

**ARALIK MATRİS OYUNLARIN ÇÖZÜMLERİ**

Birgöl AKSOY

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Ocak – 2014

## JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

**Birgöl AKSOY**'un "**Aralık Matris Oyunların Çözümleri**" başlıklı **Matematik** Anabilim Dalındaki, Yüksek Lisans Tezi 30 /12 /2013 tarihinde, aşağıdaki jüri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

	Adı Soyadı	İmza
Üye (Tez Danışmanı)	: Doç. Dr. Serkan Ali DÜZCE	.....
Üye	: Doç. Dr. Handan AKYAR	.....
Üye	: Doç. Dr. Sevil ŞENTÜRK	.....

Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun  
..... tarih ve ..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü

# ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

## ARALIK MATRİS OYUNLARIN ÇÖZÜMLERİ

Birgül AKSOY

Anadolu Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Serkan Ali DÜZCE

2014, 71 Sayfa

Bu tezde, öncelikle iki kişilik sıfır toplamı sonlu oyunlar diğer bir deyişle matris oyunlar incelenmiş, temel tanım ve teoremler verilmiştir. Ayrıca matris oyunların çözümleri araştırılmıştır. Aralık tanımı ve aralıklarla ilgili temel aritmetik işlemler ifade edilmiş, aralık karşılaştırması için bir sıralama bağıntısı tanımlanmıştır. Daha sonra matris oyunlar aralık matris oyunlara genelleştirilmiştir. Aralık matris oyunlar ile ilgili temel tanım ve teoremler verilmiş,  $2 \times n$  aralık matris oyunların çözümleri incelenmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Matris Oyunlar, Denge Noktası, Aralık Matris Oyunlar, Denge Aralığı

# ABSTRACT

Master of Science Thesis

## SOLUTIONS OF INTERVAL MATRIX GAMES

Birgöl AKSOY

Anadolu University  
Graduate School of Sciences  
Mathematics Program

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Serkan Ali DÜZCE

2014, 71 Pages

In this thesis, firstly two person zero-sum games, in other words matrix games are examined, fundamental definitions and theorems are given. Also solutions of matrix games are investigated. Interval definition and basic arithmetic operations about intervals are expressed and an order relation for comparing interval is defined. Then matrix games are generalized interval matrix games. Fundamental definitions and theorems about interval matrix games are given, solutions of  $2 \times n$  interval matrix games are examined.

**Keywords:** Matrix Games, Equilibrium Point, Interval Matrix Games, Equilibrium Interval

## TEŐEKKÖR

Bu tezin hazırlanmasında yardımlarını ve bilgilerini esirgemeyen değerli hocam Doç. Dr. Serkan Ali DÖZCE'ye ve her zaman beni destekleyen aileme en içten teőekkürlerimi sunarım.

Birgül AKSOY

Aralık – 2013

## İçindekiler

<b>ÖZET</b> . . . . .	<b>i</b>
<b>ABSTRACT</b> . . . . .	<b>ii</b>
<b>TEŞEKKÜR</b> . . . . .	<b>iii</b>
<b>İÇİNDEKİLER</b> . . . . .	<b>iv</b>
<b>ŞEKİLLER DİZİNİ</b> . . . . .	<b>vi</b>
<b>SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ</b> . . . . .	<b>vii</b>
<b>1. GİRİŞ</b>	<b>1</b>
<b>2. OYUN TEORİSİ İLE İLGİLİ TEMEL KAVRAMLAR</b>	<b>4</b>
2.1. İki Kişilik Sıfır Toplamlı Sonlu Oyunlar . . . . .	4
2.1.1. Saf Stratejiler . . . . .	5
2.1.2. Karma Stratejiler . . . . .	7
2.1.3. Optimal Stratejiler ve Oyunun Çözümü . . . . .	11
2.1.4. Baskın Stratejiler . . . . .	17
2.1.5. Gereken Stratejiler . . . . .	22
2.2. İki Kişilik Sıfır Toplamlı Sonlu Oyunların Çözümü . . . . .	24
2.2.1. Kesin Tanımlı Matris Oyunların Çözümü . . . . .	24
2.2.2. $2 \times 2$ Matris Oyunların Çözümü . . . . .	25
2.2.3. $2 \times n$ Matris Oyunların Çözümü . . . . .	27
2.2.4. $m \times n$ Matris Oyunların Çözümü . . . . .	34
<b>3. ARALIK MATRİS OYUNLAR</b>	<b>43</b>
3.1. Aralık Tanımı . . . . .	43
3.2. Aralık İşlemleri . . . . .	43
3.3. Aralık Karşılaştırması . . . . .	45
3.4. Aralık Matris Oyunlar . . . . .	51
3.5. Aralık Matris Oyunların Çözümü . . . . .	56
3.5.1. Kesin Tanımlı Aralık Matris Oyunların Çözümü . . . . .	56
3.5.2. $2 \times 2$ Aralık Matris Oyunların Çözümü . . . . .	56
3.5.3. $2 \times n$ Aralık Matris Oyunların Çözümü . . . . .	59

4. SONUÇ	69
KAYNAKLAR.....	70

## ŞEKİLLER DİZİNİ

2.1. Oyunun çözümünü bulmak için bir grafik yöntem . . . . .	30
2.2. Getiri matrisi $\mathbf{G}_1$ olan oyunun grafik yöntemiyle çözümü . . . . .	32
3.3. Oyunun çözümünü bulmak için bir grafik yöntem . . . . .	64
3.4. Getiri matrisi $\tilde{\mathbf{G}}$ olan oyunun grafik yöntemiyle çözümü . . . . .	66

## SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

$I_i$	:	I. oyuncunun $i$ . saf stratejisi
$II_j$	:	II. oyuncunun $j$ . saf stratejisi
$g_{ij}$	:	$I_i$ ve $II_j$ stratejisine karşılık I. oyuncunun getirisi
$\mathbf{G}$	:	matris oyunun getiri matrisi
$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$	:	I. oyuncunun karma stratejisi
$\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$	:	II. oyuncunun karma stratejisi
$X_m$	:	I. oyuncunun karma stratejiler kümesi
$Y_n$	:	II. oyuncunun karma stratejiler kümesi
$\ \mathbf{x}\ $	:	$\mathbf{x}$ in öklid normu
$g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$	:	$\mathbf{x} \in X_m$ , $\mathbf{y} \in Y_n$ karma stratejilerine karşılık oyunun getirisi
$\mathbf{y}^T$	:	$\mathbf{y}$ vektörünün transpozu
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	:	iç çarpım
$\nu$	:	matris oyunun değeri
$I_l \geq I_s$	:	$I_l$ stratejisi $I_s$ stratejisine baskındır
$I_l > I_s$	:	$I_l$ stratejisi $I_s$ stratejisine kesin baskındır
$\tilde{\mathbf{G}}$	:	aralık matris oyunun getiri matrisi
$\tilde{A}$	:	$A$ aralığı
$\underline{a}$	:	$\tilde{A}$ aralığının alt sınırı
$\bar{a}$	:	$\tilde{A}$ aralığının üst sınırı
$m(\tilde{A})$	:	$\tilde{A}$ aralığının orta noktası
$r(\tilde{A})$	:	$\tilde{A}$ aralığının yarıçapı
$I(\mathbb{R})$	:	$\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı tüm aralıklar kümesi
$w(\tilde{A})$	:	$\tilde{A}$ aralığının genişliği
$\tilde{A} \preceq \tilde{B}$	:	$\tilde{A}$ aralığı $\tilde{B}$ aralığından küçüktür
$\tilde{A} \succeq \tilde{B}$	:	$\tilde{A}$ aralığı $\tilde{B}$ aralığından büyüktür
$\tilde{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$	:	$\mathbf{x} \in X_m$ , $\mathbf{y} \in Y_n$ karma stratejilerine karşılık aralık matris oyunun getirisi
$\tilde{\nu}$	:	aralık matris oyunun değeri

# 1 GİRİŞ

Oyun teorisi, mücadele içerisinde en doğru kararın veya kararların alınabilirdiği karşılıklı etkileşim sürecini matematiksel yöntemlerle inceleyen bir bilim dalıdır. Hayatımızın birçok kısmında farklı olaylara karşı kararlar almamız gerekebilir. Bu yüzden oyun teorisi günlük yaşamımızda önemli bir yere sahiptir.

Oyun teorisi çıkar çatışmaları altında iki veya daha fazla rasyonel rakibin olduğu karar verme durumları ile ilgilidir. Gerçek yaşamda rekabetçi durumlar sadece iş yaşamında değil aynı zamanda savaşlar, spor müsabakaları ve yarışmaların farklı türlerini içeren insan aktivitesinin diğer yönlerinde de ortaya çıkmaktadır. Hem basit oyunların, hem de iş yaşamındaki ve endüstrideki karmaşık çatışmaların birçok ortak özelliği vardır. Bu nedenle oyun teorisi sürekli rekabetçi durumlarla karşılaşan karar vericiler için vazgeçilmez bir başvuru kaynağıdır. Geçmişten günümüze kadar oyun teorisi birçok alanda uygulanmış ve uygulama alanlarının gün geçtikçe arttığı görülmektedir. Biyoloji, fizik, mekanik, mühendislik, ekonomi, taktik ve stratejik askeri sorunlar gibi birçok alanda yaygın bir uygulama alanına sahiptir.

E. Zermelo [1] 1913 yılında satranç hakkında kanıtladığı bir teoremle oyun teorisinin ilk adımlarından birini atmıştır. E. Zermelo bu teoremiyle satranç oyununu ele alarak ya iki oyuncudan birinin kazanabileceğini ya da iki oyuncunun berabere kalabileceklerini ortaya koymuştur. J. von Neumann [2] 1928 yılında yayımlamış olduğu bir makalesinde "Minimaks Teoremi" ni ispatlaması ile ikinci büyük adımı atmıştır. Ayrıca 1944 yılında J. von Neumann, O. Morgenstern [3] ile birlikte oyun teorisine ait ilk kitap olarak bilinen "Oyunlar Teorisi ve Ekonomik Davranış" adlı kitabı yazıp yayımlamışlardır. Oyun teorisinde başka bir önemli adım ise 1950-1953 yılları arasında dört makale yazan J. F. Nash [4, 5, 6, 7] tarafından atılmıştır. "Nash Dengesi" olarak da bilinen denge kavramını ve oyunda işbirliğinin önemini ortaya koymuştur. J. F. Nash bu dört makalesi ile oyun teorisi bilim dalının gelişmesine önemli katkı sağlamıştır.

Oyunların farklı türleri tartışılmıştır. Sınıflandırmalar getiri fonksiyonunun yapısı, stratejilerin ve oyuncuların sayısı gibi faktörlere dayanır. Matris oyun-

lar için birkaç çözüm metodu geliştirilmiştir. Bunlardan biri, çok popüler bir teknik olan lineer programlama tekniğidir. Bu teknikte duality teoremini uygulayarak iki oyuncunun stratejileri ve oyunun değerini elde etmek için lineer programların ikisinden birini çözmek yeterlidir. 1999 da S. Kumar ve D. S. N. Reddy [8], K. G. K. Nair ve G. Ranjith [9] denge noktası olmadan oyunların çözümü için bir grafik metodu çalıştılar. Tüm bu metotlar oynanan oyunların her birinde getirilerin kesin bilinmesi ilkesine dayanarak geliştirilmiştir. Fakat gerçek yaşamda getirilerin bilinmediği durumlarda vardır ve tahmin etmek zorunda kalırız ya da bazen yaklaşık olarak biliriz. Dolayısıyla oyuncuların stratejileri değişmemesine rağmen matris oyunların getirileri sabit sayı olmayabilir. Yani getiriler aralık değerli olur ve bu oyunlar aralık matris oyunlar olarak ifade edilir. Aralık matris oyunlar için aralık kavramı ve aralık karşılaştırması önemli bir yere sahiptir. Aralığı bir gerçel sayının genişletilmesi olarak ifade eden R. E. Moore'un [10, 11], aralık aritmetiği ve aralık aritmetiğinin uygulamaları üzerine kapsamlı bir araştırması 1966 ve 1979 daki çalışmalarında bulunabilir. Ayrıca R. E. Moore, aralık karşılaştırması için de çalışmalar yapmıştır. Herhangi iki aralığın karşılaştırılabilmesi için çalışmalar devam etmiş, W. D. Collins ve C. Hu [12], A. Sengupta ve T. K. Pal [13], P. K. Nayak ve M. Pal [14] tarafından oyuncuların seçimlerini dikkate alan aralık karşılaştırması için de çalışmalar yapılmıştır. Aralıklar bilinen sıralama mantığıyla karşılaştırılmaz. L. A. Zadeh [15] tarafından 1965 yılında geliştirilen bulanık (fuzzy) mantık teorisi ile aralıkların bulanık karşılaştırması yapılmıştır.

Aralık matris oyunların çözüm metotları birçok araştırmacı tarafından çalışılmıştır. Bu çözüm metotlarından biri olan lineer programlama tekniği kullanılarak S-T. Liu ve C. Kao [16], D-F. Li [17], W. D. Collins ve C. Hu [12], P. K. Nayak ve M. Pal [14] tarafından çalışmalar yapılmıştır. Diğer bir çözüm metodu olan grafik yöntem üzerine de P. K. Nayak ve M. Pal [18], H. Akyar ve E. Akyar' ın [22] çalışmaları bulunmaktadır.

Bu çalışmada matris oyunlar aralık matris oyunlara genelleştirilerek aralık matris oyunların çözümleri incelenmiştir. Öncelikle matris oyunlara yani birinin kazancının diğerinin kaybına eşit olduğu iki kişilik sıfır toplamlı sonlu oyunlara yer verilmiş, temel tanım ve teoremlere değinilmiştir. İki kişilik sı-

bir toplamlı sonlu oyunlarda her zaman çözümün var olduğu ifade edilmiştir. Denge noktasının olduğu ve olmadığı durumlarda oyunların çözümleri incelenmiştir. Bu çalışmanın amacı matris oyunları aralık matris oyunlara genelleştirerek çözüm yöntemlerini aralık matris oyunlara uyarlamaktır. Öncelikle üçüncü bölümde aralık kavramı ifade edilmiş ve aralıklar için bir sıralama bağıntısı verilmiştir. Sonrasında da  $2 \times n$  aralık matris oyunların çözümü incelenmiştir.

