu $[0, 1]^2$ birim karesinin sınırında sürekliyse sınır süreklidir denir.

Örnek

$T : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonu bir t-norm olsun.

$$T(x, y) = \begin{cases} 0 & , (x, y) \in (0, 0.5)^2 \\ \min(x, y) & , \text{diğer} \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda T sınır süreklidir fakat soldan sürekli değildir.

Örnek

$T : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonu bir t-norm olsun.

$$T(x, y) = \begin{cases} 0 & , (x, y) \in (0, 1)^2 \setminus [0.5, 1]^2 \\ \min(x, y) & , \text{diğer} \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda T , $(1, 1)$ noktasında süreklidir fakat sınır sürekli değildir.

2.4. Olasılıksal Metrik Uzaylar

1906'da M. Fréchet tarafından tanımlanan metrik uzaylar kavramını 1942'de K. Menger iki nokta arasındaki mesafeyi negatif olmayan bir sayıyla ilişkilendirerek geliştirip genelledi. Daha sonra B. Schweizer ve A. Sklar teoriye büyük katkıda bulundu [15–18].

f reel değerli bir fonksiyon olmak üzere $l^-f(x)$ ve $l^+f(x)$ sırasıyla f 'nin soldan ve sağdan limitini gösterebilir.

f , $[a, b]$ üzerinde tanımlı reel değerli azalmayan bir fonsiyon ise l^-f ve l^+f sırasıyla

$$l^-f(x) = \begin{cases} f(a) & , \quad x = a \\ \sup\{f(t) | a \leq t < x\} & , \quad a < x \leq b \end{cases}$$

$$l^+f(x) = \begin{cases} \inf\{f(t) | x < t \leq b\} & , \quad a \leq x < b \\ f(b) & , \quad x = b \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır.

2.4.1. Tanım

F , reel sayılar üzerinde azalmayan bir fonsiyon olsun. Eğer $F(-\infty) = 0$ ve $F(\infty) = 1$ ise F 'ye dağılım fonsiyonu denir.

Dağılım fonsiyonları olasılık kavramıyla şu şekilde ilişkilendirilebilir: X bir miktarı gösterebilir. Bu durumda $x \in \mathbb{R}$ için X 'in x sayısından küçük olma ihtimali $l^-F(x)$, X 'in x 'den büyük olmama ihtimali $l^+F(x)$ ve X 'in x 'e eşit olma ihtimali ise $l^+F(x) - l^-F(x)$ ile gösterilir.

2.4.2. Tanım

$(-\infty, \infty)$ üzerinde soldan sürekli olan bütün dağılım fonsiyonlarının kümesi Δ ile gösterilsin. Ayrıca $l^+F(-\infty) = F(-\infty) = 0$ ve $l^-F(\infty) = F(\infty) = 1$ olacak şekilde F fonsiyonlarından oluşan ve Δ 'nın alt kümesi olan küme de D ile gösterilsin.

$F, G \in \Delta$ ve $x \in \mathbb{R}$ olsun. $F \leq G$ gerek ve yeter şart $F(x) \leq G(x)$ sıralamasıyla Δ , kısmi sıralı bir kümedir. Ayrıca $A \subseteq \mathbb{R}$ için $\sup\{F(x) | x \in A\} = F(\sup\{x | x \in A\})$ sağlanır.

2.4.3. Tanım

$F : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ azalmayan bir fonsiyon olsun. F , soldan sürekliyse ve $F(0) = 0$

şartını sağlıyorsa uzaklık dağılım fonksiyonu olarak adlandırılır. Bütün uzaklık dağılım fonksiyonlarının kümesi Δ^+ ile gösterilir.

Ayrıca $\iota F(\infty) = F(\infty) = 1$ olacak şekilde F fonksiyonlarından oluşan ve Δ^+ 'nin alt kümesi olan küme de D^+ ile gösterilir.

Örnek

Herhangi bir $a \in \mathbb{R}$ için

$$\varepsilon_a(x) = \begin{cases} 0 & , \quad -\infty \leq x \leq a \\ 1 & , \quad a < x \leq \infty \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon bir dağılım fonksiyonudur, Δ kümesindedir ve a noktasındaki birim adım fonksiyonu olarak adlandırılır.

Dikkat edilirse $b \leq a$ iken $\varepsilon_a \leq \varepsilon_b$ olur. Ayrıca $\varepsilon_{-\infty}$ Δ kümesinin maximal elemanıyken, ε_{∞} minimal elemanıdır.

Örnek

$-\infty < a < b < \infty$ olacak şekilde herhangi bir a, b için

$$U_{ab}(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \in [-\infty, a] \\ \frac{x-a}{b-a} & , \quad x \in [a, b] \\ 1 & , \quad x \in [b, \infty] \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon D kümesindedir ve $[a, b]$ üzerindeki düzgün dağılım fonksiyonu olarak adlandırılır.

2.4.4. Tanım

X boş olmayan bir küme ve $F : X \times X \rightarrow D^+$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y, z \in X$ ve $t, s \geq 0$ için

$$i) F_{xy}(0) = 0,$$

$$ii) \text{ Her } t > 0 \text{ için } F_{xy}(t) = 1 \Leftrightarrow x = y,$$

$$iii) F_{xy}(t) = F_{yx}(t),$$

$$iv) F_{xy}(t) = 1 \text{ ve } F_{yz}(s) = 1 \text{ iken } F_{xz}(t+s) = 1$$

şartları sağlanırsa (X, F) ikilisi olasılıksal (probabilistik) metrik uzay olarak adlandırılır.

Burada $F_{xy}(t)$, herhangi bir t reel sayısı için x ve y arasındaki uzaklığın t sayısından az olma ihtimali olarak yorumlanır. Bu durumda tanım 2.4.4'deki ilk üç şartın alışılmış metrik uzaydaki pozitiflik, özdeşlik ve simetriklik şartının bir genellemesi olduğu görülebilir. $iv)$ şart ise metrik uzaydaki üçgen eşitsizliğinin minimal bir genellemesidir. Şöyle ki; eğer x ve y arasındaki uzaklık kesinlikle t 'den küçükse ve yine y ve z arasındaki uzaklık kesinlikle s 'den küçükse bu durumda x ve z arasındaki uzaklık da kesin olarak $t + s$ sayısından küçüktür.

Örnek

(X, d) bir metrik uzay ve

$$H(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \leq 0 \\ 1 & , \quad x > 0 \end{cases}$$

olarak tanımlanan bir dağılım fonksiyonu olsun. Bu durumda her $x, y \in X$ ve $t > 0$ için $F_{xy}(t) = H(t - d(x, y))$ şeklinde tanımlanan ve d metriği tarafından üretilen F olasılıksal metriğini bulabiliriz. Böylece her metrik uzay olasılıksal metrik uzayın özel bir durumu olur.

Diğer taraftan her t için $x \neq y$ iken $F_{xy}(t) = 1$ in sağlanmadığı durumlarda Tanım 2.4.4'deki $iv)$ şartı zayıf ve yetersiz kalacaktır. Bu nedenle üçgen eşitsizliğinin genelleştirilmiş daha güçlü bir versiyonunu bulma ihtiyacı ortaya çıkmıştır.

2.4.5. Tanım

(X, F) olasılıksal bir metrik uzay olsun. Bu durumda bir üçgen eşitsizliğinin evrensel olması için gerek ve yeter şart bu eşitsizliğin farklı olsun ya da olmasın bu uzaydaki bütün üçlü noktalar için sağlanmasıdır.

2.4.6. Tanım

X boş olmayan bir küme ve $F : X \times X \rightarrow D^+$ bir fonksiyon olsun. Ayrıca τ her $a, b \in [0, 1]$ için

$$a) 0 \leq \tau(a, b) \leq 1,$$

$$b) a \leq c \text{ ve } b \leq d \text{ iken } \tau(a, b) \leq \tau(c, d),$$

$$c) \tau(a, b) = \tau(b, a),$$

$$d) \tau(1, 1) = 1,$$

$$e) a > 0 \text{ için } \tau(a, 1) > 0$$

özelliklerini sağlayan iki-değerli bir fonksiyon olsun. Bu durumda her $x, y, z \in X$ ve $t, s \geq 0$ için Tanım 2.4.4'deki ilk üç şartla birlikte

$$ivm) \tau(F_{xy}(t), F_{yz}(s)) \leq F_{xz}(t + s)$$

genelleştirilmiş üçgen eşitsizliği sağlanırsa (X, F, τ) üçlüsüne Menger uzayı denir.

Bu durumda her metrik uzay ve olasılıksal metrik uzay bir Menger uzayıdır. Fakat tersi doğru değildir.

Örnek

$X = \mathbb{N}$ ve her $a, b \in [0, 1]$ için $\tau(a, b) = ab$ olsun. Her $x, y \in \mathbb{N}$ için

$$F_{xy}(t) = \begin{cases} x/y & , \quad x \leq y \\ y/x & , \quad y \leq x \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda $(\mathbb{N}, F, \tau)$ bir Menger uzayıdır fakat metrik uzay değildir. Çünkü $\mathbb{N}$ üzerinde $F_{xy}(t) = H(t - d(x, y))$ eşitliğini sağlayan bir d metriği bulunamaz.

Not

Menger uzayı tanımında kullandığımız τ fonksiyonu için bir önceki bölümde ele aldığımız üçgensel normlar ve üçgensel conormları örnek verebiliriz. Fakat aşağıda da görüleceği gibi bazı durumlarda S_M, S_P, S_L üçgensel conormların kullanımı oldukça güçtür.

2.4.7. Lemma

(X, F) iki farklı noktayı içeren bir olasılıksal metrik uzay olsun. Bu durumda $\tau = S_M$ olarak seçilirse (ivm) şartı evrensel olarak sağlanmaz.

İspat

x ve y , X uzayındaki iki farklı nokta ve $0 < s < t$ olsun. (ivm) şartının evrensel olarak S_M için sağlandığını varsayalım. Bu durumda

$F_{xy}(t) \geq \max(F_{xy}(t - s), F_{yy}(s)) = 1$ olur. Bu da $x = y$ demektir. Böylece baştaki $x \neq y$ kabulümüzle çelişki ortaya çıkar.

2.4.8. Lemma

(X, F) bir olasılıksal metrik uzay olsun fakat metrik uzay olmasın. Ayrıca (ivm) şartı bu uzayda en az bir τ fonksiyonu için evrensel olarak sağlansın. Bu durumda $\tau(a, 1) \leq a$ olacak şekilde $0 < a < 1$ sayısı vardır.

İspat

Eğer bir uzay, metrik uzay olmayıp olasılıksal metrik uzay ise bu durumda F_{xy} fonksiyonunun 0 ve 1 sayısından başka değerler aldığı farklı x, y noktaları kesinlikle vardır. Bu, F_{xy} 'nin soldan sürekli ve monoton olmasından dolayı üzerinde $0 < F_{xy} < 1$ şartının sağlandığı (a, b) açık aralığının var olduğunu gösterir. $0 < k < 1$ için $\phi(k) > 0$ iken $\tau(k, 1) = k + \phi(k)$ olduğunu kabul edelim. $t > 0$ ve $s \in (a, b)$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} F_{xy}(s+t) &\geq \tau(F_{xy}(s), F_{xy}(t)) \\ &= \tau((F_{xy}(s), 1) \\ &= F_{xy}(s) + \phi(F_{xy}(s)) \end{aligned}$$

elde edilir. $t \rightarrow 0+$ alırsak, $F_{xy}(s+) \geq F_{xy}(s) + \phi(F_{xy}(s)) > F_{xy}(s)$ olur. Yani F_{xy} , s noktasında süreksizdir ve dolayısıyla (a, b) aralığının bütün noktalarında süreksizdir. Fakat bu bir çelişkidir çünkü azalmayan bir fonksiyon sadece sayılabilir bazı noktalarda süreksiz olabilir.

