

EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

(YÜKSEK LİSANS TEZİ)

AYRIK MORSE TEORİ ÜZERİNE

MUSTAFA AKKAYA

Tez Danışmanı: Prof. Dr. İsmet KARACA

Matematik Anabilim Dalı

Bilim Dalı Kodu: 403.04.01

Sunuş Tarihi: 01.06.2018

Bornova-İzmir

2018

Mustafa AKKAYA tarafından YÜKSEK LİSANS tezi olarak sunulan "Ayrık Morse Teori Üzerine" başlıklı bu çalışma EÜ Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği ile EÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim ve Öğretim Yönergesi'nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş ve **01.06.2018** tarihinde yapılan tez savunma sınavında aday oybirliği/~~oyçokluğu~~ ile başarılı bulunmuştur.

Jüri üyeleri:

İmza

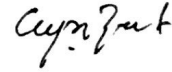
Jüri Başkanı : Prof. Dr. İsmet KARACA



Raportör Üye : Doç. Dr. Özgür EGE



Üye : Dr. Öğr. Üyesi Ayşe BORAT



EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

EÜ Lisanüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği'nin ilgili hükümleri uyarınca Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "**Ayrık Morse Teori Üzerine**" başlıklı bu tezin kendi çalışmam olduğunu, sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgeleri bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara atıf yaptığımı ve bunları kaynaklar listesinde usulüne uygun olarak verdiğimi, tez çalışması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını, bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya diğer bir üniversitede başka bir tez çalışması içinde sunmadığımı, bu tezin planlanmasından yazımına kadar bütün safhalarda bilimsel etik kurallarına uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul edeceğimi beyan ederim.

01/06/2018

Mustafa AKKAYA



ÖZET

AYRIK MORSE TEORİ ÜZERİNE

AKKAYA, Mustafa

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. İsmet KARACA

Haziran 2018, 47 sayfa

Robin Forman tarafından geliştirilen ayrık Morse teorisi, bir simpleksler kompleksinin topolojisinin analiz edildiği kullanışlı metotlardan biridir. Bu tez çalışmasında ele alınan makale Robin Forman'ın "A User's Guide to Discrete Morse Theory" adlı makalesidir. Ayrık Morse teorisinin, bilgisayar bilimleri ve uygulamalı matematik içindeki çeşitli alanlarda konfigürasyon uzayları, homoloji hesaplama, gürültü arındırma, veri sıkıştırma ve topolojik veri analizi gibi çeşitli kullanışlı uygulamaları vardır.

Morse teorisi en iyi şekilde CW-kompleksler aracılığıyla ifade edildiği için, bu konu açıklanacaktır. Ayrık Morse teorisinin temelleri olan tanım ve teoremler ile Morse fonksiyonunun tanımı, bu dilde ifade edilecek ve bazı örnekler verilecektir. Fakat ayrık Morse fonksiyonu ile benzer karakteristik özelliğe sahip bir başka yapı olan gradyant vektör alanları ile de ihtiyaç duyulan topolojik özellikler elde edebilir. Ayrık Morse fonksiyonundan daha kullanışlı olan bu yapı açıklanacak ve bazı örnekler verilecektir. Son olarak, kombinatorik bakış açısı, Hasse diyagramları ve bir Morse fonksiyonunu daha kullanışlı bir duruma dönüştürebilen kritik nokta yok etme metodu verilecek ve Morse homolojisi açıklanacaktır.

Anahtar sözcükler: Simpleksler kompleksi, homotopi grupları, CW-kompleksler, gradyant vektör alanları.

ABSTRACT

ON DISCRETE MORSE THEORY

AKKAYA, Mustafa

MSc. in Mathematics Department

Supervisor: Prof. Dr. İsmet KARACA

June 2018, 47 pages

Discrete Morse theory developed by Robin Forman is one of the practical methods, by which the topology of a simplicial complex is analysed. The article discussed in this thesis is R.Forman's paper titled "A User's Guide to Discrete Morse Theory". Discrete Morse theory has various practical applications in diverse fields of applied mathematics and computer science, such as configuration spaces, homology computation, denoising, mesh compression, and topological data analysis.

Since Morse theory is best stated by the language of CW-complexes, this topic will be explained. Definitions, theorems which are the basics of the subject and definition of Morse function will be stated in this language and some examples will be given. However, the needed topological properties can also be obtained by the gradient vector fields which is the other structure has similar characteristic property as discrete Morse function. Being more useful than discrete Morse function, this structure will be explained, and some examples will be presented. At most, combinatorial point of view, Hasse diagrams, and the method of cancelling critical points which can transform a Morse function to a more useful case will be stated and Morse homology will be explained.

Keywords: Simplicial complexes, homotopy groups, CW-complexes, gradient vector fields.

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanması sürecinde çalışmalarında bilgi, görüş ve tecrübelerinden yararlandığım Hocam Sayın Prof. Dr. İsmet KARACA'ya, düzenlediğimiz seminerlerde beni dinleyip benimle bilgi ve görüşlerini paylaşan Hocam Sayın Doç. Dr. Özgür EGE'ye, jüri üyesi Sayın Dr. Öğr. Üyesi Ayşe BORAT'a, tezin başından sonuna kadar her anında tüm sorularıma cevap veren, değerli vaktini bana ayıran Hocam Sayın Arş. Gör. Dr. Tane VERGİLİ'ye, tezin yazım sürecinde desteğini esirgemeyen Sayın Arş. Gör. Melih İS'e ve bu çalışmayı 17-FEN-082 numaralı bilimsel araştırma projesi ile destekleyen Ege Üniversitesi Fon Saymanlığı'na teşekkür ederim. Son olarak bu çalışmanın oluşumu sırasında en başından beri her şartta desteklerini yanımda hissettiğim sevgili aileme göstermiş oldukları sabır ve anlayıştan dolayı teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET	vii
ABSTRACT	ix
TEŞEKKÜR	xi
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	xvii
1 GİRİŞ	1
2 ÖN BİLGİLER	3
3 AYRIK MORSE TEORİSİNE GİRİŞ	15
4 GRADYANT VEKTÖR ALANLARI	23
5 KOMBİNATORİK BAKIŞ AÇISI	35
6 MORSE KOMPLEKSLER	39
KAYNAKLAR DİZİNİ	45
ÖZGEÇMİŞ	47

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil	Sayfa
2.1 2-hücre ve sınırı	7
2.2 3-hücre ve sınırı	7
2.3 (i) 1-hücre eklemesi (ii) hücre eklemesi değil (Forman, 2002)	8
2.4 Tor'un CW -ayrışımı (Forman, 2002)	9
3.1 Ayırık Morse fonksiyonu değil (Forman, 2002)	15
3.2 Ayırık Morse fonksiyonu (Forman, 2002)	16
3.3 Örnek 3.0.2'nin tüm seviye alt kompleksleri (Forman, 2002)	20
3.4 Simpleks çökmesine örnek (Forman, 2002)	21
3.5 Simpleks çökmesine örnek (Forman, 2002)	21
4.1 Örnek 3.0.2 üzerindeki gradyant vektör alanı (Forman, 2002)	23
4.2 Ayırık Morse fonksiyonu ve gradyant vektör alanı (Forman, 2002) . .	23
4.3 $\mathbb{RP}^2$ nun (i) üçgenleştirmesi (ii) gradyant vektör alanı (Forman, 2002)	27
4.4 G_1 ve G_2 bağlantısız bileşenleri (Forman, 2002)	29
4.5 V_3 ayırık vektör alanında eşlenemeyen grafların tipi (Forman, 2002) .	30
4.6 Bir kenarlı graflar ve karşılık gelen simpleksler	31
4.7 İki kenarlı graflar ve karşılık gelen simpleksler	32
4.8 Üç kenarlı graflar ve karşılık gelen simpleksler	32
4.9 Kritik nokta yok etme	34
5.1 Hasse diyagramının iki aşamada oluşturulması (Forman, 2002) . . .	35
5.2 Kapalı bir yola sahip Hasse diyagramı ve ayırık vektör alanı	37
5.3 Kapalı yol içermeyen bir Hasse diyagramı ve gradyant vektör alanı .	38

6.1	β dan α ya indirgenen yön	40
6.2	$\mathbb{RP}^2$ üzerindeki kritik simplekslerin yönü (Forman, 2002)	41
6.3	Kb üzerindeki gradyant vektör alanı ve kritik simpleksler	42
6.4	t simpleksinin sınırından e_1 ve e_2 ye giden yollar	42
6.5	e_1 ve e_2 simplekslerinin sınırından v ye giden yollar	43



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
K	Simpleksler kompleksi
∂_q	q . boyuttaki sınır homomorfizması
C_*	Zincir kompleks
$H_q(K)$	q . boyutta simpleksler homoloji grubu
Φ	Hücre yapısı
φ	σ hücresinin karakteristik fonksiyonu
δ	Hücre kompleks
b_k	Bir kompleksin k . Betti sayısı
C_*	Zincir kompleks
$\sigma^{(n)}$	n boyutlu hücre
$\partial\sigma^{(n)}$	n boyutlu hücrenin sınırı
Kb	Klein şişesi
$\simeq$	Homotopi bağıntısı
$\cong$	İzomorfizma bağıntısı
$\mathcal{P}$	Monoton azalan graf

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ (devam)

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
K_n	n köşeli tam graf
$\searrow$	Simpleks çökmesi
$\mathcal{G}_n$	K_n in tüm geren alt grafları



1 GİRİŞ

Morse teorisi ilk olarak 1930'lu yıllarda A.B.D'li matematikçi Marston Morse tarafından çalışılmıştır. Teori genel olarak bir düzgün manifold üzerindeki fonksiyonun kritik noktaları ile topolojik özellikleri arasındaki ilişki üzerine kuruludur. Bu nedenle teoriye kritik nokta teorisi de denir. Marston Morse'un temel düşüncesine göre manifolddaki tipik bir diferansiyellenebilir fonksiyon topolojiyi tamamen yansıtır.

Matematiğin birçok alanında önemli bir problem olan bir simpleksler kompleksinin topolojisini analiz etmeye geldiğimiz zaman elimizdeki kullanışlı yöntemler çok azdır. Bu problemi gidermek için 1990 larda Robin Forman tarafından Morse teorisinin kombinatorik bir uygulaması olan ayrık Morse teorisi geliştirilmiştir. Böylece basit bir kombinatorik tanımla Morse teorisi graflara ve gradyant vektör alanlarına uygulanabilmiştir.

Ayrıca kritik noktaları kapalı bir alt manifold olan manifoldlar üzerindeki düzgün fonksiyonları inceleyen Morse-Bott teorisi ve Edward Witten'in diferansiyel ve harmonik formların deformasyonunu kullanarak hesapladığı Morse homolojisi Morse teorisinin diğer uygulamalarına örnek olarak verilebilir.

Bu tez çalışmasında temel amacımız ayrık Morse teorisine genel bir bakış sunabilmektir. Bu bağlamda gerekli olan temel tanım ve teoremler ifade edilmiştir. Morse teorisi CW-komplekslerin dili ile ifade edildiği için, ön bilgilerde bu konuya geniş bir yer verilmiş ve örneklerle açıklanmıştır. Morse teorisi ile bir hücre kompleksinin CW-ayrışımının nasıl tespit edildiğinden bahsedilmiş ve Morse teorisinin temelleri olan tanım ve teoremler yine örneklerle gösterilmiştir. Sonrasında, pratikte neler olduğu üzerinde durulmuş ve bir Morse fonksiyonuna gerçekten ihtiyaç olmadığı, aynı işin gradyant vektör alanları ile de yapılabileceği gösterilmiştir. Reel Projektif Düzlemin CW-ayrışımının bu yöntemle nasıl tespit edildiği gösterilmiştir. Dahası, bu yapının sadece CW-ayrışımındaki hücre sayısını bulmayı değil, bu hücrelerin sınırlar homomorfizmaları altındaki görüntülerinin hesaplanmasını da sağladığı

gösterilmiştir. Konuya açıklık getirmesi bakımından Klein şişesinin homoloji grubunun, bu yöntem ile nasıl hesaplandığı gösterilmiştir.

Gradyant vektör alanları, bir simpleksler kompleksi yerine bu simpleksi doğuran bir graflar ailesi üzerinde de tanımlanabilmiştir ve Morse teorisi graflara uygulanmıştır. Graflar ailesi üzerindeki kritik graflar tespit edilip, bu grafların temsil ettiği simplekslerin kritik simpleksler olduğu gösterilmiştir. Bu yöntem ile iki bağlantısız ve üç bağlantısız grafların topolojik özellikleri tespit edilebilmektedir. Bu çalışmada ise konuya açıklık getirmesi bakımından bağlantısız graflar örneği açıklanmıştır. Böylece ayrık Morse teorisinin graflar üzerine nasıl uygulandığı gösterilmiştir.

Gradyant vektör alanlarının bir başka ifade ediliş şekli de Hasse diyagramlarıdır. Bu diyagramın nasıl oluşturulduğu ve kritik simplekslerin nasıl tespit edildiği gösterilmiştir. Bir hücre kompleksinin CW-ayrışımı, üzerinde tanımlı olan bir ayrık Morse fonksiyonu ya da gradyant vektör alanı ile tespit edilebilmektedir. Ancak bu ayrışımın ne kadar verimli olduğu tartışılabilir. Mümkün olduğunca az hücreden oluşan bir ayrışım arandığı için, bir gradyant vektör alanının nasıl daha az kritik simplekse sahip hale getirilebildiği yani belirli özelliklere sahip kritik simplekslerin nasıl yok edilebildiği gösterilmiştir.

2 ÖN BİLGİLER

Bu bölümde ayrık Morse teorisinin anlaşılması için ihtiyaç duyulan temel bilgiler verilecektir.

Tanım 2.0.1. (Dieck, 2008) X ve Y topolojik uzaylar ve $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ sürekli dönüşümler olsun. Eğer her $x \in X$ için

$$H(x, 0) = f_0(x) \text{ ve } H(x, 1) = f_1(x)$$

olacak şekilde bir sürekli $H : X \times I \rightarrow Y$ dönüşümü varsa $\mathbf{f}_0$ ve $\mathbf{f}_1$ **homotopiktir** denir ve $\mathbf{f}_0 \simeq \mathbf{f}_1$ şeklinde gösterilir.

Örnek olarak değer kümesi Öklid uzayı olan tüm $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ sürekli dönüşümleri verilebilir. Burada gerekli olan $H : X \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$ homotopi dönüşümü $\mathbb{R}^n$ in konveks olmasından dolayı $H(x, t) = (1 - t)f(x) + tg(x)$ şeklinde kurulabilir.

Eğer X ve Y topolojik uzayları için $f \circ g \simeq 1_Y$ ve $g \circ f \simeq 1_X$ olacak şekilde $f : X \rightarrow Y$ ve $g : Y \rightarrow X$ sürekli fonksiyonları varsa X ve Y topolojik uzayları **aynı homotopi tipine sahiptir** veya **homotopi denktir** denir. g ile f ye de birbirlerinin **homotopi tersi** denir.

Örnek olarak tüm homeomorf uzaylar verilebilir. Homeomorf olmayıp aynı homotopi tipine sahip uzaylara örnek olarak birim disk ve tek noktalı uzay verilebilir. Bu ikisi homeomorf değildir çünkü birebir eşleme kurulamaz. Ancak disk büzülebilir bir uzay olup tek noktalı uzay ile aynı homotopi tipine sahiptir.

Tanım 2.0.2. (Forman, 2002) $A \subseteq X$ $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ sürekli dönüşümler ve $f_0|_A = f_1|_A$ olsun. $\forall t \in I$ ve $\forall a \in A$ için $H(a, t) = f_0(a) = f_1(a)$ olacak şekilde f_0 ile f_1 arasında bir H homotopi dönüşümü varsa f_0 ile f_1 **relatif homotopiktir** denir ve $\mathbf{f}_0 \simeq \mathbf{f}_1 \text{ rel } A$ şeklinde gösterilir.

