T.C.
YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BİR OPERATÖR CEBİRİNİN KOMPAKT OPERATÖRLERİ KAPSAMASI ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN : Fırat ÇAKIR
DANIŞMAN : Yrd. Doç. Dr. Cesim TEMEL

VAN–2013

T.C.
YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BİR OPERATÖR CEBİRİNİN KOMPAKT OPERATÖRLERİ KAPSAMASI ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN : Fırat ÇAKIR

VAN–2013

KABUL ve ONAY SAYFASI

Matematik Anabilim Dalı'nda Yrd. Doç. Dr. Cesim TEMEL danışmanlığında, Fırat ÇAKIR tarafından sunulan " Bir Operatör Cebirinin Kompakt Operatörleri Kapsaması Üzerine" isimli bu çalışma Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği'nin ilgili hükümleri gereğince 26/07/2013 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile başarılı bulunmuş ve Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan	: Doç. Dr. Fevzi ERDOĞAN	İmza:
Üye	: Yrd. Doç. Dr. Cesim TEMEL	İmza:
Üye	: Yrd. Doç. Dr. Murat CANCAN	İmza:

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun .../.../2013 tarih ve …… sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü

ÖZET

BİR OPERATÖR CEBİRİNİN KOMPAKT OPERATÖRLERİ KAPSAMASI ÜZERİNE

ÇAKIR, Fırat
Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Cesim TEMEL
Ağustos 2013, 39 sayfa

T kompleks ayrılabilir sonsuz boyutlu Hilbert uzay üzerinde bir sınırlı lineer operatör olsun. T^* operatörü T operatörünün adjointi olmak üzere, $I_{\mathrm{H}} - T^*T$ operatörü kompakt ise T bir öz izometrik operatördür ve $TT^* - T^*T$ operatörü kompakt ise T bir öz normal operatördür denir.

Operatörlerden oluşmuş bir uzayın sıfırdan farklı bir kompakt operatör içermesi operatörler teorisinin en önemli problemlerinden birisidir. Bu tezde öz normal operatörlerin komutantı içindeki kompakt operatörlerin var olup olmadığı incelenmiştir. T 'nin komutantından S 'nin kompaktlığı için S ve T operatörleri üzerinde bazı gerek ve yeter şartlar bulunur. Bu tezde bu şartlar konulmaya çalışıldı..

Üçüncü bölümde, sonraki bölümlerde kullanılacak olan temel tanım ve teoremler verildi.

Dördüncü bölümde, uygun bir giriş yapıldı ve tezin amacına yönelik bilgiler verildi.

Beşinci bölümde, T operatörü öz izometrik operatör olmak üzere T 'nin komutantından S operatörünün kompaktlığı için S ve T operatörleri üzerinde bazı gerek ve yeter şartlar verildi.

Altıncı bölümde, T operatörünün komutantı $\{T\}'$ ile gösterilsin. T operatörü öz normal operatör olmak üzere ergodik şartlar aracılığıyla $S \in \{T\}'$ operatörünün kompakt olması için S ve T operatörleri üzerinde bazı gerek ve yeter şartlar bulunmuştur.

Anahtar Kelimeler : Kompakt operatör, Komutant, Öz izometrik operatör, Öz normal operatör, Öz üniter operatör, Spektrum.

ABSTRACT

COMPACT OPERATORS IN THE SOME OPERATOR ALGEBRAS

ÇAKIR, Fırat

Msc. Mathematics Science

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Cesim TEMEL

August 2013, 39 pages

Let T be a bounded, linear operator on a complex, seperable, infinite dimensional Hilbert space H. T is an essentially isometric operator if $I_{\mathrm{H}} - T^{*}T$ operator is compact and T is an essentially normal operator if $TT^{*} - T^{*}T$ operator is compact where T^{*} operator is the adjoint operator of T.

It is one of the most important problem of the Operator Theory that an operator algebra contains a nonzero compact operator. In this thesis it is studied whether the commutant of essentially normal operators contains a nonzero compact operator or not. For the compactness of S from the commutant of T, some necessary and sufficient conditions are found on S.

Chapter three; There are basic definitions and theorems which will be used in following chapters.

Chapter four; The proper introduction is made and some informations about the purpose of thesis is given.

Chapter five; Some necessary and sufficient conditions on S and T are given for the compactness of the operator S from the commutant of T, where T is an essentially isometric operator.

Chapter six; Let T be an essentially normal operator. For the compactness of S from the commutant of T, some necessary and sufficient conditions on S and T are found. The compactness of $S \in \{T\}'$ via the ergodic conditions is also characterized.

Key Words : Compact operator, Commutant, Essentially isometric operator, Essentially normal operator, Essentially unitary operator, Spectrum.

ÖN SÖZ

Operatörlerden oluşmuş bir uzayın sıfırdan farklı bir kompakt operatör içermesi operatörler teorisinin en önemli problemlerinden birisidir. Bu tezde öz normal operatörlerin komutantı içindeki kompakt operatörlerin var olup olmadığı incelenmiştir. T 'nin komutantından S 'nin kompaktlığı için S ve T operatörleri üzerinde bazı gerekli ve yeterli şartlar bulunur. Bu tezde bu şartlar konulmaya çalışıldı.

Yüksek lisans eğitimim süresince desteğini ve anlayışını eksik etmeyen değerli danışmanım Yrd. Doç. Dr. Cesim TEMEL'e ve değerli hocam Prof. Dr. Heybetkulu S. MUSTAFAYEV'e teşekkür ederim. Ayrıca, Yüzüncü Yıl Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyelerinden amcam Doç. Dr. Musa ÇAKIR'a, anneme, babama, kardeşlerime ve nişanlıma çalışmalarım süresince desteklerini esirgemedikleri için teşekkür ederim.

Fırat ÇAKIR

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler

T^*	Bir T operatörünün adjointi
H	Hilbert uzayı
$B(H)$	H uzayından H uzayına tüm sınırlı lineer operatörler uzayı
$\sigma(T)$	Bir T operatörünün spektrumu
$\sigma(T) \cap \Gamma$	Bir T operatörünün üniter spektrumu
$\|T\|$	Bir T operatörünün normu
A_T	$\{P(T) : P \in \boldsymbol{P}\}$ kümesinin düzgün operatör topolojisine göre kapanışı kümesi
$H^{\infty}(T)$	$\{P(T) : P \in \boldsymbol{P}\}$ kümesinin zayıf operatör topolojisine göre kapanışı kümesi
$\{T\}'$	Bir T operatörünün komutantı
$\hat{S}$	Bir S operatörünün Gelfand dönüşümü
ϕ_λ	$\lambda \in \sigma(T)$ için bir çarpımsal fonksiyonel
$\tilde{T}$	Bir T operatörünün doğurduğu limit operatörü

1. LİTERATÜR BİLDİRİŞLERİ

Nagy ve Foias (1970); Hilbert uzayında analitik operatörleri analiz ettiler ve gösterdiler ki, T operatörü hiçbir yerde üniter olmayan bir daralma operatörü ise $\forall f \in H^{\infty}(D)$ için $f(T)$ operatörü tanımlanabilir ve $f \to f(T)$ dönüşümü bir daralma homomorfizmasıdır. Bu çalışmada elde edilen esas sonuçlardan biride $H^{\infty}(T)$'nin $\{f(T) : f \in H^{\infty}(D)\}$ ile çakışmasıdır. Muhly (1971)'de bir daralma operatörünün komutantındaki kompakt operatörleri inceledi. Brown ve ark. (1973)'de kompakt operatörleri ve genişlemelerini inceledi. Nagy (1974) ispatladı ki, eğer T bir C_0- daralması ise o halde T'nin komutantı $\{T\}' := \{S \in B(H) : TS = ST\}$ sıfırdan farklı bir kompakt operatör içerir fakat $H^{\infty}(T)$ içinde sıfırdan farklı bir kompakt operatör bulunmaz ve tek kompakt operatör sıfırdır. Nordgren (1975) ispatladı ki, eğer T bir öz üniter C_0- daralma operatörü ise o halde $H^{\infty}(T)$ sıfırdan farklı bir kompakt operatör içerir. Vitse (2003)'de T operatörünün hiçbir yerde üniter olmayan daralma operatörü olduğu durumda T'nin komutantının içerdiği operatörler çalışıldı. Kellay ve Zarrabi (2009) ispatladı ki, eğer T öz izometrik daralma operatörü $D\backslash\sigma(T)\neq\varnothing$ şartını sağlıyorsa (buradan T bir üniter operatörün bir kompakt pertürbasyonudur ve böylece T operatörü öz izometrik operatördür) ve eğer $f\in A(D)$ $\sigma(T)\cap\Gamma$ üzerinde sıfıra eşit olursa o halde $f(T)$ operatörü kompakttır. Kellay ve Zarrabi (2009)'nin bu çalışmasında ayrıca gösteriliyor ki, eğer T bir öz izometrik C_0- daralma operatörü ise o halde ($f\in H^{\infty}$) $f(T)$'nin kompakt olması için yeter ve gerek koşul $\lim\limits_{n\to\infty}\|T^n f(T)\| = 0$ olmasıdır.

Bu çalışma ile Mustafayev ve Hüseynov (2012) makalesi incelenmiştir. Buna göre, T bir öz normal Fredholm operatörü olduğu durumda T operatörünün komutantının sıfırdan farklı kompakt operatör içermesi ile ilgili şartlar aşağıdaki şekilde elde edildi:

T bir öz normal Fredholm operatörü ve $S \in \{T\}'$ olsun. Eğer her $\lambda \in \sigma_e(T)$ için

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\|\sum_{k=1}^{n}\lambda^{-k}T^k S\right\| = 0$$

ise, o halde S operatörü kompakttır.

2. TEMEL TANIM ve TEOREMLER

Tanım 2.1: X bir lineer uzay olsun. $\|\cdot\|: X \to R$ fonksiyonu $\forall x, y \in X$ ve $a \in C$ için aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, $\|\cdot\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir *norm* denir.

i) $\|x\| \geq 0$ ve $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

ii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ **,** $(\alpha \in F)$

iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Lineer uzay üzerinde bir norm tarif edilmişse bu uzaya *normlu lineer uzay* denir. Normlu lineer uzayları $(X, \|\cdot\|)$ ile veya kısaca X ile gösterilecektir.

X normlu uzayında bir (x_n) dizisi alalım. Eğer $\|x_n - x_m\| \to 0$ $(n, m \to \infty)$ ise (x_n) dizisine *Cauchy dizisi* denir. X normlu uzayında her Cauchy dizisi X 'in bir elemanına yakınsıyorsa X 'e bir *Banach uzayı* denir (Musayev ve Alp, 2000).

Tanım 2.2: X, F cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. $\langle , \rangle : X \times X \to F$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa bu fonksiyona *iç çarpım* (veya iç çarpım fonksiyonu) denir.

i) $\langle , \rangle \geq 0$ **,** $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

ii) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ $(\alpha \in F)$

iii) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$

iv) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

Üzerinde iç çarpım fonksiyonunun tanımlandığı vektör uzayına *iç çarpım uzayı* (ön-Hilbert uzayı) denir. İç çarpım uzayını $(X, \langle , \rangle)$ ile veya kısaca X ile gösterilir (Musayev ve Alp, 2000).

Şimdi iç çarpım yardımıyla bir norm fonksiyonu tarif edilecektir. Daha sonra bu norm fonksiyonu Hilbert uzayının tarifinde kullanılacaktır.

Tanım 2.3: X bir iç çarpım uzayı olmak üzere $\| \ \|: X \to R$, $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ olarak tarif edilen $\| \ \|$ dönüşümünü düşünülsün. Bu dönüşüme *iç çarpım normu* denir (Musayev ve Alp, 2000).

Tanım 2.4: X bir iç çarpım uzayı ve $\| \ \|$, iç çarpım normu olsun. X iç çarpım uzayı

$$\|x-y\| = \sqrt{\langle x-y, x-y\rangle}$$

olarak tarif edilen iç çarpım normuna göre tam ise X'e Hilbert uzayı denir (Musayev ve Alp, 2000).

Tanım 2.5: Bir (X,d) metrik uzayı sayılabilir ve yoğun bir alt küme içerirse *ayrılabilir* adını alır. Boş küme ayrılabilir olarak kabul edilir (Musayev ve Alp, 2000).

"Hilbert uzayı" tezde daima "ayrılabilir Hilbert uzayı" anlamında kullanılacaktır.