## 2 OYUN TEORİSİ İLE İLGİLİ TEMEL KAVRAMLAR

Taraf veya grupların rekabet içerisinde sürdürdüğü herhangi bir olaya *oyun*, bu taraf veya gruplara ise *oyuncu* denir.

Oyunculardan her birinin oyun süresince oluşabilecek tüm durumlar için alabileceği kararlar bütününe *strateji* denir. Oyunun oynanması sürecinde her oyuncu her bir stratejinin karşılığı olarak oyunun sonunda belirli bir kazanç elde eder. Bu kazançta oyuncunun *getirisi* denir. Bu kazanç negatif, pozitif veya sıfır olabilir.

### 2.1 İki Kişilik Sıfır Toplamlı Sonlu Oyunlar

Bir oyunda her oyuncu tarafından kullanılan strateji sonlu sayıda ise bu oyuna *sonlu oyun* denir. Oyunun sıfır toplamı olması oyunculardan birinin kazancının diğerinin kaybına eşit olması demektir. Diğer bir deyişle oyuncuların kâr ve zararlarının toplamı sıfırdır. İki kişilik sıfır toplamı sonlu oyunlar mücadele içerisindeki sonlu stratejiye sahip iki oyuncunun en iyi stratejiyi kullanarak oynadıkları oyunlardır.

İki kişilik sıfır toplamı sonlu bir oyunda I. oyuncunun  $m$  tane stratejisi yani  $I_1, I_2, \dots, I_m$  stratejileri ve II. oyuncunun da  $n$  tane stratejisi yani  $II_1, II_2, \dots, II_n$  stratejileri olmak üzere bu tür oyunlar  $m \times n$  *oyunu* yada *matris oyunlar* olarak ifade edilmektedir.

I. oyuncu  $I_i$  stratejisini II. oyuncu da  $II_j$  stratejisini kullandığında oyun sıfır toplamı olduğundan I. oyuncunun getirisi  $g_{ij}$  olup, II. oyuncunun da getirisi  $-g_{ij}$  olur. O halde oyunun getiri matrisi

$$\mathbf{G} = \begin{matrix} & \begin{matrix} II_1 & II_2 & \dots & II_n \end{matrix} \\ \begin{matrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_m \end{matrix} & \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \dots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{m1} & g_{m2} & \dots & g_{mn} \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (2.1.1)$$

şeklinde olur. Getiri matrisi  $G = (g_{ij})_{m \times n}$  şeklinde de gösterilebilir. Yani buradaki  $g_{ij}$ , I. oyuncunun kazancını II. oyuncunun kaybını ifade etmektedir.

Dolayısıyla I. oyuncunun kazancı II. oyuncunun kaybına eşittir.

### 2.1.1 Saf Stratejiler

**Tanım 2.1.1.** *Oyuncunun stratejisi olasılık olayı içermiyorsa bu stratejiye **saf strateji** denir. Yani tek bir strateji çifti ile oyunun sonucunun belirlenmesi durumudur.*

**Tanım 2.1.2.** *Getiri matrisi (2.1.1) ile verilen oyunda*

$$\min_{j=1,2,\dots,n} g_{i_*j} = \max_{i=1,2,\dots,m} \min_{j=1,2,\dots,n} g_{ij}$$

*koşulunu sağlayan  $I_{i_*}$  stratejisine I. oyuncunun **optimal saf stratejisi** denir.*

$$\max_{i=1,2,\dots,m} g_{ij_*} = \min_{j=1,2,\dots,n} \max_{i=1,2,\dots,m} g_{ij}$$

*koşulunu sağlayan  $II_{j_*}$  stratejisine II. oyuncunun **optimal saf stratejisi** denir.*

**Tanım 2.1.3.** *Getiri matrisi (2.1.1) ile verilen oyunda*

$$V_P^L = \max_{i=1,2,\dots,m} \min_{j=1,2,\dots,n} g_{ij}$$

*değerine oyunun saf stratejiler sınıfında **alt değeri** denir.*

$$V_P^U = \min_{j=1,2,\dots,n} \max_{i=1,2,\dots,m} g_{ij}$$

*değerine de oyunun saf stratejiler sınıfında **üst değeri** denir.*

*Eğer  $V_P^L = V_P^U = V$  ise  $V$  sayısına saf stratejiler sınıfında **oyunun değeri** denir.*

Şimdi optimal stratejilerin, oyuncular için ne anlama geldiğini açıklayalım.

$$\min_{j=1,2,\dots,n} g_{i_*j} = \max_{i=1,2,\dots,m} \min_{j=1,2,\dots,n} g_{ij} = V_P^L$$

eşitliğinden

$$\min_{j=1,2,\dots,n} g_{i_*j} = V_P^L$$

ve keyfi  $j = 1, 2, \dots, n$  için  $g_{i_*j} \geq V_P^L$  olur. Bu I. oyuncunun  $I_{i_*}$  optimal stratejisiyle oynadığında en az  $V_P^L$  kadar kazanacağı anlamına gelmektedir.

Benzer şekilde

$$\max_{i=1,2,\dots,m} g_{ij_*} = \min_{j=1,2,\dots,n} \max_{i=1,2,\dots,m} g_{ij} = V_P^U$$

eşitliğinden

$$\max_{i=1,2,\dots,m} g_{ij_*} = V_P^U$$

ve keyfi  $i = 1, 2, \dots, m$  için  $g_{ij_*} \leq V_P^U$  olur. Bu da II. oyuncunun  $\Pi_{j_*}$  optimal stratejisi ile oynadığında en fazla  $V_P^U$  kadar kaybedeceği anlamına gelmektedir.

Burada I. oyuncu optimal olmayan bir stratejisini kullanırsa II. oyuncu I. oyuncuya  $V_P^L$  den daha az kazanç verebilir. II. oyuncu optimal olmayan bir stratejisini kullanırsa I. oyuncu II. oyuncuya  $V_P^U$  den daha fazla kayıp verebilir.

**Önerme 2.1.4.** *Getiri matrisi (2.1.1) ile verilen oyunda*

$$V_P^L \leq V_P^U$$

olur.

*Kanıt.* I. oyuncunun  $I_{i_*}$  ve II. oyuncunun  $\Pi_{j_*}$  keyfi stratejilerini alalım ve sabitleyelim. O zaman

$$\min_{j=1,2,\dots,n} g_{i_*j} \leq g_{i_*j_*}$$

olur. Bu eşitsizlik her sabitlenmiş  $i_* = 1, 2, \dots, m$  için doğru olduğundan

$$\max_{i=1,2,\dots,m} \min_{j=1,2,\dots,n} g_{ij} \leq \max_{i=1,2,\dots,m} g_{ij_*}$$

olduğu bulunur. Son eşitsizlikte  $j_*$  keyfi sabitlenmiş olduğundan

$$\max_{i=1,2,\dots,m} \min_{j=1,2,\dots,n} g_{ij} \leq \min_{j=1,2,\dots,n} \max_{i=1,2,\dots,m} g_{ij}$$

olur. Yani

$$V_P^L \leq V_P^U$$

olduğu elde edilir. □

**Örnek 2.1.5.** *Getiri matrisi*

$$\mathbf{G} = \begin{matrix} & \begin{matrix} \Pi_1 & \Pi_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} I_1 \\ I_2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

verilen  $2 \times 2$  oyununu ele alalım.

*Oyunun alt değeri,*

$$\begin{aligned} V_P^L &= \max_{i=1,2} \min_{j=1,2} g_{ij} = \max \left\{ \min_{j=1,2} g_{1j}, \min_{j=1,2} g_{2j} \right\} \\ &= \max \{-2, -1\} \\ &= -1 \end{aligned}$$

ve oyunun üst değeri,

$$\begin{aligned} V_P^U &= \min_{j=1,2} \max_{i=1,2} g_{ij} = \min \left\{ \max_{i=1,2} g_{i1}, \max_{i=1,2} g_{i2} \right\} \\ &= \min\{1, 0\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

olarak bulunur.  $V_P^L \neq V_P^U$  olduğundan oyunun saf stratejiler sınıfında değeri yoktur. Burada I. oyuncunun optimal saf stratejisi

$$-1 = V_P^L = \max_{i=1,2} \min_{j=1,2} g_{ij} = \min_{j=1,2} g_{2j}$$

koşulunu sağlayan  $I_2$  stratejisidir. II. oyuncunun optimal saf stratejisi de

$$0 = V_P^U = \min_{j=1,2} \max_{i=1,2} g_{ij} = \max_{i=1,2} g_{i2}$$

koşulunu sağlayan  $II_2$  stratejisidir.

Bu örnekten görüldüğü üzere, oyunun saf stratejiler sınıfında değeri olmayabilir.

### 2.1.2 Karma Stratejiler

I. oyuncunun saf stratejileri  $I_1, I_2, \dots, I_m$  ve II. oyuncunun saf stratejileri  $II_1, II_2, \dots, II_n$  olmak üzere iki kişilik sıfır toplamlı bir  $m \times n$  oyununu ele alalım.

**Tanım 2.1.6.** Keyfi  $i = 1, 2, \dots, m$  için  $x_i \geq 0$  ve  $\sum_{i=1}^m x_i = 1$  olacak şekilde  $m$ -boyutlu  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$  vektörüne I. oyuncunun **karma stratejisi** denir. I. oyuncunun karma stratejileri kümesi  $X_m$  ile gösterilmek üzere

$$X_m = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m) : \forall i = 1, 2, \dots, m \text{ için } x_i \geq 0 \text{ ve } \sum_{i=1}^m x_i = 1 \right\}$$

dir.

**Tanım 2.1.7.** Keyfi bir  $j = 1, 2, \dots, n$  için  $y_j \geq 0$  ve  $\sum_{j=1}^n y_j = 1$  olacak şekilde  $n$ -boyutlu  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  vektörüne II. oyuncunun **karma stratejisi** denir. II. oyuncunun karma stratejileri kümesi  $Y_n$  ile gösterilmek üzere

$$Y_n = \left\{ \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) : \forall j = 1, 2, \dots, n \text{ için } y_j \geq 0 \text{ ve } \sum_{j=1}^n y_j = 1 \right\}$$

dir.

I. oyuncu  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in X_m$  karma stratejisini seçerse,  $I_1$  stratejisini  $x_1$  olasılığı ile,  $I_2$  stratejisini  $x_2$  olasılığı ile, ...,  $I_m$  stratejisini  $x_m$  olasılığı ile oynamış olur. Oyun  $s$  kez oynandığında I. oyuncunun  $s \cdot x_1$  kez  $I_1$  stratejisi ile,  $s \cdot x_2$  kez  $I_2$  stratejisi ile, ...,  $s \cdot x_m$  kez  $I_m$  stratejisi ile oynadığı anlaşılır. II. oyuncunun da  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in Y_n$  karma stratejisini seçerek oynaması benzer şekilde ifade edilebilir.

I. oyuncu  $I_i$  stratejisini 1 olasılığı ile diğer stratejileri de 0 olasılığı ile yani  $\mathbf{x} = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in X_m$  karma stratejisi ile oynaması  $I_i$  saf stratejisi ile oynaması anlamına gelmektedir. Tersine I. oyuncunun her seferinde  $I_i$  saf stratejisi ile oynaması  $I_i$  stratejisini 1 olasılığı ile diğer stratejileri de 0 olasılık ile seçerek  $\mathbf{x} = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in X_m$  karma stratejisi ile oynaması anlamına gelmektedir. II. oyuncu için de benzer ifadeler geçerlidir. Bu nedenle saf stratejiler kümesinin karma stratejiler kümesinin alt kümesi olduğunu söyleyebiliriz.

**Önerme 2.1.8.** I. oyuncunun  $X_m \subset \mathbb{R}^m$  ve II. oyuncunun  $Y_n \subset \mathbb{R}^n$  karma strateji kümeleri kompakt ve konveks kümelerdir.

*Kanıt.*  $X_m \subset \mathbb{R}^m$  kümesinin kompakt olduğunu göstermek için kapalı ve sınırlı olduğunu göstermemiz gerekir.

Keyfi  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in X_m$  alalım. O halde keyfi  $i = 1, 2, \dots, m$  için  $x_i \geq 0$  ve  $\sum_{i=1}^m x_i = 1$  olduğundan

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2} \leq x_1 + x_2 + \dots + x_m = 1$$

olur. Buradan keyfi  $\mathbf{x} \in X_m$  için  $\|\mathbf{x}\| \leq 1$  olup  $X_m$  sınırlı bir küme olur.

Şimdi de  $X_m$  kümesinin kapalı küme olduğunu gösterelim. Keyfi  $k = 1, 2, \dots$  için  $\mathbf{x}^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_m^{(k)}) \in X_m$  olsun.  $k \rightarrow \infty$  iken  $\mathbf{x}^{(k)} \rightarrow \mathbf{x}^{(*)} = (x_1^{(*)}, x_2^{(*)}, \dots, x_m^{(*)})$  olup  $\mathbf{x}^{(*)} \in X_m$  olduğunu göstermeliyiz.

$k \rightarrow \infty$  iken  $\mathbf{x}^{(k)} \rightarrow \mathbf{x}^{(*)}$  olduğundan keyfi  $i = 1, 2, \dots, m$  için  $k \rightarrow \infty$  iken  $x_i^{(k)} \rightarrow x_i^{(*)}$  olur. Keyfi  $k = 1, 2, \dots$  için  $x_i^{(k)} \geq 0$  ve  $k \rightarrow \infty$  iken  $x_i^{(k)} \rightarrow x_i^{(*)}$  olduğundan  $x_i^{(*)} \geq 0$  olur.

$\mathbf{x}^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_m^{(k)}) \in X_m$  olduğundan  $\sum_{i=1}^m x_i^{(k)} = 1$  olur. Her  $k = 1, 2, \dots$  için  $k \rightarrow \infty$  iken  $x_i^{(k)} \rightarrow x_i^{(*)}$  olduğundan

$$\sum_{i=1}^m x_i^{(*)} = 1$$

olur. Keyfi  $i = 1, 2, \dots, m$  için  $x_i^{(*)} \geq 0$  ve  $\sum_{i=1}^m x_i^{(*)} = 1$  olup  $\mathbf{x}^{(*)} = (x_1^{(*)}, x_2^{(*)}, \dots, x_m^{(*)}) \in X_m$  elde edilir. Böylece  $X_m$  kümesi kapalı kümedir.

