EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

(YÜKSEK LİSANS TEZİ)

İLETİŞİM AĞLARINDA BASKINLIK KAVRAMI VE ZEDELENEBİLİRLİK ÜZERİNE

Ayşe BEŞİRİK

Tez Danışmanı : Dr. Öğretim Üyesi Elgin KILIÇ

Matematik Bölümü Anabilim Dalı

Sunuş Tarihi : 18.06.2018

Bornova-İZMİR
2018

Sayın Ayşe BEŞİRİK tarafından YÜKSEK LİSANS tezi olarak sunulan "**İLETİŞİM AĞLARINDA BASKINLIK KAVRAMI VE ZEDELENEBİLİRLİK ÜZERİNE**" başlıklı bu çalışma EÜ Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği ile EÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim ve Öğretim Yönergesi'nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş ve 18/06/2018 tarihinde yapılan tez savunma sınavında aday oybirliği/~~oyçokluğu~~ ile başarılı bulunmuştur.

Jüri Üyeleri: **İmza**

Jüri Başkanı : Dr. Öğretim Üyesi Elgin KILIÇ ....

Üye : Doç. Dr. Aysun AYTAÇ ....

Üye : Doç. Dr. Ersin ASLAN ....

EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

EÜ Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin ilgili hükümleri uyarınca Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "**İLETİŞİM AĞLARINDA BASKINLIK KAVRAMI VE ZEDELENEBİLİRLİK ÜZERİNE**" başlıklı bu tezin kendi çalışmam olduğunu, sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgeleri bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara atıf yaptığımı ve bunları kaynaklar listesinde usulüne uygun olarak verdiğimi, tez çalışması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını, bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya diğer bir üniversitede başka bir tez çalışması içinde sunmadığımı, bu tezin planlanmasından yazımına kadar bütün safhalarda bilimsel etik kurallarına uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul edeceğimi beyan ederim.

18/06/2018

A. Beşirik.

Ayşe BEŞİRİK

ÖZET

İLETİŞİM AĞLARINDA BASKINLIK KAVRAMI VE ZEDELENEBİLİRLİK ÜZERİNE

BEŞİRİK, Ayşe

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Bölümü Anabilim Dalı
Tez Danışmanı: Dr. Öğretim Üyesi Elgin KILIÇ
Haziran 2018, 38 sayfa

Bu tez çalışmasında iletişim ağlarında baskınlık kavramına dayalı bütünlük parametresi ele alınmış, daha önce bu konuda yapılan çalışmalar incelenmiş ve bazı graf sınıflarının baskın bütünlük değerleri bulunmuştur.

Baskın bütünlük değeri, yeni bir zedelenebilirlik parametresi olarak Sundareswaran ve Swaminathan tarafından $DI(G) = min\{\,|S| + m(G - S): S \in V(G)\}$ şeklinde tanımlanmış olup S bir baskın küme ve $m(G - S)$, $G - S$ grafındaki en büyük boyutlu bileşenin tepe sayısıdır.

Ağ modeli olarak yaygın olarak kullanılan graflardan tekerlek graf $W_{1,n}$, ladder graf L_n, double star $S_{m,n}$, bistar $B_{n,n}$, friendship graf F_n, P_n ve C_n in dikenli graflarının baskın bütünlük değerleri incelenmiş ve bulunan sonuçlar genelleştirilmiştir.

Anahtar sözcükler: Zedelenebilirlik, bütünlük, baskınlık, baskın bütünlük.

ABSTRACT

ON VULNERABILITY AND DOMINATION CONCEPT IN COMMUNICATION NETWORKS

BEŞİRİK, Ayşe

MSc in Mathematics.
Supervisor: Ass. Prof. Dr. Elgin KILIÇ
June 2018, 38 pages

In this thesis, the integrity parameter based on the concept of domination was discussed in communication networks, the previous studies on this subject were examined and the domination integrity values of some graph classes were found.

A new vulnerability measure of domination integrity was introduced by Sundareswaran and Swaminathan and defined as $DI(G) = min\{ |S| + m(G - S): S \in V(G)\}$ where $m(G - S)$ denotes the order of a largest component of graph $G - S$ and S is a dominating set of G.

Domination integrity of wheel graph $W_{1,n}$, ladder graph L_n, double star $S_{m,n}$, bistar $B_{n,n}$, friendship F_n, thorn graphs of P_n and C_n which are commonly used network models were investigated and the results were generalized.

Keywords: Vulnerability, integrity, domination, domination integrity.

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam boyunca bana yol gösteren, ilgisini, yardımını ve anlayışını eksik etmeyen çok değerli danışmanım sayın Dr. Öğretim Üyesi Elgin KILIÇ'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Hayatım boyunca yanımda olduklarını hissettiren ve bana her zaman destek olan annem Dilek BEŞİRİK, babam Mehmet BEŞİRİK, ağabeyim Halil BEŞİRİK ve teyzem Pervin AFŞİN'e teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

İÇİNDEKİLER (devam)

Sayfa

ŞEKİLLER DİZİNİ

ÇİZELGELER DİZİNİ

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	Açıklama
$\lceil a \rceil$	a reel sayısından büyük veya eşit olan en küçük tam sayı
$\lfloor a \rfloor$	a reel sayısından küçük veya eşit olan en büyük tam sayı
$\lvert S \rvert$	S kümesinin eleman sayısı

1. GİRİŞ

Günümüzde iletişim, bilgi aktarma isteğinin giderek artması ile birlikte önemli bir yere sahip olmuştur. Ayrıca bilginin hızlı, güvenilir ve kesintisiz aktarılması istenir. Bu da iletişim ağı ve ağ tasarımının önemini arttırmaktadır. Bir iletişim ağı, merkezler ve bu merkezleri birbirine bağlayan hatlardan oluşur. İletişim ağının merkezleri ya da bağlantı hatları zarar gördüğünde ağın etkinliği azalır. Bu nedenle, veri akışının devamlılığının sağlanması için, ağın meydana gelebilecek hasarlara karşı dirençli olması gereklidir. Bu da bazı olumsuz koşullara karşı ağın nasıl ve ne kadar süre dayanacağı sorusunu ortaya çıkarır. İşte burada "zedelenebilirlik (vulnerability)" kavramı karşımıza çıkar. Bir iletişim ağında, bazı merkezlerin veya bağlantı hatlarının zarar görmesi karşısında ağın gösterdiği dayanma gücüne "zedelenebilirlik değeri" denir.

Bir ağ tasarımcısı için, iletişim ağının kararlılığı büyük bir öneme sahiptir. Bağlantı hatları veya merkezlerinde bozulmalar meydana gelmesi bu ağın işlevini tam olarak yerine getirebilmesini engeller ve ağ zedelenebilir hale gelir.

Bir iletişim ağı, merkezleri tepeler ve bağlantı hatları ayrıtlar ile temsil edilerek bir graf ile modellenebilir. Bir $G = (V(G), E(G))$ grafı, boş olmayan nesnelerin oluşturduğu bir $V(G)$ tepeler kümesi ve $E(G)$ ile gösterilen sıralı olmayan tepe çiftlerinin birleştirilmesiyle ortaya çıkan ayrıtlar kümesinden oluşur. Bu nedenle zedelenebilirlik analizinde ağlar yerine onu temsil eden graf modelleri üzerinde parametreler çalışılmaktadır. Zedelenebilirlik ölçümü için bir çok parametre tanımlanmıştır. Bağlantılılık (connectivity), ayrıt bağlantılılık (edge connectivity), bütünlük (integrity), ayrıt bütünlük (edge integrity), dayanıklılık (tenacity), sağlamlık (toughness) tanımlanan ölçümlerden bazılarıdır. Bu ölçümlerin amacı, iletişim ağında bazı tepe ve ayrıtlar zarar gördüğünde ağın yapısının anlaşılabilmesi, ağın gördüğü hasarın veya başlangıçtaki ağın direncinin analizidir.

Bir iletişim ağında belli ortak özelliklere sahip tepelerin ya da ayrıtların zarar görmesi zedelenebilirlik analizinde oldukça büyük rol oynar. Bunlardan bir tanesi de baskınlık kavramıdır ve iletişim ağlarında oldukça geniş bir uygulama alanına sahiptir.

Graflar üzerinde baskınlık kavramı 1950'lilerin sonunda çalışılmaya başlanmıştır ancak baskınlığın kökleri 1862'de C.F. Jaenish'in her bir kare tek bir vezir tarafından kontrol edilecek şekilde bir $n \times n$ satranç tahtasını örtmek için gereken en az sayıda vezirin belirlenmesi problemini çalıştığı zamana dayanmaktadır (Haynes, Hedetniemi and Slater, 1998a). Bir grafın baskınlık sayısı ilk kez Claude Berge (1962) tarafından tanımlanmıştır (Haynes, Hedetniemi and Slater, 1998a). Oystein Ore, 1962 yılında yayınlanan *Theory of Graphs* adlı kitabında "baskın küme" ve "baskınlık sayısı" kavramlarını tanıtmıştır (Ore, 1962). 1977 yılında, E.J Cockayne ve S.T Hedetniemi tarafından yazılan *Towards a theory of domination in graphs* adlı makalede bir G grafının baskınlık sayısı için $\gamma(G)$ notasyonu ilk kez kullanılmıştır (Cockayne and Hedetniemi, 1977). Bu makale yayınlandıktan sonra, graflardaki baskınlık kavramı daha kapsamlı incelenmeye başlanmış ve bu konuda bir çok makale yayınlanmıştır (Haynes, Hedetniemi and Slater, 1998a).

Baskınlık, tepeler arasındaki komşuluğu**,** dolayısıyla iletişimi inceler. Herhangi bir tepe bir ayrıtla birleştirildiği tepeleri (komşu tepeleri) bastırır. Bir ağda baskın tepe kümesi bozulduğunda ağdaki hasar daha büyük olacaktır. Örneğin; bir tepenin (merkez tepe) diğer tüm tepelerle bağlantılı ve bu tepe dışındaki diğer tüm tepelerin birbirleriyle bağlantısız olduğu bir ağ ele alalım. Merkez tepe diğer tüm tepelerle komşu olduğu için bu tepeleri bastırır. Bu tepenin zarar görmesi ağdaki iletişimin tamamen kesilmesine yol açar. Bu durum bir ağda baskın kümeler zarar gördüğünde "baskın bütünlük değeri (domination integrity)" ölçümünün çalışılmasını sağlamıştır. Baskın bütünlük değeri, bir ağın baskın kümeleri hasar gördüğünde ağın zedelenebilirliğini ölçen bir parametredir. Sundareswaran ve Swaminathan (2010a) bir G grafının baskın bütünlük değerini $DI(G) = min\{|S| + m(G - S): S\ bir\ baskın\ küme\}$ olarak tanımlamıştır. Burada $m(G - S)$, $G - S$ grafındaki en büyük boyutlu bileşenin tepe sayısıdır.

Bazı standart grafların baskın bütünlük değeri Sundareswaran ve Swaminathan tarafından çalışılmıştır (Sundareswaran and Swaminathan, 2010a). Middle graflar ve ağaçlarda baskın bütünlük değeri de aynı kişiler tarafından incelenmiştir (Sundareswaran and Swaminathan, 2010b). Vaidya ve Kothari bazı graf operasyonlarında ve P_n, C_n in splitting graflarında baskın bütünlük değerini araştırmışlardır (Vaidya and Kothari, 2012; 2013). Vaidya ve Shah ise yol graf, çevre graf ve yıldız grafın total graflarında ve ayrıca yol grafın karesinde baskın bütünlük değerini çalışmışlardır (Vaidya and Shah, 2014a; 2014b). Baskın bütünlük değeri bulma probleminin karmaşıklığı ise Sundareswaran ve Swaminathan tarafından *"Computational Complexity of Domination Integrity in Graphs"* makalesinde ele alınmıştır (Sundareswaran and Swaminathan, 2015).

Line splitting ve central grafların baskın bütünlük değerleri ise Mahde ve Mathad tarafından incelenmiştir (Mahde and Mathad, 2016).

Bu tez çalışmasında iletişim ağlarında baskınlık kavramına dayalı bütünlük parametresi ele alınmış, daha önce bu konuda yapılan çalışmalardan bahsedilmiş ve bazı graf sınıflarının baskın bütünlük değerleri incelenerek bulunan sonuçlar genelleştirilmiştir. Bulunan bazı sonuçlar Yıldız Teknik Üniversitesi'nde düzenlenen International Conference on Mathematics and Enginering, 2017 adlı uluslararası konferansta sunulmuştur.

Tez 5 bölümden oluşmaktadır. 1.Bölümde bazı genel tanımlara, graf işlemlerine ve zedelenebilirlik parametrelerine yer verilmiştir. 2.Bölümde bütünlük ve baskınlık kavramlarından bahsedilmiş, gerekli görülen bazı tanımlar ve sonuçlar verilmiştir. 3.Bölümde baskın bütünlük değeri ile ilgili tanımlar ve genel sonuçlar verildikten sonra bazı graf işlemlerinde baskın bütünlük değeri ve baskın bütünlük değeri bulma probleminin hesaplama karmaşıklığı alt başlıklarında önceden yapılmış çalışmalara yer verilmiştir. 4.Bölümde bazı graf sınıflarının baskın bütünlük değerleri incelenmiş ve bulunan sonuçlar genelleştirilmiştir. 5.Bölümde tez çalışmasının sonuç kısmı bulunmaktadır.