A , bir X topolojik uzayının bir alt kümesi olsun. Eğer $\forall x \in A$ için $r(x) = x$ olacak şekilde $r : X \rightarrow A$ sürekli dönüşümü varsa A , X in **retraktıdır** denir ve bu r dönüşümüne de **retraksiyon** denir. Buna ek olarak $i : A \hookrightarrow X$ kapsama dönüşümü için $i \circ r \simeq 1_X$ oluyorsa A , X in **deformasyon retraktıdır**

denir. Eğer bu bahsedilen homotopi A ya göre relatif homotopi ise bu sefer de A, X in **güçlü deformasyon retraktıdır** denir.

Her güçlü deformasyon retrakt bir deformasyon retrakttır, her deformasyon retrakt da bir retrakttır. Ancak bunların karşısı her zaman doğru değildir.

Örnek olarak tor ve torun dış çemberi verilebilir. Torun dış çemberinden bir nokta alındığında, bu noktadan tor üzerinde merkez doğrultusunda hareket ederek elde edeceğimiz çemberlerin görüntüsü r dönüşümü altında bu noktaya gitsin. Bu dönüşüm süreklidir ve dış çember üzerindeki tüm noktaları kendisine götürür. Öyleyse torun alt kümesi olan bu çember torun retraktıdır. Fakat deformasyon retraktı değildir. Çünkü tor ile çemberin temel grupları farklıdır. Torun temel grubu $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ iken çemberin temel grubu $\mathbb{Z}$ dir. Bu ise çemberin, torun deformasyon retraktı olamayacağı anlamına gelir.

Tanım 2.0.3. (Lundell, 1969) X ve Y topolojik uzaylar, $A \subseteq X$ kapalı bir alt küme ve $f : A \rightarrow Y$ sürekli bir dönüşüm olsun. X ile Y ayrık birleşimleri üzerinde A nın her bir a elemanı ile $f(a) \in Y$ denk olacak şekildeki denklik bağıntısına göre elde edilen bölüm uzayına **ekli uzay** denir ve bu uzay $Y \cup_f X$ ile gösterilir. Buradaki f dönüşümüne **ekli dönüşüm** denir.

Tanım 2.0.4. (Karaca, 2010) $p_0, p_1, \dots, p_m \in \mathbb{R}^n$ noktalarının konveks kombinasyonu, $\sum_{i=0}^m t_i = 1$ ve $t_i \geq 0$ olmak üzere

$$x = \sum_{i=0}^m t_i p_i$$

şeklinde gösterilir.

Buradaki p_i noktalarının konveks kombinasyonlarının kümesi, bu noktaların gerdiği konveks kümedir. Bu ifade, simpleks tanımı için gereklidir.

Tanım 2.0.5. (Rotman, 1998) $p_0, p_1, \dots, p_m \in \mathbb{R}^n$ noktalarının sıralı kümesi $\{p_1 - p_0, p_2 - p_0, \dots, p_m - p_0\}$, $\mathbb{R}^n$ vektör uzayının lineer bağımsız bir alt uzayı ise

$$\{p_0, p_1, \dots, p_m\}$$

sıralı kümesine **afin bağımsızdır** denir.

Öklid uzayında afin bağımsız $\{v_0, v_1, \dots, v_q\}$ kümesinin gerdiği konveks kümeye bir **q-simpleks** denir ve

$$S = [v_0, v_1, \dots, v_q]$$

şeklinde gösterilir. Bu simpleksin köşelerinin kümesi ise

$$Ver(S) = \{v_0, v_1, \dots, v_q\}$$

dir. Eğer S ve S' simpleksleri için $Ver(S') \subset Ver(S)$ oluyorsa S' simpleksine, S simpleksinin bir yüzü denir. Bir simpleksler ailesi için, ailedeki her simpleksin yüzü o ailede ve iki simpleksin arakesiti ya simplekslerin ortak yüzü ya da boş küme ise, o zaman elemanları simpleksler olan bu aileye bir **simpleksler kompleksi** denir. Ailedeki simplekslerin birleşimine ise kompleks altında yatan **çok yüzlü** denir. Genel olarak her simpleks bir hücre olduğundan bir simpleksler kompleksi de bir hücre kompleksi olarak görülebilir.

Şimdi ise graflar ile alakalı temel tanımlardan bahsedelim.

Tanım 2.0.6. (*Diestel, 2005*) $E \subseteq [V]^2$ olacak şekilde V köşeler (noktalar) kümesi ve E kenarlar kümesinden oluşan $G = (V, E)$ ikilisine **graf** denir.

Graftaki köşe sayısına **grafın mertebesi** denir ve $|G|$ ile gösterilir. Kenar sayısı da $\|G\|$ ile gösterilir. Graftaki iki köşe bir kenar oluşturuyorsa bu köşelere **komşu köşeler**; iki kenarın ortak bir köşesi var ise, bu kenarlara da **komşu kenarlar** denir.

Bir G grafının tüm köşeleri komşu ise, G ye **tam graf** denir. n köşeli bir tam graf K^n ile gösterilir.

Tanım 2.0.7. (*Diestel, 2005*) $G = (V, E)$, $G' = (V', E')$ iki graf olsun.

$$xy \in E \Leftrightarrow \varphi(x)\varphi(y) \in E'$$

olacak şekilde bir $\varphi : V \rightarrow V'$ bijeksiyonu varsa G ve G' **izomorftur** denir ve $G \cong G'$ ile gösterilir. Böyle bir φ dönüşümüne de izomorfizma denir.

İzomorf graflar üzerinde korunan özelliklere **graf özelliği** denir. Örnek olarak "Üçgen (her biri birbirine komşu olan üç köşe) içermesi" bir graf özelliğidir.

$G = (V, E)$, $G' = (V', E')$ iki graf olsun. $V' \subseteq V$ ve $E' \subseteq E$ ise G' grafına G grafının **alt grafı** denir. Eğer özel olarak $V' = V$ ise G' alt grafına **geren alt graf** denir. Graftaki bir köşenin derecesi sıfır ise o köşe **izoledir** denir.

Hiçbir kapalı yol içermeyen graflara **orman** denir. Eğer bir orman bağlantılı ise bu ormana **ağaç** denir.

Şimdi, ayrık Morse teorisinin ifade edilmesinde kullanılan yapı olan CW-komplekslerin nasıl inşa edildiği anlatılacaktır.

$I = \{t \in \mathbb{R} \mid 0 \leq t \leq 1\}$ kapalı aralığının n -defa kartezyen çarpımı ile elde edilen n -kübün homeomorfik bir görüntüsü olan $\mathbf{E}^n$ ye bir **kapalı Öklidyen n -hücre** denir.

Tanım 2.0.8. (Lundell, 1969) X bir küme, Φ Öklidyen hücrelerden X e tanımlı olan dönüşümlerin bir kümesi olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanıyor ise (X, Φ) ikilisine **X üzerinde bir hücre yapısı** denir.

1. $\varphi \in \Phi$ ve E^n , φ nin tanım kümesi ise φ , $(E^n - \partial E^n)$ üzerinde injektiftir.
2. $\{\varphi(E^n - \partial E^n) \mid \varphi \in \Phi\}$, X in bir parçalanışdır.
3. $\varphi \in \Phi$ ve E^n , φ nin tanım kümesi ise,

$$\varphi(\partial E^n) \subseteq \bigcup_{k \leq n-1} \{\Psi(E^k - \partial E^k) \mid E^k, \Psi \text{ nin tanım kümesi ve } \Psi \in \Phi\}$$

kapsaması vardır.

Örnek 2.0.1. (Lundell, 1969)

$S^n = \{x = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x, x \rangle = x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$ n -küresi üzerinde $\forall n \geq 0$ için (S^n, Φ) hücre yapısı vardır. $\varphi^0, \varphi^n \in \Phi$ şöyle tanımlansın:

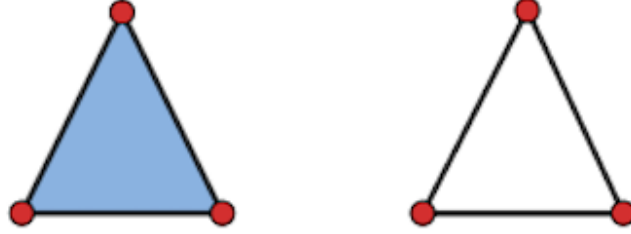
$$\varphi^0 : D^0 \rightarrow S^n, \varphi^0(x) = (1, 0, \dots, 0)$$

$$\varphi^n : D^n \rightarrow S^n, \varphi^n(x) = (2 \langle x, x \rangle - 1, 2x_1 \sqrt{1 - \langle x, x \rangle}, \dots, 2x_n \sqrt{1 - \langle x, x \rangle}).$$

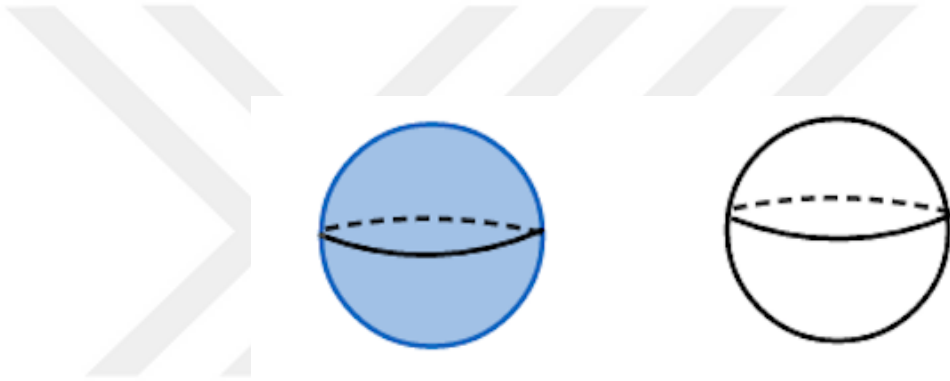
Tanım 2.0.9. (Lundell, 1969) (X, Φ) , X üzerinde bir hücre yapısı, $\varphi \in \Phi$ ve φ nin tanım kümesi E^n olsun.

1. $\varphi(E^n) = \sigma^n$ görüntü kümesine **n -hücre** veya **kapalı n -hücre**,
2. φ ye σ^n in **karakteristik fonksiyonu**,

3. ∂E^n , E^n in sınırı olmak üzere $\varphi(\partial E^n) = \partial \sigma^n$ e σ^n ***n*-hücre**sinin sınırı,
4. $\varphi(E^n - \partial E^n)$ ye, σ^n ***n*-hücre**sinin içi, $n > 0$ ise ***açık n-hücre*** denir.



Şekil 2.1: 2-hücre ve sınırı



Şekil 2.2: 3-hücre ve sınırı

X , üzerinde (X, Φ) şeklinde bir hücre yapısı olan bir küme olsun. $\delta = \{\sigma^n \mid \varphi \in \Phi; \varphi, \sigma^n \text{ in karakteristik fonksiyonu}\}$ olmak üzere (X, Φ) hücre yapılarının sıkı denkleğine göre denklik sınıflarına X üzerinde bir **hücre kompleksi** veya X in bir **hücre**sel ayrışımı denir ve (X, δ) ile gösterilir. Buradaki iki hücre yapısının sıkı denkliği, karakteristik fonksiyonların birebir eşlenebilmesi üzerinedir. Hücre kompleksindeki her bir hücre, kendisinden küçük dereceli açık hücrelerden sonlu sayıdakilere değişiyor (arakesiti boştan farklı) ise, bu hücre kompleksine **kapanış-sonlu** denir.

(X, δ) , X üzerinde bir hücre kompleksi olsun. σ hücrelerinin her birinde karakteristik fonksiyonlarına göre identifikasyon topolojisi vardır. Her bir $\sigma \subset X$ i koruyan X üzerindeki zayıf topolojiye ($F \subset X$ in kapalı olması için gerek ve yeter şart $\forall \sigma \in \delta$ için $F \cap \sigma$ nın kapalı olmasıdır.) **δ yı koruyan**

zayıf topoloji denir. Bunlar ifade edildikten sonra CW-komplekslerin tanımı verilebilir.

Tanım 2.0.10. (Lundell, 1969) X bir Hausdorff uzay, δ hücreler ailesi ve (X, δ) bir hücre kompleksi olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa X e, δ ailesi ile birlikte bir **CW-kompleks** denir.

1. (X, δ) hücre kompleksinin her $\sigma \in \delta$ hücresi için sürekli bir φ karakteristik fonksiyonu vardır.
2. X üzerindeki topoloji, δ yı koruyan zayıf topolojidir.
3. (X, δ) kapanış-sonludur.

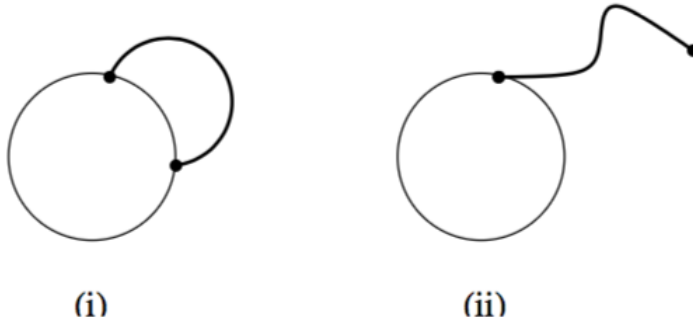
Tanım 2.0.11. (Forman, 2002) $i = 0, 1, \dots, n$ için X_i, X_{i-1} e bir hücre eklenmesi ile elde edilen iç içe geçmiş

$$\emptyset \subseteq X_0 \subseteq X_1 \subseteq \dots \subseteq X_n = X$$

dizisi var ise, X topolojik uzayına

$$\emptyset \subseteq X_0 \subseteq X_1 \subseteq \dots \subseteq X_n = X$$

CW-ayrışımli **sonlu CW-kompleks** denir.



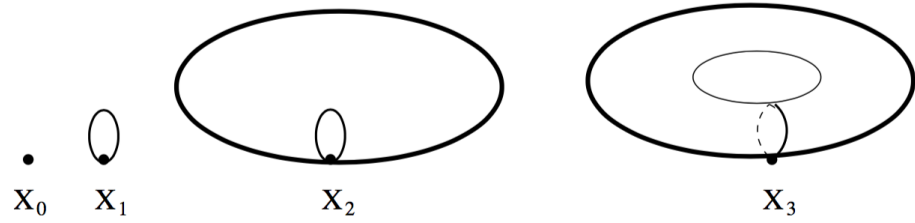
Şekil 2.3: (i) 1-hücre eklemesi (ii) hücre eklemesi değil (Forman, 2002)

Kapalı bir d -simpleks de bir d -hücre olduğundan, sonlu bir simpleksler kompleksi hücreleri simpleksler olan bir sonlu CW-komplekstir. Ayrıca aksi söylenmedikçe bundan sonra CW-kompleks denildiğinde sonlu olduğu anlaşılacaktır.

Örnek 2.0.2. (Forman, 2002) X , üzerinde bir tane 0-hücre, iki tane 1-hücre ve bir tane 2-hücre ile belirlenen

$$\emptyset \subseteq X_0 \subseteq X_1 \subseteq X_2 \subseteq X_3 = X$$

CW -ayrışımı olan bir CW -kompleks olsun. X_0 tek noktadır. Tek noktaya 1-hücre eklenerek X_1 çemberi elde edilir ve benzer şekilde X_2 de $S^1 \wedge S^1$ olur. Şimdi 2-hücre dikdörtgen şeklinde alınıp karşılıklı kenarlar aynı çembere gelecek şekilde ekli dönüşüm oluşturulsun. Böylece $X_3 = X$ bir tor olur. O halde torun CW -ayrışımı bir tane 0-hücre, iki tane 1-hücre ve bir tane 2-hücreden oluşur.



Şekil 2.4: Tor'un CW -ayrışımı (Forman, 2002)

Teorem 2.0.1. (Lundell, 1969) W bir normal uzay, $A \subseteq U \subseteq W$, U bir açık küme, $w : W \rightarrow I$ sürekli bir dönüşüm, $\text{Ker} w = A$ ve A , U nun güçlü deformasyon retraktı olsun. Eğer $h : X \rightarrow X'$ homotopi denklik, $f_1 : A \rightarrow X$, $f_2 : A \rightarrow X'$ sürekli dönüşümler ve f_2 ile $h \circ f_1$ homotopik ise h homotopi denkleğinin bir $H : X \cup_{f_1} W \rightarrow X' \cup_{f_2} W$ homotopi denkleğine genişlemesi vardır ve h nin bir homotopi tersi olan g nin, H nin homotopi tersi olacak şekilde bir genişlemesi vardır.