Tanım 2.6 (cebir) : C, F cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. Her $x, y, z \in C$ ve her $\alpha \in F$ için (vektörler arası çarpma denilen) $\cdot : C \times C \to C$ işlemi aşağıdaki şartları sağlıyorsa C'ye (F üzerinde) *cebir* denir.

C1) $\alpha(x \cdot y) = (\alpha \cdot x) \cdot y = x.(\alpha \cdot y)$

C2) $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$ ve $(x+y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$

C3) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$

Şayet C bir cebir ve her $x, y \in C$ için $x \cdot y = y \cdot x$ ise C'ye *değişmeli* veya *komütatif cebir* denir (Musayev ve Alp, 2000).

Tanım 2.7: X ve Y boş olmayan kümeler olsun. X 'nin her elemanına Y 'nin bir elemanını karşılık getiren bir kurala X 'den Y 'ye bir *dönüşüm* denir (Musayev ve Alp, 2000).

Tanım 2.8: Lineer uzaylarda tanımlı dönüşümlere *operatör* denir (Musayev ve Alp, 2000).

Tanım 2.9: $T : X \to Y$ operatörü X 'den elde edilen her x_1, x_2 ve $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ olmak üzere $T(x_1 + x_2) = Tx_1 + Tx_2$ ve $T(\alpha x) = \alpha T(x)$ şartlarını sağlıyorsa T 'ye *lineer operatör* denir (Musayev ve Alp, 2000).

Tanım 2.10: $(X,\|.\|_X)$ ve $(Y,\|.\|_Y$ normlu uzaylar ve $T:\ X\to Y$ bir lineer dönüşüm olsun. Eğer her $x\in X$ için

$$\|Tx\|_Y\le k\|x\|_X$$

olacak şekilde pozitif bir k reel sayısı varsa T 'ye *sınırlıdır* denir (Musayev ve Alp, 2000).

Uygulamada uzaylar üzerindeki normlar aynı simge ile gösterilir ve

$$\|Tx\|\le k\|x\|$$

yazılır.

Yani, $T:\ X\to Y$ lineer operatörü X 'den elde edilen her sınırlı kümeyi Y de bir başka sınırlı kümeye dönüştürürse T 'ye *sınırlı operatör* denir.

H sonsuz boyutlu ayrılabilir bir kompleks Hilbert uzayı olsun. Biz $B(H)$ ile H üzerindeki bütün sınırlı lineer operatörler cebiri gösterilecektir (Musayev ve Alp, 2000).

Tanım 2.11 (Disk Cebiri) : D ile kompleks düzlemin açık birim yuvarı gösterilsin, yani $D=\{z:|z|<1, z\in \mathbb{C}\}$. Bir *A(D) disk cebiri D* de analitik ve $\Gamma=\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\}$ de (yani, D' nin sınırında) sürekli fonksiyonların cebiridir (Mustafayev, 2006).

Tanım 2.12 (Düzgün operatör topolojisi) : X ve Y normlu uzaylar olsun. *B(X,Y)* uzayında *düzgün operatör topolojisi,*

$$\|T\|=\sup_{\|x\|\le 1}\|Tx\|$$

normuyla oluşturulan *B(X,Y)* uzayının metrik topolojisidir.

Bir başka deyişle; $B(H)$ içindeki operatörlerin bir $\{T_n\}$ dizisi alınsın. $\{T_n\}$ dizisinin H içinde bazı T operatörlerine yakınsadığı düşünülsün. Eğer $\|T_n-T\|\to 0$ ise, yani, T_n-T ‘nin operatör normu 0’a yakınsarsa (H içindeki birim yuvar üzerinden x’leri almak üzere $\|T_nx-Tx\|_H$ ’ın supremumudur), $T_n\to T$ yakınsaması *düzgün operatör topolojisi* içindedir denilir (Şuhubi, 2001).

Tanım 2.13 (Zayıf operatör topolojisi) : H bir Hilbert uzayı olsun ve $B(H)$ içindeki operatörlerin bir $\{T_n\}$ dizisi alınsın. Eğer tüm $x, y \in H$ için $\langle T_n x, y\rangle \to \langle Tx, y\rangle$ olacak şekilde bir $T \in H$ operatörü varsa $T_n \to T$ yakınsaması *zayıf operatör topolojisi* içindedir denilir (Şuhubi, 2001).

Notasyon 2.1: X ve Y normlu uzaylar olsun. X 'den Y 'ye bütün sınırlı lineer dönüşümlerin kümesi $B(X,Y)$ ile gösterilecektir. $T \in B(H)$ ve $x \in X$ ise $T(x)$ yerine Tx kullanılır. Ayrıca,

$$\|T\| = \sup_{\|x\|\le 1}\|Tx\|$$

ile $B(X)$ üzerinde bir norm tanımlanabilir (Musayev ve Alp, 2000).

Tanım 2.14: Notasyon 2.1 de $Y=F$ ise, sınırlı bir T'ye X üzerinde bir *lineer fonksiyoneldir* denir (Musayev ve Alp, 2000) .

Tanım 2.15 (Kompakt operatör) : $T \in B(H)$ operatörü alınsın. $E \subset H$ sınırlı kümesi için $\overline{T(E)}$ kümesi kompakt ise T operatörüne kompakt operatör denir (Conway, 1985).

Tanım 2.16 (Daralma) : H bir kompleks Hilbert uzayı olsun. Her $x \in H$ için

$$\|Tx\| \le \|x\|$$

ise (yani eğer $\|T\| \le 1$ ise) o zaman T operatörüne H üzerinde bir *daralmadır* denir (Conway, 1985).

Tanım 2.17: Normlu bir X uzayında bir $\{ x_n \}$ dizisi verilmiş olsun. Eğer

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n - x\| = 0$$

olacak şekilde bir $x \in X$ elemanı varsa, $\{x_n\}$ dizisi *kuvvetli yakınsaktır* (norma göre yakınsaktır) denir. Bu durum

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \qquad \text{veya kısaca} \quad x_n \to x$$

olarak yazılır (Şuhubi, 2001) .

Tanım 2.18: H Hilbert uzayında bir $\{ x_n \}$ dizisi verilmiş olsun. Eğer

$$\langle x_n , x \rangle \to 0$$

olacak şekilde bir $x \in X$ elemanı varsa, $\{ x_n \}$ dizisi x'e *zayıf yakınsaktır* denir ve

$$x_n \xrightarrow{z} x$$

şeklinde yazılır (Şuhubi, 2001) .

Teorem 2.1: H bir Hilbert uzayı olsun ve $A \in B(H)$ operatörü verilsin. Eğer A operatörü kompakt operatör ise, o halde H 'da zayıf yakınsayan bir diziyi kuvvetli yakınsayan bir diziye dönüştürür, bir başka deyişle eğer $n \to \infty$ için

$$x_n \xrightarrow{z} x_0 \Rightarrow Ax_n \xrightarrow{k} Ax_0$$

olur (Conway, 1985).

Sonuç 2.1: H bir Hilbert uzayı ve $A \in B(H)$ olsun Eğer $n \to \infty$ için

$$x_n \xrightarrow{z} x_0 , y_n \xrightarrow{z} y_0 \Rightarrow < Ax_n , y_n > \to < Ax_0 , y_0 >$$

ise A operatörüne *kompakt lineer operatör* adı verilir (Conway, 1985).

Tanım 2.19 (Spektrum) : H bir Hilbert uzayı olsun. $I \in B(H)$ birim operatör ve $T \in B(H)$ operatörü alınsın. O zaman T 'nin *spektrumu* ;

$$\sigma(T) = \{ \lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ tersinir değil } \}$$

dir (Şuhubi, 2001).

Örnek 2.1 : Sonlu boyutlu bir X uzayı üzerinde tanımlı T operatörü verilsin. A ile T operatörünün temsil matrisini gösterelim. Bu matrise ait karakteristik polinomun kökleri ile elde edilen özdeğerler operatörün spektrumunu oluşturur (Şuhubi, 2001).

Tanım 2.20 (Komutant) : H Hilbert uzayı olsun. $T \in B(H)$ olmak üzere $\{ X \in B(H) : XT = TX \}$ kümesine *T operatörünün komutantı* denir ve $\{T\}'$ ile gösterilir (Conway, 1985).

Tanım 2.21 (Bir operatörün Adjointi) : H Hilbert uzayı ve $T : H \to H$ sınırlı lineer operatör olsun. O halde

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, By\rangle$$

olacak şekilde bir $B \in B(H)$ operatörü vardır. B operatörüne T operatörünün adjointi denir ve $B = T^*$ şeklinde gösterilir (Conway, 1985).

Tanım 2.22 (Üniter operatör) : H Hilbert uzayı olsun. Eğer $U \in B(H)$ operatörü $UU^* = U^*U = I_H$ şartını sağlarsa bu operatöre *üniter operatör* denir (Conway, 1985).

Tanım 2.23 (Hiçbir yerde üniter olmayan operatör) : $T \in B(H)$ bir daralma operatörü olsun. Farzedelim ki T operatörünün öyle bir invariant alt uzayı yoktur ki, T 'nin bu alt uzaya kısıtlanışı üniter olsun. Bu durumda T operatörüne *hiçbir yerde üniter olmayan operatör* denir (Mustafayev ve Hüseynov, 2012) .

Tanım 2.24 (Normal operatör) : H Hilbert uzayı olsun. Eğer $N \in B(H)$ operatörü $NN^* = N^*N$ şartını sağlarsa bu operatöre *normal operatör* denir (Conway, 1985).

Tanım (İzometrik operatör): H Hilbert uzayı olsun. Eğer $T \in B(H)$ operatörü $T^*T = I_H$ şartını sağlarsa bu operatöre *izometrik operatör* denir (Conway, 1985).

Notasyon 2.2: $\boldsymbol{P}$ ile tüm kompleks katsayılı polinomlar kümesi gösterilecektir. Herhangi bir $T \in B(H)$ operatörü ve bir $P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_n z^n$ polinomu için $P(T) = a_0 + a_1 T + a_2 T^2 + ... + a_n T^n$ olarak tanımlanabilir. Bu şekilde tanımlanan tüm polinomların operatör-normuna göre kapanışı alındığında bir operatör cebiri elde edilmiş olunur. Bu operatör cebiri A_T ile gösterilecektir (Mustafayev, 2006).

Notasyon 2.3: İyi bilinir ki, eğer T hiçbir yerde üniter olmayan daralma operatörü ise o halde $f(T)$ ($f \in H^\infty$) Nagy-Foias fonksiyonel hesabına göre tanımlanabilir (Nagy, 1974; Bölüm 3). $H^\infty(T)$ ile $\{f(T) : f \in H^\infty\}$ kümesi gösterilecektir (Mustafayev ve Hüseynov, 2012).

Tanım 2.25 **(C_0 −daralması) :** H Hilbert uzayı olsun. $T \in B(H)$ hiçbir yerde üniter olmayan bir daralma operatörü olsun. Eğer $f(T)=0$ olacak şekilde bir $f \in H^\infty$ fonksiyonu bulunabilirse, bu taktirde T operatörü C_0- *daralması* olarak adlandırılır (Conway, 1985).

Tanım 2.26 (Öz üniter operatör) : H Hilbert uzayı olsun. Eğer $I_H - T^*T$ ve $I_H - TT^*$ operatörleri kompakt ise $T \in B(H)$ operatörüne *öz üniter operatör* denir (Mustafayev ve Hüseynov, 2012).

Tanım 2.27 (Öz izometrik operatör) : Eğer $I_H - T^*T$ kompakt ise T bir *öz izometrik operatördür* denir (Mustafayev ve Hüseynov, 2012).

Tanım 2.28 (Öz normal operatör) : Eğer $TT^* - T^*T$ kompakt ise T bir *öz normal operatör* denir (Mustafayev ve Hüseynov, 2012).

Tanım 2.29 (Gelfand Dönüşümü) : A değişmeli Banach cebirinin tüm kompleks homomorfizmalarının kümesi Δ olsun. Her $x \in A$ elemanı için,

$$\hat{x}(h) = h(x) \qquad (h \in \Delta)$$

olan $\hat{x} : \Delta \to \mathbb{C}$ dönüşümüne x elemanının *Gelfand dönüşümü* denir (Conway, 1985).

3. GİRİŞ

H sonsuz boyutlu ayrılabilir bir kompleks Hilbert uzayı ve $B(H)$, H üzerindeki bütün sınırlı lineer operatörler cebiri olsun. Doğal olarak, $T\in B(H)$'ın spektrumu $\sigma(T)$ ile gösterilir. $T\in B(H)$'ın sağ spektrumu $\sigma_r(T)$ ile ve $T\in B(H)$ 'ın sol spektrumu $\sigma_l(T)$ ile gösterilir. Kompleks düzlemdeki birim daire $\Gamma = \{\xi \in \mathbb{C} : |\xi| = 1\}$ ile gösterilecektir. Burada, $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ açık birim diskini belirtir. Disk-cebiri ve D üzerindeki bütün sınırlı analitik fonksiyonların cebiri sırasıyla $A(D)$ ve $H^\infty := H^\infty(D)$ ile gösterilir.