1.1 Tanımlar

Bu bölümde, sonraki bölümlerde gerekli olabilecek bazı tanımlara yer verilmiştir.

Tanım 1.1.1: Bir G grafı, $V(G)$ tepe kümesi, $E(G)$ ayrıt kümesi ve her ayrıtın uç nokta olarak adlandırılan iki tepeyi (birbirinden farklı olması gerekli değil) birleştirdiği bir ilişkiden oluşan bir üçlüdür (West, 2001).

Tanım 1.1.2: Bir döngü uç noktaları birbirine eşit olan bir ayrıttır. Aynı uç nokta çiftine sahip ayrıtlar katlı ayrıtlardır.

Basit graf, döngü ve katlı ayrıtı olmayan bir graftır. Tepe kümesi ve ayrıt kümesi ile basit bir graf belirlenir ve ayrıt kümesi sıralanmamış tepe çiftleri kümesi olarak ele alınır ve uç noktaları u ve v olan bir e ayrıtı $e = uv$ (veya $e = vu$) olarak yazılır. Eğer u ve v bir ayrıtın uç noktaları ise, bu tepeler bitişiktir ya da komşulardır. "u ve v komşudur" için $u \leftrightarrow v$ gösterimi kullanılır (West, 2001).

Tanım 1.1.3: G grafının bir **alt grafı** $V(H) \subseteq V(G)$ ve $E(H) \subseteq E(G)$ olacak şekilde bir H grafıdır ve uç tepelerin H deki ayrıtlara atanması G deki ile aynıdır. $H \subseteq G$ olarak yazılır ve "G, H içerir" denir (West, 2001).

Tanım 1.1.4: Dallanmış alt graf, G grafındaki tüm tepeleri içeren alt graftır (Harary, 1972).

Tanım 1.1.5: G grafının tepelerinin herhangi bir S kümesi için, **etkilenmiş alt grafı** $\langle S \rangle$, S tepeler kümesi ile oluşturulmuş maksimal alt grafıdır. S deki iki tepe ancak ve ancak G grafında bitişik ise $\langle S \rangle$ grafında birbirine bitişiktir (Harary, 1972).

Tanım 1.1.6: G grafındaki v tepesinin derecesi, $d_G(v)$ ya da $d(v)$ olarak yazılır, v ye bağlı olan ayrıtların sayısıdır, ancak v deki her döngü iki kez sayılır. Maksimum derece $\Delta(G)$, minimum derece $\delta(G)$ ile gösterilir ve G regüler bir graf ise $\Delta(G) = \delta(G)$ dir. v tepesinin komşuluğu, $N_G(v)$ ya da $N(v)$ olarak gösterilir, v tepesine bitişik olan tepelerin kümesidir (West, 2001).

Tanım 1.1.7: Bir G grafının **bileşenleri**, grafın maksimal bağlantılı alt graflarıdır. Bir bileşen (ya da graf) hiçbir ayrıta sahip değil ise **trivial**dir; aksi takdirde nontrivialdir. **İzole tepe**, tepe derecesi 0 olan tepedir (West, 2001).

Tanım 1.1.8: G grafındaki tüm tepeler aynı dereceye sahip ise, G grafı regüler ya da k-regüler olarak adlandırılır. 3-regüler graflar kübik olarak adlandırılır (Buckley and Harary, 1990).

Tanım 1.1.9: Çevre içeren bir grafın **kuşağı (girth)** en kısa çevresinin uzunluğudur. Çevre içermeyen bir grafın kuşağı ise sonsuzdur (West, 2001).

Tanım 1..1.10: Bir ağaç, bağlantılı çevre içermeyen bir graftır (Harary, 1972).

Tanım 1.1.11: G deki iki tepe u ve v arasındaki uzaklık $d(u, v)$, eğer varsa, bunları birleştiren en kısa yolun uzunluğudur; aksi halde $d(u, v) = \infty$. En kısa $u - v$ yoluna genellikle jeodezik denir. Bağlantılı bir G grafının çapı $d(G)$, en uzun jeodezik uzunluğudur (Harary, 1972).

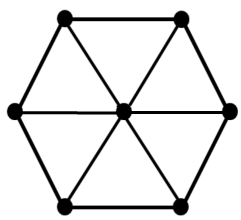
Tanım 1.1.12: Bir grafta her tepe çifti arasında bir yol var ise graf bağlantılıdır. G nin maksimal bağlantılı alt grafına bağlantılı bileşen adı verilir ya da sadece G nin bileşeni denir. Böylece, bağlantısız bir graf en az iki bileşen içerir (Harary, 1972).

Tanım 1.1.13: Bir tepe ve bir ayrıt eğer bağlı ise birbirlerini örttükleri söylenir. Bir G grafındaki tüm ayrıtları örten tepeler kümesi, G grafı için bir tepe örtüsü olarak adlandırılırken, tüm tepelerini örten ayrıtlar kümesi, bir ayrıt örtüsüdür. G grafının tüm tepelerini örten en küçük tepe sayısı, tepe örtü sayısı olarak adlandırılır ve $a_0(G)$ ya da a_0 ile gösterilir. Benzer şekilde, $a_1(G)$ ya da a_1 , G nin tüm tepelerini örten en küçük ayrıt sayısıdır ve ayrıt örtü sayısı olarak adlandırılır (Harary, 1972).

Tanım 1.1.14: G grafında herhangi bir tepeler kümesinde, tepelerden herhangi ikisi bitişik değilse bu tepeler kümesi bir bağımsız kümedir. Bu tür bağımsız kümeler içerisinde en çok tepeye sahip olan kümenin eleman sayısı, G nin tepe bağımsızlık sayısı olarak adlandırılır ve $\beta_0(G)$ ya da β_0 ile gösterilir. Benzer şekilde, G nin ayrıtlarının bir bağımsız kümesinde, ayrıtların herhangi ikisi bitişik değildir ve bu tür bağımsız kümelerden maksimum kardinalinateye sahip olan kümenin eleman sayısı, ayrıt bağımsızlık sayısı $\beta_1(G)$ ya da β_1 dir (Harary, 1972).

Tanım 1.1.15: Bir grafın renklendirilmesi, renklerin grafın tepelerine atanmasıdır, böylece herhangi iki bitişik noktanın aynı renge sahip olmaması sağlanır. Herhangi bir renkle boyanmış tepeler kümesi bağımsızdır ve bir renk sınıfı olarak adlandırılır. Bir G grafının n-boyaması, n renk kullanır; böylece $V(G)$ tepe kümesini n renk sınıfına böler. Kromatik sayı $x(G)$ n-boyamaya sahip G grafı için minimum n olarak tanımlanır. Bir G grafı $x(G) \leq n$ ise n-boyanabilirdir ve $x(G) = n$ ise n-kromatiktir (Harary, 1972).

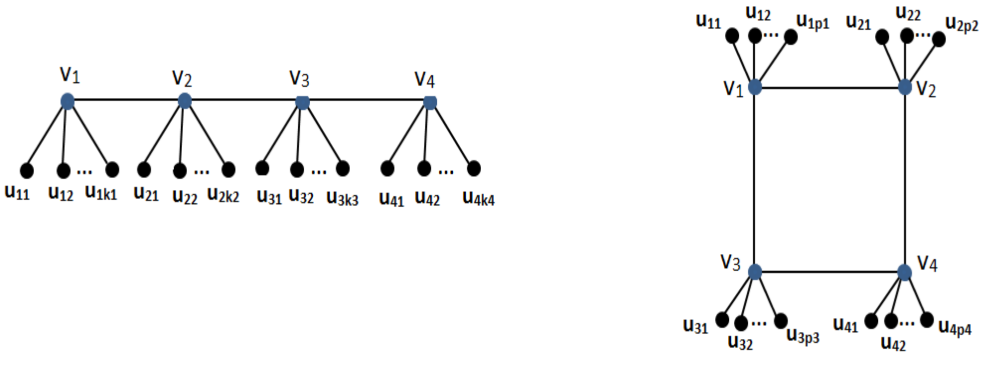
Tanım 1.1.16: $n \geq 3$ için, $K_1 + C_n$ grafı **tekerlek graf** $W_{1,n}$ olarak isimlendirilir (Buckley and Harary, 1990).



Şekil 1.1. Tekerlek Graf $W_{1,6}$

Tanım 1.1.17: $p_1, p_2, \dots, p_n$ negatif olmayan tam sayılar olsun. G grafının dikenli (thorn) grafı , $p_1, p_2, \dots, p_n$ parametreleri ile, $i = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere G grafının u_i tepesine p_i yeni tepe eklenerek oluşturulur.

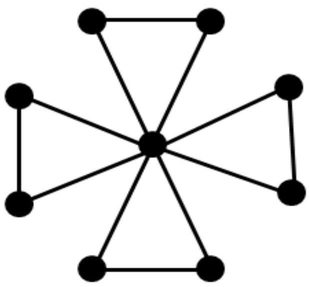
G grafının dikenli (thorn) grafı G^*, ya da ilgili parametrelerin belirtilmesi gerekiyor ise $G^*(p_1, p_2, \dots, p_n)$ ile gösterilir (Gutman, 1998).



$P_4^*(k_1,k_2,k_3,k_4)$ $C_4^*(p_1,p_2,p_3,p_4)$

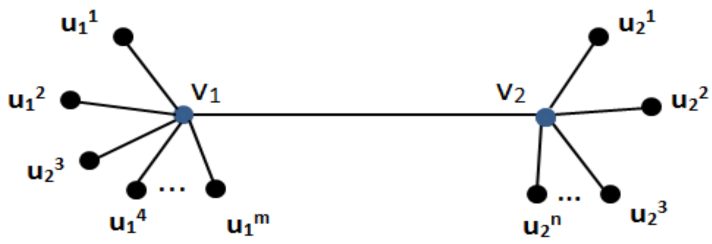
Şekil 1.2. P_4 ve C_4 graflarının dikenli grafları

Tanım 1.1.18: Friendship graf $\mathrm{F_n}$, bir ortak tepeye bağlı n tane üçgenden oluşan bir graftır (Shalini and Kumar, 2015).



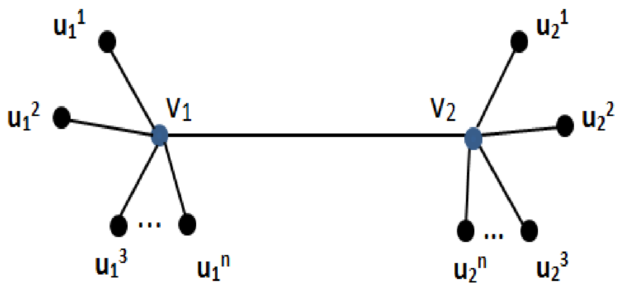
Şekil 1.3. Friendship graf F_4

Tanım 1.1.19: Double star graf $S_{m,n}$, P_2 yol grafının uç noktalarına $K_{1,m}$ ve $K_{1,n}$ eklenerek oluşturulur (Buckley and Harary, 1990).



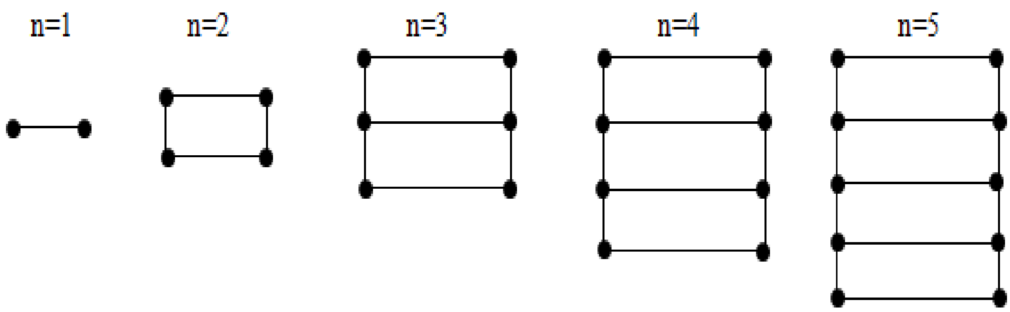
Şekil 1.4. Double star graf $S_{m,n}$

Tanım 1.1.20: Bistar $B_{n,n}$, $K_{1,n}$ grafının iki kopyasının merkez tepelerinin bir ayrıt ile birleştirilmesiyle oluşturulan bir graftır (Vaidya and Shah, 2014c).



Şekil 1.5. Bistar $B_{n,n}$

Tanım 1.1.21: n-ladder grafı, P_n yol graf olmak üzere, $P_2 \times P_n$ olarak tanımlanır (Hosoya and Harary, 1993).



