

**T. C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

LİGHTLIKE ALTMANİFOLDLAR ÜZERİNDE CHEN TİPİ EŞİTSİZLİKLER

Mehmet GÜLBAHAR

**DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

HAZİRAN 2014

Tezin Başlığı : Lightlike Altmanifoldlar Üzerinde Chen Tipi Eşitsizlikler

Tezi Hazırlayan : Mehmet GÜLBAHAR

Sınav Tarihi : 17.06.2014

Yukarıda adı geçen tez, jürimizce değerlendirilerek Matematik Anabilim Dalında Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Sınav Jüri Üyeleri

Tez Danışmanı : **Prof. Dr. Sadık KELEŞ**
İnönü Üniversitesi

Prof. Dr. Faik Nejat EKMEKÇİ
Ankara Üniversitesi

Prof. Dr. Hacı Bayram KARADAĞ
İnönü Üniversitesi

Doç. Dr. Mustafa Kemal ÖZDEMİR
İnönü Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Selcen YÜKSEL PERKTAŞ
Adıyaman Üniversitesi

Doç. Dr. Erol KILIÇ
Tez İkinci Danışmanı

Prof. Dr. Mehmet ALPASLAN
Enstitü Müdürü

ONUR SÖZÜ

Doktora Tezi olarak sunduğum "Lightlike Altmanifoldlar Üzerinde Chen Tipi Eşitsizlikler" başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün kaynakların, hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Mehmet GÜLBAHAR

ÖZET

Doktora Tezi

Lightlike Altmanifoldlar Üzerinde Chen Tipi Eşitsizlikler

Mehmet GÜLBAHAR

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

112+v sayfa

2014

Danışmanlar: Prof. Dr. Sadık KELEŞ,
Doç. Dr. Erol KILIÇ

Doktora tezi olarak hazırlanan bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, konunun tarihsel gelişimi ve bu tezde ele alınan problemlerin tanıtımı yapıldı. İkinci bölümde, temel tanım ve teoremler ifade edilerek semi-Riemannian manifoldlar ile ilgili genel bilgilere yer verildi.

Üçüncü bölümde, bir Lorentzian manifoldun lightlike hiperyüzeyleri ile ilgili bazı temel bilgiler sunuldu. Bu hiperyüzeylerin alt düzlem kesitleri için Ricci eğriliği ve skalar eğriliği tanıtıldı. Ekran skalar eğriliğinin içinde bulunduğu bazı eşitsizlikler elde edildi. Ekran homotetik lightlike hiperyüzeylerin ekran Ricci eğriliği ve ekran skalar eğriliğinin katıldığı çeşitli eşitsizlikler kuruldu. Bu eşitsizlikler yardımıyla Lorentzian manifoldların lightlike hiperyüzeyleri için bazı karakterizasyonlar verildi.

Dördüncü bölümde, bir Lorentzian manifoldun half-lightlike altmanifoldları ile ilgili bazı temel kavramlara yer verildi. Bu altmanifoldların alt düzlem kesitleri için Ricci eğriliği ve skalar eğriliği tanıtılarak, ekran homotetik half-lightlike altmanifoldların ekran Ricci eğriliği ve ekran skalar eğriliğinin katıldığı bazı eşitsizlikler kuruldu. Ayrıca, bu eşitsizliklerin eşitlik durumları incelendi.

Beşinci bölümde, iki indeksli bir semi-Riemannian manifoldun coisotropik lightlike altmanifoldları ile ilgili bazı temel kavramlar verildi. Bu altmanifoldlar için ekran Ricci eğriliği ve ekran skalar eğriliği tanıtıldı. Bu eğriliklerin katıldığı bazı eşitsizlikler kuruldu. Bu eşitsizlikler, iki indeksli semi-Öklidyen uzayının altmanifoldlarında incelendi.

ANAHTAR KELİMELER: Semi-Riemannian manifold, Lorentzian manifold, Lightlike hiperyüzey, Eğrilik, Lightlike altmanifold.

ABSTRACT

Doctorate Thesis

Chen-like Inequalities On Lightlike Submanifolds

Mehmet GÜLBAHAR

İnönü University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

112+v pages

2014

Supervisors: Prof. Dr. Sadık KELEŞ

Assoc. Prof. Dr. Erol KILIÇ

This study designed as a philosophy doctoral thesis covers five chapters. In the first Chapter, the historical developments and the problems which are discussed in this thesis are presented. In the second chapter, basic definitions and theorems are explained and general facts about semi-Riemannian manifolds have been given.

In the third chapter, some basic facts about lightlike hypersurfaces of a Lorentzian manifold are presented. Ricci curvature and scalar curvature for sub-plane section of these hypersurfaces are introduced. Various inequalities involving screen Ricci curvature and screen scalar curvature of screen homothetic lightlike hypersurfaces are established. By using these inequalities, some characterizations for lightlike hypersurfaces of a Lorentzian manifold are given.

In the fourth chapter, firstly, some basic facts about half-lightlike submanifolds of a Lorentzian manifold are given. Ricci curvature and scalar curvature for sub-plane section of such manifold are introduced and some inequalities involving screen Ricci curvature and screen scalar curvature of screen homothetic half-lightlike submanifolds are established. Also, equality case of these inequalities are investigated.

In the fifth chapter, some basic information about coisotropic lightlike submanifolds of a semi-Riemannian manifold with index two is mentioned. Screen Ricci curvature and screen scalar curvature of these submanifolds are introduced. Some inequalities involving these curvatures are established. These inequalities are investigated on submanifolds of semi-Euclidean space with index two.

KEYWORDS: Semi-Riemannian manifold, Lorentzian manifold, Lightlike hypersurface, Curvature, Lightlike submanifold.

TEŞEKKÜR

Tez konumu bana vererek, bilgisi ve görüşleriyle beni yönlendiren, karşılaştığım problemlere çözüm önerileri sunan ve lisansüstü çalışmalarımda desteklerini esirgemeyen tez danışmanlarım Sayın Prof. Dr. Sadık Keleş'e, Sayın Doç. Dr. Erol KILIÇ'a, karşılaştığım problemlerde değerli fikirlerinden yararlandığım Sayın Prof. Dr. Bayram Şahin'e ve tezin hazırlanışında öneri ve desteklerini esirgemeyen Sayın Yrd. Doç. Dr. Selcen YÜKSEL PERKTAŞ'a teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, maddi ve manevi destekleriyle her zaman yanımda olan anneme, babama ve eşime teşekkürü bir borç bilirim.

Mehmet GÜLBAHAR

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	iv
1 GİRİŞ	1
2 TEMEL KAVRAMLAR	4
2.1 Cebirsel Kavramlar	4
2.2 Semi-Riemann Manifoldlar	7
3 LIGHTLIKE HİPERYÜZEYLER ÜZERİNDE CHEN TİPİ EŞİTSİZLİKLER	19
3.1 Lightlike hiperyüzeyler	19
3.2 Lorentzian manifoldların lightlike hiperyüzeyleri üzerinde k -Ricci eğriliği ve k -skalar eğriliği	26
3.3 Lorentzian manifoldların lightlike hiperyüzeyleri üzerinde eğrilik in-varyantları	36
3.4 Lorentzian bir manifoldun ekran homotetik lightlike hiperyüzeyleri üzerinde bazı eşitsizlikler	44
4 HALF-LIGHTLIKE ALTMANİFOLDLAR ÜZERİNDE CHEN TİPİ EŞİTSİZLİKLER	59
4.1 Half-lightlike altmanifoldlar	59
4.2 Half-lightlike altmanifoldlar üzerinde ekran Ricci eğriliği ve ekran skalar eğriliği	66
4.3 Ekran konformal half-lightlike altmanifoldlar üzerinde Chen-tipi eşitsizlikler	72

5	COİSOTROPİK LIGHTLIKE ALTMANİFOLDLAR ÜZERİNDE CHEN TİPİ EŞİTSİZLİKLER	83
5.1	Coisotropik Lightlike Altmanifoldlar	83
5.2	Coisotropik altmanifoldlar üzerinde ekran Ricci eğriliği ve ekran skalar eğriliği	88
5.3	2-indeksli bir Semi-Riemann manifoldun coisotropik altmanifoldları üzerinde eğrilik invaryantları	94
5.4	Ekran homotetik coisotropik altmanifoldlar üzerinde Chen-tipi eşitsizlikler	98
	ÖZGEÇMİŞ	111

1. GİRİŞ

1873 de L. Schläfli [1], m -boyutlu bir Riemann manifoldunun $\frac{m(m+1)}{2}$ boyutlu bir Öklidyen uzayın altmanifoldu olarak düşünülebileceğini iddia etti. Bu iddianın doğruluğu 1926 da M. Janet [2] tarafından ve 1927 de E. Cartan [3] tarafından lokal olarak ispatlandı. 1956 da ise J. F. Nash [4], her bir Riemann manifoldunun uygun bir ek boyutu ile birlikte Öklidyen uzayın içine izometrik olarak gömülebileceğini ispatladı. Bu teorem Nash'ın Embedding Teoremi olarak da bilinir. Böylece Nashın Embedding Teoremi her bir Riemann manifoldunun uygun bir ek boyut ile başka bir Riemann manifoldunun altmanifoldu olacağını gösterir. Ayrıca 1965 de A. Friedmann [5] bu teoremi semi-Riemann manifoldlara genişletti.

Nashın Embedding Teoremi, bir Riemann manifoldunun içsel ve dışsal invaryantlarının belirlenmesi gerekliliğini ortaya çıkarır. Gauss Egregium Teoremi gereğince, bir yüzey gerilme olmaksızın büküldüğünde o yüzeyin Gauss eğriliği değişmez. Yani Gauss eğriliği izometrik dönüşümler altında invaryant kalır. Böylece Gauss eğriliği yüzeyin içsel bir invaryantı olur. Benzer şekilde E. Cartan [6] aynı kesit eğriliğine sahip iki Riemann manifoldu arasında bir lokal izometrinin var olduğunu gösterdi. Böylece eğrilikler (Gauss eğriliği, Kesit eğriliği, Ricci eğriliği, skalar eğrilik) bir Riemann manifoldunun invaryantları olur. Eğrilik invaryantları fizik alanında da önemli rol oynamaktadır. Örneğin, Einstein'e göre bir çekim alanında bir cismin hareketi, uzay zamanının eğriliğine bağlıdır.

B.-Y. Chen, 1993 de bir altmanifoldun içsel ve dışsal invaryantları arasında bağıntılar kurmak için Riemann eğrilik invaryantlarını inceledi. B. Y. Chen [7] bir Riemann manifoldunun Chen-invaryantı olarak isimlendirilen ve δ_M ile gösterilen yeni bir çeşit Riemann invaryantını

$$\delta_M = \tau(p) - \inf K(p). \quad (1.0.1)$$

şeklinde tanımladı. Burada, $\tau(p)$ ve $K(p)$, sırasıyla, $p \in M$ noktasında, M nin skalar eğriliği ve kesit eğriliğidir.

Bununla birlikte, B.-Y. Chen [8], sabit c eğriliğine sahip bir m -boyutlu $R^m(\tilde{c})$ Öklidyen uzayının n -boyutlu bir M altmanifoldu için, δ_M invaryantı ve ortalama eğrilik

vektörünün normunun karesi $\|H(p)\|^2$ arasında

$$\delta_M \leq \frac{n^2(n-1)}{(n-1)}\|H(p)\|^2 + \frac{1}{2}(n+1)(n-2)\tilde{c}. \quad (1.0.2)$$

eşitsizliğini kurdu. (1.0.2) eşitsizliği *Chen-eşitsizliği* olarak bilinir.

1996 da B.-Y. Chen [9], $R^m(\tilde{c})$ Riemannian uzay formunun n -boyutlu altmanifoldları için şekil operatörü A_N ve kesit eğriliği $K(p)$ arasında

$$A_N \geq \frac{(n-1)}{n}(c - \tilde{c})I_n \quad (1.0.3)$$

bağıntısını verdi öyle ki burada $c = \inf(K(p)) \leq \tilde{c}$ ve I_n birim dönüşümdür.

2000 de B.-Y. Chen[29], bir Riemann manifoldunu her noktasında tensiyonu mümkün olduğu kadar az bir değer alıyorsa, bu Riemann manifoldunu *ideal altmanifold* olarak isimlendirdi ve

$$\|H(p)\|^2 \geq \frac{2(n+k - \sum_{j=1}^k n_j)}{n^2(n+k-1 - \sum_{j=1}^k n_j)}\delta(n_1, \dots, n_k). \quad (1.0.4)$$

eşitsizliğini kurdu. Burada $\pi_{n_1}, \dots, \pi_{n_k}$, $T_p M$ nin karşılıklı ortogonal olan alt uzayları olmak üzere

$$\delta(n_1, \dots, n_k) = \tau(p) - \inf\{\tau(\pi_{n_1}) + \dots + \tau(\pi_{n_k})\} \quad (1.0.5)$$

dır.

(1.0.4) eşitsizliğinin eşitlik durumunun her $p \in M$ noktasında sağlanması için gerek ve yeter koşul M nin bir ideal altmanifold olmasıdır.

Farklı uzayların altmanifoldlarını karakterize eden eşitsizlikler B. Y. Chen ve bazı yazarlar tarafından elde edildi. Bu çalışmalar aşağıda şöyle ifade edilmiştir:

Kompleks uzay formların altmanifoldları için [11],[12] vs. kontakt uzay formların altmanifoldları için [13],[14] vs. de bu tür eşitsizlikler çalışıldı. Ayrıca, S. Haesen [15] $(m+1)$ boyutlu Ricci-flat uzayın m -boyutlu bir Lorentzian manifoldda embedded olan bir hiperyüzeyi için bir eşitsizlik kurdu. S. Haesen, A. Sebekovic ve L. Verstraelen

[16] tarafından bir Semi-Riemannian manifold üzerinde içsel ve dışsal eğrilik invariantlarını kullanarak bazı eşitsizlikler verildi. B. Y. Chen [17], bir Semi-Riemann manifoldun space-like altmanifoldları için bazı karakterizasyonlar elde etti.

M , belirsiz g metriğine sahip bağlantılı bir manifold olsun. Eğer $p \in M$ noktasında kesit eğriliğinin değeri alttan ve üstten sınırlı ise bu durumda M , p noktasında sabit kesit eğriliğine sahiptir [18]. Ayrıca, $p \in M$ noktasındaki 2-boyutlu her π timelike düzlem kesiti veya spacelike düzlem kesiti için $|K(\Pi)|$ değeri sınırlı ise M , p noktasında sabit kesit eğriliğine sahiptir [19]. Bu nedenle, semi-Riemannian manifoldlarda δ eğriliği tanımlanamaz. Ekran distribüsyonu Riemannian olan lightlike altmanifoldlarda kesit eğriliğinin tanım kümesi herhangi bir null vektör ihtiva etmediğinden ve null kesit eğriliği sınırlandırılabilceğinden bu tezde δ eğriliği ekran distribüsyonu Riemannian olan lightlike altmanifoldlarda çalışılmıştır.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm, konunun tarihdel gelişimine, ikinci bölüm ise semi-Riemannian manifoldlar ile ilgili bazı temel bilgilere ayrılmıştır. Üçüncü bölümde, lightlike hiperyüzeyler ile ilgili temel kavramlardan bahsedilerek, bir Lorentzian manifoldun lightlike hiperyüzeyleri üzerinde Chen tipi eşitsizlikler kurulmuştur. Dördüncü bölümde, half lightlike altmanifoldlar ile ilgili bazı temel kavramlar verilerek, bir Lorentzian manifoldun half-lightlike altmanifoldlarının ekran Ricci eğriliği ve ekran skalar eğriliğinin içinde bulunduğu çeşitli eşitsilikler kuruldu. Bu eşitsizlikler yardımıyla bu altmanifoldların nasıl karakterize edildiği gösterildi. Beşinci bölümde, coisotropik altmanifoldlar ile ilgili bazı temel kavramlar verilerek, bir Lorentzian manifoldun coisotropik altmanifoldlarının eğrilik invariantları incelendi ve ekran conformal coisotropic lightlike altmanifoldlar üzerinde Chen-tipi eşitsizlikler kuruldu.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Cebirsel Kavramlar

Tanım 2.1.1. V n -boyutlu bir reel vektör uzayı ve V üzerinde simetrik bilinear dönüşüm g olsun. Bu durumda

- i) Her $u \in V$ için $g(u, u) < 0$ ise g ye V üzerinde *negatif tanımlı*
- ii) Her $u \in V$ için $g(u, u) > 0$ ise g ye V üzerinde *pozitif tanımlı*
- iii) Her $v \in V$ için $g(u, v) = 0$ iken $u = 0$ ise g ye V üzerinde *non-dejenere* denir. V nin ortonormal bir bazı $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ olmak üzere g metriğine

$$g_{ij} = g(e_i, e_j), \quad 1 \leq i, j \leq n \quad (2.1.1)$$

olacak şekilde $n \times n$ tipinde simetrik bir $G = (g_{ij})$ matrisi karşılık gelir. g , V üzerinde non-dejenere olması için gerek ve yeter şart $\text{rank} G = n$ olmasıdır [20].

Tanım 2.1.2. V n -boyutlu bir reel vektör uzayı ve V üzerinde bir simetrik bilinear dönüşüm g olsun. $0 \neq \xi \in V$ olmak üzere her $v \in V$ için

$$g(\xi, v) = 0, \quad (2.1.2)$$

ise g ye V üzerinde *dejenere* denir [21].

Tanım 2.1.3. V bir reel vektör uzayı ve V üzerinde bir simetrik bilinear dönüşüm g olsun. V uzayının

$$\text{Rad } V = \{\xi \in V : g(\xi, v) = 0, \forall v \in V\} \quad (2.1.3)$$

ile tanımlı alt uzayına, V uzayının g ye göre *radikal uzayı* veya *null uzayı* denir [21].

Tanım 2.1.4. V reel vektör uzayında $g|_W$ nin negatif tanımlı olduğu en geniş W alt uzayının boyutuna V üzerinde g nin *indeksi* denir [20].

Tanım 2.1.5. V bir reel vektör uzayı olsun. Bu durumda

i) V üzerinde non-dejenere, simetrik, bilinear g dönüşümü tanımlı ise (V, g) ye *semi-Öklidyen uzay* ve g ye V üzerinde bir *skalar çarpım*

ii) V üzerinde dejenere, simetrik, bilineer g dönüşümü tanımlı ise (V, g) ye bir *light-like uzay* denir [21].

V bir Semi-Öklidyen uzay ve $\{e_1, \dots, e_n\}$, V nin bir ortonormal bazı ise

$$g(e_i, e_j) = \epsilon_i \delta_{ij}, \quad \epsilon_i = g(e_i, e_i) \quad (2.1.4)$$

dir. V nin her v elemanı

$$v = \sum_{i=1}^n \epsilon_i g(v, e_i) e_i \quad (2.1.5)$$

olarak tek şekilde yazılabilir [20].

V semi-Öklidyen uzayının herhangi bir $\{e_1, \dots, e_n\}$ ortonormal bazı için $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ işaretlerinden negatif olanlarının sayısı V nin indeksini verir.

Tanım 2.1.6. V ve W semi-Öklidyen uzaylar ve $T : V \rightarrow W$ lineer bir dönüşüm olsun. Eğer T dönüşümü V ve W üzerindeki skalar çarpımları koruyorsa T dönüşümüne bir *lineer izometri* denir. İki semi-Öklidyen uzayın lineer izometrik olabilmesi için gerek yeter şart bu iki uzayın aynı indeksli ve aynı boyutlu olmasıdır [20].

Tanım 2.1.7. (V, g) bir semi-Öklidyen uzay olsun. $x \in V$ için

- i) $g(x, x) > 0$ veya $x = 0$ ise x vektörüne *spacelike vektör*,
- ii) $g(x, x) < 0$ ise x vektörüne *timelike vektör*,
- iii) $g(x, x) = 0$ ise x vektörüne *null* veya *lightlike vektör*

denir [20].

Teorem 2.1.1. (W, g) reel n -boyutlu bir *lightlike vektör uzayı* ve boy $Rad W = r < n$ olsun. Bu durumda, radikal uzayın W da tümleyeni olan SW alt uzayı non-dejenere dir [21].

İspat. W nin tümleyeni SW olmak üzere

$$W = Rad W \oplus_{orth} SW \quad (2.1.6)$$

dir. Burada, $\oplus$ direkt toplamdır. Kabul edelim ki, her $v \in SW$ için $g(u, v) = 0$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir $u \in SW$ var olsun. Bu durumda $u \in Rad W$ dır.

$Rad W \cap SW = \{0\}$ olduğundan $u = 0$ dir. Bu ise SW nin non-dejenere olduğunu gösterir.

□

Tanım 2.1.8. (W, g) reel n -boyutlu bir lightlike vektör uzayı olsun. Radikal uzayın W da tümleyeni olan SW alt uzayına W nin *ekran uzayı* denir [21].

Tanım 2.1.9. (V, g) m -boyutlu bir semi-Öklidyen uzay ve W da V nin bir alt uzayı olsun. Eğer $g|_W$ dejenere ise bu alt uzaya *lightlike alt uzay* denir.

$$W^\perp = \{v \in V : g(v, w) = 0, \forall w \in W\} \quad (2.1.7)$$

alt uzayına W uzayının *diki* denir. Eğer W, V nin non-dejenere bir alt uzayı ise

$$W \cap W^\perp = \{0\} \quad (2.1.8)$$

dir. Eğer W, V nin lightlike bir alt uzayı ise $W \cap W^\perp$ sifıra eşit olmak zorunda değildir [21].

Önerme 2.1.1. (V, g) reel m -boyutlu bir semi-Öklidyen uzay ve W da V nin bir alt uzayı olsun. Bu durumda,

$$i) \text{ boy } W + \text{boy } W^\perp = m,$$

$$ii) (W^\perp)^\perp = W,$$

$$iii) rad W = rad W^\perp = W \cap W^\perp$$

dir [21].

Tanım 2.1.10. (V, g) bir semi-Öklidyen uzay olsun. Bu durumda

$$g(f_i, f_j) = g(f_i^*, f_j^*) = 0, \quad g(f_i, f_j^*) = \delta_{ij}, \quad i, j \in \{1, \dots, q\},$$

$$g(u_\alpha, f_i) = g(u_\alpha, f_i^*) = 0, \quad g(u_\alpha, u_\beta) = \varepsilon_{\alpha\beta}, \quad \alpha, \beta \in \{1, \dots, t\}, \quad \varepsilon_\alpha = \mp 1$$

olacak şekilde V nin bir

$$B = \{f_1, \dots, f_r, f_1^*, \dots, f_r^*, u_1, \dots, u_t\} \quad (2.1.9)$$

bazı vardır ve bu baza V nin bir *quasi-ortonormal bazı* denir [21].

Tanım 2.1.11. (V, g) m -boyutlu bir semi-Öklidyen uzay ve W da V nin n -boyutlu bir alt uzayı olsun. $r \leq n$ ve $1 \leq s \leq t$ için $W = \text{Span}\{f_1, \dots, f_m, u_1, \dots, u_s\}$ olmak üzere,

$$B = \{f_1, \dots, f_r, f_1^*, \dots, f_r^*, u_1, \dots, u_t\} \quad (2.1.10)$$

kümesine V nin W alt uzayı boyunca bir *quasi-ortonormal bazı* denir [21].

Önerme 2.1.2. (V, g) semi-Öklidyen bir uzay ve W da V nin bir alt uzayı olsun. Bu durumda, V nin W boyunca bir *quasi-ortonormal bazı* vardır [21].

2.2 Semi-Riemann Manifoldlar

Tanım 2.2.1. M , reel m -boyutlu bir diferensiyellenebilir manifold olsun.

$$\begin{aligned} g_p : T_p M \times T_p M &\rightarrow R, \\ (X_p, Y_p) &\rightarrow g_p(X_p, Y_p) = g(X_p, Y_p) \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

biçiminde tanımlı sabit indeksli, non-dejenere, $(0, 2)$ tipindeki g tensör alanına M üzerinde *metrik tensör* denir. Eğer M manifoldu bir g metrik tensörü ile donatılmış ise M ye bir *semi-Riemann manifold* denir [20].

Tanım 2.2.2. (M, g) bir semi-Riemann manifold olsun. g metrik tensörünün indeksine M nin indeksi denir ve M nin indeksi $ind(M)$ ile gösterilir.

$ind(M) = q$ olsun. Bu durumda $0 \leq q \leq boy M$ dir. Özel olarak $q = 0$ ise M manifolduna bir *Riemann manifoldu*, $q = 1$ ve $boy M > 2$ ise M manifolduna bir *Lorentz manifoldu* denir [20].

Tanım 2.2.3. M , reel m -boyutlu bir diferensiyellenebilir manifold, $F(M)$, M üzerindeki tüm diferensiyellenebilir fonksiyonların kümesi olsun. Eğer

$$\nabla : \chi(X) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

fonsiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa bu fonksiyona M üzerinde bir *afin konneksiyon*, $\nabla_X Y$ ye Y nin X e göre *kovaryant türevi* denir [20].

- i) $\nabla_X Y$, X de $F(M)$ lineerdir.
- ii) $\nabla_X Y$, Y de R -lineerdir.
- iii) $f \in FM$ için $\nabla_X fY = (Xf)Y + f\nabla_X Y$ dir.

Bir ∇ afin konneksiyonunun *torsiyon tensörü* T ile gösterilen ve $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

ile tanımlanan $(1, 2)$ tipinde bir tensör alanıdır.

Teorem 2.2.1. (M, g) bir semi-Riemann manifold olsun. M üzerinde aşağıdaki şartları sağlayan bir tek ∇ afin konneksiyonu vardır:

- a) ∇ torsiyonsuzdur. Yani, her $Y, Z \in \chi(M)$ için $[Y, Z] = \nabla_Y Z - \nabla_Z Y$ dir.
 - b) Her $X, Y, Z \in \chi(M)$ için $Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$ dir.
- (a) ve (b) şartlarını sağlayan ∇ konneksiyonuna M nin Levi-Civita konneksiyonu denir [20].

M üzerindeki Levi-Civita konneksiyonu

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_Y Z, X) &= Yg(Z, X) + Zg(X, Y) - Xg(Y, Z) \\ &\quad - g(Y, [Z, X]) + g(Z, [X, Y]) + g(X, [Y, Z]) \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

eşitliğini sağlar. Bu eşitliğe *Koszul eşitliği* denir [20].

(M, g) , n -boyutlu bir semi-Riemann manifold olsun. M nin bir U açığı üzerinde $\{x_1, \dots, x_n\}$ koordinat sistemi verilsin. $\{x_1, \dots, x_n\}$ koordinat sistemi için

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad 1 \leq i, j \leq n \quad (2.2.3)$$

eşitliğini sağlayan U üzerindeki Γ_{ij}^k fonksiyonlarına *Christoffel sembolleri* reel-değerli fonksiyonlardır [20].

Teorem 2.2.2. (M, g) , n -boyutlu bir semi-Riemann manifold ve M nin bir U açığı üzerinde $\{x_1, \dots, x_n\}$ koordinat sistemi verilsin. Bu durumda,

$$\begin{aligned} i) \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} Y &= \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{\partial Y_k}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^n \Gamma_{ij}^k Y_j \right\}, \\ ii) \Gamma_{ij}^k &= \sum_{t=1}^n \frac{g^{kt}}{2} \left\{ \frac{\partial g_{jt}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{it}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_t} \right\} \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır. Burada $Y = \sum_{j=1}^n Y_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ ve (g^{ij}) , (g_{ij}) nin ters matrisidir [20].

Tanım 2.2.4. M , n -boyutlu bir diferensiyellenebilir manifold ve M nin Levi-Civita konneksiyonu ∇ olsun. Bu durumda

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \quad (2.2.4)$$

ile tanımlanan $(1, 3)$ tipinde $R : \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$ tensör alanına M nin *Riemann eğrilik tensörü* denir [20].

Önerme 2.2.1. (M, g) *semi-Riemann manifoldunun Riemann eğrilik tensörü* R olsun. Bu durumda her $X, Y, Z, W \in T_p M$ ve $p \in M$ için

$$\begin{aligned} i) R(X, Y)Z &= -R(Y, X)Z, \\ ii) g(R(X, Y)Z, W) &= -g(R(X, Y), W, Z), \\ iii) R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y &= 0, \\ iv) g(R(X, Y)Z, W) &= g(R(Z, W)X, Y) \end{aligned}$$

dir [20].

Tanım 2.2.5. (M, g) n -boyutlu bir *semi-Riemann manifold* olsun. M nin bir p noktasındaki $T_p M$ tanjant uzayının 2-boyutlu lineer alt uzayına $T_p M$ nin bir *alt-düzlem kesiti* denir [20]. $T_p M$ nin bir $\Pi = \text{Span}\{X, Y\}$ düzlem kesiti ve

$$Q(\Pi) = g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2 \quad (2.2.5)$$

reel sayısı verilsin. $Q(\Pi) \neq 0$ ise Π düzlemine $T_p M$ nin *non-dejenere düzlem kesiti* denir. Ayrıca, $|Q(\Pi)|$ değeri X ve Y vektörlerinin oluşturduğu paralel kenarın alanını verir.

Tanım 2.2.6. (M, g) , n -boyutlu bir *semi-Riemann manifold* olsun. M nin bir p noktasındaki bir *non-dejenere düzlem kesiti* $\Pi = \text{Sp}\{X, Y\}$ olmak üzere

$$K(\Pi) = \frac{g(R(X, Y)Y, X)}{Q(\Pi)} \quad (2.2.6)$$

sayısına Π nin *kesit eğriliği* denir. Π nin kesit eğriliği $K(\Pi)$, Π nin $\{X, Y\}$ baz seçiminden bağımsızdır [20].

Eğer $K = 0$ ise (M, g) semi-Riemann manifolduna *flattır* denir [20].

E_q^m semi-Öklidyen uzayı, her q indeksi için flatdır. Gerçekten, E_q^m semi-Öklidyen uzayının normal koordinatları için Γ_{ij}^k Christoffel sembollerinin tamamı sıfıra eşittir.

Tanım 2.2.7. (M, g) n -boyutlu bir semi-Riemann manifold ve $\{e_1, \dots, e_n\}$ $T_p M$ nin ortonormal bir bazı olsun. Her $X, Y \in T_p M$ için *Ricci tensörü*

$$Ric(X, Y) = iz(Z \rightarrow R(Z, X))Y \quad (2.2.7)$$

ile tanımlanır. Başka bir deyişle

$$Ric(X, Y) = \sum_{\ell=1}^n \varepsilon_{\ell} g(R(e_{\ell}, X), Y, e_{\ell}) \quad (2.2.8)$$

dır [17]. $Ric(X, Y)$, $T_p M$ nin $\{e_1, \dots, e_n\}$ ortonormal bazının seçiminden bağımsızdır.

Her $X, Y \in T_p M$ için $Ric(X, Y) = 0$ ise M ye *Ricci flattır* denir. Bir Semi-Riemann manifold flat ise Ricci-flattır. Fakat tersi her zaman doğru değildir.

Tanım 2.2.8. (M, g) n -boyutlu bir semi-Riemann manifold olsun. Her $X, Y \in T_p M$ için

$$Ric(X, Y) = c g(X, Y) \quad (2.2.9)$$

olacak şekilde bir c sabiti varsa (M, g) ye *Einstein manifold* denir [20].

$T_p M$ deki birim vektörlerin kümesini

$$T_p^1 M = \{X \in T_p M : g(X, X) = \mp 1\} \quad (2.2.10)$$

ile gösterelim. $e_1 \in T_p^1 M$ nin *Ricci eğriliği*

$$Ric(e_1) = Ric(e_1, e_1) = \sum_{j=2}^n K_{1j} \quad (2.2.11)$$

olur [17].

Teorem 2.2.3. (M, g) n -boyutlu ($n > 3$) bir semi-Riemann manifold olsun. Her $X, Y \in T_p M$ ve $f \in F(M)$ için

$$Ric(X, Y) = f g(X, Y) \quad (2.2.12)$$

ise (M, g) bir Einstein manifold olur [17].

Tanım 2.2.9. M , n -boyutlu bir semi-Riemann manifold ve $\{e_1, \dots, e_n\}$ $T_p M$ nin ortonormal bir bazı olsun. Bu durumda M nin skalar eğriliği

$$\tau(p) = \sum_{i < j}^n K_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^n K_{ij} \quad (2.2.13)$$

ile tanımlanır [17]. M nin skalar eğriliği $T_p M$ nin $\{e_1, \dots, e_n\}$ ortonormal bazının seçiminden bağımsızdır.

Tanım 2.2.10. (M, g) semi-Riemann manifoldunun her $p \in M$ için kesit eğriliği sabit ise M ye *sabit eğrilikli uzay* denir.

M bir c sabit eğrilikli semi-Riemann manifold ise M nin Riemann eğrilik tensörü

$$R(X, Y)W = c\{g(Y, Z)X - g(X, Z)Y\} \quad (2.2.14)$$

eşitliğini sağlar [20].

E_q^n , n -boyutlu ve q indeksli bir semi-Öklidyen uzay olsun. E_q^n üzerinde standart metrik

$$g_0 = - \sum_{i=1}^q dx_i^2 + \sum_{j=q+1}^n dx_j^2 \quad (2.2.15)$$

ile verilir. c sıfırdan farklı bir reel sayı olmak üzere, sırasıyla,

$$\begin{aligned} S_q^k(x_0, c) &= \{X \in E_q^{k+1} : g(x - x_0, x - x_0) = \frac{1}{c} > 0\}, \\ H_q^k(x_0, c) &= \{X \in E_q^{k+1} : g(x - x_0, x - x_0) = \frac{1}{c} < 0\} \end{aligned} \quad (2.2.16)$$

ile verilen pseudo-küresi ve pseudo hiperbolik uzayı, eğrilikleri c olan sabit eğrilikli semi-Riemann manifoldlarıdır. E_q^n , S_q^k ve H_q^k belirsiz reel uzay formlarının en iyi bilinen örnekleridir [17].

Tanım 2.2.11. M bir diferensiyellenebilir manifold ve A , M üzerinde herhangi bir tensör alanı olsun. Bu durumda, $p \in M$, $t \in I \subset \mathbb{R}$ ve $X \in \Gamma(TM)$ olmak üzere

$$L_X A = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (A(p) - \phi_t A(p)) \quad (2.2.17)$$

ile tanımlanan L_X diferensiyel operatörüne A tensörünün X vektör alanına göre *Lie türevi* denir [21].

Burada

$$\phi : [\epsilon, \epsilon] \times M \rightarrow M, \quad \phi(t, p) = \phi_t(p) \quad (2.2.18)$$

ile tanımlı bir dönüşümdür.

Tanım 2.2.12. (M, g) , n -boyutlu bir semi-Riemann manifold ve $f \in F(M)$ olsun. f nin gradienti ∇f ile gösterilir ve

$$g(\nabla f, X) = df(X) = Xf, \quad \forall X \in \Gamma(TM) \quad (2.2.19)$$

şeklinde tanımlanır [17]. M nin bir koordinat sistemi $\{x_1, \dots, x_n\}$ ise

$$df = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j \quad \text{ve} \quad \nabla f = \sum_{i,j} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (2.2.20)$$

dir [17].

Tanım 2.2.13. (M, g) bir semi-Riemann manifold olsun. $L_X g = 0$ ise X vektör alanına bir *Killing vektör alanı* ve $L_X g = \lambda X$ olacak şekilde bir $\lambda \in F(M)$ varsa X vektör alanına bir *konformal Killing vektör alanı* denir [17].

Önerme 2.2.2. (M, g) semi-Riemann manifoldu üzerindeki bir X vektör alanı için aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

i) X bir Killing vektör alanıdır.

ii) Her $V, W \in \Gamma(TM)$ için

$$Xg(V, W) = g([X, V], W) + g(V, [X, W])$$

dır.

iii) $g(\nabla_V X, W) = -g(\nabla_W X, V)$ dir [17].