O halde  $X_m$  kümesi kapalı ve sınırlı olduğundan kompakt bir kümedir.

Şimdi  $X_m$  kümesinin konveks küme olduğunu gösterelim. Keyfi  $\mathbf{x}^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_m^{(1)})$ ,  $\mathbf{x}^{(2)} = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_m^{(2)}) \in X_m$  ve  $\lambda \in [0, 1]$  için  $\lambda \mathbf{x}^{(1)} + (1 - \lambda) \mathbf{x}^{(2)} \in X_m$  olduğunu göstermeliyiz.

$$\lambda \mathbf{x}^{(1)} + (1 - \lambda) \mathbf{x}^{(2)} = (\lambda x_1^{(1)} + (1 - \lambda) x_1^{(2)}, \dots, \lambda x_m^{(1)} + (1 - \lambda) x_m^{(2)})$$

olduğu açıktır. Ayrıca,  $\mathbf{x}^{(1)} \in X_m$  ve  $\mathbf{x}^{(2)} \in X_m$  olduğundan keyfi  $i = 1, 2, \dots, m$  için  $x_i^{(1)} \geq 0$ ,  $x_i^{(2)} \geq 0$  olur. O halde keyfi  $i = 1, 2, \dots, m$  için

$$\lambda x_i^{(1)} + (1 - \lambda) x_i^{(2)} \geq 0$$

olur.  $\mathbf{x}^{(1)} \in X_m$  ve  $\mathbf{x}^{(2)} \in X_m$  olduğundan

$$\sum_{i=1}^m x_i^{(1)} = 1, \quad \sum_{i=1}^m x_i^{(2)} = 1$$

eşitlikleri geçerlidir. O halde

$$\sum_{i=1}^m [\lambda x_i^{(1)} + (1 - \lambda) x_i^{(2)}] = \sum_{i=1}^m \lambda x_i^{(1)} + \sum_{i=1}^m (1 - \lambda) x_i^{(2)} = \lambda + (1 - \lambda) = 1$$

olur. Böylece

$$\lambda x_i^{(1)} + (1 - \lambda) x_i^{(2)} \geq 0 \quad \text{ve} \quad \sum_{i=1}^m [\lambda x_i^{(1)} + (1 - \lambda) x_i^{(2)}] = 1$$

olduğundan

$$\lambda \mathbf{x}^{(1)} + (1 - \lambda) \mathbf{x}^{(2)} \in X_m$$

olarak bulunur. Bu ise  $X_m$  kümesinin konveks bir küme olması demektir.

Benzer şekilde  $Y_n$  kümesinin de kompakt ve konveks küme olduğu gösterilebilir.  $\square$

**Tanım 2.1.9.** I. ve II. oyuncu

$$\mathbf{G} = \begin{matrix} & \begin{matrix} \Pi_1 & \Pi_2 & \dots & \Pi_n \end{matrix} \\ \begin{matrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_m \end{matrix} & \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \dots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{m1} & g_{m2} & \dots & g_{mn} \end{pmatrix} \end{matrix}$$

getiri matrisi ile verilen  $m \times n$  oyununu oynasınlar. I. oyuncu  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in X_m$  karma stratejisi ile II. oyuncu  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in Y_n$  karma stratejisi ile oynamak üzere **oyunun getirisi**

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m x_i g_{ij} y_j$$

olarak tanımlanır.

Ayrıca oyunun getirisi

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}G\mathbf{y}^T = \langle \mathbf{x}G, \mathbf{y} \rangle$$

şeklinde de yazılabilir. Burada  $\mathbf{y}^T$  vektörü  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in Y_n \subseteq \mathbb{R}^n$  vektörünün transpozunu ve  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ise iç çarpımı göstermektedir.

I. oyuncu  $\mathbf{x}^* = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$  karma stratejisi ile II. oyuncu da  $\mathbf{y}^* = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$  karma stratejisi ile yani I. oyuncu  $I_i$  saf stratejisi ile II. oyuncu da  $II_j$  saf stratejisi ile oynarlarsa oyunun getirisi

$$g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) = g(I_i, II_j) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m x_i g_{ij} y_j = g_{ij}$$

olur.

Eğer I. oyuncu  $I_i$  saf stratejisi ile II. oyuncu da  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  karma stratejisi ile oynarsa oyunun getirisi

$$g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) = g(I_i, \mathbf{y}) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m x_i g_{ij} y_j = \sum_{j=1}^n g_{ij} y_j$$

olur.

Eğer I. oyuncu  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$  karma stratejisi ile II. oyuncu da  $II_j$  saf stratejisi ile oynarsa oyunun getirisi

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) = g(\mathbf{x}, II_j) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m x_i g_{ij} y_j = \sum_{i=1}^m x_i g_{ij}$$

olur.

**Önerme 2.1.10.**  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : X_m \times Y_n \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 'ye göre süreklidir. Ayrıca her sabitlenmiş  $\mathbf{x} \in X_m$  için  $\mathbf{y} \rightarrow g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  ve her sabitlenmiş  $\mathbf{y} \in Y_n$  için  $\mathbf{x} \rightarrow g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  fonksiyonları doğrusal fonksiyondur.

Şimdi karma stratejiler sınıfında oyunun alt değerini ve üst değerini tanımlayalım.

**Tanım 2.1.11.** *Getiri matrisi (2.1.1) ile verilen oyunda*

$$V^L = \max_{\mathbf{x} \in X_m} \min_{\mathbf{y} \in Y_n} g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

*değerine oyunun karma stratejiler sınıfında **alt değeri***

$$V^U = \min_{\mathbf{y} \in Y_n} \max_{\mathbf{x} \in X_m} g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

*değerine de oyunun karma stratejiler sınıfında **üst değeri** denir.*

*Eğer  $V^L = V^U = \nu$  ise (2.1.1) oyununun değeri vardır denir ve  $\nu$  sayısına karma stratejiler sınıfında **oyunun değeri** adı verilir.*

Saf stratejiler sınıfında oyunun değerinin olmayabileceğini söylemiştik. Saf stratejiler sınıfı karma stratejiler sınıfına genişletilerek 1928 yılında *John von Neumann* tarafından karma stratejiler sınıfında oyunun değerinin olduğu ifade ve ispat edilmiştir [2].

**Teorem 2.1.12** (John von Neumann). *Getiri matrisi (2.1.1) ile verilen iki kişilik sıfır toplamlı sonlu oyunun her zaman değeri vardır. Yani*

$$V^L = V^U = \nu$$

*eşitliği her zaman geçerlidir.*

### 2.1.3 Optimal Stratejiler ve Oyunun Çözümü

**Tanım 2.1.13.**

$$\min_{\mathbf{y} \in Y_n} g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) = \max_{\mathbf{x} \in X_m} \min_{\mathbf{y} \in Y_n} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \nu$$

*koşulunu sağlayan  $\mathbf{x}^* \in X_m$  stratejisine I. oyuncunun **optimal stratejisi***

$$\max_{\mathbf{x} \in X_m} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) = \min_{\mathbf{y} \in Y_n} \max_{\mathbf{x} \in X_m} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \nu$$

*koşulunu sağlayan  $\mathbf{y}^* \in Y_n$  stratejisine II. oyuncunun **optimal stratejisi** denir.*

Burada

$$\min_{\mathbf{y} \in Y_n} g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) = \nu$$

eşitliğinden  $g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) \geq \nu$  olur. Bu I. oyuncunun  $\mathbf{x}^* \in X_m$  optimal stratejisiyle oynadığında en az  $\nu$  kadar kazanacağı anlamına gelmektedir. Benzer olarak

$$\max_{\mathbf{x} \in X_m} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) = \nu$$

eşitliğinden  $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \leq \nu$  olur. Bu da II. oyuncunun  $\mathbf{y}^* \in Y_n$  optimal stratejisiyle oynadığında en fazla  $\nu$  kadar kaybedeceği anlamına gelmektedir.

**Tanım 2.1.14.** I. oyuncunun optimal stratejisi  $\mathbf{x}^* \in X_m$ , II. oyuncunun optimal stratejisi  $\mathbf{y}^* \in Y_n$  ve oyunun değeri de  $\nu$  olmak üzere  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \nu)$  üçlüsüne **oyunun çözümü** denir.

**Teorem 2.1.15.** İki kişilik sıfır toplamlı sonlu her oyunun çözümü vardır.

*Kanıt.* İki kişilik sıfır toplamlı sonlu oyunun değerinin var olduğunu Teorem 2.1.12 gereğince söylemiştik. Yani

$$\min_{\mathbf{y} \in Y_n} \max_{\mathbf{x} \in X_m} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max_{\mathbf{x} \in X_m} \min_{\mathbf{y} \in Y_n} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \nu$$

dir.

$g(\cdot, \cdot) : X_m \times Y_n \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  ye göre sürekli fonksiyon ve  $X_m \subset \mathbb{R}^m$  ve  $Y_n \subset \mathbb{R}^n$  kompakt kümeler olmak üzere

$$\min_{\mathbf{y} \in Y_n} g(\cdot, \mathbf{y}) : X_m \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{ve} \quad \max_{\mathbf{x} \in X_m} g(\mathbf{x}, \cdot) : Y_n \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonları da sürekli fonksiyon olur.

$\min_{\mathbf{y} \in Y_n} g(\cdot, \mathbf{y}) : X_m \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu sürekli ve  $X_m \subset \mathbb{R}^m$  kompakt küme olduğundan

$$\min_{\mathbf{y} \in Y_n} g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) = \max_{\mathbf{x} \in X_m} \min_{\mathbf{y} \in Y_n} g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

olacak şekilde  $\mathbf{x}^* \in X_m$  vardır. Bu durumda  $\mathbf{x}^* \in X_m$  stratejisi I. oyuncunun optimal stratejisi olur.

Benzer şekilde  $\max_{\mathbf{x} \in X_m} g(\mathbf{x}, \cdot) : Y_n \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu sürekli ve  $Y_n \subset \mathbb{R}^n$  kompakt küme olduğundan

$$\max_{\mathbf{x} \in X_m} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) = \min_{\mathbf{y} \in Y_n} \max_{\mathbf{x} \in X_m} g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

olacak şekilde  $\mathbf{y}^* \in Y_n$  vardır. Bu durumda  $\mathbf{y}^* \in Y_n$  stratejisi II. oyuncunun optimal stratejisi olur.

Dolayısıyla  $\mathbf{x}^* \in X_m$  stratejisi I. oyuncunun optimal stratejisi,  $\mathbf{y}^* \in Y_n$  stratejisi de II. oyuncunun optimal stratejisi ve  $\nu$  de oyunun değeri olmak üzere  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \nu)$  üçlüsü oyunun çözümü olur.  $\square$

**Teorem 2.1.16.**  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \nu)$  nin oyunun çözüm olması için gerek ve yeter koşul

$$\text{keyfi } \mathbf{y} \in Y_n \text{ için } g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) \geq \nu$$

$$\text{keyfi } \mathbf{x} \in X_m \text{ için } g(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \leq \nu$$

olmasıdır.

Teorem 2.1.16 gereği aşağıdaki sonuç elde edilebilir.

**Sonuç 2.1.17.**  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \nu)$  üçlüsü verilen oyunun çözümü ise  $g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) = \nu$  dir.

Teorem 2.1.16 yı kullanarak bu sonucu yorumlayalım.  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \nu)$  üçlüsü verilen oyunun çözümü olsun. Eğer I. oyuncu  $\mathbf{x}^* \in X_m$  optimal strateji ile oynarsa Teorem 2.1.16 daki  $g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) \geq \nu$  eşitsizliği gereği, kendisine en az  $\nu$  kadar kazancı garantiler. Eğer II. oyuncu  $\mathbf{y}^* \in Y_n$  optimal stratejisi ile oynarsa Teorem 2.1.16 daki  $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \leq \nu$  eşitsizliği gereği, kendisine  $\nu$  den daha fazla kaybetmemeyi garantiler. Bu durumda I. oyuncu  $\mathbf{x}^* \in X_m$  optimal stratejisi, II. oyuncu  $\mathbf{y}^* \in Y_n$  optimal stratejisi ile oynarlarsa hem I. oyuncunun kazancı hem de II. oyuncunun kaybı  $\nu = g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$  kadardır.

Şimdi de karma stratejiler sınıfında oyunun çözümünün var olduğunu bir örnekle gösterelim.

**Örnek 2.1.18.** Örnek 2.1.5 teki getiri matrisi

$$\mathbf{G} = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{II}_1 & \text{II}_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{I}_1 \\ \text{I}_2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

ile verilen  $2 \times 2$  oyununu ele alalım.

Her iki oyuncunun da ikişer saf stratejisi olduğundan I. oyuncunun karma stratejisi  $\mathbf{x} = (x, 1 - x) \in X_2$ ,  $x \in [0, 1]$ , II. oyuncunun karma stratejisi  $\mathbf{y} = (y, 1 - y) \in Y_2$ ,  $y \in [0, 1]$  olarak yazılabilir. O halde bu karma stratejiler için oyunun getirisi

$$\begin{aligned} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 1 \cdot xy + (-2) \cdot x(1 - y) + (-1) \cdot (1 - x)y + 0 \cdot (1 - x)(1 - y) \\ &= xy - 2x + 2xy - y + xy \\ &= 4xy - 2x - y \end{aligned}$$

olur.

$\mathbf{x}^* = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$  stratejisini alalım. Keyfi  $\mathbf{y} = (y, 1 - y) \in Y_2$  stratejisi için

$$g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) = 4 \cdot \frac{1}{4}y - 2 \cdot \frac{1}{4} - y = -\frac{1}{2}$$

olup keyfi  $\mathbf{y} \in Y_2$  için  $g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) \geq -\frac{1}{2}$  elde edilir.

$\mathbf{y}^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$  stratejisini alalım. Keyfi  $\mathbf{x} = (x, 1 - x) \in X_2$  stratejisi için

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) = 4x \cdot \frac{1}{2} - 2x - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

olup keyfi  $\mathbf{x} \in X_2$  için  $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \leq -\frac{1}{2}$  elde edilir.

Dolayısıyla  $g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) \geq -\frac{1}{2}$ ,  $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \leq -\frac{1}{2}$  ve Teorem 2.1.16 dan

$$\left(\mathbf{x}^* = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right), \mathbf{y}^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \nu = -\frac{1}{2}\right)$$

üçlüsü oyunun çözümü olarak elde edilir.