Şekil 1.6. L_1, L_2, L_3, L_4 ve L_5 grafları

1.2 Graf İşlemleri

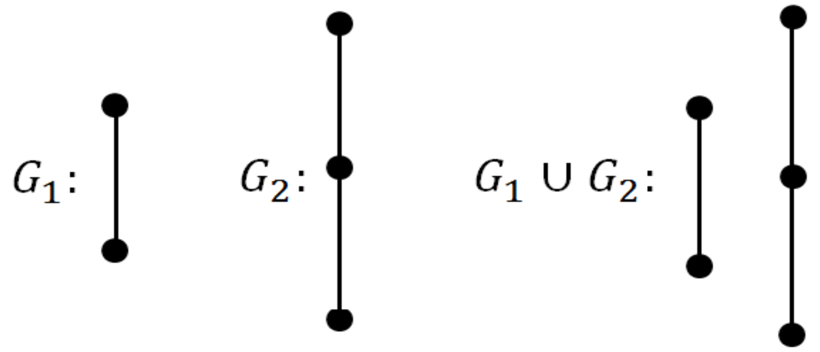
Tanım 1.2.1: G grafından bir v_i tepesinin kaldırılması, v_i dışında G nin tüm tepelerini ve v_i ye bağlı olmayan tüm ayrıtları içeren $G - v_i$ alt grafı ile sonuçlanır. Böylece $G - v_i$, v_i yi içermeyen G nin maksimal alt grafıdır (Harary, 1972).

Tanım 1.2.2: G grafından bir x_j ayrıtının kaldırılması, x_j dışında G nin tüm ayrıtlarını içeren $G - x_j$ dallanmış alt grafını verir. Böylece $G - x_j$, x_j yi içermeyen G nin maksimal alt grafıdır (Harary, 1972).

Tanım 1.2.3: Basit bir G grafının tümleyeni $\overline{G}$, ancak ve ancak $uv \notin E(G)$ ise $uv \in E(\overline{G})$ olarak tanımlanan tepe kümesi $V(G)$ olan bir basit graftır. Bir graftaki bir bağımsız küme (ya da kararlı küme) bitişik olmayan tepeler çiftinin bir kümesidir (West, 2001).

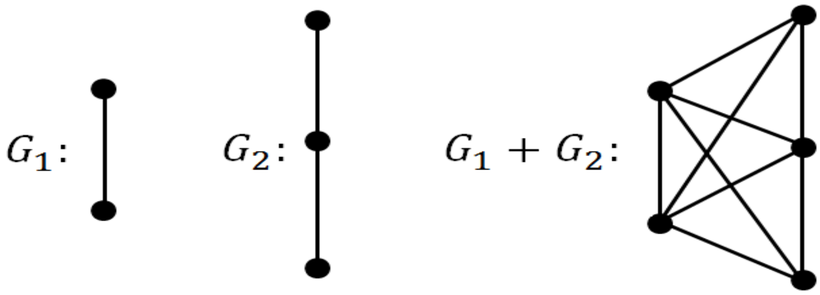
Tanım 1.2.4: Bir G grafının karesi G^2, tepe kümesi $V(G^2) = V(G)$ olmak üzere G grafında $d(u,v) \leq 2$ olduğunda u,v tepeleri G^2 grafında birleştirilerek elde edilir. $G^3, G^4, \ldots$ gibi G grafının daha yüksek kuvvetleri de benzer şekilde tanımlıdır (Buckley and Harary, 1990).

Tanım 1.2.5: G_1 ve G_2 graflarının sırasıyla ayrık tepe kümeleri V_1 ve V_2 ve ayrıt kümeleri X_1 ve X_2 olsun. İki grafın **birleşim işlemi** $G = G_1 \cup G_2$, tepe kümesi $V = V_1 \cup V_2$ ve ayrıt kümesi $X = X_1 \cup X_2$ olan bir $G = (V, X)$ grafıdır (Harary, 1972).



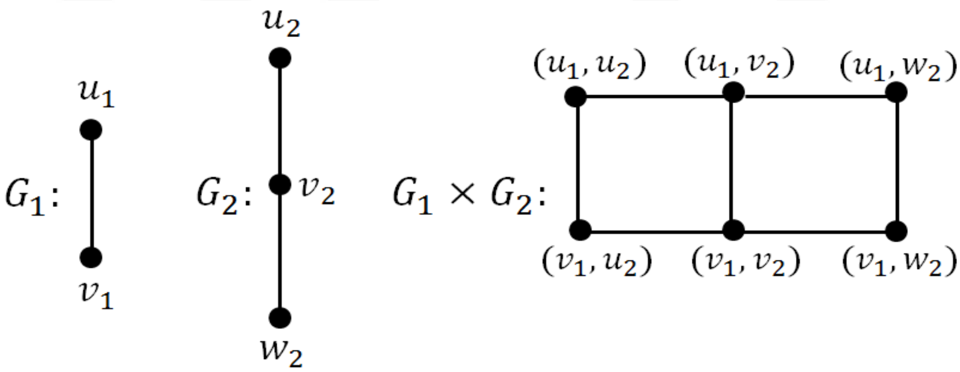
Şekil 1.7. İki grafın birleşim işlemi (Harary, 1972)

Tanım 1.2.6: $G_1 = (V_1, E_1)$ ve $G_2 = (V_2, E_2)$ iki graf olsun. İki grafın **toplama (join) işlemi** $G_1 + G_2$ ile gösterilir ve oluşan graf $G_1 \cup G_2$ ve V_1 deki tepeleri V_2 deki tepelerle birleştiren tüm ayrıtları içerir (Harary, 1972).



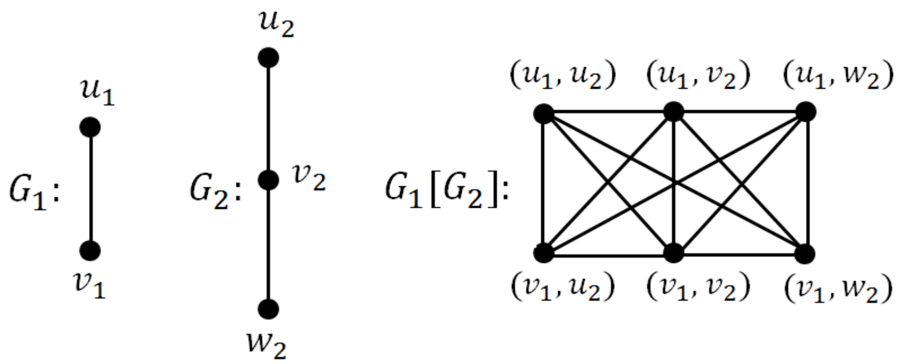
Şekil 1.8. İki grafın toplama işlemi (Harary, 1972)

Tanım 1.2.7: $G_1 = (V_1, E_1)$ ve $G_2 = (V_2, E_2)$ iki graf olsun. İki grafın **kartezyen çarpım** $G_1 \times G_2$ işlemini tanımlamak için, tepe kümesi $V = V_1 \times V_2$ den oluşmak üzere, $u = (u_1, u_2)$ ve $v = (v_1, v_2)$ tepelerini ele alalım. u ve v bitişiktir ancak ve ancak $u_1 = v_1$dir ve u_2 ile v_2 bitişiktir ya da $u_2 = v_2$dir ve u_1 ile $v_1$bitişiktir (Harary, 1972).



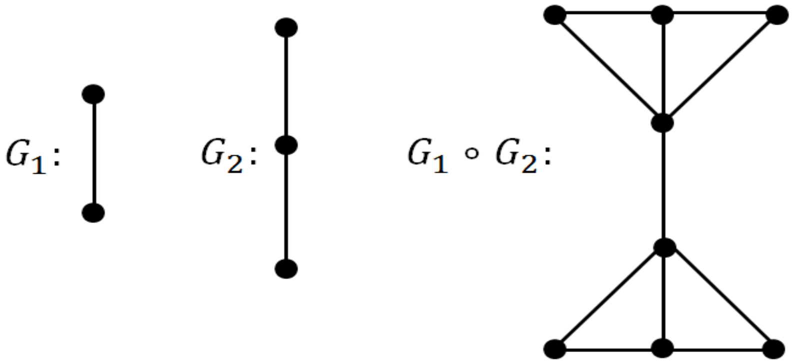
Şekil 1.9. İki grafın kartezyen çarpım işlemi (Harary, 1972)

Tanım 1.2.8: $G_1 = (V_1, E_1)$ ve $G_2 = (V_2, E_2)$ iki graf olsun. İki grafın **bileşke işlemi (composition)** $G = G_1[G_2]$ için, tepe kümesi $V = V_1 \times V_2$ olmak üzere $u = (u_1, u_2)$ ve $v = (v_1, v_2)$ tepeleri bitişiktir ancak ve ancak u_1 ile v_1 bitişiktir ya da $u_1 = v_1$ dir ve u_2 ile v_2 bitişiktir (Harary, 1972).



Şekil 1.10. İki grafın bileşke işlemi (Harary, 1972)

Tanım 1.2.9: G_1 ve G_2 iki graf olsun. **Corona (taçlama) işlemi** $G_1 \circ G_2$, p_1 tepeli G_1 grafının bir kopyası ve G_2 grafının p_1 tane kopyası olmak üzere G_1 grafındaki i.tepe ile G_2 grafının i.kopyasındaki her tepe birleştirilerek elde edilen graftır (Harary, 1972).



Şekil 1.11. İki grafın corona işlemi (Harary, 1972)

1.3 Zedelenebilirlik Parametreleri

Zedelenebilirlik, iletişim ağında meydana gelebilecek hasarlara karşı ağın direncini gösterir. İletişim ağları, merkezleri tepeler, bağlantı hatları ise ayrıtlar ile temsil edilmek üzere graflar ile modellenebildiğinden ağların zedelenebilirlik ölçümü için graflar üzerinde zedelenebilirlik parametreleri tanımlanmıştır. Bu tezde ele alınan graflar, basit, birleştirilmiş ve yönsüz graflardır.

Bir grafın zedelenebilirliğinin analizinde ilk akla gelen soru "Grafın birleştirilmemiş bir graf haline gelmesi için en az kaç tepe zarar görmelidir?

sorusudur. Bu soruya cevap veren zedelenebilirlik ölçümü ise "bağlantılılık sayısı (connectivity)" parametresidir.

Tanım 1.3.1: Bir G grafının "bağlantılılık sayısı $\kappa = \kappa(G)$ (connectivity)" grafın birleştirilmemiş ya da tek bir izole tepeden oluşan bir graf olması için graftan çıkarılması gereken minimum tepe sayısıdır (Harary, 1972).

Tanım 1.3.2: Bir G grafının "ayrıt bağlantılılık sayısı $\lambda = \lambda(G)$ (line connectivity)" grafın birleştirilmemiş ya da tek bir izole tepeden oluşan bir graf olması için graftan çıkarılması gereken minimum ayrıt sayısıdır (Harary, 1972).

Bağlantılılık ve ayrıt bağlantılılık sayısı, geriye kalan grafın yapısının nasıl olduğu hakkında bilgi sahibi olmamızı sağlamaz. Bir grafın zedelenebilirliğinin analizinde geriye kalan grafın kaç bileşene ayrıldığı, bu bileşenlerden en büyüğünün eleman sayısı gibi sorulara da cevap bulmaya çalışılırken, yeni zedelenebilirlik ölçümleri tanımlanmıştır. Bütünlük (integrity), dayanıklılık (tenacity), sağlamlık (toughness), scattering sayısı (scattering number) bu ölçümlerden bazılarıdır. Aşağıda bu ölçümlerden bazılarının tanımları verilmiştir.

Tanım 1.3.4: Bir G grafının dayanıklılık değeri (tenacity) $T(G)$; $\omega(G-S)$, $G-S$ grafının bileşen sayısı ve $m(G-S)$, $G-S$ grafının en büyük boyutlu bileşeninin eleman sayısı olmak üzere, $T(G) = \min_{S\subset V(G)}\left\{\frac{|S|+m(G-S)}{\omega(G-S)} : \omega(G-S) > 1\right\}$ şeklinde tanımlıdır (Choudum and Priya, 1999; Aytaç'dan, 2009).

Tanım 1.3.5: Bir G grafı için sağlamlık değeri (toughness) $t(G)$; $\omega(G-S)$, $G-S$ grafının bileşen sayısı olmak üzere, $t(G) = \min_{S\subseteq V(G)}\left\{\frac{|S|}{\omega(G-S)} : \omega(G-S) > 1\right\}$ şeklinde tanımlıdır (Chvatal, 1973; Aytaç'dan, 2009).

Tanım 1.3.6: Bir G grafının scattering sayısı (scattering number) $sc(G) = max\{\omega(G-S) - |S| : S \subset V(G),\ \omega(G-S) \geq 2\}$ şeklinde tanımlıdır. Burada; $\omega(G-S)$, $G-S$ grafının bileşen sayısıdır (Jung, 1978; Kırlangıç'dan, 2002).

2. BÜTÜNLÜK DEĞERİ VE BASKINLIK

Bu bölümde öncelikle bütünlük değeri ve genel sonuçlarından bahsedilmiştir. Bütünlük değerinin diğer parametrelerle ilişkisine ve ayrıt bütünlük, ortalama bütünlük (mean integrity), pure edge integrity, zayıf bütünlük (weak integrity) gibi çeşitli varyasyonlarına da değinilmiştir. Bölümün ikinci kısmında ise baskınlık kavramı ve genel sonuçlarına yer verilmiştir.