Tanım 2.2.14. (M, g_M) ve $(\tilde{M}, \tilde{g})$ semi-Riemann manifoldlar olsun. Bu durumda

$$\varphi^*(\tilde{g}) = g \quad (2.2.21)$$

olacak şekilde metrik tensörleri koruyan $\varphi : M \rightarrow \tilde{M}$ difeomorfizmine bir *izometri* denir [17].

$p \in M$ nin bir $U \subset M$ komşuluğu için

$$g_p(u, v) = \tilde{g}_{\varphi(p)}(\varphi_{*p}(u), \varphi_{*p}(v)), \quad \forall u, v \in T_p M \quad (2.2.22)$$

ise $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ dönüşümüne bir *lokal izometri* ve M ile $\tilde{M}$ semi-Riemann manifoldlarına da *lokal izometrik* denir [17].

Tanım 2.2.15. (M, g) ve $(\tilde{M}, \tilde{g})$ semi-Riemann manifoldlar $\varphi : M \rightarrow \tilde{M}$ olsun. Her $p \in M$ için $\varphi_{*p} : T_p M \rightarrow T_{\varphi(p)} \tilde{M}$ türev dönüşümü birebir ise φ ye bir *immersiyon* denir. Ek olarak, φ bir homeomorfizm ise yani φ nin tersi var ve sürekli ise φ ye bir *emdedding* denir [17].

$\varphi : M \rightarrow \tilde{M}$ bir immersiyon ise $p \in M$ nin öyle bir U komşuluğu vardırki $\varphi : U \rightarrow \tilde{M}$ kısıtlanmış bir embeddingdir.

$\varphi : M \rightarrow \tilde{M}$ immersionu için daima $\text{boy } M \leq \text{boy } \tilde{M}$ dir. $\text{boy } \tilde{M} - \text{boy } M$ farkına bu immersiyonun *ek-boyutu* denir [17].

Tanım 2.2.16. $\varphi : M \rightarrow \tilde{M}$ bir immersiyon olsun. Bu durumda, her $u, v \in T_p M$ ve $p \in M$ için

$$g_p(u, v) = \tilde{g}_{\varphi(p)}(\varphi_{*p}(u), \varphi_{*p}(v)) \quad (2.2.23)$$

ise φ ye bir *izometrik immersion* ve M ye $\tilde{M}$ nin bir *altmanifoldu* denir [17].

$\varphi : M \rightarrow \tilde{M}$ bir izometrik immersiyon olsun. Her bir $p \in M$ için p nin öyle bir U komşuluğu vardırki $\varphi : U \rightarrow \tilde{M}$ bir embeddingdir ve her $u \in T_p M$ vektörüne bir $\varphi_*(u) \in T_{\varphi(p)} \tilde{M}$ vektörü karşılık gelir. Bu nedenle her $u \in T_p M$ vektörünü $\varphi_*(u) \in T_{\varphi(p)} \tilde{M}$ ile gösterebiliriz. Böylece $T_p M, T_{\varphi(p)} \tilde{M}$ nin bir non-dejenere alt uzayı olup

$$T_{\varphi(p)} \tilde{M} = T_p M \oplus T_p M^\perp \quad (2.2.24)$$

olarak yazılabilir. Burada $T_{\varphi(p)}\tilde{M}$ nin non-dejenere alt uzayı olan $T_pM^\perp$ uzayına $p \in M$ de M nin *normal uzayı* denir [17].

(2.2.24) den her $v \in T_{\varphi(p)}\tilde{M}$ vektörü

$$v = \tan v + \text{nor } v \quad (2.2.25)$$

olarak tek şekilde yazılabilir. Burada $\tan v \in T_pM$ ve $\text{nor } v \in T_pM^\perp$ dir. Ayrıca

$$\tan : T_{\varphi(p)}\tilde{M} \rightarrow T_pM \text{ ve } \text{nor} : T_{\varphi(p)}\tilde{M} \rightarrow T_pM^\perp \quad (2.2.26)$$

ortogonal projeksiyonları R -lineerdir [17].

Tanım 2.2.17. $\varphi : M \rightarrow \tilde{M}$ bir izometrik immersiyon ve $\tilde{M}$ nin Levi-Civita konneksiyonu $\tilde{\nabla}$ olsun. $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ ve $\forall N \in \Gamma(TM^\perp)$ için

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_X Y &= \nabla_X Y + h(X, Y), \\ \tilde{\nabla}_X N &= -A_N X + \nabla_X^\perp N \end{aligned} \quad (2.2.27)$$

formüllerine, sırasıyla, *Gauss formülü* ve *Weingarten formülü* denir. Burada $\nabla_X Y, A_N X \in \Gamma(TM)$ ve $h(X, Y), \nabla_X^\perp N \in \Gamma(TM^\perp)$ dir [17].

Önerme 2.2.3. (M, g) ve $(\tilde{M}, \tilde{g})$ semi-Riemann manifoldlar olsun.

i) (2.2.27) de verilen ∇ , M üzerinde bir Levi-Civita konneksiyonudur.

ii) h , simetrik ve bilineerdir [17].

Tanım 2.2.18. (2.2.27) de verilen $h : \Gamma(T\tilde{M}) \times \Gamma(T\tilde{M}) \rightarrow \Gamma(TM^\perp)$ simetrik, bilineer dönüşümüne φ nin *ikinci temel formu* denir [17].

T_pM nin bir ortonormal bazı $\{e_1, \dots, e_n\}$ ve $T_pM^\perp$ in ortonormal bir bazı $\{e_{n+1}, \dots, e_m\}$ olsun. $i, j = 1, \dots, n; r = n+1, \dots, m$ için

$$h(e_i, e_j) = \sum_{r=n+1}^m \varepsilon_r h_{ij}^r e_r, \quad \varepsilon_r = \tilde{g}(e_r, e_r) \quad (2.2.28)$$

tanımlansın. $h_{ij}^r = \tilde{g}(h(e_i, e_j), e_r)$ ye *ikinci temel formun bileşenleri* denir [17].

Önerme 2.2.4. $\varphi : M \rightarrow \tilde{M}$ bir immersiyon olsun. Bu durumda

i) $A_N X$, N ve X e göre bilineerdir.

ii) $\tilde{g}(h(X, Y), N) = \tilde{g}(A_N X, Y)$ dir.

iii) $\nabla^\perp$, $TM^\perp$ üzerinde bir metrik konneksiyondur [17].

Tanım 2.2.19. $\tilde{M}$ bir semi-Riemann manifold ve M de $\tilde{M}$ nın bir non-dejenere altmanifoldu olsun. M nin bir p noktasında normal vektör alanı N olmak üzere $A_N = \lambda I$, $\lambda \in F(M)$ ise N ye *umbilik kesit* ve M altmanifolduna da N ye göre *umbiliktir* denir. Eğer M altmanifoldu, her bir lokal normal vektör alanına göre umbilik ise M ye *total umbilik altmanifold* denir [17].

Tanım 2.2.20. $(\tilde{M}, \tilde{g})$ bir semi-Riemann manifold ve M de $\tilde{M}$ nın bir non-dejenere altmanifoldu olsun.

$$H(p) = \frac{1}{n} \text{iz } h \quad (2.2.29)$$

ile tanımlı $H(p)$ vektörüne $p \in M$ noktasındaki *ortalama eğrilik vektörü* denir. $\{e_1, \dots, e_n\}$, $T_p M$ nin ortonormal bir bazı olmak üzere

$$H(p) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \epsilon_j h(e_j, e_j) \quad (2.2.30)$$

dir [17].

M bir total umbilik altmanifold ise M nin ikinci temel formu, her $X, Y \in TM$ için

$$h(X, Y) = \tilde{g}(X, Y)H \quad (2.2.31)$$

eşitliğini sağlar [20].

Tanım 2.2.21. $(\tilde{M}, \tilde{g})$ bir semi-Riemann manifold ve M de $\tilde{M}$ nın bir non-dejenere altmanifoldu olsun. Bu durumda, her $p \in M$ noktasında $H(p) = 0$ ise M ye *minimal altmanifold*, $H(p) \neq 0$ ve $\tilde{g}(H(p), H(p)) = 0$ ise M ye *quasi-minimal altmanifold* veya *semi-minimal altmanifold* denir [22].

Teorem 2.2.4. $(\tilde{M}, \tilde{g})$ bir semi-Riemann manifold ve M de $\tilde{M}$ nın bir non-dejenere altmanifoldu olsun. Her $X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} g(R(X, Y)Z, W) &= \tilde{g}(\tilde{R}(X, Y)Z, W) + \tilde{g}(h(X, W), h(Y, Z)) \\ &\quad - \tilde{g}(h(X, Z), h(Y, W)) \end{aligned} \quad (2.2.32)$$

dir. Burada R ve $\tilde{R}$, sırasıyla, M ve $\tilde{M}$ nin eğrilik tensörüdür. (2.2.32) eşitliğine Gauss denklemi denir [20].

Gauss denkleminde aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 2.2.1. $(\tilde{M}, \tilde{g})$ bir semi-Riemann manifold ve M de $\tilde{M}$ nın bir non-dejenere altmanifoldu olsun. Bu durumda, $p \in M$ için $\Pi = \text{Span}\{X, Y\} T_p M$ nin 2-boyutlu bir alt-düzlemi olmak üzere

$$K(\Pi) = \tilde{K}(\Pi) + \frac{\tilde{g}(h(X, X), h(Y, Y)) - \tilde{g}(h(X, Y), h(Y, X))}{g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2} \quad (2.2.33)$$

dir [17].

Teorem 2.2.5. $(\tilde{M}, \tilde{g})$ bir semi-Riemann manifold ve M de $\tilde{M}$ nın bir non-dejenere altmanifoldu olsun. Bu durumda, $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ eğrisi için

$$\ddot{\alpha} = \alpha'' + h(\alpha', \alpha') \quad (2.2.34)$$

dir. Burada $\frac{D\alpha}{ds} = \dot{\alpha}$ ve $\frac{D\alpha}{ds} = \alpha'$ dir.

$\ddot{\alpha}$ vektörüne α eğrisinin $\tilde{M}$ daki ivme vektörü ve α'' vektörüne α eğrisinin M deki ivme vektörü denir [20].

Tanım 2.2.22. $\alpha'' = 0$ ise α eğrisine M üzerinde bir geodezik eğri denir [20].

Tanım 2.2.23. $(\tilde{M}, \tilde{g})$ bir semi-Riemann manifold ve M de $\tilde{M}$ nın bir non-dejenere altmanifoldu olsun. Eğer M nin ikinci temel formu $h = 0$ ise M ye $\tilde{M}$ nın bir total geodezik altmanifoldu denir [20].

Eğer M , $\tilde{M}$ nın total geodezik bir altmanifoldu ise

- i) M nin her geodeziği aynı zamanda $\tilde{M}$ nın da bir geodeziğidir.
- ii) M dışsal flatır. Başka bir deyişle, M ile $\tilde{M}$ in Riemann eğrilik tensörleri birbirine eşittir [20].

(2.2.27) da verilen $\nabla^\perp$ metrik konneksiyonuna *normal konneksiyon* denir. Eğer M de normal bir N vektör alanı için $\nabla^\perp N = 0$ ise N ye *paraleldir* denir. Ayrıca $\nabla^\perp H = 0$ ise H ortalama eğrilik vektörüne *paraleldir* denir [20].

Tanım 2.2.24. (M, g) ve $(\tilde{M}, \tilde{g})$, sırasıyla, n ve m boyutlu semi-Riemannian manifoldlar, $\varphi : M \rightarrow \tilde{M}$ bir izometrik immersion olsun. $\{N_{n+1}, \dots, N_m\}$, $TM^\perp$ in bir ortonotmal çatısı olmak üzere

$$A^c = \sum_{r=n+1}^m \epsilon_r A_{N_r}^2, \quad \epsilon_r = \tilde{g}(N_r, N_r) \quad (2.2.35)$$

ile tanımlı A^c operatörüne *Casorati operatörü* denir [17]. A^c , $TM^\perp$ deki baz seçiminden bağımsızdır.

Bu bölümün geriye kalan kısmında, $\tilde{M}$ nin metrik tensörü $\tilde{g}$ ve M nin indirgenmiş metrik tensörü g yerine $\langle, \rangle$ sembolü kullanılacaktır.

Önerme 2.2.5. M_s^n ve $R_s^m(c)$, sırasıyla, s -indeksli, n -boyutlu bir semi-Riemannian manifold ve s -indeksli, m -boyutlu semi-Riemannian uzay form olsun. M_s^n , $R_s^m(c)$ nin non-dejenere bir altmanifoldu ve $Y, Z \in \Gamma(TM)$ için $\{e_1, \dots, e_n\}$, $T_p M_s^n$ nin bir ortonormal bazı olmak üzere M_s^n nin Ricci tensörü

$$\begin{aligned} Ric(Y, Z) &= (n-1)\langle Y, Z \rangle c + n\langle H(p), h(Y, Z) \rangle \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \epsilon_i \langle h(Y, e_i), h(Z, e_i) \rangle \end{aligned} \quad (2.2.36)$$

eşitliğini sağlar [17].

İspat. Gauss denkleminde

$$\begin{aligned} Ric(Y, Z) &= \sum_{i=1}^n \epsilon_i \langle \tilde{R}(e_i, Y)Z, e_i \rangle + n\langle H, h(Y, Z) \rangle \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \epsilon_i \langle h(Y, e_i), h(Z, e_i) \rangle \end{aligned} \quad (2.2.37)$$

yazılabilir. Burada

$$\sum_{i=1}^n \epsilon_i \langle \tilde{R}(e_i, Y)Z, e_i \rangle = c(n-1)\langle Y, Z \rangle \quad (2.2.38)$$

dir. (2.2.38) eşitliği (2.2.37) eşitliğinde yerine yazılacak olursa (2.2.36) eşitliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Önerme 2.2.6. $M, R_s^m(c)$ belirsiz reel uzay formunun bir semi-Riemannian altmanifoldu olsun. Bu durumda

$$\tau(p) = \frac{n^2}{2} \langle H, H \rangle - \frac{1}{2} S_H + \frac{n(n-1)}{2} c \quad (2.2.39)$$

dir. Burada $\{e_1, \dots, e_n\}$, $T_p M$ nin bir ortonormal bazı olmak üzere

$$S_H = \sum_{i,j=1}^n \varepsilon_i \varepsilon_j \langle h(e_i, e_j), h(e_i, e_j) \rangle \quad (2.2.40)$$

dir [17].

İspat. Gauss denkleminden

$$\begin{aligned} \varepsilon_i \varepsilon_j \langle R(e_i, e_j) e_j, e_i \rangle &= \varepsilon_i \varepsilon_j \langle \tilde{R}(e_i, e_j) e_j, e_i \rangle + \varepsilon_i \varepsilon_j \langle h(e_i, e_i), h(e_j, e_j) \rangle \\ &\quad - \varepsilon_i \varepsilon_j \langle h(e_i, e_j), h(e_j, e_i) \rangle \end{aligned} \quad (2.2.41)$$

dir. Son eşitlikte, i ve j ye göre iz alınacak olursa

$$\sum_{i,j=1}^n \varepsilon_i \varepsilon_j \langle R(e_i, e_j) e_j, e_i \rangle = \varepsilon_i \varepsilon_j \langle \tilde{R}(e_i, e_j) e_j, e_i \rangle + n^2 \langle H, H \rangle - S_H \quad (2.2.42)$$

olur. (2.2.13) ve (2.2.42) den (2.2.39) eşitliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

3. LIGHTLIKE HİPERYÜZEYLER ÜZERİNDE CHEN TİPİ EŞİTSİZLİKLER

Bu bölüm dört alt bölümden oluşmaktadır. Birinci alt bölüm, diğer alt bölümlerin daha iyi anlaşılabilmesi için ve bir bütünlük arz etmesi açısından lightlike hiperyüzeyler ile ilgili temel kavramlara ayrılmıştır. Bu bölümde birinci alt bölüm hariç diğer alt bölümler bu bölümün orjinal kısımlarıdır.

3.1 Lightlike hiperyüzeyler

Tanım 3.1.1. $(\tilde{M}, \tilde{g})$, $(n+1)$ -boyutlu bir semi-Riemann manifold, M de $\tilde{M}$ nın n -boyutlu bir hiperyüzeyi olmak üzere her $p \in M$ için

$$Rad T_p M = \{\xi \in T_p M : g_p(\xi, X) = 0, \forall X \in T_p M\}. \quad (3.1.1)$$

olacak şekilde rankı 1 olan bir alt uzayı varsa M ye $\tilde{M}$ semi-Riemann manifoldunun bir *lightlike hiperyüzeyi* ve $Rad TM$ ye M nin *radikal distribüsyonu* denir [21].

TM de $Rad TM$ nin tamamlayıcı olan alt uzaya M nin *ekran distribüsyonu* denir. M nin ekran distribüsyonu $S(TM)$ ile gösterilir ve TM nin bir non-dejenere alt uzayıdır. $\oplus_{orth}$ ortogonal olan direkt toplamı göstermek üzere

$$TM = Rad TM \oplus_{orth} S(TM) \quad (3.1.2)$$

dir. Ayrıca $S(TM)$ non-dejenere olduğundan

$$T\tilde{M} = S(TM) \oplus_{orth} S(TM)^\perp \quad (3.1.3)$$

olarak yazılabilir ve burada $S(TM)^\perp$ de bir non-dejenere distribüsyondur.

M bir lightlike hiperyüzey ise $Rad T_p M = T_p M^\perp$ dir. Ayrıca $S(TM)^\perp$ uzayı

$$S(TM)^\perp = T_p M^\perp \oplus tr(TM) \quad (3.1.4)$$

olarak yazılabilir. Burada $\oplus$ ortogonal olmayan direkt toplamı göstermektedir. Böylece

$$T\tilde{M} = S(TM) \oplus_{orth} (TM^\perp \oplus tr(TM)) = TM \oplus tr(TM) \quad (3.1.5)$$

olur [21].

Örnek 3.1.1. $(R_1^4, \tilde{g})$, $(-, +, +, +)$ işaretli bir uzay zaman manifoldu olsun. R_1^4 ün bir $(\partial_t, \partial_1, \partial_2, \partial_3)$ kanonik bazı verilsin. R_1^4 de

$$\{t(1, \cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u) \in R_1^4 : t > 0, u \in (0, \frac{\pi}{2}), v \in [0, 2\pi]\} \quad (3.1.6)$$

ile verilen M hiperyüzeyi bir lightlike hiperyüzeydir. Gerçekten,

$$\begin{aligned} Rad TM &= Sp\{\xi = \partial_t + \cos u \cos v \partial_1 + \cos u \sin v \partial_2 + \sin u \partial_3\}, \\ ltr(TM) &= Sp\{N = \frac{1}{2}(-\partial_t + \cos u \cos v \partial_1 + \cos u \sin v \partial_2 + \sin u \partial_3\}, \\ S(TM) &= Sp\{W_1 = -\sin u \cos v \partial_1 - \sin u \sin v \partial_2 + \cos u \partial_3, \\ &W_2 = -\sin v \cos u \partial_1 + \cos v \cos u \partial_2\} \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

dir [23].

Tanım 3.1.2. M , $(\tilde{M}, \tilde{g})$ semi-Riemann manifoldunun bir lightlike hiperyüzeyi olsun. $\tilde{\nabla}$ ve ∇ , sırasıyla, $\tilde{M}$ ve M üzerindeki Levi-Civita konneksiyon ve lineer koneksiyon olmak üzere her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için Gauss ve Weingarten formulleri

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y), \quad (3.1.8)$$

$$\tilde{\nabla}_X N = -A_N X + \nabla_X^t N \quad (3.1.9)$$

ile verilir. Burada $\nabla_X Y, A_N X \in \Gamma(TM)$ ve $h(X, Y), \nabla_X^t N \in \Gamma(ltr(TM))$ dir.

$B(X, Y) = \tilde{g}(h(X, Y), \xi)$ ve $\tau(X) = \tilde{g}(\nabla_X^t N, \xi)$ olsun. Bu durumda Gauss ve Weingarten formülleri

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + B(X, Y)N, \quad (3.1.10)$$

$$\tilde{\nabla}_X N = -A_N X + w(X)N \quad (3.1.11)$$

olur. Burada B ve A_N , sırasıyla, M lightlike hiperyüzeyinin *ikinci temel formu* ve *şekil operatörü* olarak adlandırılır. Ayrıca, M üzerine indirgenen ∇ konneksiyonu metrik konneksiyon değildir fakat torsiyonsuzdur [21].

Tanım 3.1.3. M bir lightlike hiperyüzey olsun. Her $p \in M$ için $B = 0$ ise M hiperyüzeyine *total geodezik lightlike hiperyüzey* denir [21].

Örnek 3.1.2. $(R_1^4, \tilde{g})$, $(-, +, +, +)$ işaretli semi-Öklidyen uzay olsun. R_1^4 in bir $(\partial_1, \partial_2, \partial_3, \partial_4)$ kanonik bazı verilsin. R_1^4 de

$$\{(u, v + w, u, v - w) \in R_1^4 : u, v, w \in R\} \quad (3.1.12)$$

ile tanımlanan M hiperyüzeyi bir total geodezik lightlike hiperyüzeydir. Gerçekten,

$$\begin{aligned} \text{Rad } TM &= Sp\{\xi = \partial_1 + \partial_3\}, \text{ltr}(TM) = Sp\{N = \frac{1}{2}(-\partial_1 + \partial_3)\} \\ S(TM) &= Sp\{W_1 = \partial_2 + \partial_4, W_2 = \partial_2 - \partial_4\} \end{aligned}$$

olup burada $B = 0$ olduğu görülür.

Teorem 3.1.1. M , $(\tilde{M}, \tilde{g})$ semi-Riemann manifoldunun bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler birbirine denktir [21].

- i) M total geodeziktir.
- ii) M üzerinde h sıfırdır.
- iii) M üzerinde bir tek ∇ metrik konneksiyonu vardır.
- iv) $\text{Rad } TM$, ∇ konneksiyonuna göre bir paralel distribüsyondur.
- v) $\text{Rad } TM$, M üzerinde bir Killing distribüsyonudur.

Tanım 3.1.4. M , $(\tilde{M}, \tilde{g})$ semi-Riemann manifoldunun bir lightlike hiperyüzeyi olsun. $H \in R$ olmak üzere her $X, Y \in T_p M$ için

$$B(X, Y)_p = H g_p(X, Y),$$

ise $p \in M$ noktasına *umbilik nokta* denir. M nin her noktası umbilik ise M ye *total umbilik lightlike hiperyüzey* denir [21].

Tanım 3.1.5. M , $(\tilde{M}, \tilde{g})$ semi-Riemann manifoldunun bir lightlike hiperyüzeyi olsun. $\{e_1, \dots, e_n, \xi\}$, $T_p M$ nin bir bazı ve $\{e_1, \dots, e_n\}$, $\Gamma(S(TM))$ nin ortonormal bir bazı olmak üzere M nin ortalama eğriliği μ ile gösterilir ve

$$\mu = \frac{\text{tr}(B)}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \epsilon_i B(e_i, e_i), \quad g(e_i, e_i) = \epsilon_i. \quad (3.1.13)$$

ile tanımlanır [24].

Tanım 3.1.6. $M, (\tilde{M}, \tilde{g})$ semi-Riemann manifoldunun bir lightlike hiperyüzeyi ve $P : \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(S(TM))$ bir projeksiyon olsun. $\nabla_X^* PY, A_\xi^* X \in \Gamma(S(TM))$ olmak üzere (3.1.2) den her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\nabla_X PY = \nabla_X^* PY + h(X, PY) = \nabla_X^* Y + C(X, PY)\xi, \quad (3.1.14)$$

$$\nabla_X \xi = -A_\xi^* X - w(X)\xi \quad (3.1.15)$$

dir. Burada, ∇^*, C ve A_ξ^* , sırasıyla, $S(TM)$ üzerinde *indirgenmiş konneksiyon, lokal ikinci temel form* ve *lokal şekil operatörü* olarak adlandırılır.

(3.1.11) ve (3.1.14) eşitliklerinden

$$B(X, Y) = g(A_\xi^* X, Y), \quad (3.1.16)$$

$$C(X, PY) = g(A_N X, PY) \quad (3.1.17)$$

olur. (3.1.16) eşitliği kullanılarak her $X \in \Gamma(TM|_U)$ için

$$B(X, \xi) = 0$$

elde edilir [23].

Tanım 3.1.7. $M, (\tilde{M}, \tilde{g})$ semi-Riemann manifoldunun bir lightlike hiperyüzeyi olsun. φ , M nin U komşuluğu üzerinde sıfırdan farklı diferensiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere A_N ve A_ξ^* şekil operatörleri arasında

$$A_N = \varphi A_\xi^* \quad (3.1.18)$$

bağıntısı varsa M lightlike hiperyüzeyine *ekran lokal konformal lightlike hiperyüzey* denir. Eğer φ sabit ise M ye *ekran homotetik lightlike hiperyüzey* denir [25].

Örnek 3.1.3. R_1^{n+2} semi-Öklidyen uzayı, her $x = \sum_{A=0}^{n+1} x^A \frac{\partial}{\partial x^A}$ ve $y = \sum_{A=0}^{n+1} y^A \frac{\partial}{\partial x^A}$ için

$$\tilde{g}(x, y) = -x^0 y^0 + \sum_{\alpha=1}^{n+1} x^\alpha y^\alpha \quad (3.1.19)$$

metriği ile verilsin. R_1^{n+2} de bir M hiperyüzeyi

$$M = \{x = (x^0, \dots, x^{n+1}) \in R_1^{n+2} : -(x^0)^2 + \sum_{a=1}^{n+1} (x^a)^2 = 0, x \neq 0\} \quad (3.1.20)$$

şeklinde tanımlansın. M nın radikal uzayı

$$\xi = \sum_{A=0}^{n+1} x^A \frac{\partial}{\partial x^A} \quad (3.1.21)$$

global vektörü tarafından gerilir. Ayrıca $ltr(TM)$ de

$$N = \frac{1}{2(x^0)^2} \left\{ -x^0 \frac{\partial}{\partial x^0} + \sum_{a=1}^{n+1} x^a \frac{\partial}{\partial x^a} \right\} \quad (3.1.22)$$

şeklinde bir tek global null kesiti vardır.

$$\sum_{a=1}^{n+1} x^a X^a = 0 \quad (3.1.23)$$

şartını sağlayan her

$$X = \sum_{a=1}^{n+1} X^a \frac{\partial}{\partial x^a} \quad (3.1.24)$$

vektörü için

$$\tilde{\nabla}_X \xi = \nabla_X X = X \quad (3.1.25)$$

dir. Buradan

$$A_\xi^* X + w(X) \xi + X = 0 \quad (3.1.26)$$

elde edilir. $A_\xi^* X, \Gamma(S(TM))$ değerli olduğundan

$$A_\xi^* = -PX \quad (3.1.27)$$

olarak yazılabilir. Böylece direkt bir hesaplama ile

$$\begin{aligned} \nabla_\xi X &= \tilde{\nabla}_\xi X = \sum_{A=0}^{n+1} \sum_{a=1}^{n+1} x^A \frac{\partial X^a}{\partial x^A}, \\ \tilde{g}(\nabla_\xi X, \xi) &= \sum_{A=0}^{n+1} \sum_{a=1}^{n+1} x^A x^a \frac{\partial X^a}{\partial x^A} = - \sum_{a=1}^{n+1} x^a X^a = 0 \end{aligned} \quad (3.1.28)$$

olur. (3.1.28) eşitliğinden $\nabla_\xi X \in \Gamma(S(TM))$ ve böylece $A_N \xi = 0$ olduğu görülür. Ayrıca (3.1.22) ve (3.1.23) den her $X, Y \in \Gamma(S(TM))$ için

$$C(X, Y) = g(\nabla_X Y, N) = \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, N) = -\frac{1}{2(x_0)^2} g(X, Y) \quad (3.1.29)$$

dir. Böylece

$$A_N X = \frac{1}{2(x_0)^2} A_\xi^* X \quad (3.1.30)$$

sonucuna ulaşılır. O halde, M, R_1^{n+2} de konform faktörü $\varphi = \frac{1}{2(x_0)^2}$ olan bir ekran konformal global lightlike hiperyüzeydir [25].

Örnek 3.1.3 de verilen M lightlike hiperyüzeyine R_1^{n+2} de bir *light koni* adı verilir.

Önerme 3.1.1. $M, (\tilde{M}, \tilde{g})$ Lorentzian manifoldunun bir lightlike hiperyüzeyi olsun. M ve $\tilde{M}$ in Riemann eğrilik tensörleri, sırasıyla, R ve $\tilde{R}$ olmak üzere her $X, Y, Z, U \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\tilde{R}(X, Y)Z, PU) &= g(R(X, Y)Z, PU) + B(X, Z)C(Y, PU) \\ &\quad - B(Y, Z)C(X, PU), \end{aligned} \quad (3.1.31)$$

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\tilde{R}(X, Y)Z, \xi) &= (\nabla_X B)(Y, Z) - (\nabla_Y B)(X, Z) \\ &\quad + B(Y, Z)w(X) - B(X, Z)w(Y), \end{aligned} \quad (3.1.32)$$

$$\tilde{g}(\tilde{R}(X, Y)Z, N) = g(R(X, Y)Z, N), \quad (3.1.33)$$

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\tilde{R}(X, Y)PZ, N) &= (\nabla_X C)(Y, PZ) - (\nabla_Y C)(X, PZ) \\ &\quad + w(Y)C(X, PZ) - w(X)C(Y, PZ) \end{aligned} \quad (3.1.34)$$

dir. (3.1.31)-(3.1.34) eşitliklerine M üzerinde Gauss-Codazzi tipi denklemler denir. Burada her $X, Y, Z, U \in \Gamma(TM)$ için

$$(\nabla_X B)(Y, Z) = XB(Y, Z) - B(\nabla_X Y, Z) - B(Y, \nabla_X Z) \quad (3.1.35)$$

ve

$$(\nabla_X C)(Y, PZ) = XC(Y, PZ) - C(\nabla_X Y, PZ) - C(Y, \nabla_X^* PZ) \quad (3.1.36)$$

dir [21].

Tanım 3.1.8. $M, (\tilde{M}, \tilde{g})$ semi-Riemann manifoldunun bir lightlike hiperyüzeyi olsun. $T_p M$ nin herhangi bir $\Pi = Sp\{e_i, e_j\}$ düzlem kesiti için *kesit eğriliği*

$$K_{ij} = \frac{g(R(e_j, e_i)e_i, e_j)}{g(e_i, e_i)g(e_j, e_j) - g(e_i, e_j)^2}$$

ile tanımlanır [21]. M nin ekran ikinci temel formu C simetrik olmadığından kesit eğriliği simetrik değildir. Yani lightlike hiperyüzeyler için $K_{ij} = K_{ji}$ eşitliği her zaman sağlanmaz.

Tanım 3.1.9. $M, (\tilde{M}, \tilde{g})$ Lorentzian manifoldunun bir lightlike hiperyüzeyi ve $\xi, T_p M$ de bir null vektör olsun. $T_p M$ nin $\tilde{g}(\xi, e_i) = 0$ ve $\tilde{g}(e_i, e_i) \neq 0$ olacak şekildeki ξ ve e_i vektörlerinin gerdiği bir düzlem kesiti olan Π nin *null kesit eğriliği*

$$K_i^{null} = \frac{g(R_p(e_i, \xi)\xi, e_i)}{g_p(e_i, e_i)}$$

ile tanımlanır [26].

Tanım 3.1.10. $M, (\tilde{M}, \tilde{g})$ semi-Riemann manifoldunun bir lightlike hiperyüzeyi olsun. M nin indirgenmiş Ricci tipi tensörü $R^{(0,2)}$, her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$R^{(0,2)}(X, Y) = iz\{Z \rightarrow R(Z, X)Y\} \quad (3.1.37)$$

ile tanımlanır. Eğer $R^{(0,2)}$ simetrik ise $R^{(0,2)}$ ye M nin Ricci tensörü denir [23].

$M, (\tilde{M}, \tilde{g})$ Lorentzian manifoldunun bir lightlike hiperyüzeyi olsun. $\{e_1, \dots, e_n, \xi\}$, $T_p M$ nin bir bazı ve $\{e_1, \dots, e_n\}$, $\Gamma(S(TM))$ nin bir ortonormal bazı olmak üzere

$$R^{(0,2)}(X, Y) = \sum_{j=1}^n g(R(e_j, X)Y, e_j) + \tilde{g}(R(\xi, X)Y, N) \quad (3.1.38)$$

dir [27].

Tanım 3.1.11. $M, (\tilde{M}, \tilde{g})$ semi-Riemann manifoldunun bir lightlike hiperyüzeyi ve M nin indirgenmiş Ricci tensörü simetrik olsun. k sabit bir fonksiyon olmak üzere her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$Ric(X, Y) = k g(X, Y) \quad (3.1.39)$$

ise M ye bir *Einstein lightlike hiperyüzey* denir [23].

Einstein lightlike hiperyüzeyler, sadece Ricci tipi tensörünün simetrik olduğu hiperyüzeyler için tanımlanabilir.

Önerme 3.1.2. $M, \tilde{M}(c)$ semi-Riemann uzay formunun bir total geodezik lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda M simetrik bir Ricci tensörüne sahiptir [23].

Gauss-Codazzi tipi denklemlerden aşağıdaki önerme elde edilir:

Önerme 3.1.3. $M, (\tilde{M}, \tilde{g})$ semi-Riemann manifoldunun bir lightlike hiperyüzeyi olsun.

$$\begin{aligned} R^{(0,2)}(\xi, \xi) &= \sum_{j=1}^n g(R(e_j, \xi)\xi, e_j) - \tilde{g}(R(\xi, \xi)\xi, N) \\ &= \sum_{j=1}^n K_j^{null} \end{aligned} \quad (3.1.40)$$

ve

$$R^{(0,2)}(e_i, e_i) = \sum_{j=1}^n g(R(e_j, e_i)e_i, e_j) + \tilde{g}(R(\xi, e_i)e_i, N) \quad (3.1.41)$$

dir [27].

(3.1.38) eşitliğinde iz alınıp (3.1.40) ve (3.1.41) kullanılarak

$$\tau(p) = \sum_{i,j=1}^n K_{ij} + \sum_{i=1}^n K_i^{null} + K_{iN} \quad (3.1.42)$$

şeklinde bir $\tau(p)$ reel sayısı elde edilir. Burada, $i \in \{1, \dots, n\}$ için $K_{iN} = \tilde{g}(R(\xi, e_i)e_i, N)$ dir

Tanım 3.1.12. $M, (\tilde{M}, \tilde{g})$ semi-Riemann manifoldunun bir lightlike hiperyüzeyi ve M nin Ricci tipi tensörü simetrik olsun. (3.1.42) da verilen $\tau(p)$ reel sayısına M nin $p \in M$ noktasındaki skalar eğriliği denir [27].

3.2 Lorentzian manifoldların lightlike hiperyüzeyleri üzerinde k -Ricci eğriliği ve k -skalar eğriliği

Bu kısımda, Lorentzian manifoldların lightlike hiperyüzeyleri üzerinde k -Ricci eğriliği ve k -skalar eğriliği tanıtılarak, k -skalar eğriliğinin katıldığı çeşitli eşitsizlikler kurulmuştur.