2.4.9. Lemma

Eğer (ivm) şartı bir olasılıksal metrik uzayda evrensel olarak sağlanıyorsa ve τ sürekli bir fonksiyon ise bu durumda herhangi bir $t > 0$ için $\tau(F_{xy}(t), 1) \leq F_{xy}(t)$ olur.

İspat

$0 < s < t$ olsun. Bu durumda

$$F_{xy}(t) \geq \tau(F_{xy}(t-s), F_{yy}(s)) = \tau(F_{xy}(t-s), 1)$$

olur. $s \rightarrow 0+$ olarak alırsak, τ fonksiyonunun sürekliliğiyle beraber

$$F_{xy}(t) \geq \lim_{s \rightarrow 0+} \tau(F_{xy}(t-s), 1) = \tau(\lim_{s \rightarrow 0+} (F_{xy}(t-s), 1)$$

elde edilir. F_{xy} soldan sürekli olduğundan $\lim_{s \rightarrow 0+} F_{xy}(t-s) = F_{xy}(t)$ bulunur.

Not

Yukarıdaki lemmaya dayanarak Tanım 2.4.6'daki τ fonksiyonunun (a), (d) ve (e) özellikleri yerine

$$(a') \tau(a, 1) = a, \tau(0, 0) = 0$$

yazılabilir. Bu yeni şartla

$$\tau(a, b) \leq \tau(a, 1) = a,$$

$$\tau(a, b) = \tau(b, a) \leq \tau(b, 1) = b$$

eşitsizlikleri elde edilir. Dolayısıyla $\tau(a, b) \leq \min(a, b) = T_M$ olur. Bu durumda T_M mümkün olan en güçlü evrensel t-normdur. Ayrıca (ivm) şartını çoklu eşitsizliklere uygulayabilmek için

$$(d') \tau[\tau(a, b), c] = \tau[a, \tau(b, c)]$$

şartını da ekleyebiliriz.

2.4.10. Tanım

Bir olasılıksal metrik uzayda (a'), (b), (c) ve (d') şartlarını yerine getiren en az bir τ fonksiyonu için (ivm) şartı evrensel olarak sağlanıyorsa bu uzay Menger uzayı olur.



3. FUZZY METRİK UZAYLAR

3.1. Fuzzy Mantığı ve Kümeleri

1965'te Zadeh'in giriş yapıp tanıttığı fuzzy kümeler daha sonra birçok bilim insanı tarafından çalışıldı. Bu kesimde fuzzy kümelerini ve mantığını klasik kümelerle karşılaştırıp ele alacağız [3, 15, 20, 22, 23].

Kesin küme ya da klasik küme iyi tanımlı nesneler topluluğuna denir. Kümeler üzerindeki tümleyen(^c), birleşim ($\cup$) ve kesişim ($\cap$) ile ilgili bazı özellikleri verelim. X evrensel bir küme A, B, C X 'in alt kümeleri olsun.

$$\text{Etkisiz eleman : } A \cup A = A, A \cap A = A \quad (3.1)$$

$$\text{Değişme : } A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A \quad (3.2)$$

$$\text{Birleşme : } A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C \quad (3.3)$$

$$\text{Birleşme : } A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C \quad (3.4)$$

$$\text{Absorpsiyon : } A \cup (A \cap B) = A, A \cap (A \cup B) = A \quad (3.5)$$

$$\text{Dağılma : } A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad (3.6)$$

$$\text{Dağılma : } A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad (3.7)$$

$$\text{Özdeşlik : } A \cup \emptyset = A, A \cup X = X, A \cap X = A, A \cap \emptyset = \emptyset \quad (3.8)$$

$$\text{Çelişki ilkesi : } A \cap A^c = \emptyset \quad (3.9)$$

$$\text{Üçüncünün olmazlığı ilkesi : } A \cup A^c = X \quad (3.10)$$

$$\text{Üst alma : } (A^c)^c = A \quad (3.11)$$

$$\text{De Morgan kuralı : } (A \cup B)^c = A^c \cap B^c \quad (3.12)$$

$$\text{De Morgan kuralı : } (A \cap B)^c = A^c \cup B^c \quad (3.13)$$

Diğer taraftan önerme doğru ya da yanlış değerlerinden birini alan bir cümledir. "Doğru" ve "yanlış" doğruluk değerleri olarak adlandırılır ve sırasıyla 1 ve 0 ile gösterilir. $\neg, \wedge, \vee$ sırasıyla "değil", "ve", "veya" bağlacı olarak adlandırılır. Ayrıca F bütün önermelerin kümesini gösterebilir. Bu durumda $P, Q \in F$ için

$$P \equiv Q \text{ gerek ve yeter şart } P \Leftrightarrow Q$$

şeklinde tanımlanan $\equiv$ bağıntısı bir denklik bağıntısı tanımlar. $[P]$, P nin denklik sınıfları olmak üzere, $[P] = \{Q \in F | Q \Leftrightarrow P\}$ dir. F nin bütün denklik sınıfları da $[F/\equiv]$ ile gösterilir. Şimdi $([F/\equiv], \neg, \vee, \wedge, [0], [1])$ matematiksel sistemini kümelerdeki sistemle tanımlayalım. X evrensel bir küme olsun. X 'in bütün alt kümelerinin kümesini $P(X)$ ile gösterelim. Bu durumda (1) $[F/\equiv]$, $P(X)$ ile, (2) $\neg, ^c$ ile (3) $\vee, \cup$ ile (4) $\wedge, \cap$ ile (5) $[0], \emptyset$ ile ve (6) $[1], X$ ile belirtilir. Böylece kesin kümeler üzerindeki denklemler önermeler mantığında bir totoloji halini alırlar.

Fuzzy mantıkta ise herhangi bir p önermesinin doğruluk değeri $[0, 1]$ aralığında değer alabilir. Yani p 'nin doğruluk değerini $tv(p)$ ile gösterirsek fuzzy mantık $tv(p) \in [0, 1]$ olmasına olanak sağlar. Bu durumda fuzzy mantık doğruluk değerlerinin sıfırdan bire değişebildiği sonsuz değerli bir mantık olur. p 'nin değili ise $tv(\neg p) = 1 - tv(p)$ ile bulunur. Ayrıca $tv(p \wedge q)$ ve $tv(p \vee q)$ ifadelerini bulmak için sırasıyla t-norm ve t-conormları kullanırız. Yani

$$tv(p \wedge q) = T(tv(p), tv(q)) \text{ ve } tv(p \vee q) = S(tv(p), tv(q)) \text{ olur.}$$

Eğer dikkat edilirse fuzzy mantıktaki doğruluk değerleri sadece 0 ve 1 ile sınırlıysa bu durumda fuzzy mantık klasik mantığın içine düşer.

3.1.1. Tanım

X , x ile ifade edilen nesnelerin bir koleksiyonu olsun. $\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) | x \in X\}$ fuzzy kümesi sıralı ikililerden oluşan X içinde bir kümedir.

$\mu_{\tilde{A}} : X \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonu x nesnesinin $\tilde{A}$ 'daki üyelik derecesini gösterir ve bu fonksiyona üyelik fonksiyonu denir. Bir fuzzy kümenin klasik bir kümenin, üyelik fonksiyonunun ise karakteristik fonksiyonun bir genellemesi olduğu açıktır. Fuzzy kümelerin farklı şekilde gösterimleri vardır:

1) Tanımdaki gibi sıralı ikililer şeklinde,

2) Sadece üyelik fonksiyonunun grafiğiyle,

3) $\tilde{A} = \mu_{\tilde{A}}(x_1)/x_1 + \mu_{\tilde{A}}(x_2)/x_2 + \cdots + \mu_{\tilde{A}}(x_n)/x_n = \sum_{i=1}^n \mu_{\tilde{A}}(x_i)/x_i$

ya da

$\tilde{A} = \left\{ \frac{\mu_{\tilde{A}}(x_1)}{x_1}, \frac{\mu_{\tilde{A}}(x_2)}{x_2}, \dots \right\}$ şeklinde gösterilebilir.

Eğer $\sup_x \mu_{\tilde{A}}(x) = 1$ ise $\tilde{A}$ fuzzy kümesine normal denir.

3.1.2. Tanım

$\tilde{A}$ fuzzy kümesinin destek kümesi $S(\tilde{A})$ kesin bir kümedir ve $S(\tilde{A}) = \{x | \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\}$ biçiminde tanımlanır.

3.1.3. Tanım

Herhangi $\alpha \in [0, 1]$ için $\tilde{A}$ fuzzy kümesinin α -kesiti $\tilde{A}_\alpha$ ile gösterilir ve $\tilde{A}_\alpha = \{x | \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}$

$\alpha\}$ şeklinde tanımlanır. $\tilde{A}_{\alpha+} = \{x | \mu_{\tilde{A}}(x) > \alpha\}$ kümesi ise $\tilde{A}$ 'nın güçlü α -kesiti ya da güçlü α -seviye kümesi olarak adlandırılır.

Fuzzy kümelerin önemli bir sınıfı konveks fuzzy kümelerin sınıfıdır.

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ kesin kümesi konveks ise her $x_1, x_2 \in A$ için $cx_1 + (1-c)x_2 \in A$ olacak şekilde $c \in [0, 1]$ vardır. $n = 1$ olduğunda her konveks küme bir aralıktır. Tersine $\mathbb{R}^n$ 'nin herhangi bir aralığı konveks bir kümedir.

3.1.4. Tanım

Bir fuzzy kümenin konveks olması için gerek ve yeter şart her $\alpha \in [0, 1]$ için α -kesitinin konveks olmasıdır.

3.1.5. Teorem

$\tilde{A}$ fuzzy kümesinin konveks olması için gerek ve yeter şart $\mu_{\tilde{A}}(cx_1 + (1-c)x_2) \geq \min[\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2)]$ olacak şekilde $c \in [0, 1]$ sayısının var olmasıdır.

İspat

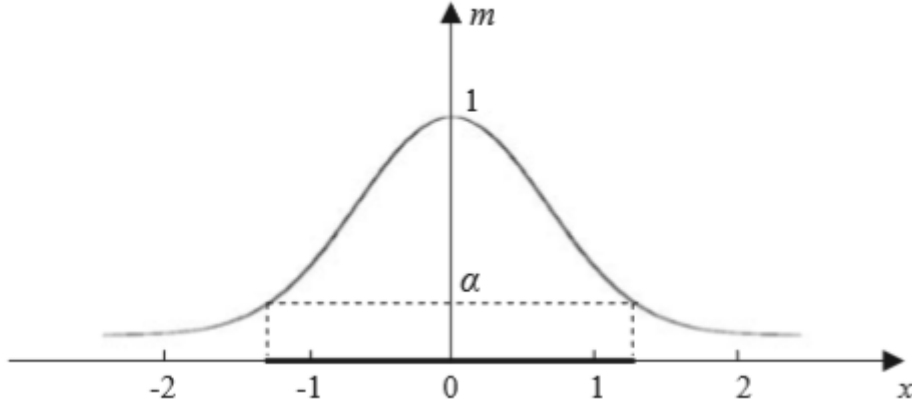
Herhangi $x_1, x_2 \in X$ için $\alpha = \min[\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2)]$ alalım. Bu durumda $x_1, x_2 \in \tilde{A}_\alpha$ olur. $\tilde{A}_\alpha$ 'nın konveksliğinden en az bir $c \in [0, 1]$ için $cx_1 + (1-c)x_2 \in \tilde{A}_\alpha$ olur. Bu da $\mu_{\tilde{A}}(cx_1 + (1-c)x_2) \geq \alpha = \min[\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2)]$ olduğunu gösterir.