$T\in B(H)$ alındığında, A_T ile T içindeki bütün polinomların düzgün operatör topolojisindeki kapanışı gösterilir. A_T'nin Gelfand uzayı $\sigma_{A_T}(T)$ ile eşleştirilebilir ki; bu da T operatörünün A_T cebirine göre spektrumudur. $\sigma(T)$, $\sigma_{A_T}(T)$'in (kapalı) bir altkümesi olduğu için, her $\lambda\in\sigma(T)$ için, A_T üzerinde bir çarpımsal ϕ_λ fonksiyoneli vardır öyle ki $\phi_\lambda(T) = \lambda$ 'dır. $\hat{S}$ ile $S\in A_T$'nin Gelfand dönüşümü gösterilecektir. Burada ve sonrasında $\lambda\in\sigma(T)$ olmak üzere $\hat{S}(\phi_\lambda)$ $(=\phi_\lambda(S))$ yerine, $\hat{S}(\lambda)$ gösterimi kullanılacaktır. Dikkat edelim ki $\lambda \to \hat{S}(\lambda)$ dönüşümü $\sigma(T)$ üzerinde bir sürekli fonksiyondur.

$\mathrm{T} \in \mathrm{B(H)}$'ın üniter spektrumu $\sigma(T) \cap \Gamma$ ile gösterilir. Shilov'un Teoreminden (Larsen, 1973; Teorem 2.3.1) anlaşılır ki, eğer T bir daralma operatörü ise o halde $\sigma_{A_T}(T) \cap \Gamma = \sigma(T) \cap \Gamma$ dir.

H üzerinde tanımlı bir T daralma operatörünün bir altuzaya kısıtlanışı üniter olacak şekilde bir alt uzayı yok ise bu operatöre hiçbir yerde üniter olmayan operatör denir. Eğer T hiçbir yerde üniter olmayan bir daralma operatörü ise, o halde zayıf operatör topolojisi içinde $T^n \to 0$ dir (Muhly, 1971; Lemma 3.3). İyi bilinir ki, eğer T hiçbir yerde üniter olmayan daralma operatörü ise o halde $f(T)$ ($f\in H^\infty$) Nagy-Foias fonksiyonel hesabının yardımıyla tanımlanabilir (Nagy ve Foias 1970. Bölüm 3). $H^\infty(T) := \{ f(T) : f\in H^\infty \}$ diyelim. T hiçbir yerde üniter olmayan bir daralma operatörü için eğer $f(T) = 0$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir $f\in H^\infty$ fonksiyonu varsa T operatörüne C_0- daralması denir. Nagy (1974) ispatladı ki, eğer T bir C_0- daralması ise o halde T 'nin komutantı $\{T\}' := \{S \in B(H) : TS = ST\}$ sıfırdan farklı bir kompakt operatör içerir fakat $H^{\infty}(T)$ içinde sıfırdan farklı bir kompakt operatör bulunmaz ve tek kompakt operatör sıfırdır. Hatırlanacağı üzere eğer hem $I_{\mathrm{H}} - T^{*}T$ operatörü hem de $I_{\mathrm{H}} - TT^{*}$ operatörü kompakt ise $T \in B(H)$ 'ın öz üniter olduğu söylenebilir. Nordgren (1975) ispatladı ki, eğer T bir öz üniter $C_0 -$ daralma operatörü ise o halde $H^{\infty}(T)$ sıfırdan farklı bir kompakt operatör içerir.

Eğer T operatörü H üzerinde bir daralma operatörü ise o halde von Neumann eşitsizliğinden dolayı değerler kümesi yoğun $h{:}A(D) \to A_T$ cebirsel daralma homomorfizmi vardır öyle ki $h(1)=I_{\mathrm{H}}$ ve $h(z)=T$ dir. $f(T){:=}h(f)$, $f \in A(D)$ gösterimi kullanılacaktır. Anlaşıldığı üzere tüm $f \in A(D)$ için $\|f(T)\| \le \|f\|_{\infty}$ eşitsizliği yazılabilir.

Hatırlanacağı üzere eğer $I_{\mathrm{H}} - T^{*}T$ operatörü kompakt ise $T \in B(H)$ operatörü öz izometrik operatör olarak adlandırılır. Kellay ve Zarrabi (2009) ispatladı ki eğer T öz izometrik daralma operatörü $D \backslash \sigma(T) \neq \varnothing$ şartını sağlıyorsa (buradan T bir üniter operatörün bir kompakt pertürbasyonudur ve böylece T operatörü öz izometrik operatördür) ve eğer $f \in A(D)$ fonksiyonu $\sigma(T) \cap \Gamma$ üzerinde sıfıra eşit olursa o halde $f(T)$ kompakttır. Dikkat edileceği üzere yukarıdaki şartlar altında $\sigma(T) \cap \Gamma$ 'nın Lebesgue ölçümü sıfır olmak zorundadır. Burada ayrıca gösteriliyor ki, eğer T bir öz izometrik $C_0 -$ daralması ise o halde ($f \in H^{\infty}$) $f(T)$ 'nin kompakt olması için yeter ve gerek koşul $\lim_{n \to \infty} \|T^{n} f(T)\| = 0$ olmasıdır. Bu sonuçların ispatlarında esasen $A(D)$ 'nin kapalı ideallerinin yapıları hakkındaki Beurling-Rudin Teoremi ve Corona Teoremi kullanılır.

$K(H)$ ile H üzerindeki kompakt operatörlerin idealini gösterilecektir. $B(H)/K(H)$ bölüm cebiri Calkin cebiri denilen bir $C^{*}-$cebiridir. $\pi : B(H) \to B(H)/K(H)$ doğal dönüşüm olsun. $T \in B(H)$'ın $\sigma_e(T)$ öz spektrumu Calkin cebirindeki $\pi(T)$'nin spektrumudur. Bilindiği üzere, $\sigma_e(T)$ kümesi $\sigma(T)$'nin boştan farklı kompakt bir alt kümesidir. Benzer şekilde, T 'nin sağ ve sol öz spektrumu $\sigma_{l_e}(T) := \sigma_l(\pi(T))$ ve $\sigma_{r_e}(T) := \sigma_r(\pi(T))$ şeklinde tanımlanır. Ayrıca hatırlanacağı üzere eğer $\pi(T)$ dönüşümü Calkin cebiri içinde (sol, sağ) tersinir ise $T\in B(H)$ operatörü bir (sol, sağ) Fredholm operatörüdür.

Bu tezin ana sonuçları aşağıdaki şekilde özetlenebilir. T operatörü H üzerinde bir öz izometrik operatör olsun. Eğer $S \in A_T$ 'nin Gelfand dönüşümü $\sigma_e(T)$ kümesi (veya, $\sigma_e(T) \cap \Gamma$ kümesi üzerinde) üzerinde sıfıra eşit olursa, o halde S operatörü kompakttır. T operatörünün hiçbir yerde üniter olmayan daralma operatörü olduğu durumda $S \in A_T$ 'nin kompaktlığı $\hat{S}$ 'nin $\sigma(T) \cap \Gamma$ kümesi üzerinde sıfıra eşit olduğu anlamına gelir. Ayrıca gösterilir ki keyfi $S\in B(H)$ için

$$\lim_{n\to\infty} \left\| T^n S \right\| = 0$$

şartı S 'nin kompakt olduğu anlamına gelir. T 'nin hiçbir yerde üniter olmayan bir daralma operatörü olduğu durumda, $S \in \{T\}'$ için terside ayrıca doğrudur. Dahası, $S \in \{T\}'$ 'nin kompaktlığı ergodik şartlar aracılığıyla ifade edilir:

Eğer her $\xi \in \sigma_e(T)$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left\| \sum_{k=1}^{n} \xi^{-k} T^k S \right\| = 0$$

ise (veya, $\xi \in \sigma_e(T) \cap \Gamma$), o halde S operatörü kompakttır.

Öz normal operatörler için benzer sonuçlar ayrıca elde edilebilir. Bu sonuçlardan biri aşağıdaki gibidir:

T bir öz normal Fredholm operatörü olsun ve $S \in \{T\}'$ alınsın. Eğer her $\lambda \in \sigma_e(T)$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda^{-k} T^k S \right\| = 0$$

ise, o halde S operatörü kompakttır (Mustafayev ve Hüseynov, 2012).

4. ÖZ İZOMETRİK OPERATÖRLER

T bir öz izometrik operatör olsun, yani $I_{\mathrm{H}} - T^*T$ operatörü kompakttır. Bu bölümde, T 'nin komutantından elde edilen S operatörünün kompaktlığı için S ve T operatörleri üzerinde bazı gerek ve yeter şartlar verilecektir (Mustafayev ve Hüseynov, 2012).

Aşağıdaki yardımcı sonuçlar ile başlanacaktır.

Önerme 4.1. : Zayıf operatör topolojisi içinde $T^n \to 0$ olacak şekilde $T \in B(H)$ alalım. O halde her $S \in \{T\}' \cap K(H)$ için

$$\lim_{n\to\infty} \|T^n S\| = 0$$

dır (Mustafayev ve Hüseynov, 2012).

İspat = Eğer $S \in \{T\}' \cap K(H)$ alınırsa o halde her $x \in H$ için

$$\lim_{n\to\infty} \|T^n Sx\| = \lim_{n\to\infty} \|ST^n x\| = 0$$

yazılabilir.

$\{Sx : \|x\| \le 1\}$ kümesi ön kompakt olduğundan verilen bir $\varepsilon > 0$ için bir sonlu boyutlu ε-ağı vardır. Sözüne edilen bu sonlu kümeyi $\{Sx_1, ..., Sx_k\}$ ile gösterilecektir. ($\|x_i\| \le 1$ (i=1,…,k)) . Netice olarak,

$$\|T^n S\| \le \max_i \{\|T^n Sx_i\|\} + \varepsilon \quad (n \in \mathrm{N})$$

elde edilir. Buradan,

$$\lim_{n\to\infty} \|T^n S\| = 0$$

olur.

Hatırlanacağı üzere, H üzerinde bir T daralma operatörü her $x \in H$ için $T^n x \to 0$ ve $T^{*n} x \to 0$ sağlarsa T operatörü C_{00} sınıfındandır denilir. İyi bilinir ki (Nagy, 1974; Önerme II.6.7) $C_0 \subset C_{00}$ dır.

(Nordgren, 1975; Teorem 3.3)' de gösterilir ki, eğer $H^{\infty}(T)\cap K(H)\neq\{0\}$ ise o halde T operatörü C_{00} sınıfındandır. Not edilsin ki bu sonuç aşağıdaki gibi Nagy-Foias (Nagy, 1974; s.140) 'ın genişleme argümanlarından elde edilir.

Tüm $x\in H$ için $\lim_{n\to\infty}\|T^n x\|=0$ gösterilmesi yeterlidir. O halde sonuç T^* 'a uygulanabilir ve $f(\mathrm{T})^*=\tilde{f}(\mathrm{T}^*)$ kullanılabilir ki, $\tilde{f}(z)=\overline{f(z)}$ dir. Şimdi farz edilsin ki $f\in H^{\infty}$ fonksiyonu vardır öyle ki $f(T)$ operatörü kompakttır. T operatörü hiçbir yerde üniter olmayan bir daralma operatörü olduğu için, zayıf operatör topolojisi içinde $T^n\to 0$ dır (Muhly, 1971; Lemma 3.3) ve böylelikle,

$$\lim_{n\to\infty}\|T^n f(T)x\|=0\,,\ \ \forall\, x\in H$$

dır.

f_i iç fonksiyon ve f_e dış fonksiyon olmak üzere $f=f_i f_e$ yazılsın. $f_e(T)$ yoğun değerler kümesine sahip olduğu için (Nagy, 1974; Önerme III.3.1], buradan $\forall\, x\in H$ için $\lim_{n\to\infty}\|T^n f_i(T)x\|=0$ olur.