Tanım 3.2.1. $M, (\tilde{M}, \tilde{g})$ Loretzian manifoldunun $(n+1)$ boyutlu bir lightlike hiperyüzeyi; $\{e_1, \dots, e_n, \xi\}, \Gamma(TM)$ nin bir bazı ve $\{e_1, \dots, e_n\}, \Gamma(S(TM))$ nin bir ortonormal bazı olsun. $k \leq n$ için $(k+1)$ -boyutlu bir dejenere düzlem kesiti $\pi_{k,\xi} = Sp\{e_1, \dots, e_k, \xi\}$ ve k -boyutlu bir non-dejenere düzlem kesiti $\pi_k = Sp\{e_1, \dots, e_k\}$ olmak üzere

$$Ric_{\pi_{k,\xi}}(X) = R^{(0,2)}(X, X) = \sum_{j=1}^k g(R(e_j, X)X, e_j) + \tilde{g}(R(\xi, X)X, N) \quad (3.2.1)$$

ve

$$Ric_{\pi_k}(X) = R^{(0,2)}(X, X) = \sum_{j=1}^k g(R(e_j, X)X, e_j) \quad (3.2.2)$$

eğriliklerine, sırasıyla, M nin birim $X \in \Gamma(TM)$ vektörü doğrultusundaki k -dejenere Ricci tipi tensörü ve k -Ricci tipi tensörü denir. Eğer $p \in M$ noktasında Ricci tipi tensörü simetrik ise $Ric_{\pi_{k,\xi}}(X)$, k -dejenere Ricci eğriliği ve $Ric_{\pi_k}(X)$, k -Ricci eğriliği olarak adlandırılır. Ayrıca

$$\tau_{\pi_{k,\xi}}(p) = \sum_{i,j=1}^k K_{ij} + \sum_{i=1}^k K_i^{null} + K_{iN} \quad (3.2.3)$$

ve

$$\tau_{\pi_k}(p) = \sum_{i,j=1}^k K_{ij} \quad (3.2.4)$$

değerlerine, sırasıyla, M nin p noktasındaki k -dejenere skalar eğriliği ve k -skalar eğriliği denir. $k = 2$ için $T_p M$ nin 2-boyutlu bir düzlem kesiti $\Pi_{1,\xi} = Sp\{e_1, \xi\}$ olmak üzere

$$Ric_{\Pi_{1,\xi}}(e_1) = K_{1N}$$

ve

$$\tau_{\Pi_2}(p) = K_1^{null} + K_{1N}$$

dir.

$k = n$ için $\pi_n = Sp\{e_1, \dots, e_n\} = \Gamma(S(TM))$ olmak üzere

$$Ric_{S(TM)}(e_1) = Ric_{\pi_n}(e_1) = \sum_{j=1}^n K_{1j} = K_{12} + \dots + K_{1n} \quad (3.2.5)$$

ve

$$\tau_{S(TM)}(p) = \sum_{i,j=1}^n K_{ij} \quad (3.2.6)$$

dir. $Ric_{S(TM)}(e_1)$, e_1 doğrultusunda *ekran Ricci tipi tensörü* olarak adlandırılır.

Eğer M nin kesit eğriliği simetrik ise ekran Ricci tipi tensörüne *ekran Ricci tipi eğriliği* ve $\tau_{S(TM)}(p)$ değerine de $p \in M$ noktasındaki *ekran skalar eğriliği* denir.

Gauss Codazzi tipi denklemlerden aşağıdaki önerme elde edilir:

Önerme 3.2.1. $M, (\tilde{M}, \tilde{g})$ Lorentzian manifoldunun $(n+1)$ -boyutlu bir lightlike hiperyüzeyi; $\{e_1, \dots, e_n, \xi\}$, $\Gamma(TM)$ nin bir bazı ve $\{e_1, \dots, e_n\}$, $\Gamma(S(TM))$ nin bir ortonormal bazı olsun. Bu durumda

$$\tau_{S(TM)}(p) = \tilde{\tau}_{S(TM)}(p) + \sum_{i,j=1}^n B_{ii}C_{jj} - B_{ij}C_{ji} \quad (3.2.7)$$

dir. Burada $i, j \in \{1, \dots, n\}$ için $B_{ij} = B(e_i, e_j)$ ve $C_{ij} = C(e_i, e_j)$ dir.

Önerme 3.2.2. $M, (\tilde{M}, \tilde{g})$ Lorentzian manifoldunun $(n+1)$ -boyutlu bir lightlike hiperyüzeyi, $\{e_1, \dots, e_n, \xi\}$, $\Gamma(TM)$ nin bir bazı ve $\{e_1, \dots, e_n\}$, $\Gamma(S(TM))$ nin bir ortonormal bazı olsun. Bu durumda M nin ikinci temel formu B ve ekran ikinci temel formu C olmak üzere

$$\sum_{i,j=1}^n B_{ij}C_{ji} = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i,j=1}^n (B_{ij} + C_{ji})^2 - \sum_{i,j=1}^n (B_{ij})^2 + (C_{ji})^2 \right\} \quad (3.2.8)$$

ve

$$\sum_{i,j} B_{ii}C_{jj} = \frac{1}{2} \left\{ (\sum_{i,j} B_{ii} + C_{jj})^2 - (\sum_i B_{ii})^2 - (\sum_j C_{jj})^2 \right\} \quad (3.2.9)$$

dir.

Teorem 3.2.1. $M, (\tilde{M}, \tilde{g})$ Lorentzian manifoldunun $(n+1)$ -boyutlu bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda

a)

$$\tau_{S(TM)}(p) \leq \tilde{\tau}_{S(TM)}(p) + n\mu(izA_N) + \frac{1}{4} \sum_{i,j} (B_{ij} - C_{ji})^2 \quad (3.2.10)$$

dir. (3.2.10) eşitsizliğinin eşitlik durumunun her $p \in M$ noktasında sağlanması için gerek ve yeter şart M nin ya $\varphi = -1$ olacak şekilde ekran homotetik ya da total geodezik olmasıdır.

b)

$$\tau_{S(TM)}(p) \geq \tilde{\tau}_{S(TM)}(p) + n\mu(izA_N) - \frac{1}{4} \sum_{i,j} (B_{ij} + C_{ji})^2 \quad (3.2.11)$$

dir. (3.2.11) eşitsizliğinin eşitlik durumunun her $p \in M$ noktasında sağlanması için gerek ve yeter şart M nin ya $\varphi = 1$ olacak şekilde ekran homotetik ya da total geodezik olmasıdır.

c) (3.2.10) ve (3.2.11) eşitsizliklerinin eşitlik durumlarının her $p \in M$ noktasında sağlanması için gerek ve yeter koşul M nin total geodezik olmasıdır.

İspat. (3.2.7) ve (3.2.8) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} \tau_{S(TM)}(p) &= \tilde{\tau}_{S(TM)}(p) + \sum_{i,j=1}^n B_{ii}C_{jj} - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n (B_{ij} + C_{ji})^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n (B_{ij})^2 + (C_{ji})^2 \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

dir. Burada

$$\frac{1}{2}(B_{ij}^2 + C_{ji}^2) = \frac{1}{4}(B_{ij} + C_{ji})^2 + \frac{1}{4}(B_{ij} - C_{ji})^2$$

olduğu gözönüne alınırsa

$$\frac{1}{2} \left\{ \sum_{i,j=1}^n (B_{ij} + C_{ji})^2 + \sum_{i,j=1}^n (B_{ij})^2 + (C_{ji})^2 \right\} = \frac{1}{4} \sum_{i,j} (B_{ij} + C_{ji})^2 + \frac{1}{4} \sum_{i,j} (B_{ij} - C_{ji})^2$$

yazılabilir. Bu son eşitlik (3.2.12) de yerine yazılacak olursa

$$\tau_{S(TM)}(p) = \tilde{\tau}_{S(TM)}(p) + \sum_{i,j=1}^n B_{ii}C_{jj} - \frac{1}{4} \sum_{i,j} (B_{ij} + C_{ji})^2 + \frac{1}{4} \sum_{i,j} (B_{ij} - C_{ji})^2 \quad (3.2.13)$$

elde edilir. Bu ise (3.2.10) ve (3.2.11) eşitsizliklerinin sağlandığını gösterir.

(3.2.10) eşitsizliğinin eşitlik durumunun her $p \in M$ noktasında sağlanması için gerek ve yeter şart her $i, j \in \{1, \dots, n\}$ için $B_{ij} = -C_{ij}$ veya $B_{ij} = C_{ij} = 0$ olması başka bir

deyişle, M lightlike hiperyüzeyinin $\varphi = -1$ olacak şekilde ekran homotetik ya da total geodezik olmasıdır.

Benzer şekilde (3.2.11) eşitsizliğinin eşitlik durumunun her $p \in M$ noktasında sağlanması için gerek ve yeter şart her $i, j \in \{1, \dots, n\}$ için $B_{ij} = C_{ij}$ veya $B_{ij} = C_{ij} = 0$ olması başka bir deyişle, M lightlike hiperyüzeyi $\varphi = 1$ olacak şekilde ekran homotetik ya da total geodezik olmasıdır.

(3.2.10) ve (3.2.11) eşitsizliklerinin eşitlik durumlarının her $p \in M$ noktasında sağlanması için gerek ve yeter şart her $i, j \in \{1, \dots, n\}$ için $B_{ij} = C_{ij}$ ve $B_{ij} = -C_{ij}$ olmasıdır. Bu ise her $i, j \in \{1, \dots, n\}$ için $B_{ij} = C_{ij} = 0$ olduğunu gösterir. O halde M total geodeziktir. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Hatırlatma 3.2.1. Örnek 3.1.2 göz önüne alınacak olursa, $B_{11} = B_{22} = 0$ ve her $p \in M$ için $\tau_{S(TM)}(p) = 0$ olduğu görülür. Böylece, (3.2.10) ve (3.2.11) eşitsizliklerinin eşitlik durumu bu hiperyüzeyin her noktasında sağlanır.

Sonuç 3.2.1. M , $(\tilde{M}(c), \tilde{g})$ Lorentzian space formun $(n+1)$ -boyutlu bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda

a)

$$\tau_{S(TM)}(p) \leq n(n-1)c + n\mu(izA_N) + \frac{1}{4} \sum_{i,j} (B_{ij} - C_{ji})^2 \quad (3.2.14)$$

dir. (3.2.14) eşitsizliğinin eşitlik durumunun her $p \in M$ noktasında sağlanması için gerek ve yeter şart M nin ya $\varphi = -1$ olacak şekilde ekran homotetik ya da total geodezik olmasıdır.

b)

$$\tau_{S(TM)}(p) \geq n(n-1)c + n\mu(izA_N) - \frac{1}{2} \sum_{i,j} (B_{ij} + C_{ji})^2 \quad (3.2.15)$$

dir. (3.2.15) eşitsizliğinin eşitlik durumunun her $p \in M$ noktasında sağlanması için gerek ve yeter şart M nin ya $\varphi = 1$ olacak şekilde ekran homotetik ya da total geodezik olmasıdır.

c) (3.2.14) ve (3.2.15) eşitsizliklerinin eşitlik durumlarının her $p \in M$ noktasında sağlanması için gerek ve yeter şart M nin total geodezik olmasıdır.

Sonuç 3.2.2. $M, (\tilde{M}(c), \tilde{g})$ Lorentzian space formun $(n+1)$ -boyutlu bir ekran homotetik lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda

a)

$$\tau_{S(TM)}(p) \leq n(n-1)c + \phi n^2 \mu^2 + \frac{(\phi-1)}{4} \sum_{i,j} (B_{ij})^2 \quad (3.2.16)$$

dir. (3.2.16) eşitsizliğinin eşitlik durumunun her $p \in M$ noktasında sağlaması için gerek ve yeter şart ya $\phi = -1$ ya da M nin total geodezik olmasıdır.

b)

$$\tau_{S(TM)}(p) \geq n(n-1)c + \phi n^2 \mu^2 - \frac{(\phi-1)}{4} \sum_{i,j} (B_{ij})^2 \quad (3.2.17)$$

dir. (3.2.16) eşitsizliğinin eşitlik durumunun her $p \in M$ noktasında sağlaması için gerek ve yeter şart ya $\phi = 1$ ya da M nin total geodezik olmasıdır.

c) (3.2.16) ve (3.2.17) eşitsizliklerinin eşitlik durumlarının her $p \in M$ noktasında sağlaması için gerek ve yeter şart M nin total geodezik olmasıdır.

Teorem 3.2.2. $M, (\tilde{M}, \tilde{g})$ Lorentzian manifoldunun $(n+1)$ -boyutlu bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \tau_{S(TM)}(p) \leq & \tilde{\tau}_{S(TM)}(p) + \frac{1}{2}(iz\bar{A})^2 - \frac{1}{2}(izA_N)^2 \\ & - \frac{1}{4} \sum_{i,j} (B_{ij} + C_{ji})^2 + \frac{1}{4} \sum_{i,j} (B_{ij} - C_{ji})^2 \end{aligned} \quad (3.2.18)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} B_{11} + C_{11} & B_{12} + C_{21} & \dots & B_{1n} + C_{n1} \\ B_{21} + C_{12} & B_{22} + C_{22} & \dots & B_{2n} + C_{n2} \\ \vdots & & & \\ B_{n1} + C_{1n} & B_{n2} + C_{2n} & \dots & B_{nn} + C_{nn} \end{pmatrix} \quad (3.2.19)$$

dir. (3.2.18) eşitsizliğinin eşitlik durumunun her $p \in M$ noktasında sağlanması için gerek ve yeter şart M nin minimal olmasıdır.

İspat. (3.2.13) ve (3.2.9) eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned}\tau_{S(TM)}(p) &= \tilde{\tau}_{S(TM)}(p) + \frac{1}{2} \left\{ \left(\sum_{i,j} B_{ii} + C_{jj} \right)^2 - \left(\sum_i B_{ii} \right)^2 - \left(\sum_j C_{jj} \right)^2 \right\} \\ &\quad - \frac{1}{4} \sum_{i,j} (B_{ij} + C_{ji})^2 + \frac{1}{4} \sum_{i,j} (B_{ij} - C_{ji})^2\end{aligned}\quad (3.2.20)$$

elde edilir ki bu (3.2.18) eşitsizliğinin sağlandığını gösterir.

(3.2.18) eşitsizliğinin eşitlik durumunun her $p \in M$ noktasında sağlanması için gerek ve yeter şart

$$\sum_{i=1}^n B_{ii} = 0 \quad (3.2.21)$$

olmasıdır. Böylece M minimal olur ve ispat tamamlanır. $\square$

Sonuç 3.2.3. M , $(\tilde{M}(c), \tilde{g})$ Lorentzian uzay formunun $(n+1)$ -boyutlu bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}\tau_{S(TM)}(p) &\leq n(n-1)c + \frac{1}{2}(iz\bar{A})^2 - \frac{1}{2}(izA_N)^2 \\ &\quad - \frac{1}{4} \sum_{i,j} (B_{ij} + C_{ji})^2 + \frac{1}{4} \sum_{i,j} (B_{ij} - C_{ji})^2\end{aligned}\quad (3.2.22)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $\bar{A}$, (3.2.19) ile verilir. (3.2.22) eşitsizliğinin eşitlik durumunun her $p \in M$ noktasında sağlanması için gerek ve yeter şart M nin minimal olmasıdır.

Sonuç 3.2.4. M , $(\tilde{M}, \tilde{g})$ Lorentzian manifoldunun $(n+1)$ -boyutlu bir ekran homotetik lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda

$$\tau_{S(TM)}(p) \leq \tilde{\tau}_{S(TM)}(p) + \frac{(2\varphi+1)}{2} n^2 \mu^2 - \varphi \sum_{i,j} (B_{ij})^2 \quad (3.2.23)$$

eşitsizliği sağlanır. (3.2.23) eşitsizliğinin eşitlik durumunun her $p \in M$ noktasında sağlanması için gerek ve yeter şart M nin minimal olmasıdır.

Örnek 3.2.1. R_1^4 Minkowski uzayını göz önüne alalım. R_1^4 ün metriğininin işareti $(+, +, +, -)$ ve kanonik bir bazıda $(\partial_1, \partial_2, \partial_3, \partial_4)$ şeklinde verilsin. R_1^4 de

$$M = \{t(\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u, 1) \in R_1^4 : t > 0, u \in (0, \frac{\pi}{2}), v \in [0, 2\pi]\}, \quad (3.2.24)$$

ile tanımlı lightlike koniyi alalım. Burada

$$\begin{aligned} S(TM) = \quad Sp\{e_1 = -\sin u \cos v \partial_1 - \sin u \sin v \partial_2 + \cos u \partial_3, \\ e_2 = -\sin v \partial_1 + \cos v \partial_2\}, \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} Rad(TM) = Sp\{\xi = \cos u \cos v \partial_1 + \cos u \sin v \partial_2 + \sin u \partial_3 + \partial_4\}, \\ ltr(TM) = Sp\{N = \frac{1}{2}(\cos u \cos v \partial_1 + \cos u \sin v \partial_2 + \sin u \partial_3 - \partial_4)\} \end{aligned}$$

dır. Direkt hesaplamalar ile

$$\begin{aligned} B(e_1, e_1) &= -\frac{1}{t}, \quad B(e_2, e_2) = -\frac{1}{t \cos u}, \\ K_{12} &= \frac{1}{t^4 \cos u}, \quad \tau_{S(TM)}(p) = \frac{1}{t^4 \cos u}, \\ 2\mu &= B_{11} + B_{22} = -\frac{(\cos u + 1)}{t \cos u}, \\ 4\mu^2 &= \frac{(\cos u + 1)^2}{t^2 \cos^2 u}, \quad 2(2\phi + 1)\mu^2 = \frac{(t^2 + 1)(\cos u + 1)^2}{2t^4 \cos^2 u}, \\ \sum_{i,j=1}^2 (B_{ij})^2 &= \frac{\cos^2 u + 1}{t^2 \cos^2 u}, \quad \phi \sum_{i,j=1}^2 (B_{ij})^2 = \frac{\cos^2 u + 1}{2t^4 \cos^2 u} \end{aligned}$$

elde edilir.

Yukarıdaki hesaplamalar göz önüne alınarak (3.2.23) eşitsizliğinin sağ tarafı

$$\tilde{\tau}_{S(TM)}(p) + \frac{(2\phi + 1)}{2} n^2 \mu^2 - \phi \sum_{i,j} (B_{ij})^2 = \frac{t^2(\cos^2 u + 1) + 2(t^2 + 1)\cos u}{2t^4 \cos^2 u}$$

olur. Son eşitlikle $\tau_{S(TM)}(p) = \frac{1}{t^4 \cos u}$ ifadesi karşılaştırılırsa

$$-2t^2 \cos u < t^2(\cos^2 u + 1)$$

elde edilir ki bu ise (3.2.23) eşitsizliğinin M üzerinde daima sağlandığını gösterir.

Lemma 3.2.1. $a_1, \dots, a_n$ ($n > 1$) reel sayılar olmak üzere

$$\frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2 \leq \sum_{i=1}^n a_i^2 \quad (3.2.25)$$

dir. Eşitliğin sağlanması için gerek yeter şart $a_1 = \dots = a_n$ olmasıdır [28].

İspat. $a_1, \dots, a_n$ ($n > 1$) n -tane reel sayı olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
0 \leq \sum_{i < j} (a_i - a_j)^2 &= (a_1 - a_2)^2 + (a_1 - a_3)^2 + \dots + (a_1 - a_n)^2 \\
&\quad + (a_2 - a_3)^2 + \dots + (a_2 - a_n)^2 + \dots + (a_{n-1} - a_n)^2 \\
&= a_1^2 - 2a_1a_2 + a_2^2 + a_1^2 - 2a_1a_3 + a_3^2 + \dots + a_1^2 - 2a_1a_n + a_n^2 \\
&\quad + a_2^2 - 2a_2a_3 + a_3^2 + \dots + a_2^2 - 2a_2a_n + a_n^2 + \dots + a_{n-1}^2 \\
&\quad - 2a_{n-1}a_n + a_n^2 \\
&= (n-1) \sum_i (a_i)^2 - 2 \sum_{i < j} a_i a_j
\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}
0 &\leq (n-1) \sum_i (a_i)^2 - 2 \sum_{i < j} a_i a_j \\
\Rightarrow 2 \sum_{i < j} a_i a_j &\leq (n-1) \sum_i (a_i)^2 \\
\Rightarrow \sum_i (a_i)^2 + 2 \sum_{i < j} a_i a_j &\leq n \sum_i (a_i)^2 \\
\Rightarrow (\sum_i (a_i))^2 &\leq n \sum_i (a_i)^2 \\
\Rightarrow \frac{1}{n} (\sum_i a_i)^2 &\leq \sum_i (a_i)^2
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Teorem 3.2.3. $M, (\tilde{M}, \tilde{g})$ Lorentzian manifoldunun $(n+1)$ -boyutlu bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\tau_{S(TM)}(p) &\leq \tilde{\tau}_{S(TM)}(p) + \frac{2n-1}{4n} (iz\bar{A})^2 - \frac{1}{2} \{ (izA_N)^2 + n^2 \mu^2 \} \\
&\quad + \frac{1}{4} \sum_{i,j} (B_{ij} - C_{ji})^2 - \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} (B_{ij} + C_{ji})^2
\end{aligned} \tag{3.2.26}$$

eşitsizliği sağlanır. (3.2.26) eşitsizliğinin eşitlik durumunun her $p \in M$ noktasında sağlanması için gerek ve yeter şart $n\mu = -iz A_N$ olmasıdır.

İspat. (3.2.20) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned}\tau_{S(TM)}(p) &= \tilde{\tau}_{S(TM)}(p) + \frac{1}{2}\{(iz\bar{A})^2 - (izA_N)^2 - n^2\mu^2\} - \frac{1}{4}\sum_i (B_{ii} + C_{ii})^2 \\ &\quad - \frac{1}{4}\sum_{i \neq j} (B_{ij} + C_{ji})^2 + \frac{1}{4}\sum_{i,j} (B_{ij} - C_{ji})^2\end{aligned}\quad (3.2.27)$$

elde edilir. Lemma 3.2.1 ve (3.2.27) eşitliğinden

$$\begin{aligned}\tau_{S(TM)}(p) &\leq \tilde{\tau}_{S(TM)}(p) + \frac{1}{2}\{(iz\bar{A})^2 - (izA_N)^2 - n^2\mu^2\} - \frac{1}{4n}(\sum_i B_{ii} + C_{ii})^2 \\ &\quad - \frac{1}{4}\sum_{i \neq j} (B_{ij} + C_{ji})^2 + \frac{1}{4}\sum_{i,j} (B_{ij} - C_{ji})^2\end{aligned}\quad (3.2.28)$$

olur. Bu ise (3.2.26) eşitsizliğinin sağlandığını gösterir.

(3.2.26) eşitsizliğinin eşitlik durumunun her $p \in M$ noktasında sağlanması için gerek ve yeter şart

$$B_{11} + C_{11} = \dots = B_{nn} + C_{nn} \quad (3.2.29)$$

olmasıdır. (3.2.29) den

$$\begin{aligned}(1-n)B_{11} + B_{22} + \dots + B_{nn} + (1-n)C_{11} + C_{22} + \dots + C_{nn} &= 0, \\ B_{11} + (1-n)B_{22} + \dots + B_{nn} + C_{11} + (1-n)C_{22} + \dots + C_{nn} &= 0, \\ &\vdots \\ B_{11} + B_{22} + \dots + (1-n)B_{nn} + C_{11} + C_{22} + \dots + (1-n)C_{nn} &= 0\end{aligned}$$

yazılabilir. Yukarıdaki eşitlikler ise

$$(n-1)^2(izA_N + n\mu) = 0 \quad (3.2.30)$$

olduğunu gösterir. $n \neq 1$ olduğundan $n\mu = -izA_N$ dir. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Sonuç 3.2.5. M , $(\tilde{M}(c), \tilde{g})$ Lorentzian space formunun $(n+1)$ -boyutlu bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}\tau_{S(TM)}(p) &\leq n(n-1)c + \frac{2n-1}{4n}(iz\bar{A})^2 - \frac{1}{2}\{(n^2\mu^2 + (izA_N)^2\} \\ &\quad + \frac{1}{4}\sum_{i,j} (B_{ij} - C_{ji})^2 - \frac{1}{4}\sum_{i \neq j} (B_{ij} + C_{ji})^2\end{aligned}\quad (3.2.31)$$

eşitsizliği sağlanır. (3.2.31) eşitsizliğinin eşitlik durumunun her $p \in M$ noktasında sağlanması için gerek ve yeter şart $n\mu = -izA_N$ olmasıdır.

Sonuç 3.2.6. $M, (\tilde{M}, \tilde{g})$ Lorentzian manifoldunun $(n+1)$ -boyutlu bir ekran homotetik lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \tau_{S(TM)}(p) \leq & \tilde{\tau}_{S(TM)}(p) - \frac{(\varphi^2 + 1)}{4} n^2 \mu^2 + \frac{(\varphi + 1)^2}{4} (2n - 1) n \mu^2 \\ & + \frac{(\varphi - 1)^2}{4} \sum_i (B_{ii})^2 - \frac{(\varphi + 1)^2}{4} \sum_{i \neq j} (B_{ij})^2 \end{aligned} \quad (3.2.32)$$

eşitsizliği sağlanır. (3.2.32) eşitsizliğinin eşitlik durumunun her $p \in M$ noktasında sağlanması için gerek ve yeter şart ya $\varphi = -1$ ya da M nin minimal olmasıdır.

3.3 Lorentzian manifoldların lightlike hiperyüzeyleri üzerinde eğrilik invaryantları

Bu kısımda, Lorentzian manifoldların lightlike hiperyüzeyleri üzerinde eğrilik invaryantları ve $S(n_1, \dots, n_k)$ uzayı tanıtılacaktır.

Tanım 3.3.1. $n \geq 2$ ve $k \geq 0$ tamsayısı için $S(n, k)$, $n_1 < n$, $n_j \geq 2$, $j = 1, \dots, k$ ve $n_1 + \dots + n_k \leq n$ koşulunu sağlayan bütün $(n_1, \dots, n_k)$ k -nokta çiftlerinden oluşan sonlu bir küme ve $S(n)$ de $k \geq 0$ olmak üzere bütün $S(n, k)$ ların bileşimi olsun. $\pi_1, \dots, \pi_{n_k}$; boy $\pi_{n_j} = n_j$, ($j = 1, \dots, k$) olacak şekilde her $(n_1, \dots, n_k) \in S(n, k)$ k -lısı için $T_p M$, $p \in M$ tanjant uzayının alt uzayları olmak üzere

$$S(n_1, \dots, n_k)(p) = \inf \{ \tau(\pi_{n_1}) + \dots + \tau(\pi_{n_k}) \},$$

$$\hat{S}(n_1, \dots, n_k)(p) = \sup \{ \tau(\pi_{n_1}) + \dots + \tau(\pi_{n_k}) \}$$

olarak tanımlansın. Eğrilik invaryantları

$$\delta(n_1, \dots, n_k)(p) = \tau(p) - S(n_1, \dots, n_k)(p),$$

$$\hat{\delta}(n_1, \dots, n_k)(p) = \tau(p) - \hat{S}(n_1, \dots, n_k)(p)$$

ile tanımlanır. $S(n_1, \dots, n_k) = \hat{S}(n_1, \dots, n_k)$ ise $(M, g, S(TM))$ lightlike hiperyüzeyine $S(TM)$ ye göre $S(n_1, \dots, n_k)$ uzayı denir.

Teorem 3.3.1. M , $(\tilde{M}, \tilde{g})$ Lorentzian manifoldunun $(n+1)$ -boyutlu bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda M nin bir $S(n)$ uzayı olması için gerek ve yeter koşul M nin $\tau(p)$, $p \in M$, skalar eğriliğinin sabit olmasıdır.

İspat. $T_p M$ nin bir bazı $\{e_1, \dots, e_n, \xi\}$ ve $\Gamma(S(TM))$ nin ortonormal bir bazı $\{e_1, \dots, e_n\}$ olsun. $T_p M$ nin n -boyutlu düzlem kesitleri

$$\begin{aligned}\pi_{n-1, \xi}^1 &= Sp\{e_2, \dots, e_n, \xi\} \subset T_p M, \\ &\vdots \\ \pi_{n-1, \xi}^n &= Sp\{e_1, \dots, e_{n-1}, \xi\} \subset T_p M, \\ \pi_n &= Sp\{e_1, \dots, e_n\} \subset T_p M\end{aligned}$$

ile verilsin. (3.2.3) ve (3.2.4) den

$$\begin{aligned}\tau_{\pi_{n-1, \xi}^1}(p) &= \sum_{i,j=2}^n K_{ij} + K_i^{null} + K_{iN}, \\ &\vdots \\ \tau_{\pi_{n-1, \xi}^n}(p) &= \sum_{i,j=1}^{n-1} K_{ij} + K_i^{null} + K_{iN}, \\ \tau_{\pi_n}(p) &= \sum_{i,j=1}^n K_{ij} = \tau_{S(TM)}(p)\end{aligned}$$

yazılabilir. M bir $S(n)$ uzayı ise

$$\begin{aligned}\tau_{\pi_{n-1, \xi}^1}(p) &= \tau(p) - Ric(e_1) - \sum_{j=1}^n K_{j1} - K_1^{null} = c, \\ &\vdots \\ \tau_{\pi_{n-1, \xi}^n}(p) &= \tau(p) - Ric(e_n) - \sum_{j=1}^n K_{jn} - K_n^{null} = c, \\ \tau_{\pi_n}(p) &= \tau(p) - \sum_{i=1}^n K_i^{null} + K_{iN} = c\end{aligned}$$

dir. Böylece

$$\begin{aligned}Ric(e_1) + \sum_{j=1}^n K_{j1} + K_1^{null} &= \dots = Ric(e_n) + \sum_{j=1}^n K_{jn} + K_n^{null} \\ &= \sum_{i=1}^n K_i^{null} + K_{iN}\end{aligned}\tag{3.3.1}$$

olur. (3.3.1) den

$$Ric_{S(TM)}(e_1) + \dots + Ric_{S(TM)}(e_n) = (n-1) \sum_{i=1}^n K_i^{null} + K_{iN} \quad (3.3.2)$$

elde edilir. Ayrıca (3.3.2) den

$$\tau_{S(TM)}(p) = (n-1)(\tau(p) - \tau_{S(TM)}(p))$$

yazılabilir. Böylece

$$\tau(p) = \left(\frac{2-n}{1-n}\right)c \quad (3.3.3)$$

olup $\tau(p)$ nin sabit olduğu görülür. Tersine $\tau(p)$ sabit ise M nin $S(n)$ uzayı olduğu açıktır. $\square$

Uyarı 3.3.1. n -boyutlu bir non-dejenere manifold $S(n)$ uzayı ise bu manifold aynı zamanda bir Einstein uzayıdır [29]. Fakat Lorentzian manifoldların bir dejenere hiperyüzeyi $S(n)$ uzayı ise bu uzay sabit skalar eğriliklidir.

(3.3.2) eşitliği göz önünde alınarak aşağıdaki sonuç verilebilir:

Sonuç 3.3.1. $M(c)$, $(\tilde{M}, \tilde{g})$ Lorentzian manifoldunun sabit eğrilikli bir lightlike hiperyüzey olsun. Bu durumda $M(c)$ nin bir $S(n)$ uzayı olması için gerek ve yeter şart

$$\sum_{i=1}^n K_{iN} = 0$$

olmasıdır.

Teorem 3.3.2. M , $\tilde{M}$ Lorentzian manifoldunun $(n+1)$ -boyutlu bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Eğer M , $2 \leq j < n$ için bir $S(j)$ uzayı ise aynı zamanda $S(j+1)$ uzayıdır.

İspat. Teoremin ispatı için tümevarım metodunu kullanacağız. Öncelikle teoremin iddiasının $n = 2$ için doğruluğunu gösterelim. Kabul edelim ki M bir $S(2)$ uzayı olsun. $T_p M$ nin 2-boyutlu alt düzlem kesitleri $\Pi_{1,\xi}^1 = Sp\{e_1, \xi\}$, $\Pi_2 = \{e_1, e_2\}$, $\Pi_{1,\xi}^2 = Sp\{e_2, \xi\}$ verilsin. Bu durumda

$$\begin{aligned} \tau_{\Pi_{1,\xi}^1}(p) &= K_1^{null} + K_{1N} = c, \\ \tau_{\Pi_2}(p) &= K_{12} + K_{21} = c, \\ \tau_{\Pi_{1,\xi}^2}(p) &= K_2^{null} + K_{2N} = c \end{aligned}$$

yazılabilir. Şimdi $T_p M$ de $\pi_3 = Sp\{e_1, e_2, e_3\}$ ve $\pi_{2,\xi}^1 = Sp\{e_1, e_2, \xi\}$ 3-boyutlu alt düzlem kesitlerini göz önüne alalım. Bu durumda

$$\begin{aligned}\tau_{\pi_{2,\xi}^1}(p) &= K_{12} + K_{21} + \sum_{i=1}^2 K_i^{null} + K_{iN} \\ &= 3c\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\tau_{\pi_3}(p) &= K_{12} + K_{21} + K_{13} + K_{31} + K_{23} + K_{32} \\ &= 3c\end{aligned}$$

olduğundan M bir $S(3)$ uzayıdır. Bu ise iddianın $n = 2$ için doğru olduğunu gösterir.

Şimdi $n = k$ için iddianın doğru olduğunu kabul edelim.

$T_p M$ nin k -boyutlu düzlem kesitleri $\pi_{k-1,\xi}^1 = Sp\{e_2, e_3, \dots, e_k, \xi\}$, $\pi_{k-1,\xi}^2 = Sp\{e_1, e_3, \dots, e_k, \xi\}$, ..., $\pi_{k-1,\xi}^k = Sp\{e_1, e_2, \dots, e_{k-1}, \xi\}$, $\pi_k = Sp\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ verilsin.

$$\begin{aligned}\tau_{\pi_{k-1,\xi}^1}(p) &= \sum_{i,j=2}^k K_{ij} + \sum_{i=2}^k K_i^{null} + K_{iN}, \\ &\vdots \\ \tau_{\pi_{k-1,\xi}^k}(p) &= \sum_{i,j=1}^{k-1} K_{ij} + \sum_{i=1}^{k-1} K_i^{null} + K_{iN}, \\ \tau_{\pi_k}(p) &= \sum_{i,j=1}^k K_{ij}\end{aligned}$$

olur. Yukarıdaki eşitliklerden

$$\sum_{i=1}^k K_i^{null} + K_{iN} = \frac{2c}{(k-1)}$$

elde edilir.

Şimdi $n = k + 1$ için iddianın doğruluğunu gösterelim:

$T_p M$ nin $(k + 1)$ -boyutlu alt düzlem kesitleri $\pi_{k,\xi} = Sp\{e_1, \dots, e_k, \xi\}$, $\pi_{k+1} = Sp\{e_1, \dots, e_k, e_{k+1}\}$ verilsin. Bu durumda

$$\begin{aligned}\tau_{\pi_{k,\xi}}(p) &= \sum_{i,j=1}^k K_{ij} + \sum_{i=1}^k K_i^{null} + K_{iN} \\ &= c + \frac{2c}{k-1} = \left(\frac{k+1}{k-1}\right)c\end{aligned}\tag{3.3.4}$$

dir. $j = 2$ özel durumu ile benzer bir yol kullanılacak olursa

$$\tau_{\pi_{k+1}}(p) = \left(\frac{k+1}{k-1}\right)c \quad (3.3.5)$$

elde edilir. (3.3.4) ve (3.3.5) den M nin $S(k+1)$ uzayı olduğu görülür. $\square$

Teorem 3.3.3. $M, \tilde{M}$ Lorentzian manifoldunun $(n+1)$ -boyutlu bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda M bir $S(n-1)$ uzayı ise

$$Ric(e_1) = \dots = Ric(e_n) = \text{sabit} \quad \text{ve} \quad K_1^{null} = \dots = K_n^{null} \quad (3.3.6)$$

dir.