Diğer taraftan herhangi bir $\alpha \in [0, 1]$ ve $c \in [0, 1]$ için $\mu_{\tilde{A}}(cx_1 + (1-c)x_2) \geq \min[\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2)]$ iken $\tilde{A}_\alpha$ 'nın konveks olduğunu göstermeliyiz. Gerçekten $x_1, x_2 \in \tilde{A}_\alpha$ ise $\mu_{\tilde{A}}(x_1) \geq \alpha$ ve $\mu_{\tilde{A}}(x_2) \geq \alpha$ dır. Bu durumda $\mu_{\tilde{A}}(cx_1 + (1-c)x_2) \geq \min[\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2)] \geq \alpha$ olur. Bu da $(cx_1 + (1-c)x_2) \in \tilde{A}_\alpha$ demektir. Yani $\tilde{A}_\alpha$ konvektir, o halde $\tilde{A}$ konvektir.

Not

Kalkülüste tartışıldığı anlamda bir konveks fuzzy kümenin üyelik fonksiyonunun da konveks olması gerekmiyor. Örneğin; Şekil 3.1'de görüldüğü gibi e^{-x^2} fonksiyonu $\mathbb{R}$

üzerinde konveks olmamasına rağmen, $\mu(x) = e^{-x^2}$ üyelik fonksiyonunun bütün α -kesitleri birer aralık olduğundan konvektir.



Şekil 3.1. $\mu(x) = e^{-x^2}$ üyelik fonksiyonunun α -kesitleri

Şimdi X evrensel kümesinin fuzzy alt kümelerinin cebirini tanımlamak için fuzzy kümeler üzerindeki bazı kapsama ve işlemleri verelim. A ve B , X 'in fuzzy alt kümeleri olsun.

3.1.6. Tanım

Her $x \in X$ için $\mu_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{\tilde{B}}(x)$ oluyorsa $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ 'nin fuzzy alt kümesidir denir ve $\tilde{A} \leq \tilde{B}$ şeklinde gösterilir. Hem $\tilde{A} \leq \tilde{B}$ hem de $\tilde{B} \leq \tilde{A}$ ise $\tilde{A} = \tilde{B}$ olur.

3.1.7. Tanım

$\tilde{A}$ fuzzy kümesinin tümleyeni $\tilde{A}^c$ şeklinde gösterilir ve üyelik fonksiyonu da $\mu_{\tilde{A}^c}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x)$ şeklindedir.

3.1.8. Tanım

$\tilde{A} \cap \tilde{B}$ kesişiminin üyelik fonksiyonu her $x \in X$ için $\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{B}}(x) = T[\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)]$ biçiminde tanımlanır.

3.1.9. Tanım

$\tilde{A} \cup \tilde{B}$ birleşiminin üyelik fonksiyonu her $x \in X$ için $\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) \vee \mu_{\tilde{B}}(x) = S[\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)]$. biçiminde tanımlanır.

Örnek

10' dan epeyce büyük sayıların fuzzy kümesini $\tilde{A}$ ile, yaklaşık 11 olan sayıların fuzzy kümesini ise $\tilde{B}$ ile gösterilsin ve sırasıyla aşağıdaki üyelik fonksiyonlarına sahip olsunlar.

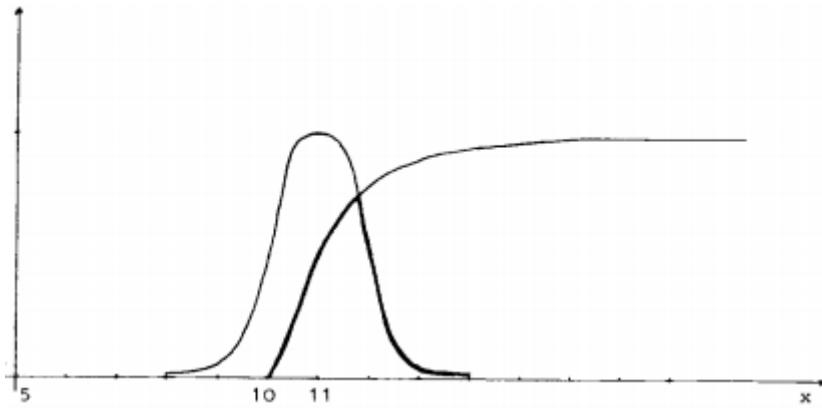
$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \leq 10 \\ (1 + (x - 10)^{-2})^{-1} & , \quad x > 10 \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{B}}(x) = (1 + (x - 11)^4)^{-1}$$

Bu durumda T_M ve S_M üçgensel fonksiyonları kullanılarak şekil 3.2'de görüleceği gibi

$$\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) = \begin{cases} \min[(1 + (x - 10)^{-2})^{-1}, (1 + (x - 11)^4)^{-1}] & , \quad x > 10 \\ 0 & , \quad x \leq 10 \end{cases}$$

$\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) = \max[(1 + (x - 10)^{-2})^{-1}, (1 + (x - 11)^4)^{-1}]$ elde edilir.



Şekil 3.2. Fuzzy kümelerin birleşimi ve kesişimi

Verilen t-norm ve t-conormlarla kesin kümeler için geçerli olan (2.3) – (2.15)'deki denklemlerin fuzzy kümeler için geçerli olup olmadığını kontrol edilebilir. Kesin kümeler için verilen bazı formüller fuzzy kümeler için geçerli olmayabilir. Örneğin; $\tilde{A} \cap \tilde{A}^c = \emptyset$ ilişkisi ilkesini fuzzy kümeler için düşünelim. $T(a, b) = T_M(a, b) = \min(a, b)$ ve $S(a, b) = S_M(a, b) = \max(a, b)$ olarak seçelim. Ayrıca

$$X = \{\text{küçük, orta, büyük}\} \text{ ve } \tilde{A} = \left\{ \frac{0.3}{\text{küçük}}, \frac{1}{\text{orta}}, \frac{0.6}{\text{büyük}} \right\}$$

olsun. Bu durumda

$$\tilde{A} \cap \tilde{A}^c = \left\{ \frac{0.3}{\text{küçük}}, \frac{0}{\text{orta}}, \frac{0.4}{\text{büyük}} \right\} \neq \emptyset$$

olur. Fakat diğer taraftan herhangi $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ fuzzy kümesi için $T(a, b) = T_P(a, b) = a.b$ ve $S(a, b) = S_P(a, b) = a + b - a.b$ olarak seçilirse $(\tilde{A} \cup \tilde{B})^c = \tilde{A}^c \cap \tilde{B}^c$ De Morgan kuralının sağlandığı kolayca görülebilir.

Şimdiye kadar fuzzy kümeler kesin tanımlanmış üyelik fonksiyonlarıyla ya da üyelik dereceleriyle tanımlandı. Fakat zihinde her zaman net bir üyelik fonksiyonunu canlandırmak zor olabilir. Bu nedenle Zadeh farklı fuzzy küme çeşitleri tanımladı.

3.1.10. Tanım

Üyelik fonksiyonlarının kendisinin fuzzy küme olduğu fuzzy kümelere 1.tip fuzzy küme denir.

Örneğin $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ olsun. Bu durumda

$$\tilde{A} = \left\{ \frac{\tilde{\mu}_{\tilde{A}}(x_1)}{x_1}, \frac{\tilde{\mu}_{\tilde{A}}(x_2)}{x_2}, \dots \right\}$$

olur.

3.1.11. Tanım

Üyelik fonksiyonları $[0, 1]$ üzerinde 1.tip fuzzy kümeler olan fuzzy kümelere 2.tip fuzzy küme denir.

3.1.12. Tanım

$[0, 1]$ üzerinde $m > 1$ için üyelik fonksiyonları $(m - 1)$. tip fuzzy kümeler olan fuzzy kümeye m . tip fuzzy küme denir. $m \geq 3$ için m . tip fuzzy kümeleri ölçmek ve gözönünde canlandırmak oldukça zordur.

3.1.13. Tanım

X üzerindeki bir A olasılıksal kümesi her $x \in X$ için

$$\mu_A : X \times \Omega \ni (x, \omega) \rightarrow \mu_A(x, \omega) \in \Omega_C$$

şeklinde tanımlanan (B, B_C) ölçülebilir $\mu_A(x, \cdot)$ fonksiyonuyla tanımlıdır.

3.1.14. Tanım

X üzerindeki bir A sezgisel fuzzy kümesi

$$A = \{(x, \mu_A(x), \nu_A(x)) | x \in X\}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\mu_A(x)$ ve $\nu_A(x)$ sırasıyla x elemanının A kümesine ait olma ve olmama derecesini gösterir ve $0 \leq \mu_A(x) + \nu_A(x) \leq 1$ şartı sağlanır. X üzerindeki sıradan fuzzy kümeler $\nu_A(x) = 1 - \mu_A(x)$ üye olmama fonksiyonuyla sezgisel fuzzy kümelerin özel bir durumudur.

3.1.15. Tanım

U evrensel bir küme ve $R \subset U \times U$ bir denklik bağıntısı olsun. $A = (U, R)$ yaklaşım uzayı olarak adlandırılır. Bu durumda $(u, v) \in R$ için u ve v aynı denklik sınıfına aittir ve A uzayında ayırt edilemeyenler (fark edilemeyenler) olarak adlandırılırlar. Bu yüzden R bağıntısı ayırt edilemezlik (farkedilemezlik) bağıntısı olarak adlandırılır. $[x_R]$, R 'nin denklik sınıfı olsun. Bu durumda A uzayındaki $X \subseteq U$ için alt ve üst yaklaşımlar uzayı sırasıyla $\underline{A}(X)$ ve $\overline{A}(X)$ şeklinde gösterilir ve

$$\underline{A} = \{x \in U \mid [x_R] \subset X\}$$

$$\overline{A} = \{x \in U \mid [x_R] \cap X \neq \emptyset\}$$

şeklinde tanımlanır. $A = (U, R)$ yaklaşım uzayı X kümesinin üç farklı bölgesiyle tanımlanabilir. Bunlar $\underline{A}(X)$ pozitif bölgesi, $\overline{A}(X) - \underline{A}(X)$ sınır bölgesi ve $U - \overline{A}(X)$ negatif bölgesidir. Eğer sınır bölgesi $\overline{A}(X) - \underline{A}(X)$ boş küme değilse X kümesindeki elemanların R ayırt edilmezlik bağıntısıyla tanımlanması yeterince kesin olmaz. Böylece bir elemanın X kümesine ait olup olmadığı belli olmayabilir. Bu durumda X kümesi A uzayında tanımlanamaz olarak adlandırılır ve kaba bir kümedir.

3.1.16. Tanım

X ve Y herhangi iki küme olsun. $\tilde{R}$ fuzzy bağıntısı, $X \times Y$ kümesinin fuzzy alt kümesidir. Bu durumda $\mu_{\tilde{R}}(x, y)$, $[0, 1]$ aralığında herhangi bir sayı olabilir. $\tilde{R}$ bağıntısının tersi $\tilde{R}^{-1}$ ile gösterilir ve $\mu_{\tilde{R}^{-1}}(x, y) = \mu_{\tilde{R}}(y, x)$ sağlanır. Ayrıca $\tilde{R}, \tilde{S}$ ve $\tilde{T}$ fuzzy bağıntıları $X \times Y$ 'nin fuzzy alt kümeleri olduklarından $\tilde{R} \cup \tilde{S}, \tilde{R} \cap \tilde{S}, \tilde{R}^c, \tilde{R} \cap (\tilde{S} \cup \tilde{T})$ v.s. bulunabilir. Diğer taraftan $\tilde{R} \leq \tilde{S}$ her $x, y \in X \times Y$ için $\mu_{\tilde{R}}(x, y) \leq \mu_{\tilde{S}}(x, y)$ anlamındadır.