Şimdi ileride kullanılacak olan bir önermeyi kanıtlayalım.

**Önerme 2.1.19.** *Getiri matrisi*

$$\mathbf{G} = \begin{matrix} & \begin{matrix} \Pi_1 & \Pi_2 & \dots & \Pi_n \end{matrix} \\ \begin{matrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_m \end{matrix} & \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \dots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{m1} & g_{m2} & \dots & g_{mn} \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (2.1.2)$$

olan iki kişilik sıfır toplamlı  $m \times n$  oyununu ele alalım.  $r \in \mathbb{R}$  olsun.  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \nu)$  üçlüsünün oyunun çözümü olması için gerek ve yeter koşul  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \nu + r)$  üçlüsünün getiri matrisi

$$\mathbf{G}_1 = \begin{matrix} & \begin{matrix} \Pi_1 & \Pi_2 & \dots & \Pi_n \end{matrix} \\ \begin{matrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_m \end{matrix} & \begin{pmatrix} r + g_{11} & r + g_{12} & \dots & r + g_{1n} \\ r + g_{21} & r + g_{22} & \dots & r + g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r + g_{m1} & r + g_{m2} & \dots & r + g_{mn} \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (2.1.3)$$

olan oyunun çözümü olmasıdır.

*Kanıt.*  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in X_m$  ve  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in Y_n$  sırasıyla I. ve II. oyuncunun karma stratejileri olsun. Getiri matrisi (2.1.2) ile verilen oyunda  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  karma stratejileri için oyunun getirisi

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m x_i g_{ij} y_j,$$

getiri matrisi (2.1.3) ile verilen oyunda  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  karma stratejileri için oyunun getirisi

$$g_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m x_i (g_{ij} + r) y_j = r + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m x_i g_{ij} y_j = r + g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

olur.

$(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \nu)$  üçlüsü getiri matrisi (2.1.2) olan oyunun çözümü olsun. Teorem 2.1.16 dan

$$\forall \mathbf{y} \in Y_n \quad \text{için} \quad g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) \geq \nu$$

$$\forall \mathbf{x} \in X_m \quad \text{için} \quad g(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \leq \nu$$

olur.  $g_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = r + g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  olduğundan

$$\forall \mathbf{y} \in Y_n \quad \text{için} \quad g_1(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) \geq r + \nu$$

$$\forall \mathbf{x} \in X_m \quad \text{için} \quad g_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \leq r + \nu$$

olduğu elde edilir. Bu eşitsizliklerden ve yine Teorem 2.1.16 dan  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \nu + r)$  üçlüsünün getiri matrisi (2.1.3) olan oyunun çözümü olduğu bulunur.

$(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \nu + r)$  üçlüsü getiri matrisi (2.1.3) ile verilen oyunun çözümü iken  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \nu)$  üçlüsünün getiri matrisi (2.1.2) ile verilen oyunun çözümü olduğu da benzer şekilde kanıtlanır.  $\square$

**Tanım 2.1.20.** *Getiri matrisi (2.1.1) ile verilen iki kişilik sıfır toplamlı oyunda  $\mathbf{x}^* \in X_m$ ,  $\mathbf{y}^* \in Y_n$  olsun. Keyfi  $\mathbf{x} \in X_m$ ,  $\mathbf{y} \in Y_n$  için*

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \leq g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \leq g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) \quad (2.1.4)$$

*oluyorsa  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$  ikilisine **denge stratejileri (denge ikilisi)** denir.*

Şimdi  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$  ikilisinin, denge ikilisi olmasının ne anlama geldiğini açıklayalım. İki kişilik sıfır toplamlı bir oyunda  $\mathbf{x} \in X_m$  ve  $\mathbf{y} \in Y_n$  stratejileri için  $g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  getirisinin I. oyuncunun getirisi olduğunu biliyoruz. Öte yandan oyun sıfır toplamlı olduğundan  $\mathbf{x} \in X_m$  ve  $\mathbf{y} \in Y_n$  stratejileri için II. oyuncunun getirisi  $-g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  olur. Şimdi  $\mathbf{x} \in X_m$  ve  $\mathbf{y} \in Y_n$  için I. oyuncunun getirisini

$g_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , II. oyuncunun getirisini  $g_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  ile gösterirsek,  $g_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  ve  $g_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  olur. O halde (2.1.4) ten  $\mathbf{x} \in X_m$  için

$$g_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \leq g_1(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$$

ve

$$g_2(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) \leq g_2(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$$

olur. Bu iki eşitsizlikten aşağıdaki yorum yapılabilir.

$(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$  denge stratejileri iken, II. oyuncu  $\mathbf{y}^*$  stratejisi ile oynarsa, I. oyuncunun elde edebileceği en büyük getiri  $g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$  dır ve I. oyuncu bu getirisini  $\mathbf{x}^*$  stratejisi ile oynayarak elde edebilir. Benzer olarak I. oyuncu  $\mathbf{x}^*$  stratejisi ile oynarsa II. oyuncunun elde edebileceği en büyük getiri  $g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$  dır ve II. oyuncu bu getirisini  $\mathbf{y}^*$  stratejisi ile oynayarak elde edebilir.

Dolayısıyla  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$  denge stratejilerinden her biri diğeri için tehdit oluşturacağından oyuncuların herhangi biri denge stratejilerinden kendine ait olanı seçtiğinde diğeri de daha fazla kaybetmemek için denge ikilisini oluşturan diğeri stratejiyi seçmek zorunda kalır.

Şimdi de oyunun denge stratejileri ile oyunun çözümü arasındaki ilişkiyi ortaya koyan bir teorem vereceğiz.

**Teorem 2.1.21.**  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$  ikilisinin oyunun denge stratejileri olması için gerek ve yeter koşul  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*))$  üçlüsünün oyunun çözümü olmasıdır.

*Kanıt.*  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$  ikilisi oyunun denge stratejileri olsun. O halde Tanım 2.1.20 den  $\mathbf{x} \in X_m, \mathbf{y} \in Y_n$  için

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \leq g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \leq g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y})$$

olup bu eşitsizlikten

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \leq g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$$

ve

$$g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) \geq g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$$

olur. Teorem 2.1.16 gereğince  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*))$  üçlüsünün oyunun çözümü olduğu görülür.

Tersine  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*))$  üçlüsü oyunun çözümü olsun. O halde Teorem 2.1.16 dan keyfi  $\mathbf{x} \in X_m, \mathbf{y} \in Y_n$  için

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \leq g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$$

ve

$$g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) \geq g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$$

olup bu iki eşitsizlikten

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \leq g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \leq g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y})$$

olduğu elde edilir. Bu ise Tanım 2.1.20 gereğince  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$  ikilisinin denge stratejileri olması demektir.  $\square$

#### 2.1.4 Baskın Stratejiler

İki kişilik sıfır toplamlı oyunlarda stratejilerden herhangi biri diğer stratejilerden daha fazla veya eşit getiriye sahip olabilir. Her durumda daha az kazanç sağlayan stratejiler oyundan atılır. Atılan stratejiden her durumda daha fazla getiriye sahip olan stratejiyi *baskın strateji* olarak adlandıracağız.

**Tanım 2.1.22.** *Keyfi  $j = 1, 2, \dots, n$  için  $g_{lj} \geq g_{sj}$  ise I. oyuncunun  $I_l$  stratejisi  $I_s$  stratejisine baskındır. Burada  $I_l$  stratejisine **baskın strateji**,  $I_s$  stratejisine de **bastırılan strateji** denir. Bu durum  $I_l \geq I_s$  şeklinde gösterilir.*

**Tanım 2.1.23.** *Keyfi  $i = 1, 2, \dots, m$  için  $g_{ir} \leq g_{ik}$  ise II. oyuncunun  $II_r$  stratejisi  $II_k$  stratejisine baskındır. Burada  $II_r$  stratejisine **baskın strateji**,  $II_k$  stratejisine de **bastırılan strateji** denir. Bu durum  $II_r \geq II_k$  şeklinde gösterilir.*

Şimdi de bu tanımları yorumlayalım. Eğer I. oyuncunun  $I_l$  stratejisi  $I_s$  stratejisine baskın ise II. oyuncu hangi stratejiyi seçerse seçsin I. oyuncu  $I_l$  stratejisi ile oynadığında kendisine  $I_s$  stratejisi ile elde edebileceği kazançtan daha fazla kazanç sağlar. Bir başka ifadeyle I. oyuncu  $I_s$  stratejisi ile oynarsa kendisine elde edebileceği kazançtan daha fazla kazanç sağlayamaz. Bu yüzden I. oyuncu  $I_l$  stratejisini kullanır. Benzer şekilde II. oyuncunun  $II_r$  stratejisi  $II_k$  stratejisine baskın ise I. oyuncu hangi stratejiyi seçerse seçsin II. oyuncu  $II_r$  stratejisi ile oynadığında  $II_k$  stratejisi ile verebileceği kayıptan daha az kayıp verir. Bir başka ifadeyle II. oyuncu  $II_k$  stratejisi ile oynarsa  $II_r$  stratejisi ile verebileceği kayıptan daha fazla kayıp verir. Bu yüzden II. oyuncu  $II_r$  stratejisini kullanır.

Bu ifadelerden görüldüğü üzere baskın stratejiler oyunun çözümünü kolaylaştırır.

**Tanım 2.1.24.** Verilen bir oyunda bastırılan strateji oyundan atıldıktan sonra oluşan oyuna *sadeleştirilmiş oyun* denir.

**Önerme 2.1.25.** *Sadeleştirilmiş bir oyunun çözümü verilen oyunun da çözümüdür.*

*Kanıt.* Verilen oyunun getiri matrisi

$$\mathbf{G} = \begin{matrix} & \text{II}_1 & \text{II}_2 & \dots & \text{II}_n \\ \text{I}_1 & \left( \begin{matrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1n} \end{matrix} \right) \\ \text{I}_2 & \left( \begin{matrix} g_{21} & g_{22} & \dots & g_{2n} \end{matrix} \right) \\ \vdots & \left( \begin{matrix} \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{matrix} \right) \\ \text{I}_m & \left( \begin{matrix} g_{m1} & g_{m2} & \dots & g_{mn} \end{matrix} \right) \end{matrix}_{m \times n}$$

olsun.  $I_2 \geq I_1$  olduğunu kabul edelim. O halde  $j = 1, 2, \dots, n$  için  $g_{2j} \geq g_{1j}$  olur. Dolayısıyla  $I_1$  stratejisi bastırılan strateji olduğundan getiri matrisinden çıkararak oyunu sadeleştirelim. O halde sadeleştirilmiş oyunun getiri matrisi

$$\mathbf{G}_1 = \begin{matrix} & \text{II}_1 & \text{II}_2 & \dots & \text{II}_n \\ \text{I}_2 & \left( \begin{matrix} g_{21} & g_{22} & \dots & g_{2n} \end{matrix} \right) \\ \text{I}_3 & \left( \begin{matrix} g_{31} & g_{32} & \dots & g_{3n} \end{matrix} \right) \\ \vdots & \left( \begin{matrix} \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{matrix} \right) \\ \text{I}_m & \left( \begin{matrix} g_{m1} & g_{m2} & \dots & g_{mn} \end{matrix} \right) \end{matrix}_{(m-1) \times n}$$

olur.  $\mathbf{G}$  getiri matrisi ile verilen oyunda sırasıyla I. ve II. oyuncunun karma stratejileri kümesi  $X_m$  ve  $Y_n$ ,  $\mathbf{G}_1$  getiri matrisi ile verilen oyunda ise sırasıyla I. ve II. oyuncunun karma stratejileri kümesi  $X_m^s$  ve  $Y_n^s$  olsun. II. oyuncunun saf stratejilerinin sayısı değişmediğinden  $Y_n^s = Y_n$  olur. Ayrıca  $X_m^s = X_{m-1}$  dir.

$\mathbf{G}$  getiri matrisi ile verilen oyunda  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in X_m$  ve  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in Y_n$  karma stratejileri için oyunun getirisi

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m x_i g_{ij} y_j \quad (2.1.5)$$

dir.  $\mathbf{G}_1$  getiri matrisi ile verilen oyunda yani sadeleştirilmiş oyunda  $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_m) \in X_m^s$  ve  $\tilde{\mathbf{y}} = (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_n) \in Y_n^s$  karma stratejileri için oyunun getirisi

$$\tilde{g}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=2}^m \tilde{x}_i g_{ij} \tilde{y}_j \quad (2.1.6)$$

olur.

Sadeleştirilmiş oyunda sırasıyla I. ve II. oyuncunun optimal stratejileri  $\tilde{\mathbf{x}}^* = (x_2^*, \dots, x_m^*) \in X_m^s$ ,  $\tilde{\mathbf{y}}^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*) \in Y_n^s$  ve oyunun değeri de  $\nu$  olsun.

Yani  $\mathbf{G}_1$  getiri matrisi ile verilen oyunun çözümü  $(\tilde{\mathbf{x}}^*, \tilde{\mathbf{y}}^*, \nu)$  olsun. O halde sadeleştirilmiş oyunun çözümü  $(\tilde{\mathbf{x}}^*, \tilde{\mathbf{y}}^*, \nu)$  olduğundan Teorem 2.1.16 gereği

$$\text{keyfi } \tilde{\mathbf{y}} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in Y_n^s \text{ için } \tilde{g}(\tilde{\mathbf{x}}^*, \tilde{\mathbf{y}}) \geq \nu$$

ve

$$\text{keyfi } \tilde{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in X_m^s \text{ için } \tilde{g}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}^*) \leq \nu$$

olur.