İspat. M bir $S(n-1)$ uzayı ve $T_p M$ nin $(n-1)$ -boyutlu alt düzlem kesitleri $\pi_{n-2,\xi}^1 = Sp\{e_2, \dots, e_{n-1}, \xi\}$, $\pi_{n-2,\xi}^2 = Sp\{e_1, e_3, \dots, e_{n-1}, \xi\}, \dots, \pi_{n-2,\xi}^{n-1} = Sp\{e_1, e_2, \dots, e_{n-2}, \xi\}$, $\pi_{n-1} = Sp\{e_1, e_2, \dots, e_{n-1}\}$ verilsin. Bu durumda

$$\begin{aligned} \tau_{\pi_{n-2,\xi}^1}(p) &= \tau(p) - Ric(e_1) - Ric(e_n) - K_1^{null} - K_n^{null} = c, \\ \tau_{\pi_{n-2,\xi}^2}(p) &= \tau(p) - Ric(e_2) - Ric(e_n) - K_2^{null} - K_n^{null} = c, \\ &\vdots \\ \tau_{\pi_{n-2,\xi}^{n-1}}(p) &= \tau(p) - Ric(e_{n-1}) - Ric(e_n) - K_{n-1}^{null} - K_n^{null} = c, \\ \tau_{\pi_{n-1}}(p) &= \tau(p) - Ric(e_n) - \sum_{i=1}^n K_i^{null} + K_{iN} = c \end{aligned}$$

dir. Eğer yukarıdaki ifadeler taraf tarafa toplanırsa

$$Ric(e_1) + \dots + Ric(e_n) + (n-1)Ric(e_n) + \sum_{i=1}^n K_i^{null} + \sum_{i=1}^{n-1} K_i^{null} + K_{iN} = \text{sabit}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} Ric_{S(TM)}(e_1) + \dots + Ric_{S(TM)}(e_n) + (n-1)Ric(e_n) \\ + \sum_{i=1}^n K_i^{null} + K_{iN} + \sum_{i=1}^{n-1} K_i^{null} + K_{iN} = \text{sabit} \end{aligned}$$

yazılabilir. $\pi_{n-1,\xi} = Sp\{e_1, \dots, e_{n-1}, \xi\}$ ve $\pi_{n-1} = Sp\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$ olmak üzere, son eşitlikten

$$\tau_{S(TM)}(p) + (n-1)Ric(e_n) + \tau(p) - \tau_{S(TM)}(p) + \tau_{\pi_{n-1,\xi}}(p) - \tau_{\pi_{n-1}}(p) = \text{sabit}$$

olur. Teorem 3.3.1 ve Teorem 3.3.2 göz önüne alınacak olursa $Ric(e_n)$ nin sabit olduğu görülür. Ayrıca (3.3.1) eşitliği, Teorem 3.3.1 ve Teorem 3.3.2 den $K_1^{null} = \dots = K_n^{null}$ olur. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Tanım 3.3.2. M^0 Lorentzian manifoldun bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyor ise M^0 lightlike hiperyüzeyine $C[M^0]$ sınıfındadır denir [27].

(a) M^0 , kanonik bir $S(TM)^0$ ekran distribüstonuna ve bir N^0 kanonik lightlike transversal demetine sahiptir.

(b) M^0 ın indirgenmiş Ricci tensörü Ric^0 simetriktir.

Sonuç 3.3.2. M , Lorentzian bir manifoldun $C[M^0]$ sınıfından $(2n+1)$ -boyutlu bir lightlike hiperyüzeyi olsun. M bir Einstein lightlike hiperyüzeyi ise

$$\tau_{\pi_{n,\xi}}(p) - \tau_{\pi_{n,\xi}^\perp}(p) = \sum_{i=1}^n K_i^{null} - \sum_{i=n+1}^{2n} K_i^{null} \quad (3.3.7)$$

dir. Burada $\pi_{n,\xi}$, $T_p M$ nin dejenere bir kesiti ve $\pi_{n,\xi}^\perp$ ise $\pi_{n,\xi}$ nin $T_p M$ ye ortogonal komplementidir.

İspat. $\{e_1, \dots, e_n, \xi\}$ tarafından gerilen bir düzlem kesiti $\pi_{n,\xi}$ olmak üzere $T_p M$ nin bir bazı $\{e_1, \dots, e_{2n}, \xi\}$ ve $\Gamma(S(TM))$ nin bir ortonormal bir bazı $\{e_1, \dots, e_{2n}\}$ olsun. M bir Einstein lightlike hiperyüzeyi ise

$$Ric(e_1) + \dots + Ric(e_n) = Ric(e_{n+1}) + \dots + Ric(e_{2n})$$

dir. (3.1.38) kullanılarak

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{2n} K_{ij} + \sum_{i=1}^n K_{iN} = \sum_{i=n+1}^{2n} \sum_{j=1}^{2n} K_{ij} + \sum_{i=n+1}^{2n} K_{iN}$$

olup

$$\sum_{i,j=1}^n K_{ij} + \sum_{i=1}^n K_{iN} = \sum_{i,j=n+1}^n K_{ij} + \sum_{i=n+1}^n K_{iN}$$

elde edilir. Bu ise (3.3.7) eşitliğine denktir. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Teorem 3.3.4. $M, (\tilde{M}, \tilde{g})$ Lorentzian manifoldunun bir lightlike hiperyüzeyi ve M bir $S(n_1, n_1)$ uzayı olsun. Bu durumda

a) $n_1 = 2$ ise M bir $S(3)$ uzayıdır.

b) $n_1 \neq 2$ ise M bir $S(n_1 + 1)$ uzayı olmak zorunda değildir. Eğer

$$\sum_{i=1}^{n_1} K_i^{null} + K_{iN} = \text{sabit}$$

ise M bir $S(n_1 + 1)$ uzayıdır.

İspat. **a)** $n_1 = 2$ olsun. $T_p M$ nin 2-boyutlu alt düzlem kesitleri $\Pi_{1,\xi}^1 = Sp\{e_1, \xi\}$, $\Pi_{1,\xi}^2 = Sp\{e_2, \xi\}$, $\Pi_2 = Sp\{e_1, e_2\}$ verilsin. Bu durumda

$$\begin{aligned}\tau_{\Pi_{1,\xi}^1}(p) &= K_1^{null} + K_{1N}, \\ \tau_{\Pi_{1,\xi}^2}(p) &= K_2^{null} + K_{2N}, \\ \tau_{\Pi_2}(p) &= K_{12} + K_{21}\end{aligned}$$

dir. M bir $S(2, 2)$ uzayı ise

$$\begin{aligned}\tau_{\Pi_{1,\xi}^1}(p) + \tau_{\Pi_{1,\xi}^2}(p) &= \sum_{i=1}^2 K_i^{null} + K_{iN} = c, \\ \tau_{\Pi_{1,\xi}^1}(p) + \tau_{\Pi_2}(p) &= K_{12} + K_{21} + K_1^{null} + K_{1N} = c, \\ \tau_{\Pi_{1,\xi}^2}(p) + \tau_{\Pi_2}(p) &= K_{12} + K_{21} + K_2^{null} + K_{2N} = c\end{aligned}$$

elde edilir. $T_p M$ nin 3-boyutlu bir düzlem kesiti $\pi_{2,\xi} = Sp\{e_1, e_2, \xi\}$ olmak üzere yukarıdaki eşitliklerden

$$\tau_{\pi_{2,\xi}}(p) = \frac{3c}{2} \quad (3.3.8)$$

olur.

Şimdi $T_p M$ nin $\Pi_2^1 = Sp\{e_1, e_2\}$, $\Pi_2^2 = Sp\{e_1, e_3\}$, $\Pi_2^3 = Sp\{e_2, e_3\}$ 2-boyutlu alt düzlem kesitlerini göz önüne alalım. M bir $S(2, 2)$ uzayı olduğundan

$$K_{12} + K_{21} + K_{13} + K_{31} + K_{23} + K_{32} + K_{12} + K_{21} + K_{13} + K_{31} + K_{23} + K_{32} = 2\tau(\pi_3) = 3c$$

yazılabilir. Böylece

$$\tau(\pi_3) = \frac{3c}{2} \quad (3.3.9)$$

dir. Burada $\pi_3 = Sp\{e_1, e_2, e_3\}$ $T_p M$ nin 3-boyutlu bir alt düzlem kesitidir. (3.3.8) ve (3.3.9) eşitliklerinden M nin bir $S(3)$ uzayı olduğu görülür.

b) $n_1 = 3$ için iddianın doğruluğunu gösterelim:

$T_p M$ nin $\pi_{2,\xi}^1 = Sp\{e_2, e_3, \xi\}$, $\pi_{2,\xi}^2 = Sp\{e_1, e_3, \xi\}$, $\pi_{2,\xi}^3 = Sp\{e_1, e_2, \xi\}$ şeklinde 3-boyutlu alt düzlem kesitleri verilsin. M bir $S(3, 3)$ uzayı ise

$$\begin{aligned} 3c &= 2(\tau_{\pi_{2,\xi}^1}(p) + \tau_{\pi_{2,\xi}^2}(p) + \tau_{\pi_{2,\xi}^3}(p)) \\ &= 2\tau_{\pi_{3,\xi}}(p) + 2 \sum_{i=1}^3 K_i^{null} + K_{iN} \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

dir. Burada $\pi_{3,\xi} = Sp\{e_1, e_2, e_3, \xi\} \subset T_p M$ dir. (3.3.10) eşitliği göz önüne alınacak olursa (b) şıkkının $n_1 = 3$ için doğru olduğu görülür.

(b) şıkkının genel durumu için ispat $n_1 = 3$ özel durumunun ispatı ile benzer bir yol takip edilerek yapılabilir. $\square$

Teorem 3.3.5. M , bir Lorentzian manifoldun $(2n + 1)$ -boyutlu bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda

a) $\inf\{\tau(\pi_n) + \tau(\pi_{n+1})\} > 0$ ise $\tau(p) > 0$,

b) $\sup\{\tau(\pi_n) + \tau(\pi_{n+1})\} < 0$ ise $\tau(p) < 0$

dir.

İspat. $T_p M = Sp\{e_1, \dots, e_{2n}, \xi\}$ olsun. $\inf\{\tau(\pi_n) + \tau(\pi_{n+1})\} > 0$ ise direkt hesaplamalar ile

$$\begin{aligned} &C(2n - 2, n - 2) + C(2n - 2, n)\tau_{S(TM)}(p) \\ &+ C(2n - 1, n - 1) \sum_{i=1}^{2n} K_i^{null} + K_{iN} > 0, \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

ve

$$C(2n - 2, n - 3) + C(2n - 2, n - 1)\tau_{S(TM)}(p) + C(2n, n) \sum_{i=1}^{2n} K_i^{null} + K_{iN} > 0 \quad (3.3.12)$$

elde edilir. (3.3.11) ve (3.3.12) eşitlikleri taraf tarafa toplanacak olursa

$$C(2n, n)\tau_{S(TM)}(p) + C(2n, n) \sum_{i=1}^{2n} K_i^{null} + K_{iN} > 0 \quad (3.3.13)$$

elde edilir. Bu ise $\tau(p) > 0$ olduğunu gösterir.

Kabul edelimki $\sup\{\tau(\pi_n) + \tau(\pi_{n+1})\} > 0$ olsun. (a) şıkkının ispatına benzer bir yol takip edilirse

$$C(2n, n)\tau_{S(TM)}(p) + C(2n, n)\sum_{i=1}^{2n} K_i^{null} + K_{iN} < 0 \quad (3.3.14)$$

elde edilir. Böylece $\tau(p) < 0$ olur ve ispat tamamlanır. $\square$

3.4 Lorentzian bir manifoldun ekran homotetik lightlike hiperyüzeyleri üzerinde bazı eşitsizlikler

Bu kısımda, Lorentzian bir manifoldun ekran homotetik lightlike hiperyüzeyleri üzerinde ekran Ricci eğriliği ve ekran skalar eğriliğinin katıldığı çeşitli eşitsizlikler kurulmuştur. Bu eşitsizliklerin eşitlik durumları incelenmiştir.

Lemma 3.4.1. *M, c sabit eğrilikli bir $(\tilde{M}(c), \tilde{g})$ Lorentzian uzay formunun bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda*

$$2\varphi_w(\xi)B(X, PZ) = -cg(X, PZ) \quad (3.4.1)$$

dir [23]. Burada $X, Z \in TM$ ve w , (3.1.15) eşitliğinde verilmiştir.

Önerme 3.4.1. *M, c sabit eğrilikli $(\tilde{M}(c), \tilde{g})$ Lorentzian uzay formunun bir ekran homotetik lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda*

$$\tau_{S(TM)}(p) = n(n-1)c + \varphi n^2 \mu^2 - \varphi \sum_{i,j}^n (B_{ij})^2, \quad (3.4.2)$$

$$\sum_{i=1}^n K_i^{null} = 0 \quad \text{ve} \quad \sum_{i=1}^n K_i^N = nc \quad (3.4.3)$$

dir.

İspat. Gauss-Codazzi tipi denklemlerden (3.4.2) eşitliği kolayca elde edilebilir. Ayrıca benzer şekilde Gauss-Codazzi tipi denklemleri, (3.1.35) eşitliği ve Lemma 3.4.1

gözönüne alınarak

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n K_i^{null} &= \sum_{i=1}^n g(R(e_i, \xi)\xi, e_i) \\
&= \sum_{i=1}^n \tilde{g}(\tilde{R}(\xi, e_i)e_i, \xi) \\
&= \sum_{i=1}^n \{(\nabla_\xi B)(e_i, e_i) - (\nabla_{e_i} B)(\xi, e_i) + B(e_i, e_i)\omega(\xi)\} \\
&= \sum_{i=1}^n \{-B(e_i, e_i)\omega(\xi) + B(e_i, e_i)\omega(\xi)\}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n K_i^N &= \sum_{i=1}^n g(R(\xi, e_i)e_i, N) \\
&= \sum_{i=1}^n \tilde{g}(\tilde{R}(\xi, e_i)e_i, N) \\
&= \sum_{i=1}^n \varphi\{(\nabla_\xi B)(e_i, e_i) - (\nabla_{e_i} B)(\xi, e_i) - B(e_i, e_i)\omega(\xi)\} \\
&= -2\varphi n\mu \omega(\xi)
\end{aligned}$$

elde edilir ki bu eşitlikler, sırasıyla, (3.4.3) deki eşitlikleri verir. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Önerme 3.4.2. M , c sabit eğrilikli $\tilde{M}(c)$ Lorentzian uzay formunun $\varphi > 0$ olacak şekilde bir ekran homotetik lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda M nin $p \in M$ noktasındaki skalar eğriliği $\tau(p)$ olmak üzere

$$\tau(p) = n^2 c + \varphi n^2 \mu^2 - \varphi \sum_{i,j}^n (B_{ij})^2 \quad (3.4.4)$$

dir.

İspat. (3.1.42), (3.4.2) ve (3.4.3) eşitliklerinden (3.4.4) elde edilir. $\square$

Teorem 3.4.1. M , c sabit eğrilikli $\tilde{M}(c)$ Lorentzian uzay formunun $(n+1)$ -boyutlu bir ekran homotetik lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda

$$\frac{1}{\varphi}(\tau(p) - n^2 c) \leq n^2 \mu^2 \quad (3.4.5)$$

dir. (3.4.5) eşitsizliğinin eşitlik durumunun her $p \in M$ noktasında sağlanması için gerek ve yeter şart M nin total geodezik olmasıdır.

Teorem 3.4.2. M , c sabit eğrilikli $(\tilde{M}(c), \tilde{g})$ Lorentzian uzay formunun $\varphi > 0$ olacak şekilde bir ekran homotetik lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda

$$\tau(p) \leq n^2 c + \varphi \{n(n-1)\mu^2\} \quad (3.4.6)$$

dir. (3.4.5) eşitsizliğinin eşitlik durumunun her $p \in M$ noktasında sağlanması için gerek ve yeter şart M nin total umbilik olmasıdır.

İspat. Lemma 3.2.1 den

$$\varphi \sum_{i=1}^n (B_{ij})^2 \geq \varphi \mu^2 \quad (3.4.7)$$

yazılabilir. (3.4.7) eşitliği (3.4.4) de yerine yazılacak olursa (3.4.5) elde edilir.

(3.4.5) eşitsizliğinin eşitlik durumunun her $p \in M$ noktasında sağlanması için gerek ve yeter şart

$$B_{11} = \dots = B_{nn}$$

ve her $i \neq j \in \{1, \dots, n\}$ için $B_{ij} = 0$ olmasıdır. Bu ise M nin total umbilik olduğunu gösterir ve ispat tamamlanır. $\square$

Lemma 3.4.2. $a_1, \dots, a_n$, n tane reel sayı olmak üzere $A = \sum_{i < j} (a_i - a_j)^2$ olsun. Bu durumda

(a) $A \geq \frac{n}{2}(a_1 - a_2)^2$ dir. Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart $\frac{1}{2}(a_1 + a_2) = a_3 = \dots = a_n$ dir.

(b) $k, \ell, 1 \leq k < \ell \leq n$ ve $(k, \ell) \neq (1, 2)$ şartlarını sağlayan birer tamsayı olmak üzere $A = \frac{n}{2}(a_1 - a_2)^2 = \frac{n}{2}(a_k - a_\ell)^2$ ise $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ dir [30].

İspat. Lemmanın ispatı için aşağıda verilen üç eşitsizlik kullanılacaktır:

$$2ab \leq a^2 + b^2, \text{ ve } 2ab = a^2 + b^2 \Leftrightarrow a = b, \quad (3.4.8)$$

$$(a+b)^2 \geq 4ab \text{ ve } (a+b)^2 = 4ab \Leftrightarrow a = b, \quad (3.4.9)$$

$$(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2) \text{ ve } (a+b)^2 = 2(a^2+b^2) \Leftrightarrow a=b \quad (3.4.10)$$

dir.

(3.4.10) eşitsizliğinde a yerine $A-B$ ve b yerine $B-C$ yazılacak olursa

$$(A-C)^2 \leq 2[(A-B)^2 + (B-C)^2] \quad (3.4.11)$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter şart

$B = \frac{1}{2}(A+C)$ olmasıdır.

Şimdi Lemmanın ispatını verelim:

$n = 2$ için iddianın doğruluğu açıktır. Kabul edelimki $n \geq 2$ olsun. (3.4.11)

eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \sum_{i < j=1}^{n+1} &= \sum_{i < j=1}^n (a_i - a_j)^2 + \sum_{i=1}^n (a_i - a_{n+1})^2 \\ &\geq \frac{n}{2}(a_1 - a_2)^2 + (a_1 - a_{n+1})^2 + (a_2 - a_{n+1})^2 \\ &\geq \frac{n}{2}(a_1 - a_2)^2 + \frac{1}{2}(a_1 - a_2)^2 = \frac{(n+1)}{2}(a_1 - a_2)^2 \end{aligned} \quad (3.4.12)$$

olup $A \geq \frac{n}{2}(a_1 - a_2)^2$ eşitsizliği elde edilir. Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart $a_3 = a_4 = \dots = a_n = a_{n+1}$ ve $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_1 + a_2)$ olmasıdır. Böylece lemmanın (a) şıkkı ispatlanmış olur.

(b) nin ispatı da benzer şekilde yapılabilir. □

M bir ekran homotetik lightlike hiperyüzey olsun. M nin kesit eğriliği simetrik olduğundan ekran skalar eğriliği

$$r_{S(TM)}(p) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} K_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n K_{ij} = \frac{1}{2} \tau_{S(TM)}(p) \quad (3.4.13)$$

olarak alınabilir. Böylece (3.4.13) dan (3.2.7) eşitliği

$$2r_{S(TM)}(p) = 2\tilde{r}_{S(TM)}(p) + \phi n^2 \mu^2 - \phi \sum_{i,j}^n (B_{ij})^2 \quad (3.4.14)$$

şeklinde yazılabilir.

Böylece Lemma 3.4.2 kullanılarak aşağıdaki teorem elde edilir:

Teorem 3.4.3. $M, (\tilde{M}, \tilde{g})$ Lorentzian manifoldunun $\varphi > 0$ olacak şekilde $(n+1)$ -boyutlu bir ekran homotetik lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda

$$2r_{S(TM)}(p) \leq 2\tilde{r}_{S(TM)}(p) + \left(\frac{n^3}{n+1}\right)\varphi\mu^2 - \frac{\varphi n}{2(n+1)}(B_{11} - B_{22})^2 \quad (3.4.15)$$

eşitsizliği sağlanır. (3.4.15) eşitsizliğinin eşitlik durumunun her $p \in M$ noktasında sağlanması için gerek ve yeter şart $\mu = \frac{n}{2}(B_{11} + B_{22})$ olmasıdır.

İspat. Binom teoreminden

$$\begin{aligned} & (B_{11} - B_{22})^2 + \dots + (B_{11} - B_{nn})^2 + (B_{22} - B_{33})^2 + \dots + (B_{22} - B_{nn})^2 \\ & + \dots + (B_{n-1n-1} - B_{nn})^2 = n \sum_{i=1}^n (B_{ii})^2 - 2 \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} B_{ii}B_{jj} \end{aligned}$$

yazılabilir. Lemma 3.4.2 göz önüne alınacak olursa

$$\sum_{i=1}^n (B_{ii})^2 \geq \frac{1}{n} \sum_{i \neq j} B_{ii}B_{jj} + \frac{1}{2}(B_{11} - B_{22})^2 \quad (3.4.16)$$

olduğu görülür. Ayrıca

$$\frac{1}{n} \sum_{i \neq j} B_{ii}B_{jj} = n\mu^2 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (B_{ii})^2 \quad (3.4.17)$$

eşitliği (3.4.16) da yerine yazılırsa

$$\sum_{i=1}^n (B_{ii})^2 \geq \frac{n^2}{n+1}\mu^2 + \frac{n}{2(n+1)}(B_{11} - B_{22})^2. \quad (3.4.18)$$

olur. Son olarak, (3.4.18) eşitsizliği (3.4.14) de yerine yazılırsa (3.4.15) eşitsizliği elde edilir.

(3.4.15) eşitsizliğinin eşitlik durumunun her $p \in M$ noktasında sağlanması için gerek ve yeter şart Lemma 3.4.2 nin (a) şartından $\mu = \frac{n}{2}(B_{11} + B_{22})$ olmasıdır. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Önerme 3.4.3. $M, \tilde{M}$ Lorentzian manifoldunun $(n+1)$ -boyutlu bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda M nin ikinci temel formu B nin katsayıları B_{ij} , $(i, j = 1, \dots, n)$, olmak üzere

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n (B_{ij})^2 &= \frac{1}{2}n^2\mu^2 + \frac{1}{2}(B_{11} - B_{22} - \dots - B_{nn})^2 \\ &+ 2 \sum_{j=2}^n (B_{1j})^2 - 2 \sum_{2 \leq i < j \leq n} B_{ii}B_{jj} - (B_{ij})^2 \end{aligned} \quad (3.4.19)$$

dir.

İspat.

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n (B_{ij})^2 &= \frac{1}{2}(B_{11} + B_{22} + \dots + B_{nn})^2 + \frac{1}{2}(B_{11} - B_{22} - \dots - B_{nn})^2 \\ &\quad + 2 \sum_{i < j} (B_{ij})^2 - 2 \sum_{2 \leq i < j \leq n} B_{ii} B_{jj} \end{aligned} \quad (3.4.20)$$

olup bu ise (3.4.19) eşitliğinin sağladığını gösterir. $\square$

Şimdi ekran homotetik lightlike hiperyüzeyleri için Chen-Ricci eşitsizliğini ispat edeceğiz:

Teorem 3.4.4. $M, (\tilde{M}, \tilde{g})$ Lorentzian manifoldunun $\varphi > 0$ olacak şekilde $(n+1)$ -boyutlu bir ekran homotetik lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda

(a) $X \in S^1(TM) = \{X \in S(TM) : g(X, X) = 1\}$ için

$$\frac{n^2}{4}\mu^2 \geq \frac{1}{\varphi}(\text{Ric}_{S(TM)}(X) - \widetilde{\text{Ric}}_{S(TM)}(X)) \quad (3.4.21)$$

dir.

(b) (3.4.21) eşitsizliğinin eşitlik durumunun bir $X \in S^1(TM)$ için sağlanması için gerek ve yeter şart X e ortogonal olan her $Y \in T_p M$ için

$$B(X, Y) = 0 \quad \text{ve} \quad B(X, X) = \frac{n}{2}\mu \quad (3.4.22)$$

olmasıdır.

(c) (3.4.21) eşitsizliğinin eşitlik durumunun her $X \in S^1(TM)$ için sağlanması için gerek ve yeter şart ya p nin bir total geodezik nokta ya da $n = 2$ ve p nin total umbilik bir nokta olmasıdır.

İspat. (3.4.14) ve (3.4.19) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} \frac{\varphi}{4}n^2\mu^2 &= r(p) - \widetilde{r}_{S(TM)}(p) + \frac{\varphi}{4}(B_{11} - \dots - B_{nn})^2 \\ &\quad + \varphi \sum_{j=2}^n (B_{1j})^2 - \varphi \sum_{2 \leq i < j \leq n} B_{ii} B_{jj} - (B_{ij})^2 \end{aligned} \quad (3.4.23)$$

yazılabilir. Ayrıca (3.4.14) den

$$\varphi \sum_{2 \leq i < j \leq n} B_{ii} B_{jj} - (B_{ij})^2 = \sum_{2 \leq i < j \leq n} (K_{ij} - \tilde{K}_{ij}) \quad (3.4.24)$$

dir.

$$\begin{aligned} \sum_{2 \leq i < j \leq n} K_{ij} &= r_{S(TM)}(p) - Ric_{S(TM)}(e_1), \\ \sum_{2 \leq i < j \leq n} \tilde{K}_{ij} &= \tilde{r}_{S(TM)}(p) - \tilde{Ric}_{S(TM)}(e_1) \end{aligned} \quad (3.4.25)$$

olduğundan ve (3.4.23) eşitliği kullanılarak

$$\frac{\varphi}{4} n^2 \mu^2 \geq Ric_{S(TM)}(e_1) - \tilde{Ric}_{S(TM)}(e_1) \quad (3.4.26)$$

elde edilir. (3.4.26) da e_1 yerine X yazılacak olursa (3.4.21) eşitsizliği elde edilir. Böylece teoremin (a) şıkkı ispatlanır.

(3.4.21) eşitsizliğinin eşitlik durumunun bir $X \in T_p^1 M$ için sağlanması için gerek yeter şart

$$B_{12} = \dots = B_{1n} = 0 \text{ ve } B_{11} = B_{22} + \dots + B_{nn}$$

olmasıdır. Buradan

$$n\mu = B_{11} + \dots + B_{nn} = 2B_{11}$$

olur. Bu ise (3.4.22) eşitliğine denktir. Böylece teoremin (b) şıkkı ispatlanmış olur.

(3.4.21) eşitsizliğinin eşitlik durumunun her $X \in S^1(TM)$ için sağlanması için gerek ve yeter şart

$$B_{ij} = 0, \quad i \neq j, \quad (3.4.27)$$

$$2B_{ii} = B_{11} + \dots + B_{nn}, \quad i \in \{1, \dots, n\} \quad (3.4.28)$$

olmasıdır. (3.4.28) eşitliğinden $2B_{11} = 2B_{22} = \dots = 2B_{nn} = \sum_{i=1}^n B_{ii}$ elde edilir. Bu ise

$$(n-2) \sum_{i=1}^n B_{ii} = 0$$

olduğunu gösterir. O halde ya $\sum_{i=1}^n B_{ii} = 0$ veya $n = 2$ dır. Eğer $\sum_{i=1}^n B_{ii} = 0$ ise (3.4.28) den her $i \in \{1, \dots, n\}$ için $B_{ii} = 0$ olur. (3.4.27) göz önüne alınacak olursa her $i, j \in \{1, \dots, n\}$ için $B_{ij} = 0$ olduğu görülür. Bu ise p nin bir total geodezik nokta olduğunu gösterir. Eğer $n = 2$ ise (3.4.28) den $2B_{11} = 2B_{22} = B_{11} + B_{22}$ olup bu ise p nin bir total umbilik nokta olduğunu gösterir. $\square$

Sonuç 3.4.1. M, c eğrilikli bir $(\tilde{M}(c), \tilde{g})$ Lorentzian uzay formunun $\varphi > 0$ olacak şekilde $(n+1)$ -boyutlu bir ekran homotetik lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda

(a) $X \in S^1(TM) = \{X \in S(TM) : g(X, X) = 1\}$ için

$$\frac{n^2}{4}\mu^2 \geq \frac{1}{\varphi}(\text{Ric}_{S(TM)}(X) - (n-1)c) \quad (3.4.29)$$

dir.

(b) (3.4.21) eşitsizliğinin eşitlik durumunun bir $X \in T_p^1 M$ için sağlanması için gerek ve yeter şart X e ortogonal olan her $Y \in T_p M$ için

$$B(X, Y) = 0 \quad \text{ve} \quad B(X, X) = \frac{n}{2}\mu \quad (3.4.30)$$

olmasıdır.

(c) (3.4.21) eşitsizliğinin eşitlik durumunun her $X \in T_p^1 M$ için sağlanması için gerek ve yeter şart ya p nin bir total geodezik nokta ya da $n = 2$ ve p nin bir total umbilik nokta olmasıdır.

Lemma 3.4.3. $n > k \geq 2$ ve $a_1, \dots, a_n, a$ reel sayılar olmak üzere

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2 = (n-1) \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 + a\right) \quad (3.4.31)$$

ise

$$2a_1 a_2 \geq a$$

dır. Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart

$$a_1 + a_2 = a_3 = \dots = a_n$$

olmasıdır [7].

İspat. Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^n a_i b_i \right| &\leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 &\leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right) \end{aligned}$$

yazılabilir. $b = (b_1, \dots, b_n) = (1, \dots, 1)$ alınırsa

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2 &\leq n \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \\ ((a_1 + \dots + a_k) + a_{k+1} + \dots + a_n)^2 &\leq n (a_1^2 + \dots + a_k^2 + a_{k+1}^2 + \dots + a_n^2) \end{aligned}$$

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2 \leq (n-k+1) ((a_1 + a_2 + \dots + a_k)^2 + a_{k+1}^2 + \dots + a_n^2) \quad (3.4.32)$$

olur. (3.4.31) ve (3.4.32) den

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 + a \leq (a_1 + a_2 + \dots + a_k)^2 + a_{k+1}^2 + \dots + a_n^2$$

elde edilir. Böylece

$$2 \sum_{1 \leq i < j \leq k} a_i a_j \geq a$$

olur. Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart $a_1 + a_2 + \dots + a_k = a_{k+1} = \dots = a_n$ olmasıdır. Bu ise ispatı tamamlar. $\square$

Teorem 3.4.5. $M, \tilde{M}$ Lorentzian manifoldunun $\varphi > 0$ olacak şekilde $(n+1)$ -boyutlu bir ekran homotetik lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \tau_{S(TM)}(p) - \tau(\Pi) &\leq \tilde{\tau}_{S(TM)}(p) - \tilde{\tau}(\Pi) \\ &\quad + \varphi \frac{n^2(n-2)}{(n-1)} \mu^2 + \varphi \sum_{i=3}^n (B_{ii})^2 \end{aligned} \quad (3.4.33)$$

eşitsizliği sağlanır. (3.4.33) eşitsizliğinin eşitlik durumunun her $p \in M$ noktasında sağlanması için gerek ve yeter şart M nin minimal ve M nin lokal şekil operatörünün

$$A_{\xi}^* = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & 0 \\ B_{21} & -B_{11} & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (3.4.34)$$

şeklinde olmasıdır.

İspat. (3.4.2) eşitliğinde

$$\delta = \tau_{S(TM)}(p) - \varphi \frac{n^2(n-2)}{(n-1)} \mu^2 - \tilde{\tau}_{S(TM)}(p)$$

yazılacak olursa

$$\delta = \varphi \frac{n^2}{n-1} \mu^2 - \varphi \sum_{i,j=1}^n (B_{ij})^2$$

elde edilir. Buradan

$$\left(\sum_{i=1}^n B_{ii} \right)^2 = (n-1) \left[\frac{\delta}{\varphi} + \sum_{i=1}^n (B_{ii})^2 + \sum_{i \neq j=1}^n (B_{ij})^2 \right].$$

yazılabilir. Lemma 3.4.3 den

$$2B_{11}B_{22} \geq \frac{\delta}{\varphi} + \sum_{i \neq j=1}^n (B_{ij})^2$$

olur. e_1 ve e_2 tarafından gerilen bir düzlem kesiti Π olmak üzere

$$\begin{aligned} \tau(\Pi) &= \tilde{\tau}(\Pi) + \varphi \sum_{i,j}^2 B_{ii}B_{jj} - (B_{ij})^2 \\ &\geq \tilde{\tau}(\Pi) + \delta + \varphi \sum_{i \neq j=1}^n (B_{ij})^2 - \varphi \sum_{i \neq j=1}^2 (B_{ij})^2 \\ &\geq \tilde{\tau}(\Pi) + \delta + \varphi \sum_{i,j=1}^n (B_{ij})^2 - \varphi \sum_{i=1}^n (B_{ii})^2 - \varphi \sum_{i \neq j=1}^2 (B_{ij})^2 \\ &\geq \tilde{\tau}(\Pi) + \delta - \varphi \sum_{i=3}^n (B_{ii})^2 \end{aligned}$$

dır. Böylece (3.4.33) ve (3.4.34) elde edilir. □

Sonuç 3.4.2. M, c sabit eğrilikli $(\tilde{M}(c), \tilde{g})$ Lorentzian uzay formunun $\varphi > 0$ olacak şekilde $(n+1)$ -boyutlu bir ekran homotetik lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda

$$\tau_{S(TM)}(p) - \tau(\Pi) \leq (n+1)(n-2)c + \varphi \frac{n^2(n-2)}{n-1} \mu^2 + \varphi \sum_{i=3}^n (B_{ii})^2 \quad (3.4.35)$$

eşitsizliği sağlanır. (3.4.35) eşitsizliğinin eşitlik durumunun her $p \in M$ noktasında sağlanması için gerek ve yeter şart M nin minimal ve lokal şekil operatörünün (3.4.34) şeklinde olmasıdır.

Teorem 3.4.6. $M, (\tilde{M}, \tilde{g})$ Lorentzian manifoldunun $\varphi > 0$ olacak şekilde $(n+1)$ -boyutlu bir ekran homotetik bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda

$$\tau_{S(TM)}(p) \leq \tilde{\tau}_{S(TM)}(p) + \varphi n(n-1) \mu^2 \quad (3.4.36)$$

eşitsizliği sağlanır. (3.4.36) eşitsizliğin eşitlik durumunun her $p \in M$ noktasında sağlanması için gerek ve yeter şart M nin total umbilik olmasıdır.

İspat. (3.4.2) eşitliğinde

$$\varphi \sum_{i,j=1}^n (B_{ij})^2 = \varphi \sum_{i=1}^n (B_{ii})^2 + \varphi \sum_{i \neq j} (B_{ij})^2$$

yazılacak olursa

$$\tau_{S(TM)}(p) = \tilde{\tau}_{S(TM)}(p) + \varphi n^2 \mu^2 - \varphi \sum_{i=1}^n (B_{ii})^2 - \varphi \sum_{i \neq j} (B_{ij})^2 \quad (3.4.37)$$

elde edilir. Ayrıca Lemma 3.2.1 den

$$n\mu^2 \leq \sum_{i=1}^n (B_{ii})^2 \quad (3.4.38)$$

olur. (3.4.37) ve (3.4.38) kullanılarak (3.4.36) eşitsizliğine ulaşılır.

(3.4.36) eşitsizliğin eşitlik durumunun her $p \in M$ noktasında sağlanması için gerek ve yeter şart

$$B_{11} = \dots = B_{nn}$$

ve M nin lokal şekil operatorü A_ξ^* ın

$$A_\xi^* = \begin{pmatrix} B_{11} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & B_{11} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & 0 & \dots & B_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.4.39)$$

olmasıdır. Bu ise M nin total umbilik olduğunu gösterir ve böylece ispat tamamlanır. $\square$

Sonuç 3.4.3. M, c sabit eğrilikli $(\tilde{M}(c), \tilde{g})$ Lorentzian uzay formunun $\varphi > 0$ olacak şekilde $(n+1)$ boyutlu bir ekran homotetik lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda

$$\tau_{S(TM)}(p) \leq n(n-1)(c + \varphi\mu^2) \quad (3.4.40)$$

eşitsizliği sağlanır. (3.4.40) eşitsizliğin eşitlik durumunun her $p \in M$ noktasında sağlanması için gerek ve yeter şart M nin total umbilik olmasıdır.