Not

$\tilde{R}, X \times Y$ üzerinde ve $\tilde{S}$ de $Y \times Z$ üzerinde bir fuzzy bağıntısı olsun. Bu durumda herhangi bir T t-normu için $X \times Z$ üzerindeki $\tilde{T} = \tilde{R} \circ \tilde{S}$ fuzzy bağıntısı

$$\mu_{\tilde{T}}(x, z) = \sup_y \{T(\mu_{\tilde{R}}(x, y), \mu_{\tilde{S}}(y, z))\}$$

şeklinde tanımlıdır. Fuzzy bağıntılarda her t- norm farklı bir sonuç verir. Örneğin bileşkelerde T_M t-normu kullanılarak elde edilen aşağıdaki özellikler

$$(\tilde{R} \circ \tilde{S})^{-1} = \tilde{S}^{-1} \circ \tilde{R}^{-1},$$

$$\tilde{R} \circ (\tilde{S} \circ \tilde{T}) = (\tilde{R} \circ \tilde{S}) \circ \tilde{T},$$

$$\tilde{R} \circ \tilde{S} \neq \tilde{S} \circ \tilde{R}$$

T_D, T_L ve T_P için sağlanmayabilir.

Eğer X, Y ve Z sonlu kümeler ise bileşke, matris olarak da yapılabilir. X, Y ve Z sırasıyla m, n ve k elemana sahip olsun. Ayrıca $\tilde{R} = [r_{ij}]$, X ve Y arasındaki fuzzy bağıntı için boyutu $m \times n$ olan bir matris ve $\tilde{S} = [s_{jl}]$, Y ve Z arasında boyutu $n \times k$ olan diğer bir matris olsun. Bu durumda $\tilde{T} = \tilde{R} \circ \tilde{S}$ bileşke fuzzy bağıntısı için $\tilde{T} = [t_{il}]$, X ile Z arasında boyutu $m \times k$ olan bir matris olur. t-normlar kullanılarak t_{il} aşağıdaki biçimde bulunabilir.

$$t_{il} = \max\{T(r_{i1}, s_{1l}), \dots, T(r_{in}, s_{nl})\}.$$

3.1.17. Tanım

Bir $\tilde{N}$ fuzzy sayısı reel sayıların özel fuzzy alt kümesidir ve aşağıdaki şartları sağlar:

i) $\alpha \in (0, 1]$ için $\tilde{N}_\alpha$ kapalı ve sınırlı aralıklardır.

ii) $S(\tilde{N})$ sınırlıdır.

3.1.18. Teorem

Tanım 3.1.17'deki i) şartı aşağıdaki ifadelere denktir:

a) $\mu_{\tilde{N}}(a_0) = 1$ olacak şekilde en az bir a_0 reel sayısı vardır.

b) $\mu_{\tilde{N}}(t)$, $(-\infty, a_0]$ üzerinde azalmayan ve $[a_0, \infty)$ üzerinde artmayandır.

c) $\mu_{\tilde{N}}(t)$ üyelik fonksiyonu üst-yarı süreklidir, yani $\mu_{\tilde{N}}(t)$, $(-\infty, a_0)$ üzerinde sağdan, (a_0, ∞) üzerinde de soldan süreklidir.

Örnek

Yaklaşık 5 = $\{(3, 0.2), (4, 0.6), (5, 1), (6, 0.7), (7, 0.1)\}$

Yaklaşık 10 = $\{(8, 0.3), (9, 0.7), (10, 1), (11, 0.7), (12, 0.3)\}$

şeklindeki fuzzy kümeler fuzzy sayılardır.

3.1.19. Tanım

Her $x < 0$ ($x > 0$) için $\mu_{\tilde{N}}(x) = 0$ oluyorsa $\tilde{N}$ fuzzy sayısı pozitif (negatif) olarak adlandırılır.

3.2. Fuzzy Metrik Uzaylar

Bu kesimde literatürde yapılmış farklı fuzzy metrik uzay tanımlarını vereceğiz.

3.2.1. Lemma

X üzerinde bir d metriği sadece bir tek $R_d \subset X \times X \times [0, \infty)$ bağıntısı ile tanımlıdır.

Her $x, y \in X$ ve $t \in [0, \infty)$ için $R_d(x, y, t)$ geçerli olması için gerek ve yeter şart $d(x, y) < t$ olmasıdır. [15].

İspat

d_1 ve d_2 , X üzerinde iki farklı metrik olsun. Bu durumda $d_1(x, y) \neq d_2(x, y)$ olacak şekilde en az bir $(x, y) \in X \times X$ noktası vardır. $d_1(x, y) < d_2(x, y)$ olduğunu farz edelim. Bu durumda $(x, y, d_2(x, y)) \in R_{d_1}$ iken $(x, y, d_2(x, y)) \notin R_{d_2}$ olur. Bu da $R_{d_1} \neq R_{d_2}$ demektir.

3.2.2. Tanım

Bir $*$: $[0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ ikili işlemi her $a, b, c, d \in [0, 1]$ için

(ct1) $*$ birleşme ve değişme özelliğine sahiptir,

(ct2) $*$ sürekli dir,

(ct3) Her $a \in [0, 1]$ için $a * 1 = a$

(ct4) $a \leq c$ ve $b \leq d$ iken $a * b \leq c * d$

şartlarını sağlıyorsa sürekli bir t-norm olarak adlandırılır [17].

1975'te Kramosil ve Michálek Lemma 3.2.1'e dayanarak olasılıksal metrik uzay kavramına eş değer bir gösterim oluşturup ilk olarak fuzzy metrik uzayları tanımlamıştır [15].

3.2.3. Tanım

X boştan farklı bir küme ve $*$ sürekli bir t-norm olsun. $X \times X \times [0, \infty)$ üzerindeki M fuzzy kümesi aşağıdaki şartları sağlıyorsa $(X, M, *)$ üçlüsü fuzzy metrik uzay olarak adlandırılır. Her $x, y, z \in X$ ve $t, s \geq 0$ için

(fm1) $M(x, y, 0) = 0$,

(fm2) Her $t > 0$ için $M(x, y, t) = 1 \Leftrightarrow x = y$,

(fm3) $M(x, y, t) = M(y, x, t)$,

(fm4) $M(x, y, t) * M(y, z, s) \leq M(x, z, t + s)$,

(fm5) $M(x, y, \cdot) : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ soldan sürekli ve azalmayandır öyle ki $\lim_{t \rightarrow \infty} M(x, y, t) = 1$ sağlanır.

3.2.4. Teorem

M , X üzerinde tanımlı bir fuzzy metriği ve (X, F) de olasılıksal bir metrik uzay olsun.

Bu durumda her $x, y \in X$ ve $t \in (-\infty, \infty)$ için $M(x, y, t) = F_{xy}(t)$ sağlanır.

1984'te Kaleva ve Seikkala iki nokta arasındaki uzaklığı negatif olmayan bir fuzzy sayıyla göstererek farklı bir fuzzy metrik uzay tanımı yaptı [13].

Bütün üst-yarı-sürekl, normal, konveks fuzzy sayıların kümesi E ile E kümesindeki negatif olmayan fuzzy sayıların kümesi de G ile gösterilsin.

3.2.5. Tanım

X boştan farklı bir küme ve $d : X \times X \rightarrow G$ bir dönüşüm olsun. Ayrıca $L, R : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dönüşümleri $L(0, 0) = 0$ ve $R(1, 1) = 1$ şartlarını sağlayan simetrik ve azalmayan dönüşümler olsunlar. Her $x, y \in X$ ve $\alpha \in (0, 1]$ için $[d(x, y)]_\alpha = [\lambda_\alpha(x, y), \rho_\alpha(x, y)]$ şeklinde gösterilsin. Her $x, y \in X$ için

$$(i) \quad d(x, y) = \bar{0} \Leftrightarrow x = y,$$

$$(ii) \quad d(x, y) = d(y, x),$$

$$(iii) \quad \text{Her } x, y, z \in X \text{ için}$$

$$(1) \quad s \leq \lambda_1(x, z), t \leq \lambda_1(z, y) \text{ ve } s+t \leq \lambda_1(x, y) \text{ iken } d(x, y)(s+t) \geq L(d(x, z)(s), d(z, y)(t)),$$

$$(2) \quad s \geq \lambda_1(x, z), t \geq \lambda_1(z, y) \text{ ve } s+t \geq \lambda_1(x, y) \text{ iken } d(x, y)(s+t) \leq R(d(x, z)(s), d(z, y)(t))$$

şartları sağlanırsa (X, d, L, R) dörtlüsüne fuzzy metrik uzay, d dönüşümüne de fuzzy metrik denir.

L ve R için yaygın üçgensel norm ve conormlar kullanılır.

Daha sonra 1994'te George ve Veeramani tanım 3.2.3'teki fuzzy metrik uzay şartlarında

bazı değişiklikler yapıp yeni sonuçlar elde etmiştir [8, 9].

3.2.6. Tanım

X boştan farklı bir küme ve $*$ sürekli bir t-norm olsun. $X \times X \times (0, \infty)$ üzerindeki M fuzzy kümesi aşağıdaki şartları sağlıyorsa $(X, M, *)$ üçlüsü fuzzy metrik uzay olarak adlandırılır. Her $x, y, z \in X$ ve $t, s > 0$ için

$$(fm1) \quad M(x, y, t) > 0,$$

$$(fm2) \quad M(x, y, t) = 1 \Leftrightarrow x = y,$$

$$(fm3) \quad M(x, y, t) = M(y, x, t),$$

$$(fm4) \quad M(x, y, t) * M(y, z, s) \leq M(x, z, t + s),$$

(fm5) $M(x, y, \cdot) : (0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ süreklidir. $(X, M, *)$ bir fuzzy metrik uzay ise $(M, *)$ ya da basitçe M , X üzerinde bir fuzzy metriktir denir.

3.2.7. Lemma

Her $x, y \in X$ için $M(x, y, \cdot) : (0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ azalmayan bir fonksiyondur [10].

Not

$(X, M, *)$ bir fuzzy metrik uzay olsun.

(1) Her $x, y \in X$, $t > 0$ ve $0 < r < 1$ için $M(x, y, t) > 1 - r$ iken $M(x, y, t_0) > 1 - r$ olacak şekilde bir $0 < t_0 < t$ sayısı bulunabilir.

(2) $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 \in (0, 1)$ olsun. Eğer $r_1 > r_2$ ise $r_1 * r_3 \geq r_2$ olacak şekilde bir r_3 sayısı vardır. Ayrıca herhangi bir r_4 için $r_5 * r_5 \geq r_4$ olacak şekilde bir r_5 sayısı bulunabilir [8].

3.2.8. Tanım

M , X üzerinde bir fuzzy metrik olsun. M , t sayısına bağlı değilse sabit olarak adlandırılır. Eğer M sabit bir fonksiyon ise $M(x, y, t)$ yerine $M(x, y)$ yazılabilir [11, 12].

Not

$(X, M, *)$ fuzzy metrik uzay ve $\diamond$ sürekli t-norm olsun. Eğer her $a, b \in [0, 1]$ için $a * b \geq a \diamond b$ ise bu durumda $(X, M, \diamond)$ de bir fuzzy metrik uzay olur, fakat tersi genellikle doğru değildir [11].

Fuzzy metrik uzay örnekleri

Bu kesimde X boş olmayan bir küme, M , $X \times X \times \mathbb{R}^+$ üzerinde bir fuzzy metrik olsun. Şimdi $x, y \in X$, $t > 0$ ve $a, b \in [0, 1]$ için bazı fuzzy metrik uzay örnekleri verelim [8, 11].

Örnek

$a * b = a.b$ ve $M(x, y, t) = e^{-d(x,y)/g(t)}$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda $(X, M, *)$ bir fuzzy metrik uzaydır. Ayrıca $a * b = \min(a, b)$ ve g fonksiyonunu da birim fonksiyon olarak alırsak $(X, M, *)$ yine bir fuzzy metrik uzay olur. Diğer taraftan özel olarak $g(t) = k > 0$ şeklinde sabit bir fonksiyon ve $a * b = a.b$ olarak alırsak $M(x, y, t) = e^{-d(x,y)/k}$ olur, bu durumda $(X, M, *)$ bir fuzzy metrik uzay olur fakat minimum t-normuyla olmaz.