2.1 Bütünlük Değeri

Bir iletişim ağının zedelenebilirliğinin analizinde ortaya çıkan sorulardan iki tanesi şunlardır:

- İletişim ağında çalışmayan elemanların sayısı nedir?
- Kendi arasında haberleşmeyi sürdüren en büyük alt ağın eleman sayısı nedir?

Bütünlük (integrity), bu soruların yanıtlarını bulmaya çalışan bilinen zedelenebilirlik ölçümlerinden biridir.

Bir iletişim ağında çalışmayan eleman sayısı az sayıdayken ağda haberleşmeyi kendi arasında sürdürebilen az sayıda eleman olması, ağın çok fazla hasar gördüğünü ve direncinin az olduğunu gösterir. Bu nedenle, iki tarafın yer aldığı bir rekabet ortamında taraflar, rakiplerinin iletişim ağı için yukarıdaki iki sorunun cevabının aynı anda küçük olmasını isterler (Bagga et al., 1992).

Bir grafın tepe bütünlük değeri Barefoot, Entringer ve Swart tarafından aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

Tanım 2.1.1: Bir G grafının bütünlük değeri (integrity) $I(G)$ ile gösterilir ve $I(G) = min\{|S| + m(G - S): S \subset V(G)\}$ olarak tanımlanır. Burada $m(G - S)$, $G - S$ grafındaki en büyük boyutlu bileşenin tepe sayısıdır (Barefoot et al., 1987; Bagga et al. ‘den 1992).

Tanım 2.1.2: Herhangi bir G grafı için $I(G) = |S| + m(G - S)$ değerini sağlayan $S \subset V(G)$ kümesine G grafının I-kümesi denir (Barefoot et al., 1987; Goddard and Swart’dan, 1990).

Bütünlük parametresi ve I-kümesi ile ilgili genel sonuçlar ve bütünlük parametresinin diğer parametrelerle ilişkisini Goddard ve Swart incelemişlerdir (Goddard and Swart, 1990). Bagga ve arkadaşları ise bütünlük parametresi ile ilgili çeşitli sonuçları içeren "*A survey of integrity*" çalışmasını yayınlamıştır (Bagga et al., 1992). Dundar ve Aytaç, bazı grafların total graflarının bütünlük değerini incelemişlerdir (Dundar and Aytaç, 2004). Mamut ve Vumar bazı grafların middle graflarının bütünlük değerini belirlemişlerdir (Mamut and Vumar, 2007).

2.1.1 Bütünlük değeri ile ilgili genel sonuçlar

Bu bölümde bütünlük değeri ile ilgili genel sonuçlar, çeşitli graf sınıflarında ve graf işlemlerinde bütünlük değeri ile ilgili yapılan çalışmalara yer verilmiştir.

Teorem 2.1.1: (Goddard and Swart, 1990) G, n tepeli bir graf olsun.

a) $I(G) = n$ dir ancak ve ancak $G \cong K_n$ dir.

b) $I(G) = 1$ dir ancak ve ancak $G \cong \overline{K}_n$ dir.

Lemma 2.1.1: (Goddard and Swart, 1990) G ve H herhangi iki graf olmak üzere,

a) $G \subseteq H$ ise $I(G) \leq I(H)$ dir.

b) G grafı trivial bir graf değil ise her $v \in V(G)$ için, $I(G - v) \geq I(G) - 1$ dir.

c) Her $e \in E(G)$ için, $I(G - e) \geq I(G) - 1$ dir

Aşağıdaki teoremde çeşitli graf sınıflarının bütünlük değerleri verilmiştir. Bu sonuçlar Barefoot, Entringer ve Swart (1987) tarafından bulunmuştur (Bagga et al., 1992).

Teorem 2.1.2: (Bagga et al.,1992) Bazı graf sınıflarının bütünlük değerleri aşağıda verilmiştir.

a) $I(K_p) = p$;

b) $I(\overline{K_p}) = 1$;

c) $I(K_{1,n}) = 2$;

d) $I(P_p) = \lceil 2\sqrt{p+1} \rceil - 2$;

e) $I(C_p) = \lceil 2\sqrt{p} \rceil - 1$;

f) $r \leq \sqrt{p+1} - \frac{5}{4}$ ise kuyruklu yıldız graf (comet) $C_{p-r,r}$ nin bütünlük değeri $I(P_p)$ dir, aksi halde; $I(C_{p-r,r}) = \lceil 2\sqrt{p-r} \rceil - 1$ dir.

g) $I(K_{m,n}) = 1 + \min\{m, n\}$;

h) p tepeli ve en büyük boyutlu bileşenindeki tepe sayısı r olan herhangi bir çok parçalı tam graf için bütünlük değeri $p - r + 1$ dir.

Teorem 2.1.3: (Bagga et al., 1992) G, p tepeli bir graf olsun.

a) $I(G) = 1$ dir ancak ve ancak G boş bir graftır.

b) $I(G) = 2$ dir ancak ve ancak G grafının bütün nontrivial bileşenleri ayrıtlardır ya da tek nontrivial bileşeni bir star graftır.

c) $I(G) = p - 1$ dir ancak ve ancak G grafının kuşağı en az 5 dir ve G grafı tam graf değildir.

d) $I(G) = p$ dir ancak ve ancak G tam graftır.

Bu bölümün kalan kısmında çeşitli graf işlemlerinde bütünlük değeri ile ilgili teoremlere ve sonuçlara yer verilmiştir.

Teorem 2.1.4: (Bagga et al., 1992) Herhangi bir G grafı için, p graftaki tepe sayısı olmak üzere,

a) $I(G) + I(\overline{G}) \geq p + 1$

b) $I(G).I(\overline{G}) \geq p$.

Teorem 2.1.5: (Bagga et al., 1992) $1 \leq k \leq p/2$ için, $s = \left\lceil \sqrt{p/k + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right\rceil$ olsun. $I(C_p^k) = k(s-1) + \lceil p/s \rceil$ dir.

Teorem 2.1.6: $G = \bigcup_{i=1}^{n} G_i$ ise, $\max_i I(G_i) \leq I(G) \leq \sum_{i=1}^{n} I(G_i) - n + 1$ dir (Bagga et al., 1992).

Teorem 2.1.7: Herhangi iki G ve H grafı için, $I(G+H) = min\{I(G) + V(H), I(H) + V(G)\}$ dir (Bagga et al., 1992).

Corollary 2.1.1: Herhangi bir G grafı için, $I(G + K_r) = I(G) + r$ dir (Bagga et al., 1992).

Teorem 2.1.8: (Bagga et al., 1992) Herhangi iki G ve H grafı için,

$I(G[H]) = min\{I(G).|V(H)|, \alpha_0(G).|V(H)| + I(\beta_0(G)H)\}$ dir.

Corollary 2.1.2: (Bagga et al., 1992) Herhangi bir G grafı için,

a) $I(G[K_n]) = nI(G)$

b) $I(K_n[G]) = n - 1\ |V(G)| + I(G)$ dir.

2.1.2 Bütünlük değeri ve diğer parametreler arasındaki ilişkiler

Bazı parametreler bir grafın bütünlük değerini sınırlar. Bu bölümde aşağıda listelenen parametreler ile bütünlük değeri arasındaki ilişki incelemesi "*A survey of integrity*" makalesinden (Bagga et al.,1992) alınmıştır.

- α_0, tepe örtü sayısı
- δ, minimum tepe derecesi
- χ, kromatik sayı
- κ, tepe bağlantılılık sayısı
- β_0, tepe bağımsızlık sayısı
- τ, sağlamlık değeri (tougness)

Teorem 2.1.9: (Bagga et al., 1992) Herhangi bir G grafı için,

a) $I(G) \leq a_0(G) + 1$

b) $I(G) \geq \delta(G) + 1$

c) G grafının tepe dereceleri $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_p$ olmak üzere $I(G) \geq \min_t max\{d_t, t-1\}$ dir.

d) $I(G) \geq \chi(G)$

e) $I(G) \geq (p - \kappa(G))/\beta_0(G) + \kappa(G)$

f) G tam graf değil ise, $I(G) \geq 2\sqrt{tp} - t$ dir.

Teorem 2.1.10: (Bagga et al., 1992) Herhangi bir G grafı için,

a) $I(G) = \kappa(G) + 1$ dir ancak ve ancak $\kappa(G) = \alpha_0(G)$ dir.

b) $I(G) = \alpha_0(G) + 1$ dir ancak ve ancak G grafı etkilenmiş alt graf olarak $2K_2$ içermez.

c) $I(G) = \delta(G) + 1$ dir ancak ve ancak $G \cong rK_n$ dir ya da $\delta(F) \geq |G| - (2r-1)n - 1$ koşulunu sağlayan bir F grafı için $G \cong rK_n + F$ dir.

2.1.3 Bütünlük değerinin varyasyonları

Bütünlük değerinin bir çok farklı varyasyonu tanımlanmıştır. Bu bölümde bütünlük değerinin bu varyasyonlarından bazılarının tanımlarına yer verilmiştir.

Bütünlük değerinin en önemli varyasyonlarından biri "ayrıt bütünlük değeri (edge integrity)" dir. Bu zedelenebilirlik ölçümünde grafta zarar görmüş olan elemanlar tepeler değil, ayrıtlardır. Bir G grafının ayrıt bütünlük değeri aşağıdaki gibi tanımlanmıştır (Barefoot et al.,1987; Bagga et al.'den, 1992):

$$I'(G) = \min_{S \subseteq E(G)} \{|S| + m(G - S)\}$$

Ayrıt bütünlük değeri, Barefoot, Entringer ve Swart (1987) tarafından tanımlanmış ve çeşitli özellikleri belirlenmiştir (Bagga et al., 1992).

Bütünlük değerinin bir diğer varyasyonu "ortalama bütünlük değeri (mean integrity)" dir. Bu parametrede maksimum boyutlu bileşenin tepe sayısı yerine

$(m(G-S))$, bir bileşendeki ortalama tepe sayısı kullanılır. v tepesini içeren bileşenin tepe sayısı $p_v(G)$ ile gösterilsin. Ortalama bileşen sayısı (average component order) aşağıdaki gibi tanımlanır (Bagga et al.,1992) :

$$\overline{m}(G) = \frac{1}{p} \sum_{v \in V(G)} p_v(G)$$

(maksimum boyutlu bileşenin tepe sayısı $m(G) = \max_{v \in V(G)} p_v\,(G)$) Ortalama bütünlük değeri aşağıdaki gibi tanımlanmıştır (Chartrand et al.,1989; Bagga et al.'den, 1992):

$$J(G) = \min_{X \subset V(G)} \{|X| + \overline{m}(G-X)\}$$

Bütünlük değerinin varyasyonlarından biri de "pure edge integrity"dir. Bu zedenelenebilirlik ölçümünde grafta zarar gören elemanlar ayrıtlardır ve ayrıt bütünlük değeri gibi grafta geriye kalan en büyük boyutlu bileşenin tepe sayısı değil ayrıt sayısı kullanılır. Bir G grafının pure edge integrity değeri aşağıdaki gibi tanımlanmıştır (Bagga and Deogun, 1992; Kırlangıç'dan, 2003a):

$$I_p(G) = \min_{S \subseteq E(G)} \{|S| + m_e(G-S)\}$$

Burada $m_e(G-S)$, $G-S$ grafının en büyük boyutlu bileşenin ayrıt sayısıdır.

Bütünlük değerinin bir diğer varyasyonu "zayıf bütünlük (weak integrity)"dür. Bu ölçümde grafta zarar gören elemanlar tepelerdir ve grafta geriye kalan en büyük boyutlu bileşenin ayrıt sayısı kullanılır. Bir G grafının zayıf bütünlük değeri aşağıdaki gibi tanımlanmıştır (Kırlangıç, 2003b):

$$I_w(G) = \min_{S \subset V(G)} \{|S| + m_e(G-S)\}$$

Ayrıca Kırlangıç tarafından bu ölçümün çeşitli özellikleri belirlenmiş ve bazı graf sınıflarının zayıf bütünlük değerinin incelemesi yapılmıştır (Kırlangıç, 2003a; 2003b).

2.2 Baskınlık Kavramı

Baskınlık kavramı üzerine bir çok çalışma yapılmıştır. Dağıtım ve hiyerarşi problem modelleri gibi gerçek hayat uygulamalarında kullanılması, tanımlanabilen çok çeşitli baskınlık parametresi olması buna neden olarak gösterilebilir (Haynes, Hedetniemi and Slater, 1998a). Bu bölümde baskın küme, baskınlık sayısı, bazı baskınlık türlerinin tanımlarına ve genel sonuçlara yer verilmiştir.

Tanım 2.2.1: Bir v tepesinin açık komşuluğu (open neigborhood), v tepesine bitişik olan tepelerin oluşturduğu kümedir ve $N(v)$ olarak gösterilir (Buckley and Harary, 1990).

Tanım 2.2.2: G grafının herhangi bir $v \in V(G)$ tepesi için v tepesinin kapalı komşuluğu $\{v \cup N(v)\}$ olarak tanımlıdır ve $N[v]$ ile gösterilir (Buckley and Harary, 1990).