Eğer U operatörü T 'nin minimal üniter genişlemesi ise o halde

$$\lim_{n\to\infty}U^{-n}T^n x=Px$$

eşitliği vardır öyle ki P operatörü genişleme uzayının kalıntı parçası üzerinde dik izdüşümdür (Nagy, 1970; Önerme II.3.1). Buradan $\lim_{n\to\infty}\|T^n x\|=\|Px\|$ $(x\in H)$. $Px=0$ olduğu gösterilmelidir. Dahası, $U^{-m}PT^m x=\lim_{n\to\infty}U^{-m-n}T^{m+n}x=Px$ yazılabilir ki bu $PT^m x=U^m Px$ $(m\in N)$ anlamına gelir. Sonuç olarak,

$$PT^n f_i(T)x=U^n f_i(U)Px\,,\ (\forall n\in N)$$

eşitliği elde edilmiş olunur.

$f_i(U)$ üniter olduğu için,

$$\begin{aligned}\|Px\|&=\|U^n f_i(U)Px\|\\&=\|PT^n f_i(T)x\|\\&\leq\|T^n f_i(T)x\|\to 0\,,\ (n\to\infty)\end{aligned}$$

yazılabilir.

Sonuç 4.1 : T operatörü H üzerinde hiçbir yerde üniter olmayan bir daralma operatörü olsun. Eğer $H^{\infty}(T) \cap K(H) \neq \{0\}$ ise o halde her $S \in K(H)$ için,

$$\lim_{n\to\infty}\left\|T^n S\right\| = 0 \quad \text{ve} \quad \lim_{n\to\infty}\left\|ST^n\right\| = 0$$

dır (Mustafayev ve Hüseynov, 2012).

İspat : T operatörü C_{00} sınıfından olduğu için,

$$\lim_{n\to\infty}\left\|T^n Sx\right\| = 0 \quad \text{ve} \quad \lim_{n\to\infty}\left\|T^{*n} S^* x\right\| = 0$$

elde edilir. Tüm $S \in K(H)$ ve $x \in H$ için Önerme 4.1'in ispatında olduğu gibi,

$$\lim_{n\to\infty}\left\|T^n S\right\| = 0 \ \text{ve} \ \lim_{n\to\infty}\left\|ST^n\right\| = 0$$

olduğu görülebilir.

Önerme 4.2 : $T \in B(H)$ operatörü zayıf operatör topolojisi içinde $T^n \to 0$ olan bir operatör olsun. Eğer $S \in A_T$ kompakt ise o halde onun Gelfand dönüşümü

$$\{\lambda \in \sigma(T) : |\lambda| \geq 1\}$$

üzerinde sıfır'a eşit olur (Mustafayev ve Hüseynov, 2012).

İspat : Önceki önermeden dolayı $\lim_{n\to\infty}\left\|T^n S\right\| = 0$ eşitliği yazılabilir. Diğer taraftan her $\lambda \in \sigma(T)$ için, A_T üzerinde bir çarpımsal ϕ_λ fonksiyoneli bulunur öyle ki

$$\phi_\lambda(T) = \lambda$$

eşitliği vardır. ϕ_λ fonksiyonelinin normu bir olduğu için

$$\begin{aligned} |\lambda|^n \left|\hat{S}(\lambda)\right| &= \left|\phi_\lambda(T^n S)\right| \\ &\leq \left\|T^n S\right\| \to 0, \ (n \to \infty) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan eğer $|\lambda| \geq 1$ ise o halde $\hat{S}(\lambda) = 0$ dır.

Hatırlanacağı üzere (Muhly, 1971; Lemma 3.3) eğer T operatörü hiçbir yerde üniter olmayan bir daralma operatörü ise o halde zayıf operatör topolojisi içinde $T^n \to 0$ dır. Böylelikle aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.2 : T operatörü hiçbir yerde üniter olmayan bir daralma operatörü olsun ve $S \in A_T$ alalım. Eğer S operatörü kompakt ise o halde onun Gelfand dönüşümü $\sigma(T) \cap \Gamma$ üzerinde sıfıra eşittir (Mustafayev ve Hüseynov, 2012).

A cebiri e birim elemanlı bir $C^* -$cebiri olsun. S_{A} ile A üzerindeki bütün pür durumların bir kümesi gösterilsin. Biliniyor ki (Naimark, 1968; Sonuç V.23.3]) eğer $a \in A$ ise o halde $\sigma_l(a)$ tüm $\lambda \in \mathbb{C}$ 'lerden oluşur öyle ki $\lambda \in f(a)$ ve $f(a^* a) = f(a^*) f(a)$ olacak şekilde $f \in S_A$ vardır. Varsayılsın ki $a^* a = e$ dir. Eğer $\lambda \in \sigma_l(a)$ ise o halde

$$|\lambda|^2 = \overline{f(a)} f(a) = f(a^*) f(a) = f(a^* a) = f(e) = 1$$

eşitlikleri elde edilir. Bu gösterir ki $\sigma_l(a) \subset \Gamma$ dir. Benzer şekilde, eğer a elemanı A'nın normal bir elemanı ise o halde $\sigma_l(a) = \sigma_r(a) = \sigma(a)$ olduğu görülebilir. Özellikle a elemanı A'nın bir üniter elemanı ise o halde $\sigma_l(a) = \sigma_r(a) = \sigma(a) \subset \Gamma$ dir.

T operatörü H üzerinde bir öz izometrik operatör olsun. $\pi(T^*)\pi(T) = \pi(I_{\mathrm{H}})$ olduğu için ve yukarıda gösterildiği üzere $\sigma_{le}(T) = \sigma_l(\pi(T)) \subset \Gamma$ olur. Ayrıca dikkat edileceği üzere eğer T öz üniter ise o halde $\sigma_{le}(T) = \sigma_{re}(T) = \sigma_e(T) \subset \Gamma$ dir (Mustafayev ve Hüseynov, 2012).

Aşağıda ki teorem bu bölümün birinci ana sonucudur.

Teorem 4.1 : T bir öz izometrik operatör olsun. Eğer $S \in A_T$ 'nin Gelfand dönüşümü $\sigma_{le}(T)$ üzerinde (veya, $\sigma_{re}(T) \cap \Gamma$ üzerinde) sıfıra eşit ise, o halde S kompakttır (Mustafayev ve Hüseynov, 2012).

İspat için bazı yardımcı önermeler verilmelidir.

Önerme 4.3 :

(a) Eğer V operatörü H üzerinde üniter olmayan bir izometri ise o halde

$$\sigma_l(V)=\Gamma \ ; \ \sigma_r(V)=\sigma(V)=\overline{D}$$

(b) Eğer V operatörü H üzerinde keyfi bir izometri ise o halde

$\sigma_l(V)=\sigma_r(V)\cap\Gamma=\sigma(V)\cap\Gamma$ dır (Mustafayev ve Hüseynov, 2012).

İspat :

(a) Yukarıda görüldüğü üzere $\sigma_l(V)\subset\Gamma$ dir. Diğer taraftan biliniyor ki eğer V üniter olmayan izometri ise o halde $\sigma(T)=\overline{D}$ dir. Buradan $\Gamma=\partial\sigma(V)\subset\sigma_l(V)$ dir. $\lambda\in D$ alınsın. $\lambda\in\sigma(V)$ olduğu için,

$$\|(V-\lambda I_{\mathrm{H}})x\|\geq(1-|\lambda|)\|x\| \qquad (x\in H)$$

Eşitsizliğinden $V-\lambda I_{\mathrm{H}}$ 'ın değer kümesinin kapalı olduğu ve $(V-\lambda I_{\mathrm{H}})H\neq H$ olduğu anlaşılır. Netice olarak, bazı $x\in H\setminus\{0\}$ için $V^{*}x=\overline{\lambda}x$ eşitliği doğrudur. Diğer taraftan biliniyor ki herhangi $T\in B(H)$ için,

$$\sigma_r(T)=\{\lambda\in\mathbb{C}:\inf\|(T^{*}-\overline{\lambda})x\|=0,\ \|x\|=1\}$$

(Conway, 1985; s.200). Buradan $\lambda\in\sigma_r(V)$ dir ve böylelikle $D\subset\sigma_r(V)$ dir. $\sigma_r(V)$ kapalı olduğu için, $\sigma_r(V)=\overline{D}$ elde edilir.

(b) Eğer V operatörü üniter ise o halde $\sigma_l(V)=\sigma_r(V)=\sigma(V)$ eşitliği vardır. Buradan ve (a) 'dan dolayı (b) ispat edilmiş olur.

Yukarıdan görüldüğü üzere eğer V üniter olmayan bir izometri ise o halde $\sigma(V)=\overline{D}$ eşitliği vardır. Von Neumann eşitsizliğinden ve H üzerinde keyfi bir V izometrisi için spektrum teoreminden dolayı

$$\|f(V)\|=\sup_{\xi\in\sigma(V)\cap\Gamma}|f(\xi)|\ , \quad \forall f\in A(D) \tag{4.1}$$

olur.

H_0 ile H üzerinde ki sıfıra zayıf yakınsayan bütün $\{x_n\}$ dizilerinin lineer uzayı gösterilsin. H_0 uzayı üzerinde aşağıdaki gibi bir yarı iç çarpım tanımlansın:

$$<\{x_n\},\{y_n\}>= l.i.m. < x_n, y_n >$$

öyle ki $l.i.m.$ bir Banach limitidir.

$$E=\{\{x_n\}\in H_0 : l.i.m.\|x_n\|^2 = 0\}$$

kümesini alınsın. O halde H_0 / E uzayı aşağıdaki şekilde tanımlanan iç çarpıma göre bir ön-Hilbert uzayı olur.

$$<\{x_n\}+E,\{y_n\}+E>= l.i.m. < x_n, y_n >$$

$\widetilde{H}$ ile H_0 / E uzayının $\|\{x_n\}+E\| = (l.i.m._n\|x_n\|^2)^{\frac{1}{2}}$ normuna göre tamlanışını gösterilsin. O halde $\widetilde{H}$ bir Hilbert uzayıdır.

Verilen bir $T \in B(H)$ için aşağıdaki şekilde H_0 / E uzayı üzerinde $\widetilde{T}$ operatörü tanımlanır.

$$\widetilde{T} : \{x_n\}+E \mapsto \{\mathrm{T}x_n\}+E$$

O halde elde edilir ki ;

$$\begin{aligned}\|\widetilde{T}(\{x_n\}+E)\| &= (l.i.m.\|Tx_n\|^2)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|T\|(l.i.m.\|x_n\|^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|T\|\|\{x_n\}+E\|\end{aligned}$$

H_0 / E uzayı $\widetilde{H}$ içinde yoğun olduğu için $\widetilde{T}$ operatörü bütün $\widetilde{H}$ 'a genişletilebilir. Bu genişleme $\widetilde{T}$ ile gösterilecektir. Açıkça, $\|\widetilde{T}\| \leq \|T\|$ eşitsizliği olduğu aşikardır. $(\widetilde{H},\widetilde{T})$ çiftine (bazen $\widetilde{T}$ operatörüne) T operatörünün doğurduğu limit operatörü denilecektir.

Önerme 4.4 : $T \in B(H)$ alınsın ve $\widetilde{T}$ operatörü T 'nin doğurduğu limit operatörü olsun. O halde aşağıdaki iddialar geçerli olur:

(a) $T \mapsto \widetilde{T}$ dönüşümü bir cebirsel daralma *-homomorfizmasıdır.

(b) T 'nin kompakt olması için gerek ve yeter şart $\widetilde{T}$ =0 olmasıdır.

(c) $\sigma_l(\tilde{T}) \subset \sigma_{le}(T)$, $\sigma_r(\tilde{T}) \subset \sigma_{re}(T)$ ve $\sigma(\tilde{T}) \subset \sigma_e(T)$

(d) T'nin bir öz izometrik operatör olması için gerek ve yeter şart $\tilde{T}$'nun bir izometri olmasıdır.

(T operatörünün öz üniter olması için gerek ve yeter şart $\tilde{T}$ operatörünün üniter olmasıdır ve T operatörünün öz normal operatör olması için gerek ve yeter şart $\tilde{T}$ operatörünün normal operatör olmasıdır.**)**

(e) Eğer T bir öz izometrik operatör ise ve eğer $\sigma_{le}(T) \neq \Gamma$ (veya, $\sigma_{re}(T) \neq \overline{D}$), o halde T öz üniterdir (Mustafayev ve Hüseynov, 2012).

Şimdi Teorem 4.1'in ispatı verilebilir.