Örnek

$f : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ bire-bir ve $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow [0, +\infty)$ artan bir fonksiyon olsun. $\alpha, \beta > 0$ için

$$M(x, y, t) = \left(\frac{(\min\{f(x), f(y)\})^\alpha + g(t)}{(\max\{f(x), f(y)\})^\alpha + g(t)} \right)^\beta$$

ve $a * b = a.b$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda $(X, M, *)$ bir fuzzy metrik uzay olur. Özel olarak f fonksiyonunu birim fonksiyon ve $\alpha = \beta = 1$ alırsak aşağıdaki durumlar elde edilir.

(1) $X = \mathbb{R}^+$ ve g birim fonksiyon olarak alalım. Dolayısıyla

$$M(x, y, t) = \frac{\min\{x, y\} + t}{\max\{x, y\} + t}$$

olur. Bu durumda $(X, M, *)$ bir fuzzy metrik uzaydır.

(2) $X = \mathbb{N}$ ve g bir sıfır fonksiyonu olsun. Dolayısıyla

$$M(x, y, t) = \frac{\min\{x, y\}}{\max\{x, y\}}$$

olur. Bu durumda $(X, M, *)$ bir sabit fuzzy metrik uzaydır.

(3) $k > 0$ için $X = (-k, +\infty)$ ve $g(t) = k$ şeklinde sabit bir fonksiyon olsun. Böylece

$$M(x, y, t) = \frac{\min\{x, y\} + k}{\max\{x, y\} + k}$$

olur. Dolayısıyla $(X, M, *)$ bir sabit fuzzy metrik uzaydır.

Örnek

$g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ artan sürekli bir fonksiyon ve d, X üzerinde bir metrik olsun. $a * b = a.b$ ve $m > 0$ için

$$M(x, y, t) = \frac{g(t)}{g(t) + m.d(x, y)}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $(X, M, *)$ bir fuzzy metrik uzaydır.

Özel olarak $n \in \mathbb{N}$ için $g(t) = t^n$, $m = 1$ ve $a * b = a.b$ olsun. Dolayısıyla

$$M(x, y, t) = \frac{t^n}{t^n + d(x, y)}$$

olur. Bu durumda $(X, M, *)$ bir fuzzy metrik uzay olur. Ayrıca $n = 1$ için $(M, *)$ fuzzy metriği d metriği tarafından indirgenmiş standart fuzzy metrik olarak adlandırılır.

Örnek

(X, d) , her $x, y \in X$ için $d(x, y) < k$ olacak şekilde sınırlı bir metrik uzay ve $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow (k, +\infty)$ artan sürekli bir fonksiyon olsun. $a * b = \max(a + b - 1, 0)$ şeklinde Lukasiewicz t-norm olsun. Bu durumda

$$M(x, y, t) = 1 - \frac{d(x, y)}{g(t)}$$

fonksiyonu için $(X, M, *)$ bir fuzzy metrik uzay olur. Özel olarak g fonksiyonunu $g(t) = K > k$ şeklinde bir sabit fonksiyon olarak alırsak

$$M(x, y, t) = 1 - \frac{d(x, y)}{K}$$

olur. Böylece Lukasiewicz t-normla birlikte M, X üzerinde sabit bir fuzzy metrik olur fakat çarpımsal t-normla olmaz.

Örnek

$\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow [0, 1)$ artan sürekli bir fonksiyon ve $a * b = \min(a, b)$ olsun.

$$M(x, y, t) = \begin{cases} 1 & , \quad x = y \\ \varphi(t) & , \quad x \neq y \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Böylece $(X, M, *)$ bir fuzzy metrik uzay olur. Özel olarak φ fonksiyonunu $\varphi(t) = k \in (0, 1)$ şeklinde sabit bir fonksiyon alırsak

$$M(x, y) = \begin{cases} 1 & , \quad x = y \\ k & , \quad x \neq y \end{cases}$$

olur. Bu durumda $(X, M, *)$ ayrık fuzzy metrik uzay olarak adlandırılır.

Örnek

$F : X \times X \rightarrow (0, \frac{1}{2})$ simetrik bir fonksiyon ve $a * b = \max(a + b - 1, 0)$ olsun.

$$M(x, y) = \begin{cases} 1 & , \quad x = y \\ F(x, y) & , \quad x \neq y \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $(X, M, *)$ sabit bir fuzzy metrik uzay olur.

Örnek

$X, Y = \mathbb{R}$ ve her $x, y \in X$ için $x + y \in Y$ olsun. Ayrıca $a * b = \max(a + b - 1, 0)$ ve $f : Y \rightarrow (0, \frac{1}{2})$ olsun.

$$M(x, y) = \begin{cases} 1 & , \quad x = y \\ f(x + y) & , \quad x \neq y \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $(X, M, *)$ bir sabit fuzzy metrik uzay olur.

Örnek

$X, Y = \mathbb{R}$ ve her $x, y \in X$ için $x - y \in Y$ olsun. $a * b = \max(a + b - 1, 0)$ olarak tanımlansın. Ayrıca her $z \in Y$ için $f(z) = f(-z)$ olacak şekilde $f : Y \rightarrow (0, \frac{1}{2})$ bir fonksiyon olsun. Eğer

$$M(x, y) = \begin{cases} 1 & , \quad x = y \\ f(x - y) & , \quad x \neq y \end{cases}$$

şeklinde tanımlanırsa $F(x, y) = f(x - y)$, $X \times X$ üzerinde simetrik bir fonksiyon olduğundan $(X, M, *)$ bir sabit fuzzy metrik uzay olur.

Örnek

$f : X \rightarrow (0, \frac{1}{2})$ ve $a * b = \max(a + b - 1, 0)$ olsun.

$$M(x, y) = \begin{cases} 1 & , \quad x = y \\ f(x) + f(y) & , \quad x \neq y \end{cases}$$

olarak tanımlansın. $F(x, y) = f(x) + f(y)$ simetrik bir fonksiyon olduğundan $(X, M, *)$ bir sabit fuzzy metrik uzay olur.

Örnek

g ve h , X üzerinde iki fonksiyon olsun. Ayrıca $\sup\{g(x) : x \in X\} < \inf\{h(x) : x \in X\}$ ve $0 < c < 2$ için $(h + g)(x) = c$ sağlansın.

$$M(x, y) = \begin{cases} 1 & , \quad x = y \\ h(x) - g(y) & , \quad x \neq y \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda $(X, M, *)$ bir sabit fuzzy metrik uzay olur.

Örnek

$f : X \rightarrow (0, 1)$ her $x, y \in X$ için $f(x) * f(y) \neq 0$ olacak şekilde bir fonksiyon olsun.

$$M(x, y) = \begin{cases} 1 & , \quad x = y \\ f(x) * f(y) & , \quad x \neq y \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Böylece $(X, M, *)$ bir sabit fuzzy metrik uzay olur. Özel olarak $X = (0, \pi)$ ve $f(x) = \sin x$ olarak alırsak bu durumda

$$M(x, y) = \begin{cases} 1 & , \quad x = y \\ \sin x \cdot \sin y & , \quad x \neq y \end{cases}$$

elde edilir. Dolayısıyla M çarpımsal t-normla sabit bir fuzzy metrik uzay olur fakat

minimum t-normuyla olmaz.

Örnek

$a * b = a.b$ ve $(X, N, *)$ bir fuzzy metrik uzay olsun. Ayrıca $\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ artan sürekli bir fonksiyon olsun.

$$M(x, y, t) = \frac{\varphi(t) + N(x, y, t)}{\varphi(t) + 1}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda $(X, M, *)$ bir fuzzy metrik uzay olur.

Örnek

$(X, N, *)$ bir fuzzy metrik uzay ve $\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow (0, 1]$ artan sürekli bir fonksiyon olsun. Ayrıca her $x, y \in X$ ve $t > 0$ için $N(x, y, t) * \varphi(t) \neq 0$ sağlansın.

$$M(x, y, t) = \begin{cases} 1 & , \quad x = y \\ N(x, y, t) * \varphi(t) & , \quad x \neq y \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda $(X, M, *)$ bir fuzzy metrik uzay olur.

Örnek

$a * b = a.b$ ve $(X, N, *)$ bir sabit fuzzy metrik uzay olsun. Ayrıca $\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ artan sürekli bir fonksiyon olsun.

$$M(x, y, t) = \frac{\varphi(t)}{\varphi(t) + 1 - N(x, y)}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda $(X, M, *)$ bir fuzzy metrik uzay olur.

Şimdi fuzzy metrik uzaylar için bazı topolojik kavramları verebiliriz [8, 9].

3.2.9. Tanım

$(X, M, *)$ bir fuzzy metrik uzay olsun. $x \in X$, $0 < r < 1$ ve $t > 0$ için x -merkezli r yarıçaplı $B(x, r, t)$ açık yuvarı ve $B[x, r, t]$ kapalı yuvarı sırasıyla

$$B(x, r, t) = \{y \in X : M(x, y, t) > 1 - r\}$$

$$B[x, r, t] = \{y \in X : M(x, y, t) \geq 1 - r\}$$

biçiminde tanımlanır.

3.2.10. Lemma

Herhangi bir fuzzy metrik uzayda her açık yuvar açık bir kümedir ve her kapalı yuvar kapalı bir kümedir.

3.2.11. Tanım

$(X, M, *)$ bir fuzzy metrik uzay olsun. $A \subseteq X$ kümesinin F -sınırlı olması için gerek ve yeter şart her $x, y \in A$ için $M(x, y, t) > 1 - r$ olacak şekilde $t > 0$ ve $0 < r < 1$ sayısının var olmasıdır.

3.2.12. Tanım

$(X, M, *)$ bir fuzzy metrik uzay olsun.

(a) (x_n) , X 'de bir dizi ve $x \in X$ olsun. Her $\varepsilon \in (0, 1)$ ve $t > 0$ için $n \geq n_0$ iken $M(x_n, x, t) > 1 - \varepsilon$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı varsa (x_n) , x 'e yakınsıyor denir.

(b) (x_n) , X 'de bir dizi olsun. Her $\varepsilon \in (0, 1)$ ve $t > 0$ için $n, m \geq n_0$ iken $M(x_n, x_m, t) > 1 - \varepsilon$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı varsa (x_n) bir Cauchy dizisidir denir.

(c) X fuzzy metrik uzayındaki her Cauchy dizisi X 'de yakınsak ise bu uzaya tamdır

denir.

3.2.13. Teorem

$(X_1, M_1, *)$ ve $(X_2, M_2, *)$ iki fuzzy metrik uzay olsun. $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in X_1 \times X_2$ ve $t > 0$ için $M((x_1, x_2), (y_1, y_2), t) = M_1(x_1, x_2, t) * M_2(x_2, y_2, t)$ olarak tanımlansın. Bu durumda $((X_1 \times X_2), M, *)$ bir fuzzy metrik uzay olur.

3.2.14. Tanım

$(X, M, *)$ fuzzy metrik uzay ve $\{A_n\}$ bir kümeler ailesi olsun. Her $\varepsilon \in (0, 1)$ ve $t > 0$ için $x, y \in A_n$ iken $M(x, y, t) > 1 - \varepsilon$ olacak şekilde $n \in I$ varsa $\{A_n\}$ 'nin bir koleksiyonu fuzzy çap sıfıra sahiptir denir.

Not

$(X, M, *)$ bir fuzzy metrik uzay ve F , X uzayının boş olmayan bir alt kümesi olsun. Bu durumda F 'nin fuzzy çap sıfıra sahip olması için gerek ve yeter şart F 'nin tek noktadan oluşan bir küme olmasıdır.