$\mathbf{G}$  getiri matrisi ile verilen oyunda ise sırasıyla I. ve II. oyuncunun optimal stratejileri  $\mathbf{x}^* = (0, x_2^*, \dots, x_m^*) \in X_m$  ve  $\mathbf{y}^* = \tilde{\mathbf{y}}^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*) \in Y_n = Y_n^s$  olsun.  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \nu)$  üçlününün  $\mathbf{G}$  getiri matrisi ile verilen oyunun çözümü olduğunu gösterelim. Bunun için önce

$$\text{keyfi } \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in Y_n \text{ için } g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) \geq \nu$$

olduğunu gösterelim. Keyfi  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in Y_n$  alalım.  $Y_n = Y_n^s$  olduğundan  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in Y_n^s$  olur.  $\mathbf{x}^* = (0, x_2^*, \dots, x_m^*) \in X_m$ ,  $\tilde{\mathbf{x}}^* = (x_2^*, \dots, x_m^*) \in X_m^s$  olduğundan (2.1.5) ve (2.1.6) dan

$$\begin{aligned} g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m x_i^* g_{ij} y_j \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=2}^m x_i^* g_{ij} y_j \\ &= \tilde{g}(\tilde{\mathbf{x}}^*, \mathbf{y}) \\ &= \tilde{g}(\tilde{\mathbf{x}}^*, \tilde{\mathbf{y}}) \end{aligned}$$

olur.  $g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) = \tilde{g}(\tilde{\mathbf{x}}^*, \tilde{\mathbf{y}})$  olup ve  $\tilde{g}(\tilde{\mathbf{x}}^*, \tilde{\mathbf{y}}) \geq \nu$  olduğundan  $g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) \geq \nu$  olduğu elde edilir.

Şimdi de

$$\text{keyfi } \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in X_m \text{ için } g(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \leq \nu$$

olduğunu gösterelim. Keyfi  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in X_m$  alalım.

$$\begin{aligned} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m x_i g_{ij} y_j^* \\ &= \sum_{j=1}^n x_1 g_{1j} y_j^* + \sum_{j=1}^n x_2 g_{2j} y_j^* + \sum_{j=1}^n \sum_{i=3}^m x_i g_{ij} y_j^* \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

dir.  $I_2 \geq I_1$  olup keyfi  $j = 1, 2, \dots, n$  için  $g_{2j} \geq g_{1j}$  olduğundan ve (2.1.7) eşitliğinden

$$\begin{aligned} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) &\leq \sum_{j=1}^n x_1 g_{2j} y_j^* + \sum_{j=1}^n x_2 g_{2j} y_j^* + \sum_{j=1}^n \sum_{i=3}^m x_i g_{ij} y_j^* \\ &\leq \sum_{j=1}^n (x_1 + x_2) g_{2j} y_j^* + \sum_{j=1}^n \sum_{i=3}^m x_i g_{ij} y_j^* \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

olur.

$\tilde{\mathbf{x}} = (x_1 + x_2, x_3, \dots, x_m)$  olsun. Ayrıca  $\tilde{\mathbf{x}} = (x_1 + x_2, x_3, \dots, x_m) \in X_m^s$  olur.  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_m) \in X_m$  keyfi sabitlenmiş olduğundan  $\tilde{\mathbf{x}} = (x_1 + x_2, x_3, \dots, x_m) \in X_m^s$  de keyfi olur.  $\tilde{\mathbf{y}}^* = \mathbf{y}^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*) \in Y_n = Y_n^s$  olup (2.1.6) gereği ve  $\tilde{\mathbf{x}} = (x_1 + x_2, x_3, \dots, x_m)$  den

$$\tilde{g}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}^*) = \sum_{j=1}^n (x_1 + x_2) g_{2j} y_j^* + \sum_{j=1}^n \sum_{i=3}^m x_i g_{ij} y_j^* \quad (2.1.9)$$

olur.

O halde (2.1.8) ve (2.1.9) dan

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \leq \tilde{g}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}^*) \leq \nu$$

elde edilir.

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_m) \in X_m$  keyfi seçildiğinden  $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \leq \nu$  olduğu elde edilir. Teorem 2.1.16 gereği  $g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) \geq \nu$  ve  $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \leq \nu$  olup  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \nu)$  üçlüsü  $\mathbf{G}$  getiri matrisi ile verilen oyunun çözümü olarak elde edilir.  $\square$

Önerme 2.1.25 ten görüldüğü üzere sadeleştirilmiş bir oyunun çözümü verilen oyunun çözümü olup oyunun sadeleştirilmesi oyunun çözümünü kolaylaştıracağından öncelikle oyun sadeleştirilebiliyorsa sadeleştirilmelidir. Fakat bu önermenin tersi doğru değildir. Şimdi bunu bir örnekle gösterelim.

**Örnek 2.1.26.** *Getiri matrisi*

$$\mathbf{G} = \begin{matrix} & \Pi_1 & \Pi_2 \\ \begin{matrix} I_1 \\ I_2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

*ile verilen oyunu ele alalım.*

$\Pi_1 \geq \Pi_2$  olduğundan oyunu sadeleştirirsek yani  $\Pi_2$  stratejisini çıkarırsak sadeleştirilmiş oyunun matrisi

$$\mathbf{G}_1 = \begin{matrix} & \Pi_1 \\ \begin{matrix} I_1 \\ I_2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

olur.

*Getiri matrisi  $\mathbf{G}_1$  olan oyunda  $I_1 \geq I_2$  olduğundan bu oyunu da sadeleştirirsek yani  $I_2$  stratejisini çıkarırsak yeni oyunun getiri matrisi*

$$\mathbf{G}_2 = \begin{matrix} & \Pi_1 \\ I_1 & \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

olur.

Dolayısıyla  $\mathbf{G}_2$  olan oyunda her oyuncunun tek stratejisi olup bu oyunun çözümü  $(\mathbf{I}_1, \mathbf{II}_1, 1)$  olarak bulunur.

Şimdi de getiri matrisi  $\mathbf{G}$  olan oyunun çözümünü bulalım. Sırasıyla I. ve II. oyuncunun  $\mathbf{x} = (x, 1 - x) \in X_2$  ve  $\mathbf{y} = (y, 1 - y) \in Y_2$  karma stratejileri için oyunun getirisi

$$\begin{aligned} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 1 \cdot xy + 1 \cdot x(1 - y) + (-1) \cdot (1 - x)y + 0 \cdot (1 - x)(1 - y) \\ &= xy + x - xy - y + xy \\ &= x - y + xy \end{aligned}$$

olur. Oyunun değeri

$$\begin{aligned} \nu &= \min_{\mathbf{y} \in Y_2} \max_{\mathbf{x} \in X_2} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \min_{y \in [0,1]} \max_{x \in [0,1]} [x - y + xy] \\ &= \min_{y \in [0,1]} \max_{x \in [0,1]} [x(1 + y) - y] \\ &= \min_{y \in [0,1]} [(1 + y) - y] \\ &= 1 \end{aligned}$$

olur.

Şimdi de  $\mathbf{x}^* = (1, 0) \in X_2$  ve keyfi  $\mathbf{y} = (y, 1 - y) \in Y_2$ ,  $y \in [0, 1]$  stratejilerini alalım. O halde  $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x - y + xy$  den

$$g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) = 1 - y + y = 1$$

bulunur. Keyfi  $\mathbf{y} \in Y_2$  için  $g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) \geq 1$  olur.

Şimdi ise keyfi  $\mathbf{y}^* = (y^*, 1 - y^*) \in Y_2$  ve keyfi  $\mathbf{x} = (x, 1 - x)$  alalım. O halde  $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x - y + xy$  den

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) = x - y^* + xy^* \leq 1 - y^* + y^* = 1$$

olur. Böylece son eşitsizlikten keyfi  $\mathbf{x} \in X_2$  için  $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \leq 1$  elde edilir.

Dolayısıyla  $g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) \geq 1$ ,  $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \leq 1$  olup Teorem 2.1.16 dan  $\mathbf{x}^* = (1, 0) \in X_2$  ve keyfi  $\mathbf{y}^* = (y^*, 1 - y^*) \in Y_2$  stratejileri için  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, 1)$  (veya  $(\mathbf{I}_1, \mathbf{y}^*, 1)$ ) üçlüsü  $\mathbf{G}$  getiri matrisi ile verilen oyunun çözümü olur. Fakat sadeleştirilmiş oyunun tek çözümü  $(\mathbf{I}_1, \mathbf{II}_1, 1)$  üçlüsüdür.

**Tanım 2.1.27.** Keyfi  $j = 1, 2, \dots, n$  için  $g_{lj} > g_{sj}$  ise I. oyuncunun  $\mathbf{I}_l$  stratejisi  $\mathbf{I}_s$  stratejisine kesin baskındır. Burada  $\mathbf{I}_l$  stratejisine **kesin baskın strateji**,  $\mathbf{I}_s$  stratejisine de **kesin bastırılan strateji** denir. Benzer şekilde keyfi  $i = 1, 2, \dots, m$  için  $g_{ir} < g_{ik}$  ise II. oyuncunun  $\mathbf{II}_r$  stratejisi  $\mathbf{II}_k$  stratejisine kesin baskındır. Burada  $\mathbf{II}_r$  stratejisine **kesin baskın strateji**,  $\mathbf{II}_k$  stratejisine de **kesin bastırılan strateji** denir.

**Önerme 2.1.28.** Bir oyunda kesin bastırılan strateji atılırsa, oyunun çözümü sadeleştirilmiş oyunun da çözümü olur.

### 2.1.5 Gereken Stratejiler

İki kişilik sıfır toplamalı  $m \times n$  matris oyunun çözümü  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \nu)$  olsun. Burada I. oyuncunun optimal stratejisinin  $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*) \in X_m$ , II. oyuncunun optimal stratejisinin  $\mathbf{y}^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*) \in Y_n$  ve oyunun değerinin  $\nu$  olduğunu biliyoruz. Şimdi I. ve II. oyuncu için gereken strateji kavramını tanımlayalım.

**Tanım 2.1.29.** I. oyuncunun  $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*) \in X_m$  optimal stratejisinde  $x_{i_*}^* > 0$  ise  $I_{i_*}$  saf stratejisine I. oyuncunun **gereken (öz) stratejisi** denir.

**Tanım 2.1.30.** II. oyuncunun  $\mathbf{y}^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*) \in Y_n$  optimal stratejisinde  $y_{j_*}^* > 0$  ise  $II_{j_*}$  saf stratejisine II. oyuncunun **gereken (öz) stratejisi** denir.

Sıradaki teorem bize I. oyuncu  $\mathbf{x}^*$  optimal stratejisi ile oynarken II. oyuncu gereken  $II_{j_*}$  stratejisi ile oynarsa oyunun getirisinin verilen oyunun değerine eşit olacağını veya benzer olarak II. oyuncu  $\mathbf{y}^*$  optimal stratejisi ile oynarken I. oyuncu gereken  $I_{i_*}$  stratejisi ile oynarsa oyunun getirisinin verilen oyunun değerine eşit olacağını ifade etmektedir.

**Teorem 2.1.31.**  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \nu)$  üçlüsü  $m \times n$  matris oyununun çözümü,  $I_{i_*}$  ve  $II_{j_*}$  stratejileri de sırasıyla I. ve II. oyuncunun gereken stratejileri olsun. Bu durumda

$$g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) = g(I_{i_*}, \mathbf{y}^*) = \nu$$

ve

$$g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) = g(\mathbf{x}^*, II_{j_*}) = \nu$$

olur.

*Kanıt.*  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \nu)$  oyunun çözümü olduğundan,  $\mathbf{x}^* \in X_m$  stratejisi I. oyuncunun optimal stratejisi,  $\mathbf{y}^* \in Y_n$  stratejisi II. oyuncunun optimal stratejisi ve  $\nu$  oyunun değeri olur.

$\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*)$ ,  $\mathbf{y}^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*)$  olsun. Genelliği bozmadan, keyfi  $i = 1, 2, \dots, k$  ( $k \leq m$ ) için  $x_i^* > 0$  olmak üzere

$$\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*, 0, \dots, 0)$$

olduğunu kabul edelim. Yani  $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*)$  optimal stratejisinde saf stratejilerin sıra numaralarını değiştirerek gereken stratejileri ilk sıraya alalım. Keyfi  $1 \leq i_* \leq k$  alalım. O halde  $I_{i_*}$  stratejisi I. oyuncunun gereken stratejisidir ve gereken strateji tanımı gereği  $x_{i_*}^* > 0$  olur.

Şimdi  $g(\mathbf{I}_{i_*}, \mathbf{y}^*) = \nu$  olduğunu kanıtlayalım.  $g(\mathbf{I}_{i_*}, \mathbf{y}^*) \neq \nu$  olduğunu kabul edelim.  $\mathbf{y}^* \in Y_n$  stratejisi II. oyuncunun optimal stratejisi olduğundan

$$\text{keyfi } \mathbf{x} \in X_m \text{ için } g(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \leq \nu$$

olur. Bu eşitsizlikte  $\mathbf{x} \in X_m$  stratejilerini saf stratejiler alırsak

$$\text{keyfi } i = 1, 2, \dots, m \text{ için } g(\mathbf{I}_i, \mathbf{y}^*) \leq \nu \quad (2.1.10)$$

elde ederiz. Ayrıca  $g(\mathbf{I}_{i_*}, \mathbf{y}^*) \neq \nu$  kabulünden ve (2.1.10) dan

$$g(\mathbf{I}_{i_*}, \mathbf{y}^*) = \nu_* < \nu \quad (2.1.11)$$

olduğu bulunur.

$(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \nu)$  oyunun çözümü olduğundan, Sonuç 2.1.17 gereği

$$\nu = g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \quad (2.1.12)$$

dir. (2.1.10), (2.1.11), (2.1.12) den ve  $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*, 0, \dots, 0), x_{i_*}^* > 0$  olduğundan,

$$\begin{aligned} \nu &= g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m x_i^* g_{ij} y_j^* = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^k x_i^* g_{ij} y_j^* \\ &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n x_i^* g_{ij} y_j^* = \sum_{i=1}^k \left( \sum_{j=1}^n g_{ij} y_j^* \right) x_i^* \\ &= \sum_{i=1}^k g(\mathbf{I}_i, \mathbf{y}^*) x_i^* \\ &= g(\mathbf{I}_1, \mathbf{y}^*) x_1^* + \dots + g(\mathbf{I}_{i_*}, \mathbf{y}^*) x_{i_*}^* + \dots + g(\mathbf{I}_k, \mathbf{y}^*) x_k^* \\ &\leq \nu x_1^* + \dots + \nu_* x_{i_*}^* + \dots + \nu x_k^* \\ &< \nu x_1^* + \dots + \nu x_{i_*}^* + \dots + \nu x_k^* = \nu \end{aligned}$$

olup  $\nu < \nu$  elde edilir. Bu ise mümkün değildir. O halde varsayımımız doğru değildir. Yani  $g(\mathbf{I}_{i_*}, \mathbf{y}^*) = \nu$  olmalıdır.