Tanım 2.2.3: $G = (V(G), E(G))$ grafında, S bir tepe kümesi olmak üzere, $V(G)/S$ deki her tepe S kümesindeki en az bir tepeye bitişik ise, S kümesi G grafının bir **baskın kümesi (dominating set)** denir. **Baskınlık sayısı (domination number)**, G grafının en az elemana sahip olan baskın kümesinin eleman sayısıdır ve $\gamma(G)$ ile gösterilir. Eleman sayısı $\gamma(G)$ olan G grafının bir baskın kümesi, $\boldsymbol{\gamma(G)}$**-kümesi** olarak isimlendirilir (Haynes, Hedetniemi and Slater, 1998a).

Tanım 2.2.4: $G = (V(G), E(G))$ grafında, S bir baskın tepe kümesi olmak üzere, G grafının S ile etkilenmiş alt grafı, birleştirilmiş bir graf ise, S kümesi G grafının **birleştirilmiş baskın kümesi (connected dominating set)** denir. **Birleştirilmiş baskınlık sayısı**, G grafının en az elemana sahip olan birleştirilmiş baskın kümesinin eleman sayısıdır ve $\gamma_c(G)$ ile gösterilir (Haynes, Hedetniemi and Slater, 1998a; 1998b).

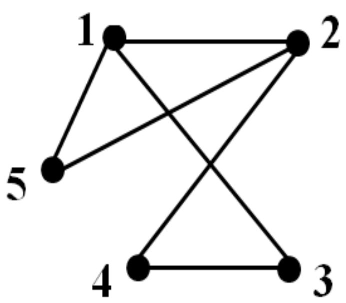
Tanım 2.2.5: $G = (V(G), E(G))$ grafında, S bir baskın tepe kümesi olmak üzere, G grafının S ile etkilenmiş alt grafı, birleştirilmemiş bir graf ise, S kümesi G grafının **bağımsız baskın kümesi (independent dominating set)** denir. **Bağımsız baskınlık sayısı**, G grafının en az elemana sahip olan bağımsız baskın kümesinin eleman sayısıdır ve $\gamma_i(G)$ ile gösterilir (Haynes, Hedetniemi and Slater, 1998a).

Tanım 2.2.6: $G=(V(G),E(G))$ grafında, S bir tepe kümesi olmak üzere, $V(G)$ deki her tepe S kümesindeki en az bir tepeye bitişik ise, S kümesi G grafının bir **total baskın kümesi (total dominating set)** denir. **Total baskınlık sayısı**, G grafının en az elemana sahip olan total baskın kümesinin eleman sayısıdır ve $\gamma_t(G)$ ile gösterilir (Haynes, Hedetniemi and Slater, 1998a).

Tanım 2.2.7: $G=(V(G),E(G))$ grafında, S bir tepe kümesi olmak üzere, S hem G grafının hem de $\bar{G}$ grafının baskın kümesi ise, S kümesi G grafının **global baskın kümesi (global dominating set)** denir. **Global baskınlık sayısı**, G grafının en az elemana sahip olan global baskın kümesinin eleman sayısıdır ve $\gamma_g(G)$ ile gösterilir (Haynes, Hedetniemi and Slater, 1998a).

Baskınlık kavramının tepeler üzerinde tanımlanan çeşitli türleri olduğu gibi ayrıt üzerinde de bağlantılı ayrıt baskınlık (connected edge domination), bağımsız ayrıt baskınlık (independent edge domination), mükemmel ayrıt baskınlık (perfect edge domination) gibi baskınlık tanımlamaları mevcuttur. Ayrıt baskınlık kavramı Mitchell ve Hedetniemi (1977) tarafından tanımlanmıştır (Arumugam and Velammal, 1998).

Tanım 2.2.8: $G=(V(G),E(G))$ grafında, X bir ayrıt kümesi olmak üzere, $E(G)/X$ deki her ayrıt X kümesindeki en az bir ayrıta bitişik ise, X kümesi G grafının bir **ayrıt baskın kümesi (edge dominating set)** denir. **Ayrıt baskınlık sayısı (edge domination number)**, G grafının en az elemana sahip olan ayrıt baskın kümesinin eleman sayısıdır ve $\gamma'(G)$ ile gösterilir (Mitchell and Hedetniemi, 1977; Arumugam and Velammal'dan, 1998).



Şekil 2.1 : G grafı

Şekil 2.1 deki G grafı için, $S_1=\{1,2\}\subset V(G)$ kümesi minimal bir baskın küme olduğundan grafın baskınlık sayısı, $\gamma(G)=2$ dir. 1 ve 2 tepeleri arasında ayrıt olduğu için bu küme aynı zamanda birleştirilmiş baskın kümedir ve grafın birleştirilmiş baskınlık sayısı, $\gamma_c(G) = 2$ dir. $S_2 = \{2,3\} \subset V(G)$ kümesi, 2 ve 3 tepeleri arasında ayrıt olmadığından bağımsız baskın kümedir ve grafın bağımsız baskınlık sayısı $\gamma_i(G) = 2$ dir. $S_3 = \{1,3\} \subset V(G)$ kümesi, graftaki tüm tepeler S_3 kümesindeki en az bir tepeye bitişik olduğu için bu küme total baskın kümedir ve grafın total baskınlık sayısı $\gamma_t(G) = 2$ dir. $S_3 = \{1,3\}$ kümesi, hem G grafının hem de $\bar{G}$ grafının baskın kümesi olduğu için bu küme aynı zamanda global baskın kümedir ve grafın global baskınlık sayısı $\gamma_g(G) = 2$ dir. $X = \{(13),(25)\} \subset E(G)$ kümesi, minimal bir ayrıt baskın küme olduğundan, grafın ayrıt baskınlık sayısı $\gamma'(G) = 2$ dir.

2.2.1 Baskınlık sayısının temel graflar üzerindeki sonuçları ve genel sonuçlar

Bu bölümde baskınlık sayısı ile ilgili teoremlere ve temel grafların baskınlık sayısı ile ilgili sonuçlara yer verilmiştir.

Teorem 2.2.1: (Haynes, Hedetniemi and Slater, 1998a) Bir G grafı izole tepe içermiyorsa, $\gamma(G) \leq n/2$ dir.

Teorem 2.2.2: (Haynes, Hedetniemi and Slater, 1998a) n bir çift sayı olmak üzere, G hiçbir izole tepe içermeyen, n tepeli bir graf olsun. $\gamma(G) = n/2$ dir ancak ve ancak G grafının bileşenleri C_4 çevre graf ya da herhangi bir bağlantılı H grafı için $H \circ K_1$ dir.

Teorem 2.2.3: (Haynes, Hedetniemi and Slater, 1998a) Herhangi bir G grafı için, $\left\lceil \frac{n}{1+\Delta(G)} \right\rceil \leq \gamma(G) \leq n - \Delta(G)$ dir.

Aşağıda bazı temel graf sınıflarının baskınlık sayısı ile ilgili sonuçlar verilmiştir.

Sonuçlar 2.2.1: (Haynes, Hedetniemi and Slater, 1998a)

1. $n \geq 1$ için $\gamma(K_n) = 1$.

2. $\gamma(C_n) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$.

3. $\gamma(P_n) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$.

4. $\gamma(K_{m,n}) = \begin{cases} 2, & m,n \geq 2 \\ 1, & \text{aksi halde} \end{cases}$

3. BASKIN BÜTÜNLÜK DEĞERİ

Baskın bütünlük, baskınlık ve bütünlük olarak adlandırılan iki önemli parametrenin birleşiminden oluşur. Bu bölümün ilk kısmında baskın bütünlük tanımı, genel sonuçları ve temel graflar üzerindeki sonuçlarına yer verilmiştir. İkinci kısmında bazı graf işlemlerinde baskın bütünlük değeri ile ilgili teoremler verilmiştir. Üçüncü kısmında ise baskın bütünlük değeri bulma probleminin hesaplama karmaşıklığından bahsedilmiştir.

3.1 Tanımlar ve Genel Sonuçlar

Baskın bütünlük, bir iletişim ağında baskın kümeler zarar gördüğünde ağın zedelenebilirliğini ölçen bir parametredir. Sundareswaran ve Swaminathan (2010a) yeni bir zedenebilirlik ölçümü olarak baskın bütünlük değerini aşağıdaki gibi tanımlamıştır:

Tanım 3.1.1: Bir G grafının baskın bütünlük değeri $DI(G)$ ile gösterilir ve $DI(G) = min\{|X| + m(G - X) : X\ bir\ baskın\ küme\}$ olarak tanımlanır. Burada $m(G - X)$, $G - X$ grafındaki en büyük bileşenin tepe sayısıdır (Sundareswaran, 2010).

Tanım 3.1.2: Herhangi bir G grafı için $DI(G) = min\{|S| + m(G - S) : S\ bir\ baskın\ küme\}$ değerini sağlayan S kümesine grafın DI-kümesi denir (Sundareswaran, 2010).

Sonuçlar 3.1.1: (Sundareswaran, 2010)

1. $1 \leq DI(G) \leq n$
2. $DI(G) = 1$ ise ancak ve ancak $G = K_1$ dir ve dolayısıyla eğer $G \neq K_1$ ise $2 \leq DI(G) \leq n$ dir.
3. $I(G) \leq DI(G)$.
$I(G)$ ve $DI(G)$ arasındaki fark keyfi olarak büyük olabilir. Yani herhangi bir k pozitif tam sayısı için $DI(G) - I(G) = k$ olacak şekilde bir bağlantılı G grafı vardır.
4. Herhangi bir G grafı için, $I(G) \geq \chi(G)$ olduğu için $DI(G) \geq \chi(G)$ dir.

Önerme 3.1.1: (Sundareswaran, 2010) G, n tepeli bağlantılı bir graf olsun. $DI(G) = n$ ise ancak ve ancak $G = K_n$ dir.

İspat: $G = K_n$ olsun. Sonuç doğrudur. Tersine, $DI(G) = n$ olsun. G nin bir tam graf olmadığını kabul edelim. u ve v, G grafında bitişik olmayan tepeler olsun. G bağlantılı bir graf olduğu için, $V(G) - \{u, v\}$, G nin bir baskın kümesidir ve $m(\{u, v\}) = 1$ dir.

Bu nedenle, $DI(G) \leq |V(G) - \{u, v\}| + 1 = n - 2 + 1 = n - 1$, bir çelişkidir. Bundan dolayı, G bir tam graftır.

Baskın bütünlük değerinin temel graflar üzerindeki sonuçları aşağıda verilmiştir.

Önerme 3.1.2: (Sundareswaran, 2010)

1. $DI\left(K_{(a_1, a_2, \ldots, a_k)}\right) = p - r + 1$, burada $p = \sum_i a_i$ ve $r = \max a_i$ dir.

2. $DI\left(K_{(a,b)}\right) = \min\{a, b\} + 1$.

3. $DI\left(K_{(1,n)}\right) = 2$

4. $DI(C_n) = \begin{cases} 3; & n = 3,4 \\ \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil + 2; & n \geq 5 \end{cases}$

5. $DI(P_n) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1; & n = 2,3,4,5,6,7 \\ \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil + 2; & n \geq 8 \end{cases}$

3.2 Bazı Graf İşlemlerinde Baskın Bütünlük Değerleri

Bu bölümde Sundareswaran ve Swaminathan (2010) tarafından çalışılmış olan bazı graf işlemlerinde baskın bütünlük değeri ile ilgili sonuçlara ve bazılarının ispatlarına yer verilmiştir.

Önerme 3.2.1: Herhangi iki G ve H grafı için, $DI(G + H) = I(G + H)$ dır (Sundareswaran, 2010).

İspat: *Teorem 2.1.7*'den $I(G + H) = min\{I(G) + |V(H)|, I(H) + |V(G)|\}$ olduğu bilinmektedir. $S = V(H)$ ve T, G grafının I-kümesi olsun. Buradan $S \cup T$, $G + H$ grafının bir baskın kümesidir.

$$DI(G + H) \leq |S \cup T| + m\big((G + H) - (S \cup T)\big)$$

$$= |V(H)| + |T| + m(G - T) = |V(H)| + I(G)$$

Benzer şekilde, $DI(G+H) \leq |V(G)| + I(H)$ dır. Bu nedenle,

$DI(G+H) \leq min\{|V(G)| + I(H), |V(H)| + I(G)\} = I(G+H) \leq DI(G + H)$ dır. Buradan, $DI(G+H) = I(G+H)$ dır.

Önerme 3.2.2: (Sundareswaran, 2010) Herhangi iki G ve H grafı için, $DI(G[H]) \leq min\{DI(G).|V(H)|, \alpha_0(G).|V(H)| + I(\beta_0(G)H)\}$ dır.

İspat: S, G grafının bir DI-kümesi olsun. O halde, $DI(G) = |S| + m(G-S)$ dir. $V(G) = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ ve $V(H) = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ olsun. $S = \{u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{ir}\}$ olsun. $S \times H$ kümesinin $G[H]$ grafının bir baskın kümesi olduğu açıktır. $m\big(G[H] - (S \times H)\big) = m(G-S).|V(H)|$ dır.