3.2.15. Teorem

$(X, M, *)$ bir fuzzy metrik uzay ve $\{F_n\}$, X 'in boş olmayan kapalı alt kümeleri olsun. X 'in tam ve $\{F_n\}$ kümelerinin her azalan dizisinin fuzzy çap sıfıra sahip olması için gerek ve yeter şart $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$ olmasıdır.

Not

$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ elemanı tektir.

3.2.16. Teorem

$(X, M, *)$ bir tam fuzzy metrik uzay olsun. Bu durumda açık yoğun kümelerin sayılabilir

sayıda kesişimi de yoğundur.

İspat

X bir tam fuzzy metrik uzay ve B_0 boş olmayan açık bir küme olsun. Ayrıca $A_1, A_2, A_3 \dots$ X uzayındaki yoğun ve açık kümeler olsunlar. Bu durumda $B_0 \cap A_1 \neq \emptyset$ olur. $x_1 \in B_0 \cap A_1$ olsun. $B_0 \cap A_1$ açıktır dolayısıyla $B(x_1, r_1, t_1) \subset B_0 \cap A_1$ olacak şekilde $0 < r_1 < 1$ ve $t_1 > 0$ sayıları vardır. $B[x_1, r'_1, t'_1] \subset B_0 \cap A_1$ ifadesini sağlayan $r'_1 < r_1$ ve $t'_1 = \min\{t_1, 1\}$ sayıları seçilsin. $B_1 = B(x_1, r'_1, t'_1)$ olsun. A_2 , X uzayında yoğundur bu yüzden $B_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ olur. $x_2 \in B_1 \cap A_2$ olsun. $B_1 \cap A_2$ açıktır dolayısıyla $B(x_2, r_2, t_2) \subset B_1 \cap A_2$ olacak şekilde $0 < r_2 < \frac{1}{2}$ ve $t_2 > 0$ sayıları vardır. $B[x_2, r'_2, t'_2] \subset B_1 \cap A_2$ ifadesini sağlayan $r'_2 < r_2$ ve $t'_2 = \min\{t_2, \frac{1}{2}\}$ sayıları seçilsin. $B_2 = B(x_2, r'_2, t'_2)$ olsun. Benzer şekilde devam edilirse bir $x_n \in B_{n-1} \cap A_n$ bulunabilir. $B_{n-1} \cap A_n$ açıktır dolayısıyla $B(x_n, r_n, t_n) \subset B_{n-1} \cap A_n$ olacak şekilde $0 < r_n < \frac{1}{n}$ ve $t_n > 0$ sayıları vardır. $B[x_n, r'_n, t'_n] \subset B_{n-1} \cap A_n$ ifadesini sağlayan $r'_n < r_n$ ve $t'_n = \min\{t_n, \frac{1}{n}\}$ sayıları seçilsin. $B_n = B(x_n, r'_n, t'_n)$ olsun.

Şimdi oluşan (x_n) dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. Herhangi bir $t > 0$ ve $\varepsilon > 0$ için $1/n_0 < t$ ve $1/n_0 < \varepsilon$ olacak şekilde bir n_0 seçelim. Böylece $n \geq n_0$ için $m \geq n$ olur.

$$M(x_n, x_m, t) \geq M(x_n, x_m, \frac{1}{n}) \geq 1 - (\frac{1}{n}) \geq 1 - \varepsilon$$

Bu durumda (x_n) bir Cauchy dizisi olur. X uzayı tam olduğundan $x_n \rightarrow x$ ve $x \in X$ dır. Her $k \geq n$ için $x_k \in B[x_n, r'_n, t'_n]$ sağlanır. Lemma 3.2.10'den dolayı $B[x_n, r'_n, t'_n]$ kapalı bir küme olur. Böylece her $n \in \mathbb{N}$ için $x \in B[x_n, r'_n, t'_n] \subset B_{n-1} \cap A_n$ sağlanır. Bu durumda $B_0 \cap (\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) \neq \emptyset$ olur dolayısıyla $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, X 'de yoğundur .



4. FUZZY VEKTÖR METRİK UZAYLAR

4.1. Fuzzy Vektör Metrik Uzaylar

Bu bölümde tanım 3.2.6'de George ve Veeramani'nin yapmış olduğu fuzzy metrik uzay kavramını esas alarak literatürde ilk defa fuzzy vektör metrik uzayları tanımladık. Burada pozitif bir reel sayı olan t yerine Riesz uzayının elemanları olan vektörleri aldık. Bu çerçevede, eğer t 'yi sürekli fonksiyonların uzayından sabit bir fonksiyon olarak düşünürsek bu durumda her fuzzy metriğin bir fuzzy vektör metrik olacağı sonucuna vardık. Ayrıca her vektör metrik uzayın da fuzzy vektör metrik uzay olduğunu tespit ettik. Sabit olmayan fuzzy vektör metrik örneklerinde ise normlu Riesz uzaylarından faydalandık. Burada latis norm şartı sayesinde tanım kümesindeki sıra yakınsaklıktan görüntü kümesindeki yakınsaklığa geçiş yapabildik. Böylece ilgili fuzzy vektör metrik şartı için sürekliliği güncellemiş olduk. Daha sonra tezimizin sonlarına doğru fonksiyonel analiz ve topolojide yer alan Cantor kesişim ve Baire teoremi gibi bazı teoremlerin ispatını [8,9]'den farklı yapabilmek amacıyla kusurlu fuzzy vektör çap kavramını verdik [1, 7, 17–19, 21].

Öncelikle Riesz uzayları üzerinde tanımlı fonksiyonların sürekliliğini verelim.

4.1.1. Tanım

E bir Riesz uzayı ve $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ bir dönüşüm olsun. Herhangi bir (t_n) dizisi ve $t \in E$ için E uzayında $t_n \xrightarrow{o} t$ iken $\mathbb{R}$ 'de $\varphi(t_n) \rightarrow \varphi(t)$ oluyorsa φ dönüşümüne sürekli denir.

4.1.2. Tanım

X boştan farklı bir küme, E bir Riesz uzayı ve $*$ sürekli bir t-norm olsun. $X \times X \times E^+$ üzerindeki M^E fuzzy kümesi aşağıdaki şartları sağlıyorsa $(X, M^E, *)$ üçlüsü fuzzy vektör metrik uzay olarak adlandırılır. Her $x, y, z \in X$ ve $t, s \in E^+$ için

$$(fvm1) \quad M^E(x, y, t) > 0,$$

$$(fvm2) \quad M^E(x, y, t) = 1 \Leftrightarrow x = y,$$

$$(fvm3) \quad M^E(x, y, t) = M^E(y, x, t),$$

$$(fvm4) \quad M^E(x, y, t) * M^E(y, z, s) \leq M^E(x, z, t + s),$$

$$(fvm5) \quad M^E(x, y, \cdot) : E^+ \rightarrow [0, 1] \text{ s\u00fcreklidir.}$$

$(X, M^E, *)$ bir fuzzy vekt\u00f6r metrik uzay ise $(M^E, *)$ ya da basit\u00e7e M^E , X \u00fczerinde bir fuzzy vekt\u00f6r metriktir denir.

Hem fuzzy metrik uzayların hem de vekt\u00f6r metrik uzayların fuzzy vekt\u00f6r metrik uzaylar oldu\u011fu a\u00e7ıktır.

4.1.3. Lemma

Her $x, y \in X$ i\u00e7in $M^E(x, y, \cdot) : E^+ \rightarrow [0, 1]$ azalmayan bir fonksiyondur.

\u00d6rnek

X bo\u015f olmayan bir k\u00fcme, E normlu bir Riesz uzayı ve $d : X \times X \rightarrow E$ d\u00f6n\u00fc\u015f\u00fcm\u00fc E \u00fczerinde bir vekt\u00f6r metrik olsun. $a * b = \min(a, b)$ ve her $x, y \in X$ ve $t \in E^+$ i\u00e7in

$$M^E(x, y, t) = \frac{\|t\|}{\|t\| + \|d(x, y)\|}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda $(M^E, *)$, d vekt\u00f6r metri\u011fi tarafından indirgenmi\u015f fuzzy vekt\u00f6r metriktir ve standart fuzzy vekt\u00f6r metrik olarak adlandırılır.

\u0130spat

Sadece be\u015finci \u015fartı g\u00f6sterelim. (t_n) dizisi t 'ye sıra yakınsak olsun. Bu durumda $|t_n - t| \leq s_n \downarrow 0$ olacak \u015fekilde ba\u015fka bir (s_n) dizisi vardır. Latis norm \u015fartından ve ters \u00fc\u011fen e\u015fitsizli\u011finden her $n \in \mathbb{N}^+$ i\u00e7in

$$|||t_n|| - ||t||| \leq \|t_n - t\| \leq \|s_n\| \downarrow 0$$

elde ederiz. Dolayısıyla

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M^E(x, y, t_n) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \|t_n\|}{\lim_{n \rightarrow \infty} \|t_n\| + \|d(x, y)\|} = \frac{\|t\|}{\|t\| + \|d(x, y)\|} = M^E(x, y, t)$$

olur.

Örnek

$X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ve E bir Riesz uzayı olsun. $a * b = a.b$ ve her $x, y \in X$ için

$$M^E(x, y, t) = \begin{cases} |x|/|y|, & |x| \leq |y| \\ |y|/|x|, & |y| \leq |x| \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda $(X, M^E, *)$ bir fuzzy vektör metrik uzay olur.

Örnek

X boş olmayan bir küme, E normlu bir Riesz uzayı ve $\varphi : (0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ artan sürekli bir fonksiyon olsun. $a * b = a.b$ ve her $x, y \in X$ ve $t \in E^+$ için

$$M^E(x, y, t) = \begin{cases} 1, & x = y \\ \varphi(\|t\|), & x \neq y \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda $(X, M^E, *)$ bir fuzzy vektör metrik uzay olur.

Örnek

X normlu bir Riesz uzayı ve E bir Riesz uzayı olsun. $a * b = a.b$ ve her $x, y \in X$ ve $t \in E^+$ için

$$M^E(x, y, t) = \begin{cases} 1, & x = y \\ \|x \vee y\| / (\|x\| \vee \|y\|), & x \neq y \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda $(X, M^E, *)$ bir fuzzy vektör metrik uzay olur.

Şimdi fuzzy vektör metrik uzaylar için bazı topolojik kavramları verelim.

4.1.4. Tanım

$(X, M^E, *)$ bir fuzzy vektör metrik uzay olsun. $x \in X$, $0 < r < 1$ ve $t \in E^+$ için x -merkezli, r yarıçaplı $B^E(x, r, t)$ açık yuvarı ve $B^E[x, r, t]$ kapalı yuvarı sırasıyla

$$B^E(x, r, t) = \{y \in X : M^E(x, y, t) > 1 - r\}$$

$$B^E[x, r, t] = \{y \in X : M^E(x, y, t) \geq 1 - r\}$$

biçiminde tanımlanır.

4.1.5. Tanım

(a) $(X, M^E, *)$ bir fuzzy vektör metrik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Her $x, y \in A$ ve $t \in E^+$ için $M^E(x, y, t) > 1 - r$ olacak şekilde $r \in (0, 1)$ varsa A kümesine F_E -sınırlıdır denir. Ayrıca $(x_n) \subset X$ olsun. Her $t \in E^+$ ve $n \in \mathbb{N}^+$ için $(x_n) \subseteq B^E[x, r, t]$ olacak şekilde $r \in (0, 1)$ sayısı varsa (x_n) dizisine F_E -sınırlıdır denir.