Lemma 3.4.4. $a_1, \dots, a_n$, n -tane reel sayı ve $k, 2 \leq k \leq n-1$ olacak şekilde bir tamsayı olsun. Bu durumda n nin her $(n_1, \dots, n_k)$ bölüntüsü için

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i_1 < j_1 \leq n_1} a_{i_1} a_{j_1} &+ \sum_{n_1+1 \leq i_2 < j_2 \leq n_1+n_2} a_{i_2} a_{j_2} + \dots + \sum_{n_1+\dots+n_{k-1}+1 \leq i_k < j_k \leq n} a_{i_k} a_{j_k} \\ &\geq \frac{1}{2k} \{ (a_1 + \dots + a_n)^2 - k(a_1^2 + \dots + a_n^2) \} \end{aligned} \quad (3.4.41)$$

dir. Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart

$$a_1 + \dots + a_{n_1} = a_{n_1+1} + \dots + a_{n_1+n_2} = \dots = a_{n_1+\dots+n_{k-1}+1} + \dots + a_n \quad (3.4.42)$$

olmasıdır [31].

İspat. $a_1, \dots, a_n$, n -tane reel sayı, $2 \leq k \leq n-1$ için $(n_1, \dots, n_k)$, n nin bir bölüntüsü olsun.

Bu durumda

$$\begin{aligned}
& 2k \left\{ \sum_{1 \leq i_1 < j_1 \leq n_1} a_{i_1} a_{j_1} + \sum_{n_1+1 \leq i_2 < j_2 \leq n_1+n_2} a_{i_2} a_{j_2} + \cdots + \sum_{n_1+\cdots+n_{k-1}+1 \leq i_k < j_k \leq n} a_{i_k} a_{j_k} \right\} \\
& - \left(\sum_{\alpha=1}^n a_{\alpha} \right)^2 + k \sum_{\alpha=1}^n a_{\alpha}^2 \\
& = 2k \left\{ \sum_{1 \leq i_1 < j_1 \leq n_1} a_{i_1} a_{j_1} + \sum_{n_1+1 \leq i_2 < j_2 \leq n_1+n_2} a_{i_2} a_{j_2} + \cdots + \sum_{n_1+\cdots+n_{k-1}+1 \leq i_k < j_k \leq n} a_{i_k} a_{j_k} \right\} \\
& + (k-1) \sum_{\alpha=1}^n a_{\alpha}^2 - 2 \sum_{1 \leq \alpha < \beta \leq n} a_{\alpha} a_{\beta} \\
& = \left\{ \sum_{1 \leq i_1 \leq n_1} a_{i_1} - \sum_{n_1+1 \leq i_2 \leq n_1+n_2} a_{i_2} \right\}^2 + \left\{ \sum_{1 \leq i_1 \leq n_1} a_{i_1} - \sum_{n_1+n_2+1 \leq i_3 \leq n_1+n_2+n_3} a_{i_3} \right\}^2 \\
& + \cdots + \left\{ \sum_{n_1+\cdots+n_{k-2}+1 \leq i_{k-1} \leq n_1+\cdots+n_{k-1}} a_{i_{k-1}} - \sum_{n_1+\cdots+n_{k-1}+1 \leq i_k \leq n_1+\cdots+n_k} a_{i_k} \right\}^2 \\
& \geq 0
\end{aligned} \tag{3.4.43}$$

olur. Buradan (3.4.41) eşitsizliğinin sağlandu görülür. (3.4.41) eşitsizliğin eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter şartın (3.4.42) eşitliği olduğu açıktır. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Teorem 3.4.7. M , c sabit eğrilikli $\tilde{M}(c)$ Lorentzian uzay formunun $\varphi > 0$ olacak şekilde $(n+1)$ boyutlu ekran homotetik bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda her bir $p \in M$ ve $(n_1, \dots, n_k) \in S(n)$ için

$$\delta(n_1, \dots, n_k) \leq C(n_1, \dots, n_k) \mu^2 + D(n_1, \dots, n_k) c + (2\varphi - 1) n \mu. \tag{3.4.44}$$

dür. Burada $(n_1, \dots, n_k) \in S(n)$ için $C(n_1, \dots, n_k)$ ve $D(n_1, \dots, n_k)$,

$$C(n_1, \dots, n_k) = \varphi \frac{n^2(n+k-1 - \sum_{j=1}^k n_j)}{n+k - \sum_{j=1}^k n_j}, \tag{3.4.45}$$

$$D(n_1, \dots, n_k) = n(n-1) - \sum_{j=1}^k n_j(n_j-1) \tag{3.4.46}$$

olacak şekilde pozitif reel sayılardır.

(3.4.44) eşitsizliğinin eşitlik durumunun her $p \in M$ noktasında sağlanması için gerek ve yeter şart M nin lokal şekil operatörünün

$$A_{\xi}^* = \begin{pmatrix} A_1^* & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & \cdots & A_k^* \\ & 0 & \mu_r I \end{pmatrix} \quad (3.4.47)$$

olmasıdır. Burada I_{n_j} ve A_j^*

$$iz(A_1^*) = \dots = iz(A_k^*) = \mu_r \quad (3.4.48)$$

olacak şekilde $n_j \times n_j$ tipinde bir birim matris ve $n_j \times n_j$ tipinde bir simetrik alt matristir öyleki dir.

İspat. (3.4.4) eşitliğinde

$$\eta = \tau(p) - n^2 c - \phi n^2 \mu^2 \frac{(n+k-1 - \sum_{j=1}^k n_j)}{n+k - \sum_{j=1}^k n_j} \quad (3.4.49)$$

yazılacak olursa

$$\phi n^2 \mu^2 = \gamma [\eta + \phi \sum_{i,j=1}^n (B_{ij})^2] \quad (3.4.50)$$

elde edilir. Burada $\gamma = n+k - \sum n_j$ dir. (3.4.50) eşitliği yerine

$$(\sum_{i=1}^n B_{ii})^2 = \gamma [\frac{\eta}{\phi} + \sum_{i \neq j} (B_{ij})^2 + \sum_{i=1}^n (B_{ii})^2]. \quad (3.4.51)$$

eşitliği yazılabilir. Bu eşitlik ise

$$\begin{aligned} (\sum_{i=1}^{\gamma+1} \bar{a}_i)^2 &= \gamma [\frac{\eta}{\phi} + \sum_{i=1}^{\gamma+1} (\bar{a}_i)^2 + \sum_{i \neq j} (B_{ij})^2 \\ &\quad - \sum_{1 \leq \alpha_1 \neq \beta_1 \leq n_1} a_{\alpha_1} a_{\beta_1} - \dots - \sum_{\alpha_k \neq \beta_k} a_{\alpha_k} a_{\beta_k}]. \end{aligned} \quad (3.4.52)$$

eşitliğine denktir. Burada

$$\begin{aligned}
\bar{a}_1 &= a_1, \bar{a}_2 = a_2 + \dots + a_{n_1}, \\
\bar{a}_3 &= a_{n_1+1} + \dots + a_{n_1+n_2}, \\
&\dots \\
\bar{a}_{k+1} &= a_{n_1+\dots+n_{k-1}+1} + \dots + a_{n_1+\dots+n_k}, \\
&\dots \\
\bar{a}_{\gamma+1} &= a_n
\end{aligned}$$

ve $\alpha_i, \beta_i \in \triangle_i, i = \{1, \dots, k\}, \triangle_1 = \{1, \dots, n_1\}, \dots, \triangle_k = \{n_1 + \dots + n_{k-1} + 1, \dots, n_1 + \dots + n_k\}$ dir. $\varphi > 0$ olduğundan (3.4.52) eşitliğinde Lemma 3.2.1 kullanılacak olursa

$$\left\{ \sum_{\alpha_1 \neq \beta_1} a_{\alpha_1} a_{\beta_1} + \dots + \sum_{\alpha_k \neq \beta_k} a_{\alpha_k} a_{\beta_k} \right\} \geq \frac{\eta}{2\varphi} + \sum_{A < B} (B_{AB})^2 \quad (3.4.53)$$

elde edilir. Ayrıca (3.4.4) den $\text{boy } \pi_j = n_j$ olmak üzere

$$\tau(\pi_j) = \tilde{\tau}_{S(TM)}(\pi_j) + 2\varphi \sum_{\alpha_j < \beta_j} B_{\alpha_j \alpha_j} B_{\beta_j \beta_j} - (B_{\alpha_j \beta_j})^2 \quad (3.4.54)$$

olur. (3.4.53) ve (3.4.54) kullanılarak

$$\begin{aligned}
\tau(\pi_1) + \dots + \tau(\pi_k) &\geq \eta + \sum_{j=1}^k \tilde{\tau}_{S(TM)}(\pi_j) + 2\varphi \sum_{A < B} (B_{AB})^2 \\
&\geq \eta + \sum_{j=1}^k n_j^2 c \quad (3.4.55)
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.4.49) ve (3.4.55) dan (3.4.44) eşitsizliği elde edilir.

Lemma 3.2.1 veya Lemma 3.4.4 göz önüne alınacak olursa (3.4.44) eşitsizliğinin eşitlik durumunun her $p \in M$ noktasında sağlanması için gerek yeter şartın M nin şekil operatörünün (3.4.47) deki gibi verilmesi olduğu sonucuna varılır ve ispat tamamlanır. $\square$

4. HALF-LIGHTLIKE ALTMANİFOLDLAR ÜZERİNDE CHEN TİPİ EŞİTSİZLİKLER

Bu bölüm üç alt bölümden oluşmaktadır. Birinci alt bölüm, diğer alt bölümlerin daha iyi anlaşılabilmesi için ve bir bütünlük arz etmesi açısından half-lightlike altmanifoldlar ile ilgili temel kavramlara ayrılmıştır. Bu bölümde birinci alt bölüm hariç diğer alt bölümler bu bölümün orjinal kısımlarıdır.

4.1 Half-lightlike altmanifoldlar

Bu kısımda half-lightlike altmanifoldlarla ilgili temel tanım ve kavramlara yer verilecektir.

Tanım 4.1.1. $(\tilde{M}, \tilde{g})$, $(n+3)$ boyutlu bir semi Riemann manifold ve $\tilde{M}$ nin $(n+1)$ -boyutlu bir altmanifoldu M olsun. Eğer M nin radikal uzayı $Rad TM$ nin rankı 1 e eşit ise M altmanifolduna $\tilde{M}$ nin bir *half-lightlike altmanifoldu* denir [32].

Tanım 4.1.2. $M, (\tilde{M}, \tilde{g})$ semi-Riemann manifoldunun $(n+1)$ -boyutlu bir half-lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda $\oplus_{orth}$ ortogonal direkt toplam olmak üzere $Rad TM$ nin

$$TM = Rad TM \oplus_{orth} S(TM) \quad (4.1.1)$$

olacak şekilde TM ye tamamlayıcı olan $S(TM)$ uzayına M nin *ekran distribusyonu* denir [32].

Tanım 4.1.3. $M, (\tilde{M}, \tilde{g})$ semi-Riemannian manifoldunun $(n+1)$ -boyutlu bir half-lightlike altmanifoldu olsun. $T\tilde{M}$ da $S(TM)$ ye ortogonal tamamlayan olan $S(TM)^\perp$ uzayını göz önüne alalım. Bu durumda $\xi, u \in \Gamma(S(TM)^\perp)$ için

$$\tilde{g}(\xi, u) = 0 \text{ ve } \tilde{g}(u, u) \neq 0 \quad (4.1.2)$$

dır. $S(TM)^\perp$ uzayına M nin *ek-ekran distribüsyonu* denir [32]. $Rad TM$, $T_p M^\perp$ in 1 boyutlu bir alt demeti olduğundan $Rad TM$ ye tamamlayan ve u tarafından gerilen bir

$\mathcal{D}$ distribüsyonu vardır. Bu $\mathcal{D}$ distribüsyonunun M nin *ekran transversal demeti* denir. Böylece

$$S(TM)^\perp = \mathcal{D} \oplus \mathcal{D}^\perp \quad (4.1.3)$$

olacak şekilde $S(TM)^\perp$ de $\mathcal{D}$ nin $\mathcal{D}^\perp$ tamamlayanı vardır.

Tanım 4.1.4. M half-lightlike altmanifoldunun bir U koordinat komşuluğu verilsin. $Rad M$ nin U üzerindeki bir ξ null kesiti için

$$\tilde{g}(N, u) = \tilde{g}(N, N) = 0, \quad \tilde{g}(N, \xi) = 1 \quad (4.1.4)$$

olacak şekilde $S(TM)^\perp$ de $\mathcal{D}^\perp$ distribüsyonunun tek bir N null kesiti vardır. Böylece M nin transversal uzayı $tr(TM)$

$$tr(TM) = \mathcal{D} \oplus_{orth} ltr(TM) \quad (4.1.5)$$

olarak yazılabilir. Burada $ltr(TM)$, 1-boyutlu bir vektör demeti olup $S(TM)$ ekran distribüsyonuna göre M nin *lightlike transversal demeti* olarak adlandırılır [32].

Böylece

$$T\tilde{M} = S(TM) \oplus_{orth} \mathcal{D} \oplus_{orth} (Rad TM \oplus ltr(TM)) \quad (4.1.6)$$

dir.

Tanım 4.1.5. $M, (\tilde{M}, \tilde{g})$ semi-Riemannian manifoldunun $(n+1)$ -boyutlu bir half-lightlike altmanifoldu olsun. $\tilde{\nabla}$ ve ∇ , sırasıyla $\tilde{M}$ ve M üzerindeki Levi-Civita konneksiyon ve lineer konneksiyon olsun. $\Gamma(TM)$ den $\Gamma(S(TM))$ ye tanımlı bir P projeksiyonu verilsin. Bu durumda her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için Gauss ve Weingarten formulleri

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + B(X, Y)N + D(X, Y)u, \quad (4.1.7)$$

$$\tilde{\nabla}_X N = -A_N X + \rho_1(X)N + \rho_2(X)u, \quad (4.1.8)$$

$$\tilde{\nabla}_X u = -A_u X + \varepsilon_1(X)N + \varepsilon_2(X)u, \quad (4.1.9)$$

$$\nabla_X PY = \nabla_X^* PY + C(X, PY)\xi, \quad (4.1.10)$$

$$\nabla_X \xi = -A_\xi^*(X) - \rho_1(X)\xi \quad (4.1.11)$$

ile verilir. Burada B ve D ye, sırasıyla, TM üzerinde, *lightlike ikinci temel form* ve *ekran ikinci temel form*, C ye $S(TM)$ üzerinde *ekran ikinci temel form*, A_N ve A_u ya TM üzerinde *şekil operatörleri*; A_ξ^* ye ise $S(TM)$ üzerinde *ekran şekil operatörü* denir [33].

Tanım 4.1.6. $M, (\tilde{M}, \tilde{g})$ Lorentzian manifoldun bir half-lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda M nin ikinci temel formu h ve ekran ikinci temel formu h^* , sırasıyla,

$$h(X, Y) = B(X, Y)N + D(X, Y)u, \quad h^*(X, Y) = C(X, PY)\xi \quad (4.1.12)$$

ile tanımlanır [23].

Önerme 4.1.1. $M, (\tilde{M}, \tilde{g})$ Lorentzian manifoldunun bir half-lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda B ve D $S(TM)$ ekran distribüsyonunun seçiminden bağımsızdır ve her $X \in \Gamma(TM)$ için

$$B(X, \xi) = 0 \quad \text{ve} \quad D(X, \xi) = -\varepsilon_1(X) \quad (4.1.13)$$

dır [23].

Önerme 4.1.2. $M, (\tilde{M}, \tilde{g})$ Lorentzian manifoldun bir half-lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda M nin şekil operatörleri ile ikinci temel formları arasında aşağıdaki bağıntılar vardır:

$$B(X, Y) = g(A_\xi^* X, Y), \quad (4.1.14)$$

$$C(X, PY) = g(A_N X, PY), \quad (4.1.15)$$

$$D(X, PY) = g(A_u X, PY), \quad (4.1.16)$$

$$D(X, Y) = g(A_u X, PY) - \varepsilon_1(X)\eta(Y). \quad (4.1.17)$$

Burada $\eta(Y) = \tilde{g}(N, Y)$ dir [23].

Tanım 4.1.7. $M, (\tilde{M}, \tilde{g})$ Lorentzian manifoldun bir half-lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda

$$B(X, Y) = D(X, Y) = 0, \quad \forall X, Y \in \Gamma(TM) \quad (4.1.18)$$

ise M ye *total geodezik altmanifold altmanifold* ve

$$C(X, Y) = 0, \quad \forall X, Y \in \Gamma(S(TM)) \quad (4.1.19)$$

ise M ye $S(TM)$ -*total geodezik altmanifold* denir. H_1 ve H_2 sırasıyla, $ltr(TM)$ ve $\mathcal{D}$ üzerinde diferensiyellenebilir fonksiyolar olmak üzere $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$B(X, Y) = H_1 \tilde{g}(X, Y) \text{ ve } D(X, Y) = H_2 \tilde{g}(X, Y) \quad (4.1.20)$$

ise M ye *total umbilik altmanifold* denir. K , $tr(TM)$ üzerinde bir diferensiyellenebilir fonksiyon olmak üzere

$$C(X, Y) = K \tilde{g}(X, Y), \quad \forall X, Y \in \Gamma(S(TM)) \quad (4.1.21)$$

ise M ye $S(TM)$ -*total umbiliktir altmanifold* denir [23].

Örnek 4.1.1. R_2^4 de

$$x^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^1 + x^2), \quad x^4 = \frac{1}{2} \log(1 + (x^1 - x^2)^2) \quad (4.1.22)$$

ile tanımlanan bir M yüzeyi verilsin. Bu durumda

$$\begin{aligned} U_1 &= \sqrt{2}(1 + (x^1 - x^2)^2)\partial_1 + (1 + (x^1 - x^2)^2)\partial_3 + \sqrt{2}(x^1 - x^2)\partial_4, \\ U_2 &= \sqrt{2}(1 + (x^1 - x^2)^2)\partial_2 + (1 + (x^1 - x^2)^2)\partial_3 - \sqrt{2}(x^1 - x^2)\partial_4, \\ \xi &= \partial_1 + \partial_2 + \sqrt{2}\partial_3, \\ u &= 2(x^2 - x^1)\partial_2 + \sqrt{2}(x^2 - x^1)\partial_3 + (1 + (x^1 - x^2))\partial_4 \end{aligned} \quad (4.1.23)$$

olur. Burada $Rad TM = Sp\{\xi\}$ ve $S(TM) = Sp\{U_1, U_2\}$ dir. Ayrıca

$$ltr(TM) = Sp\{N = -\frac{1}{2}\partial_1 + \frac{1}{2}\partial_2 + \frac{1}{2}\partial_3\} \quad (4.1.24)$$

ve $tr(TM) = Sp\{u, N\}$ dir. Böylece M , R_2^4 de bir half-lightlike altmanifold olur. Direkt bir hesaplamayla

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{U_1} U_2 &= 2(1 + (x^1 - x^2)^2)^2 \{2(x^2 - x^1)\partial_2 + \sqrt{2}(x^2 - x^1)\partial_3 + \partial_4\} \\ \tilde{\nabla}_\xi U_2 &= 0, \quad \tilde{\nabla}_X \xi = \tilde{\nabla}_X N = 0, \quad \forall X \in \Gamma(TM) \end{aligned} \quad (4.1.25)$$

elde edilir. $X = X^1\xi + X^2U_2 \in \Gamma(TM)$ olmak üzere, Gauss-Weingarten formülleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} B &= 0, A_\xi = 0, A_N = 0, \nabla_X \xi = 0, \\ D(X, \xi) &= 0, D(U_2, U_2) = 2 = H_2 \tilde{g}(U_2, U_2) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $H_2 = -\frac{2}{(1+(x^1-x^2)^4)}$ dür. O halde M bir total umbilik half-lightlike altmanifoldtur [23].

Örnek 4.1.2. R_1^5 de

$$M = \{(t, t, u, v, 0) : t, u, v \in R\} \quad (4.1.26)$$

altmanifoldu verilsin. M, R_1^5 in total geodezik bir half-lightlike altmanifoldudur. Gerçekten de

$$\begin{aligned} \xi &= (1, 1, 0, 0, 0), U_1 = (0, 0, 1, 0, 0), U_2 = (0, 0, 0, 1, 0), \\ N &= \frac{1}{2}(-1, 1, 0, 0, 0), u = (0, 0, 0, 0, 1) \end{aligned} \quad (4.1.27)$$

olur. Buradan her $i, j \in 1, 2$ için $B(U_i, U_j) = D(U_i, U_j) = 0$ ve $D(\xi, \xi) = 0$ olduğu görülür. Böylece M total geodeziktir.

B ve D ikinci temel formları, $S(TM)$ ekran uzayının seçiminden bağımsız olduğundan $p \in M$ için ortalama eğrilik vektörü $H(p)$ de ekran uzayın seçiminden bağımsızdır.

Önerme 4.1.3. $M, (\tilde{M}, \tilde{g})$ Lorentzian manifoldunun bir half-lightlike altmanifoldu $\{e_1, \dots, e_n\} \Gamma(S(TM))$ nin bir ortonormal bazı olsun. Bu durumda M nin minimal olması için gerek ve yeter şart

$$\mu_1 = \sum_{i=1}^n B(e_i, e_i) = 0, \mu_2 = \sum_{i=1}^n D(e_i, e_i) = 0 \text{ ve } \varepsilon_1(\xi) = D(\xi, \xi) = 0 \quad (4.1.28)$$

olmasıdır [23].

Tanım 4.1.8. $M, (\tilde{M}, \tilde{g})$ Lorentzian manifoldunun bir half-lightlike altmanifoldu olsun. Eğer her $X \in \Gamma(TM)$ için

$$\varepsilon_1(X) = D(X, \xi) = 0 \quad (4.1.29)$$

ise M ye *irrasyonel half-lightlike altmanifold* denir [34].

Önerme 4.1.4. $M, (\tilde{M}, \tilde{g})$ Lorentzian manifoldunun bir irrasyonel half-lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda M nin minimal olması için gerek ve yeter şart

$$\mu_1 = \sum_{i=1}^n B(e_i, e_i) = 0, \text{ ve } \mu_2 = \sum_{i=1}^n D(e_i, e_i) = 0 \quad (4.1.30)$$

olmasıdır [23].

Tanım 4.1.9. $M, (\tilde{M}, \tilde{g})$ semi-Riemannian manifoldunun bir half-lightlike altmanifoldu olsun. M nin şekil operatörü A_N ve lokal şekil operatörü A_ξ^* olmak üzere M nin bir U komşuluğu üzerinde

$$A_N = \varphi A_\xi^* \quad (4.1.31)$$

şartını sağlayan sıfırdan farklı bir φ fonksiyonu varsa M ye bir *ekran lokal konformal half-lightlike altmanifold* denir. Burada φ sıfırdan farklı bir sabit ise M ye bir *ekran homotetik half-lightlike altmanifold* denir [35].

Önerme 4.1.5. $M, (\tilde{M}, \tilde{g})$ semi-Riemannian manifoldunun bir ekran lokal konformal half-lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$C(X, PY) = \varphi B(X, Y) \quad (4.1.32)$$

dir [35].

Önerme 4.1.6. $M, (\tilde{M}, \tilde{g})$ Lorentzian manifoldunun bir half-lightlike altmanifoldu olsun. $\tilde{M}$ ve M nin Riemann eğrilik tensörleri, sırasıyla, $\tilde{R}$ ve R olmak üzere

her $X, Y, Z, U \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned}\tilde{g}(\tilde{R}(X, Y)PZ, PW) &= g(R(X, Y)PZ, PW) + B(X, PZ)C(Y, PW) \\ &\quad - B(Y, PZ)C(X, PW) + D(X, PZ)D(Y, PW) \\ &\quad - D(Y, PZ)D(X, PW),\end{aligned}\tag{4.1.33}$$

$$\begin{aligned}\tilde{g}(\tilde{R}(X, Y)PZ, \xi) &= (\nabla_X B)(Y, PZ) - (\nabla_Y B)(X, PZ) \\ &\quad + \rho_1(X)B(Y, PZ) - \rho_1(Y)B(X, PZ),\end{aligned}\tag{4.1.34}$$

$$\begin{aligned}\tilde{g}(\tilde{R}(X, Y)PZ, N) &= g(R(X, Y)PZ, N) + \rho_2(Y)D(X, PZ) \\ &\quad - \rho_2(X)D(Y, PZ),\end{aligned}\tag{4.1.35}$$

$$\begin{aligned}\tilde{g}(\tilde{R}(X, Y)\xi, N) &= g(R(X, Y)\xi, N) + \rho_2(X)\varepsilon_1(Y) \\ &\quad - \rho_2(Y)\varepsilon_1(X)\end{aligned}\tag{4.1.36}$$

dir. Bu denklemlere M üzerinde Gauss-Codazzi tipi denklemler denir [36].

Önerme 4.1.7. $M, (\tilde{M}, \tilde{g})$ Lorentzian manifoldunun bir half-lightlike altmanifoldu olsun.

Bu durumda

$$\begin{aligned}R^{(0,2)}(\xi, \xi) &= \sum_{j=1}^n g(R(e_j, \xi)\xi, e_j) - \tilde{g}(R(\xi, \xi)\xi, N) \\ &= \sum_{j=1}^n K_j^{null}\end{aligned}\tag{4.1.37}$$

ve

$$\sum_{i=1}^n R^{(0,2)}(e_i, e_i) = \sum_{i=1}^n \left\{ \sum_{j=1}^n g(R(e_j, e_i)e_i, e_j) \right\} + \sum_{i=1}^n \tilde{g}(R(\xi, e_i)e_i, N)\tag{4.1.38}$$

dir [37].

(4.1.37) ve (4.1.38) eşitlikleri kullanılarak

$$\tau(p) = \sum_{i,j=1}^n K_{ij} + \sum_{i=1}^n K_i^{null} + K_{iN}\tag{4.1.39}$$

şeklinde bir $\tau(p)$ skaları elde edilir. Eğer M nin Ricci tipi tensörü simetrik ise $\tau(p)$ skalarına $p \in M$ noktasının *skalar eğriliği* denir. Burada $i \in \{1, \dots, n\}$ için $K_{iN} = \tilde{g}(R(\xi, e_i)e_i, N)$ dir [37].

4.2 Half-lightlike altmanifoldlar üzerinde ekran Ricci eğriliği ve ekran skalar eğriliği

Bu kısımda, bir Lorentzian manifoldun half-lightlike altmanifoldlar üzerinde ekran Ricci eğriliği ve ekran skalar eğriliği tanıtılarak, bu eğrilikler yardımıyla half-lightlike altmanifoldların nasıl karakterize edildiği gösterilmiştir.

Tanım 4.2.1. $M, (\tilde{M}, \tilde{g})$ Lorentzian manifoldunun $(n+1)$ -boyutlu bir half-lightlike altmanifoldu, $\{e_1, \dots, e_n, \xi\}$, $\Gamma(TM)$ nin bir bazı ve $\{e_1, \dots, e_n\}$, $\Gamma(S(TM))$ nin bir ortonormal bazı olsun. $k \leq n$ için $(k+1)$ -boyutlu dejenere bir düzlem kesiti $\pi_{k,\xi} = Sp\{e_1, \dots, e_k, \xi\}$ ve k -boyutlu non-dejenere bir düzlem kesiti $\pi_k = Sp\{e_1, \dots, e_k\}$ olmak üzere, sırasıyla,

$$Ric_{\pi_{k,\xi}}(X) = R^{(0,2)}(X, X) = \sum_{j=1}^k g(R(e_j, X)X, e_j) + \tilde{g}(R(\xi, X)X, N) \quad (4.2.1)$$

ve

$$Ric_{\pi_k}(X) = R^{(0,2)}(X, X) = \sum_{j=1}^k g(R(e_j, X)X, e_j) \quad (4.2.2)$$

eğriliklerine $X \in \Gamma(TM)$ doğrultusunda k -dejenere Ricci tipi tensörü ve k -Ricci tensörü denir. Eğer M nin kesit eğriliği simetrik ise $Ric_{\pi_{k,\xi}}(X)$, k -dejenere Ricci eğriliği ve $Ric_{\pi_k}(X)$, k -Ricci eğriliği olarak adlandırılır.

Ayrıca

$$\tau_{\pi_{k,\xi}}(p) = \sum_{i,j=1}^k K_{ij} + \sum_{i=1}^k K_i^{null} + K_{iN} \quad (4.2.3)$$

ve

$$\tau_{\pi_k}(p) = \sum_{i,j=1}^k K_{ij} \quad (4.2.4)$$

eğriliklerine, sırasıyla, M nin p noktasındaki k -dejenere skalar eğriliği ve k -skalar eğriliği denir.

$k = 2$ için $\Pi_{1,\xi} = Sp\{e_1, \xi\}$, 2-boyutlu bir düzlem kesiti olmak üzere

$$Ric_{\Pi_{1,\xi}}(e_1) = K_{1N}$$

ve

$$\tau_{\Pi_2}(p) = K_1^{null} + K_{1N}$$

dir.

$k = n$ ise $\pi_n = Sp\{e_1, \dots, e_n\} = \Gamma(S(TM))$ olmak üzere

$$Ric_{S(TM)}(e_1) = Ric_{\pi_n}(e_1) = \sum_{j=1}^n K_{1j} = K_{12} + \dots + K_{1n} \quad (4.2.5)$$

ve

$$\tau_{S(TM)}(p) = \sum_{i,j=1}^n K_{ij} \quad (4.2.6)$$

olur. $Ric_{S(TM)}(e_1)$ eğriliğine e_1 doğrultusunda *ekran Ricci eğriliği* ve $\tau_{S(TM)}(p)$ ye $p \in M$ noktasında *ekran skalar eğriliği* denir.

Önerme 4.2.1. $M, (\tilde{M}, \tilde{g})$ Lorentzian manifoldunun $(n+1)$ -boyutlu bir half-lightlike alt-manifoldu, $\{e_1, \dots, e_n, \xi\}, \Gamma(TM)$ nin bir bazı ve $\{e_1, \dots, e_n\}, \Gamma(S(TM))$ nin bir ortonormal bazı olsun. Bu durumda

$$\tau_{S(TM)}(p) = \tilde{\tau}_{S(TM)}(p) + \sum_{i,j=1}^n B_{ii}C_{jj} - B_{ij}C_{ji} + \sum_{i,j=1}^n D_{ii}D_{jj} - (D_{ij})^2 \quad (4.2.7)$$

dir. Burada $i, j \in \{1, \dots, n\}$ için $B_{ij} = B(e_i, e_j)$, $C_{ij} = C(e_i, e_j)$ ve $D_{ij} = D(e_i, e_j)$ dir.

Önerme 4.2.2. $M, (\tilde{M}, \tilde{g})$ Lorentzian manifoldunun $(n+1)$ -boyutlu bir half-lightlike alt-manifoldu, $\{e_1, \dots, e_n, \xi\}, \Gamma(TM)$ nin bir bazı ve $\{e_1, \dots, e_n\}, \Gamma(S(TM))$ nin bir ortonormal bazı olsun. M nin ikinci temel formu B ve ekran ikinci temel formu C nin bileşenleri arasında aşağıdaki bağıntılar vardır:

$$\sum_{i,j=1}^n B_{ij}C_{ji} = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i,j=1}^n (B_{ij} + C_{ji})^2 - \sum_{i,j=1}^n (B_{ij})^2 + (C_{ji})^2 \right\} \quad (4.2.8)$$

ve

$$\sum_{i,j} B_{ii}C_{jj} = \frac{1}{2} \left\{ (\sum_{i,j} B_{ii} + C_{jj})^2 - (\sum_i B_{ii})^2 - (\sum_j C_{jj})^2 \right\} \quad (4.2.9)$$

dir.

Teorem 4.2.1. $M, (\tilde{M}, \tilde{g})$ Lorentzian manifoldunun $(n+1)$ -boyutlu bir half-lightlike alt-manifoldu olsun. Bu durumda

$$\tau_{S(TM)}(p) \leq \tilde{\tau}_{S(TM)}(p) + n\mu_1(izA_N) + n^2\mu_2^2 + \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^n (B_{ij} - C_{ji})^2 \quad (4.2.10)$$

eşitsizliği vardır. (4.2.10) eşitsizliğinin eşitlik durumunun her $p \in M$ noktasında sağlanması için gerek ve yeter şart ya M nin $\phi = -1$ olacak şekilde bir ekran homotetik half-lightlike altmanifold olması ya da B ikinci temel formu TM üzerinde ve C, D ikinci temel formları $S(TM)$ üzerinde sıfıra eşit olmasıdır.

İspat. (4.2.7) ve (4.2.8) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} \tau_{S(TM)}(p) &= \tilde{\tau}_{S(TM)}(p) + \sum_{i,j=1}^n B_{jj}C_{ii} - \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i,j=1}^n (B_{ij} + C_{ji})^2 - \sum_{i,j=1}^n (B_{ij})^2 + (C_{ji})^2 \right\} \\ &\quad + \sum_{i,j=1}^n D_{ii}D_{jj} - (D_{ij})^2 \end{aligned}$$

yazılabilir.

$$\frac{1}{2}(B_{ij}^2 + C_{ji}^2) = \frac{1}{4}(B_{ij} + C_{ji})^2 + \frac{1}{4}(B_{ij} - C_{ji})^2$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \tau_{S(TM)}(p) &= \tilde{\tau}_{S(TM)}(p) + n\mu_1(izA_N) - \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^n (B_{ij} + C_{ji})^2 \\ &\quad + \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^n (B_{ij} - C_{ji})^2 + n^2\mu_2^2 - \sum_{i,j=1}^n (D_{ij})^2 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise (4.2.10) eşitsizliğinin sağladığını gösterir.

(4.2.10) eşitsizliğinin eşitlik durumunun her $p \in M$ noktasında sağlanması için gerek ve yeter şart her $i, j \in \{1, \dots, n\}$ için

$$D_{ij} = 0 \text{ ve } B_{ij} = -C_{ij}$$

olmasıdır. Bu ise M nin ya $\phi = -1$ olacak şekilde bir ekran homotetik half-lightlike altmanifold olduğunu veya B ikinci temel formu TM üzerinde ve C, D ikinci temel formları $S(TM)$ üzerinde sıfıra eşit olduğunu gösterir. $\square$

Sonuç 4.2.1. $M, \tilde{M}$ Lorentzian manifoldunun $(n+1)$ -boyutlu bir half-lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda

$$\tau_{S(TM)}(p) \leq \tilde{\tau}_{S(TM)}(p) + n\mu_1(izA_N) + n^2\mu_2^2 + \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^n (B_{ij} - C_{ji})^2 \quad (4.2.11)$$

eşitsizliği vardır. (4.2.11) eşitsizliğinin eşitlik durumunun her $p \in M$ noktasında sağlanması için gerek ve yeter şart ya M nin $\varphi = -1$ olacak şekilde bir ekran homotetik half-lightlike altmanifold ya da M nin total geodezik olmasıdır.

Teorem 4.2.2. $M, (\tilde{M}, \tilde{g})$ semi-Riemannian manifoldunun $(n+1)$ -boyutlu bir ekran konformal half-lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

- i) $S(TM)$ nin her bir integral altmanifoldu M de total geodeziktir;
- ii) L , 1-boyutlu bir lightlike altmanifold, M' , $S(TM)$ nin non-dejenere bir integral altmanifoldu olmak üzere M, M' ve L nin bir lightlike çarpım manifoldudur;
- iii) B, M üzerinde sıfırdır;
- iv) M nin indirgenmiş konneksiyonu ∇ bir metrik konneksiyondur [33].

Sonuç 4.2.2. $M, (\tilde{M}, \tilde{g})$ Lorentzian manifoldunun $(n+1)$ -boyutlu ve $\varphi \neq -1$ olacak şekilde bir ekran homotetik half-lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda

$$\tau_{S(TM)}(p) \leq \tilde{\tau}_{S(TM)}(p) + \varphi n^2\mu_1^2 + n^2\mu_2^2 + \frac{(\varphi-1)^2}{4} \sum_{i,j=1}^n (B_{ij})^2 \quad (4.2.12)$$

eşitsizliği vardır. (4.2.12) eşitsizliğinin eşitlik durumunun her $p \in M$ noktasında sağlanması için gerek ve yeter şart M nin indirgenmiş ∇ konneksiyonunun bir metrik konneksiyon olmasıdır.