Teorem 4.1 'in ispatı : Farz edilsin ki $S \in A_T$'nin Gelfand dönüşümü $\sigma_{le}(T)$ üzerinde sıfıra eşittir. $S \in A_T$ olduğu için, polinomların bir $\{P_n\}$ dizisi vardır öyle ki

$$\lim_{n\to\infty}\|P_n(T) - S\| = 0$$

dır. Sırasıyla, $\tilde{T}$ ve $\tilde{S}$ operatörleri T ve S operatörlerinin doğurduğu limit operatörleri olsun. Önerme 4.4'ün (a) şıkkına göre

$$\lim_{n\to\infty}\|P_n(\tilde{T}) - \tilde{S}\| = 0$$

elde edilir.

Dikkat edileceği üzere her $\xi \in \sigma_{le}(T)$ için A_T üzerinde bir çarpımsal ϕ_ξ fonksiyoneli vardır öyle ki $\phi_\xi(T) = \xi$ dir. Sonrasında,

$$\begin{aligned} |P_n(\xi)| &= |P_n(\xi) - \hat{S}(\xi)| \\ &= |\phi_\xi(P_n(T) - S)| \\ &\leq \|P_n(T) - S\| \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $P_n(\xi)$ polinomlar dizisinin $\sigma_{le}(T)$ içinde sıfıra düzgün yakınsak olduğu görülebilir. Yani, $\lim_{n\to\infty} P_n(\xi) = 0$ dır. Diğer taraftan, Önerme 4.4 'ün (d), (c) şıkları ve Önerme 4.3'ün (b) şıkkından $\tilde{T}$ nun bir izometri olduğu ve

$\sigma(T) \cap \Gamma \subset \sigma_{le}(T)$ olduğu anlaşılır. Buradan $P_n(\xi)$ polinomlar dizisinin $\sigma(T) \cap \Gamma$ kümesi üzerinde sıfıra düzgün yakınsak olduğu anlaşılır. Yani,

$$\lim_{n \to \infty} P_n(\xi) = 0$$

dır. Şimdi (4.1) eşitliğini dikkate alındığında elde edilir ki

$$\lim_{n \to \infty} \left\| P_n(\tilde{T}) \right\| = 0$$

dır. Böylelikle, $\tilde{S} = 0$ dır. Önerme 4.4'ün (b) şıkkına göre S kompakttır.

Eğer K kompakt ise, $C(K)$ ile K üzerinde bütün sürekli fonksiyonların cebiri gösterilir. Aşağıdaki önerme gösterir ki "T öz izometriktir" şartı Teorem 4.1 içinde gereklidir.

Önerme 4.5 : T operatörü H üzerinde bir daralma operatörü ve K kümesi sıfır Lebesgue ölçümüne sahip Γ'nin kapalı bir alt kümesi olsun. Farz edilsin ki $f(T)$ operatörü K üzerinde sıfıra eşit olan her $f \in A(D)$ için kompakttır. O halde, T operatörü öz üniterdir ve $\sigma_e(T) \subset K$ dır (Mustafayev ve Hüseynov, 2012).

İspat : $\omega : C(K) \to B(H)/K(\mathrm{H})$ dönüşümünü aşağıdaki şekilde tanımlansın. Verilen bir $f \in C(K)$ için Rudin-Carleson Teoreminden (Beauzamy, 1988; Teorem VIII.7.4) dolayı bir $\bar{f} \in A(D)$ fonksiyonu bulunur öyle ki tüm $\xi \in K$ için

$$\bar{f}(\xi) = f(\xi) \quad \text{ve} \quad \left\| \bar{f} \right\|_\infty = \sup_{\xi \in K} |f(\xi)|$$

dır.

$\omega(f) := \pi(\bar{f}(T))$ olarak tanımlansın. O halde, ω iyi tanımlıdır ve $\pi : B(H) \to B(H)/K(H)$ doğal dönüşüm olmak üzere,

$$\left\| W(f) \right\| = \left\| \pi(\bar{f}(T)) \right\| \le \left\| \bar{f}(T) \right\| \le \left\| \bar{f} \right\|_\infty = \sup_{\xi \in K} |f(\xi)|$$

olur. W'nin bir cebirsel daralma-homomorfizmi olduğu kolayca görülür.

f_0, f_1 ve f_{-1} fonksiyonları K üzerinde $f_0(\xi) = 1$, $f_1(\xi) = \xi$ ve $f_{-1}(\xi) = \bar{\xi}$ şeklinde tanımlanan fonksiyonlar olsun. O halde, $\omega(f_0) = \pi(I_{\mathrm{H}})$, $\omega(f_1) = \pi(T)$ ve $\omega(f_{-1}) = \pi(S)$ elde edilir ki $S = \bar{f}_{-1}(T)$ dir. Öbür taraftan, $\pi(T)$ nin tersi $\pi(S)$ dir ve

$\|\pi(S)\| \leq 1$ dir. Böylelikle, $\|\pi(T)\| = \|\pi(S)\| = 1$ elde edilir. Netice olarak, $\pi(T)$ Calkin cebirinin bir üniter elemanıdır. Bu T 'nin öz üniter olduğu anlamına gelir.

$\sigma_e(T) \subset \Gamma$ alınsın. Gösterilecektir ki $\sigma_e(T) \subset K$ dır. $\xi_0 \in \Gamma \backslash K$ alınsın. K üzerinde $f(\xi) = (\xi_0 - \xi)^{-1}$ fonksiyonunu düşünülsün. $(\xi_0 - z)\bar{f}(z) - 1$ fonksiyonu K üzerinde sıfıra eşit olduğu için $\xi_0 I_{\mathrm{H}} - T)\bar{f}(T) - I_{\mathrm{H}}$ operatörü kompakttır. Bu gösterir ki $\xi_0 \notin \sigma_e(T)$ dir.

Aşağıdaki Teorem 4.1'in bazı sonuçlarını verilecektir.

Sonuç 4.3 : T bir öz üniter , fakat üniter olmayan bir daralma operatörü olsun. $\sigma_e(T)$ kümesinin Lebesgue ölçümünün sıfır olduğunu varsayılsın. O halde, bir $f \in A(D)$ fonksiyonu vardır öyle ki $f(T)$ sıfırdan farklı bir kompakt operatördür (Mustafayev ve Hüseynov, 2012).

İspat : Teorem 4.1 ile göstermek yeterlidir ki $f \in A(D)$ vardır öyle ki f fonksiyonu $\sigma_e(T)$ üzerinde sıfıra eşittir fakat $f(T) \neq 0$ dır. Tersine varsayılsın ki $\sigma_e(T)$ üzerinde sıfıra eşit her $f \in A(D)$ için $f(T) = 0$ olsun. $w(f) := \bar{f}(T)$ olacak şekilde $w : C(\sigma_e(T)) \to A_T$ dönüşümü tanımlansın öyle ki $\bar{f}$ fonksiyonu $f \in C(\sigma_e(T))$ 'nin Rudin-Carleson genişlemesidir. O halde ω iyi tanımlıdır ve

$$\|\omega(f)\| \leq \sup_{\xi \in K} |f(\xi)|$$

dir. ω'nin cebirsel daralma homomorfizması olduğu kolayca görülür. f_0, f_1 ve f_{-1}'ler $\sigma_e(T)$ üzerinde fonksiyonlar olsun öyle ki $f_0(\xi) = 1$, $f_1(\xi) = \xi$ ve $f_{-1}(\xi) = \bar{\xi}$ şeklinde tanımlansın. O halde, $\omega(f_0) = I_{\mathrm{H}}, \omega(f_1) = T$ ve $\omega(f_{-1}) = S$ elde edilir öyle ki $S = \bar{f}_{-1}(T)$ dir. Görüleceği üzere S operatörü T 'nin tersidir ve $\|S\| \leq 1$ dir. Böylelikle $\|T\| = \|S\| = 1$ elde edilir. Buradan T operatörü üniterdir.

Bu bir çelişkidir.

Hatırlanacağı üzere (Naimark, 1968; III.I) bir φ iç fonksiyonunun $\Sigma(\varphi)$ spektrumu

$$\Sigma(\varphi) = \overline{\varphi^{-1}(0)} \cup \operatorname{supp}\mu$$

şeklinde tanımlanabilir öyle ki μ ölçümü φ'nin singüler çarpımının doğurduğu singüler ölçümdür. Bilindiği üzere (Nagy, 1974; Önerme III.4.4) eğer T bir C_0 - daralması ise o halde minimal m_{T} iç fonksiyonu vardır öyle ki T 'yi ortadan kaldırır, yani, $m_{\mathrm{T}}(T) = 0$ dır ve $\sigma(T) = \Sigma(m_{\mathrm{T}})$ elde edilir. Şimdi, Önerme 4.4'ün (e) şıkkından dolayı eğer T bir öz izometrik C_0 - daralması ise o halde bu öz üniterdir. Aslında, T bir üniter operatörün bir kompakt pertürbasyonudur (Nikolski, 1980).

Şimdi varsayılsın ki T daralma operatörü C_{00} sınıfındandır. Dahası, varsayılsın ki

$$\dim(I - TT^*)\mathrm{H} = \dim(I - T^*T)H = 1$$

dir. Bilinen Nagy-Foias Model Teoremine göre, T operatörü $K_\varphi := H^2 \Theta \varphi H^2$ model uzayı üzerinde etki eden $M_\varphi = P_\varphi S\big|_{K\varphi}$ model operatörüne üniter eşdeğerdir öyle ki φ bir iç çarpım fonksiyonudur, $Sf = zf$ H^2 Hardy uzayı üzerinde hareket operatörüdür ve P_φ operatörü H^2 'den K_φ üzerine dik izdüşümdür. Buradan alaşılır ki, her $f \in H^\infty$ için $f(T)$ operatörü

$$f(M_\varphi) = P_\varphi f(S)\big|_{K\varphi}$$

operatörüne üniter eşdeğerdir.

Hatırlanacağı üzere φ'nin $\Sigma_u(\varphi)$ üniter spektrumu

$$\Sigma_u(\varphi) = \{\xi \in \Gamma : \liminf_{z \in D, z \to \xi} |\varphi(z)| = 0\}$$

şeklinde tanımlanır.

Bilindiği üzere (Naimark, 1968; III.1), $\Sigma_u(\varphi) = \Sigma(\varphi) \cap \Gamma$ dir. Lipschitz-Moeller Teoreminden (Naimark, 1968; III.1) dolayı $\sigma(M_\varphi) \cap \Gamma = \Sigma_u(\varphi)$ dir.

Aşağıdaki sonuç biliniyor (Naimark, 1968; V.4.1). Burada bu sonucun kısa ve basit bir ispatı verilecektir.

Sonuç 4.4 : Eğer $f \in A(D)$ ise o halde $f(M_{\varphi})$ operatörününün kompakt olması için yeter ve gerek şart f 'nin $\Sigma_u(\varphi)$ üzerinde sıfıra eşit olmasıdır (Mustafayev ve Hüseynov, 2012).

Sonuç 4.5 : Eğer T operatörü H üzerinde bir öz izometrik C_0-daralması ise o halde sıfırdan farklı bir T-invariant E altuzayı ve $f \in A(D)$ fonksiyonu vardır öyle ki $f(T|_E)$ sıfırdan farklı bir kompakt operatördür (Mustafayev ve Hüseynov, 2012).

İspat : m_{T} fonksiyonu T operatörünün minimal bir iç fonksiyonu olsun, yani $m_T(T) = 0$ dır. O halde m_{T} fonksiyonunu bölen bir θ iç fonksiyonu vardır öyle ki $\Sigma(\theta) \cap \Gamma$ kümesinin Lebesgue ölçümü sıfırdır (Kellay ve Zarrabi, 2009). $\psi := \dfrac{m_T}{\theta}$ ve $E := \overline{\psi(T)H}$ olsun. m_{T}'nin minimalliği $E \neq \{0\}$ olduğunu gerektirir ve $T|_E$ operatörü bir C_0- daralması olup $m_{\mathrm{T}|_{\mathrm{E}}} = \theta$ dir. Dahası,

$$I_{\mathrm{E}} - (T|_{\mathrm{E}})^*(T|_{\mathrm{E}}) = P_{\mathrm{E}}(I_{\mathrm{H}} - T^*T)|_E$$

operatörü kompakttır. Burada P_{E} operatörü H 'dan E üzerine bir dik izdüşümdür. Yukarıda söylendiği üzere, öz izometrik C_0- daralmaları öz üniterdir. Böylelikle, $T|_E$ bir öz üniter (fakat üniter olmayan) bir daralmadır. Bunun dışında $\sigma(T|_E) \cap \Gamma$ $(= \Sigma(\theta) \cap \Gamma)$ kümesinin Lebesgue ölçümü sıfırdır. Sonuç 4.3 'den dolayı bir $f \in A(D)$ fonksiyonu vardır öyle ki $f(T|_E)$ sıfırdan farklı bir kompakt operatördür.