II. oyuncunun gereken  $\Pi_{j_*}$  stratejisi için de  $g(\mathbf{x}^*, \Pi_{j_*}) = \nu$  olduğu benzer şekilde kanıtlanır.  $\square$

## 2.2 İki Kişilik Sıfır Toplamlı Sonlu Oyunların Çözümü

Bu bölümde ilk olarak kesin tanımlı matris oyunlar ifade edilecek ve çözümü ele alınacaktır. Ardından  $2 \times 2$  matris oyunların çözümü incelenecektir. Daha sonra da  $2 \times n$  matris oyunların çözümünü bulmak için kullanılan grafik yöntem verilecektir. Son olarak da lineer programlama yöntemi yardımıyla  $m \times n$  matris oyunların çözümünü bulmak için bir yöntem verilecektir.

### 2.2.1 Kesin Tanımlı Matris Oyunların Çözümü

**Tanım 2.2.1.** *Denge noktası olan matris oyunlara kesin tanımlı matris oyunları denir.*

Getiri matrisi

$$\mathbf{G} = \begin{matrix} & \text{II}_1 & \text{II}_2 & \dots & \text{II}_n \\ \text{I}_1 & \left( \begin{array}{cccc} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1n} \end{array} \right) \\ \text{I}_2 & \left( \begin{array}{cccc} g_{21} & g_{22} & \dots & g_{2n} \end{array} \right) \\ \vdots & \left( \begin{array}{cccc} \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{array} \right) \\ \text{I}_m & \left( \begin{array}{cccc} g_{m1} & g_{m2} & \dots & g_{mn} \end{array} \right) \end{matrix}$$

ile verilen  $m \times n$  matris oyununda  $i$ . satırın minimum değeri  $j$ . sütunun maksimum değeri olduğunda elde edilen  $g_{ij}$  getirisi oyunun denge noktasıdır.  $g_{ij}$  denge noktası kesin tanımlı oyunun değeri olup  $g_{ij} = \nu$ , I. oyuncunun optimal stratejisi  $I_i$ , II. oyuncunun optimal stratejisi  $II_j$  stratejisi olmak üzere  $(I_i, II_j, \nu)$  üçlüsü kesin tanımlı matris oyunların çözümü olur.

**Örnek 2.2.2.** *Getiri matrisi*

$$\mathbf{G} = \begin{matrix} & \text{II}_1 & \text{II}_2 & \text{II}_3 & \text{II}_4 \\ \text{I}_1 & \left( \begin{array}{cccc} 8 & 3 & 2 & 5 \end{array} \right) \\ \text{I}_2 & \left( \begin{array}{cccc} 3 & 2 & 0 & 6 \end{array} \right) \\ \text{I}_3 & \left( \begin{array}{cccc} -2 & 4 & 1 & -7 \end{array} \right) \end{matrix}$$

ile verilen oyunu ele alalım.

I. oyuncu kazanmayı hedeflediğinden kendisi için her bir satırdaki minimum değer arasından maksimum olanını seçecektir. O halde her bir satırın minimum değeri sırasıyla 2, 0, -7 olmak üzere I. oyuncu bu değerler arasından maksimum olan 2 getirisini sağlayacak  $I_1$  stratejisini seçer. Bu durumda II. oyuncu da kaybını en aza indirmek için her bir sütundaki maksimum değer arasından

minimum olanını seçecektir. Sütunlardaki maksimum değerler 8,4,2,6 olmak üzere II. oyuncu bu değerler arasından minimum olan 2 getirisini sağlayacak  $\Pi_3$  stratejisini seçer. O halde oyunda bir denge noktası vardır. Böylece oyunun değeri olan 2 getirisini elde etmek için I. oyuncu  $I_1$  stratejisini, II oyuncu da  $\Pi_3$  stratejisini kullanacaklardır.

Kısaca ifade edecek olursak,  $g_{13}$  getirisi birinci satırın minimumu iken üçüncü sütunun maksimumudur. Dolayısıyla denge noktası vardır ve oyun kesin tanımlı bir oyundur. Oyunun değeri de  $\nu = 2$  dir. I. oyuncunun optimal stratejisi  $I_1$  ve II oyuncunun optimal stratejisi de  $\Pi_3$  olmak üzere  $(I_1, \Pi_3, 2)$  üçlüsü kesin tanımlı matris oyunun çözümü olarak bulunur.

## 2.2.2 $2 \times 2$ Matris Oyunların Çözümü

Getiri matrisi

$$\mathbf{G} = \begin{matrix} & \begin{matrix} \Pi_1 & \Pi_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} I_1 \\ I_2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (2.2.13)$$

ile verilen  $2 \times 2$  matris oyununu ele alalım. Bu oyunu çözebilmek için denge noktasının olup olmadığına bakılır. Eğer denge noktası yoksa çözüm şu şekilde bulunur [20].

$g_{11} \geq g_{12}$  ise  $g_{12} < g_{22}$  dir. Aksi takdirde  $g_{12}$  denge noktası olur.  $g_{12} < g_{22}$  olduğu için  $g_{22} > g_{21}$  olmalıdır. Aksi takdirde  $g_{22}$  denge noktası olur. Dolayısıyla  $g_{21} < g_{11}$  ve  $g_{11} > g_{12}$  olduğunu görürüz. Bu ise denge noktası olmadığında hem  $g_{11} > g_{12}$ ,  $g_{12} < g_{22}$ ,  $g_{22} > g_{21}$ ,  $g_{21} < g_{11}$  hem de  $g_{11} < g_{12}$ ,  $g_{12} > g_{22}$ ,  $g_{22} < g_{21}$ ,  $g_{21} > g_{11}$  olduğunu gösterir.

II. oyuncu tarafından seçilen strateji ne olursa olsun I. oyuncu kendi getirisini değiştirmeyecek  $\mathbf{x} = (x, 1 - x)$  karma stratejisini kullanır. Bu durumda

$$g_{11} \cdot x + g_{21} \cdot (1 - x) = g_{12} \cdot x + g_{22} \cdot (1 - x)$$

olur. Bu eşitlikten  $x$  değeri

$$x = \frac{g_{22} - g_{21}}{(g_{11} - g_{12}) + (g_{22} - g_{21})}$$

olarak bulunur.

Burada denge noktası olmadığı için  $(g_{11} - g_{12})$  ve  $(g_{22} - g_{21})$  nin her ikisi de pozitif veya negatiftir. Dolayısıyla  $0 < x < 1$  dir. Buradan I. oyuncunun getirisi

$$\nu = g_{11} \cdot x + g_{21} \cdot (1 - x) = \frac{g_{11} \cdot g_{22} - g_{12} \cdot g_{21}}{(g_{11} - g_{12}) + (g_{22} - g_{21})}$$

dir.

Benzer şekilde I. oyuncu tarafından seçilen strateji ne olursa olsun II. oyuncu kendi getirisini değiştirmeyecek  $\mathbf{y} = (y, 1 - y)$  karma stratejisini kullanır. Bu durumda

$$g_{11} \cdot y + g_{12} \cdot (1 - y) = g_{21} \cdot y + g_{22} \cdot (1 - y)$$

olur. Bu eşitlikten  $y$  değeri

$$y = \frac{g_{22} - g_{12}}{(g_{11} - g_{12}) + (g_{22} - g_{21})}$$

olarak bulunur ve  $0 < y < 1$  dir. II. oyuncunun getirisi I. oyuncu tarafından elde edilen getiri ile aynı olur. Yani,

$$g_{11} \cdot y + g_{12} \cdot (1 - y) = \frac{g_{11} \cdot g_{22} - g_{12} \cdot g_{21}}{(g_{11} - g_{12}) + (g_{22} - g_{21})} = \nu$$

olur.

$\mathbf{x}$  ve  $\mathbf{y}$  optimal stratejiler,  $\nu$  de oyunun değeri olmak üzere  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \nu)$  üçlüsü getiri matrisi (2.2.13) ile verilen  $2 \times 2$  matris oyununun çözümü olur.

### Örnek 2.2.3.

$$\mathbf{G} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{II}_1 & \text{II}_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{I}_1 \\ \text{I}_2 \end{array} & \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \end{array}$$

ile verilen  $2 \times 2$  matris oyununu ele alalım.

İlk önce bu oyunun denge noktasının olup olmadığına bakalım. I. oyuncu için satırlardaki minimum değerler sırasıyla  $-1$  ve  $-5$  tir. Bu değerlerden maksimum olanı  $-1$  dir. II. oyuncu için ise sütunlardaki maksimum değerlerin her ikisi de  $2$  dir. Yani bu oyunda denge noktası yoktur. O halde

$$x = \frac{g_{22} - g_{21}}{(g_{11} - g_{12}) + (g_{22} - g_{21})} = \frac{-5 - 2}{(-1 - 2) + (-5 - 2)} = \frac{7}{10}$$

$$y = \frac{g_{22} - g_{12}}{(g_{11} - g_{12}) + (g_{22} - g_{21})} = \frac{-5 - 2}{(-1 - 2) + (-5 - 2)} = \frac{7}{10}$$

$$\nu = \frac{g_{11} \cdot g_{22} - g_{12} \cdot g_{21}}{(g_{11} - g_{12}) + (g_{22} - g_{21})} = \frac{(-1) \cdot (-5) - 2 \cdot 2}{(-1 - 2) + (-5 - 2)} = \frac{1}{10}$$

olup oyunun çözümü

$$\left( \mathbf{x} = \left( \frac{7}{10}, \frac{3}{10} \right), \mathbf{y} = \left( \frac{7}{10}, \frac{3}{10}, \frac{1}{10} \right) \right)$$

olur.

### 2.2.3 $2 \times n$ Matris Oyunların Çözümü

Bu bölümde öncelikle  $m \times n$  matris oyunların çözüm yönteminde kullanılan ve oyunun değerini karakterize eden bir önerme verilecektir. Daha sonra  $2 \times n$  oyunların çözümünde kullanılan grafik yöntem ele alınacaktır [21].

**Önerme 2.2.4.**  $\nu$  sayısı iki kişilik sıfır toplamlı  $m \times n$  oyunun değeri olsun. O halde

$$\max_{\mathbf{x} \in X_m} \min_{\mathbf{y} \in Y_n} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max_{\mathbf{x} \in X_m} \min_{j=1,2,\dots,n} g(\mathbf{x}, \Pi_j) = \nu \quad (2.2.14)$$

$$\min_{\mathbf{y} \in Y_n} \max_{\mathbf{x} \in X_m} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \min_{\mathbf{y} \in Y_n} \max_{i=1,2,\dots,m} g(\Pi_i, \mathbf{y}) = \nu \quad (2.2.15)$$

eşitlikleri doğrudur.

*Kanıt.* Ele aldığımız  $m \times n$  oyunun çözümü  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \nu)$  olsun. O halde

$$\text{keyfi } \mathbf{y} \in Y_n \text{ için } g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) \geq \nu \quad (2.2.16)$$

$$\text{keyfi } \mathbf{x} \in X_m \text{ için } g(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \leq \nu \quad (2.2.17)$$

olur. Ayrıca Teorem 2.1.12 den

$$\max_{\mathbf{x} \in X_m} \min_{\mathbf{y} \in Y_n} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \min_{\mathbf{y} \in Y_n} \max_{\mathbf{x} \in X_m} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \nu \quad (2.2.18)$$

olduğunu biliyoruz. Keyfi  $j = 1, 2, \dots, n$  için  $\Pi_j$  saf stratejisi  $Y_n$  karma stratejiler kümesine ait olduğundan (2.2.16) eşitsizliğinden

$$g(\mathbf{x}^*, \Pi_j) \geq \nu$$

bulunur. O halde

$$\min_{j=1,2,\dots,n} g(\mathbf{x}^*, \Pi_j) \geq \nu$$

olup buradan

$$\max_{\mathbf{x} \in X_m} \min_{j=1,2,\dots,n} g(\mathbf{x}, \Pi_j) \geq \nu \quad (2.2.19)$$

olduğu elde edilir. Şimdi

$$\max_{\mathbf{x} \in X_m} \min_{j=1,2,\dots,n} g(\mathbf{x}, \Pi_j) = \nu \quad (2.2.20)$$

olduğunu kanıtlayalım. Bu eşitliğin doğru olmadığını varsayalım. O halde (2.2.19) dan

$$\max_{\mathbf{x} \in X_m} \min_{j=1,2,\dots,n} g(\mathbf{x}, \Pi_j) = \nu_* > \nu$$

olur. Bu durumda

$$\min_{j=1,2,\dots,n} g(\tilde{\mathbf{x}}, \Pi_j) = \nu_* > \nu$$

olacak şekilde  $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_m) \in X_m$  vardır. Buradan

$$\text{keyfi } j = 1, 2, \dots, n \text{ için } g(\tilde{\mathbf{x}}, \Pi_j) \geq \nu_* > \nu \quad (2.2.21)$$

bulunur. Şimdi keyfi  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in Y_n$  stratejisini alalım. Getiri tanımından ve (2.2.21) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} g(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \tilde{x}_i g_{ij} y_j = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^m \tilde{x}_i g_{ij} \right) y_j \\ &= \sum_{j=1}^n g(\tilde{\mathbf{x}}, \Pi_j) y_j \geq \sum_{j=1}^n \nu_* \cdot y_j = \nu_* \end{aligned}$$

olur. Yani

$$\text{keyfi } \mathbf{y} \in Y_n \text{ için } g(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) \geq \nu_* \quad (2.2.22)$$

olur.  $\nu_* > \nu$  olduğundan, (2.2.17) den

$$\text{keyfi } \mathbf{x} \in X_m \text{ için } g(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \leq \nu_* \quad (2.2.23)$$

bulunur. O halde (2.2.22), (2.2.23) ve Teorem 2.1.16 dan  $(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{y}^*, \nu_*)$  üçlüsünün verilen oyunun çözümü olduğu elde edilir. Böylece  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \nu)$  ve  $(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{y}^*, \nu_*)$  üçlüleri verilen oyunun çözümü olur. Oyunun değeri tek olduğundan  $\nu = \nu_*$  olur. Bu ise  $\nu_* > \nu$  olması ile çelişir. O halde varsayımımız doğru değildir ve (2.2.20) eşitliği geçerlidir. Dolayısıyla (2.2.20) ve (2.2.18) den (2.2.14) eşitliğinin doğruluğu elde edilir.