Teorem 4.2.3. $M, (\tilde{M}, \tilde{g})$ Lorentzian manifoldunun $(n+1)$ -boyutlu bir half-lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda

$$\tau_{S(TM)}(p) \leq \tilde{\tau}_{S(TM)}(p) + \frac{1}{2}iz(\tilde{A}_N)^2 + n^2\mu_2^2 + \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^n (B_{ij} - C_{ji})^2 \quad (4.2.13)$$

eşitsizliği vardır. Burada

$$\tilde{A}_N = \begin{pmatrix} B_{11} + C_{11} & \dots & B_{1n} + C_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{n1} + C_{n1} & \dots & B_{nn} + C_{nn} \end{pmatrix} \quad (4.2.14)$$

dır. (4.2.13) eşitsizliğinin eşitlik durumunun her $p \in M$ noktasında sağlanması için gerek ve yeter şart $\mu_1 = \mu_2 = iz(A_N) = 0$ olmasıdır.

İspat. (4.2.7), (4.2.8) ve (4.2.9) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} \tau_{S(TM)}(p) &= \tilde{\tau}_{S(TM)}(p) + \frac{1}{2} \left\{ \left(\sum_{i,j=1}^n B_{ii} + C_{jj} \right)^2 - \left(\sum_{i=1}^n B_{ii} \right)^2 - \left(\sum_{j=1}^n C_{jj} \right)^2 \right\} \\ &\quad - \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^n (B_{ij} + C_{ji})^2 + \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^n (B_{ij} - C_{ji})^2 \\ &\quad + \sum_{i,j=1}^n D_{ii} D_{jj} - (D_{ij})^2 \end{aligned} \quad (4.2.15)$$

elde edilir. Bu ise (4.2.13) eşitsizliğinin sağlandığını gösterir. (4.2.13) eşitsizliğinin eşitlik durumunun her $p \in M$ noktasında sağlanması için gerek ve yeter şart her $i, j \in \{1, \dots, n\}$ için

$$\mu_1 = iz(A_N) = 0, \quad B_{ij} = -C_{ji} \quad \text{ve} \quad D_{ij} = 0 \quad (4.2.16)$$

olmasıdır. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Sonuç 4.2.3. $M, (\tilde{M}, \tilde{g})$ Lorentzian manifoldunun $(n+1)$ -boyutlu bir irrasyonel half-lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda

$$\tau_{S(TM)}(p) \leq \tilde{\tau}_{S(TM)}(p) + \frac{1}{2} iz(\tilde{A}_N)^2 + n^2 \mu_2^2 + \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^n (B_{ij} - C_{ji})^2 \quad (4.2.17)$$

dir. Burada $\tilde{A}_N$ (4.2.14) eşitliği ile verilir. (4.2.17) eşitsizliğinin eşitlik durumunun her $p \in M$ noktasında sağlanması için gerek ve yeter şart M nin minimal olmasıdır.

Sonuç 4.2.4. $M, (\tilde{M}, \tilde{g})$ Lorentzian manifoldunun $(n+1)$ -boyutlu bir irrasyonel ekran homotetik half-lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda

$$\tau_{S(TM)}(p) \leq \tilde{\tau}_{S(TM)}(p) + \frac{(\varphi+1)^2}{2} n^2 \mu_1^2 + n^2 \mu_2^2 + \frac{(\varphi-1)^2}{4} \sum_{i,j=1}^n (B_{ij})^2 \quad (4.2.18)$$

dir. (4.2.18) eşitsizliğinin eşitlik durumunun her $p \in M$ noktasında sağlanması için gerek ve yeter şart M nin minimal olmasıdır.

Teorem 4.2.4. $M, (\tilde{M}, \tilde{g})$ Lorentzian manifoldunun $(n+1)$ -boyutlu bir half-lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \tau_{S(TM)}(p) &\leq \tilde{\tau}_{S(TM)}(p) + \frac{2n-1}{4}(iz\tilde{A}_N)^2 - \frac{1}{2}n^2\mu_1^2 - \frac{1}{2}(izA_N)^2 \\ &\quad + \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^n (B_{ij} - C_{ji})^2 + n(n-1)\mu_2^2 \end{aligned} \quad (4.2.19)$$

eşitsizliği vardır. Burada $\tilde{A}_N$ (4.2.14) eşitliği ile verilir. (4.2.19) eşitsizliğinin eşitlik durumunun her $p \in M$ noktasında sağlanması için gerek ve yeter şart her $X \in \Gamma(S(TM))$ için $n\mu_1 = -iz(A_N)$ ve $\mu_2 = D(X, X)$ olmasıdır.

İspat. (4.2.15) eşitliğinden ve Lemma 3.2.1 den

$$\begin{aligned} \tau_{S(TM)}(p) &\leq \tilde{\tau}_{S(TM)}(p) + \frac{1}{2} \left\{ \left(\sum_{i,j=1}^n B_{ii} + C_{jj} \right)^2 - \left(\sum_{i=1}^n B_{ii} \right)^2 - \left(\sum_{j=1}^n C_{jj} \right)^2 \right\} \\ &\quad - \frac{1}{4n} \left(\sum_{i,j=1}^n B_{ii} + C_{jj} \right)^2 + \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^n (B_{ij} - C_{ji})^2 + n^2\mu_2^2 \\ &\quad - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n D_{ii} \right)^2 - \sum_{i \neq j=1}^n (D_{ij})^2 \end{aligned} \quad (4.2.20)$$

yazılabilir. Bu ise (4.2.19) eşitsizliğinin sağlandığını gösterir.

(4.2.19) eşitsizliğinin eşitlik durumunun her $p \in M$ noktasında sağlanması için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned} B_{11} + C_{11} &= \dots = B_{nn} + C_{nn}, \quad D_{11} = \dots = D_{nn}, \\ D_{ij} &= 0, \quad i \neq j \in \{1, \dots, n\} \end{aligned}$$

olmasıdır. Bu ise $n\mu_1 = -iz(A_N)$ ve $\mu_2 = D_{11}$ olduğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Teorem 4.2.5. $M, (\tilde{M}, \tilde{g})$ semi-Riemannian manifoldunun bir half-lightlike altmanifoldu olsun. M nin $S(TM)^\perp$, $\tilde{M}$ üzerinde konformal Kiling ise bu durumda bir δ diferendiyelenebilir fonksiyonu vardır öyleki her $X, Y \in TM$ için

$$D(X, Y) = \varepsilon \delta g(X, Y) \quad (4.2.21)$$

dir [38].

Sonuç 4.2.5. $M, (\tilde{M}, \tilde{g})$ Lorentzian manifoldunun $(n+1)$ -boyutlu bir half-lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda (4.2.19) eşitsizliğinin eşitlik durumu her $p \in M$ noktasında sağlanıyorsa $S(TM)^\perp, \delta = 1$ olacak şekilde $\tilde{M}$ üzerinde bir konformal Kilingdir.

4.3 Ekran konformal half-lightlike altmanifoldlar üzerinde Chen-tipi eşitsizlikler

Bu bölümde, Lorentzian bir manifoldun ekran konformal half-lightlike altmanifoldlarının ekran Ricci eğriliği ve ekran skalar eğriliğini içeren bazı eşitsizlikler verilecektir.

Önerme 4.3.1. $M, (\tilde{M}, \tilde{g})$ Lorentzian manifoldunun $(n+1)$ -boyutlu bir ekran homotetik half-lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda

$$\tau_{S(TM)}(p) = \tilde{\tau}_{S(TM)}(p) + \varphi \sum_{i,j=1}^n B_{ii}B_{jj} - (B_{ij})^2 + \sum_{i,j=1}^n D_{ii}D_{jj} - (D_{ij})^2 \quad (4.3.1)$$

dir.

İspat. (4.1.32) ve (4.2.7) eşitliklerinden önermenin ispatı kolayca yapılabilir. $\square$

Teorem 4.3.1. $M, (\tilde{M}, \tilde{g})$ Lorentzian manifoldunun $(n+1)$ -boyutlu bir ekran homotetik half-lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda

a) $\varphi > 0$ ise

$$\tau_{S(TM)}(p) \leq \tilde{\tau}_{S(TM)}(p) + \varphi n^2 \mu_1^2 + n^2 \mu_2^2 \quad (4.3.2)$$

eşitsizliği vardır. (4.3.2) eşitsizliğinin eşitlik durumunun her $p \in M$ noktasında sağlanması için gerek ve yeter şart $S(TM)$ nin M de total geodezik ve her $X, Y \in \Gamma(S(TM))$ için $D(X, Y) = 0$ olmasıdır.

b) $\varphi < 0$ ise

$$\tau_{S(TM)}(p) \geq \tilde{\tau}_{S(TM)}(p) + \varphi n^2 \mu_1^2 + n^2 \mu_2^2 - \sum_{i,j=1}^n (D_{ij})^2 \quad (4.3.3)$$

eşitsizliği vardır. (4.3.2) eşitsizliğinin eşitlik durumunun her $p \in M$ noktasında sağlanması için gerek ve yeter şart $S(TM)$ ekran distribüsyonunun M de total geodezik olmasıdır.

Sonuç 4.3.1. $M, (\tilde{M}, \tilde{g})$ Lorentzian manifoldunun $(n+1)$ -boyutlu bir irrasyonel ekran homotetik half-lightlike altmanifold olsun. Bu durumda

a) $\varphi > 0$ ise

$$\tau_{S(TM)}(p) \leq \tilde{\tau}_{S(TM)}(p) + \varphi n^2 \mu_1^2 + n^2 \mu_2^2 \quad (4.3.4)$$

eşitsizliği vardır. (4.3.4) eşitsizliğinin eşitlik durumunun her $p \in M$ noktasında sağlanması için gerek ve yeter şart M nin total geodezik olmasıdır.

b) $\varphi < 0$ ise

$$\tau_{S(TM)}(p) \geq \tilde{\tau}_{S(TM)}(p) + \varphi n^2 \mu_1^2 + n^2 \mu_2^2 - \sum_{i,j=1}^n (D_{ij})^2 \quad (4.3.5)$$

eşitsizliği vardır. (4.3.5) eşitsizliğinin eşitlik durumunun her $p \in M$ noktasında sağlanması için gerek ve yeter şart $S(TM)$ ekran distribüsyonunun M nin total geodezik olmasıdır.

Uyarı 4.3.1. Bu bölümün geriye kalan kısmında $\varphi > 0$ olarak alınacaktır.

Teorem 4.3.2. $M, (\tilde{M}, \tilde{g})$ Lorentzian manifoldunun $\varphi > 0$ olacak şekilde $(n+1)$ -boyutlu bir ekran homotetik half-lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda

$$\tau_{S(TM)}(p) \leq \tilde{\tau}_{S(TM)}(p) + n(n-1)(\varphi \mu_1^2 + \mu_2^2) \quad (4.3.6)$$

eşitsizliği vardır. (4.3.6) eşitsizliğinin eşitlik durumunun her $p \in M$ noktasında sağlanması için gerek ve yeter şart $S(TM)$ ekran distribüsyonunun M de total umbilik olmasıdır.

İspat. (4.3.1) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \tau_{S(TM)}(p) &= \tilde{\tau}_{S(TM)}(p) + \varphi n^2 \mu_1^2 - \varphi \sum_{i \neq j=1}^n (B_{ij})^2 - \varphi \sum_{i=1}^n (B_{ii})^2 \\ &\quad + n^2 \mu_2^2 - \sum_{i \neq j=1}^n (D_{ij})^2 - \sum_{i=1}^n (D_{ii})^2 \end{aligned} \quad (4.3.7)$$

yazılabilir. (4.3.7) de Lemma 3.2.1 kullanılacak olursa (4.3.6) eşitsizliği elde edilir.

(4.3.6) eşitsizliğinin eşitlik durumunun her $p \in M$ noktasında sağlanması için gerek ve yeter şart $i \neq j \in \{1, \dots, n\}$ için

$$B_{11} = \dots = B_{nn}, \quad B_{ij} = 0,$$

$$D_{11} = \dots = D_{nn}, \quad D_{ij} = 0$$

olmasıdır. Bu ise $S(TM)$ nin M de total geodezik olduğunu gösterir ve ispat tamamlanır. $\square$

Sonuç 4.3.2. $M, (\tilde{M}, \tilde{g})$ Lorentzian manifoldunun $\varphi > 0$ olacak şekilde $(n+1)$ -boyutlu bir irrasyonel ekran homotetik half-lightlike altmanifold olsun. Bu durumda

$$\tau_{S(TM)}(p) \leq \tilde{\tau}_{S(TM)}(p) + n(n-1)(\varphi\mu_1^2 + \mu_2^2) \quad (4.3.8)$$

eşitsizliği vardır. (4.3.8) eşitsizliğinin eşitlik durumunun her $p \in M$ noktasında sağlanması için gerek ve yeter şart M nin total umbilik olmasıdır.

Teorem 4.3.3. $M, (\tilde{M}, \tilde{g})$ Lorentzian manifoldunun $\varphi > 0$ olacak şekilde $(n+1)$ -boyutlu bir ekran homotetik half-lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \tau_{S(TM)}(p) \leq & \tilde{\tau}_{S(TM)}(p) + \frac{(n+2)}{(n+1)}\varphi n^2\mu_1^2 + \frac{\varphi n}{2(n+1)}(B_{11} - B_{22})^2 \\ & + \frac{(n+2)}{(n+1)}\varphi n^2\mu_2^2 + \frac{\varphi n}{2(n+1)}(D_{11} - D_{22})^2 \end{aligned} \quad (4.3.9)$$

eşitsizliği vardır. (4.3.9) eşitsizliğinin eşitlik durumunun her $p \in M$ noktasında sağlanması için gerek ve yeter şart

$$\mu_1 = \frac{n}{2}(B_{11} + B_{22}), \quad \mu_2 = \frac{n}{2}(D_{11} + D_{22}) \quad (4.3.10)$$

ve her $i \neq j \in \{1, \dots, n\}$ için

$$B_{ij} = D_{ij} = 0 \quad (4.3.11)$$

olmasıdır.

İspat. Binom teoreminden

$$(B_{11} - B_{22})^2 + \dots + (B_{11} - B_{nn})^2 + (B_{22} - B_{33})^2 + \dots + (B_{22} - B_{nn})^2 \\ + \dots + (B_{n-1n-1} - B_{nn})^2 = n \sum_{i=1}^n (B_{ii})^2 - 2 \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} B_{ii} B_{jj} \quad (4.3.12)$$

yazılabilir. Lemma 3.4.2 in (a) şıkkından

$$\sum_{i=1}^n (B_{ii})^2 \geq \frac{1}{n} \sum_{i \neq j} B_{ii} B_{jj} + \frac{1}{2} (B_{11} - B_{22})^2 \quad (4.3.13)$$

elde edilir. Bununla beraber

$$\frac{1}{n} \sum_{i \neq j} B_{ii} B_{jj} = n\mu_1^2 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (B_{ii})^2 \quad (4.3.14)$$

olduğundan (4.3.13) eşitliği (4.3.14) de yerine yazılacak olursa

$$\sum_{i=1}^n (B_{ii})^2 \geq \frac{n^2}{n+1} \mu_1^2 + \frac{n}{2(n+1)} (B_{11} - B_{22})^2 \quad (4.3.15)$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\sum_{i=1}^n (D_{ii})^2 \geq \frac{n^2}{n+1} \mu_2^2 + \frac{n}{2(n+1)} (D_{11} - D_{22})^2 \quad (4.3.16)$$

dir. (4.3.7) de (4.3.15) ve (4.3.16) eşitlikleri kullanılırsa (4.3.9) eşitsizliği elde edilir.

(4.3.9) eşitsizliğinin eşitlik durumunun her $p \in M$ noktasında sağlanması için gerek ve yeter şart (4.3.10) ve (4.3.11) eşitliklerinin sağlanmasıdır. Bu ise teoremin ispatını tamamlar. $\square$

Sonuç 4.3.3. M , $(\tilde{M}, \tilde{g})$ Lorentzian manifoldunun $\varphi > 0$ olacak şekilde $(n+1)$ -boyutlu bir ekran homotetik half-lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda her $i \neq j \in \{1, \dots, n\}$ için

$$\tau_{S(TM)}(p) \leq \tilde{\tau}_{S(TM)}(p) + \frac{n^3}{(n+1)} \varphi \mu_1^2 - \frac{\varphi n}{2(n+1)} (B_{ii} - B_{jj})^2 \\ + \frac{n^3}{(n+1)} \varphi \mu_2^2 - \frac{\varphi n}{2(n+1)} (D_{ii} - D_{jj})^2 \quad (4.3.17)$$

eşitsizliği vardır. (4.3.17) eşitsizliğinin eşitlik durumunun her $p \in M$ noktasında sağlanması için gerek ve yeter şart $S(TM)$ ekran distribüsyonunun M de total umbilik olmasıdır.

Sonuç 4.3.4. $M, (\tilde{M}, \tilde{g})$ Lorentzian manifoldunun $\varphi > 0$ olacak şekilde $(n+1)$ -boyutlu bir irrasyonel ekran homotetik half-lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda her $i \neq j \in \{1, \dots, n\}$ için

$$\begin{aligned} \tau_{S(TM)}(p) \leq & \tilde{\tau}_{S(TM)}(p) + \frac{(n+2)}{(n+1)} \varphi n^2 \mu_1^2 + \frac{\varphi n}{2(n+1)} (B_{ii} - B_{jj})^2 \\ & + \frac{(n+2)}{(n+1)} \varphi n^2 \mu_2^2 + \frac{\varphi n}{2(n+1)} (D_{ii} - D_{jj})^2 \end{aligned} \quad (4.3.18)$$

eşitsizliği vardır. (4.3.18) eşitsizliğinin eşitlik durumunun her $p \in M$ noktasında sağlanması gerek ve yeter şart M nin total umbilik olmasıdır.

Teorem 4.3.4. M, c sabit eğrilikli $(\tilde{M}(c), \tilde{g})$ semi-Riemannian uzay formunun $\varphi > 0$ olacak şekilde $(n+1)$ -boyutlu total umbilik bir ekran konformal half-lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda

- i) M nin Ricci tensörü simetriktir.
- ii) M nin null kesit eğriliği sıfırdır [35].

Sonuç 4.3.5. $M, (\tilde{M}, \tilde{g})$ Lorentzian manifoldunun $\varphi > 0$ olacak şekilde $(n+1)$ -boyutlu bir irrasyonel ekran homotetik half-lightlike altmanifoldu olsun. (4.3.18) eşitsizliğinin eşitlik durumunun her $p \in M$ noktasında sağlanıyorsa

- i) M nin Ricci tensörü simetriktir.
- ii) M nin null kesit eğriliği sıfırdır.

Teorem 4.3.5. $M, (\tilde{M}, \tilde{g})$ Lorentzian manifoldunun $\varphi > 0$ olacak şekilde $(n+1)$ -boyutlu bir ekran homotetik half-lightlike altmanifoldu, ve $p \in M$ için $T_p M$ nin 2-boyutlu bir non-dejenere düzlem kesiti $\Pi = Sp\{e_1, e_2\}$ olsun. Bu durumda

$$B(\pi^\perp)^2 = \sum_{i=3}^n (B_{ii})^2 \text{ ve } n^2 \mu_2^2(\Pi^\perp) = \sum_{i,j=3}^n D_{ii} D_{jj} \quad (4.3.19)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \tau_{S(TM)}(p) - \tau(\Pi) \leq & \tilde{\tau}_{S(TM)}(p) - \tilde{\tau}(\Pi) + \varphi \frac{n^2(n-2)}{n-1} \mu_1^2 \\ & + B(\pi^\perp)^2 - n^2 \mu_2^2(\Pi^\perp) \end{aligned} \quad (4.3.20)$$

eşitsizliği vardır. (4.3.20) eşitsizliğinin eşitlik durumunun her $p \in M$ noktasında sağlanması için gerek ve yeter şart $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = D_{11} + D_{22}$ ve M nin lokal şekil operatörü A_ξ^* in

$$A_\xi^* = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & 0 \\ B_{21} & -B_{11} & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

olmasıdır.

İspat. (4.3.1) eşitliğinde

$$\begin{aligned} \delta &= \tau_{S(TM)}(p) - \varphi \frac{n^2(n-2)}{(n-1)} \mu_1^2 - \tilde{\tau}_{S(TM)}(p) \\ &\quad - n^2 \mu_2^2 + \sum_{i,j=1}^n (D_{ij})^2 \end{aligned}$$

yazılırsa

$$\delta = \varphi \frac{n^2}{n-1} \mu^2 - \varphi \sum_{i,j=1}^n (B_{ij})^2$$

elde edilir. Böylece

$$\left(\sum_{i=1}^n B_{ii} \right)^2 = (n-1) \left(\frac{\delta}{\varphi} + \sum_{i=1}^n (B_{ii})^2 + \sum_{i \neq j=1}^n (B_{ij})^2 \right)$$

dir. Yukarıdaki eşitlikte Lemma 3.4.3 kullanılacak olursa

$$2B_{11}B_{22} \geq \frac{\delta}{\varphi} + \sum_{i \neq j=1}^n (B_{ij})^2$$

elde edilir.

Π , $T_p M$ nin e_1 ve e_2 ortonormal vektörleri tarafında gerilen bir alt düzlemi olsun. Bu

durumda

$$\begin{aligned}
\tau(\Pi) &= \tilde{\tau}(\Pi) + \varphi \sum_{i,j=1}^2 B_{ii}B_{jj} - (B_{ij})^2 + \sum_{i,j=1}^2 D_{ii}D_{jj} - (D_{ij})^2 \\
&\geq \tilde{\tau}(\Pi) + \delta + \varphi \sum_{i \neq j=1}^n (B_{ij})^2 - \varphi \sum_{i \neq j=1}^2 (B_{ij})^2 + \sum_{i,j=1}^2 D_{ii}D_{jj} - (D_{ij})^2 \\
&\geq \tilde{\tau}(\Pi) + \delta + \varphi \sum_{i,j=1}^n (B_{ij})^2 - \varphi \sum_{i=1}^n (B_{ii})^2 - \varphi \sum_{i \neq j=1}^2 (B_{ij})^2 \\
&\quad + 2D_{11}D_{22} - \sum_{i \neq j}^2 (D_{ij})^2 \\
&\geq \tilde{\tau}(\Pi) + \delta - \varphi \sum_{i=3}^n (B_{ii})^2 + 2D_{11}D_{22} - \sum_{i \neq j}^2 (D_{ij})^2 \\
&\geq \tilde{\tau}(\Pi) + \tau_{S(TM)}(p) - \varphi \frac{n^2(n-2)}{n-1} \mu_1^2 - \tilde{\tau}_{S(TM)}(p) - \sum_{i,j=3}^n D_{ii}D_{jj} \\
&\quad + \sum_{i,j=3}^n (D_{ij})^2 - \varphi \sum_{i=3}^n (B_{ii})^2
\end{aligned}$$

dir. Bu ise (4.3.20) eşitsizliğinin doğruluğunu gösterir.

(4.3.20) eşitsizliğinin eşitlik durumunun her $p \in M$ noktasında sağlanması için gerek ve yeter şart her $i, j \in \{3, \dots, n\}$ için

$$B_{ij} = D_{ij} = 0 \text{ ve } B_{11} + B_{22} = B_{33} = 0 \quad (4.3.21)$$

olmasıdır. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

İspatı Teorem 4.3.5 in ispatına benzer şekilde yapılabilecek aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 4.3.6. $M, (\tilde{M}, \tilde{g})$ Lorentzian manifoldunun $\varphi > 0$ olacak şekilde $(n+1)$ -boyutlu bir ekran homotetik half-lightlike altmanifold, $p \in M$ için $T_p M$ nin 2-boyutlu bir non-dejenere düzlem kesiti $\Pi = \text{Span}\{e_1, e_2\}$ olsun. Bu durumda

$$D(\pi^\perp)^2 = \sum_{i=3}^n (D_{ii})^2 \text{ ve } n^2 \mu_1^2(\Pi^\perp) = \sum_{i,j=3}^n B_{ii}B_{jj} \quad (4.3.22)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \tau_{S(TM)}(p) - \tau(\Pi) &\leq \tilde{\tau}_{S(TM)}(p) - \tilde{\tau}(\Pi) + \frac{n^2(n-2)}{n-1} \mu_2^2 \\ &\quad + D(\pi^\perp)^2 - \phi n^2 \mu_1^2 (\Pi^\perp) \end{aligned} \quad (4.3.23)$$

eşitsiliği vardır. (4.3.23) eşitsizliğinin eşitlik durumunun her $p \in M$ noktasında sağlanması için gerek ve yeter şart $\mu_1 = B_{11} + B_{22}$ ve $\mu_2 = 0$ olmasıdır.

Sonuç 4.3.6. $M, (\tilde{M}, \tilde{g})$ Lorentzian manifoldunun $\phi > 0$ olacak şekilde $(n+1)$ -boyutlu bir ekran homotetik half-lightlike altmanifoldu ve $p \in M$ noktasında $T_p M$ nin 2-boyutlu bir non-dejenere düzlem kesiti $\Pi = \text{Span}\{e_1, e_2\}$ olsun. Bu durumda (4.3.20) ve (4.3.23) eşitsizliklerinin eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter şart $\mu_1 = \mu_2 = 0$ olmasıdır.

Sonuç 4.3.7. $M, (\tilde{M}, \tilde{g})$ Lorentzian manifoldunun $\phi > 0$ olacak şekilde $(n+1)$ -boyutlu bir irrasyonel ekran homotetik half-lightlike altmanifoldu ve $p \in M$ noktasında $T_p M$ nin 2-boyutlu bir non-dejenere düzlem kesiti $\Pi = \text{Span}\{e_1, e_2\}$ olsun. Bu durumda (4.3.20) ve (4.3.23) eşitsizliklerinin eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter şart M nin minimal olmasıdır.

Ekran konformal half-lightlike altmanifoldların kesit eğriliği simetrik olduğundan bu tip altmanifoldların $r_{S(TM)}$ ile gösterilen ekran skalar eğriliği

$$r_{S(TM)}(p) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} K_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n K_{ij} = \frac{1}{2} \tau_{S(TM)}(p). \quad (4.3.24)$$

şeklinde tanımlanabilir.

Önerme 4.3.2. $M, (\tilde{M}, \tilde{g})$ Lorentzian manifoldunun $\phi > 0$ olacak şekilde $(n+1)$ -boyutlu bir ekran homotetik half-lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda M ikinci temel formu B nin bileşenleri arasında

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n (B_{ij})^2 &= \frac{1}{2} n^2 \mu^2 + \frac{1}{2} (B_{11} - B_{22} - \dots - B_{nn})^2 \\ &\quad + 2 \sum_{j=2}^n (B_{1j})^2 - 2 \sum_{2 \leq i < j \leq n} B_{ii} B_{jj} - (B_{ij})^2 \end{aligned} \quad (4.3.25)$$

bağıntısı vardır.

Teorem 4.3.7. $M, (\tilde{M}, \tilde{g})$ Lorentzian manifoldunun $\varphi > 0$ olacak şekilde $(n+1)$ -boyutlu bir ekran homotetik half-lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda

(a) $X \in S^1(TM) = \{X \in S(TM) : g(X, X) = 1\}$ için

$$\frac{1}{4}(\varphi n^2 \mu_1^2 + n^2 \mu_2^2) \geq \frac{1}{\varphi}(\text{Ric}_{S(TM)}(X) - \widetilde{\text{Ric}}_{S(TM)}(X)) \quad (4.3.26)$$

eşitsizliği vardır.

(b) $X \in S^1(TM)$ olmak üzere (4.3.26) eşitsizliğinin eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter şart X vektörüne ortogonal olan her $Y \in T_p M$ için

$$B(X, Y) = D(X, Y) = 0 \quad \text{ve} \quad B(X, X) = \frac{n}{2} \mu_1, \quad D(X, X) = \frac{n}{2} \mu_2 \quad (4.3.27)$$

olmasıdır.

(c) Her $X \in S^1(TM)$ için (4.3.26) eşitsizliğinin eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter şart ya $S(TM)$, M de total geodezik ya da $n = 2$ ve $S(TM)$ nin M de total umbilik olmasıdır.

İspat. (4.3.24) ve (4.3.25) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}(\varphi n^2 \mu_1^2 + n^2 \mu_2^2) &= r(p) - \tilde{r}_{S(TM)}(p) + \frac{\varphi}{4}(B_{11} - \dots - B_{nn})^2 \\ &+ \varphi \sum_{j=2}^n (B_{1j})^2 - \varphi \sum_{2 \leq i < j \leq n} B_{ii} B_{jj} - (B_{ij})^2 \\ &+ \frac{1}{4}(D_{11} - \dots - D_{nn})^2 + \sum_{j=2}^n (D_{1j})^2 \\ &- \sum_{2 \leq i < j \leq n} D_{ii} D_{jj} - (D_{ij})^2 \end{aligned} \quad (4.3.28)$$

yazılabilir. Ayrıca

$$\varphi \sum_{2 \leq i < j \leq n} B_{ii} B_{jj} - (B_{ij})^2 + \sum_{2 \leq i < j \leq n} D_{ii} D_{jj} - (D_{ij})^2 = \sum_{2 \leq i < j \leq n} (K_{ij} - \tilde{K}_{ij}) \quad (4.3.29)$$

ve

$$\begin{aligned} \sum_{2 \leq i < j \leq n} K_{ij} &= r_{S(TM)}(p) - \text{Ric}_{S(TM)}(e_1), \\ \sum_{2 \leq i < j \leq n} \tilde{K}_{ij} &= \tilde{r}_{S(TM)}(p) - \widetilde{\text{Ric}}_{S(TM)}(e_1) \end{aligned} \quad (4.3.30)$$

dır. (4.3.28), (4.3.29) ve (4.3.30) eşitliklerinden

$$\frac{1}{4}(\varphi n^2 \mu_1^2 + n^2 \mu_2^2) \geq \frac{1}{\varphi}(\text{Ric}_{S(TM)}(e_1) - \widetilde{\text{Ric}}_{S(TM)}(e_1)) \quad (4.3.31)$$

olur. Böylece (4.3.31) da e_1 yerine $X \in S^1(TM)$ yazılacak olursa (4.3.26) eşitsizliği elde edilir.

$X \in S^1(TM)$ olsun. (4.3.26) eşitsizliğinin eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter şart

$$B_{12} = \cdots = B_{1n} = 0 \text{ ve } B_{11} = B_{22} + \cdots + B_{nn}$$

olmasıdır. Böylece

$$n\mu_1 = B_{11} + \cdots + B_{nn} = 2B_{11} \quad (4.3.32)$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$n\mu_2 = D_{11} + \cdots + D_{nn} = 2D_{11} \quad (4.3.33)$$

dir. (4.3.32) ve (4.3.33) eşitliklerinden (4.3.27) eşitliğine ulaşılır.

Her $X \in S^1(TM)$ için (4.3.26) eşitsizliğinin eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned} B_{ij} &= 0, \quad i \neq j, \\ 2B_{ii} &= B_{11} + \cdots + B_{nn}, \quad i \in \{1, \dots, n\} \end{aligned} \quad (4.3.34)$$

olmasıdır. (4.3.34) den

$$2B_{11} = 2B_{22} = \cdots = 2B_{nn} = \sum_{i=1}^n B_{ii}$$

olur. Böylece

$$(n-2) \sum_{i=1}^n B_{ii} = 0$$

elde edilir. Ayrıca, benzer şekilde

$$(n-2) \sum_{i=1}^n D_{ii} = 0$$

olduğu kolayca görülebilir. Buradan ya $\sum_{i=1}^n B_{ii} = \sum_{i=1}^n D_{ii} = 0$ ya da $n = 2$ dir. $\sum_{i=1}^n B_{ii} = \sum_{i=1}^n D_{ii} = 0$ ise (4.3.34) eşitliğinden her $i \in \{1, \dots, n\}$ için $B_{ii} = D_{ii} = 0$ elde edilir. Bu ise (4.3.34) eşitliği tekrar göz önüne alınacak olursa her $i, j \in \{1, \dots, n\}$ için $B_{ij} = D_{ij} = 0$ olduğunu yani $S(TM)$ nin M de total geodezik olduğunu gösterir.

Diğer taraftan $n = 2$ ise (4.3.34) eşitliğinden

$$2B_{11} = 2B_{22} = B_{11} + B_{22}$$

ve

$$2D_{11} = 2D_{22} = D_{11} + D_{22}$$

olur. Bu ise $S(TM)$ nin M de total umbilik olduğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Sonuç 4.3.8. M , sabit c eğrilikli $(\tilde{M}(c), \tilde{g})$ Lorentzian uzay formunun $\varphi > 0$ olacak şekilde $(n+1)$ -boyutlu bir ekran homotetik half-lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda $X \in S^1(TM) = \{X \in S(TM) : g(X, X) = 1\}$ olmak üzere

(a)

$$\frac{1}{4}(\varphi n^2 \mu_1^2 + n^2 \mu_2^2) \geq \frac{1}{\varphi}(\text{Ric}_{S(TM)}(X) - (n-1)c) \quad (4.3.35)$$

eşitsizliği vardır.

(b) $X \in S^1(TM)$ vektörü için (4.3.35) eşitsizliğinin eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter şart X vektörüne ortogonal olan her $Y \in T_p M$ için

$$B(X, Y) = D(X, Y) = 0 \quad \text{ve} \quad B(X, X) = \frac{n}{2} \mu_1, \quad D(X, X) = \frac{n}{2} \mu_2 \quad (4.3.36)$$

olmasıdır.

(c) Her $X \in S^1(TM)$ için (4.3.35) eşitsizliğinin eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter şart ya $S(TM)$ ekran distribüsyonu M de total geodezik ya da $n = 2$ ve $S(TM)$ ekran distribüsyonunun M de total umbilik olmasıdır.

5. COİSOTROPİK LIGHTLIKE ALTMANİFOLDLAR ÜZERİNDE CHEN TİPİ EŞİTSİZLİKLER

Bu bölüm üç alt bölümden oluşmaktadır. Birinci alt bölüm, diğer alt bölümlerin daha iyi anlaşılabilmesi için ve bir bütünlük arz etmesi açısından coisotropik lightlike altmanifoldlar ile ilgili temel kavramlara ayrılmıştır. Bu bölümde birinci alt bölüm hariç diğer alt bölümler bu bölümün orjinal kısımlarıdır.

5.1 Coisotropik Lightlike Altmanifoldlar

Bu kısımda coisotropik lightlike altmanifoldlarla ilgili temel tanım ve kavramlara yer verilecektir.

Tanım 5.1.1. $(\tilde{M}, \tilde{g})$, $(n+4)$ -boyutlu, 2 indeksli bir semi-Riemannian manifold ve $(\tilde{M}, \tilde{g})$ nin $(n+2)$ -boyutlu bir altmanifoldu M olsun. Eğer M nin radikal uzayı $Rad\ TM$ nin rankı 2 ye eşit ise M altmanifolduna $\tilde{M}$ nin bir *coisotropik altmanifoldu* denir [33].

Tanım 5.1.2. $M, (\tilde{M}_2^{(n+4)}, \tilde{g})$ semi-Riemann manifoldunun $(n+2)$ -boyutlu bir coisotropik altmanifoldu olsun. Bu durumda $\oplus_{orth}$ ortogonal direkt toplam olmak üzere $Rad\ TM$ nin

$$TM = Rad\ TM \oplus_{orth} S(TM) \quad (5.1.1)$$

olacak şekilde TM ye tamamlayıcı olan $S(TM)$ uzayına M nin *ekran distribusyonu* denir [33].

Tanım 5.1.3. $M, (\tilde{M}_2^{(n+4)}, \tilde{g})$ semi-Riemann manifoldunun $(n+2)$ -boyutlu bir coisotropik altmanifoldu olsun. Bu durumda $k, \ell \in \{1, 2\}$ için

$$\tilde{g}(\xi_k, \xi_\ell) = 0 \quad (5.1.2)$$

olacak şekilde $\xi_1, \xi_2 \in T_p M^\perp$ vardır. Her $X \in \Gamma(S(TM))$ ve $k \neq \ell \in \{1, 2\}$ olmak üzere $Rad\ TM$ nin ξ_1 ve ξ_2 gibi null vektörleri için

$$\tilde{g}(N_k, X) = \tilde{g}(N_k, N_\ell) = 0, \quad \tilde{g}(N_k, \xi_k) = 1 \quad (5.1.3)$$

olacak şekilde N_1 ve N_2 null vektörleri vardır. N_1 ve N_2 tarafından gerilen $ltr(TM)$ vektör demetine M nin $S(TM)$ ekran distribüsyonuna göre *lightlike transversal vektör demeti* denir [33]. Burada $ltr(TM)$ vektör demeti 2-boyutludur. Böylece

$$T\tilde{M} = S(TM) \oplus_{orth} (Rad\ TM \oplus ltr(TM)) \quad (5.1.4)$$

olarak yazılabilir.