Başlangıçta belirtildiği üzere eğer T bir öz üniter C_0-daralması ise o halde $H^{\infty}(T)$ sıfırdan farklı bir kompakt operatör içerir (Nikolski, 1980). Dikkat edileceği üzere bu sonuç önceki sonuçlardan aşağıdaki şekilde çıkarılabilir. ψ, E ve f Sonuç 4.5'in ispatının içindeki gibi olsun. O halde $f(T|_E)$ sıfırdan farklı bir kompakt operatördür. Şimdi,

$$f(T)\psi(T) = f(T|_E)\psi(T)$$

eşitliğinden anlaşılır ki $f(T)\psi(T)$ sıfırdan farklı bir kompakt operatördür öyle ki $H^{\infty}(T)$ 'nin içinde yer alır.

Eğer T operatörü H üzerinde bir daralma ise o halde iki T-invariant $H = H_0 \oplus H_u$ alt uzaylarına H'ın bir kanonik ayrışması vardır. Burada, $T_0 := T\big|_{H_0}$ hiçbir yerde üniter olmayan daralmadır ve $T_u := T\big|_{\mathrm{H}_0}$ üniterdir (Nagy, 1974; I.32). Görülür ki $\sigma(T_u) \subset \sigma(\mathrm{T}) \cap \Gamma$ dir. Γ 'nın boştan farklı bir S kapalı alt kümesi için, H_S^{∞} ile H^{∞} içindeki $D \cup S$ kümesine sürekli $\bar{f}$ genişlemesi olan bütün f fonksiyonlarının sınıfı gösterilsin. Eğer $\bar{f}$ fonksiyonu $f \in H^{\infty}_{\sigma(T)\cap\Gamma}$ fonksiyonunun $D \cup (\sigma(T) \cap \Gamma)$ kümesine sürekli genişlemesi ise, o halde

$$f(T) = f(T_0) \oplus \bar{f}(T_u)$$

olacak şekilde bir $f(T) \in B(H)$ operatörü tanımlanabilir. Burada, $f(T_0)$ operatörü Nagy-Foias fonksiyonel hesabına göre ve

$$\bar{f}(T_u) = (\bar{f}\big|_{\sigma(\mathrm{T})\cap\Gamma})(T_u)$$

ise bir üniter operatörlerin sürekli fonksiyonları için doğal fonksiyonel hesabına göre tanımlanır (Jung ve ark., 2007). Görülebilir ki, tüm $f \in H^{\infty}_{\sigma(\mathrm{T})\cap\Gamma}$ için $\|f(T)\| \leq \|f\|_{\infty}$ dur.

$\bar{f}$ fonksiyonu $f \in H^{\infty}_{\sigma(\mathrm{T})\cap\Gamma}$ fonksiyonunun $D \cup (\sigma(T) \cap \Gamma)$ 'ye sürekli genişlemesi olsun. Gamelin-Garnett Teoreminden dolayı (Gamelin ve Garnett, 1985)

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{\infty} = 0$$

olacak şekilde H^{∞} içinde bir $\{f_n\}$ dizisi vardır. Burada, her f_n fonksiyonu $D \cup (\sigma(T) \cap \Gamma)$ kümesinin bir O_n komşuluğuna g_n analitik fonksiyonu olarak genişletilebilir. O halde, $g_n(T)$ fonksiyonu Riesz-Dunford fonksiyonel hesabına göre tanımlanabilir ve yukarıdaki gibi tanımlanan $f_n(T)$ ile çakışır. Ayrıca dikkat edileceği üzere $g_n(T)$ fonksiyonu A_T 'nin içindedir. Netice olarak,

$$\begin{aligned} \|g_n(T) - f(T)\| &= \|f_n(T) - f(T)\| \\ &\leq \|f_n - f\|_{\infty} \to 0 \ , \quad (n \to \infty) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $f(T) \in A_T$ olduğu anlaşılır (Mustafayev ve Hüseynov, 2012).

Aşağıdaki sonuç Teorem 4.1'in bir sonucudur.

Sonuç 4.6 : T bir öz izometrik daralma operatörü ve $\bar{f}$ fonksiyonu $f \in H^{\infty}_{\sigma(T)\cap\Gamma}$ fonksiyonunun $D \cup (\sigma(T) \cap \Gamma)$ 'ye sürekli genişlemesi olsun. Eğer $\sigma(T) \cap \Gamma$ üzerinde $\bar{f}(\xi) = 0$ ise o halde $f(T)$ kompakttır (Mustafayev ve Hüseynov, 2012).

Sonuç 4.7 : T bir öz üniter hiçbir yerde üniter olmayan daralma operatörü olsun öyle ki $\sigma(T) \cap \Gamma$ kümesinin Lebesgue ölçümü sıfırdır. O halde,

$$\sigma_e(T) = \sigma(T) \cap \Gamma$$

dir (Mustafayev ve Hüseynov, 2012).

İspat : Tersi varsayılsın ki $\xi_0 \in \sigma(T) \cap \Gamma$ bulunsun fakat $\xi_0 \notin \sigma_e(T)$ olsun. O halde, $\sigma(T) \cap \Gamma$ üzerinde bir sürekli f_0 fonksiyonu vardır öyle ki tüm $\xi \in \sigma_e(T)$'ler için $f_0(\xi_0) \neq 0$ ve $f_0(\xi) = 0$ dır. $f \in A(D)$ fonksiyonu f_0'ın Rudin-Carleson genişlemesi olsun. Teorem 4.1 den dolayı, $f(T)$ kompakttır. Diğer taraftan Sonuç 4.2 'ten dolayı f fonksiyonu $\sigma(T) \cap \Gamma$ üzerinde sıfıra eşittir. Bu $f_0(\xi_0) \neq 0$ ile çelişir.

Sonrasında, aşağıdaki elde edilir.

Teorem 4.2 : T operatörü H üzerinde bir öz izometrik operatör olsun ve $S \in B(H)$ alınsın. Eğer,

$$\varliminf_{n\to\infty} \left\| T^n S \right\| = 0$$

ise, o halde S operatörü kompakttır (Mustafayev ve Hüseynov, 2012).

İspat : Sırasıyla, $\tilde{T}$ ve $\tilde{S}$ operatörleri T ve S operatörlerinin doğurduğu limit operatörleri olsun. Önerme 4.4'ün (a) şıkkından,

$$\left\| \tilde{T}^n \tilde{S} \right\| \leq \left\| T^n S \right\|, \quad \forall n \in N$$

olur. $\tilde{T}$ bir izometri olduğundan,

$$\|\tilde{S}\| \leq \underline{\lim}_{n\to\infty}\|T^n S\| = 0$$

dır. Böylece, $\tilde{S} = 0$ elde edilir. Önerme 4.4 'ün (b) şıkkından S operatörü kompakttır.

φ bir iç fonksiyon olsun. $K_\varphi := H^2 \Theta \varphi H^2$, ve $T = P_\varphi S\big|_{K_\varphi}$ dır. Bilindiği üzere (Nikolsk, 1980; s.235) , $\{T\}' = \{f(T) : f \in H^\infty\}$ dır. Eğer $f \in H^\infty$ alınırsa, Hartman-Sarason Teoreminden dolayı (Nikolski, 1980; s.235), $f(T)$ operatörünün kompakt olması için gerek ve yeter koşul $\lim_{n\to\to\infty}\|T^n f(T)\| = 0$ ve $\overline{\varphi} f \in H^\infty + C(\Gamma)$ olmasıdır. Önceki Teorem ile Önerme 4.1'i birleştirince biz aşağıdaki elde edilir.

Sonuç 4.8 : Eğer T bir öz izometrik hiçbir yerde üniter olmayan bir daralma ise, o halde $S \in \{T\}'$ operatörünün kompakt olması için gerek ve yeter şart

$$\lim_{n\to\infty}\|T^n S\| = 0$$

olmasıdır (Mustafayev ve Hüseynov, 2012).

Dikkat edileceği üzere bu sonuç ayrıca (Kellay ve Zarrabi, 2009) 'nin ana sonucunu da içerir.

Aşağıdaki önermenin bağlantılı sonuçları için (Mustafayev, 2010) 'a bakılabilir.

Önerme 4.6 : T operatörü H üzerinde bir üniter fakat hiçbir yerde üniter olmayan bir daralma olsun öyle ki $\sigma_e(T)$ kümesinin Lebesgue ölçümü sıfırdır. O halde, her $S \in \mathrm{A}_\mathrm{T}$ için,

$$dist(S, A_T \cap K(H)) = \sup_{\xi\in\sigma_e(\mathrm{T})}\left|\hat{S}(\xi)\right|$$

dir (Mustafayev ve Hüseynov, 2012).

İspat : $S \in A_T, K \in A_T \cap K(H)$ ve $\xi \in \sigma_e(T)$ verilsin. O halde, A_T üzerinde bir çarpımsal ϕ_ξ fonksiyoneli vardır öyle ki $\phi_\xi(T) = \xi$ dir. Netice olarak,

$$\begin{aligned}\left|\hat{S}(\xi)\right| &= \left|\phi_\xi(T^n S) \leq \left\|T^n S\right\|\right. \\ &\leq \left\|T^n S - T^n K\right\| + \left\|T^n K\right\|\end{aligned}$$

$$\leq \|S-K\| + \|T^n K\|$$

elde edilir.

Zayıf operatör topolojisi içinde $T^n \to 0$ olduğu için, Önerme 4.1 den dolayı, $\lim_{n\to\infty}\|T^n K\| = 0$ dır. $n \to \infty$ giderken, önce ki eşitsizlikte elde edilir ki $|\hat{S}(\xi)| \leq \|S-K\|$ dır. Buradan

$$\sup_{\xi\in\sigma_e(\mathrm{T})} |\hat{S}(\xi)| \leq dist(S, A_T \cap K(H))$$

Eşitsizliği ters yönde ispatlamak için, $\varepsilon > 0$ verilsin. O halde, $f \in A(D)$ fonksiyonu vardır öyle ki $\|S - f(T)\| \leq \varepsilon$ dur. Buradan,

$$\sup_{\xi\in\sigma_e(\mathrm{T})} |f(\xi)| \leq \sup_{\xi\in\sigma_e(\mathrm{T})} |\hat{S}(\xi)| + \varepsilon$$

dur.

Rudin-Carleson Teoreminden dolayı, $g \in A(D)$ fonksiyonu vardır öyle ki $\sigma_e(T)$ üzerinde $g(\xi) = f(\xi)$ dir ve

$$\|g\|_\infty = \sup_{\xi\in\sigma_e(\mathrm{T})} |f(\xi)|$$

dır.

$\sigma_e(T)$ üzerinde $g - f$ sıfıra eşit olduğu için, Teorem 4.1 'den dolayı, $g(T) - f(T)$ kompakttır. Böylelikle,

$$\begin{aligned} dist(S, A_T \cap K(H)) &\leq \|S + g(T) - f(T)\| \\ &\leq \|g(T)\| + \varepsilon \\ &\leq \|g\|_\infty + \varepsilon \\ &= \sup_{\xi\in\sigma_e(\mathrm{T})} |f(\xi)| + \varepsilon \\ &\leq \sup_{\xi\in\sigma_e(\mathrm{T})} |\hat{S}(\xi)| + 2\varepsilon \end{aligned}$$

yazılabilir.

ε keyfi olduğundan dolayı,

$$dist(S, A_T \cap K(H) \leq \sup_{\xi\in\sigma_e(\mathrm{T})} |\hat{S}(\xi)|$$

elde edilir.

Aşağıda, ergodik şartlar aracılığıyla kompaktlık karakterize edilecektir. Aşağıdaki lemma (Leka, 2009; Lemma 2.4)'te ispat edilmiştir.

Lemma 4.1 : V operatörü H üzerinde bir izometri ve $S \in \{V\}'$ olsun. Eğer her $\xi \in \sigma(V) \cap \Gamma$ için

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \left\| \sum_{k=1}^{n} \xi^{-k} V^{k} S \right\| = 0$$

ise, o halde $S = 0$ dır (Leka, 2009; Lemma 2.4).

Bu Lemmanın bir uygulaması olarak, aşağıdaki söylenebilir.

Teorem 4.18 : T bir öz izometrik operatör ve $S \in \{T\}'$ olsun. Eğer her $\xi \in \sigma_{le}(T)$ için (veya, $\xi \in \sigma_{re}(T) \cap \Gamma$ için),

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \left\| \sum_{k=1}^{n} \xi^{-k} T^{k} S \right\| = 0$$

ise, o halde S operatörü kompakttır (Mustafayev ve Hüseynov, 2012).