(b) $(X, M^E, *)$ bir fuzzy vektör metrik uzay, $(x_n) \subset X$ ve $x \in X$ olsun. Her $\varepsilon \in (0, 1)$ ve $t \in E^+$ için $n \geq n_0$ iken $M^E(x_n, x, t) > 1 - \varepsilon$ olacak şekilde $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı varsa (x_n) , x 'e yakınsıyor denir ve aşağıdaki biçimde gösterilir.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M^E(x_n, x, t) = 1 \text{ ya da } x_n \xrightarrow{M^E} x.$$

(c) $(X, M^E, *)$ bir fuzzy vektör metrik uzay, $(x_n) \subset X$ olsun. Her $\varepsilon \in (0, 1)$ ve $t \in E^+$ için $n, m \geq n_0$ iken $M^E(x_n, x_m, t) > 1 - \varepsilon$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı varsa (x_n) bir Cauchy dizisidir denir.

(d) $(X, M^E, *)$ fuzzy vektör metrik uzayındaki her Cauchy dizisi X 'de yakınsak ise bu uzaya tamdır denir.

(e) $(X, M^E, *)$ fuzzy vektör metrik uzay ve $Y \subset X$ olsun. $(x_n) \subseteq Y$ ve $x_n \xrightarrow{M^E} x$ iken $x \in Y$ oluyorsa Y kümesine kapalıdır denir.

4.1.6. Teorem

$(X, M^E, *)$ fuzzy vektör metrik uzay ve $(x_n) \subseteq X$ yakınsak bir dizi olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır.

- (a) (x_n) , F^E -sınırlıdır ve limiti tektir.
- (b) (x_n) , X uzayında bir Cauchy dizisidir.
- (c) (x_n) dizisinin her alt dizisi aynı limite yakınsar.

İspat

(a) İlk olarak (x_n) yakınsak dizisinin F^E -sınırlı olduğunu gösterelim. $x_n \xrightarrow{M^E} x$ olduğunu varsayalım. Bu durumda Her $\varepsilon \in (0, 1)$ ve $t \in E^+$ için $n \geq n_0$ iken $M^E(x_n, x, t/2) > 1 - \varepsilon$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Şimdi $x_0 \in X$ ve $s \in (0, 1)$ için $M^E(x_0, x, t/2) > 1 - s$ ve $k \in (0, 1)$ için $\min\{M^E(x_n, x, t/2) : n = 1, 2, \dots, n_0\} = 1 - k$ olsun. Bu durumda

$$\min\{(1 - s) * (1 - k), (1 - s) * (1 - \varepsilon)\} = 1 - r$$

olacak şekilde bir $r \in (0, 1)$ sayısı bulabiliriz. Bu yüzden her $n \in \mathbb{N}^+$ için $M^E(x_0, x_n, t) \geq M^E(x_0, x, t/2) * M^E(x_n, x, t/2) \geq 1 - r$ olur. Dolayısıyla her $n \in \mathbb{N}^+$ için $(x_n) \subseteq B^E[x_0, r, t]$ olur yani (x_n) , F_E -sınırlıdır.

Şimdi (x_n) dizisinin limitinin tek olduğunu gösterelim. (x_n) yakınsak dizisinin x ve y olmak üzere iki farklı limitinin olduğunu farz edelim. Herhangi bir $t \in E^+$ ve $\varepsilon \in (0, 1)$ için $(1 - r) * (1 - r) \geq 1 - \varepsilon$ olacak şekilde bir $r \in (0, 1)$ vardır. $\varepsilon = 1 - M^E(x, y, t)$ olsun. Varsayımımıza göre $n \geq n_1$ iken $M^E(x_n, x, t/2) > 1 - r$ olacak şekilde $n_1 \in \mathbb{N}$ ve $n \geq n_2$ iken $M^E(x_n, y, t/2) > 1 - r$ olacak şekilde $n_2 \in \mathbb{N}$ vardır. $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ olarak alırsak bu durumda $n \geq n_0$ iken

$M^E(x, y, t) \geq M^E(x_n, x, t/2) * M^E(x_n, y, t/2) > (1-r) * (1-r) \geq 1-\varepsilon = M^E(x, y, t)$ yani $M^E(x, y, t) > M^E(x, y, t)$ olur ki bu da bir çelişkidir.

(b) $t \in E^+$ ve $\varepsilon \in (0, 1)$ olsun. $(1-r) * (1-r) > 1-\varepsilon$ olacak şekilde bir $r \in (0, 1)$ vardır. (x_n) yakınsak bir dizi olduğundan $n \geq n_0$ iken $M^E(x_n, x, t/2) > 1-r$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Bu durumda $n, m \geq n_0$ iken

$M^E(x_n, x_m, t) \geq M^E(x_n, x, t/2) * M^E(x, x_m, t/2) \geq (1-r) * (1-r) > (1-\varepsilon)$ elde edilir.

(c) $(x_{n_k}), (x_n)$ dizisinin bir alt dizisi olsun. $x_n \xrightarrow{M^E} x$ ise her $t \in E^+$ ve $\varepsilon \in (0, 1)$ için $n \geq n_0$ iken $M^E(x_n, x, t/2) > 1-\varepsilon$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. $k \geq n_0$ ise bu durumda $n_0 \leq k \leq n_k$ elde edilir. Bu yüzden $M^E(x_{n_k}, x, t) > 1-\varepsilon$ olur.

4.1.7. Önerme

$(X_1, M_1^E, *)$ ve $(X_2, M_2^E, *)$ iki fuzzy vektör metrik uzay olsun. Ayrıca $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in X_1 \times X_2$ ve $t \in E^+$ için $M^E((x_1, x_2), (y_1, y_2), t) = M_1^E(x_1, y_1, t) * M_2^E(x_2, y_2, t)$ olarak tanımlansın. Bu durumda $((X_1 \times X_2), M^E, *)$ bir fuzzy vektör metrik uzay olur.

Bu durumda fuzzy vektör metrik uzaylar ve dolayısıyla fuzzy metrik uzaylar için aşağıdaki sonuca ulaşabiliriz.

4.1.8. Teorem

$(X_1, M_1^E, *)$ ve $(X_2, M_2^E, *)$ iki fuzzy vektör metrik uzay ve M^E , önerme 4.1.7'deki gibi bir fuzzy vektör metrik olsun. (x_n) ve (y_n) dizileri için eğer X_1 uzayında $x_n \xrightarrow{M_1^E} x$ ve X_2 uzayında $y_n \xrightarrow{M_2^E} y$ sağlanıyorsa bu durumda $X_1 \times X_2$ 'de $(x_n, y_n) \xrightarrow{M^E} (x, y)$ olur.

İspat

$t \in E^+$ ve $\varepsilon \in (0, 1)$ olsun. $(1-r) * (1-r) > 1-\varepsilon$ olacak şekilde bir $r \in (0, 1)$ bulabiliriz. Bu durumda $n \geq n_1$ iken $M_1^E(x_n, x, t) > 1-r$ olacak şekilde $n_1 \in \mathbb{N}$ ve $n \geq n_2$ iken $M_2^E(y_n, y, t) > 1-r$ olacak şekilde $n_2 \in \mathbb{N}$ vardır. $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ olarak alırsak

$$M^E((x_n, y_n), (x, y), t) = M_1^E(x_n, x, t) * M_2^E(y_n, y, t) > (1 - r) * (1 - r) > 1 - \varepsilon$$

elde ederiz. Böylece ispat tamamlanmış olur.

4.1.9. Teorem

$(X, M^E, *)$ fuzzy vektör metrik uzayı için aşağıdakiler sağlanır.

(i) Her yakınsak dizi bir Cauchy dizisidir.

(ii) Her Cauchy dizisi F^E -sınırlıdır.

(iii) $(x_n) \subseteq X$ Cauchy dizisi, $x_{n_k} \xrightarrow{M^E} x$ olacak şekilde bir (x_{n_k}) alt dizisine sahipse bu durumda $x_n \xrightarrow{M^E} x$ olur.

İspat

(i) $t \in E^+$ ve $\varepsilon \in (0, 1)$ olsun. $(1 - r) * (1 - r) > 1 - \varepsilon$ olacak şekilde bir $r \in (0, 1)$ bulabiliriz. Eğer $x_n \xrightarrow{M^E} x$ ise $n \geq n_0$ iken $M^E(x_n, x, t/2) > 1 - r$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. $n, m \geq n_0$ iken

$$M^E(x_n, x_m, t) \geq M^E(x_n, x, t/2) * M^E(x_m, x, t/2) > (1 - r) * (1 - r) > 1 - \varepsilon \text{ elde ederiz.}$$

(ii) (x_n) , X 'de bir Cauchy dizisi olsun. Bu durumda her $t \in E^+$ ve $\varepsilon \in (0, 1)$ için $n, m \geq n_0$ iken $M^E(x_n, x_m, t) > 1 - \varepsilon$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Dolayısıyla $n \geq n_0$ için $M^E(x_n, x_{n_0}, t) > 1 - \varepsilon$ olur. Ayrıca $r = 1 - \min\{M^E(x_n, x_{n_0}, t) : 1, 2, \dots, n_0 - 1\}$ olsun ve $s = \max\{\varepsilon, r\}$ olarak seçelim. Bu durumda $\{x_n : n = 1, 2, \dots\} \subseteq B[x_{n_0}, s, t]$ olur yani (x_n) , F^E -sınırlıdır.

(iii) $t \in E^+$ ve $\varepsilon \in (0, 1)$ olsun. $(1 - r) * (1 - r) > 1 - \varepsilon$ olacak şekilde bir $r \in (0, 1)$ bulabiliriz. (x_n) , X 'de bir Cauchy dizisi olduğu için $n, m \geq n_0$ iken $M^E(x_n, x_m, t/2) > 1 - r$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. $x_{n_k} \xrightarrow{M^E} x$ olduğundan $i_k > n_0$ ve $M^E(x_{i_k}, x, t/2) > 1 - r$ olacak şekilde bir i_k pozitif tamsayısı vardır. Her $n \geq n_0$ için

$$M^E(x_n, x, t) \geq M^E(x_n, x_{i_k}, t/2) * M^E(x_{i_k}, x, t/2) > (1-r) * (1-r) \geq 1-\varepsilon$$

elde ederiz, dolayısıyla $x_n \xrightarrow{M^E} x$ olur.

4.1.10. Tanım

$(X, M^E, *)$ bir fuzzy vektör metrik uzay ve A , X uzayının boş olmayan bir alt kümesi olsun. Bu durumda D_A^E kusurlu fuzzy vektör çapı

$$D_A^E = \sup_{t \in E^+} \{ \inf M^E(x, y, t) : x, y \in A \}$$

biçiminde tanımlarız: Ayrıca eğer $D_A^E = 1$ oluyorsa A kümesine F^E -sınırlıdır denir.

Not

Eğer A tek noktadan oluşan bir küme ise $D_A^E = 1$ olur. Fakat kesin kümelerin aksine $D_A^E = 1$ ise A tek nokta kümesi olmayabilir. Örneğin;

$$M^E(x, y, t) = \frac{\|t\|}{\|t\| + \|d(x, y)\|}$$

şeklinde tanımlanan standart fuzzy vektör metriği alalım. $A \subset X$ ve $A = \{x_0, y_0\}$ olsun. Bu durumda

$$D_A^E = \sup_{t \in E^+} \frac{\|t\|}{\|t\| + \|d(x_0, y_0)\|} = 1$$

olur.

4.1.11. Tanım

$(X, M^E, *)$ fuzzy vektör metrik uzay ve (A_n) , X uzayının boş olmayan alt kümelerinin bir dizisi olsun. Eğer $\lim_{n \rightarrow \infty} D_{A_n}^E = 1$ oluyorsa (A_n) dizisi beliren ya da belirgin bir kusurlu fuzzy vektör çapa sahiptir denir.

Bu durumda her $r \in (0, 1)$, $t \in E^+$ ve $x, y \in A_{n_0}$ için $M^E(x, y, t) > 1 - r$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır.