Teorem 2.0.2. (Forman, 2002) $h : X \rightarrow X'$ homotopi denklik, σ bir hücre ve $f_1 : \partial\sigma \rightarrow X$, $f_2 : \partial\sigma \rightarrow X'$ sürekli iki dönüşüm olsun. Eğer $h \circ f_1$ ile f_2 homotopik ise $X \cup_{f_1} \sigma$ ile $X' \cup_{f_2} \sigma$ aynı homotopi tipine sahiptir.

Teorem 2.0.2 den, $X \cup_f \sigma$ ekli uzayının homotopi tipinin sadece X in homotopi tipine ve f nin homotopi sınıfına bağlı olduğu anlaşılır.

Sonuç 2.0.1. (Forman, 2002) X bir topolojik uzay, σ bir hücre, $f_1, f_2 : \partial\sigma \rightarrow X$ sürekli dönüşümler olsun. $h \circ f_1 \simeq f_2$ ise

$$X \cup_{f_1} \sigma \text{ ile } X \cup_{f_2} \sigma$$

aynı homotopi tipine sahiptir.

İspat. Teorem [2.0.2](#) de,

$$X' = X \text{ ve } h = 1_X$$

alınırsa, $X \cup_{f_1} \sigma$ ile $X \cup_{f_2} \sigma$ ekli uzaylarının aynı homotopi tipine sahip olduğu görülür. $\square$

Bu sonuca göre bir CW -kompleksin homotopi tipi sadece, CW -ayrışımı oluşturan ekli dönüşümlerin homotopi sınıflarına bağlıdır.

Örnek 2.0.3. ([Forman, 2002](#)) X , üzerinde bir 0-hücre ve bir d -hücre ile belirlenen

$$\emptyset \subseteq X_0 \subseteq X_1 = X$$

CW -ayrışımı olan bir CW -kompleks olsun. X_0 bir 0-hücre olmak zorundadır. X_1 ise, X_0 a bir d -hücre eklenmesi ile elde edilir. X_0 tek nokta olduğundan ekli dönüşüm sabit dönüşüm olmak zorundadır. Öyleyse bir d -yuvarın tüm sınır noktaları eş kılınp bir d -küre elde edilmiş olur.

Topolojik uzayların tek noktada kesişimi, uzayların ayrık birleşimi üzerinde, uzaylardan seçilen birer noktayı birbirine denk kılarak elde edilen uzaydır. X ve Y uzaylarının tek noktada kesişimi $X \wedge Y$ ile gösterilir.

Örnek 2.0.4. ([Forman, 2002](#)) X , üzerinde bir 0-hücre ve n -tane d -hücre ile belirlenen

$$\emptyset \subseteq X_0 \subseteq X_1 \subseteq \dots \subseteq X_n = X$$

CW -ayrışımı olan bir CW -kompleks olsun. X_0 , bir 0-hücre olmak zorundadır ve $i = 1, 2, \dots, n$ için X_i , X_{i-1} e bir d -hücre eklenmesi ile elde edilir. Örnek [2.0.3](#) den X_1 in bir d -küre olduğu bilinmektedir.

X_2 ise, X_1 e d -hücre eklenerek elde edilecektir. Ekli dönüşüm ise d -hücrenin sınırından yani $(d-1)$ -küreden X_1 e sürekli bir dönüşüm olacaktır.

$$\pi_{d-1}(X_1) \cong \pi_{d-1}(S^d) \cong 0$$

olduğundan $(d-1)$ -küreden X_1 e tanımlı olan tüm sürekli dönüşümler sabit dönüşüme homotop olacaktır. Ekli dönüşüm sabit dönüşüm seçilirse

$$X_2 = S^d \wedge S^d$$

olduğu görülür. Ayrıca Sonuç 2.0.1 göz önüne alınırsa, ekli dönüşüm nasıl alınırsa alınsın, X_2 nin $S^d \wedge S^d$ ile homotopi denk olduğu görülür.

X_3 ü elde etmek için bir d -hücre X_2 ye eklenmelidir. Bu ekli uzayın homotopi tipini belirleyecek olan, ekli dönüşümün homotopi sınıfıdır. Yine benzer düşünce ile

$$\pi_{d-1}(X_2) \cong \pi_{d-1}(S^d \wedge S^d) \cong 0$$

olduğundan S^{d-1} den X_2 ye tanımlanan tüm sürekli dönüşümler homotopiktir. Bu ise

$$X_3 \simeq S^d \wedge S^d \wedge S^d$$

olması demektir. Bu şekilde devam edersek X , n -tane d -kürenin tek noktada kesişimine homotopi denktir.

Örnek 2.0.5. (Forman, 2002) X , üzerinde bir tane 0-hücre, bir tane 1-hücre ve bir tane 2-hücre ile belirlenen

$$\emptyset \subseteq X_0 \subseteq X_1 \subseteq X_2 = X$$

CW-ayrışımı olan bir CW-kompleks olsun. X_0 bir 0-hücre olmak zorundadır. X_1 , X_0 a bir tane 1-hücre eklenmesi ile elde edilmektedir. Böylece X_1 , bir çember olmak zorundadır.

X_2 ise, X_1 e bir 2-hücre eklenmesi ile elde edilecektir. Ekli dönüşüm, 2-hücrenin sınırından S^1 e sürekli bir dönüşüm olacaktır. Öyleyse ekli dönüşüm, S^1 den S^1 e sürekli bir dönüşümdür. Bu dönüşümün homotopi sınıfı negatif olmayan bir tamsayı olan dolanım sayısına bağlı olacaktır.

Eğer dolanım sayısı 0 ise ekli dönüşüm sabit dönüşüm olacaktır. Böylece

$$X_2 = X \simeq S^1 \wedge S^2$$

olur. Eğer dolanım sayısı 1 ise ekli dönüşümü birim dönüşüm seçmek X_2 nin homotopi tipini değiştirmez ve

$$X \simeq D^2$$

olur. Eğer dolanım sayısı 2 ise ekli dönüşümün standart 2-dereceli dönüşüm (etrafına tam 2 kez dolanan ve asla geri gitmeyen dönüşüm) seçilmesi X_2 nin homotopi tipini değiştirmez. Böylece X , $\mathbb{RP}^2$ ye homotopi denk olur. Aslında her bir dolanım sayısı için farklı bir uzay elde edilir. Çünkü dolanım sayısı n için, elde edilen uzayın homoloji gruplarına bakarsak,

$$H_1(X, \mathbb{Z}) = \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$$

olup, n sayısına bağlıdır.

Şimdi, önce 2-hücre sonra 1-hücre eklensin. X_0 yine bir 0-hücredir. 2-hücre sabit ekli dönüşüm ile eklenirse X_1 , S^2 ye homotopi denk olacaktır. 1-hücre, S^2 ye hangi ekli dönüşüm ile eklenirse eklensin X in homotopi tipi değişmez. Çünkü, $\pi_0(S^2) = 0$ olduğundan S^2 bağlantılı olup tanımlanabilecek tüm ekli dönüşümler sabit dönüşüme homotoptur. Böylece $X \simeq S^1 \wedge S^2$ elde edilir.

Sonlu bir CW-kompleks, ayrışımında eklenen hücrelerle tam olarak aynı boyutta ve aynı sayıda hücrenin, mertebeleri azalmayan sırayla eklenmesi ile elde edilen bir CW-komplekse homotopi denktir. Yani bir CW-kompleks önce küçük boyutluları sonra büyük boyutluları ekleyerek elde edilebilir. Şimdi ise bir CW-kompleksin homoloji grubunun nasıl hesaplandığını gösteren teoremi ifade edelim.

Teorem 2.0.3. (Forman, 2002) X , üzerinde $d = 0, 1, \dots, n$ sayıları için d -mertebeli σ_d hücreleri ile belirlenen

$$\emptyset \subseteq X_0 \subseteq X_1 \subseteq \dots \subseteq X_n = X$$

CW-ayrışımı olan bir CW-kompleks olsun. $C_d(X, \mathbb{Z})$, σ_d hücreleri tarafından üretilen serbest abel grup olmak üzere her d için

$$\partial_d \circ \partial_{d-1} = 0$$

olacak şekilde

$$\partial_d : C_d(X, \mathbb{Z}) \rightarrow C_{d-1}(X, \mathbb{Z})$$

sınır homomorfizmaları vardır ve

$$0 \rightarrow C_n(X, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(X, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots \xrightarrow{\partial_1} C_0(X, \mathbb{Z}) \rightarrow 0$$

diferansiyel kompleksi, X in singüler homolojisi $H_d(X, \mathbb{Z})$ yi

$$H_d(X, \mathbb{Z}) \cong H_d(C, \partial) = \frac{\text{Ker}(\partial_d)}{\text{Im}(\partial_{d+1})}$$

şeklinde hesaplar.

Teorem 2.0.4. (Milnor, 1963) (Güçlü Morse Eşitsizliği) X , her k için c_k tane k -boyutlu hücreden oluşan bir CW-kompleks ve $\mathbb{F}$ cisim katsayısına göre

$$b_k = \dim(H_k(X, \mathbb{F}))$$

olsun. Her k için

$$c_k - c_{k-1} + c_{k-2} - \dots + (-1)^k c_0 \geq b_k - b_{k-1} + b_{k-2} - \dots + (-1)^k b_0$$

dır.

Bu teoremin ispatı için Milnor(1963) incelenebilir.

Teorem 2.0.5. (Milnor, 1963) (Zayıf Morse Eşitsizliği) X , her d için c_d tane d -boyutlu hücreden oluşan bir CW-kompleks ve $\mathbb{F}$ cisim katsayısına göre

$$b_d = \dim(H_d(X, \mathbb{F}))$$

olsun. Her d için $c_d \geq b_d$ eşitsizliği vardır.

İspat. Teorem 2.0.4, her k için doğru olduğundan $k = 0$ alınırsa

$$c_0 \geq b_0$$

olur ve bu durum, teoremin $d = 0$ için doğru olduğunu gösterir. Teorem 2.0.4, her $k = 0, 1, \dots, d$ için doğru olduğundan elde edilen eşitsizlikler alt alta yazılırsa

$$c_0 \geq b_0$$

$$c_1 - c_0 \geq b_1 - b_0$$

$$c_2 - c_1 + c_0 \geq b_2 - b_1 + b_0$$

$$\vdots$$

$$c_{d-1} - c_{d-2} + \dots + (-1)^{d-1} c_0 \geq b_{d-1} - b_{d-2} + \dots + (-1)^{d-1} b_0$$

$$c_d - c_{d-1} + c_{d-2} + \dots + (-1)^d c_0 \geq b_d - b_{d-1} + b_{d-2} + \dots + (-1)^d b_0$$

eşitsizlikleri elde edilir. Bu eşitsizlikler taraf tarafa toplanırsa

$$c_d \geq b_d$$

eşitsizliği elde edilir. □

Morse eşitsizlikleri tor için uygulanırsa $b_0 = 1$, $b_1 = 2$ ve $b_2 = 1$ olduğundan

$$c_0 \geq b_0 = 1$$

$$c_1 \geq b_1 = 2$$

$$c_2 \geq b_2 = 1$$

elde edilir. Zaten daha önce yapılan örnekte $c_0 = 1 \geq 1$, $c_1 = 2 \geq 2$, $c_2 = 1 \geq 1$ bulunmuştu. Halbuki hücreler, simpleks olarak alınıp inşa edilmek istenseydi yani üçgenleştirme yöntemi kullanılsaydı, bunun için en az yedi tane 0-simpleks, yirmi bir tane 1-simpleks ve on dört tane 2-simpleks kullanılmış olacaktı. Bu ise eşitlikten çok uzak olduğu için kullanışsız olacaktı. Bu durum simpleksler kompleksi yerine neden hücre kompleksi kullanıldığını anlamaya yardımcı olur.

3 AYRIK MORSE TEORİSİNE GİRİŞ

Bu bölümde bir simpleksler kompleksinin daha az sayıda hücre ile CW-ayrışımının bulunup bulunamayacağı araştırılmıştır. Ayrık Morse teori bu bağlamda uygun bir yöntem olarak sunulmuştur.

Tanım 3.0.1. (Forman, 2002) K bir simpleksler kompleksi olmak üzere her $\alpha^{(p)} \in K$ için aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna bir **ayrık Morse fonksiyonu** denir:

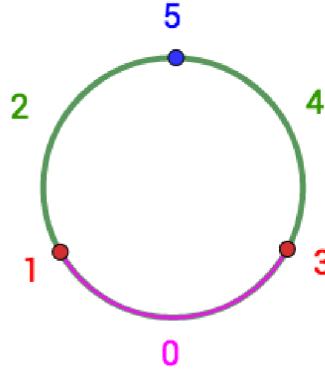
$$\#\{\beta^{(p+1)} > \alpha \mid f(\beta) \leq f(\alpha)\} \leq 1, \quad (1)$$

$$\#\{\gamma^{(p-1)} < \alpha \mid f(\gamma) \geq f(\alpha)\} \leq 1. \quad (2)$$

Tanım 3.0.2. (Forman, 2002) $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ bir ayrık Morse fonksiyonu olsun. $\alpha^{(p)} \in K$ simpleksi aşağıdaki şartları sağlıyorsa bu simplekse bir **kritik simpleks** denir:

$$\#\{\beta^{(p+1)} > \alpha \mid f(\beta) \leq f(\alpha)\} = 0, \quad (3)$$

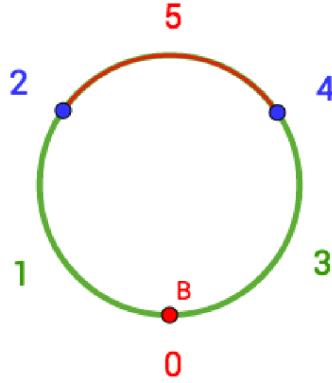
$$\#\{\gamma^{(p-1)} < \alpha \mid f(\gamma) \geq f(\alpha)\} = 0. \quad (4)$$



Şekil 3.1: Ayrık Morse fonksiyonu değil (Forman, 2002)

Örnek 3.0.1. (Forman, 2002) K simpleksler kompleksinin f reel değerli fonksiyonu altında aldığı değerler Şekil 3.1’de verilmiştir. Görüldüğü üzere $f^{-1}(0)$ simpleksi Tanım 3.0.1 deki (2) şartını sağlamaz. Çünkü daha düşük boyutlu iki komşusu daha yüksek değer almıştır. $f^{-1}(5)$ simpleksinin de 2 yüksek boyutlu komşusu kendisinden düşük değer aldığından Tanım 3.0.1 deki (1) şartını sağlamaz.

Örnek 3.0.2. (Forman, 2002) Bir başka K simpleksler kompleksinin f reel değerli fonksiyonu altında aldığı değerler Şekil 3.2’de verilmiştir.



Şekil 3.2: Ayrık Morse fonksiyonu (Forman, 2002)

Bu örnekte ise tüm simpleksler Tanım 3.0.1 de verilen şartları sağladığından f bir ayrık Morse fonksiyonudur. Ayrıca $f^{-1}(0)$ ve $f^{-1}(5)$ simpleksleri birer kritik simplekstir.

Lemma 3.0.1. (Forman, 2002) K bir simpleksler kompleksi, f de K üzerinde bir ayrık Morse fonksiyonu olsun. Bir $\alpha \in K$ simpleksi için ya

$$\#\{\beta^{(p+1)} > \alpha \mid f(\beta) \leq f(\alpha)\} = 0, \quad (5)$$

ya da

$$\#\{\gamma^{(p-1)} < \alpha \mid f(\gamma) \geq f(\alpha)\} = 0 \quad (6)$$

dır.