İspat : Sırasıyla, $\tilde{T}$ ve $\tilde{S}$ operatörleri T ve S operatörlerinin doğurduğu limit operatörleri olsun. Önerme 4.4'ün (d), (c) şıklarından ve Önerme 4.3'ün (b) şıkkından anlaşılır ki $\tilde{T}$ bir izometridir. Ve

$$\sigma(T) \cap \Gamma \subset \sigma_{le}(T)$$

dir. Dahası, $\tilde{S} \in \{\tilde{T}\}'$ 'dır. Önerme 4.4'ün (a) şıkkından dolayı, tüm $\xi \in \sigma(\tilde{T}) \cap \Gamma$ için

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \left\| \sum_{k=1}^{n} \xi^{-k} \tilde{T}^{k} \tilde{S} \right\| = 0$$

dir. Önceki lemmadan, $\tilde{S} = 0$ dır. Sonuç olarak, Önerme 4.4'ün (b) şıkkından, S operatörü kompakttır.

Şimdi öz üniter daralmaların C_{00} sınıfından olmaları için bazı yeterli şartlar sunulacaktır.

Bir A ile Γ üzerinde mutlak yakınsak Fourier serilerine sahip ki bütün sürekli fonksiyonların cebiri gösterilecektir. Hatırlanacağı üzere Γ'nin kapalı bir S altkümesine eğer S üzerinde ki her sürekli f fonksiyonu için tüm $s \in S$ alınmak üzere $f(s) = g(s)$ olacak şekilde bir $g \in A$ fonksiyonuna karşılık geliyorsa bir *Helson kümesi* denir. Helson kümesinin örneklerini (Kahane, 1976) 'da bulunur.

$M(\Gamma)$ uzayı Γ üzerinde ki düzgün kompleks Borel ölçümünün uzayı olsun. $\mu \in M(\Gamma)$ 'nin n.ci Fourier katsayısı

$$\hat{\mu}(n) = \int_0^{2\pi} e^{-\mathrm{int}} d\mu(t) \quad (n \in \mathbf{Z})$$

ile tanımlanır. İyi bilinir ki eğer tüm $n \in \mathbf{Z}$ 'ler için $\hat{\mu}(n) = 0$ ise, o halde $\mu = 0$ dır. Ayrıca iyi bilinir ki eğer $\lim_{|n| \to \infty} |\hat{\mu}(n)| = 0$ ise, o halde μ bir sürekli ölçümdür.

Helson Teoremi (Rudin, 1962. Teorem 5.6.10) aşağıdakini ileri sürer.

Teorem 4.3 : $S \subset \Gamma$ bir Helson kümesi olsun ve $\mu \in M(\Gamma)$ verilsin öyle ki $\sup p\mu \subset S$ sağlansın. Eğer $\lim_{|n| \to \infty} |\hat{\mu}(n)| = 0$ ise, o halde $\mu = 0$ dır (Mustafayev ve Hüseynov, 2012).

Bir uygulama olarak aşağıdakine bakılabilir.

Önerme 4.7 : T operatörü H üzerinde hiçbir yerde üniter olmayan öz üniter bir daralma operatörü olsun. Eğer $\sigma_e(T)$ bir Helson kümesi içinde yer alıyorsa, o halde T operatörü C_{00} sınıfındandır (Mustafayev ve Hüseynov, 2012).

İspat : $$\sigma_e(T^*) = \{\overline{\lambda} : \lambda \in \sigma_e(T)\}$$

olduğu için

$$\lim_{n \to \infty} |T^n x| = 0, \qquad \forall x \in H$$

olduğunu göstermek yeterlidir.

$(\tilde{H}, \tilde{T})$ çifti T operatörünün doğurduğu limit operatörü olsun. Zayıf operatör topolojisi içinde $T^n \to 0$ olduğu için, $J : H \to \tilde{H}$ lineer operatörünü

$$Jx = \{T^n x\} + E \qquad (x \in H)$$

şeklinde tanımlanabilir. Hatırlanacağı üzere E kümesi

$$l.i.m._n \|x_n\|^2 = 0$$

eşitliğini sağlayan H içindeki ki sıfıra zayıf yakınsayan tüm $\{x_n\}$ dizilerinden oluşur. Ayrıca,

$$\|Jx\| = \lim_{n\to\infty}(\|T^n x\|^2)^{\frac{1}{2}}$$

eşitliği biliniyor. Dahası,

$$JTx = \{T^{n+1}x\} + E = \tilde{T}(\{T^n x\} + E) = \tilde{T}Jx$$

eşitlikleri yazılabilir. Böylece $JT = \tilde{T}J$ eşitliği elde edilir. Önerme 4.4'ün (e) ve (c) şıklarından $\tilde{T}$ operatörü üniterdir ve $\sigma(\tilde{T}) \subset \sigma_e(T)$ dir. Netice olarak, $\sigma(\tilde{T})$ bir Helson kümesi içinde yer alır.

$E(\cdot)$, $\tilde{T}$ operatörünün spektral ölçümü olsun ve μ_x $(x \in H)$ *skaler ölçümü* Γ'nın Borel altkümeleri üzerinde

$$\mu_x(\Delta) = \langle E(\Delta)x, x\rangle = \|E(\Delta)x\|^2$$

şeklinde tanımlanır. $JT^n = \tilde{T}^n J$ özdeşliği dikkate alınırsa,

$$\begin{aligned}
\hat{\mu}_{Jx}(n) &= \int_0^{2\pi} e^{-\mathrm{int}} d\mu_{Jx}(t) \\
&= \int_0^{2\pi} e^{-\mathrm{int}} d\langle E_t Jx, Jx\rangle \\
&= \langle \tilde{T}^{*n} Jx, Jx\rangle = \langle Jx, \tilde{T}^n Jx\rangle = \langle Jx, JT^n x\rangle \\
&= \overline{\langle T^n x, J^* Jx\rangle} \to 0 \quad (n \to \infty)
\end{aligned}$$

eşitlikleri yazılabilir. Benzer şekilde,

$$\hat{\mu}_{Jx}(-n) = \langle T^n x, J^* Jx\rangle \to 0 \ \ (n \to \infty)$$

eşitliği elde edilir. Bundan dolayı,

$$\lim_{|n|\to\infty} |\hat{\mu}_{Jx}(n)| = 0$$

eşitliği doğru olur. supp $\mu_{Jx} \subset \sigma(\tilde{T})$ olduğundan, supp μ_{Jx} bir Helson kümesi içinde yer alır. Yukarıda bahsedilen Helson Teoreminden dolayı, $\mu_{Jx} = 0$ olur. Sonuç olarak, her $x \in H$ için ve Γ'nin her Borel Δ altkümesi için $E(\Delta)Jx = 0$ eşitliği elde edilir.

Buradan $\tilde{T}J = 0$ ve böylece $JT = 0$ olur. Bu her $x \in H$ için $\lim_{n\to\infty} \|T^n x\| = 0$ eşitliğinin doğru olduğu anlamına gelir.

Önerme 4.8 : T operatörü H üzerinde hiçbir yerde üniter olmayan bir öz üniter daralma operatörü olsun. Eğer $\sigma_e(T)$ sayılabilirse, o halde T operatörü C_{00} sınıfındandır (Mustafayev ve Hüseynov, 2012).

İspat :
$$\lim_{n\to\infty} \|T^n x\| = 0 \ , \ \forall x \in H$$

eşitliğinin doğruluğunu göstermek yeterlidir. $(\tilde{H}, \tilde{T})$ çifti T operatörünün doğurduğu limit operatörü olsun. Bir önceki önermenin ispatında olduğu gibi $JT = \tilde{T}J$ eşitliğini sağlayan bir $J : H \to \tilde{H}$ lineer operatörü mevcuttur öyle ki

$$\|Jx\| = \lim_{n\to\infty} (\|T^n x\|^2)^{\frac{1}{2}}$$

eşitliği doğrudur. Önerme 4.4'ün (e) ve (c) şıklarından $\tilde{T}$ operatörü üniterdir ve $\sigma(\tilde{T}) \subset \sigma_e(T)$ dir. Bu nedenle, $\sigma(\tilde{T})$ kümesi sayılabilirdir.

$E(\cdot)$ $\tilde{T}$ operatörünün spektral ölçümü olsun ve μ_x $(x \in H)$ *skaler ölçümü* Γ'nin Borel altkümeleri üzerinde

$$\mu_x(\Delta) = \langle E(\Delta)x, x \rangle = \|E(\Delta)x\|^2$$

şeklinde tanımlanır. Bir önceki önermenin ispatında olduğu gibi

$$\lim_{|n|\to\infty} |\hat{\mu}_{Jx}(n)| = 0$$

eşitliği elde edilir. Bu nedenle, μ_{Jx} bir sürekli ölçümdür. $\operatorname{supp} \mu_{Jx} \subset \sigma(\tilde{T})$ olduğundan, $\operatorname{supp} \mu_{Jx}$ sayılabilirdir. Fakat, (Lasey, 1974; s.52, Teorem 10)'dan dolayı sayılabilir küme tarafından desteklenen sıfırdan farklı sürekli bir ölçüm yoktur. Bundan dolayı, $\mu_{Jx} = 0$ eşitliği elde edilir öyle ki her $x \in H$ için ve Γ'nın her Borel Δ altkümesi için $E(\Delta)Jx = 0$ dir. Buradan $\tilde{T}J = 0$ elde edilir ve böylece $JT = 0$ olur. Bu her $x \in H$ için $\lim_{n\to\infty} \|T^n x\| = 0$ eşitliğinin doğru olduğu anlamına gelir.

5. ÖZ NORMAL OPERATÖRLER

T bir öz normal operatör olsun, yani $TT^* - T^*T$ kompakttır. $\pi(T)$ Calkin cebiririn bir normal elemanı olduğu için, elde edilir ki

$$\sigma_{le}(T) = \sigma_{re}(T) = \sigma_e(T)$$

dir. Şunu ifade etmek yararlı olacaktır ki eğer her $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma_e(T)$ için $ind(T - \lambda I_{\mathrm{H}}) = 0$ ise, o halde T bir normal operatörünün bir kompakt pertürbesidir (Mustafayev, 2010).

Bu bölümde, T 'nin komutantından S 'nin kompaktlığı için bazı gerekli ve yeterli şartlar S üzerinde bulunur. Ergodik şartlar aracılığıyla $S \in \{T\}'$ 'nin kompaktlığı ayrıca tanımlanır (Mustafayev ve Hüseynov, 2012).

Bu bölümün birinci ana sonucu aşağıdakidir.

Teorem 5.1 : T bir öz normal operatör olsun. Eğer $S \in A_T$ operatörünün Gelfand dönüşümü $\sigma_e(T)$ üzerinde sıfıra eşit ise, o halde S operatörü kompakttır (Mustafayev ve Hüseynov, 2012).

İspat : Farz edilsin ki $S \in A_T$ operatörünün Gelfand dönüşümü $\sigma_e(T)$ üzerinde sıfıra eşittir. $S \in A_T$ olduğu için bir $\{P_n\}$ polinomlar dizisi vardır öyle ki

$$\lim_{n\to\infty} \|P_n(T) - S\| = 0$$

dır. Sırasıyla, $\tilde{T}$ ve $\tilde{S}$ operatörleri T ve S operatörlerinin doğurduğu limit operatörleri olsun. Önerme 4.4'ün (a) şıkkından, ayrıca elde edilir ki

$$\lim_{n\to\infty} \|P_n(\tilde{T}) - \tilde{S}\| = 0$$

dır. Dikkat edileceği üzere her $\lambda \in \sigma_e(T)$ için, A_T üzerinde bir çarpımsal ϕ_λ fonksiyoneli vardır öyle ki $\phi_\lambda(T) = \lambda$ dır. Netice olarak,

$$\begin{aligned} |P_n(\lambda)| &= |P_n(\lambda) - \hat{S}(\lambda)| \\ &= |\phi_\lambda(P_n(T) - S)| \\ &\le \|P_n(T) - S\| \end{aligned}$$

yazılabilir.