Bundan dolayı, $DI(G[H]) \leq |S \times H| + m\big(G[H] - (S \times H)\big)$

$$= |S|.|V(H)| + m(G-S).|V(H)|$$

$$= \big(|S| + m(G-S)\big).|V(H)| = DI(G[H]) \text{ dır.}$$

S, G grafının bir α_0- kümesi olsun. O zaman, $S \times H$ kümesi $G[H]$ grafının bir baskın kümesidir. $(G[H] - (S \times H))$, H grafının $\beta_0(G)$ tane kopyasının ayrık birleşimidir(disjoint union). $m\big(G[H] - (S \times H)\big) = m(H)$ dır. Fakat $I(\beta_0(G)H) \leq m(H)$ dır. $T = \{v_{j1}, v_{j2}, \dots, v_{j3}\}$, H grafının bir I-kümesi olsun. $S_1 = V(G) - S$ olsun. O halde, $S_1 \times T_1$ kümesi $\beta_0(G)H$ grafının bir I-kümesidir ve $m\big((\beta_0(G)H) - (S_1 \times T_1)\big) \leq m(H)$ dir. $(S \times H) \cup (S_1 \times T_1)$ kümesi $G[H]$ grafının bir baskın kümesidir ve $|(S \times H) \cup (S_1 \times T_1)| + m(G[H] - (S \times H) \cup (S_1 \times T_1)) \leq |S \times H| + m(G[H] - (S \times H))$ dir.

Bu nedenle, $DI(G[H]) \leq |S \times H| + |S_1 \times T_1| = \alpha_0(G).|V(H)| + I(\beta_0(G)H)$ dir. $DI(G[H]) \leq min\{DI(G).|V(H)|, \alpha_0(G).|V(H)| + I(\beta_0(G)H)\}$ dir.

Teorem 3.2.1: $1 \leq m \leq n$ ise, $DI\big((K_m \times K_n) - S\big) = mn + n + \left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil$ dir (Sundareswaran, 2010).

Tanım 3.2.1: $V(C_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ olsun. n-çevre grafın k.kuvveti $C_n^k = C_n + \{v_i v_j : 1 \leq |i-j| \leq k\}$ şeklinde tanımlanır (Sundareswaran,2010).

Teorem 3.2.2: (Sundareswaran, 2010) $1 \leq k \leq \frac{n}{2}$ için, $q = \left\lfloor \frac{n}{3k} \right\rfloor$ olmak üzere,

$$DI(C_n^k) = \begin{cases} 2k + \frac{n}{3} & n \equiv 0(mod\ 3k) \\ \left(\left\lceil \frac{n}{\left\lceil \frac{n}{3q+1} \right\rceil} \right\rceil - 1 \right) k + \left\lceil \frac{n}{q+1} \right\rceil & aksi\ halde \end{cases}$$ dır.

3.3 Baskın Bütünlük Değerini Bulma Probleminin Hesaplama Karmaşıklığı

Polinom zamanlı[1] bir algoritma ile çözülebilen tüm problemler P (deterministik polinomsal) sınıfında yer alır. NP (nondeterministik polinomsal) sınıf ise polinom zamanda doğrulama kavramı ile açıklanabilir. Bir doğrulama algoritması, bir problemin bir örneğini ve problem için bir aday çözümü alır ve verilen problem örneği için polinom zaman içinde aday çözümün bir çözüm olup olmadığını doğrular (Haynes, Hedetniemi and Slater, 1998a). Böylece, NP sınıfı, polinom zamanda doğrulanabilen problemlerin sınıfıdır. NP sınıfı , P sınıfındaki tüm problemleri içerir. Eğer NP sınıfındaki her bir problem bir A probleminin özel durumlarına indirgenebiliyorsa[2], A problemi NP-zor ve aynı zamanda problemin (A'nın) kendisi de NP sınıfından ise A problemi NP-tam sınıfındadır (Nuriyev ve Sadıgova, 2002).

Bu bölümdeki teorem ve ispatı *"Computational complexity of domination integrity in graphs"* makalesinden alınmıştır ve DIG karar problemi aşağıdaki gibi tanımlanmıştır (Sundareswaran and Swaminathan, 2015):

Girdi: $G = (V, E)$ grafı ve k tam sayısı

Soru: $DI(G) \leq k$ mıdır?

Verilen bir $G = (V, E)$ grafı ve herhangi bir $S \subseteq V(G)$ için, S kümesinin baskın bir küme olup olmadığını polinom zamanda doğrulamak kolaydır. Ayrıca,

---

[1] Polinom zamanlı algoritmalar, çözüm için gerekli çalışma süresinin girilen verinin büyüklüğüne bir polinom cinsinden bağlı olduğu algoritmalardır.

[2] Bir B problemi, A problemini çözen bir algoritmadan yararlanılarak elde edilen diğer bir algoritma ile çözülebiliyorsa, B problemi A problemine indirgenebilir denir (Nuriyev ve Sadıgova, 2002)

G nin herhangi bir S alt kümesi için, $m(G-S)$ hesaplayan polinom zamanlı bir algoritma vardır. Bu nedenle, DIG karar problemi NP sınıfındadır.

Teorem 3.3.1: (Sundareswaran and Swaminathan, 2015) DIG, NP-tamdır.

İspat: G, herhangi bir graf olsun. $V(G)=\{u_1,u_2,\dots,u_n\}$ olsun. G', aşağıdaki gibi G grafından oluşturulan bir graf olsun:

$n=|V(G)|$ olmak üzere, $H=K_{2n}$ olsun. $V(H)=\{v_1,v_2,\dots,v_{2n}\}$ olsun. Bir x tepesi asılı bir tepe olarak bir u_i tepesine $1\leq i\leq n$ (u olarak adlandırılsın) bağlansın. x ve bir v_i tepesini $1\leq i\leq 2n$ (v olarak adlandırılsın) birleştirelim. Sonuç grafı, G' grafıdır.

İddia (i): $\gamma(G')=\gamma(G)+1$.

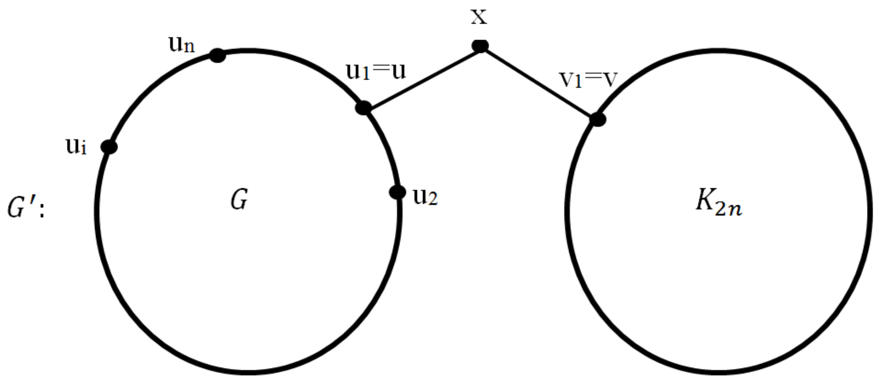
D, G nin herhangi bir γ-kümesi olsun. Eğer D, v tepesini içeriyorsa, o zaman $D\cup\{u\}$ kümesi G' grafının bir γ-kümesidir ve bundan dolayı $\gamma(G')=\gamma(G)+1$ dir. $v\notin D$ olduğunu varsayalım. O zaman da, $D\cup\{u\}$ kümesi G' grafının bir γ-kümesidir ve bu nedenle $\gamma(G')=\gamma(G)+1$ dir.

D_1 in $G-v$ grafının bir γ-kümesi olduğunu varsayalım. O zaman $D_1\cup\{x,u\}$, G' grafının bir γ-kümesidir. $|D_1|=\gamma(G-v)<\gamma(G)$ olduğunu kabul edelim. Fakat $\gamma(G-v)<\gamma(G)\leq\gamma(G-v)+1$ dir. Bu nedenle, $\gamma(G)=\gamma(G-v)+1$ dir. $|D_1\cup\{x,u\}|=|D_1|+2=\gamma(G-v)+2=\gamma(G)+1$ dir. Böylece iddia (i) doğrulanır.

İddia (ii): $DI(G')=\gamma(G)+2n$.

S', G' grafının bir DI-kümesi olsun. $|S'\cap(V(G)\cup\{x\})|=t_1$ ve $|S'\cap(V(H))|=t_2$ ve $m(G'-S')\geq 2n-2$ olsun.

$t_1\geq\gamma(G)$ olduğu için, $DI(G')=|S'|+m(G'-S')\geq t_1+t_2+(2n-t_2)=2n+t_1\geq 2n+\gamma(G)$ dir. D, G nin herhangi bir γ-kümesi ve $m\big(G'-(D\cup\{u\})\big)=2n-1$ olduğunda, $D\cup\{u\}$ kümesi G' grafının bir γ-kümesi olduğundan, $DI(G')\leq\gamma(G)+1+2n-1=\gamma(G)+2n$ elde edilir. Bu nedenle, $DI(G')=\gamma(G)+2n$ dir. Buradan, DIG NP-tamdır.



Şekil 3.1. G' grafı (Sundareswaran and Swaminathan, 2015)

Ayrıca aynı makalede (Sundareswaran and Swaminathan, 2015) kordal ve planar graf sınıfında bile DIG karar probleminin NP-tam olduğu ispatlanmıştır.

4. BAZI GRAF SINIFLARININ BASKIN BÜTÜNLÜK DEĞERLERİ

4.1 Bulunan Sonuçlar

Teorem 4.1.1: $n \geq 3$ için $DI(W_{1,n}) = \lceil 2\sqrt{n} \rceil$ dir.

İspat: $W_{1,n}$ tekerlek grafının merkez tepesi v olarak isimlendirilsin. $W_{1,n}$ n tepeli bir C_n çevre grafı içerir ve bu çevredeki her bir tepe merkez tepe v ye bağlıdır. $X \subset V(C_n)$ ve $|X| = r$ olmak üzere, $W_{1,n}$ grafından $S = \{v\} \cup X$ baskın kümesi çıkarılsın. Bu durumda $\omega(W_{1,n} - S) \leq r$ olduğundan $m(W_{1,n} - S) \geq \frac{(n+1)-(r+1)}{r}$ dir. (Herhangi bir bağlantılı G grafı için, graftan $|S| = r$ tane tepe çıkarıldığında $m(G - S) \geq \frac{p-r}{\omega(G-S)}$ dir. (p, G grafındaki tepelerin, $\omega(G - S)$ ise, $G - S$ grafındaki bileşenlerin sayısıdır.) Buradan;

$$DI(W_{1,n}) = \min_{S \subset V(W_{1,n})} \{|S| + m(W_{1,n} - S) : S \; bir \; baskın \; küme\}$$

$$\geq \min_{r} \left\{ r + 1 + \frac{n-r}{r} \right\} \text{ dir.}$$

Eşitsizliği r'ye bağlı bir fonksiyon olarak düzenleyip, eşitsizliği eşitlik olarak aldığımızda $f(r) = r + 1 + \frac{n-r}{r} = \frac{r^2+n}{r}$ elde edilir.

$f(r) = \frac{r^2+n}{r}$ fonksiyonunun yerel minimum noktasını bulmak için türevden yararlanalım:

$$f'(r) = \frac{2r.r - (r^2 + n)}{r^2} = 0$$

$$r^2 - n = 0 \Rightarrow r = \mp\sqrt{n}$$

Tepe sayısı negatif bir değer olamayacağından, $r = \sqrt{n}$ dir. Bu değeri fonksiyonda yerine koyarsak;

$$f(\sqrt{n}) = \sqrt{n} + 1 + \frac{n-\sqrt{n}}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} + 1 + \sqrt{n} - 1 = 2\sqrt{n} \text{ dir.}$$

O halde; $DI(W_{1,n}) \geq 2\sqrt{n}$ dir.

$S \subset V(W_{1,n})$ baskın kümesi C_n grafının I-kümesine, merkez tepe v eklenerek oluşturulursa $m\left(W_{1,n} - S\right) = \frac{n-r}{r}$ olur ve bu seçim altında $DI\left(W_{1,n}\right) = 2\sqrt{n}$ dir. Bütünlük tam sayı değerli bir fonksiyon olduğundan (Bagga et al.,1992), tekerlek grafın baskın bütünlük değeri $DI\left(W_{1,n}\right) = \lceil 2\sqrt{n} \rceil$ dir.

Teorem 4.1.2: Double star grafın baskın bütünlük değeri $DI\left(S_{n,m}\right) = 3$ tür.

İspat: P_2 bir yol graf ve $V(P_2) = \{v_1, v_2\}$ olsun. v_1 tepesine n tane, v_2 tepesine m tane tepe eklenerek double star $S_{n,m}$ oluşturulsun. $S = \{v_1, v_2\}$, double star grafın minimum baskın kümesidir ve $S_{n,m} - S$ izole tepelerden oluşur yani $m(S_{n,m} - S) = 1$ olur. X, double star grafın herhangi bir baskın kümesi olmak üzere, $|X| + m\left(S_{n,m} - X\right) \geq |S| + 1$ dir. Bu nedenle, $DI\left(S_{n,m}\right) = 3$ tür.