(2.2.15) eşitliğinin doğruluğu da benzer şekilde kanıtlanır.  $\square$

Şimdi  $2 \times n$  oyunların çözümünü bulmak için kullanılan bir grafik yöntem verelim. Getiri matrisi

$$\mathbf{G} = \begin{matrix} & \begin{matrix} \Pi_1 & \Pi_2 & \dots & \Pi_n \end{matrix} \\ \begin{matrix} I_1 \\ I_2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \dots & g_{2n} \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (2.2.24)$$

ile verilen iki kişilik sıfır toplamlı  $2 \times n$  oyununu ele alalım. Oyunun değeri  $\nu_*$  olsun.

I. oyuncunun iki tane saf stratejisi olduğundan karma stratejisi  $\mathbf{x} = (x, 1 - x)$ ,  $x \in [0, 1]$  biçiminde yazılabilir. Bu durumda keyfi  $j = 1, 2, \dots, n$  için

$$g(\mathbf{x}, \Pi_j) = g_{1j}x + g_{2j}(1 - x), \quad x \in [0, 1]$$

olduğu elde edilir. Keyfi  $j = 1, 2, \dots, n$  için  $\varphi_j(\cdot) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  olmak üzere

$$\varphi_j(x) = g(\mathbf{x}, \Pi_j)$$

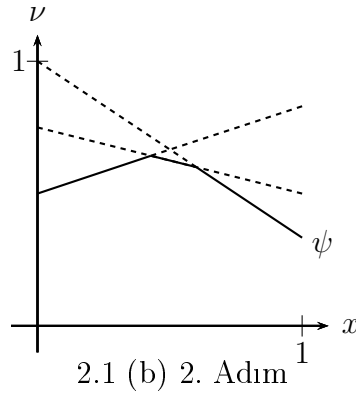
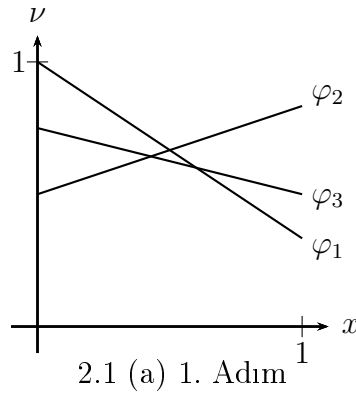
şeklinde gösterirsek

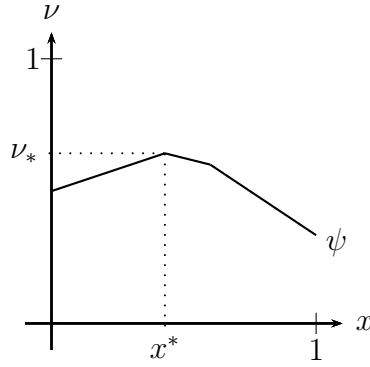
$$\varphi_j(x) = g_{1j}x + g_{2j}(1 - x), \quad x \in [0, 1]$$

olur. Önerme 2.2.4 ten

$$\nu_* = \max_{\mathbf{x} \in X_2} \min_{j=1,2,\dots,n} g(\mathbf{x}, \Pi_j) = \max_{\mathbf{x} \in [0,1]} \min_{j=1,2,\dots,n} \varphi_j(x)$$

olup  $\nu_*$  sayısı getiri matrisi (2.2.24) ile verilen oyunun değeri olur.





2.1 (c) 3. ve 4. Adımlar

Şekil 2.1: Oyunun çözümünü bulmak için bir grafik yöntem

Şimdi (2.2.24) getiri matrisi ile verilen oyunun çözümünü bulabilmek için grafik yöntemin adımlarını verelim.

1. Adım  $Ox\nu$  düzleminde keyfi  $j = 1, 2, \dots, n$  için  $\varphi_j(\cdot) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonlarının grafiklerini çizelim (Şekil 2.1(a)).

2. Adım Her  $x \in [0, 1]$  için

$$\psi(x) = \min_{j=1,2,\dots,n} \varphi_j(x)$$

olmak üzere  $\psi(\cdot) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonunun grafiğini çizelim. (Şekil 2.1(b)).

3. Adım  $\psi(\cdot) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonunun grafiğini kullanarak, bu fonksiyonun  $[0, 1]$  aralığındaki maksimumu  $\nu_* = \max_{x \in [0, 1]} \psi(x)$  bulunur (Şekil 2.1(c)).

Dolayısıyla getiri matrisi (2.2.24) ile verilen oyunun değeri elde edilmiş olur.

4. Adım  $\psi(\cdot) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonunun grafiğini kullanarak, bu fonksiyona  $[0, 1]$  aralığında maksimum değerini veren  $x^* \in [0, 1]$  sayısı bulunur (Şekil 2.1(c)). Dolayısıyla  $\nu_*$  oyunun değeri olmak üzere

$$\nu_* = \max_{x \in [0, 1]} \psi(x) = \max_{x \in [0, 1]} \min_{j=1,2,\dots,n} \varphi_j(x) = \min_{j=1,2,\dots,n} \varphi_j(x^*)$$

olduğundan  $\mathbf{x}^* = (x^*, 1-x^*) \in X_2$  karma stratejisi verilen oyunda I. oyuncunun optimal stratejisi olur.

5. Adım II. oyuncunun optimal stratejisi bulunur.

$$J_* = \{j : g(\mathbf{x}^*, \Pi_j) = \nu_*\}$$

olsun.  $\mathbf{y}^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*)$  stratejisi II. oyuncunun karma optimal stratejisi olduğunu kabul edelim. Eğer  $\Pi_{j^*}$  saf stratejisi II. oyuncunun gereken stratejisi ise Teorem 2.1.31 gereği  $g(\mathbf{x}^*, \Pi_{j^*}) = \nu_*$  olduğundan  $j^* \in J_*$  olur.  $j \notin J_*$  için II. oyuncunun  $\Pi_j$  stratejisi gereken strateji değildir. O halde  $\Pi_j$  gereken strateji olmadığında Tanım 2.1.30 gereği  $y_j = 0$  olur.

I. oyuncunun  $\mathbf{x}^* = (x^*, 1 - x^*) \in X_2$  optimal stratejisinde  $x^*$  ve  $1 - x^*$  sayılarından en az biri veya her ikisi de aynı anda sıfırdan farklı olur. Bu durumda

$$I_* = \begin{cases} \{2\} & , \quad x^* = 0 \quad \text{ise} \\ \{1, 2\} & , \quad x^* \in (0, 1) \quad \text{ise} \\ \{1\} & , \quad x^* = 1 \quad \text{ise} \end{cases}$$

olmak üzere Tanım 2.1.29 gereği I. oyuncunun  $i \in I_*$  indisine karşılık  $I_i$  saf stratejisi, gereken strateji olur. Böylece Teorem 2.1.31 gereği keyfi  $i_* \in I_*$  için

$$g(I_{i_*}, \mathbf{y}^*) = \nu_*$$

olur. Bu eşitlik yardımıyla II. oyuncunun  $\mathbf{y}^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*)$  karma optimal stratejisi elde edilir.

Şimdi grafik yöntemi daha iyi anlayabilmek için bir örnek verelim.

**Örnek 2.2.5.**

$$\mathbf{G} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & \Pi_1 & \Pi_2 & \Pi_3 & \Pi_4 \end{array} \\ \begin{array}{l} I_1 \\ I_2 \end{array} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 5 \\ -1 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} \end{array}$$

ile verilen  $2 \times 4$  oyununun çözümünü bulalım.

Öncelikle verilen oyunun sadeleştirilip sadeleştirilmediğine bakalım. Oyunda  $\Pi_3 > \Pi_4$  olduğundan oyun sadeleştirilirse getiri matrisi

$$\mathbf{G}_1 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & \Pi_1 & \Pi_2 & \Pi_3 \end{array} \\ \begin{array}{l} I_1 \\ I_2 \end{array} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

olan oyunu elde ederiz. O halde şimdi bu oyunun çözümünü bulalım.

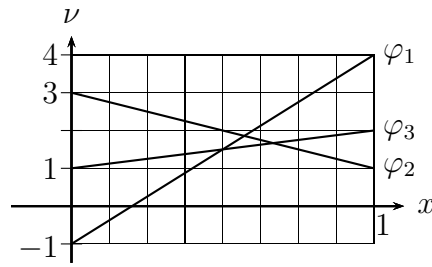
I. oyuncunun  $\mathbf{x} = (x, 1 - x) \in X_2$ ,  $x \in [0, 1]$  karma stratejisi ve II. oyuncunun saf  $\Pi_j$ ,  $j = 1, 2, 3$  stratejileri için  $\varphi_j(x) = g(\mathbf{x}, \Pi_j)$  fonksiyonlarını hesaplayalım.

$$\varphi_1(x) = g(\mathbf{x}, \Pi_1) = 4 \cdot x + (-1) \cdot (1 - x) = -1 + 5x \quad , \quad x \in [0, 1]$$

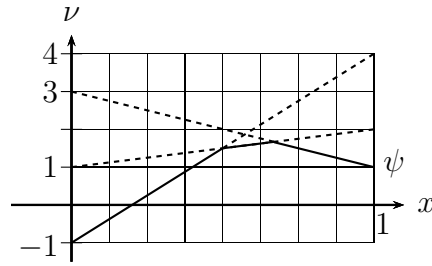
$$\varphi_2(x) = g(\mathbf{x}, \Pi_2) = 1 \cdot x + 3 \cdot (1 - x) = 3 - 2x \quad , \quad x \in [0, 1]$$

$$\varphi_3(x) = g(\mathbf{x}, \Pi_3) = 2 \cdot x + 1 \cdot (1 - x) = 1 + x \quad , \quad x \in [0, 1]$$

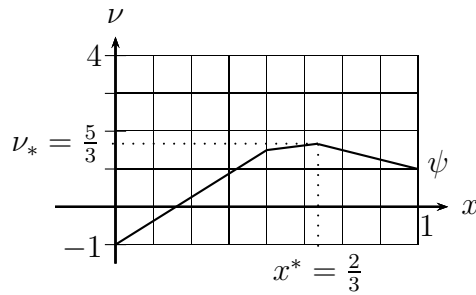
bulunur.



2.2 (a) 1. Adım



2.2 (b) 2. Adım



2.2 (c) 3. ve 4. Adımlar

Şekil 2.2: Getiri matrisi  $\mathbf{G}_1$  olan oyunun grafik yöntemiyle çözümü

1. Adım  $\varphi_j(\cdot) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $j = 1, 2, 3$  fonksiyonlarının grafiklerini çizelim (Şekil 2.2 (a)).

2. Adım Her  $x \in [0, 1]$  için

$$\psi(x) = \min_{j=1,2} \varphi_j(x)$$

olmak üzere  $\psi(\cdot) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonunun grafiğini çizelim. Şekil 2.2 (b) den görüldüğü gibi

$$\psi(x) = \begin{cases} \varphi_1(x) & , \quad x \in [0, \frac{1}{2}] \quad \text{ise} \\ \varphi_3(x) & , \quad x \in (\frac{1}{2}, \frac{2}{3}] \quad \text{ise} \\ \varphi_2(x) & , \quad x \in (\frac{2}{3}, 1] \quad \text{ise} \end{cases}$$

yani

$$\psi(x) = \begin{cases} -1 + 5x & , \quad x \in [0, \frac{1}{2}] \quad \text{ise} \\ 1 + x & , \quad x \in (\frac{1}{2}, \frac{2}{3}] \quad \text{ise} \\ 3 - 2x & , \quad x \in (\frac{2}{3}, 1] \quad \text{ise} \end{cases} \quad (2.2.25)$$

olur (Şekil 2.2 (b)).

3. Adım (2.2.25) ile verilen  $\psi(\cdot) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonunun grafiğini kullanarak (Şekil 2.2 (c)), bu fonksiyonun  $[0, 1]$  aralığındaki maksimumu  $\nu_* = \max_{x \in [0,1]} \psi(x)$  değerini bulalım. Bu fonksiyon maksimum değerini  $x = \frac{2}{3}$  noktasında alır ve bu  $\nu_*$  değeri,  $\nu_* = \frac{5}{3}$  olur. O halde  $\mathbf{G}_1$  oyununun değeri  $\nu_* = \frac{5}{3}$  olur.

4. Adım Şimdi de  $\psi(\cdot) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonuna  $[0, 1]$  aralığında maksimum değerini veren  $x^* \in [0, 1]$  sayısını bulalım. Bu sayı 3. Adım da  $\nu_*$  değerini hesaplariken bulunmuştu. Yani Şekil 2.2 (c) den de görüldüğü üzere  $x^* = \frac{2}{3}$  olur. O halde getiri matrisi  $\mathbf{G}_1$  olan oyunda I. oyuncunun optimal stratejisi  $\mathbf{x}^* = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$  olur.

5. Adım Son olarak da II. oyuncunun optimal stratejisini bulalım. Şekil 2.2 (c) den

$$g(\mathbf{x}^*, \Pi_2) = \frac{5}{3} \quad , \quad g(\mathbf{x}^*, \Pi_3) = \frac{5}{3}$$

yani  $J_* = \{2, 3\}$  olur. Bir başka deyişle  $\Pi_2$  ve  $\Pi_3$  stratejileri II. oyuncunun gereken stratejileri olup,  $\Pi_1$  gereken strateji değildir. Bu durumda II. oyuncunun optimal stratejisi

$$\mathbf{y}^* = (0, y^*, 1 - y^*)$$

şeklinde olur. Ayrıca I. oyuncunun optimal stratejisi  $\mathbf{x}^* = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \in X_2$  olduğundan I. oyuncunun  $I_1$  ve  $I_2$  stratejileri gereken stratejilerdir. O halde

$I_* = \{1, 2\}$  olur.  $\mathbf{G}_1$  oyununun değeri  $\nu_* = \frac{5}{3}$  olduğundan Teorem 2.1.31 gereği

$$g(I_1, \mathbf{y}^*) = \frac{5}{3} \quad \text{ve} \quad g(I_2, \mathbf{y}^*) = \frac{5}{3}$$

ve  $\mathbf{y}^* = (0, y^*, 1 - y^*)$  olduğundan

$$\begin{aligned} g(I_1, \mathbf{y}^*) &= 4 \cdot 0 + 1 \cdot y^* + 2 \cdot (1 - y^*) = 2 - y^* \\ g(I_2, \mathbf{y}^*) &= (-1) \cdot 0 + 3 \cdot y^* + 1 \cdot (1 - y^*) = 1 + 2y^* \end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu durumda

$$2 - y^* = \frac{5}{3} \quad \text{ve} \quad 1 + 2y^* = \frac{5}{3}$$

elde edilir. Bu eşitlikler çözüldüğünde  $y^* = \frac{1}{3}$  bulunur. Dolayısıyla  $\mathbf{G}_1$  getiri matrisi ile verilen oyunda II. oyuncunun optimal stratejisi  $\mathbf{y}^* = (0, y^*, 1 - y^*)$  den

$$\mathbf{y}^* = \left(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

olarak elde edilir. Böylece getiri matrisi  $\mathbf{G}_1$  olan oyunun çözümü

$$\left(\mathbf{x}^* = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \mathbf{y}^* = \left(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \frac{5}{3}\right)$$

üçlüsü olarak bulunur. Önerme 2.1.28 den

$$\left(\mathbf{x}^* = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \mathbf{y}^* = \left(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0\right), \frac{5}{3}\right)$$

üçlüsü getiri matrisi  $\mathbf{G}$  ile verilen oyunun çözümü olur.