İspat. Kabul edelim ki bir α p -simpleksi lemmadaki şartların ikisini birden sağlamasın. O halde bir $\gamma^{(p-1)}$ simpleksi ve bir $\beta^{(p+1)}$ simpleksi için

$$f(\gamma) \geq f(\alpha) \geq f(\beta) \quad (7)$$

eşitsizlikleri vardır. K bir simpleksler kompleksi ve $p \geq 1$ olduğundan

$$\beta^{(p+1)} > \tilde{\alpha}^{(p)} > \gamma^{(p-1)}$$

olacak şekilde bir $\tilde{\alpha}^{(p)}$ simpleksi vardır. f bir ayrık Morse fonksiyonu olduğundan

$$f(\beta) > f(\tilde{\alpha}) > f(\gamma) \quad (8)$$

ifadesi mevcuttur. (7) ve (8) ifadeleri birlikte yazılırsa

$$f(\beta) > f(\tilde{\alpha}) > f(\gamma) \geq f(\alpha) \geq f(\beta)$$

elde edilir. Bu ise bir çelişki olduğundan kabulümüz yanlıştır. $\square$

Tanım 3.0.3. (Forman, 2002) K , üzerinde bir f ayrık Morse fonksiyonu olan simpleksler kompleksi ve $c \in \mathbb{R}$ olsun. $K(c)$ seviye alt kompleksi

$$K(c) = \bigcup_{f(\alpha) \leq c} \bigcup_{\beta \leq \alpha} \beta$$

şeklinde tanımlanır.

Lemma 3.0.2. (Forman, 2002) $a, b \in \mathbb{R}$ için görüntüsü $[a, b]$ aralığında olan herhangi bir kritik simpleks yoksa $K(a)$ ve $K(b)$ alt kompleksleri homotopi denktir.

İspat. $f(\sigma^{(p)}) \in [a, b]$ olacak şekilde bir α simpleksi yoksa

$$K(a) = K(b)$$

olup homotopi denk olurlar.

$\beta^{(p+1)} > \sigma^{(p)}$ simpleksleri için $f(\beta) \leq f(\alpha)$ olsun. β nın f altında aldığı değer, kritik noktaları ve alt kompleksleri değiştirmeyecek derecede küçük bir ϵ sayısı kadar daha düşük bir değere götürülürse ya da benzer düşünce ile α nın f altında aldığı değer ϵ kadar daha büyük bir değere götürülürse f birebir olur. Şu halde, gerekirse bu kapalı aralık bir tek simpleksin görüntüsünü kapsayacak şekilde alt aralıklara ayrılabilir. Dolayısıyla ispat bir tek kritik olmayan simpleks için yapılabilir. $f(\alpha) \in [a, b]$ simpleksi

$$f(\beta^{(p+1)}) < f(\alpha^{(p)}) \tag{9}$$

veya

$$f(\alpha^{(p)}) < f(\gamma^{(p-1)}) \tag{10}$$

şartını sağlar.

(9) durumunda $[a, b]$ aralığında değer alan bir tek simpleks olduğundan

$$f(\beta) < a$$

olmak zorundadır. α, β nın yüzü olduğundan $K(a)$ alt kompleksinde olmak zorundadır. Böylece yine

$$K(a) = K(b)$$

olup, homotopi denk olurlar.

(10) durumunda Lemma 3.0.1 gereğince (9) durumu sağlanmaz. Öyleyse her $\beta > \alpha$ simpleksi için $f(\beta^{(p+1)}) > f(\alpha^{(p)})$ olup

$$f(\beta^{(p+1)}) > b$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece $K(a)$ alt kompleksinde yüzü α olan hiçbir simpleks yoktur. Bu ise

$$K(a) \cap \alpha = \emptyset$$

olması demektir. Ayrıca (10) gereğince

$$f(\gamma) > b$$

olup γ , $K(a)$ alt kompleksinde yoktur. α nın γ dışında tüm yüzleri $f(\alpha)$ dan küçük değer almak zorunda olduğundan $K(a)$ alt kompleksinde kapsanır. Yüzü γ olan bir diğer p -simpleks $\tilde{\alpha}$ olsun. $f(\tilde{\alpha}) > f(\gamma)$ olmak zorundadır, ayrıca $f(\gamma) > b$ olduğundan

$$f(\tilde{\alpha}) > b$$

olur. Böylece $K(a)$ alt kompleksinde yüzü γ olan hiçbir simpleks yoktur. Bu ise

$$K(a) \cap \gamma = \emptyset$$

olması demektir. Böylece

$$K(b) = K(a) \cup \alpha \cup \gamma$$

bulunur. γ , α simpleksinin serbest yüzüdür ve $K(a)$ alt kompleksinde bulunmaz. Bu ise $K(b) \searrow K(a)$ olması yani $K(a)$ ile $K(b)$ nin homotopi denk olması anlamına gelir. $\square$

Lemma 3.0.2 ile anlatılmak istenen simpleks çökmesi kısmında daha açık olarak görülmektedir (Forman, 2002).

Lemma 3.0.3. (Forman, 2002) K ayrık Morse fonksiyonlu simpleksler kompleksinde sadece bir tek $\alpha^{(p)}$ kritik p -simpleksinin görüntüsü $[a, b]$ aralığında ise $K(b)$ ye homotopi denk olacak şekilde $K(a)$ ya bir p -hücre eklemesi yapılabilir.

İspat. İspat yine f nin birebir olduğu kabul edilerek yapılacaktır. $a < a' < b' < b$ ve $f^{-1}([a', b']) = \{\alpha^{(p)}\}$ olacak şekilde a' ve b' sayıları vardır. Lemma 3.0.2 gereğince

$$K(a') \searrow K(a)$$

ve

$$K(b) \searrow K(b')$$

olup

$$K(b') \simeq K(a') \bigcup_{\partial e^{(p)}} e^{(p)}$$

olduğunu göstermek yeterlidir.

$\alpha^{(p)}$ kritik olduğunda $\beta^{(p+1)} > \alpha^{(p)}$ için $f(\beta^{(p+1)}) > f(\alpha^{(p)})$ olmak zorundadır. Dolayısıyla

$$f(\beta^{(p+1)}) > b'$$

olup

$$K(a') \cap \alpha = \emptyset$$

dir. Benzer şekilde yine kritik olma şartından $\gamma^{(p-1)} < \alpha^{(p)}$ simpleksi için $f(\gamma^{(p-1)}) < f(\alpha)$ olmak zorundadır ve

$$f(\gamma^{(p-1)}) < a'$$

dür. Bu ise

$$\gamma^{(p-1)} \subset K(a')$$

olması anlamına gelir. Böylece $\partial\alpha^{(p)} \subseteq K(a')$ olup

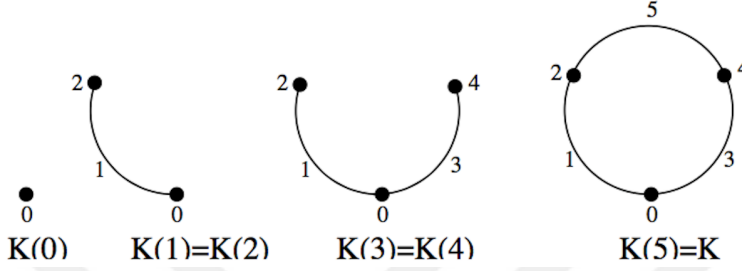
$$K(b') = K(a') \bigcup_{\partial\alpha^{(p)}} \alpha^{(p)}$$

dır. α , $e^{(p)}$ ye homeomorfik olduğundan istenen elde edilmiş olur. $\square$

Böylece, üzerinde bir ayrık Morse fonksiyonu olan K simpleksler kompleksinin, her bir kritik simpleksi için tam olarak aynı boyutlu ve aynı

sayıda hücreden oluşan bir CW-komplekse homotopi denk olduğu söylenebilir. Örneğin, bir tane kritik 0-simpleks ve 2 tane kritik 3-simplekse sahip bir simpleksler kompleksi tam olarak bir tane 0-hücreden ve iki tane 3-hücreden oluşan bir CW-komplekse homotopi denktir.

Örnek 3.0.3. (Forman, 2002) Örnek 3.0.2 de bahsedilen simpleksler kompleksi için tüm seviye alt kompleksler Şekil 3.3'deki gibidir.

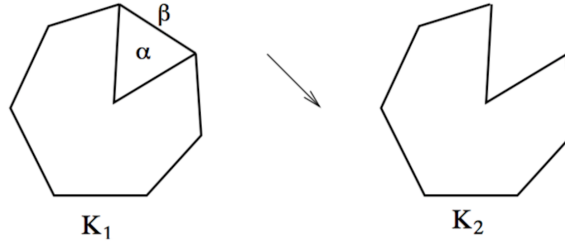


Şekil 3.3: Örnek 3.0.2'nin tüm seviye alt kompleksleri (Forman, 2002)

Şekil 3.3 deki alt komplekslerin oluşumunu açıklayalım. $K(0)$ dan $K(1)$ e geçilirken herhangi bir kritik simpleks eklenmediğinden Lemma 3.0.3 gereğince $K(0)$ ile $K(1)$ homotopi denktir. Ancak $K(4)$ den $K(5)$ e geçilirken $f^{-1}(5)$ kritik 1-simpleksi eklenir. O halde Lemma 3.0.3 gereğince $K(4)$ e bir 1-hücre eklenerek $K(5)$ e homotopi denk bir kompleks elde edilebilir. Dikkat edilirse alt kompleksler oluşturulurken $f^{-1}(5)$ simpleksinin tüm yüzleri kendisinden önce eklenmiştir. $f^{-1}(5)$ ekleneceği zaman ise simpleksin tüm sınırları daha önce eklendiğinden, bu bir hücre ekleme işlemine dönüşmektedir.

Şimdi K_1 ve K_2 iki simpleksler kompleksi ve $K_2 \subset K_1$ olsun. $K_1 - K_2$ nin α , β şeklinde sadece iki elemanı olsun ve β , α nın serbest yüzü olsun. Yani β sadece α nın yüzü olsun. Öyleyse K_2 , K_1 in deformasyon retraktı olup böylece K_1 ile K_2 homotopi denktir. İşte bu şekilde K_1 simpleksler kompleksini K_2 alt kompleksine deforme etmeye simpleks çökmesi denir ve $K_1 \searrow K_2$ ile gösterilir (Forman, 2002).

Örnek 3.0.4. (Forman, 2002) Şekil 3.4 de K_1 simpleksler kompleksinin, α simpleksi ve onun serbest yüzü olan β simpleksi silinirse K_1 ile homotopi denk olan K_2 simpleksler kompleksi elde edilir. Yani $K_1 \searrow K_2$ simpleks çökmesi elde edilir.



Şekil 3.4: Simpleks çökmesine örnek (Forman, 2002)

Örnek 3.0.5. (Forman, 2002) Benzer şekilde, Şekil 3.5 göz önüne alınırsa önce simpleksler kompleksinde 2-simpleks ile onun bir serbest yüzü olan 1-simpleks silinmiş sonra bir 1-simpleks ile onun bir serbest yüzü olan 0-simpleks silinerek 0-simpleks elde edilmiştir.



Şekil 3.5: Simpleks çökmesine örnek (Forman, 2002)

Simpleks çökmesi J.H.C. Whitehead tarafından çalışılmış ve simpleks çökmesi ile üretilen denklik bağıntısı için basit homotopi denklik tanımı yapılmıştır. Bu ise basit homotopi denklik kategorisi için ayrık Morse teorisinin kullanışlı olduğunu göstermiştir.

Bir simpleksler kompleksi üzerinde her simpleksi boyutuna götüren bir fonksiyon alınırsa bu bir ayrık Morse fonksiyonu olur. Yani her simpleksler kompleksi üzerinde bir ayrık Morse fonksiyonu tanımlanabilir. Bu durumda her simpleks kritik simpleks olur. Halbuki istenen, mümkün olduğunca az sayıda kritik simpleks olmasıdır.

Morse eşitsizlikleri, Teorem 2.0.4 ve Teorem 2.0.5 ile Milnor(1963) de smooth manifoldlar için verilmiştir. Bu eşitsizliklerin doğal sonucu olarak, Forman(1998) de hücre komplekslerine uyarlanmıştır. Bir simpleksler kompleksi aynı zamanda hücre kompleksi olup Forman(1998) de geçen özellikler aynen geçerlidir. O halde K , n -boyutlu bir simpleksler kompleksi ve b_i , i -nci homoloji

grubunun boyutu (Betti sayısı) olmak üzere

(i)(Güçlü Morse Eşitsizliği) Her $p = 0, 1, 2, \dots, n, n + 1$ için

$$m_p - m_{p-1} + \dots + (-1)^p m_0 \geq b_p - b_{p-1} + \dots + (-1)^p b_0$$

ve

(ii)(Zayıf Morse Eşitsizliği) Her $p = 0, 1, 2, \dots, n$ için

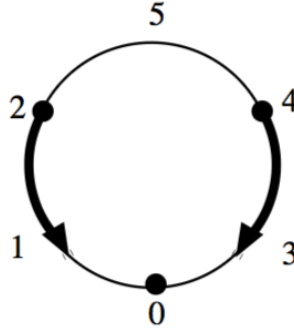
$$m_p \geq b_p$$

eşitsizlikleri vardır.



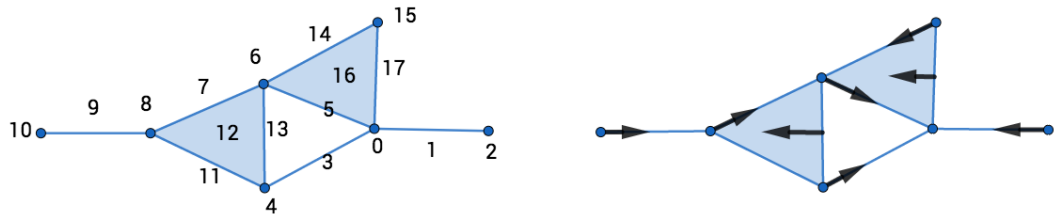
4 GRADYANT VEKTÖR ALANLARI

Bir K simpleksler kompleksinin simplekslerini sayılarla eşlemektense, bir gradyant vektör alanı bulmak daha kolaydır. Örnek 3.0.2 göz önüne alınırsa, $f^{-1}(1)$ simpleksinin kritik simpleks olmamasının sebebi daha yüksek bir değer alan daha düşük dereceli bir komşusu olan $f^{-1}(2)$ simpleksinin var olmasıdır. Benzer şekilde $f^{-1}(2)$ simpleksinin kritik simpleks olmamasının sebebi daha düşük bir değer alan daha yüksek dereceli bir komşusu olan $f^{-1}(1)$ simpleksinin var olmasıdır. Yani kritik olmayan simpleksler ikişerli eşlenip, $f^{-1}(2)$ simpleksinden $f^{-1}(1)$ simpleksine bir ok çizilir. Benzer düşünce ile $f^{-1}(4)$ simpleksinden $f^{-1}(3)$ simpleksine ok çizilir. Çizilen bu oklar simpleks çökmesi olarak da düşünülebilir. Şekil 4.1 de bu oklar gösterilmiştir.



Şekil 4.1: Örnek 3.0.2 üzerindeki gradyant vektör alanı (Forman, 2002)

Bu işlem herhangi bir simpleksler kompleksinin ayrık Morse fonksiyonu için uygulanabilir. Bir kritik olmayan $\alpha^{(p)}$ simpleksi için $\beta^{(p+1)} > \alpha^{(p)}$ ve $f(\alpha^{(p)}) \geq f(\beta^{(p+1)})$ oluyorsa, α simpleksinden β simpleksine bir ok çizilir. Şekil 4.2 de biraz daha karmaşık bir örnek gösterilmektedir.



Şekil 4.2: Ayrık Morse fonksiyonu ve gradyant vektör alanı (Forman, 2002)

Bu örnekte $f^{-1}(0)$ ve $f^{-1}(11)$ kritik simplekslerdir. O halde bu simpleks-

ler kompleksi tam olarak bir tane 0-hücre ve bir tane 1-hücreden oluşan CW-komplekse homotopi denktir. Ayrıca Lemma 3.0.1 göz önüne alınırsa bir α simpleksi aşağıdakilerden yalnızca birini sağlar.

- (i) α yalnızca bir okun kuyruğudur.
- (ii) α yalnızca bir okun başıdır.
- (iii) α herhangi bir okun kuyruğu ya da başı değildir.

Son şartı sağlayan simpleks bir kritik simplekstir.

Şimdi üzerinde oklar olan bir simpleksler kompleksi düşünelim. Bu okların, bir ayrık Morse fonksiyonunun gradyant vektör alanı olup olmadığı sorusunu cevaplamak için aşağıdaki teoremler incelenebilir.