Corollary 4.1.1: Bistar $B_{n,n}$ grafının baskın bütünlük değeri $DI\left(B_{n,n}\right) = 3$ tür.

Teorem 4.1.3: $l_1, l_2, \dots, l_n$ negatif olmayan tam sayılar olsun. P_n, n tepeli yol graf ve C_n, n tepeli bir çevre graf olmak üzere, P_n grafının dikenli grafı ${P_n}^*$ ve C_n grafının dikenli grafı, ${C_n}^*$ ile gösterilsin.

$(\boldsymbol{i})$ $DI({P_n}^*(l_1, l_2, \dots, l_n)) = n + 1$

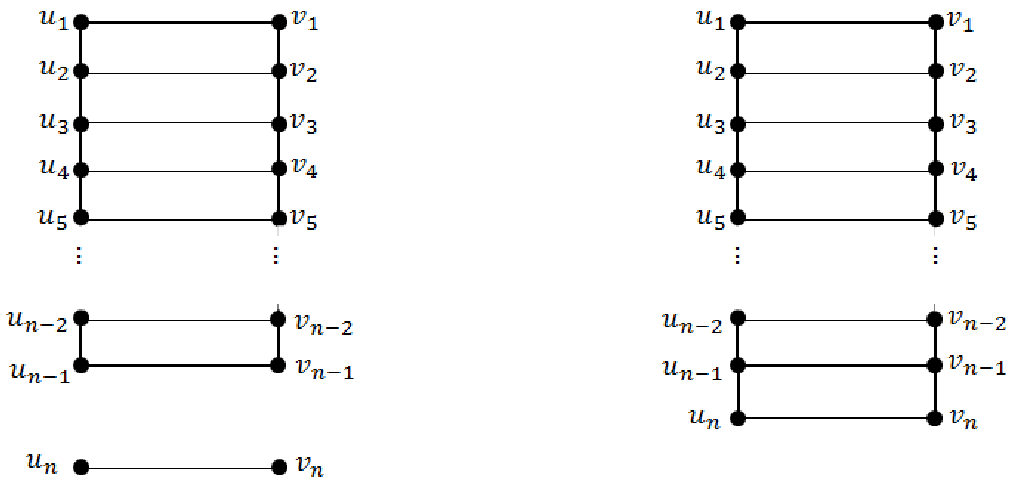
$(\boldsymbol{ii})$ $DI({C_n}^*(l_1, l_2, \dots, l_n)) = n + 1$

İspat: $(\boldsymbol{i})$ P_n, n tepeli bir yol graf ve $V(P_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ olsun. P_n grafının dikenli grafı, $l_1, l_2, \dots, l_n$ parametleri ile oluşturulmak üzere, her bir v_i $(i = 1,2, \dots, n)$ tepesine bağlı l_i tepe, ${P_n}^*(l_1, l_2, \dots, l_n)$ grafının baskın kümesine eklenirse , bu baskın bütünlük değerinin tanımındaki minimum değer koşuluna aykırıdır. Bu nedenle, graftan çıkarılacak baskın küme olarak $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ seçilir ve bu küme ${P_n}^*(l_1, l_2, \dots, l_n)$ grafının minimum baskın kümesidir. ${P_n}^*(l_1, l_2, \dots, l_n) - S$ izole tepelerden oluşur yani $m({P_n}^*(l_1, l_2, \dots, l_n) - S) = 1$ dir. X, ${P_n}^*(l_1, l_2, \dots, l_n)$ grafının herhangi bir baskın kümesi olmak üzere, $|X| + m({P_n}^*(l_1, l_2, \dots, l_n) - X) \geq |S| + 1$ dir. Buradan, $DI({P_n}^*(l_1, l_2, \dots, l_n)) = |S| + 1 = n + 1$ dir.

$(\boldsymbol{ii})$ C_n, n tepeli bir çevre graf ve $V(C_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ olsun. C_n grafının dikenli grafı, $l_1, l_2, \dots, l_n$ parametleri ile oluşturulmak üzere, Teorem 4.1.3 (i) nin ispatındaki aynı nedenden dolayı, $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ seçilir ve bu küme ${C_n}^*(l_1, l_2, \dots, l_n)$ grafının minimum baskın kümesidir. ${C_n}^*(l_1, l_2, \dots, l_n) - S$ izole tepelerden oluşur yani $m(C_n{}^*(l_1, l_2, \dots, l_n) - S) = 1$ dir. X, $C_n{}^*(l_1, l_2, \dots, l_n)$ grafının herhangi bir baskın kümesi olmak üzere, $|X| + m(C_n{}^*(l_1, l_2, \dots, l_n) - X) \geq |S| + 1$ dir. Buradan, $DI(C_n{}^*(l_1, l_2, \dots, l_n)) = |S| + 1 = n + 1$ dir.

Teorem 4.1.4: Friendship grafının (F_n) baskın bütünlük değeri $DI(F_n) = 3$ tür.

İspat: F_n bir friendship graf ve v bu grafın merkez tepesi olsun. $S = \{v\}$, F_n grafının minimum baskın kümesidir. $F_n - S$ grafı her biri P_2 grafı olan n tane bileşenden oluşur. Böylece $m(F_n - S) = 2$ dir. X, F_n grafının herhangi bir baskın kümesi olmak üzere, $|X| + m(F_n - S) \geq |S| + 2$ dir. Buradan $DI(F_n) = 3$ tür.



Şekil 4.1. Ladder graf L_n in oluşturulması

Teorem 4.1.5: $1 \leq n \leq 8$ için, $DI(L_n) = n + 1$ dir.

İspat: $1 \leq n \leq 8$ olmak üzere, $V(L_n) = \{u_i, v_i : 1 \leq i \leq n\}$ olsun.

Durum 1: $n = 1$

L_1 grafının P_2 yol grafı olduğu açıktır. Bu durumda *Önerme 3.1.2.5*'den $DI(L_1) = DI(P_2) = 2$ dir.

Durum 2: $n = 2$

L_2 grafının C_4 çevre grafı olduğu açıktır. Bu durumda *Önerme 3.1.2.4*'den $DI(L_2) = DI(C_4) = 3$ tür.

Durum 3: $n = 3$

$S_1 = \{u_1, v_2, u_3\} \subset V(L_3)$ baskın kümesini ele alalım. $|S_1| = 3$ ve $m(L_3 - S_1) = 1$ dir. Buradan $|S_1| + m(L_3 - S_1) = 4$ tür. $S_2 = \{u_2, v_2\} \subset V(L_3)$ baskın kümesini ele alalım. $|S_2| = 2$ ve $m(L_3 - S_2) = 2$ dir. Buradan $|S_2| + m(L_3 - S_2) = 4$ tür. $|X| + m(L_3 - X) < 4$ koşulunu sağlayan bir $X \subset V(L_3)$ baskın kümesi olmadığından $DI(L_3) = 4$ tür.

Durum 4: $n = 4$

$S_1 = \{u_1, v_2, u_3, v_4\} \subset V(L_4)$ baskın kümesini ele alalım. $|S_1| = 4$ ve $m(L_4 - S_1) = 1$ dir. Buradan $|S_1| + m(L_4 - S_1) = 5$ dir. $S_2 = \{u_2, v_2, u_4, v_4\} \subset V(L_4)$ baskın kümesini ele alalım. $|S_2| = 4$ ve $m(L_4 - S_2) = 2$ dir. Buradan $|S_2| + m(L_4 - S_2) = 6 > 5$ dir. $X \subset V(L_4)$ baskın kümesi için $|X| < 4$ olsun. Bu durumda $m(L_4 - X) \geq 3$ olacağından $|X| + m(L_3 - X) > 5$ olur. Bu nedenle $DI(L_4) = 5$ dir.

Durum 5: $n = 5$

$S_1 = \{u_1, v_2, u_3, v_4, u_5\} \subset V(L_5)$ baskın kümesini ele alalım. $|S_1| = 5$ ve $m(L_5 - S_1) = 1$ dir. Buradan $|S_1| + m(L_5 - S_1) = 6$ dır. $S_2 = \{u_2, v_2, u_4, v_4\} \subset V(L_5)$ baskın kümesini ele alalım. $|S_2| = 4$ ve $m(L_5 - S_2) = 2$ dir. Buradan $|S_2| + m(L_5 - S_2) = 6$ dır. $X \subset V(L_5)$ baskın kümesi için $|X| \leq 3$ olsun. Bu durumda $m(L_5 - X)$ değeri artacağından $|X| + m(L_5 - X) > 6$ olur. Bu nedenle $DI(L_5) = 6$ dır.

Durum 6: $n = 6$

$S_1 = \{u_1, v_2, u_3, v_4, u_5, v_6\} \subset V(L_6)$ baskın kümesini ele alalım. $|S_1| = 6$ ve $m(L_6 - S_1) = 1$ dir. Buradan $|S_1| + m(L_6 - S_1) = 7$ dir. $S_2 = \{u_2, v_2, u_4, v_4, u_6, v_6\} \subset V(L_6)$ baskın kümesini ele alalım. $|S_2| = 6$ ve $m(L_6 - S_2) = 2$ dir. Buradan $|S_2| + m(L_6 - S_2) = 8 > 7$ dir. $X \subset V(L_6)$ baskın kümesi için $|X| \leq 5$ olsun. Bu durumda $m(L_6 - X)$ değeri artacağından $|X| + m(L_6 - X) > 7$ olur. Bu nedenle $DI(L_6) = 7$ dir.

Durum 7: $n = 7$

$S_1 = \{u_1, v_2, u_3, v_4, u_5, v_6, u_7\} \subset V(L_7)$ baskın kümesini ele alalım. $|S_1| = 7$ ve $m(L_7 - S_1) = 1$ dir. Buradan $|S_1| + m(L_7 - S_1) = 8$ dir. $S_2 = \{u_2, v_2, u_4, v_4, u_6, v_6\} \subset V(L_7)$ baskın kümesini ele alalım. $|S_2| = 6$ ve $m(L_7 - S_2) = 2$ dir. Buradan $|S_2| + m(L_7 - S_2) = 8$ dir. $X \subset V(L_7)$ baskın kümesi için $|X| \leq 5$ olsun. Bu durumda $m(L_7 - X)$ değeri artacağından $|X| + m(L_7 - X) > 8$ olur. Bu nedenle $DI(L_7) = 8$ dir.

Durum 8: $n = 8$

$S_1 = \{u_1, v_2, u_3, v_4, u_5, v_6, u_7, v_8\} \subset V(L_8)$ baskın kümesini ele alalım. $|S_1| = 8$ ve $m(L_8 - S_1) = 1$ dir. Buradan $|S_1| + m(L_8 - S_1) = 9$ dur. $S_2 = \{u_2, v_2, u_4, v_4, u_6, v_6, u_8, v_8\} \subset V(L_8)$ baskın kümesini ele alalım. $|S_2| = 8$ ve $m(L_8 - S_2) = 2$ dir. Buradan $|S_2| + m(L_8 - S_2) = 10 > 9$ dur. $X \subset V(L_8)$ baskın kümesi için $|X| \leq 7$ olsun. Bu durumda $m(L_8 - X)$ değeri artacağından $|X| + m(L_8 - X) > 9$ olur. Bu nedenle $DI(L_8) = 9$ dur.

Teorem 4.1.6: $n \geq 9$ olmak üzere ladder graf L_n in baskın bütünlük değeri aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$DI(L_n) = \begin{cases} 2\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil + 4; & n \equiv 0 \; ve \; n \equiv 2 \;\; (mod 3) \\ 2\left\lceil \frac{n-1}{3} \right\rceil + 5; & n \equiv 1 \;\; (mod 3) \end{cases}$$

İspat: $n \geq 9$ olmak üzere, $V(L_n) = \{u_k, v_k : 1 \leq k \leq n\}$ olsun.

$S \subset V(L_n)$ kümesi aşağıdaki gibi tanımlansın:

- $\boldsymbol{n \equiv 0 \; (mod\; 3)}$ ise, $S = \left\{u_{3k-1}, v_{3k-1} : 1 \leq k \leq \frac{n}{3}\right\}$ olarak seçilsin ve $|S| = 2\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$ dir. Bu durumda, $u_{3k-2}, u_{3k} \in N(u_{3k-1})$ ve $v_{3k-2}, v_{3k} \in N(v_{3k-1})$ olduğu için S kümesi L_n grafı için bir baskın kümedir ve $m(L_n - S) = 4$ tür.

- $\boldsymbol{n \equiv 1 \; (mod\; 3)}$ ise, $S = \left\{u_{3k-1}, v_{3k-1}, v_n \; : 1 \leq k \leq \frac{n-1}{3}\right\}$ ya da $S = \left\{v_{3k-1}, u_{3k-1}, u_n \; : 1 \leq k \leq \frac{n-1}{3}\right\}$ olarak seçilsin ve $|S| = 2\left\lceil \frac{n-1}{3} \right\rceil$ +1 dir. Bu durumda, $u_{3k-2}, u_{3k} \in N(u_{3k-1})$, $v_{3k-2}, v_{3k} \in N(v_{3k-1})$ ve $u_n \in N(v_n)$ ya da $v_n \in N(u_n)$ olduğu için S kümesi L_n grafı için bir baskın kümedir ve $m(L_n - S) = 4$ tür.