4.1.12. Teorem (Cantor kesişim teoremi)

$(X, M^E, *)$ fuzzy vektör metrik uzay ve (A_n) beliren bir kusurlu fuzzy vektör çapla birlikte X uzayının boş olmayan kapalı alt kümelerinin azalan bir dizisi olsun. X tamdır gerek ve yeter şart $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{x\}$ olacak şekilde sadece bir $x \in X$ noktası vardır.

İspat

X fuzzy vektör metrik uzayı tam olsun. Her bir $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in A_n$ noktasını alarak bir (x_n) dizisi oluşturabiliriz. $m \geq n$ olarak seçersek $A_m \subseteq A_n$ olur böylece dizinin bütün $\{x_m : m \geq n\}$ noktaları A_n kümesine ait olur. Bu durumda her bir $t \in E^+$ ve $m \geq n$ için $M^E(x_m, x_n, t) \geq D_{A_n}^E$ elde ederiz ve sonuç olarak $\lim_{n, m \rightarrow \infty} M^E(x_m, x_n, t) = 1$ olur. Bu durumda (x_n) bir Cauchy dizisidir. X tam olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} M^E(x_n, x, t) = 1$ olacak şekilde bir $x \in X$ noktası vardır. A_{n_0} kümesini alalım. $\{x_n : n \geq n_0\} \subset A_{n_0}$ dizisinin limiti de elbette aynı x noktasıdır. Ayrıca A_{n_0} kapalı olduğundan $x \in A_{n_0}$ olur. Bu x noktasının (A_n) dizisinin her elemanına ait olduğu anlamına gelir. Bu yüzden $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ elde ederiz. Şimdi başka bir $x' \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ noktasını alalım. Bu durumda $t \in E^+$ için $M^E(x, x', t) \geq D_{A_n}^E$ bağıntısı sağlanmalı bu ise $M^E(x, x', t) = 1$ olduğunu gösterir. Dolayısıyla $x = x'$ olduğundan $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{x\}$ elde ederiz.

Diğer taraftan (x_n) , X uzayında bir Cauchy dizisi ve her $n \in \mathbb{N}$ için $A_n = \overline{\{x_m : m \geq n\}}$ X 'in boş olmayan, kapalı alt kümeleri olsun. (A_n) azalan bir dizi ve (x_n) bir Cauchy dizisi olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} D_{A_n}^E = 1$ olmalıdır. Varsayımımıza göre bütün bu kümelerin kesişimi X uzayının sadece tek bir noktasını içerir. $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{x\}$ olduğunu farz edelim. $\varepsilon \in (0, 1)$ için $D_{A_{n_0}}^E > 1 - \varepsilon$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. $x \in A_{n_0}$ olduğunu biliyoruz bu yüzden her $\varepsilon \in (0, 1)$ ve $t \in E^+$ için $n \geq n_0$ iken $M^E(x_n, x, t) > 1 - \varepsilon$ elde ederiz. Bu durumda keyfi olarak aldığımız (x_n) dizisi x noktasına yakınsar. Bu da X fuzzy vektör metrik uzayının tam olduğunu gösterir.

4.1.13. Teorem (Baire teoremi)

X tam bir fuzzy vektör metrik uzay ve $\{A_n \subset X : n = 1, 2, \dots\}$ X 'de yoğun olan açık alt kümelerin sayılabilir bir ailesi olsun. Bu durumda $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, X 'de yoğundur.

İspat

Teoremi ispatlamak için $x \in X$, $0 < r < 1$ ve $t \in E^+$ için $B^E(x, r, t)$ açık yuvarı ile $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ kümesinin kesişiminin boş olmadığını göstermeliyiz. İlk olarak A_1 kümesini alalım. A_1 , X 'de yoğun olduğundan $B^E(x, r, t) \cap A_1$ boş değildir ve açıktır. $x_1 \in B^E(x, r, t) \cap A_1$ olsun. Bu durumda $B^E[x_1, r_1, t_1] \subset B^E(x, r, t) \cap A_1$ olacak şekilde $r_1 \in (0, 1)$ ve $t_1 \in E^+$ vardır. $B_1^E = B^E(x_1, r_1, t_1)$ olsun. A_2 , X 'de yoğun olduğundan $B_1^E \cap A_2$ açıktır ve boş değildir. $x_2 \in B_1^E \cap A_2$ olsun. Bu durumda $B^E[x_2, r_2, t_2] \subset B_1^E \cap A_2$ olacak şekilde $r_2 \in (0, \frac{1}{2})$ ve $t_2 \in E^+$ vardır. $B_2^E = B^E(x_2, r_2, t_2)$ olsun. Bu şekilde devam edersek her $n \in \mathbb{N}$ için

$$B^E[x_{n+1}, r_{n+1}, t_{n+1}] \subset B_n^E \cap A_{n+1} \subset B^E[x_n, r_n, t_n] \text{ ve } r_n \in \left(0, \frac{1}{n}\right)$$

olacak şekilde X uzayında bir (x_n) dizisi ve (r_n) pozitif reel sayı dizisi ederiz. Teorem 4.1.12, $\bigcap_{n=1}^{\infty} B^E[x_n, r_n, t_n]$ kümesinin tek elemanlı olduğunu garantiler. Böylece

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B^E[x_n, r_n, t_n] \subset B^E(x, r, t) \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

ifadesinden $B^E(x, r, t) \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) \neq \emptyset$ elde ederiz.

5. SONUÇ

Bu çalışmada gerekli alt yapıyı kurmak amacıyla öncelikli olarak Riesz uzayları ve kavramlarını ele alındı. Daha sonra metriğin vektörel değer aldığı vektör metrik uzayı tanıtıldı ve bu uzayın klasik metrik uzayın bir genellemesi olduğu görüldü. Sonrasında klasik üçgen eşitsizliğini genelleyebilmek adına ihtiyaç duyulan üçgensel fonksiyonlar incelendi. Özellikle t-normlar ve dualleri olan t-conormlara ağırlık verildi. Öncelikle dağılım fonksiyonlarının negatif olmayan bir t reel sayısı ile ilişkilendirilip kullanılmasıyla ortaya çıkan olasılıksal metrik uzaylar, sonrasında üçgen eşitsizliğinin keşfiyle ortaya çıkan Menger uzaylar incelendi. Üçgen eşitsizliğinin evrensellik özelliğinden ötürü Menger uzaylarındaki τ fonksiyonu için ideal adayın t-normlar olduğuna ilişkin tespitlere yer verildi. Devamında fuzzy kümeler teorisi ve mantığı incelendi. Fuzzy kümeler teorisinin t-normlarla birlikte olasılıksal metrik uzay kavramlarıyla ilişkilendirilmesi neticesinde oluşturulan fuzzy metrik uzaylara ayrıntılarıyla yer verildi. Böylelikle bu çalışmada fuzzy metrik uzay kavramının zamanla nasıl oluşup olgunlaştığı görüldü. Ayrıca Riesz uzaylarının elemanları olan vektörler de kullanılarak bu kavram zenginleştirilip ilk defa fuzzy vektör metrik uzaylar tanımlandı. Böylece hem vektör metrik uzayların hem de fuzzy metrik uzayların bir fuzzy vektör metrik uzayı olduğu tespit edildi. Ayrıca latis norm şartıyla ilgili fuzzy vektör metrik şartı için sürekliliği güncellendi. Kusurlu fuzzy vektör çap ve belirgin kusurlu fuzzy vektör çap tanımları yapıp, Cantor kesişim ve Baire teoremlerinin ispatında bu tanımlardan yararlanıldı.



KAYNAKLAR

1. Aliprantis, C. D. and Border, K. C. (1999). *Infinite-dimensional analysis. A hitchhiker's guide*, (Second edition). Berlin: Springer-Verlag, 69-272.
2. Aliprantis, C. D. and Burkinshaw, O. (2006). *Positive operators*. Reprint of the 1985 orginal. Dordrecht: Springer, 1-181.
3. Buckley, J. J. and Eslami, E. (2002). *An introduction to fuzzy logic and fuzzy sets. Advances in Soft Computing*. Heidelberg: Physica-Verlag, 5-125.
4. Butnariu, D. and Klement, E. P. (1993). *Triangular norm based measures and games with fuzzy coalitions*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 7-20.
5. Çevik, C. (2014). On continuity of functions between vector metric spaces. *Journal of Function Spaces*, Art. ID 753969, 6 pages.
6. Çevik, C. and Altun, İ. (2009). Vector metric spaces and some properties. *Topological Methods in Nonlinear Analysis*, 34(2), 375-382.
7. Eminoğlu, Ş. and Çevik, C. (2017). Fuzzy vector metric spaces and some results. *J. Nonlinear Sci. Appl.*, 10(7), 3429-3436.
8. George, A. and Veeramani, P. (1994). On some results in fuzzy metric spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, 64(3), 395-399.
9. George, A. and Veeramani, P. (1997). On some results of analysis for fuzzy metric spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, 90(3), 365-368.
10. Grabiec, M. (1988). Fixed points in fuzzy metric spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, 27(3), 385-389.
11. Gregori, V., Morillas, S., and Sapena, A. (2011). Examples of fuzzy metrics and applications. *Fuzzy Sets and Systems*, 170, 95-111.
12. Gregori, V. and Romaguera, S. (2004). Characterizing completable fuzzy metric spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, 144(3), 411-420.
13. Kaleva, O. and Seikkala, S. (1984). On fuzzy metric spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, 12, 215-229.
14. Klement, E. P., Mesiar, R., and Pap E. (2000). *Triangular norms*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1-20.
15. Kramosil, I. and Michálek, J. (1975). Fuzzy metrics and statistical metric spaces. *Kybernetika (Prague)*, 11(5), 336-344.

16. Menger, K. (1942). Statistical metrics. *Proc. Nat. Acad.Sci.U. S. A.* 28, 535-537.
17. Schweizer, B. and Sklar, A. (1960). Statistical metric spaces. *Pacific J. Math.*, 10, 313-334.
18. Schweizer, B. and Sklar, A. (2005). *Probabilistic metric spaces*. New York: Dover Publications, 1-201.
19. Şuhubi, E. S. (2003). *Functional analysis*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 292-300.
20. Wang, Z., Yang, R., and Leung, K.-S. (2010). *Nonlinear integrals and their applications in data mining*. Hackensack: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 24-51.
21. Xiao, J. Z., Zhu, X. H., and Jin, P. P. (2015). Iterated function systems and attractors in the KM fuzzy metric spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, 267, 100-116.
22. Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Information and Control*, 8, 338-353.
23. Zimmermann, H. J. (1996). *Fuzzy set theory and its applications*. (Third edition). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1-57.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, Adı : EMİNOĞLU, Şehla
 Uyuğu : T.C.
 Doğum tarihi ve yeri : 01.08.1981, Beytüşşebap
 Medeni hali : Evli
 Telefon : 05379169552
 e-mail : sehla_eminoglu@hotmail.com



Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Yüksek lisans	Viyana Üniversitesi/Matematik Böl.	2009
Lisans(Birleşik)	Viyana Üniversitesi/Matematik Böl.	2009
Lisans	Van Yüzüncü Yıl Üniv./Matematik Böl.	2004
Lise	Van İmam-Hatip Lisesi	1999

Yabancı Diller

İngilizce, Almanca

Yayınlar

1. Eminoglu, Ş. and Çevik, C. (2017). Fuzzy vector metric spaces and some results. *J. Nonlinear Sci. Appl.*, 10, 3429-3436.
2. Çevik, C. and Eminoglu, Ş. (in press). Generated fuzzy metric spaces and some topological properties. *J. Intell. Fuzzy Systems*, Preprint, 1-9.

Sempozyumlar

1. Eminoglu, Ş. and Çevik, C. (2017, 27-29 April). *Fuzzy Vector Metric Spaces and Some Results*. International Workshop on Mathematical Methods in Engineering, Çankaya University, Ankara



GAZİ GELECEKTİR..