K simpleksler kompleksinin simplekslerinin $\{\alpha^{(p)} < \beta^{(p+1)}\}$ şeklindeki ikililerinin ailesi V olmak üzere bu ailedeki her simpleks en fazla bir ikilide yer alıyorsa, V ye bir **ayrık vektör alanı** denir. $i = 0, \dots, r$ için $\{\alpha < \beta\} \in V$ ve $\beta_i > \alpha_{i+1} \neq \alpha_i$ özelliğine sahip

$$\alpha_0^{(p)}, \beta_0^{(p+1)}, \alpha_1^{(p)}, \beta_1^{(p+1)}, \alpha_2^{(p)}, \dots, \beta_r^{(p+1)}, \alpha_{r+1}^{(p)}$$

dizisine bir **V -yol** denir. Eğer bu V -yolu için, $r \geq 0$ ve $\alpha_0 = \alpha_{r+1}$ ise bu yola **aşık olma** denir. **kapalı yol** denir.

Teorem 4.0.1. (Knudson, 2015) V , ayrık Morse fonksiyonu f nin gradyant vektör alanı olsun. Öyleyse $\alpha_0^{(p)}, \beta_0^{(p+1)}, \alpha_1^{(p)}, \beta_1^{(p+1)}, \alpha_2^{(p)}, \dots, \beta_r^{(p+1)}, \alpha_{r+1}^{(p)}$ in V -yol olması için gerek ve yeter şart her $i = 0, \dots, r$ ve $\alpha_i < \beta_i > \alpha_{i+1}$ için

$$f(\alpha_0) \geq f(\beta_0) > f(\alpha_1) \geq f(\beta_1) > \dots \geq f(\beta_r) > f(\alpha_{r+1})$$

olmasıdır.

İspat. Yukarıdaki gibi bir dizi, V -yol olsun. Öyleyse tanımdan $i = 0, \dots, r$ için

$$f(\alpha_i) \geq f(\beta_i)$$

dir. Ayrıca α_{i+1}, β_i ile eşlenmediğinden

$$f(\beta_i) > f(\alpha_{i+1})$$

dir. Şimdi ise teoremdaki eşitsizlik sağlansın. O halde tanımdan $\{\alpha_i, \beta_i\} \in V$ olacaktır. f ayrık Morse fonksiyonu olduğundan bu β_i tek olup α_i ve β_i bir tek ikilide yer alacaktır. Böylece yukarıdaki dizi bir yol olacaktır. $\square$

Teorem 4.0.2. ([Knudson, 2015](#)) Bir ayrık vektör alanı V nin, ayrık Morse fonksiyonunun gradyant vektör alanı olması için gerek ve yeter şart aşikar olmayan kapalı V -yollarının var olmamasıdır.

İspat. ($\Rightarrow$) V , ayrık Morse fonksiyonu f nin belirlediği ayrık gradyant vektör alanı olsun. V nin aşikar olmayan kapalı bir yola sahip olduğunu kabul edelim. Bu yol

$$\alpha_0^{(p)}, \beta_0^{(p+1)}, \alpha_1^{(p)}, \beta_1^{(p+1)}, \alpha_2^{(p)}, \dots, \beta_{r-1}^{(p+1)}, \alpha_r^{(p)} = \alpha_0^{(p)}$$

ile gösterilsin. Teorem [4.0.1](#) gereğince

$$f(\alpha_0) \geq f(\beta_0) > f(\alpha_1) \geq f(\beta_1) > \dots \geq f(\beta_{r-1}) > f(\alpha_r) = f(\alpha_0)$$

eşitsizliği sağlanır. Bu ise çelişkidir. O halde kabulümüz yanlış olup, aşikar olmayan kapalı yol yoktur.

($\Leftarrow$) V aşikar olmayan kapalı yollar barındırmayan bir ayrık vektör alanı olsun. $\{\alpha, \beta\} \in V$ ise, $V(\alpha) = \beta$ ve $V(\beta) = \alpha$ şeklinde bir gösterim tanımlansın. Ayrıca α kritik olmayan bir simpleks ise $V(\alpha) = 0$ olsun. Her bir p için, boyutu p ve daha küçük simplekslerin oluşturduğu alt kompleks $K^{(p)}$ üzerinde V_p şöyle tanımlansın:

$$q < p \text{ ise } V_p(\alpha^{(q)}) = V(\alpha^{(q)}),$$

$$q = p \text{ ve } V(\alpha^{(q)}) = 0 \text{ ise } V_p(\alpha^{(q)}) = V(\alpha^{(q)}).$$

$K^{(p)}$ üzerinde, V_p yardımıyla bir f_p fonksiyonu inşa edilecektir. $\alpha^{(q)}$, V_p de kritik ise $f_p(\alpha) = q$ olan ve $[-\frac{1}{2}, p + \frac{1}{2}]$ kapalı aralığında değer alan, f_p fonksiyonu inşa edilebilir.

$p = 0$ olsun. $K^{(0)}$ da bulunan her simpleks kritiktir ve $f_0(\alpha) = 0$ dır. Şu halde f_0 tanımlanmıştır. Artık f_{p-1} tanımlı iken f_p , f_{p-1} yardımıyla tanımlanabilir. $q \leq p-2$ için $f_p(\alpha^{(q)}) = f_{p-1}(\alpha^{(q)})$ olsun. Yani f_p tanımlanırken boyutu $p-1$ den küçük olanların değeri değişmesin. $(p-1)$ boyutluların görüntüsü tanımlanırken V_p ye göre kritik simpleksler

$f_p(\alpha^{(q-1)}) = q - 1$ şeklinde tanımlansın. Kritik olmayanlar için ise aşağıdaki d dönüşümü kullanılacaktır:

$$d(\alpha^{(p-1)}) = \max\{r \mid \alpha, \beta_0, \alpha_1, \dots, \alpha_r \text{ } V_p\text{-yol ve } V_p(\alpha_r) = 0\}$$

ve tüm $p - 1$ boyutlu simpleksler için

$$D = \max\{d(\alpha^{(p-1)})\}$$

olmak üzere

$$f_p(\alpha^{(p-1)}) = f_{(p-1)}(\alpha^{(p-1)}) + \frac{d(\alpha^{(p-1)})}{2D + 1}$$

şeklinde tanımlansın. Ayrıca V de kapalı yol olmadığında V_p de de olamaz. Öyleyse r değerleri sonlu olup maks fonksiyonu anlamlıdır. Burada tanımlanan fonksiyon kritik simpleksleri boyutlarına, kritik olmayanları ise kritik simplekse giden en uzun yolun adım sayısı ile orantılı olacak şekilde f_{p-1} de aldığı değerden biraz daha büyük veya eşit bir sayıya götürür.

p boyutlu simplekslerden kritik olanlar boyutlarına gitsin. Kritik olmayanlar $p - 1$ boyutlu hangi simpleksle eşlendiyse o simpleksin gittiği değere gitsin. Böylece yukarıda bahsedildiği gibi $[-\frac{1}{2}, p + \frac{1}{2}]$ aralığında değer alan ve kritik simpleksleri boyutuna götüren bir f fonksiyonu inşa edilir.

Öncelikle bu f fonksiyonunun ayrık Morse fonksiyonu olduğu gösterilmelidir. Kritik bir p simpleksin boyutuna yani p ye gittiğini biliyoruz. Boyutu p den küçük olan simpleksler $[-\frac{1}{2}, p - \frac{1}{2}]$ aralığında değer aldığından Morse fonksiyon olma şartlarını bozmaz. Boyutu p den büyük olan simpleksler kritik ise $p + 1$ e gider. Kritik değilse p -simpleks ile eşlenip p den biraz büyük bir değer alması olmalıdır. Yine her koşulda, kritik olan p -simpleksinden büyük bir değer alır. Bu durumda f bir ayrık Morse fonksiyonu ise V nin kritik simpleksleri f ye göre kritik olacak ve kritik olmayan simpleksler eşlendiği simpleksle aynı değeri aldığından f ye göre kritik olamayacak. Yani f nin bir ayrık Morse fonksiyonu olduğunu gösterirsek f nin tanımladığı gradyant vektör alanı V nin kendisi olur.

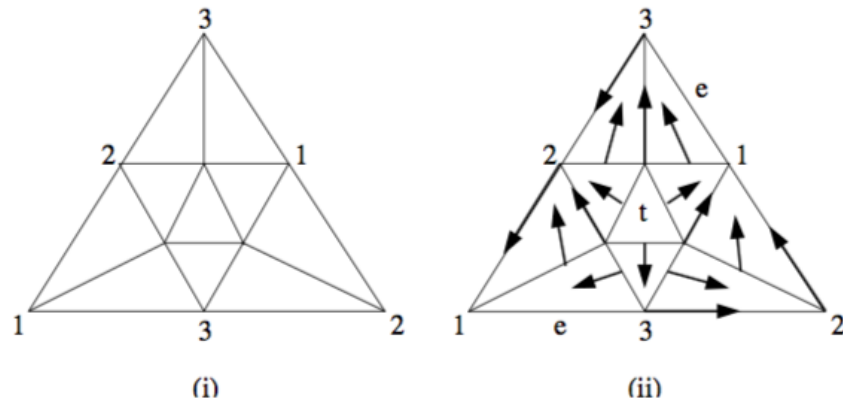
Şimdi kritik olmayan bir p -simpleksinin ayrık Morse fonksiyon olma şartlarını sağlamadığını gösterirsek ispat tamamlanır. Kritik olmayan $\alpha^{(p)}$

simpleksi $\gamma^{(p-1)}$ simpleksi ile eşlendiyse f altında aynı değeri alırlar. Şimdi $\alpha^{(p)}$ nin bir başka yüzü $\beta^{(p-1)}$ olsun. $\beta^{(p-1)}$ kritik simpleks ise zaten boyutuna gideceği için $f(\alpha^{(p)})$ den küçük değer alır. Kritik değilse $\beta^{(p-1)}$ ile başlayan her yol için dizinin başına $\gamma^{(p-1)}, \alpha^{(p)}$, eklenip yol bir adım daha uzatılabilir. Demek ki d fonksiyonu altında $\gamma^{(p-1)}$ daha büyük bir değer alıyor. Öyleyse f altında da daha büyük değer alır ve $f(\beta^{(p-1)}) < f(\gamma^{(p-1)}) = f(\alpha^{(p)})$ elde edilir ve diğer yüzlerin daha küçük değer aldığı gösterilmiş olur.

Benzer şekilde daha büyük boyutlu bir komşusu τ alınsın. τ komşusu kritik ise zaten derecesine gidip daha büyük bir değer alır. Kritik değil ise de eşlendiği simpleks ile birlikte, $\alpha^{(p)}$ ile başlayan her yolun başına eklenebilir ve dolayısıyla f altında daha büyük bir değer aldığı gösterilebilir. O halde f bir ayrık Morse fonksiyonudur ve V , f nin ayrık gradyant vektör alanıdır. $\square$

G yönlü bir graf olsun. Köşeleri üzerinde reel değerli sürekli artan bir fonksiyona sahip olması için gerek ve yeter şart yönlü bir kapalı yola sahip olmamasıdır. Bu özellik, gradyant vektör alanlarının graflara uygulanacağı bağlantısız graflar örneğinde, graf üzerindeki ayrık vektör alanının, gradyant vektör alanı olup olmadığını tespit ederken kullanılacaktır.

Şimdi gradyant vektör alanı ile Reel Projektif Düzlemin CW-ayrışımının nasıl bulunacağı gösterilecektir.



Şekil 4.3: $\mathbb{RP}^2$ nun (i)üçgenleştirmesi (ii)gradyant vektör alanı (Forman, 2002)

Şekil 4.3(i) Reel Projektif Düzlemin bir üçgenleştirmesidir. Şekil 4.3(ii)'de ise bir ayrık gradyant vektör alanı verilmiştir. Dikkat edilirse herhangi bir

kapalı yol olmadığı görülecektir. Öyleyse kritik simpleksler, herhangi bir okun kuyruğu ya da başı olmayan simpleksler olacaktır. Yani bir tane 0-simpleks, bir tane 1-simpleks, bir tane 2-simpleks kritik simplekstir. Demek ki 1 tane 0-hücre 1 tane 1-hücre ve 1 tane 2-hücreden oluşan bir CW-kompleks, Reel Projektif Düzlem ile homotopi denk olacaktır. Ayrıca ilerideki bölümlerde bu ayrık gradyant vektör alanının bize başka bilgiler de verdiği gösterilecektir.

Şimdi bir graflar ailesinin, bir simpleksler kompleksini nasıl doğurduğu ve bu graflar ailesi üzerinde tanımlanacak bir yapı yardımıyla, grafin doğurduğu simpleksin CW-ayrışımının nasıl bulunabildiği, bir örnek yardımıyla açıklanacaktır. Fakat öncelikle bazı tanımların ifade edilmesi gerekmektedir.

Tanım 4.0.1. (Forman, 2002) K_n köşeleri $1, 2, \dots, n$ olan tam graf, $\mathcal{G}_n$ K_n in tüm geren alt graflarının kümesi ve $\mathcal{P} \subset \mathcal{G}_n$ izomorf grafların dahil olmasına göre graf özelliğine sahip olsun. Eğer $G_1 \subset G_2 \in \mathcal{G}_n$ için $G_2 \in \mathcal{P}$ iken $G_1 \in \mathcal{P}$ oluyorsa $\mathcal{P}$ ye **monoton azalan** denir.

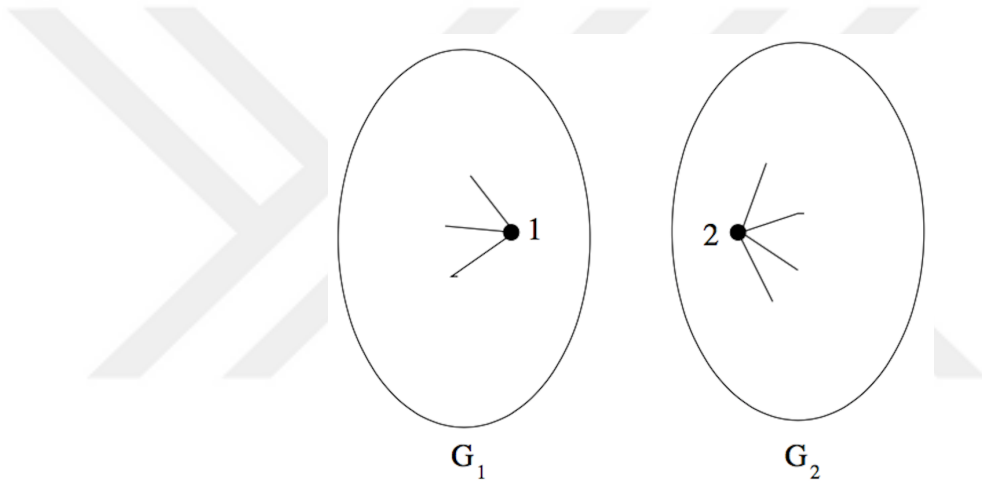
Bir $\mathcal{P}$ monoton azalan graf özelliği $d + 1$ kenarlı grafların d -simpleks olduğu bir $\mathcal{K}$ simpleksler kompleksi oluşturur. Bu kompleksteki bir simpleksin yüzleri ise o simplekse karşılık gelen grafin tüm geren alt graflarıdır. Monoton azalanlık özelliği ise bunu garanti eder. $\mathcal{K}$ nın köşeleri ise K_n in kenarlarıdır. Bir köşeler kümesinin gerdiği simpleksin $\mathcal{K}$ da olup olmadığı o köşeleri temsil eden kenarların içerildiği bir geren alt grafin $\mathcal{P}$ de olup olmamasına bağlıdır.

Ayrık Morse teori özel olarak 2-bağılantısız grafların topolojisinin belirlenmesine katkı sağlamıştır ve 3-bağılantısız grafların topolojisini hesaplamıştır. Burada ise daha kolay bir örneği olan bağlantısız graflar incelenecektir. n köşeli bağlantısız grafların belirlediği simpleksler kompleksi N_n ile gösterilecek ve üzerinde bir ayrık gradyant vektör alanı oluşturulmaya çalışılacaktır.