- $\boldsymbol{n} \equiv \mathbf{2}\ (\boldsymbol{mod}\ \mathbf{3})$ ise, $S = \left\{u_{3k-1}, v_{3k-1}\ : 1 \leq k \leq \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil\right\}$ olarak seçilsin ve $|S| = 2\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$ dir. Bu durumda, $1 \leq k < \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$ için, $u_{3k-2}, u_{3k} \in N(u_{3k-1})$ ve $v_{3k-2}, v_{3k} \in N(v_{3k-1})$, $k = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$ için $u_{3k-2} \in N(u_{3k-1})$ ve $v_{3k-2} \in N(v_{3k-1})$, olduğundan S kümesi L_n grafı için bir baskın kümedir ve $m(L_n - S) = 4$ tür.

$D \subset V(L_n)$ kümesi L_n grafının bir $\gamma - kümesi$ olmak üzere, $|D| + m(L_n - D)$ ve $|S| + m(L_n - S)$ değerlerini karşılaştırmak ve $|S| + m(L_n - S)$ değerinin minimum $DI(L_n)$ değerini verdiğini kontrol etmek için Çizelge 4.1 hazırlanmıştır.

Çizelge 4.1. D(γ-kümesi) ve S baskın kümesi için bulunan değerler ($9 \leq n \leq 25$)

n	|V(G)|=2n	|D|	m(G-D)	|D|+m(G-D)	|S|	m(G-S)	|S|+m(G-S)
9	18	5	13	**18**	6	4	**10**
10	20	6	12	**18**	7	4	**11**
11	22	6	16	**22**	8	4	**12**
12	24	7	15	**22**	8	4	**12**
13	26	7	19	**26**	9	4	**13**
14	28	8	18	**26**	10	4	**14**
15	30	8	22	**30**	10	4	**14**
16	32	9	21	**30**	11	4	**15**
17	34	9	25	**34**	12	4	**16**
18	36	10	24	**34**	12	4	**16**
19	38	10	28	**38**	13	4	**17**
20	40	11	27	**38**	14	4	**18**
21	42	11	31	**42**	14	4	**18**
22	44	12	30	**42**	15	4	**19**
23	46	12	34	**46**	16	4	**20**
24	48	13	33	**46**	16	4	**20**
25	50	13	37	**50**	17	4	**21**

Çizelge 4.1.'den de görüldüğü gibi, $D(\gamma - kümesi)$ ve S baskın kümesi için, $|S| + m(L_n - S) < |D| + m(L_n - D)$ olduğu gözlemlenmiştir. Buradan, $DI(L_n) \leq |S| + m(L_n - S) < |D| + m(L_n - D)$ elde edilir.

$|D| \leq |S_i| < |S|$ koşulunu sağlayan L_n grafının bir S_i baskın kümesi seçilirse, $m(L_n - S_i)$ değeri artacağından $|S| + m(L_n - S) < |S_i| + m(L_n - S_i)$ olur.

$S_j \subset V(L_n)$ kümesi $m\big(L_n - S_j\big) = j$ ($1 \leq j \leq 3$) koşulunu sağlayan minimal kardinaliteye sahip bir baskın küme olsun. Bu durumda $|S| + m(L_n - S) < \left|S_j\right| + m(L_n - S_j)$ dir ve Çizelge 4.2.'den de görüldüğü gibi, bazı n değerleri için eşitsizlik eşitliğe dönüşmektedir.

$S_t \subset V(L_n)$ kümesi $m(L_n - S_t) \geq 5$ koşulunu sağlayan minimal kardinaliteye sahip bir baskın küme olsun. Bu durumda $|S| + m(L_n - S) < |S_t| + m(L_n - S_t)$ olacağı açıktır. Bu nedenle $m(L_n - S) > 4$ olarak seçilmemiştir.

Çizelge 4.2. L_n grafında $m(G - S)$ değeri 1, 2 ve 3 olduğunda bulunan değerler

n	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
$\lvert S_1 \rvert$	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
m(G-S_1)	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
$\lvert S_1 \rvert$+m(G-S_1)	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
$\lvert S_2 \rvert$	8	10	10	12	12	14	14	16	16	18	18	20	20	22	22	24	24
m(G-S_2)	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**
$\lvert S_2 \rvert$+m(G-S_2)	10	12	12	14	14	16	16	18	18	20	20	22	22	24	24	26	26
$\lvert S_3 \rvert$	7	8	9	10	11	11	12	13	14	15	15	16	17	18	19	19	20
m(G-S_3)	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**
$\lvert S_3 \rvert$+m(G-S_3)	10	11	12	13	14	14	15	16	17	18	18	19	20	21	22	22	23

Bu incelemelerden sonra, $|S| + m(L_n - S)$ değerinin minimum $DI(L_n)$ değerini verdiği açıktır. Bu nedenle, $n \geq 9$ için L_n grafının baskın bütünlük değeri

$$DI(L_n) = \begin{cases} 2\left\lceil \dfrac{n}{3} \right\rceil + 4; & n \equiv 0 \ ve \ n \equiv 2 \ \ (mod 3) \\ 2\left\lceil \dfrac{n-1}{3} \right\rceil + 5; & n \equiv 1 \ \ (mod 3) \end{cases}$$

olarak tanımlanır.

5. SONUÇ

Baskınlık, iletişim ağı tasarımında önemli bir zedelenebilirlik kavramıdır. Bütünlük kavramı da verilen iki iletişim ağının kararlılığının karşılaştırılmasında bilinen başka bir zedelenebilirlik ölçümüdür. Sundareswaran ve Swaminathan bu iki önemli kavramı ele alıp yeni bir zedelenebilirlik ölçümü olarak baskın bütünlük değerini tanımlamışlardır.

Bu tez çalışmasında, baskınlık kavramına dayalı, bütünlük değeri ve diğer zedelenebilirlik parametreleri üzerine yapılan çalışmalar incelenmiştir. Ağ modeli olarak yaygın olarak kullanılan graflardan tekerlek graf $W_{1,n}$, double star $S_{m,n}$, bistar $B_{n,n}$, P_n ve C_n graflarının dikenli grafları, friendship graf $F_n$ve ladder graf L_n nin baskın bütünlük değerleri belirlenmiştir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Arumugam, S. and Velammal, S., 1998, Edge domination in graphs, *Taiwanese Journal of Mathematics,* 2(2), 173-179pp.

Aytaç, V., 2009, Computing the tenacity of some graphs, *Selçuk J. Appl. Math.*, 10(1), 107-120pp.

Bagga, K.S., Beineke , L.W., Goddard, W.D., Lipman , M.J. and Pippert, R.E., 1992, A survey of integrity, *Discrete Applied Mathematics*, 37/38 , 13-28pp.

Bagga, K.S. and Deogun, J.S., 1992, A variation on the edge-integrity, *Congressus Numerantium*, 94, 207-211pp.

Barefoot, C.A., Entringer , R. and Swart, H., 1987, Vulnerability in graphs-A comparative survey, *J. Combin. Math. Combin. Comput.* , 1, 13-22pp.

Berge, C., 1962, Theory of Graphs and its Applications, Methuen, London, 247p.

Buckley, F. and Harary, F., 1990, Distance in Graphs, Addison-Wesley Publishing Company, 335p.

Chartrand, G., Kapoor, S.F., McKee, T.A., Oellermann, O.R., 1989, The mean integrity of a graph, Recent Studies in Graph Theory, Vishwa International Publications,70- 80pp.

Choudum, S.A. and Priya N., 1999, Tenacity of complete graph products and grids, *Networks*, 34, 192-196pp.

Chvatal, V., 1973, Tough graphs and hamiltonian circuits, *Discrete Math.*, 5, 215- 218pp.

Cockayne, E.J. and Hedetniemi, S.T., 1977, Towards a theory of domination in graphs, *Networks*, 7, 247-261pp.

Dundar, P. and Aytac, A., 2004, Integrity of total graphs via certain parameters, *Mathematical Notes*, 75(5), 665-672pp.

Goddard, W. and Swart, H. C., 1990, Integrity in graphs: bounds and basics , *J. Combin. Math. Combin. Comput.* , 7, 139-151pp.

Gutman, I., 1998, Distance in thorny graph, *Publications de l'Institut Mathématique (Beograd)*, 63, 31- 36pp.

Harary, F., 1972, Graph Theory, Addison Wesley, Massachusetts, 274p.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Haynes, T., Hedetniemi, S. and Slater, P., 1998a, Fundamentals of Domination in Graphs, Marcel Dekker, Inc., New York, 446p.

Haynes, T., Hedetniemi, S. and Slater, P., 1998b, Domination in Graphs: Volume 2: Advanced Topics, Marcel Dekker, Inc., New York, 489p.

Hosoya, H. and Harary, F., 1993, On the matching properties of three fence graphs, *J. Math. Chem.*, 12, 211-218pp.

Jung, H.A., 1978, On a class of posets and the corresponding comparability graphs, *J. Combinatorial Theory Ser. B*, 24, 125–133pp.

Kırlangıç, A., 2002, A measure of graph vulnerability: scattering number, *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 30:1, 1-8pp.

Kırlangıç, A., 2003a, On the weak-integrity of trees, *Turkish Journal of Mathematics*, 27(3), 375-388pp.

Kırlangıç, A., 2003b, On the weak-integrity of graphs, *Journal of Mathematical Modelling and Algorithms*, 2(2), 81-95pp.

Mahde, S.S. and Mathad, V., 2016, Domination integrity of line splitting graph and central graph of path, cycle and star graphs, *Applications and Applied Mathematics: An International Journal*, 11(1), 408-423pp.

Mamut, A. and Vumar, E., 2007, A note on the integrity of middle graphs. *Lecture Notes in Computer Science* Springer , 4381, 130-134pp.

Mitchell, S. and Hedetniemi, S.T, 1977, Edge domination in trees, *Congr. Numer.*, 19, 489-509pp.

Nuriyev, U.G. ve Sadıgova, H.G, 2002, Hesaplanabilirlik, *Matematik Dünyası*, 11(5), 12-16s.

Ore, O., 1962, Theory of Graphs, Amer. Math. Soc. Collog. Publ., 38(Amer. Math., Providence, RI), 270p.

Shalini, T. and Kumar, S. R. , 2015, Labeling techniques in friendship graph, *International Journal of Engineering Research and General Science*, 3(1), 277-284pp.

Sundareswaran, R. and Swaminathan, V., 2010a, Domination integrity in graphs, *Proceedings of International Conference on Mathematical and Experimental Physics*, Prague, 46-57pp.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Sundareswaran, R., 2010, *Parameters of Vulnerability in graphs*, Ph.D. Thesis. Rajalakshmi Engineering College, Thandalam, Chennai, 207p (published).

Sundareswaran, R. and Swaminathan, V., 2010b, "Domination integrity of middle Graphs," In: T. Chelvam, S. Somasun- daram and R. Kala, Eds., *Algebra, Graph Theory and Their Applications*, Narosa Publishing House, New Delhi, 88-92pp.

Sundareswaran, R. and Swaminathan, V., 2012, Domination integrity in trees, *Bulletin of International Mathematical Virtual Institue*, 2, 153-161pp.

Sundareswaran, R. and Swaminathan V., 2015, Computational complexity of domination integrity in graphs., *TWMS J. App Eng. Math.*, 5 , No.2, 214-218pp.

Vaidya, S.K. and Kothari, N.J., 2012, Some new results on domination integrity of graphs, *Open Journal of Discrete Mathematics*, 2(3), 96-98pp. doi: 10.4236/odjm.2012.23018

Vaidya, S.K. and Kothari, N.J., 2013, Domination integrity of splitting graph of path and cycle, *ISRN Combinatorics*, 2013, Article ID 795427, 7p. doi:10.1155/2013/795427

Vaidya, S.K. and Shah, N.H., 2014a, Domination integrity of total graphs, *TWMS J. App. Eng. Math.*, 4(1), 117-126pp.

Vaidya, S.K. and Shah, N.H., 2014b, Domination integrity of some path related graphs, *Applications and Applied Mathematics*, 9(2), 780-794pp.

Vaidya, S.K and Shah, N.H., 2014c, Cordial labeling for some bistar related graphs, *International Journal of Mathematics and Soft Computing*, 4(2), 33-39pp.

West, D.B., 2001, Introduction to Graph Theory Second Edition, Prentice Hall, 588p.

ÖZGEÇMİŞ

Ayşe BEŞİRİK, 1992 yılında İzmir'de doğdu. 2010 yılında Bornova Hatice Güzelcan Anadolu Lisesi'nden mezun oldu. Aynı yıl Ege Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü'nde eğitime başladı ve 2015 yılında mezun oldu. 2016 yılında Ege Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Bölümü Anabilim Dalı'nda yüksek lisans eğitimine başladı. 2017 yılında, danışmanı Dr. Öğretim Üyesi Elgin KILIÇ ile birlikte yürüttüğü "Domination integrity of some graph classes" adlı çalışmayı Yıldız Teknik Üniversitesi'nde düzenlenen *International Conference on Mathematics and Enginering* adlı uluslararası konferansta sundu.