Tanım 5.1.4. $M, (\tilde{M}_2^{(n+4)}, \tilde{g})$ semi-Riemann manifoldunun $(n+2)$ -boyutlu bir coisotropik altmanifoldu olsun. $\tilde{\nabla}$ ve ∇ , sırasıyla, $\tilde{M}$ ve M üzerindeki Levi-Civita ve lineer koneksiyonlar, P ise $\Gamma(TM)$ den $\Gamma(S(TM))$ ye bir projeksiyon olsun. Her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için Gauss ve Weingarten formulleri

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \sum_{k=1}^2 D^k(X, Y) N_k, \quad (5.1.5)$$

$$\tilde{\nabla}_X N_k = -A_{N_k} X + \sum_{\ell=1}^2 \rho_{k\ell}(X) N_\ell, \quad (5.1.6)$$

$$\nabla_X PY = \nabla_X^* PY + \sum_{k=1}^2 C^k(X, PY) \xi_k, \quad (5.1.7)$$

$$\nabla_X \xi_k = -A_{\xi_k}^* X - \sum_{\ell=1}^2 \rho_{ij}(X) \xi_\ell \quad (5.1.8)$$

dir [33]. Burada D^1 ve D^2 ye TM üzerinde *lightlike ikinci temel formlar* C^1 ve C^2 ye $S(TM)$ üzerinde *ekran ikinci temel formlar*; A_{N_1} ve A_{N_2} ye TM üzerinde *şekil operatörleri*; $A_{\xi_1}^*$ ve $A_{\xi_2}^*$ ye ise $S(TM)$ üzerinde *ekran ikinci temel formları* denir [33].

Tanım 5.1.5. $M, (\tilde{M}_2^{(n+4)}, \tilde{g})$ semi-Riemann manifoldunun $(n+2)$ -boyutlu bir coisotropik altmanifoldu olsun. Bu durumda M nin ikinci temel formu h ve ekran ikinci temel formu h^* , sırasıyla, her $X, Y \in TM$ için

$$h(X, Y) = \sum_{k=1}^2 D^k(X, Y) N_k \text{ ve } h^*(X, Y) = \sum_{k=1}^2 C^k(X, PY) \xi_k$$

ile tanımlanır [23].

Önerme 5.1.1. $M, (\tilde{M}_2^{(n+4)}, \tilde{g})$ semi-Riemann manifoldunun $(n+2)$ -boyutlu bir coisotropik altmanifoldu olsun. Bu durumda D^k , $S(TM)$ ekran distribüsyonunun

seçiminden bağımsızdır ve $k \neq \ell \in \{1, 2\}$ olmak üzere her $X \in \Gamma(TM)$ için

$$D^k(X, \xi_k) = 0 \quad \text{ve} \quad D^k(X, \xi_\ell) = -D^\ell(X, \xi_k) \quad (5.1.9)$$

dır [39].

Önerme 5.1.2. $M, (\tilde{M}_2^{(n+4)}, \tilde{g})$ semi-Riemann manifoldunun $(n+2)$ -boyutlu bir coisotropik altmanifoldu olsun. Bu durumda M nin şekil operatörleri ile ikinci temel formları arasında $k \in \{1, 2\}$ olmak üzere aşağıdaki bağıntılar vardır:

$$D^k(X, Y) = g(A_{\xi_k}^* X, Y), \quad (5.1.10)$$

$$C^k(X, PY) = g(A_{N_k} X, PY) \quad (5.1.11)$$

dır [39].

Örnek 5.1.1. R_2^5 de

$$x^3 = \cos x^1, \quad x^4 = \sin x^1, \quad x^5 = x^2, \quad (5.1.12)$$

ile tanımlı bir M yüzeyi verilsin. Bu durumda

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \partial_2 + \partial_5, \quad \xi_2 = \partial_1 - \sin x^1 \partial_3 + \cos x^1 \partial_4, \\ U_1 &= -\sin x^1 \partial_1 + \partial_3, \quad U_2 = \cos x^1 \partial_1 + \partial_4 \end{aligned} \quad (5.1.13)$$

ve

$$N_1 = \frac{1}{2} \{-\partial_2 + \partial_5\}, \quad N_2 = \frac{1}{2} \{-\partial_1 - \sin x^1 \partial_3 + \cos x^1 \partial_4\} \quad (5.1.14)$$

olmak üzere $S(TM) = Sp\{\xi_1, \xi_2, U_1, U_2\}$ ve $ltr(TM) = Sp\{N_1, N_2\}$ dir. Böylece $(M, g, S(TM)), R_2^5$ in bir coisotropik altmanifoldudur [23].

Tanım 5.1.6. $M, (\tilde{M}_2^{(n+4)}, \tilde{g})$ semi-Riemann manifoldunun $(n+2)$ -boyutlu bir coisotropik altmanifoldu olsun. Eğer her $X \in \Gamma(TM)$ için $\tilde{\nabla}_X \xi \in \Gamma(TM)$ ise M ye bir *irrasyonel coisotropik lightlike altmanifold* denir [34].

Tanım 5.1.7. $M, (\tilde{M}_2^{(n+4)}, \tilde{g})$ semi-Riemann manifoldunun $(n+2)$ -boyutlu bir coisotropik altmanifoldu olsun. Eğer her $k, \ell \in \{1, 2\}$ için

$$D^k(X, \xi_\ell) = 0 \quad (5.1.15)$$

ise M ye *total geodezik altmanifold*;

$$C^k(X, Y) = 0, \quad \forall X, Y \in \Gamma(S(TM)) \quad (5.1.16)$$

ise M ye $S(TM)$ -*total geodezik altmanifold* denir. H_1 ve H_2 , $ltr(TM)$ üzerinde diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere

$$D^k(X, Y) = H_k \tilde{g}(X, Y) \quad (5.1.17)$$

ise M ye *total umbilik altmanifold*; λ_k , $ltr(TM)$ üzerinde diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere

$$C^k(X, Y) = \lambda_k \tilde{g}(X, Y) \quad (5.1.18)$$

ise M ye $S(TM)$ -*total umbilik altmanifold* denir [40].

Şimdi

$$\mu_1 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n D^1(e_j, e_j) \quad \text{ve} \quad \mu_2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n D^2(e_j, e_j)$$

olarak tanımlansın [23].

C. Bejan ve K. L. Duggal [24] tarafından lightlike altmanifoldlar için yapılan minimallik tanımı göz önüne alınarak aşağıdaki önerme elde edilir:

Önerme 5.1.3. $M, (\tilde{M}_2^{(n+4)}, \tilde{g})$ semi-Riemann manifoldunun $(n+2)$ -boyutlu bir coisotropik altmanifoldu olsun. $\{e_1, \dots, e_n\}$, $\Gamma(S(TM))$ nin bir ortonormal bazı olsun. Bu durumda M nin minimal olması için gerek ve yeter şart

$$\mu_1 = \mu_2 = 0 \quad (5.1.19)$$

olmasıdır.

Tanım 5.1.8. $M, (\tilde{M}_2^{(n+4)}, \tilde{g})$ semi-Riemann manifoldunun $(n+2)$ -boyutlu bir coisotropik altmanifoldu olsun. M nin şekil operatörleri A_{N_k} ve lokal şekil operatörleri $A_{\xi_k}^*$ arasında $k \in \{1, 2\}$ için

$$A_{N_k} = \phi_k A_{\xi_k}^*, \quad (5.1.20)$$

olacak şekilde M nin bir U komşuluğu üzerinde sıfırdan farklı ϕ_k fonksiyonu varsa M ye bir *ekran lokal konformal coisotropik altmanifold* denir. Burada ϕ_k sıfırdan farklı bir sabit ise M ye bir *ekran homotetik coisotropik altmanifold* denir [41].

Önerme 5.1.4. $M, (\tilde{M}_2^{(n+4)}, \tilde{g})$ semi-Riemann manifoldunun $(n+2)$ -boyutlu bir coisotropik altmanifoldu olsun. Bu durumda her $X, Y \in \Gamma(TM)$ ve $k \in \{1, 2\}$ için

$$C^k(X, PY) = \phi_k D^k(X, Y) \quad (5.1.21)$$

dir [41].

Önerme 5.1.5. $M, (\tilde{M}_2^{(n+4)}, \tilde{g})$ semi-Riemann manifoldunun $(n+2)$ -boyutlu bir coisotropik altmanifoldu olsun. Bu durumda $\tilde{M}$ ve M nin Riemann eğrilik tensörleri, sırasıyla, $\tilde{R}$ ve R olmak üzere her $X, Y, Z, U \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} \tilde{R}(X, Y)Z &= R(X, Y)Z + \sum_{k=1}^2 D^k(X, Z)A_{N_k}Y - D^k(Y, Z)A_{N_k}X \\ &+ \sum_{k=1}^2 \{\nabla_X D^k(Y, Z) - \nabla_Y D^k(X, Z)\}N_k \\ &+ \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \{\rho_{kj}(X)D^k(Y, Z) - \rho_{kj}(Y)D^k(X, Z)\}N_j, \end{aligned} \quad (5.1.22)$$

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\tilde{R}(X, Y)PZ, PW) &= g(R(X, Y)PZ, PW) + \sum_{k=1}^2 [D^k(X, PZ)C^k(Y, PW) \\ &- D^k(Y, PZ)C^k(X, PW)], \end{aligned} \quad (5.1.23)$$

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\tilde{R}(X, Y)\xi_k, N_k) &= \tilde{g}(R(X, Y)\xi_k, N_k) + \sum_{\ell=1}^2 [\eta_k(A_{N_\ell}Y)D^\ell(X, \xi_k) \\ &- \eta_k(A_{N_\ell}X)D^\ell(Y, \xi_k)], \end{aligned} \quad (5.1.24)$$

$$\begin{aligned} \tilde{g}(R(X, Y)\xi_k, N_k) &= C^k(Y, A_{\xi_k}^*X) - C^k(X, A_{\xi_k}^*Y) - 2dp_{kk}(X, Y) \\ &+ \sum_{\ell=1}^2 \rho_{\ell k}(Y)\rho_{k\ell}(X) - \rho_{\ell k}(X)\rho_{k\ell}(Y) \end{aligned} \quad (5.1.25)$$

dir. Bu denklemlere M üzerinde Gauss-Codazzi tipi denklemleri denir [40].

Önerme 5.1.6. $M, (\tilde{M}_2^{(n+4)}, \tilde{g})$ semi-Riemann manifoldunun $(n+2)$ -boyutlu bir coisotropik altmanifoldu olsun. Bu durumda M nin Ricci tipi tensörü $R^{(0,2)}$ olmak üzere her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$R^{(0,2)}(X, Y) = \sum_{j=1}^n g(R(e_j, X)Y, e_j) + \sum_{k=1}^2 \tilde{g}(R(\xi_k, X)Y, N_k) \quad (5.1.26)$$

dir [40].

(5.1.26) de iz alınırsa

$$\tau(p) = \sum_{i,j=1}^n K_{ij} + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^2 K_{ik}^{null} + K_{iN}^k \quad (5.1.27)$$

olacak şekilde bir $\tau(p)$ skaları elde edilir. Eğer M nin Ricci tipi tensörü simetrik ise $\tau(p)$ ye M nin p noktasındaki skalar eğriliği denir [40]. Burada $i \in \{1, \dots, n\}$ ve $k \in \{1, 2\}$ için $K_{iN}^k = \tilde{g}(R(\xi_k, e_i)e_i, N_k)$ dir.

5.2 Coisotropik altmanifoldlar üzerinde ekran Ricci eğriliği ve ekran skalar eğriliği

Bu kısımda coisotropik altmanifoldlar üzerinde ekran Ricci eğriliği ve ekran skalar eğriliği tanımlanarak ekran skalar eğriliğinin katıldığı bazı eşitsizlikler kurulmuştur.

Tanım 5.2.1. $M, (\tilde{M}_2^{(n+4)}, \tilde{g})$ semi-Riemann manifoldunun $(n+2)$ -boyutlu bir coisotropik altmanifoldu, $\{e_1, \dots, e_n, \xi_1, \xi_2\}$, $\Gamma(TM)$ nin bir bazı ve $\{e_1, \dots, e_n\}$, $\Gamma(S(TM))$ nin bir ortonormal bazı olsun. $k \leq n$ için $\pi_{k, \xi_{1,2}} = Sp\{e_1, \dots, e_{k-1}, \xi_1, \xi_2\}$, $(k+1)$ -boyutlu bir dejenere düzlem kesiti ve $\pi_k = Sp\{e_1, \dots, e_k\}$ da k -boyutlu bir non-dejenere düzlem kesiti olmak üzere

$$Ric_{\pi_{k, \xi_{1,2}}}(X) = R^{(0,2)}(X, X) = \sum_{j=1}^k g(R(e_j, X)X, e_j) + \sum_{k=1}^2 \tilde{g}(R(\xi_k, X)X, N_k) \quad (5.2.1)$$

ve

$$Ric_{\pi_k}(X) = R^{(0,2)}(X, X) = \sum_{j=1}^k g(R(e_j, X)X, e_j) \quad (5.2.2)$$

ile tanımlı $Ric_{\pi_{k,\xi_{1,2}}}(X)$ ve $Ric_{\pi_k}(X)$ tensörlerine, sırasıyla, $X \in \Gamma(TM)$ birim vektörü doğrultusunda k -dejenere Ricci tipi tensörü ve k -Ricci tipi tensörü denir.

Eğer M nin kesit eğriliği simetrik ise $Ric_{\pi_{k,\xi_{1,2}}}(X)$ ve $Ric_{\pi_k}(X)$ e, sırasıyla, $X \in \Gamma(TM)$ birim vektörü doğrultusunda k -dejenere Ricci eğriliği ve k -Ricci eğriliği denir.

Ayrıca

$$\tau_{\pi_{k,\xi_{1,2}}}(p) = \sum_{i,j=1}^k K_{ij} + \sum_{k=1}^2 \sum_{i=1}^k K_{ik}^{null} + K_{iN}^k \quad (5.2.3)$$

ve

$$\tau_{\pi_k}(p) = \sum_{i,j=1}^k K_{ij} \quad (5.2.4)$$

eğriliklerine $p \in M$ noktasında k -dejenere skalar eğriliği ve k -skalar eğriliği denir.

$k = n$ için $\pi_n = Sp\{e_1, \dots, e_n\} = \Gamma(S(TM))$ olmak üzere

$$Ric_{S(TM)}(e_1) = Ric_{\pi_n}(e_1) = \sum_{j=1}^n K_{1j} = K_{12} + \dots + K_{1n} \quad (5.2.5)$$

ve

$$\tau_{S(TM)}(p) = \sum_{i,j=1}^n K_{ij} \quad (5.2.6)$$

dir. Bu durumda $Ric_{S(TM)}(e_1)$ eğriliğine e_1 doğrultusunda ekran Ricci eğriliği ve $\tau_{S(TM)}(p)$ ye ise $p \in M$ noktasında ekran skalar eğriliği denir.

Önerme 5.2.1. $M, (\tilde{M}_2^{(n+4)}, \tilde{g})$ semi-Riemann manifoldunun $(n+2)$ -boyutlu bir coisotropik altmanifoldu, $\{e_1, \dots, e_n, \xi_1, \xi_2\}$, $\Gamma(TM)$ nin bir bazı ve $\{e_1, \dots, e_n\}$, $\Gamma(S(TM))$ nin bir ortonormal bazı olsun. Bu durumda

$$\tau_{S(TM)}(p) = \tilde{\tau}_{S(TM)}(p) + \sum_{k=1}^2 \sum_{i,j=1}^n D_{ii}^k C_{jj}^k - D_{ij}^k C_{ji}^k \quad (5.2.7)$$

dir. Burada $i, j \in \{1, \dots, n\}$ ve $k \in \{1, 2\}$ için $D_{ij}^k = D^k(e_i, e_j)$ ve $C_{ij}^k = C^k(e_i, e_j)$ dir.

Önerme 5.2.2. $M, (\tilde{M}_2^{(n+4)}, \tilde{g})$ semi-Riemann manifoldunun $(n+2)$ -boyutlu bir coisotropik altmanifoldu, $\{e_1, \dots, e_n, \xi_1, \xi_2\}$, $\Gamma(TM)$ nin bir bazı ve $\{e_1, \dots, e_n\}$,

$\Gamma(S(TM))$ nin bir ortonormal bazı olsun. Bu durumda M nin ikinci temel formları D^k ve ekran ikinci temel formları C^k nın bileşenleri arasında

$$\sum_{i,j=1}^n D_{ij}^k C_{ji}^k = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i,j=1}^n (D_{ij}^k + C_{ji}^k)^2 - \sum_{i,j=1}^n (D_{ij}^k)^2 + (C_{ji}^k)^2 \right\} \quad (5.2.8)$$

ve

$$\sum_{i,j=1}^n D_{ii}^k C_{jj}^k = \frac{1}{2} \left\{ \left(\sum_{i,j=1}^n D_{ii}^k + C_{jj}^k \right)^2 - \left(\sum_{i=1}^n D_{ii}^k \right)^2 - \left(\sum_{j=1}^n C_{jj}^k \right)^2 \right\} \quad (5.2.9)$$

bağıntıları vardır.

Teorem 5.2.1. $M, (\tilde{M}_2^{(n+4)}, \tilde{g})$ semi-Riemann manifoldunun $(n+2)$ -boyutlu bir coisotropik altmanifoldu olsun. Bu durumda

a)

$$\tau_{S(TM)}(p) \leq \tilde{\tau}_{S(TM)}(p) + n \sum_{k=1}^2 \mu_k(izA_{N_k}) + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^2 \sum_{i,j=1}^n (D_{ij}^k - C_{ji}^k)^2 \quad (5.2.10)$$

eşitsizliği vardır. (5.2.10) eşitsizliğinin eşitlik durumunun her $p \in M$ noktasında sağlanması için gerek ve yeter şart her $k \in \{1, 2\}$ için ya M nin $\Phi_k = -1$ olacak şekilde bir ekran homotetik altmanifold ya da D^k nin $S(TM)$ de sıfıra eşit olmasıdır.

b)

$$\tau_{S(TM)}(p) \geq \tilde{\tau}_{S(TM)}(p) + n \sum_{k=1}^2 \mu_k(izA_{N_k}) - \frac{1}{4} \sum_{k=1}^2 \sum_{i,j=1}^n (D_{ij}^k + C_{ji}^k)^2 \quad (5.2.11)$$

eşitsizliği sağlanır. (5.2.11) eşitsizliğinin eşitlik durumunun her $p \in M$ noktasında sağlanması için gerek ve yeter şart her $k \in \{1, 2\}$ için ya M nin $\Phi_k = -1$ olacak şekilde bir ekran homotetik altmanifold ya da D^k nin $S(TM)$ de sıfıra eşit olmasıdır.

c) (5.2.10) ve (5.2.11) eşitsizliklerinin eşitlik durumunun her $p \in M$ noktasında sağlanması için gerek ve yeter şart her $k \in \{1, 2\}$ için D^k nin $S(TM)$ de sıfıra eşit olmasıdır.

İspat. (5.2.7) ve (5.2.8) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} \tau_{S(TM)}(p) &= \tilde{\tau}_{S(TM)}(p) + \sum_{k=1}^2 \sum_{i,j=1}^n D_{ii}^k C_{jj}^k - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 \left\{ \sum_{i,j=1}^n (D_{ij}^k + C_{ji}^k)^2 \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 \sum_{i,j=1}^n (D_{ij}^k)^2 + (C_{ji}^k)^2 \end{aligned}$$

yazılabilir. Burada

$$\frac{1}{2}(D_{ij}^k)^2 + \frac{1}{2}(C_{ji}^k)^2 = \frac{1}{4}(D_{ij}^k + C_{ji}^k)^2 + \frac{1}{4}(D_{ij}^k - C_{ji}^k)^2$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\tau_{S(TM)}(p) &= \tilde{\tau}_{S(TM)}(p) + n \sum_{k=1}^2 \mu_k(izA_{N_k}) - \frac{1}{4} \sum_{k=1}^2 \sum_{i,j=1}^n (D_{ij}^k + C_{ji}^k)^2 \\ &\quad + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^2 \sum_{i,j=1}^n (D_{ij}^k - C_{ji}^k)^2\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Sonuç 5.2.1. $M, (\tilde{M}_2^{(n+4)}, \tilde{g})$ semi-Riemann manifoldunun $(n+2)$ -boyutlu bir irrasyonel coisotropik altmanifoldu olsun. (5.2.10) ve (5.2.11) eşitsizliklerinin eşitlik durumunun her $p \in M$ noktasında sağlanması için gerek ve yeter şart M nin total geodezik olmasıdır.

Teorem 5.2.2. M, m ek-boyutlu bir $(\tilde{M}_2^{(n+4)}, \tilde{g})$ semi-Riemann manifoldunun $(n+2)$ -boyutlu bir coisotropik altmanifoldu olsun. M total geodezik ise M bir Einstein manifoldudur [39].

Sonuç 5.2.1 ve Teorem 5.2.2 den aşağıdaki sonuç verilebilir:

Sonuç 5.2.2. M, c eğrilikli $(\tilde{M}_2^{(n+4)}(c), \tilde{g})$ semi-Riemann uzay formunun $(n+2)$ -boyutlu bir irrasyonel coisotropik altmanifoldu olsun. Bu durumda

a)

$$\tau_{S(TM)}(p) \leq n(n-1)c + n \sum_{k=1}^2 \mu_k(izA_{N_k}) + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^2 \sum_{i,j=1}^n (D_{ij}^k - C_{ji}^k)^2 \quad (5.2.12)$$

eşitsizliği sağlanır.

b)

$$\tau_{S(TM)}(p) \geq n(n-1)c + n \sum_{k=1}^2 \mu_k(izA_{N_k}) - \frac{1}{4} \sum_{k=1}^2 \sum_{i,j=1}^n (D_{ij}^k + C_{ji}^k)^2 \quad (5.2.13)$$

eşitsizliği sağlanır.

c) (5.2.10) ve (5.2.11) eşitsizliklerinin eşitlik durumu her $p \in M$ noktasında sağlanıyorsa M bir Einstein manifoldudur.

Teorem 5.2.3. $M, (\tilde{M}_2^{(n+4)}, \tilde{g})$ semi-Riemann manifoldunun $(n+2)$ -boyutlu bir coisotropik altmanifoldu olsun. Bu durumda

$$\tau_{S(TM)}(p) \leq \tilde{\tau}_{S(TM)}(p) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 iz(\tilde{A}_{N_k})^2 + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^2 \sum_{i,j=1}^n (D_{ij}^k - C_{ji}^k)^2 \quad (5.2.14)$$

dir. Burada her $k \in \{1, 2\}$ için

$$\tilde{A}_{N_k} = \begin{pmatrix} D_{11}^k + C_{11}^k & \dots & D_{1n}^k + C_{1n}^k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{n1}^k + C_{n1}^k & \dots & D_{nn}^k + C_{nn}^k \end{pmatrix} \quad (5.2.15)$$

dır. (5.2.14) eşitsizliğinin eşitlik durumunun her $p \in M$ noktasında sağlanması için gerek ve yeter şart M nin minimal olmasıdır.

İspat. (5.2.7), (5.2.8) ve (5.2.9) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} \tau_{S(TM)}(p) &= \tilde{\tau}_{S(TM)}(p) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 \left(\sum_{i,j=1}^n D_{ii}^k + C_{jj}^k \right)^2 - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 \left(\sum_{i=1}^n D_{ii}^k \right)^2 \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 \left(\sum_{j=1}^n C_{jj}^k \right)^2 - \frac{1}{4} \sum_{k=1}^2 \sum_{i,j=1}^n (D_{ij}^k + C_{ji}^k)^2 \\ &\quad + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^2 \sum_{i,j=1}^n (D_{ij}^k - C_{ji}^k)^2 \end{aligned} \quad (5.2.16)$$

yazılabilir. Bu ise (5.2.14) eşitsizliğinin sağlandığını gösterir.

(5.2.14) eşitsizliğinin eşitlik durumunun her $p \in M$ noktasında sağlanması için gerek ve yeter şart

$$\mu_1 = \mu_2 = 0 \quad (5.2.17)$$

olmasıdır. Bu ise M nin minimal olduğunu gösterir. $\square$

Teorem 5.2.4. $M, (\tilde{M}_2^{(n+4)}, \tilde{g})$ semi-Riemann manifoldunun $(n+2)$ -boyutlu bir coisotropik altmanifoldu olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \tau_{S(TM)}(p) &\leq \tilde{\tau}_{S(TM)}(p) + \frac{(2n-1)}{4n} \sum_{k=1}^2 (iz\tilde{A}_{N_k})^2 - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 (izA_{N_k})^2 \\ &\quad - \frac{1}{2} n^2 \sum_{k=1}^2 \mu_k^2 + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^2 \sum_{i,j=1}^n (D_{ij}^k - C_{ji}^k)^2 \end{aligned} \quad (5.2.18)$$

eşitsizliği sağlanır. (5.2.18) eşitsizliğinin eşitlik durumunun her $p \in M$ noktasında sağlanması için gerek ve yeter şart her $k \in \{1, 2\}$ için $n\mu_k = -iz(A_{N_k})$ olmasıdır.

İspat. (5.2.16) ve Lemma 3.2.1 den

$$\begin{aligned}\tau_{S(TM)}(p) &\leq \tilde{\tau}_{S(TM)}(p) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 \left(\sum_{i,j=1}^n D_{ii}^k + C_{jj}^k \right)^2 - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 \left(\sum_{i=1}^n D_{ii}^k \right)^2 \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 \left(\sum_{j=1}^n C_{jj}^k \right)^2 - \frac{1}{4n} \sum_{k=1}^2 \left(\sum_{i=1}^n D_{ii}^k + C_{ii}^k \right)^2 \\ &\quad - \frac{1}{4} \sum_{k=1}^2 \sum_{i \neq j=1}^n (D_{ij}^k + C_{ji}^k)^2 + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^2 \sum_{i,j=1}^n (D_{ij}^k - C_{ji}^k)^2\end{aligned}$$

yazılabilir. Bu ise (5.2.18) eşitsizliğinin sağladığını gösterir.

(5.2.18) eşitsizliğinin eşitlik durumunun her $p \in M$ noktasında sağlanması için gerek ve yeter şart her $k \in \{1, 2\}$ ve her $i \neq j \in \{1, \dots, n\}$ için

$$\begin{aligned}D_{11}^k + C_{11}^k &= \dots = D_{nn}^k + C_{nn}^k, \\ D_{ij}^k &= -C_{ij}^k\end{aligned}$$

olmasıdır. Buradan $n\mu_k = -iz(A_{N_k})$ sonucuna ulaşılır ve ispat tamamlanır. $\square$

Sonuç 5.2.3. $M, (\tilde{M}_2^{(n+4)}, \tilde{g})$ semi-Riemann manifoldunun $(n+2)$ -boyutlu bir ekran homotetik coisotropik altmanifoldu olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}\tau_{S(TM)}(p) &\leq \tilde{\tau}_{S(TM)}(p) - \frac{n}{4} \sum_{k=1}^2 (\varphi_k + 1)^2 \mu_k^2 \\ &\quad + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^2 (\varphi_k - 1)^2 \sum_{i,j=1}^n (D_{ij}^k)^2\end{aligned} \tag{5.2.19}$$

eşitsizliği sağlanır. (5.2.19) eşitsizliğinin eşitlik durumunun her $p \in M$ noktasında sağlanması için gerek ve yeter şart her $X \in \Gamma(S(TM))$ ve her $k \in \{1, 2\}$ için $\mu_k = D^k(X, X)$ olmasıdır.

5.3 2-indeksli bir Semi-Riemann manifoldun coisotropik altmanifoldları üzerinde eğrilik invaryantları

Bu kısımda 2-indeksli bir Semi-Riemann manifoldun coisotropik altmanifoldları üzerinde eğrilik invaryantları ve $S(n_1, \dots, n_k)$ uzayı tanıtılacaktır.

Tanım 5.3.1. $n \geq 2$ ve $k \geq 0$ tamsayısı için $\mathcal{S}(n, k)$, $n_1 < n$, $n_j \geq 2$, $j = 1, \dots, k$ ve $n_1 + \dots + n_k \leq n$ olmak üzere bütün $(n_1, \dots, n_k)$ k -nokta çiftlerinden oluşan sonlu bir küme ve $\mathcal{S}(n)$ de $k \geq 0$ olmak üzere bütün $\mathcal{S}(n, k)$ kümelerinin bileşimi olsun. $\pi_1, \dots, \pi_{n_k}$, boy $\pi_{n_j} = n_j$, $(j = 1, \dots, k)$ her $(n_1, \dots, n_k) \in \mathcal{S}(n, k)$ k -lısı için $T_p M$ nin alt uzayları olmak üzere

$$S(n_1, \dots, n_k)(p) = \inf \{ \tau(\Pi_{n_1}) + \dots + \tau(\Pi_{n_k}) \},$$

$$\hat{S}(n_1, \dots, n_k)(p) = \sup \{ \tau(\Pi_{n_1}) + \dots + \tau(\Pi_{n_k}) \}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda eğrilik invaryantları

$$\delta(n_1, \dots, n_k)(p) = \tau(p) - S(n_1, \dots, n_k)(p),$$

$$\hat{\delta}(n_1, \dots, n_k)(p) = \tau(p) - \hat{S}(n_1, \dots, n_k)(p)$$

ile tanımlanır.

$M, (\tilde{M}_2^{(n+4)}, \tilde{g})$ semi-Riemann manifoldunun $(n+2)$ -boyutlu bir coisotropik altmanifoldu olsun. $S(n_1, \dots, n_k) = \hat{S}(n_1, \dots, n_k)$ ise $(M, g, S(TM))$ coisotropik lightlike atmanifolduna $S(TM)$ ye göre $S(n_1, \dots, n_k)$ uzayı denir.

Teorem 5.3.1. $M, (\tilde{M}_2^{(n+4)}, \tilde{g})$ semi-Riemann manifoldunun $(n+2)$ -boyutlu bir coisotropik altmanifoldu olsun. M bir $S(n)$ uzayı ise M nin skalar eğriliği sabittir. Ek olarak,

- i) $n = 2$ ise M nin skalar eğriliği sıfıra eşittir.
- ii) $n = 3$ ise M nin ekran skalar eğriliği sıfıra eşittir.

İspat. $\{e_1, \dots, e_n, \xi_1, \xi_2\}$, $\Gamma(TM)$ nin bir bazı ve $\{e_1, \dots, e_n\}$, $\Gamma(S(TM))$ nin bir ortonormal bazı olsun. $T_p M$ nin n -boyutlu düzlem kesitleri

$$\begin{aligned}\pi_{n-1}^1(\xi_1) &= Sp\{e_2, \dots, e_n, \xi_1\}, \quad \pi_{n-1}^1(\xi_2) = Sp\{e_2, \dots, e_n, \xi_2\}, \\ &\vdots \\ \pi_{n-1}^n(\xi_1) &= Sp\{e_1, \dots, e_{n-1}, \xi_1\}, \quad \pi_{n-1}^n(\xi_2) = Sp\{e_1, \dots, e_{n-1}, \xi_2\}, \\ \pi_n &= Sp\{e_1, \dots, e_n\}\end{aligned}$$

ile verilsin. (5.2.3) ve (5.2.4) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}\tau_{\pi_{n-1}^1(\xi_k)}(p) &= \sum_{i,j=2}^n K_{ij} + \sum_{i=2}^n K_{i\xi_k}^{null} + K_{i\xi_k}^N, \\ &\vdots \\ \tau_{\pi_{n-1}^n(\xi_k)}(p) &= \sum_{i,j=1}^{n-1} K_{ij} + \sum_{i=1}^{n-1} K_{i\xi_k}^{null} + K_{i\xi_k}^N, \\ \tau_{\pi_n}(p) &= \sum_{i,j=1}^n K_{ij} = \tau_{S(TM)}(p)\end{aligned}$$

yazılabilir. Eğer M bir $S(n)$ uzayı ise yukarıdaki eşitliklerden $i \in \{1, \dots, n\}$ için

$$K_{i\xi_1}^{null} + K_{i\xi_1}^N = K_{i\xi_2}^{null} + K_{i\xi_2}^N \quad (5.3.1)$$

elde edilir.

Şimdi, $p \in M$ için $T_p M$ nin n -boyutlu alt düzlem kesitleri

$$\pi_{n-1}^{i,j}(\xi_1, \xi_2) = Sp\{e_1, \dots, \tilde{e}_i, \dots, \tilde{e}_j, \dots, e_n, \xi_1, \xi_2\}$$

olarak verilsin. Bu durumda direkt bir hesaplama ile

$$\frac{(n-3)(n-2)}{2} \sum_{i,j=1}^n K_{ij} + \frac{(n-2)(n-1)}{2} \sum_{k=1}^2 \sum_{i=1}^n K_{i\xi_k}^{null} + K_{i\xi_k}^N = \frac{n(n-1)}{2} c$$

olur. Böylece

$$\sum_{k=1}^2 \sum_{i=1}^n K_{i\xi_k}^{null} + K_{i\xi_k}^N = \frac{(4n-6)}{(n-2)(n-1)} c \quad (5.3.2)$$

elde edilir. Bu ise M nin skalar eğriliğinin sabit olduğunu gösterir.

$n = 2$ ve $T_p M$ nin bir bazı $\{e_1, e_2, \xi_1, \xi_2\}$ olsun. Eğer M bir $S(2)$ uzayı ise bu durumda

$$\begin{aligned}\tau_{\Pi}(p) &= K_{12} + K_{21} = c, \\ \tau_{\Pi^1(\xi_k)}(p) &= K_{2\xi_k}^{null} + K_{2\xi_k}^N = c, \\ \tau_{\Pi^2(\xi_k)}(p) &= K_{1\xi_k}^{null} + K_{1\xi_k}^N = c, \\ \tau_{\Pi(\xi_1, \xi_2)}(p) &= 0\end{aligned}$$

olur. Burada $c = 0$ olduğundan M nin skalar eğriliği sıfırdır.

$n = 3$ ve $T_p M$ nin bir bazı $\{e_1, e_2, e_3, \xi_1, \xi_2\}$ olsun. Eğer M bir $S(3)$ uzayı ise $k \in \{1, 2\}$ ve birbirinden farklı $i, j, \ell \in \{1, 2, 3\}$ için

$$\sum_{k=1}^2 \sum_{i=1}^3 K_{i\xi_k}^{null} + K_{i\xi_k}^N = 3c \quad (5.3.3)$$

ve

$$\tau_{\Pi^\ell(\xi_k)}(p) = K_{ij} + K_{ji} + \sum_{i=1}^2 K_{i\xi_k}^{null} + K_{i\xi_k}^N = c \quad (5.3.4)$$

olur. (5.3.3) ve (5.3.4) eşitlikler kullanılırsa

$$K_{ij} + K_{ji} = 0 \quad (5.3.5)$$

olur. Bu ise $\tau_{S(TM)}(p) = 0$ olduğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Sonuç 5.3.1. $M, (R_2^7, \tilde{g})$ semi-Öklidyen uzayın 5-boyutlu bir ekran homotetik coisotropik altmanifoldu olsun. Eğer M bir $S(3)$ uzayı ise

$$\sum_{k=1}^2 \varphi_k n^2 \mu_k^2 \geq 0. \quad (5.3.6)$$

dır. (5.3.6) eşitsizliğinin eşitlik durumunun her $p \in M$ noktasında sağlanması için gerek ve yeter şart $S(TM)$ nin M de total geodezik olmasıdır.