Öncelikle V_{12} ayrık vektör alanı oluşturulacaktır. Bu ayrık vektör alanı, simpleksleri yani onları temsil eden grafları eşleyerek oluşturulacaktır. $(1, 2)$ kenarını içermeyen bağlantısız graflara $(1, 2)$ kenarını eklediğimizde yine bağlantısız bir graf oluyorsa bu iki kenar eşlenebilir çünkü her ikisi de bağlantısız olduğundan N_n in elemanıdır. Diğer bir deyişle $(1, 2)$ kenarını içeren bir bağlantısız graftan $(1, 2)$ kenarı çıkarılırsa yine bağlantısız bir graf elde edilir

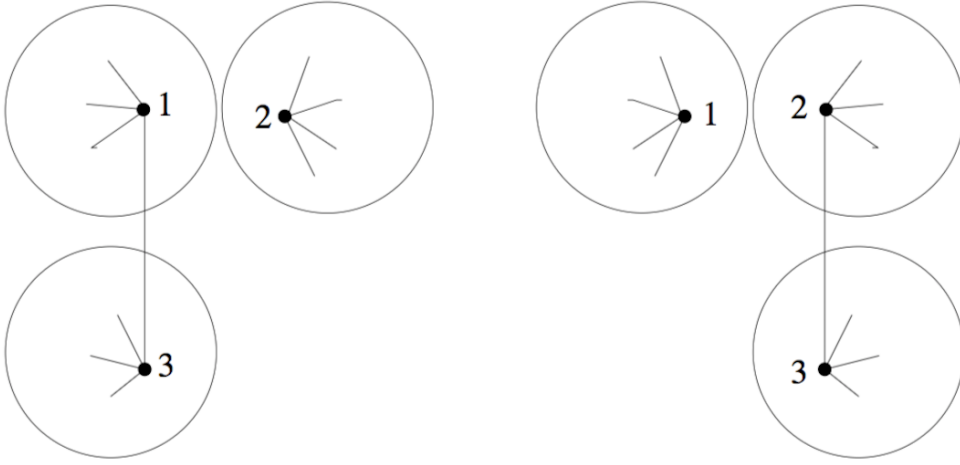
ve bu bağlantısız graf $(1, 2)$ eklenmiş haliyle eşlenebilir.

Peki hangi graflar eşlenemedi? $(1, 2)$ kenarını içeren tüm bağlantısız graflar eşlendi. $(1, 2)$ kenarını içermeyen graflar ise $(1, 2)$ kenarı eklenince bağlantısız olma şartı ile eşlenebildi. Demek ki $(1, 2)$ kenarı eklenince bağlantılı olan ancak $(1, 2)$ kenarını içermeyen ve bağlantısız olan graflar eşlenemedi. Yani 1 noktasını içeren bir bağlantılı bileşen G_1 ve 2 noktasını içeren bir bağlantılı bileşen G_2 olmak üzere bağlantısız graflar kaldı. Şekil 4.4 ile bu grafların tipi görülmektedir. Dikkatli düşünüldüğünde hiçbir kenar içermeyen graf, sadece $(1, 2)$ kenarını içeren graf ile eşlenmelidir. Ancak boş graf herhangi bir simpleks ifade etmediğinden bu eşleme yapılamayacaktır.



Şekil 4.4: G_1 ve G_2 bağlantısız bileşenleri (Forman, 2002)

Şimdi ise bu kalan, yani eşlenemeyen graflar eşlenmelidir. Bu aşamada eşlenecek ikililerin oluşturacağı ayrık vektör alanı V_3 ile gösterilecektir. Bunlar eşlenmeye 3 noktası düşünülerek başlanır. 3 noktası ya G_1 bağlantılı bileşeninde ya da G_2 bağlantılı bileşenindedir. Eğer G_1 bağlantılı bileşeninde ise $(1, 3)$ kenarını içermeyen graflar $(1, 3)$ kenarının eklenmesi ile elde edilen graf ile eşlensin. Diğer bir deyişle $(1, 3)$ kenarını içeren graflardan $(1, 3)$ kenarı çıkarıldığında G_1 hala bağlantılı bileşen oluyorsa bu graf, $(1, 3)$ kenarı eklenerek elde edilen graf ile eşlensin. Peki bu aşamada kimler eşlenemedi? Eğer $(1, 3)$ kenarı çıkarıldığında G_1 bağlantılı bileşen olmuyorsa o graf eşlenemeyen graftır. Ya da benzer durum 3 noktasının G_2 bağlantılı bileşenine ait olması için düşünülebilir. Şekil 4.5 ile bu grafların tipi görülebilir.



Şekil 4.5: V_3 ayrık vektör alanında eşlenemeyen grafların tipi (Forman, 2002)

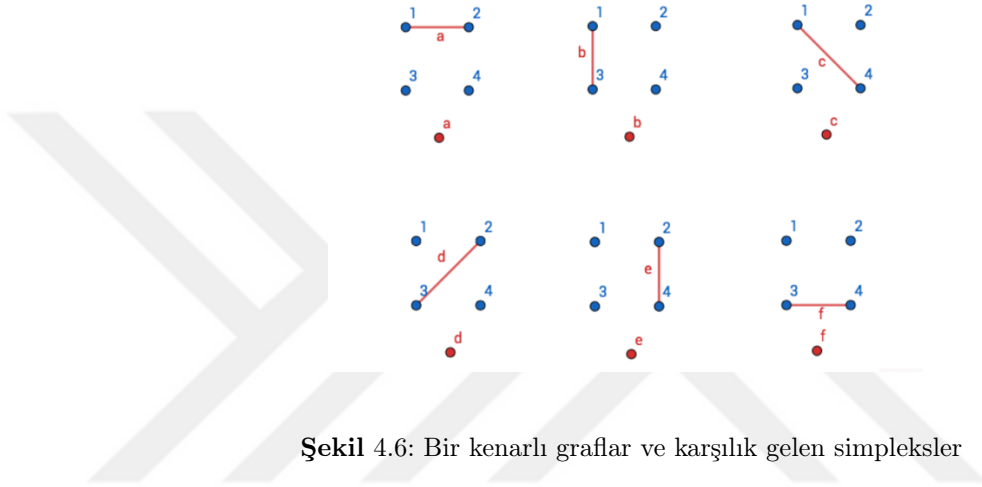
Benzer işlem n -defa yapılır ve en sonunda V_n elde edilir. Sonuçta iki bağlantılı ağaçların birleşimi ile sadece $(1, 2)$ kenarından oluşan graf eşlenememiştir. Ayrıca dikkat edilirse ağaç aşağı doğru inerken daima köşelerin aldığı değerler artmaktadır. Bu şekilde tam olarak $(n - 1)!$ tane graf vardır ve her birinin $n - 2$ tane kenarı vardır ki bunlar da birer $(n - 3)$ -simpleks oluşturur.

Şimdi bu ayrık vektör alanının gradyant vektör alanı olduğu gösterilmelidir. Bunun için aşikar olmayan kapalı V - yol olmadığını göstermek yeterlidir. Özel olarak V_{12} içinde bir yol alınırsa ilk ikili $\alpha_0^{(p)}, \beta_0^{(p+1)}$ olur. Bu ise $\beta_0^{(p+1)} = \alpha_0^{(p)} + (1, 2)$ olması demektir. Buradan sonra 3. terim $\beta_0^{(p+1)}$ in $\alpha_0^{(p)}$ den farklı bir yüzü gelmelidir. O halde $\beta_0^{(p+1)}$ den $(1, 2)$ haricinden bir kenar silinmelidir. Bu ise $(1, 2)$ kenarını içermesi demektir ve bu kenarı içerenler V_{12} içerisinde bir okun kuyruğu değil başı olmak zorundadır. Demek ki daha uzun bir V_{12} -yol inşa etmek mümkün değildir. Bu ise aşikar olmayan kapalı bir yolun olmadığı anlamına gelir. Benzer düşünce, oluşturulan diğer ayrık vektör alanları için de geçerlidir. Demek ki oluşturulan ayrık vektör alanı bir ayrık gradyant vektör alanıdır.

Eşlenemeyen graflar tekrar göz önüne alınırsa öncelikle sadece $(1, 2)$ kenarından oluşan graf eşlenememiştir. Bu ise bir 0-simplekse karşılık gelir. Daha sonrasında ise $(n - 1)!$ tane $(n - 2)$ -kenarlı graf eşlenememiştir, bunlar da $(n - 3)$ -simpleks demektir.

O halde n köşeli bağlantısız grafların belirlediği simpleksler kompleksi N_n , $(n-3)$ -boyutlu $(n-1)!$ tane kürenin tek noktada kesişimi ile aynı homotopi tipine sahiptir.

Şimdi $n = 4$ için, köşeler kümesi $\{1, 2, 3, 4\}$ olan bağlantısız grafları ele alalım. Öncelikle $(1, 2)$ kenarına $[a]$, $(1, 3)$ kenarına $[b]$, $(1, 4)$ kenarına $[c]$, $(2, 3)$ kenarına $[d]$, $(2, 4)$ kenarına $[e]$, $(3, 4)$ kenarına $[f]$ simpleksi karşılık gelsin. Bu graflar ve karşılık gelen simpleksler Şekil 4.6 ile gösterilmiştir.



Şekil 4.6: Bir kenarlı graflar ve karşılık gelen simpleksler

Şimdi graflarımızı ve bunlara karşılık gelen simplekslerimizi ifade edelim.

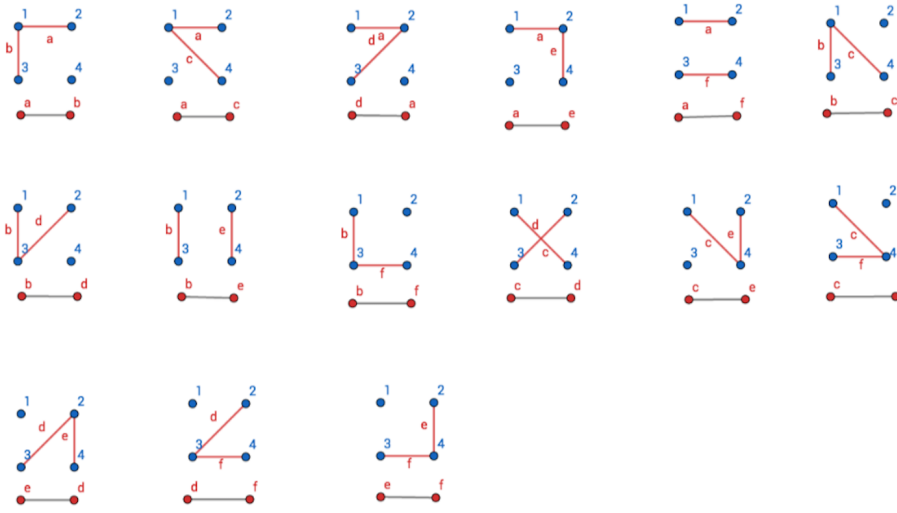
$$\begin{aligned} \mathcal{P} = & \{ \{(1, 2)\}, \{(1, 3)\}, \{(1, 4)\}, \{(2, 3)\}, \{(2, 4)\}, \{(3, 4)\}, \{(1, 2), (1, 3)\}, \\ & \{(1, 2), (1, 4)\}, \{(1, 2), (2, 3)\}, \{(1, 2), (2, 4)\}, \{(1, 2), (3, 4)\}, \{(1, 3), (1, 4)\}, \\ & \{(1, 3), (2, 3)\}, \{(1, 3), (2, 4)\}, \{(1, 3), (3, 4)\}, \{(1, 4), (2, 3)\}, \{(1, 4), (2, 4)\}, \\ & \{(1, 4), (3, 4)\}, \{(2, 3), (2, 4)\}, \{(2, 3), (3, 4)\}, \{(2, 4), (3, 4)\}, \\ & \{(1, 2), (1, 3), (2, 4)\}, \{(2, 3), (2, 4), (3, 4)\}, \{(1, 3), (1, 4), (3, 4)\}, \\ & \{(1, 2), (1, 4), (2, 4)\} \} \end{aligned}$$

bağlantısız graflar ailesidir.

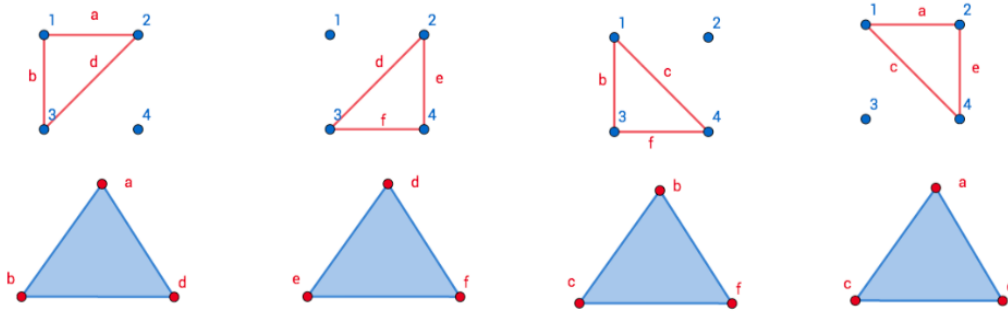
Öyleyse $\mathcal{P}$ graflar ailesine karşılık gelen simpleksler kompleksi

$$\begin{aligned} K = & \{[a], [b], [c], [d], [e], [f], [a, b], [a, c], [a, d], [a, e], [a, f], [b, c], [b, d], [b, e], \\ & [b, f], [c, d], [c, e], [c, f], [e, d], [d, f], [e, f], [a, b, d], [d, e, f], [b, c, f], [a, c, e]\} \end{aligned}$$

kümesidir. Şekil 4.7 ve Şekil 4.8 incelenirse hangi simplekslere hangi grafların karşılık geldiği görülebilir.



Şekil 4.7: İki kenarlı graflar ve karşılık gelen simpleksler



Şekil 4.8: Üç kenarlı graflar ve karşılık gelen simpleksler

Öncelikle gradyant vektör alanı oluşturulsun.

$V_{12} = \{\{[b], [a, b]\}, \{[c], [a, c]\}, \{[d], [a, d]\}, \{[e], [a, e]\}, \{[f], [a, f]\},$
 $\{[b, d], [a, b, d]\}, \{[c, e], [a, c, e]\}\}$ ve $V_3 = \{\{[c, f], [b, c, f]\}, \{[e, f], [d, e, f]\}\}$ dir.
 Şu halde $1 + (4 - 1)! = 7$ tane eşlenemeyen simpleks vardır. Bu ise bunların kritik simpleks olduğu anlamına gelir. $\{[a], [b, c], [b, e], [b, f], [c, d], [e, d], [d, f]\}$ kritik simplekslerdir.

Daha önce de bahsedildiği gibi amaç mümkün olduğunca az kritik noktaya sahip olan Morse fonksiyonun bulunabilmesidir. Bunun için üzerinde Morse fonksiyonu tanımlı olan bir simpleksler kompleksinde kritik simplekslerin sayısının nasıl azaltılabileceğinden bahsedilecektir.

Bir $\mathcal{K}$ simpleksler kompleksi üzerinde gradyant vektör alanı tanımlı olsun. β^{p+1} kritik simpleksinin sınırından α^p kritik simpleksine giden yalnızca bir tane gradyant yol varsa bu durumda α ve β kritik simpleksleri yok edilebilir. Aşağıdaki teorem bu işlemin nasıl yapılacağını göstermektedir.

Teorem 4.0.3. (Forman, [2002]) K üzerinde f Morse fonksiyonu β^{p+1} ve α^p kritik simpleksleri ile tanımlı olsun. Eğer β nin sınırından α ya tanımlı sadece bir tane gradyant yol var ise M üzerinde öyle bir g Morse fonksiyonu vardır ki α ve β haricindeki tüm kritik simpleksler yine kritiktir ve g nin belirttiği gradyant vektör alanı β nin sınırından α ya giden tek bir yol dışında f dekiler ile aynıdır.