Buradan, anlaşılır ki $P_n(\lambda)$ polinomlar dizisi $\sigma_e(T)$ üzerinde sıfıra düzgün yakınsaktır, yani $\lim_{n\to\infty} P_n(\lambda) = 0$ dır. Diğer taraftan, Önerme 4.4'ün (c) ve (d) şıklarından $\tilde{T}$ bir normal operatördür ve $\sigma(\tilde{T}) \subset \sigma_e(T)$ dir. Bu nedenle, $P_n(\lambda)$ polinomlar dizisi $\sigma(\tilde{T})$ üzerinde sıfıra düzgün yakınsaktır, yani $\lim_{n\to\infty} P_n(\lambda) = 0$ dır. Buradan,

$$\lim_{n\to\infty} \left\| P_n(\tilde{T}) \right\| = 0$$

dır. Böylelikle elde edilir ki $\tilde{S} = 0$ dır. Önerme 4.4'ün (b) şıkkından S operatörü kompakttır.

Sonuç 5.1 : Eğer T operatörü H üzerinde bir öz normal operatör ise, o halde aşağıdaki ifadeler doğrudur :

(a) Eğer $\sigma_e(T) = \{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$ ise o halde $(T - \lambda_1 I_{\mathrm{H}}) \cdot ... \cdot (T - \lambda_n I_{\mathrm{H}})$ kompakttır.

(b) A_T cebirinin $Rad(A_T)$ radikali Volterra operatörlerinden oluşur.

İspat :

(a) $S := (T - \lambda_1 I_{\mathrm{H}}) \cdot ... \cdot (T - \lambda_n I_{\mathrm{H}})$ 'ın Gelfand dönüşümü $\{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$ üzerinde sıfıra eşittir.

(b) Eğer $R \in Rad(A_T)$ ise, o halde $\hat{R}$ operatörü $\sigma_{A_T}(T)$ üzerinde sıfıra eşittir. $\sigma_e(T) \subset \sigma(T) \subset \sigma_{\mathrm{A_T}}(T)$ olduğu için, buradan $\hat{R}$ operatörü $\sigma_e(T)$ üzerinde sıfıra eşittir. Teorem 5.1'den S operatörü kompakttır.

Şimdi, aşağıdaki Teorem ispat edilecektir.

Teorem 5.2: T bir öz normal operatör olsun öyle ki $\sigma_e(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \geq 1\}$ ve $S \in \{T\}'$ olsun. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} \left\| T^n S \right\| = 0$$

ise, o halde S operatörü kompakttır (Mustafayev ve Hüseynov, 2012).

İspat için aşağıdaki lemmaya ihtiyaç vardır.

Lemma 5.1 : N normal bir operatör olsun öyle ki $\sigma(N) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \geq 1\}$ dir ve $S \in \{N\}'$ olsun. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} \|N^n S\| = 0$$

ise, o halde $S = 0$ dır (Mustafayev ve Hüseynov, 2012).

İspat : $SS^* = 0$ olduğunun gösterilmesi yeterlidir. Fuglede-Putnam Teoreminden dolayı, $SN^* = N^* S$ dir. Bu ayrıca $NS^* = S^* N$ anlamına gelir. Netice olarak elde edilir ki,

$$\begin{aligned} N(SS^*) &= (NS)S^* \\ &= (SN)S^* \\ &= S(NS^*) \\ &= S(S^* N) \\ &= (SS^*)N \end{aligned}$$

dir. Böylelikle, N operatörü SS^* operatörü ile yer değiştirir. A kümesi N ve SS^* operatörleri tarafından üretilmiş üniter $C^* -$ cebiri olsun. O halde, A değişmelidir. Σ ile A'nın Gelfand spektrumu gösterilsin. A cebiri $C(\Sigma)$ 'e izomorfik olduğu için, tüm $\phi \in \Sigma$ 'ler için $\phi(SS^*) = 0$ olduğunun gösterilmesi yeterlidir.

Dikkat edileceği üzere A cebiri $B(H)$'ın bir dolu altcebiridir ve böylece, $\sigma(N) = \{\phi(N) : \phi \in \Sigma\}$ dir. Şimdi eğer $\phi \in \Sigma$ ise o halde

$$\begin{aligned} |\phi(N)|^n |\phi(SS^*| &\leq \|N^n SS^*\| \\ &\leq \|N^n S\| \|S^*\| \end{aligned}$$

yazılabilir. $\lim_{n\to\infty} \|N^n S\| = 0$ olduğundan,

$$|\phi(N)|^n |\phi(SS^*| \to 0, \quad (n \to \infty)$$

elde edilir. $|\phi(N)| \geq 1$ olduğundan, buradan

$$\phi(SS^*) = 0 \text{ dır.}$$

Şimdi Teorem 5.2'nin ispatı sunulabilir.

Teorem 5.2 'ün ispatı : Sırasıyla, $\tilde{T}$ ve $\tilde{S}$ operatörleri T ve S operatörlerinin doğurduğu limit operatörleri olsun. Önerme 4.4'ün (d) ve (c) şıklarından $\tilde{T}$ limit operatörü normaldir ve

$$\sigma(\tilde{T}) \subset \sigma_e(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \geq 1\}$$

dir. Dahası, $\tilde{S} \in \{\tilde{T}\}'$ dir. Önerme 4.4'ün (a) şıkkından dolayı

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \left\| \tilde{T}^n \tilde{S} \right\| \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \left\| T^n S \right\| = 0$$

yazılabilir. Önceki lemmadan, $\tilde{S} = 0$ dır. Sonuç olarak, Önerme 4.4'ün (b) şıkkından S operatörü kompakttır.

Aşağıda, ergodik şartlar aracılığıyla kompaktlık karakterize edilecektir.

Teorem 5.3 : T bir öz normal Fredholm operatör olsun. Eğer her $\lambda \in \sigma_e(T)$ için

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda^{-k} T^k S \right\| = 0$$

ise, o halde S operatörü kompakttır (Mustafayev ve Hüseynov, 2012).

İspat için aşağıdaki lemmaya ihtiyaç olabilir.

Lemma 5.2 : N bir tersinir normal operatör ve $S \in \{N\}'$ olsun. Eğer her $\lambda \in \sigma(N)$ için

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda^{-k} N^k S \right\| = 0$$

ise, o halde $S = 0$ dır (Mustafayev ve Hüseynov, 2012).

İspat : A cebiri N ve SS^* operatörleri tarafından üretilmiş üniter C^*-cebiri olsun. Lemma 5.1'in ispatında olduğu gibi, A'nın değişmeli olduğu görülebilir. Σ ile A'nın Gelfand dönüşümü gösterilsin. Şimdi, tüm $\phi \in \Sigma$ için $\phi(SS^*) = 0$ olduğunu göstermek yeterlidir. Dikkat edileceği üzere $\sigma(N) = \{\phi(N) : \phi \in \Sigma\}$ dir. Eğer $\phi \in \Sigma$ ve eğer $\lambda := \phi(N)$ ise, o halde

$$\left|\phi(SS^*)\right| = \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^{n} \lambda^{-k} \phi(N)^k \phi(SS^*) \right|$$

$$\leq \frac{1}{n}\left\|\sum_{k=1}^{n}\lambda^{-k}N^{k}S\right\|\left\|S^{*}\right\|$$

yazılabilir. $n \to \infty$ giderken alt limit alınırsa, $\phi(SS^{*}) = 0$ elde edilir.

Teorem 5.3'ün ispatı : Sırasıyla, $\widetilde{T}$ ve $\widetilde{S}$ operatörleri T ve S operatörlerinin doğurduğu limit operatörleri olsun. Önerme 4.4'ün (c) ve (d) açısından, $\widetilde{T}$ bir tersinir normal operatördür ve $\sigma(\widetilde{T}) \subset \sigma_e(T)$ dir. Dahası, $\widetilde{S} \in \{\widetilde{T}\}'$ dir. Şimdi, Önerme 4.4'ün (a) şıkkından, her $\lambda \in \sigma(\widetilde{T})$ için

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\|\sum_{k=1}^{n}\lambda^{-k}\widetilde{T}^{k}\widetilde{S}\right\| = 0$$

dır. Bir önceki lemmadan, $\widetilde{S} = 0$ dır. Sonuç olarak, Önerme 4.4'ün (b) şıkkından, S operatörü kompakttır.

TARTIŞMA VE SONUÇ

Operatörlerden oluşmuş bir uzayın sıfırdan farklı bir kompakt operatör içermesi operatörler teorisinin en önemli problemlerinden birisidir. Bu tezde öz normal operatörlerin komutantı içindeki kompakt operatörlerin var olup olmadığı incelenmiştir. T 'nin komutantından S 'nin kompaktlığı için S ve T operatörleri üzerinde bazı gerek ve yeter şartlar bulunur. Bu tezde bu şartlar aşağıdaki şekilde konulmaya çalışıldı:

T bir öz normal Fredholm operatörü olsun ve $S \in \{T\}'$ alınsın. Eğer her $\lambda \in \sigma_e(T)$ için

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda^{-k} T^k S \right\| = 0$$

ise, o halde S operatörü kompakttır.

KAYNAKLAR

Beauzamy, B., 1988. ***Introduction to Operator Theory and Invariant Subspaces***, North Holland Mathematical Library, **42**: North Holland, Amsterdam.

Brown, L. G., Douglas, R. G., Filmore, P. A., 1973. ***Unitary equivalence modulo the compact operators and extentions of*** $C^{*}-$***algebras***, Proceedings of a Conference on Operator Theory, Lecture Notes in Math., Springer, Berlin. **345**: 58-128.

Conway, J. B., 1985. ***A Course in Functional Analysis***, Graduate Texts in Mathematics.

Gamelin, T., Garnett, J., 1970. ***Uniform approximation to bounded analytic functions***, Revista de la Union Mathematica Argentina, **25**: 87-94.

Junk, I. B., Ko, E., Pearcy, C., 2007. ***A note on the spectral mapping theorem***, Kyungpook Math. J., **47**: 77-79.

Kahane, J. P., 1976. ***Series de Fourier Absolument Convergentes*** (Rusça), Mir, Moscow.

Kellay, K., Zarrabi, M., 2009. Compact operators that commute with a contraction, ***Integr. Equ. Oper. Theory***, **65**: 543-550.

Larsen, R., 1973. ***Banach Algebras, Pure and Applied Mathematics***, 24: Marcel Dekker Inc., New York.

Lasey, H. E., 1974. ***The Isometric Theory of Classical Banach Space***. Berlin-New York.

Leka, Z., 2009. A Katznelson-Tzafriri type theorem in Hilbert spaces, ***Pro. Amer. Math. Soc***., **137**: 3763-3768.

Muhly, P., 1971. Compact operators in the commutant of a contraction***, J. Funct. Anal***., **8**: 197-224.

Musayev, B. , Alp, M., 2000. ***Fonksiyonel Analiz***. Balcı Yayınları, Ankara.

Mustafayev, H. S., 2006. The Banach algebra generated by a contraction, ***Proc. Amer. Math. Soc***., **134**: 2677-2683.

Mustafayev, H. S., 2010. Asymptotic behavior of polynomially bounded operators, C. R. ***Acad. Sci. Paris***, Ser.I **348**: 517-520.

Mustafayev, H. S., Hüseynov, F. B., 2012. Compact operators in the commutant of essentially normal operators, ***Illinois Journal of Math***, Submitted.

Nagy, B. Sz., 1974. On a property of operators of class C_0, ***Acta Sci. Math. (Szeged)***, **36**: 219-220.

Nagy, B. Sz., Foias, C., 1970. ***Harmonic Analysis of Operators on Hilbert Space*** (Rusça), Mir, Moscow.

Naimark, 1968. ***Normed Rings*** (Rusça), Nauka, Moscow.

Nikolski, N. K., 1980. ***Lectures on the shift operator*** (Rusça), Nauka, Moscow.

Nordgren, E. A., 1975. Compact operators in the algebra generated by essentially unitary C_0 operators, ***Proc. Amer. Math. Soc.***, **51**: 159-162.

Rudin, W., 1962. ***Fourier Analysis on Groups***, Interscience Publication, New York.

Şuhubi, E. S. , 2001. ***Fonksiyonel Analiz***. İTÜ Vakfı Yayınları, İstanbul.

Vitse, P., 2003. Smooth operators in the commutant of a contraction, ***Studia Math.***, **155**: 241-263.

ÖZGEÇMİŞ

1987 yılında Van'da doğdu. İlkokul öğrenimini Van'da, ortaokul öğrenimini Aydın'da ve lise öğrenimini Van'da yaptı. 2005 yılında Yüzüncü Yıl Üniversitesi Matematik Bölümü'nde lisans eğitimine başladı ve 2009 yılında mezun oldu. Aynı yıl içerisinde Yüzüncü Yıl Üniversitesi Matematik Bölümü'nde yüksek lisans eğitimine başladı. 2010 yılında Tunceli Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi'nde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaya başladı. Daha sonra 2011 yılında Batman Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesine Araştırma Görevlisi olarak geçti.