İspat. (5.1.23) ve (5.3.5) den

$$\sum_{k=1}^2 \varphi_k \sum_{i,j=1}^3 D_{ii}^k D_{jj}^k - (D_{ij}^k)^2 = 0 \quad (5.3.7)$$

elde edilir. Bu ise (5.3.6) eşitsizliğinin doğruluğunu gösterir.

(5.3.6) eşitsizliğinin eşitlik durumunun her $p \in M$ noktasında sağlanması için gerek ve yeter şart her $i, j \in \{1, 2, 3\}$ ve her $k \in \{1, 2\}$ için $D_{ij}^k = 0$ olmasıdır. Böylece $S(TM)$, M de total geodezik olur ve ispat tamamlanır. $\square$

Teorem 5.3.2. $M, (\tilde{M}_2^{(n+4)}, \tilde{g})$ semi-Riemann manifoldunun $(n+2)$ -boyutlu bir coisotropik altmanifoldu olsun. Eğer M bir $S(n+1)$ uzayı ise M ekran skalar eğriliği sıfır olan 4-boyutlu bir coisotropik altmanifoldtur.

İspat. $\{e_1, \dots, e_n, \xi_1, \xi_2\}$, $\Gamma(TM)$ nin bir bazı ve $\{e_1, \dots, e_n\}$, $\Gamma(S(TM))$ nin bir ortonormal bazı olsun. $T_p M$ nin $(n+1)$ -boyutlu düzlem kesitleri

$$\begin{aligned}\pi_n(\xi_1) &= Sp\{e_1, \dots, e_n, \xi_1\}, \quad \pi_n(\xi_2) = Sp\{e_1, \dots, e_n, \xi_2\}, \\ \pi_n^1(\xi_1, \xi_2) &= Sp\{e_2, \dots, e_n, \xi_1, \xi_2\}, \dots, \pi_n^n(\xi_1, \xi_2) = Sp\{e_1, \dots, e_{n-1}, \xi_1, \xi_2\}\end{aligned}$$

ile verilsin. M bir $S(n+1)$ uzayı ise

$$\begin{aligned}\tau_{\pi_n(\xi_k)}(p) &= \sum_{i,j=1}^n K_{ij} + \sum_{i=1}^n K_{i\xi_k}^{null} + K_{i\xi_k}^N = c, \\ \tau_{\pi_n^1(\xi_1, \xi_2)}(p) &= \sum_{i,j=2}^n K_{ij} + \sum_{k=1}^2 \sum_{i=2}^n K_{i\xi_k}^{null} + K_{i\xi_k}^N = c, \\ &\vdots \\ \tau_{\pi_n^1(\xi_1, \xi_2)}(p) &= \sum_{i,j=1}^{n-1} K_{ij} + \sum_{k=1}^2 \sum_{i=1}^{n-1} K_{i\xi_k}^{null} + K_{i\xi_k}^N = c\end{aligned}$$

dir. Buradan

$$\sum_{i=1}^n K_{i\xi_1}^{null} + K_{i\xi_1}^N = \sum_{i=1}^n K_{i\xi_2}^{null} + K_{i\xi_2}^N, \quad (5.3.8)$$

$$\tau(p) + \tau_{S(TM)}(p) = 2c \quad (5.3.9)$$

ve

$$(n-2)\tau_{S(TM)}(p) + (n-1) \sum_{k=1}^2 \sum_{i=1}^n K_{i\xi_k}^{null} + K_{i\xi_k}^N = nc \quad (5.3.10)$$

elde edilir. Bu durumda

$$\tau(p) = \frac{n+2}{n}c, \quad \tau_{S(TM)}(p) = \frac{(2-n)}{n}c \quad (5.3.11)$$

ve

$$\sum_{k=1}^2 \sum_{i=1}^n K_{i\xi_k}^{null} + K_{i\xi_k}^N = \frac{4}{n}c \quad (5.3.12)$$

olur. Ayrıca

$$\begin{aligned} \tau(p) - \tau_{\pi_n^1(\xi_1, \xi_2)}(p) &= \sum_{k=1}^2 K_{1\xi_k}^{null} + K_{1\xi_k}^N, \\ &\vdots \\ \tau(p) - \tau_{\pi_n^n(\xi_1, \xi_2)}(p) &= \sum_{k=1}^2 K_{n\xi_k}^{null} + K_{n\xi_k}^N \end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece

$$\sum_{i=1}^n K_{i\xi_1}^{null} + K_{i\xi_1}^N + \sum_{i=1}^n K_{i\xi_2}^{null} + K_{i\xi_2}^N = 2c \quad (5.3.13)$$

olur. (5.3.11), (5.3.12) ve (5.3.13) eşitliklerinden $n = 2$ ve $\tau_{S(TM)}(p) = 0$ olduğu görülür ve ispat tamamlanır. $\square$

5.4 Ekran homotetik coisotropik altmanifoldlar üzerinde Chen-tipi eşitsizlikler

Bu kısımda ekran homotetik coisotropik altmanifoldların ekran Ricci eğriliği ve ekran skalar eğriliğinin katıldığı çeşitli eşitsizlikler kurulacaktır. Ayrıca bu eşitsizliklerin eşitlik durumları incelenecektir.

Önerme 5.4.1. $M, (\tilde{M}_2^{(n+4)}, \tilde{g})$ semi-Riemann manifoldunun $(n+2)$ -boyutlu bir ekran homotetik coisotropik altmanifoldu olsun. Bu durumda

$$\tau_{S(TM)}(p) = \tilde{\tau}_{S(TM)}(p) + \sum_{k=1}^2 \Phi_k \sum_{i,j=1}^n D_{ii}^k D_{jj}^k - (D_{ij}^k)^2 \quad (5.4.1)$$

dir.

İspat. (5.1.21) ve (5.2.7) eşitliklerinden önermenin ispatı açıktır. □

Teorem 5.4.1. $M, (\tilde{M}_2^{(n+4)}, \tilde{g})$ semi-Riemann manifoldunun $(n+2)$ -boyutlu bir ekran homotetik coisotropik altmanifoldu olsun. Bu durumda

a) Her $k = \{1, 2\}$ için $\varphi_k > 0$ ise

$$\tau_{S(TM)}(p) \leq \tilde{\tau}_{S(TM)}(p) + n^2 \sum_{k=1}^2 \varphi_k \mu_k^2 \quad (5.4.2)$$

eşitsizliği vardır. (5.4.2) eşitsizliğinin eşitlik durumunun her $p \in M$ noktasında sağlanması için gerek ve yeter şart $S(TM)$ nin M de total geodezik olmasıdır.

b) Her $k = \{1, 2\}$ için $\varphi_k < 0$ ise

$$\tau_{S(TM)}(p) \geq \tilde{\tau}_{S(TM)}(p) + n^2 \sum_{k=1}^2 \varphi_k \mu_k^2 \quad (5.4.3)$$

eşitsizliği sağlanır. (5.4.3) eşitsizliğinin eşitlik durumunun her $p \in M$ noktasında sağlanması için gerek ve yeter şart $S(TM)$ nin M de total geodezik olmasıdır.

c) $\varphi_1 > 0$ ve $\varphi_2 < 0$ ise

c₁)

$$\tau_{S(TM)}(p) \leq \tilde{\tau}_{S(TM)}(p) + n^2 \sum_{k=1}^2 \varphi_k \mu_k^2 - \sum_{i,j=1}^n \varphi_2 (D_{ij}^2)^2 \quad (5.4.4)$$

eşitsizliği vardır. (5.4.4) eşitsizliğinin eşitlik durumunun her $p \in M$ noktasında sağlanması için gerek ve yeter şart D^1 in $S(TM)$ de sıfıra eşit olmasıdır.

c₂)

$$\tau_{S(TM)}(p) \geq \tilde{\tau}_{S(TM)}(p) + \sum_{k=1}^2 \varphi_k n^2 \mu_k^2 - \sum_{i,j=1}^n \varphi_1 (D_{ij}^1)^2 \quad (5.4.5)$$

eşitsizliği sağlanır. (5.4.5) eşitsizliğinin eşitlik durumunun her $p \in M$ noktasında sağlanması için gerek ve yeter şart D^2 nin $S(TM)$ de sıfıra eşit olmasıdır.

Teorem 5.4.2. $M, (\tilde{M}_2^{(n+4)}, \tilde{g})$ semi-Riemann manifoldunun $(n+2)$ -boyutlu bir ekran homotetik coisotropik altmanifoldu olsun. Bu durumda

a) Her $k = \{1, 2\}$ için $\varphi_k > 0$ ise

$$\tau_{S(TM)}(p) \leq \tilde{\tau}_{S(TM)}(p) + n(n-1) \sum_{k=1}^2 \varphi_k \mu_k^2 \quad (5.4.6)$$

eşitsizliği vardır. (5.4.6) eşitsizliğinin eşitlik durumunun her $p \in M$ noktasında sağlanması için gerek ve yeter şart M nin total umbilik olmasıdır.

b) Her $k = \{1, 2\}$ için $\varphi_k < 0$ ise

$$\tau_{S(TM)}(p) \leq \tilde{\tau}_{S(TM)}(p) + n(n-1) \sum_{k=1}^2 \varphi_k \mu_k^2 - \sum_{k=1}^2 \varphi_k \sum_{i \neq j=1}^n (D_{ij}^k)^2 \quad (5.4.7)$$

eşitsizliği vardır. (5.4.7) eşitsizliğinin eşitlik durumunun her $p \in M$ noktasında sağlanması için gerek ve yeter şart her $X \in \Gamma(S(TM))$ birim vektörü ve $k = \{1, 2\}$ için $\mu_k = D^k(X, X)$ olmasıdır.

c) $\varphi_1 > 0$ ve $\varphi_2 < 0$ ise

$$\tau_{S(TM)}(p) \leq \tilde{\tau}_{S(TM)}(p) + n(n-1) \sum_{k=1}^2 \varphi_k \mu_k^2 - \varphi_2 \sum_{i \neq j=1}^n (D_{ij}^2)^2 \quad (5.4.8)$$

eşitsizliği sağlanır. (5.4.8) eşitsizliğinin eşitlik durumunun her $p \in M$ noktasında sağlanması için gerek ve yeter şart her $X, Y \in \Gamma(S(TM))$ için

$$D^1(X, Y) = \lambda_1 g(X, Y) \quad (5.4.9)$$

olmasıdır.

İspat. (5.4.1) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \tau_{S(TM)}(p) &= \tilde{\tau}_{S(TM)}(p) + n^2 \sum_{k=1}^2 \varphi_k \mu_k^2 - \sum_{k=1}^2 \varphi_k \sum_{i \neq j=1}^n (D_{ij}^k)^2 \\ &\quad - \sum_{k=1}^2 \varphi_k \sum_{i=1}^n (D_{ii}^k)^2 \end{aligned} \quad (5.4.10)$$

yazılabilir. Her $k = \{1, 2\}$ için $\varphi_k > 0$ ise (5.4.10) de Lemma 3.2.1 kullanılacak olursa (5.4.8) eşitsizliği elde edilir.

(5.4.6) eşitsizliğinin eşitlik durumunun her $p \in M$ noktasında sağlanması için gerek ve yeter şart $i \neq j \in \{1, \dots, n\}$ için

$$D_{11}^k = \dots = D_{nn}^k, \quad D_{ij} = 0$$

olmasıdır. Bu ise M nin total umbilik olduğunu gösterir. O halde teoremin (a) şıkkı ispatlanmış olur.

Teoremin (b) ve (c) şıklarının ispatı benzer şekilde yapılabilir. □

Teorem 5.4.3. $M, (\tilde{M}_2^{(n+4)}(c), \tilde{g})$ semi-Riemann uzay formunun bir hemen hemen total umbilik coisotropik altmanifoldu olsun. Eğer $S(TM)$ total geodezik ise bu durumda $c = 0$ dır [40].

Sonuç 5.4.1. $M, (\tilde{M}_2^{(n+4)}(c), \tilde{g})$ semi-Riemann uzay formunun $(n+2)$ -boyutlu bir ekran homotetik coisotropik altmanifoldu olsun. Bu durumda (5.4.2) ve (5.4.6) eşitsizliklerinin eşitlik durumunun her $p \in M$ noktasında sağlanması için gerek ve yeter şart $c = 0$ olmasıdır.

Teorem 5.4.4. $M, (\tilde{M}_2^{(n+4)}, \tilde{g})$ semi-Riemann manifoldunun $(n+2)$ -boyutlu $\varphi_k > 0$ olacak şekilde bir ekran homotetik coisotropik altmanifoldu olsun. Bu durumda her $k \in \{1, 2\}$ için $D^k(\pi^\perp)^2 = \sum_{i=3}^n (D_{ii}^k)^2$ olmak üzere

$$\begin{aligned} 2\tau_{S(TM)}(p) - \tau(\Pi) &\leq 2\tilde{\tau}_{S(TM)}(p) - \tilde{\tau}(\Pi) + \left(\frac{n^2(n-2)}{n-1} + 1 \right) \sum_{k=1}^2 \varphi_k \mu_k^2 \\ &\quad + \sum_{k=1}^2 \varphi_k D^k(\pi^\perp)^2 - \sum_{k=1}^2 \varphi_k \sum_{i,j=1}^n (D_{ij}^k)^2 \end{aligned} \quad (5.4.11)$$

eşitsizliği vardır. (5.4.11) eşitsizliğinin eşitlik durumunun her $p \in M$ noktasında sağlanması için gerek ve yeter şart M nin minimal ve M nin lokal şekil operatörü $A_{\xi_k}^*$ in

$$A_{\xi_k}^* = \begin{pmatrix} D_{11}^k & D_{12}^k & \dots & 0 \\ D_{21}^k & -D_{11}^k & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (5.4.12)$$

şeklinde olmasıdır.

İspat. (5.4.1) eşitliğinde

$$\delta_1 = \tau_{S(TM)}(p) - \varphi_1 \frac{n^2(n-2)}{n-1} \mu_1^2 - \varphi_2 n^2 \mu_2^2 - \tilde{\tau}_{S(TM)}(p) + \varphi_2 \sum_{i,j=1}^n (D_{ij}^2)^2$$

yazılırsa

$$\delta_1 = \varphi_1 \left(\frac{n^2}{n-1} \mu_1^2 - \sum_{i,j=1}^n (D_{ij}^1)^2 \right)$$

elde edilir. Böylece

$$\left(\sum_{i=1}^n D_{ii}^1\right)^2 = (n-1) \left(\frac{\delta_1}{\varphi_1} + \sum_{i=1}^n (D_{ii}^1)^2 + \sum_{i \neq j=1}^n (D_{ij}^1)^2 \right)$$

olur. Yukarıdaki eşitlikte Lemma 3.4.3 kullanılacak olursa

$$2D_{11}^1 D_{22}^1 \geq \frac{\delta_1}{\varphi_1} + \sum_{i \neq j=1}^n (D_{ij}^1)^2$$

bulunur. Benzer şekilde (5.4.1) eşitliğinde

$$\begin{aligned} \delta_2 &= \tau_{S(TM)}(p) - \varphi_2 \frac{n^2(n-2)}{n-1} \mu_2^2 - \varphi_1 n^2 \mu_1^2 \\ &\quad - \tilde{\tau}_{S(TM)}(p) + \varphi_1 \sum_{i,j=1}^n (D_{ij}^1)^2 \end{aligned}$$

yazılırsa

$$2D_{11}^2 D_{22}^2 \geq \frac{\delta_2}{\varphi_2} + \sum_{i \neq j=1}^n (D_{ij}^2)^2$$

elde edilir. Π , $T_p M$ nin e_1 ve e_2 ortonormal vektörleri tarafında gerilen bir alt düzlemi olmak üzere

$$\begin{aligned} \tau(\Pi) &= \tilde{\tau}(\Pi) + \sum_{k=1}^2 \varphi_k \sum_{i,j=1}^2 D_{ii}^k D_{jj}^k - (D_{ij}^k)^2 \\ &\geq \tilde{\tau}(\Pi) + \delta_1 + \delta_2 + \sum_{k=1}^2 \varphi_k \sum_{i \neq j=1}^n (D_{ij}^k)^2 - \sum_{k=1}^2 \varphi_k \sum_{i \neq j=1}^2 (D_{ij}^k)^2 \\ &\geq \tilde{\tau}(\Pi) + \delta_1 + \delta_2 + \sum_{k=1}^2 \varphi_k \sum_{i,j=1}^n (D_{ij}^k)^2 - \sum_{k=1}^2 \varphi_k \sum_{i=1}^n (D_{ii}^k)^2 \\ &\quad - \sum_{k=1}^2 \varphi_k \sum_{i \neq j=1}^2 (D_{ij}^k)^2 \\ &\geq \tilde{\tau}(\Pi) + \delta_1 + \delta_2 - \sum_{k=1}^2 \varphi_k \sum_{i=3}^n (D_{ii}^k)^2 \end{aligned}$$

dir. Bu ise (5.4.11) eşitsizliğinin doğruluğunu gösterir.

(5.4.11) eşitsizliğinin eşitlik durumunun her $p \in M$ noktasında sağlanması için gerek ve yeter koşul her $k \in \{1, 2\}$ ve her $i, j \in \{3, \dots, n\}$ için

$$\begin{aligned} D_{ij}^k &= 0, \\ D_{11}^k + D_{22}^k &= D_{33}^k = 0 \end{aligned} \tag{5.4.13}$$

olmasıdır. Bu ise M nin minimal olduğunu ve M nin lokal şekil operatörü $A_{\xi_k}^*$ ın (5.4.12) eşitliği ile verilebileceğini gösterir. $\square$

Sonuç 5.4.2. $M, (R_2^{n+4}, \tilde{g})$ semi-Öklidyen uzayının $(n+2)$ -boyutlu $\varphi_k > 0$ olacak şekilde bir ekran homotetik coisotropik altmanifoldu olsun. Bu durumda her $k \in \{1, 2\}$ için $D^k(\pi^\perp)^2 = \sum_{i=3}^n (D_{ii}^k)^2$ olmak üzere

$$\tau_{S(TM)}(p) - \tau(\Pi) - \sum_{k=1}^2 \varphi_k D^k(\pi^\perp)^2 \leq \left(\frac{n^2(n-2)}{n-1} + 1 \right) \sum_{k=1}^2 \varphi_k \mu_k^2 \quad (5.4.14)$$

eşitsizliği vardır. (5.4.14) eşitsizliğinin eşitlik durumunun her $p \in M$ noktasında sağlanması için gerek ve yeter şart $S(TM)$ nin total geodezik olmasıdır.

Sonuç 5.4.3. $M, (R_2^{n+4}, \tilde{g})$ semi-Öklidyen uzayının $(n+2)$ -boyutlu $\varphi_k > 0$ olacak şekilde bir ekran homotetik coisotropik altmanifoldu olsun. Bu durumda her $k \in \{1, 2\}$ için $D^k(\pi^\perp)^2 = \sum_{i=3}^n (D_{ii}^k)^2$ olmak üzere

$$\tau_{S(TM)}(p) - \tau(\Pi) - \varphi \sum_{k=1}^2 D^k(\pi^\perp)^2 < \left(\frac{n^2(n-2)}{n-1} + 1 \right) \sum_{k=1}^2 \varphi_k \mu_k^2 \quad (5.4.15)$$

eşitsizliği varsa M minimal olan bir immersiyona katılmaz.

Ekran konformal coisotropik altmanifoldların kesit eğriliği simetrik olduğundan bu altmanifoldların ekran skalar eğriliği $r_{S(TM)}$ ile gösterilir ve

$$r_{S(TM)}(p) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} K_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n K_{ij} = \frac{1}{2} \tau_{S(TM)}(p) \quad (5.4.16)$$

ile tanımlanır.

Önerme 5.4.2. $M, (R_2^{n+4}, \tilde{g})$ semi-Öklidyen uzayının $(n+2)$ -boyutlu $\varphi_k > 0$ olacak şekilde bir ekran homotetik coisotropik altmanifoldu olsun. Bu durumda her $k \in \{1, 2\}$ için

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n (B_{ij})^2 &= \frac{1}{2} n^2 \mu^2 + \frac{1}{2} (B_{11} - B_{22} - \dots - B_{nn})^2 \\ &+ 2 \sum_{j=2}^n (B_{1j})^2 - 2 \sum_{2 \leq i < j \leq n} B_{ii} B_{jj} - (B_{ij})^2 \end{aligned} \quad (5.4.17)$$

dır.

Teorem 5.4.5. $M, (R_2^{n+4}, \tilde{g})$ semi-Öklidyen uzayının $(n+2)$ -boyutlu $\varphi_k > 0$ olacak şekilde ekran homotetik bir coisotropik altmanifoldu olsun. $X \in S^1(TM) = \{X \in S(TM) : g(X, X) = 1\}$ olmak üzere

(a)

$$\frac{1}{4} \sum_{k=1}^2 \varphi_k n^2 \mu_k^2 \geq \frac{1}{\varphi} (\text{Ric}_{S(TM)}(X) - \widetilde{\text{Ric}}_{S(TM)}(X)) \quad (5.4.18)$$

eşitsizliği vardır.

(b) $X \in S^1(TM)$ olmak üzere (5.4.18) eşitsizliğinin eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter şart X e ortogonal olan her $Y \in T_p M$ ve $k \in \{1, 2\}$ için

$$D^k(X, Y) = 0 \text{ ve } D^k(X, X) = \frac{n}{2} \mu_k \quad (5.4.19)$$

olmasıdır.

(c) Her $X \in S^1(TM)$ olmak üzere (5.4.18) eşitsizliğinin eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter şart ya $S(TM)$ nin M de total geodezik ya da $n = 2$ ve M nin total umbilik olmasıdır.

İspat. (5.4.16) ve (5.4.17) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \sum_{k=1}^2 \varphi_k n^2 \mu_k^2 &= r(p) - \tilde{r}_{S(TM)}(p) + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^2 \varphi_k (D_{11}^k - \dots - D_{nn}^k)^2 \\ &+ \sum_{k=1}^2 \varphi_k \sum_{j=2}^n (D_{1j}^k)^2 - \sum_{k=1}^2 \varphi_k \sum_{2 \leq i < j \leq n} D_{ii}^k D_{jj}^k - (D_{ij}^k)^2 \end{aligned} \quad (5.4.20)$$

yazılabilir. Bununla birlikte

$$\sum_{k=1}^2 \varphi_k \sum_{2 \leq i < j \leq n} D_{ii}^k D_{jj}^k - (D_{ij}^k)^2 = \sum_{2 \leq i < j \leq n} (K_{ij} - \tilde{K}_{ij}) \quad (5.4.21)$$

ve

$$\begin{aligned} \sum_{2 \leq i < j \leq n} K_{ij} &= r_{S(TM)}(p) - \text{Ric}_{S(TM)}(e_1), \\ \sum_{2 \leq i < j \leq n} \tilde{K}_{ij} &= \tilde{r}_{S(TM)}(p) - \widetilde{\text{Ric}}_{S(TM)}(e_1) \end{aligned} \quad (5.4.22)$$

dır. (5.4.20), (5.4.21) ve (5.4.22) eşitliklerinden

$$\frac{1}{4} \sum_{k=1}^2 \Phi_k n^2 \mu_k^2 \geq Ric_{S(TM)}(e_1) - \widetilde{Ric}_{S(TM)}(e_1) \quad (5.4.23)$$

elde edilir. Son ifadede e_1 yerine $X \in S^1(TM)$ yazılacak olursa (5.4.18) eşitsizliği elde edilir.

$X \in S^1(TM)$ olmak üzere (5.4.18) eşitsizliğinin eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter şart $k \in \{1, 2\}$ için

$$D_{12}^k = \dots = D_{1n}^k = 0 \text{ ve } D_{11}^k = D_{22}^k + \dots + D_{nn}^k \quad (5.4.24)$$

olmasıdır. Böylece

$$n\mu_1 = D_{11}^1 + \dots + D_{nn}^1 = 2D_{11}^1 \quad (5.4.25)$$

olur. Benzer şekilde

$$n\mu_2 = D_{11}^2 + \dots + D_{nn}^2 = 2D_{11}^2 \quad (5.4.26)$$

dir. (5.4.25) ve (5.4.26) eşitliklerinden (5.4.19) elde edilir.

her $X \in S^1(TM)$ olmak üzere (5.4.18) eşitsizliğinin eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter şart $k \in \{1, 2\}$ için

$$\begin{aligned} D_{ij}^k &= 0, \quad i \neq j, \\ 2D_{ii}^k &= D_{11}^k + \dots + D_{nn}^k, \quad i \in \{1, \dots, n\} \text{ ve } k \in \{1, 2\} \end{aligned} \quad (5.4.27)$$

olmasıdır. (5.4.27) den

$$2D_{11}^k = 2D_{22}^k = \dots = 2D_{nn}^k = \sum_{i=1}^n D_{ii}^k$$

elde edilir ki bu

$$(n-2) \sum_{i=1}^n D_{ii}^k = 0$$

olduğunu gösterir. Buradan ya $\sum_{i=1}^n D_{ii}^1 = \sum_{i=1}^n D_{ii}^2 = 0$ ya da $n = 2$ dir. $\sum_{i=1}^n D_{ii}^1 = \sum_{i=1}^n D_{ii}^2 = 0$ ise (5.4.27) eşitliğinden her $i \in \{1, \dots, n\}$ ve $k \in \{1, 2\}$ için $D_{ii}^k = 0$ olur. Bu ise (5.4.27)

eşitliği tekrar göz önüne alınacak olursa her $i, j \in \{1, \dots, n\}$ ve her $k \in \{1, 2\}$ için $D_{ij}^k = 0$ yani $S(TM)$ nin M de total geodezik olduğunu gösterir.

$n = 2$ ise (5.4.27) eşitliğinden

$$2D_{11}^k = 2D_{22}^k = D_{11}^k + D_{22}^k$$

olur. Bu ise M nin total umbilik olduğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

KAYNAKLAR

- [1] Schläfli L. (1873). Nota alla Memoria del signor Beltrami Sugli spazi di curvatura costante. *Ann. Mat. Pura. Appl.* **2(5)**, 178-193.
- [2] Janet M. (1926). Sur la possibilit'e de plonger un espace Riemannian donn'e dans un espace Euclidien. *Ann. Soc. Pol. Math.* **5**, 38-43.
- [3] Cartan E. (1927). Sur la possibilit'e de plonger un espace Riemannian donn'e dans un espace Euclidien. *Ann. Soc. Pol. Math.* **6**, 1-7, 19-27.
- [4] Nash J. F. (1956). The imbedding problem for Riemannian manifolds. *Annals of Mathematics* **63(1)**, 20-63.
- [5] Friedman A. (1965). Isometric embedding of Riemannian manifolds into Euclidean spaces. *Rev. Modern Phys.* **37**, 201-203.
- [6] Cartan E. (1951). *Leçons sur la Géométrie des Espaces de Riemann*. (2nd edition) Gauthier-Villars, Paris.
- [7] Chen B.-Y. (1993). Some pinching and classification theorems for minimal submanifolds. *Arch. Math. (Basel)* **60(6)**, 568-578.
- [8] Chen B.-Y. (1996). Mean curvature and shape operator of isometric immersions in real space forms. *Glasgow Math. J.* **38**, 87-97.
- [9] Chen B.-Y. (1999). Relations between Ricci curvature and shape operator for submanifolds with arbitrary codimension. *Glasgow Math. J.* **41**, 33-41.
- [10] Chen B.-Y. (2000). Some new obstructions to minimal and Lagrangian isometric immersions. *Japan. J. Math.* **26**, 105-127.
- [11] Matsumoto K., Mihai I., Oiaga A. (2000). Shape operator for slant submanifolds in complex space forms. *Bull. Yamagata Univ. Natur. Sci.* **14**, no. 4, 169-177.

- [12] Oiaga A., Mihai I. (1999). B. Y. Chen inequalities for slant submanifolds in complex space forms. *Demonstratio Math.* **32**, no. 4, 835-846.
- [13] Tripathi M. M. (2006). Certain basic inequalities for submanifolds. *Proceedings of the Tenth International Workshop on Differential Geometry, Kyungpook Nat. Univ., Taegu* 99-145.
- [14] Tripathi M. M. (2008) Chen-Ricci inequality for submanifolds of contact metric manifolds. *J. Adv. Math. Stud.* **1**, no.1-2, 111-134.
- [15] Haesen S. (2005). Optimal inequalities for embedded space-times. *Kragujevac J. Math.* **28**, 69-85.
- [16] Haesen S., Sebekovic A., Verstraelen L. (2003). Relations between intrinsic and extrinsic curvatures. *Kragujevac J. Math.* **25**, 139-145.
- [17] Chen B.-Y. (2011). *Pseudo-Riemannian geometry, δ -invariants and applications*. World Scientific Publishing, Hackensack, NJ.
- [18] Kulkarni R. S. (1979). The values of sectional curvature in indefinite metric. *Comment. Math. Helvetici* **54**, 173-176.
- [19] Dajczer M., Nomuzi K. (1980). On the boundedness of Ricci curvature of an indefinite metric. *Bol. Soc. Brasil. Mat.* **11**, 25-30.
- [20] O'Neil B. (1983). *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*. Academic Press.
- [21] Duggal K. L., Bejancu A. (1996). *Lightlike submanifolds of semi-Riemannian manifolds and applications*. Kluwer Academic Publisher. **364**.
- [22] Rosca R. (1972). On null Hypersurfaces of a Lorentzian manifold *Tensor (N.S.)*. **23**, 66-74.
- [23] Duggal K. L., Sahin B. (2010). *Differential Geometry of lightlike submanifolds*. Birkhuser Verlag AG.

- [24] Bejan C. L., Duggal K. L. (2005). Global lightlike manifolds and harmonicity. *Kodai Math. J.* **28**, 131-145.
- [25] Atindogbe C., Duggal K. L. (2004). Conformal screen on lightlike hipersurfaces. *Int. J. of Pure and App. Math.* **11**, no:4, 421-441.
- [26] Beem J. K., Ehrlich P. E., Easley K. L. (1996). *Global Lorentzian Geometry*. 2nd edn. Dekker, New York.
- [27] Duggal K. L. (2007). On scalar curvature in lightlike geometry. *J. Geom. Phys.* **57**, 473-481.
- [28] Tripathi M. M. (2003). Certain basic inequalities for submanifolds in (κ, μ) -space. *Recent advances in Riemannian and Lorentzian geometries (Baltimore, MD)* 187-202.
- [29] Chen B.-Y., Dillen F., Verstraelen L., Vrancken V. (2000). Characterizations of Riemannian space forms, Einstein spaces and conformally flat spaces. *Proc. Am. Math. Soc.* **128**, 589-598.
- [30] De Smet P. J. , Dillen F., Verstraelen L., Vrancken L. (1999). A pointwise inequality in submanifold theory. *Arch. Math. (Brno)* **35(2)**, 115-128.
- [31] Chen B.-Y. (2002). Ricci curvature of real hypersurfaces in complex hyperbolic space. *Arch. Math. (Brno)* **38(1)**, 73-80.
- [32] Duggal K. L., Bejancu A. (1992). Lightlike submanifolds of codimension two. *Math. J. Toyama Univ.* **15**, 59-82.
- [33] Duggal K. L., Jin D. H. (1999). Half lightlike submanifolds of codimension 2. *Math. J. Toyama Univ.* **22**, 121-161.
- [34] Kupeli D. N., (1999). *Singular Semi-Riemannian Geometry*. Kluwer Academic. **366**, 1996.

- [35] Duggal K. L., Sahin B. (2004). Screen conformal half-lightlike submanifolds. *Int. J. Math. and Math. Sci.* **68**, 3737-3753.
- [36] Jin D. H. (2010). Geometry of screen conformal real half-lightlike submanifolds. *Bull. Korean Math. Soc.* **47**, no:4, 701-714.
- [37] Jin D. H. (2011). Geometry of half lightlike submanifolds of a Semi-Riemannian space form with a semi-symmetric non-metric connection. *J. of the Chungcheong Math. Soc.* **24**, **47**, no:4, 701-714, 2010.
- [38] Jin D. H. (2010). Half Lightlike submenifolds with totally umbilical screen distributions. *J. Korean Soc. Math. Educ. Ser:B Pure Appl. Math.* **17**, 29-38.
- [39] Kılıç E., Şahin B., Karadağ, H. B., Guneş R., (2004). Coisotropic submanifolds of a semi-Riemannian manifold. *Turkish J. Math.* **28**, 335-352.
- [40] Jin D. H. (2001). Geometry of coisotropic submanifolds. *J. Korea Soc. Math. Educ. Ser. B: Pure Appl. Math.* **8**, no. 1, 33-46.
- [41] Duggal K. L. (2008). On existence of canonical screens for coisotropic submanifolds. *Int. Electronic J. Geom.* **1**, No. 1, 25-32.

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad : Mehmet GÜLBAHAR

Doğum Yeri ve Tarihi : Diyarakır, 17.06.1985

Adres : İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü,
MALATYA

E-Posta : mehmet.gulbahar@inonu.edu.tr

Lisans : Adıyaman Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü

Yüksek Lisans : İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik

Ana Bilim Dalı Geometri Bilim Dalı

Mesleki Deneyim ve Ödüller : 1- Siirt Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi

Matematik Bölümü ÖYP Araştırma Görevlisi (2010-Halen),

2-İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümü

Araştırma Görevlisi (2011-Halen),

3- TÜBİTAK 113F388 numaralı 'Lightlike altmanifoldlar üzerine Chen-tipi eşitsizlikler' adlı projede Bursiyer (Mart 2014-Halen).

Yayın Listesi : 1- **Gülbahar M.**, Kılıç E., Keleş S. (2012). Chen-Ricci inequality on bi-slant submanifolds of an almost Hermitian manifold. Balıkesir Üniversitesi X. Geometri Sempozyumu, Balıkesir.

2- **Gülbahar M.**, Kılıç E., Keleş S. (2013). On Ricci curvature of Lagrangian submanifolds in quaternion space forms. Ordu Üniversitesi XI. Geometri Sempozyumu.

3- Eken S., **Gülbahar M.**, Keleş S. (2014). Some inequalities for Riemannian submersions. Conference Riemannian Geometry and Applications to Engineering and Economics 'RIGA' Bucharest.

4- **Gülbahar M.**, Kılıç E., Keleş S. (2014). B.-Y. Chen inequalities on bi-slant submanifolds of an almost Hermitian manifold. Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi, XII.Geometri Sempozyumu, Bilecik.

5- **Gülbahar M.**, Kılıç E., Keleş S., Tripathi M. M. (2014). Some basic inequalities for submanifolds of nearly quasi-constant curvature manifolds, *Diferential Goemetry and Dinamical Systems*, 16, 156-167.

TEZDEN TÜRETİLEN YAYINLAR/SUNUMLAR :

- 1- **Gülbahar M.**, Kılıç E., Keleş S.,(2013). Chen-like inequalities on lightlike hypersurfaces of a Lorentzian manifold *Journal of Inequalities and Application*, 2013, 2013:266.
- 2- **Gülbahar M.**, Kılıç E., Keleş S., (2013). Some inequalities on screen homothetic lightlike hypersurface of a Lorentzian manifold *Taiwanese Journal of Mathematics*, Doi: 10.11650/tjm.17.2013.3185.
- 3- Kılıç E., **Gülbahar M.**, Keleş S., (2013). Certain basic inequalities on lightlike hypersurfaces of a Lorentzian manifold. Ordu Üniversitesi XI. Geometri Sempozyumu.
- 4- **Gülbahar M.**, Keleş S., Kılıç E., (2013). Scalar curvature of screen homothetic lightlike hypersurface of a Lorentzian manifold. II. Uluslararası Avrasya Matematik Bilimleri ve Uygulamaları Konferansı (IECMSA-2013).
- 5- Kılıç E., **Gülbahar M.**, Keleş S., (2014). Some characterizations on screen locally conformal coisotropic lightlike submanifolds of a semi-Riemannian manifold of index 2. Conference Riemannian Geometry and Applications to Engineering and Economics, 'RIGA'.
- 6- Kılıç E., **Gülbahar M.**, Keleş S., (2014). Screen Ricci curvature on screen locally conformal half lightlike submanifolds of a Lorentzian manifold. Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi XII.Geometri Sempozyumu, Bilecik.