İspat. K üzerinde, ayrık Morse fonksiyonu f nin belirttiği V gradyant vektör alanı olsun. β nin sınırı olan α_0 dan α ya giden bir tek yol var olsun. Bu yol

$$\alpha_0, \beta_0, \dots, \alpha_n, \beta_n, \alpha$$

şeklinde gösterilsin.

$$V_1 = \{\{\alpha_0, \beta_0\}, \{\alpha_1, \beta_1\}, \dots, \{\alpha_n, \beta_n\}\}$$

ve

$$V_2 = \{\{\alpha, \beta_n\}, \{\alpha_n, \beta_{n-1}\}, \dots, \{\alpha_1, \beta_0\}, \{\alpha_0, \beta\}\}$$

olmak üzere

$$V' = (V - V_1) \cup V_2$$

olsun. β ve α , V de kritik simpleks olduklarından eşlenmemişlerdir. Öyleyse V' oluşturulurken eşlenmesinde bir sakınca yoktur. Şu halde V' bir ayrık vektör alanıdır. Eğer herhangi bir aşık ar olmayan kapalı yola sahip olmadığı gösterilirse V' nün bir ayrık gradyant vektör alan olduğu dolayısıyla bir g ayrık Morse fonksiyonunun gradyant vektör alanı olduğu söylenebilir. Üstelik V' oluşturulurken V de eşlenen tüm simpleksler eşlenmiş, bunlara ek olarak α ve β dışında herhangi bir simpleks eşlenmemiştir. Bu da α ve β dışında durumu değişen başka bir simpleks olmadığını gösterir. V' ayrık vektör alanının bir gradyant vektör alanı olduğu gösterilirse ispat tamamlanır.

V' ayrık vektör alanında bir aşık ar olmayan kapalı yolun var olduğu kabul edilsin. V gradyant vektör alan olduğundan V de böyle bir yol yoktur.

Dolayısıyla $V - V_1$ de de yoktur. O halde bu yol V_2 ile eşlenen simplekslerden en az birini kullanmak zorundadır. Bu yolu

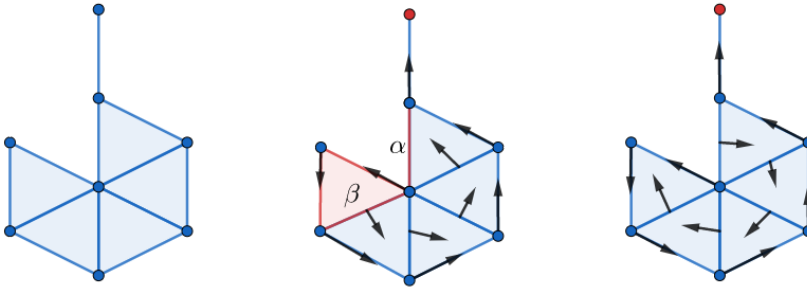
$$\sigma_0, \tau_0, \dots, \sigma_k, \tau_k, \alpha_t, \beta_{t-1}, \sigma_{k+1}, \tau_{k+1}, \dots, \sigma_n, \tau_n, \sigma_0$$

ile gösterelim.

$$\alpha_0, \beta_0, \dots, \alpha_{t-1}, \beta_{t-1}, \sigma_{k+1}, \tau_{k+1}, \dots, \sigma_0, \tau_0, \dots, \alpha_t, \beta_t, \dots, \alpha_n, \beta_n, \alpha$$

V de bir yoldur. Bu yol, V de β nın sınırı olan α_0 dan α ya giden ikinci bir yol olduğunu gösterir. Bu ise çelişki olup kabulün yanlış olduğunu yani V' nün bir g fonksiyonunun gradyant vektör alanı olduğunu gösterir. $\square$

Örnek olarak Şekil 4.9 göz önüne alınırsa β kritik simpleksinden α kritik simpleksine bir tek yol vardır. Öyleyse oklar tersine çevrilerek diğer kritik simplekslere hiç dokunulmadan sadece β ve α kritik simpleksleri yok olmuş olur.



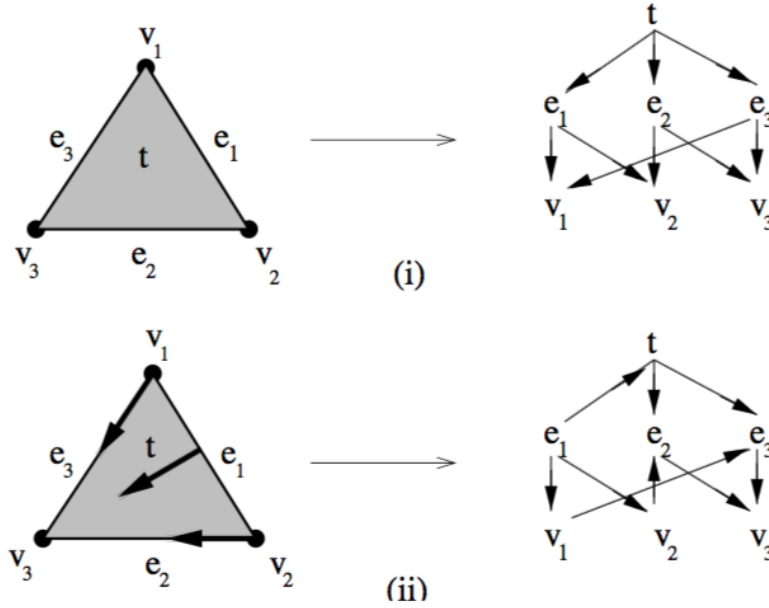
Şekil 4.9: Kritik nokta yok etme

Burada β dan α ya başka bir yolun olmamasının istenme sebebi yeni tanımlanan okların kapalı bir yol oluşturmamasına engel olunmak istenmesidir. Aksi halde elde edeceğimiz ayrık vektör alanı kapalı yola sahip olur ve bir gradyant vektör alanı olamaz.

5 KOMBİNATORİK BAKIŞ AÇISI

Bu bölümde komplekse ait simplekslerin yüz ilişkisine göre kısmi sıralı bir kümesi olan Hasse diyagramlarından bahsedilecektir.

Hasse diyagramı noktaları simpleksler olan yönlü bir graf olarak düşünülebilir. Eğer iki köşe arasında yönlü bir kenar varsa bu; kenarın başlangıç noktasını temsil eden simpleksin, bitiş noktasını temsil eden simpleksin bir yüzü olduğunu söyler. Eğer bir V kombinatorik vektör alanında $\{\alpha, \beta\} \in V$ ise bu durumda (α, β) kenarı yön değiştirir. Bu vektör alanındaki bir yol, yönlendirilmiş grafta bir yönlü yol olacaktır. Fakat karşıtı her zaman doğru olmak zorunda değildir. Şu halde aşağıdaki teorem hangi şartlar altında Hasse diyagramının bir ayrık gradyant vektör alanını belirleyeceğini anlamamıza olanak sağlar.



Şekil 5.1: Hasse diyagramının iki aşamada oluşturulması (Forman, 2002)

Teorem 5.0.1. (Forman, 2002) *Aşıkak olmayan kapalı V -yolların var olması için gerek ve yeter şart yönlü Hasse diyagramını oluşturduğumuz grafta aşıkak olmayan kapalı bir yönlü yolun var olmamasıdır.*

İspat. V deki tüm yollar Hasse diyagramında bir yol belirtir. Öyleyse Hasse diyagramında aşıkak olmayan kapalı yol yoksa V ayrık vektör alanında da

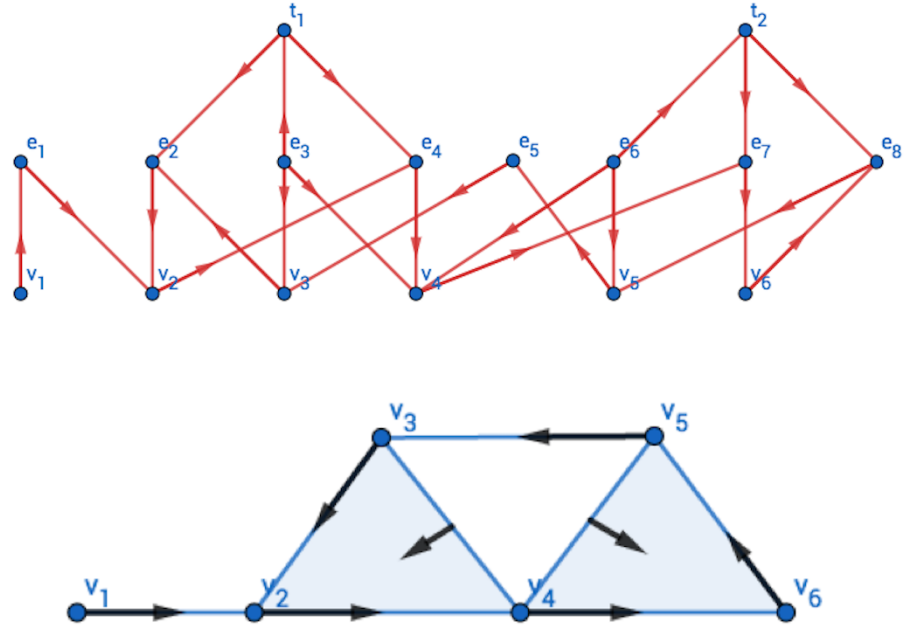
olamaz.

V ayrık vektör alanında aşıkâr olmayan kapalı yol olmasın. Öyleyse Teorem 4.0.2 gereğince bir f ayrık Morse fonksiyonu vardır. Ayrıca bu fonksiyon Teorem 3.0.2'nin ispatındaki gibi birebir hale getirilebilir. Bu f Hasse diyagramı üzerindeki yollar üzerinde monoton azalan olacaktır. Çünkü Hasse diyagramında, $\beta^{(p+1)}$ simpleksini temsil eden noktadan $\alpha^{(p)}$ simpleksini temsil noktaya çizilen yönlü kenar azalan olmak zorudadır. Aksi halde artan olup kenarın üzerindeki yön tam ters dönmelidir. Benzer şekilde $\gamma^{(p-1)}$ simpleksini temsil eden noktadan $\alpha^{(p)}$ simpleksini temsil eden noktaya çizilen yönlü kenar azalan olmak zorundadır. Aksi halde artan olup bu simpleksler V de eşlenemez. Demekki Hasse diyagramının belirttiği grafta noktalar üzerinde tanımlanan öyle bir fonksiyon vardır ki yönlü kenarlar üzerinde monoton azalandır. Bu ise graf üzerinde aşıkâr olmayan kapalı bir yol olmamasına denktir. $\square$

Sonuç olarak, Hasse diyagramında aşıkâr olmayan kapalı yönlü yol yoksa V bir gradyant vektör alanı belirler ve eşlenemeyen simpleksler kritik simpleksler olur. Böylece yine bir ayrık Morse fonksiyonu elde edilmiş gibi, aynı yorumlar yapılabilir, CW-ayrışımı inşa edilirken kaç tane hangi boyuttan hücreye ihtiyaç duyulduğu tespit edilebilir. Bu Hasse diyagramında boş simpleksin eşlenmediğine dikkat edilmelidir.

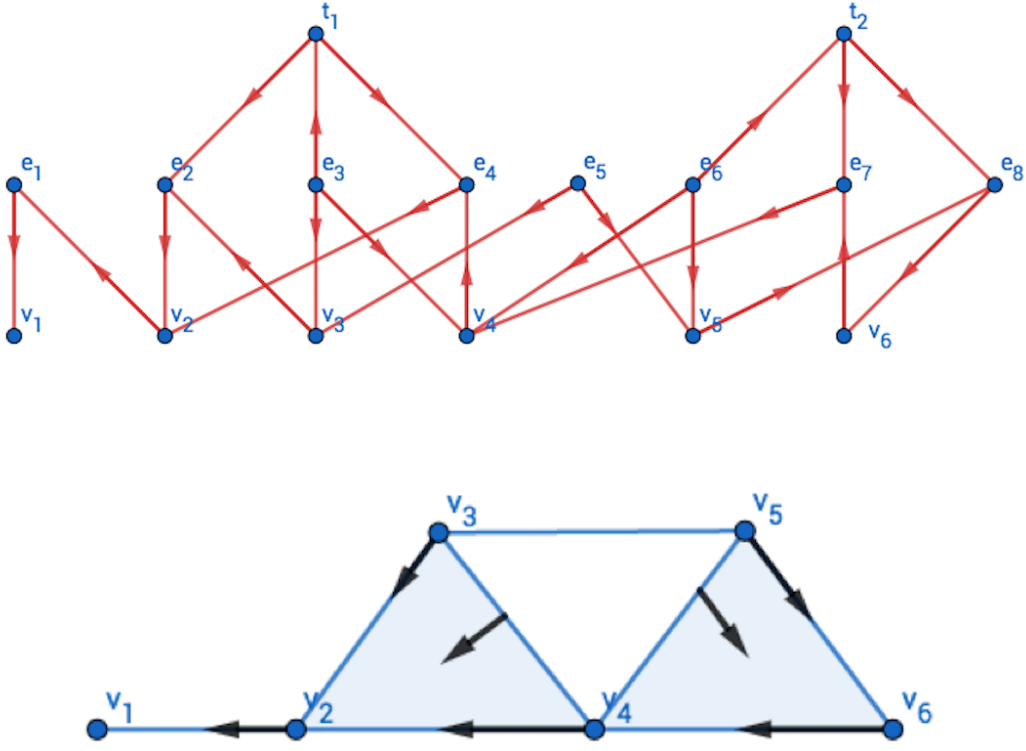
Yukarıdaki teoremi daha iyi anlamak için aşağıdaki örnekler incelenebilir.

Örnek 5.0.1. Şekil 5.2 ile K simpleksler kompleksi üzerinde bir ayrık vektör alanı ve bu alanının belirlediği yönlü Hasse diyagramı verilmiştir. Dikkat edilirse $v_6, e_8, v_5, e_5, v_3, e_2, v_2, e_4, v_4, e_7, v_6$ yolu Hasse diyagramı üzerinde bir kapalı yoldur. O halde Teorem 5.0.1 gereğince V ayrık vektör alanında da bir aşıkâr olmayan kapalı yol vardır. Bu ise V ayrık vektör alanının, bir ayrık f Morse fonksiyonunun gradyant vektör alanı olamayacağı anlamına gelir. Demek ki bu Hasse diyagramı kullanışlı değil. Ancak graf üzerindeki yollar Şekil 5.3 ile gösterildiği gibi tanımlansaydı durum farklı olabilirdi.



Şekil 5.2: Kapalı bir yola sahip Hasse diyagramı ve ayrık vektör alanı

Örnek 5.0.2. Şekil 5.3 ile K simpleksler kompleksi üzerinde bir ayrık vektör alanı ve bu alanının belirlediği yönlü Hasse diyagramı verilmiştir. Dikkat edilirse yönlü Hasse diyagramında herhangi bir kapalı yol yoktur. Teorem 5.0.1 gereğince V ayrık vektör alanında da aşık olmayan kapalı bir yol olmadığı söylenebilir. Şekil 5.2 kontrol edilirse gerçekten ayrık vektör alanında aşık olmayan kapalı yol yoktur. Demek ki bu ayrık vektör alanı bir gradyant vektör alanıdır ve bir f ayrık Morse fonksiyonu bu gradyant vektör alanını belirler. Bu ise Hasse diyagramında küçük boyutlu simpleksi temsil eden köşeden büyük boyutlu simpleksi temsil eden köşeye giden yolların bu simpleksleri eşlediğini yani kritik simpleks olmadıklarını belirlemeye yarar.



Şekil 5.3: Kapalı yol içermeyen bir Hasse diyagramı ve gradyant vektör alanı

6 MORSE KOMPLEKSLER

Gradyant vektör alanları yardımı ile CW-ayrışımının nasıl bulunacağı önceki bölümlerde gösterildi. Bu bölümde ise homoloji gruplarının nasıl hesaplandığından bahsedilecektir.

K , üzerinde bir f Morse fonksiyonu olan simpleksler kompleksi olsun. $\mathcal{M}_p$, p -kritik simplekslerinin ürettiği serbest abel grup ve m_p de, bu simplekslerin sayısı olmak üzere

$$\mathcal{M}_p \cong \mathbb{Z}^{m_p}$$

dir.

Teorem 6.0.1. ([Forman](#), [2002](#)) Her bir d için

$$\tilde{\partial}_d \circ \tilde{\partial}_{d-1} = 0$$

olacak şekilde $\tilde{\partial}_d : \mathcal{M}_d \rightarrow \mathcal{M}_{d-1}$ sınır homomorfizmaları vardır ve

$$0 \rightarrow \mathcal{M}_n \xrightarrow{\tilde{\partial}_n} \mathcal{M}_{n-1} \xrightarrow{\tilde{\partial}_{n-1}} \dots \xrightarrow{\tilde{\partial}_1} \mathcal{M}_0 \rightarrow 0$$

diferansiyel kompleksi, X in homolojisi $H_d(\mathcal{M}, \tilde{\partial})$ yı aşağıdaki şekilde hesaplar:

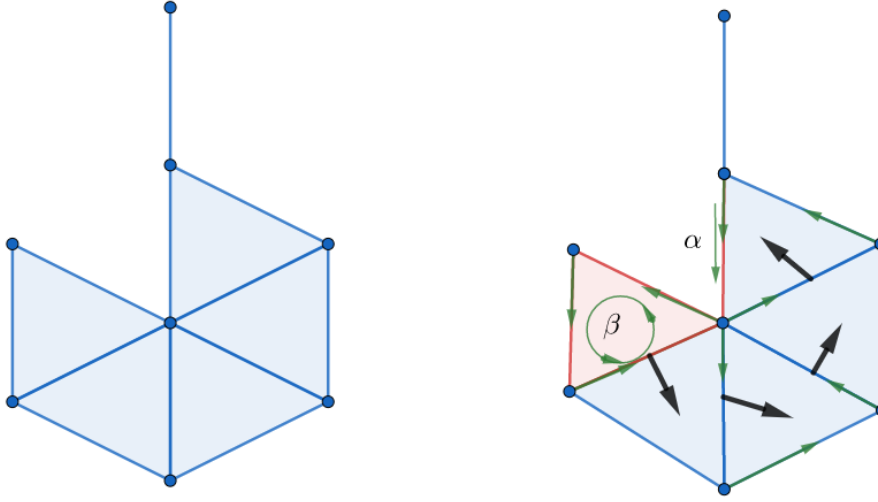
$$H_d(X, \mathbb{Z}) \cong H_d(\mathcal{M}, \tilde{\partial}) = \frac{\text{Ker}(\tilde{\partial}_d)}{\text{Im}(\tilde{\partial}_{d+1})}.$$

Şimdi bu sınır homomorfizmalarının nasıl tanımlandığından bahsedilecektir. Bunun için kompleksin üzerinde bir gradyant vektör alanı ve her simpleks üzerinde belirlenmiş bir yön olmalıdır. Amaç, β kritik p -simpleksinin sınır homomorfizması altında $p - 1$ simplekslere nasıl gittiğinin tespit edilmesidir. Diğer bir deyişle

$$\tilde{\partial}_p(\beta) = \sum_{\text{kritik } \alpha^{(p-1)}} c_{\alpha, \beta} \alpha$$

eşitliğini sağlayan $c_{\alpha, \beta}$ sayısının tespit edilmesidir. Bunun için β nın bir maksimal yüzünden α ya giden gradyant V -yolların β dan α ya indirgediği yön ile α nın kendi yönünün aynı mı zıt mı olduğuna bakılır. Her bir V -yol için yön aynı ise $+1$, zıt ise -1 alınıp bu sayılar toplanır. Böylece $c_{\alpha, \beta}$ sayısı tespit edilir.

Şekil 6.1'de, üzerinde bir yön olan β simpleksinin, bir yüzünden başlayan bir V -yolun, üzerindeki yönü α simpleksine nasıl indirgediği gösterilmektedir.



Şekil 6.1: β dan α ya indirgenen yön

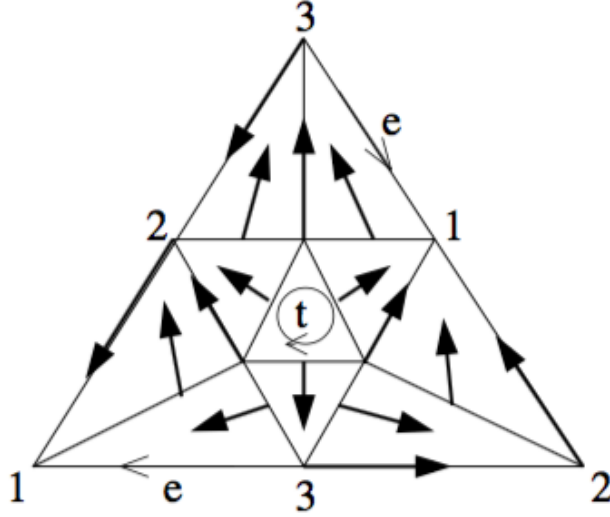
4. Bölümde Reel Projektif Düzlem üzerinde bir gradyant vektör alanı oluşturuldu. Şimdi bu gradyant vektör alanı yardımıyla sınır homomorfizmalarının nasıl çalıştığı gösterilecektir.

Örnek 6.0.1. (Forman, 2002) $\mathbb{RP}^2$ örneğinde 3 adet kritik simpleks olduğu belirtilmişti. Bunlar t ile gösterilen 2-simpleks, e ile gösterilen 1-simpleks ve v ile gösterilen 0-simpleksti. Burada öncelikle her bir simpleks üzerinde yön belirlenmelidir. Belirlenen yönler Şekil 6.2 deki gibi olsun. $\tilde{\partial}_2(t)$ yi hesaplamak için öncelikle t nin yüzlerinden e ye giden tüm yollar belirlenmelidir. Dikkat edilirse bu yolların 2 tane olduğu ve her iki yol için, t nin e üzerine indirgediği yön ile, e üzerinde tanımlanan yönün aynı olduğu görülür. Böylece

$$\tilde{\partial}_2(t) = 2e$$

olarak hesaplanır.

Şimdi $\tilde{\partial}_1(e)$ nin hesaplanması için e nin sınırından v ye giden tüm yollar tespit edilmelidir. İlki e nin yüzü olan v deki 0 adımdan oluşan aşikar yoldur. Bu yol, e üzerindeki yönün bitim noktasında başladığından pozitif bir yön tanımlar. Diğeri ise şeklin sağ tarafındaki 3,2,1 noktalarını takip eden yoldur.



Şekil 6.2: $\mathbb{RP}^2$ üzerindeki kritik simplekslerin yönü (Forman, 2002)

Bu yol, e üzerindeki yönün başlangıç noktasında başladığından, negatif bir yön tanımlar ve katsayı 0 olur. Böylece

$$\tilde{\partial}_1(e) = 0v$$

bulunur. O halde aşağıdaki diferansiyel kompleks

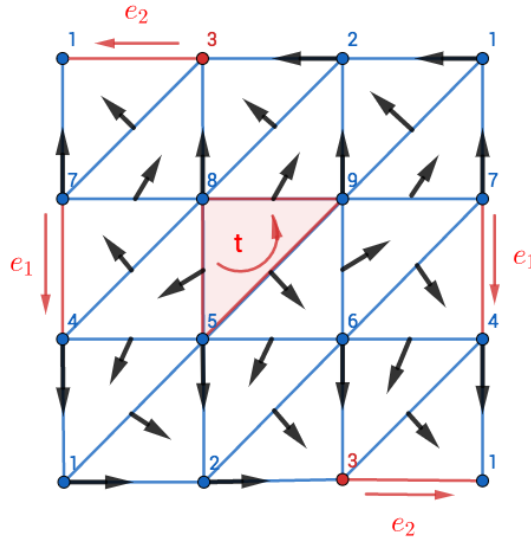
$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

şeklinde oluşturulur ve

$$\begin{aligned} H_0(\mathbb{RP}^2, \mathbb{Z}) &\cong \frac{\text{Ker}(\tilde{\partial}_0)}{\text{Im}(\tilde{\partial}_1)} \cong \frac{\mathbb{Z}}{0} \cong \mathbb{Z} \\ H_1(\mathbb{RP}^2, \mathbb{Z}) &\cong \frac{\text{Ker}(\tilde{\partial}_1)}{\text{Im}(\tilde{\partial}_2)} \cong \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}_2 \\ H_2(\mathbb{RP}^2, \mathbb{Z}) &\cong \frac{\text{Ker}(\tilde{\partial}_2)}{\text{Im}(\tilde{\partial}_3)} \cong 0 \end{aligned}$$

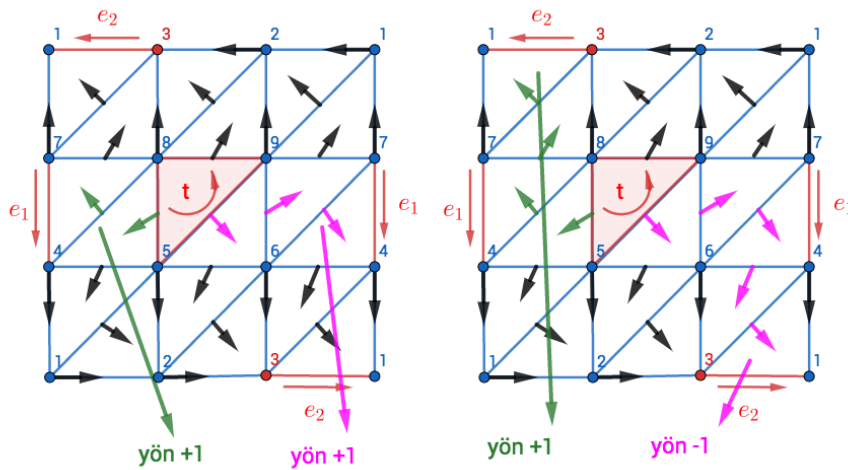
homoloji grupları hesaplanır.

Bir başka homoloji hesabı Klein şişesi için yapılabilir.



Şekil 6.3: Kb üzerindeki gradyant vektör alanı ve kritik simpleksler

Örnek 6.0.2. Şekil 6.3, Klein şişesi üzerindeki bir Morse fonksiyonunun gradyant vektör alanını göstermektedir. Burada bir tane kritik 2-simpleks, iki tane kritik 1-simpleks, bir tane kritik 0-simpleks vardır. Bunların sınır homomorfizmaları altındaki görüntüleri tespit edilmelidir.



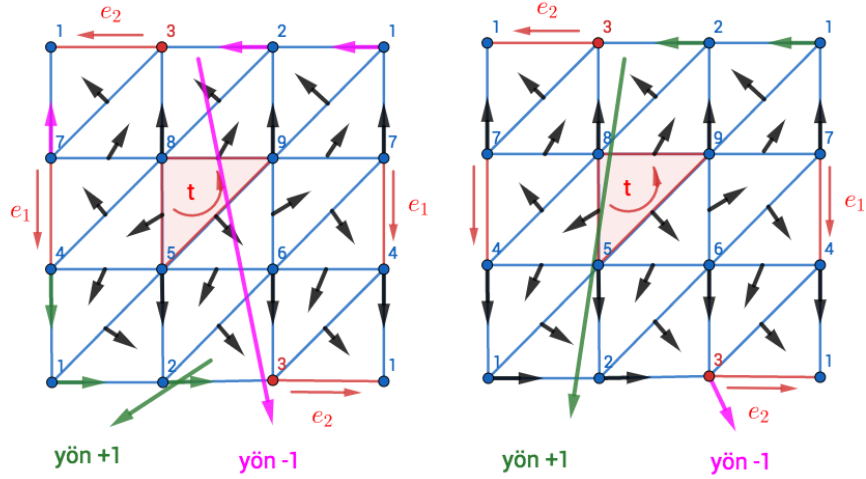
Şekil 6.4: t simpleksinin sınırından e_1 ve e_2 ye giden yollar

t simpleksinin sınırından e_1 ve e_2 ye giden yollar bulunup bunların üzerine

indirgenen yönün, üzerinde tanımlı olan yön ile aynı olup olmadığı kontrol edilmelidir. Şekil 6.4 ile t nin e_1 üzerine iki farklı yoldan aynı yönü indirgediği görülür ve buradan e_1 in katsayısı 2 elde edilir. t nin e_2 üzerine iki farklı yoldan indirgediği yönler bakılırsa biri aynı diğeri zıt yönlüdür öyleyse e_2 nin katsayısı 0 elde edilir ve

$$\tilde{\partial}_2(t) = 2e_1 + 0e_2$$

olur.



Şekil 6.5: e_1 ve e_2 simplekslerinin sınırından v ye giden yollar

Şekil 6.5 incelenirse e_1 in sınırından ve e_2 nin sınırından v ye giden 2 farklı yol olduğu görülür. Bunların indirgediği yönlerin biri aynı diğeri zıt olup katsayılar 0 olacaktır. O halde

$$\tilde{\partial}_1(e_1) = 0v$$

$$\tilde{\partial}_1(e_2) = 0v$$

elde edilir.

Böylece aşağıdaki diferansiyel kompleks elde edilmiş olur.

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{(\times 2, 0)} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

Bu diferansiyel kompleks ile homoloji grubu hesaplanır ve

$$H_0(Kb, \mathbb{Z}) \cong \frac{\text{Ker}(\tilde{\partial}_0)}{\text{Im}(\tilde{\partial}_1)} \cong \frac{\mathbb{Z}}{0} \cong \mathbb{Z}$$

$$H_1(Kb, \mathbb{Z}) \cong \frac{Ker(\tilde{\partial}_1))}{Im(\tilde{\partial}_2)} \cong \frac{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}{2\mathbb{Z} \times \{0\}} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}$$

$$H_2(Kb, \mathbb{Z}) \cong \frac{Ker(\tilde{\partial}_2))}{Im(\tilde{\partial}_3)} \cong 0$$

elde edilir.



KAYNAKLAR DİZİNİ

- Bollabas, B.**, 1998, Modern Graph Theory. No. 184 in Graduate Texts in Mathematics, New York: Springer-Verlag.
- Dieck, T.T.**, 2008, Algebraic Topology. European Mathematical Society, Zürich.
- Diestel, R.**, 2005, Graph Theory. No. 173 in Graduate Texts in Mathematics, New York: Springer-Verlag.
- Forman, R.**, 2002, A User's Guide To Discrete Morse Theory. Seminarie Lotharingien de Combinatorie 48, Article B48C.
- Forman, R.**, 1998, Morse Theory For Cell Complexes, *Advances in Mathematics*, 134:90-145pp.
- Hudson, J.F.P.**, 1969, Piecewise Linear Topology. W.A.Benjamin, Inc.
- Karaca, İ.**, 2010, Kombinatorik Topoloji Lisans Ders Notları.
- Kelley, J.L.**, 1955, General Topology. No. 27 in Graduate Texts in Mathematics, New York: Springer-Verlag.
- Knudson, K.P.**, 2015, Morse Theory: Smooth and Discrete, World Scientific Publishing C.O.
- Lundell, A.T. and Weingram, S.**, 1969, The Topology of CW Complexes. Litton Educational Publishing.
- Milnor, J.**, 1963, Morse Theory. Annals of Mathematics Studies Number 51 Princeton, New Jersey: Princeton University Press.
- Moise, E.E.**, 1997, Geometric Topology in Dimension 2 and 3. No. 47 in Graduate Texts in Mathematics, New York: Springer-Verlag.
- Rotman, J.J.**, 1998, An Introduction to Algebraic Topology. No. 119 in Graduate Texts in Mathematics, New York: Springer-Verlag.

ÖZGEÇMİŞ

1990 yılında İzmir’de doğdu. İlk ve orta öğrenimini İzmir’de tamamladı. Gazi Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü, Lisans Öğretim Programından 2016 yılında mezun oldu. 2016 yılından itibaren Ege Üniversitesi Matematik Bölümü’nde yüksek lisans yapmaktadır.

Katıldığı Bilimsel Etkinlikler

- M. Akkaya, İ. Karaca, A Combinatorial Approach to Discrete Morse Theory, 3rd International Conference On Advances in Natural And Applied Science (ICANAS 2018), 09-12 Mayıs 2018, sayfa 232 (Poster).
- M. Akkaya, İ. Karaca, On Discrete Morse Theory, International Conference On Mathematical Advances And Applications (ICOMAA 2018), 11-13 Mayıs 2018, sayfa 164 (Poster).

Projeler

- Ayrık Morse Teori Üzerine, Ege Üniversitesi Bilimsel Araştırma Fonu Projesi, 17 FEN 082, Proje Araştırmacısı, 2017.