#### 2.2.4 $m \times n$ Matris Oyunların Çözümü

Bu bölümde lineer programlama yöntemi yardımıyla iki kişilik sıfır toplamlı  $m \times n$  oyunların çözümü için bir yöntem verilecektir [21].

Getiri matrisi

$$\mathbf{G} = \begin{matrix} & \begin{matrix} \Pi_1 & \Pi_2 & \dots & \Pi_n \end{matrix} \\ \begin{matrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_m \end{matrix} & \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \dots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{m1} & g_{m2} & \dots & g_{mn} \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (2.2.26)$$

ile verilen  $m \times n$  oyununu ele alalım. I. oyuncunun  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in$

$X_m$  ve II. oyuncunun  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in Y_n$  karma stratejileri için oyunun getirisinin

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m x_i g_{ij} y_j$$

olduğunu ve Teorem 2.1.16 dan  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \nu_*)$  üçlüsünün oyunun çözümü olması için gerek ve yeter koşulun

$$\text{keyfi } \mathbf{y} \in Y_n \text{ için } g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) \geq \nu_*$$

$$\text{keyfi } \mathbf{x} \in X_m \text{ için } g(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \leq \nu_*$$

olduğunu biliyoruz. I. oyuncu herhangi bir  $\mathbf{x} \in X_m$  stratejisini seçsin. II. oyuncu kendisi için en iyi strateji olan

$$\min_{\mathbf{y} \in Y_n} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = g(\mathbf{x}, \mathbf{y}(\mathbf{x})) = \nu(\mathbf{x})$$

olacak şekilde  $\mathbf{y}(\mathbf{x}) \in Y_n$  stratejisini seçer. I. oyuncunun amacı getirisini maksimalleştirmek olduğundan, I. oyuncu  $\mathbf{x} \in X_m$  karma stratejilerini değiştirerek  $\nu(\mathbf{x})$  sayısını maksimalleştirmeye, dolayısıyla

$$\begin{aligned} & \mathbf{x} \in X_m \\ & \text{keyfi } \mathbf{y} \in Y_n \text{ için } g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq \nu \end{aligned} \tag{2.2.27}$$

$$\nu \rightarrow \max$$

problemini çözmeye çalışır. Şimdi (2.2.27) probleminin çözümü ile ilişkili bir önerme vereceğiz.

**Önerme 2.2.6.**  $(\mathbf{x}^*, \nu_*)$  ikilisi (2.2.27) probleminin çözümü olsun.  $\nu_*$  sayısı getiri matrisi (2.2.26) ile verilen oyunun değeri,  $\mathbf{x}^* \in X_m$  ise I. oyuncunun optimal stratejisidir.

*Kanıt.*  $(\mathbf{x}^*, \nu_*)$  ikilisi (2.2.27) probleminin çözümü olsun. Bu durumda

$$\text{keyfi } \mathbf{y} \in Y_n \text{ için } g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) \geq \nu_*$$

olur. Bu eşitsizlikten

$$\min_{\mathbf{y} \in Y_n} g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) \geq \nu_* \tag{2.2.28}$$

ve

$$\max_{\mathbf{x} \in X_m} \min_{\mathbf{y} \in Y_n} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq \nu_* \tag{2.2.29}$$

elde edilir. Şimdi

$$\max_{\mathbf{x} \in X_m} \min_{\mathbf{y} \in Y_n} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \nu_*$$

olduğunu kanıtlayalım. Aksini varsayalım. O halde (2.2.29) dan

$$\max_{\mathbf{x} \in X_m} \min_{\mathbf{y} \in Y_n} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \nu_1 > \nu_* \quad (2.2.30)$$

olacak şekilde bir  $\nu_1$  sayısı vardır.  $x \rightarrow \min_{\mathbf{y} \in Y_n} g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  fonksiyonu sürekli olduğundan (2.2.30) dan

$$\min_{\mathbf{y} \in Y_n} g(\mathbf{x}^1, \mathbf{y}) = \nu_1 > \nu_*$$

olacak şekilde  $\mathbf{x}^1 \in X_m$  vardır. Buradan

$$\text{keyfi } \mathbf{y} \in Y_n \text{ için } g(\mathbf{x}^1, \mathbf{y}) \geq \nu_1 > \nu_*$$

olur. Bu ise  $(\mathbf{x}^*, \nu_*)$  ikilisinin (2.2.27) probleminin çözümü olması ile çelişir. O halde varsayımımız doğru değildir. Yani

$$\max_{\mathbf{x} \in X_m} \min_{\mathbf{y} \in Y_n} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \nu_*$$

eşitliği geçerlidir.  $\nu_*$  sayısı getiri matrisi (2.2.26) ile verilen oyunun değeridir.

Şimdi de  $\mathbf{x}^* \in X_m$  stratejisinin I. oyuncunun optimal stratejisi olduğunu kanıtlayalım. Bunun için

$$\min_{\mathbf{y} \in Y_n} g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) = \nu_*$$

olduğunu göstermeliyiz. Yine aksini varsayalım. O halde (2.2.28) den

$$\min_{\mathbf{y} \in Y_n} g(\mathbf{x}^1, \mathbf{y}) = \nu_1 > \nu_*$$

olacak şekilde  $\mathbf{x}^1 \in X_m$  vardır. Buradan

$$\max_{\mathbf{x} \in X_m} \min_{\mathbf{y} \in Y_n} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq \nu_1 > \nu_*$$

olduğu elde edilir. Bu ise  $\nu_*$  sayısının oyunun değeri olması ile çelişir. O halde varsayımımız doğru değildir. Yani

$$\min_{\mathbf{y} \in Y_n} g(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) = \nu_*$$

eşitliği geçerlidir.  $\nu_*$  sayısı oyunun değeri olduğu için  $\mathbf{x}^* \in X_m$  stratejisinin I. oyuncunun optimal stratejisi olduğu bulunur.  $\square$

**Önerme 2.2.7.**  $\mathbf{x} \in X_m$  olsun. Keyfi  $\mathbf{y} \in Y_n$  için  $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq \nu$  olması için gerek ve yeter koşul keyfi  $j = 1, 2, \dots, n$  için  $g(\mathbf{x}, \Pi_j) \geq \nu$  olmasıdır.

*Kanıt.* Keyfi  $\mathbf{y} \in Y_n$  için  $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq \nu$  olsun. Her  $I_i$  saf stratejisi (sadece  $i$ . koordinat 1)  $\mathbf{x} = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$  karma stratejisi ile eşlenebilir. Bir başka deyişle, saf stratejiler karma stratejiler kümesine ait olduğundan keyfi  $j = 1, 2, \dots, n$  için  $g(\mathbf{x}, \Pi_j) \geq \nu$  olur.

Şimdi keyfi  $j = 1, 2, \dots, n$  için  $g(\mathbf{x}, \Pi_j) \geq \nu$  olsun. Keyfi  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in Y_n$  karma stratejisini alalım ve sabitleyelim.  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in X_m$  olup

$$\begin{aligned} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m x_i g_{ij} y_j \\ &= \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^m x_i g_{ij} \right) y_j = \sum_{j=1}^n g(\mathbf{x}, \Pi_j) y_j \geq \sum_{j=1}^n \nu y_j = \nu \end{aligned}$$

olur. Yani keyfi  $\mathbf{y} \in Y_n$  için  $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq \nu$  elde edilir.  $\square$

Bu önerme gereği (2.2.27) problemi

$$\begin{aligned} &\mathbf{x} \in X_m \\ &\text{keyfi } j = 1, 2, \dots, n \text{ için } g(\mathbf{x}, \Pi_j) \geq \nu \\ &\nu \rightarrow \max \end{aligned} \tag{2.2.31}$$

problemine denk olur.

$$X_m = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m) : \forall i = 1, 2, \dots, m \text{ için } x_i \geq 0 \text{ ve } \sum_{i=1}^m x_i = 1 \right\}$$

ve

$$g(\mathbf{x}, \Pi_j) = \sum_{i=1}^m g_{ij} x_i$$

olduğundan (2.2.31) problemini

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m x_i &= 1 \\ x_i &\geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ \sum_{i=1}^m g_{ij} x_i &\geq \nu, \quad j = 1, 2, \dots, n \\ \nu &\rightarrow \max \end{aligned} \tag{2.2.32}$$

olarak ifade edebiliriz.

Keyfi  $i = 1, 2, \dots, m$  ve  $j = 1, 2, \dots, n$  için  $g_{ij} > 0$  ise  $\nu > 0$  olarak alınabilir. Eğer  $g_{ij} > 0$  değilse  $r + g_{ij} > 0$  olacak şekilde  $r > 0$  sayısı bulunabilir. Önerme 2.1.19 dan (2.2.26) getiri matrisindeki tüm  $g_{ij}$  sayılarının aynı  $r$  sayısı

ile toplanmasının oyunun optimal (veya denge) stratejilerini değiştirmeyeceğini sadece oyunun değerini  $r$  sayısı kadar değiştireceğini biliyoruz. Bu nedenle genelliği bozmadan  $\nu > 0$  olduğunu kabul edelim. O halde (2.2.32) problemi

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \frac{x_i}{\nu} &= \frac{1}{\nu} \\ \frac{x_i}{\nu} &\geq 0 \quad , \quad i = 1, 2, \dots, m \\ \sum_{i=1}^m g_{ij} \frac{x_i}{\nu} &\geq 1 \quad , \quad j = 1, 2, \dots, n \\ \nu &\rightarrow \max \end{aligned} \quad (2.2.33)$$

şeklinde ifade edilebilir. Eğer  $i = 1, 2, \dots, m$  için  $X_i = \frac{x_i}{\nu}$  dersek (2.2.33) problemi

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m X_i &= \frac{1}{\nu} \\ X_i &\geq 0 \quad , \quad i = 1, 2, \dots, m \\ \sum_{i=1}^m g_{ij} X_i &\geq 1 \quad , \quad j = 1, 2, \dots, n \\ \nu &\rightarrow \max \end{aligned} \quad (2.2.34)$$

problemine denk olur.

Pozitif  $\nu$  sayısının maksimalleştirilmesi  $\frac{1}{\nu}$  sayısının minimalleştirilmesine denk olduğundan (2.2.34) problemi standart şekilde verilen

$$\begin{aligned} \min \left\{ \sum_{i=1}^m X_i \right\} \\ \sum_{i=1}^m g_{ij} X_i \geq 1 \quad , \quad j = 1, 2, \dots, n \\ X_i \geq 0 \quad , \quad i = 1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (2.2.35)$$

lineer programlama problemi olarak yazılabilir.

$\mathbf{X}^* = (X_1^*, X_2^*, \dots, X_m^*)$  olmak üzere  $(\mathbf{X}^*, r^*)$  ikilisi (2.2.35) probleminin çözümlü olsun. Bu durumda  $\mathbf{x}^* = (\nu_* X_1^*, \nu_* X_2^*, \dots, \nu_* X_m^*)$ ,  $\nu_* = \frac{1}{r^*}$  olmak üzere  $(\mathbf{x}^*, \nu_*)$  ikilisi (2.2.27) probleminin çözümlü olur. O halde  $(\mathbf{x}^*, \nu_*)$  ikilisi (2.2.27) probleminin çözümlü ise  $\nu_* = \frac{1}{r^*}$  sayısı (2.2.26) ile verilen oyunun değerini,  $\mathbf{x}^* = (\nu_* X_1^*, \nu_* X_2^*, \dots, \nu_* X_m^*)$  stratejisi de I. oyuncunun optimal stratejisi olur.

Böylece aşağıdaki teoremi kanıtlamış bulunuyoruz.

**Teorem 2.2.8.**  $(\mathbf{X}^*, r^*)$  ikilisi (2.2.35) lineer programlama probleminin çözümlü olsun.  $\mathbf{x}^* = (\nu_* X_1^*, \nu_* X_2^*, \dots, \nu_* X_m^*) \in X_m$  stratejisi getiri matrisi (2.2.26) olan oyunda I. oyuncunun optimal stratejisi ve  $\nu_* = \frac{1}{r^*}$  sayısı da oyunun değeri olur.

Böylece (2.2.26) getiri matrisi ile verilen oyunda I. oyuncunun optimal stratejisi ve oyunun değeri (2.2.35) lineer programlama probleminin çözümü ile elde edilir.

Şimdi de II. oyuncunun optimal stratejisini bulalım. II. oyuncu herhangi bir  $\mathbf{y} \in Y_n$  stratejisini seçsin. O halde I. oyuncu ise kendisi için en iyi olan

$$\max_{\mathbf{x} \in X_m} g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = g(\mathbf{x}(\mathbf{y}), \mathbf{y}) = \mu(\mathbf{y})$$

eşitliğini sağlayan  $\mathbf{x}(\mathbf{y}) \in X_m$  stratejisini seçer. II. oyuncunun amacı getirileri minimalleştirmek olduğundan, II. oyuncu  $\mathbf{y} \in Y_n$  karma stratejilerini değiştirerek  $\mu(\mathbf{y})$  sayısını minimalleştirmeye çalışır. Dolayısıyla II. oyuncu

$$\begin{aligned} & \mathbf{y} \in Y_n \\ & \text{keyfi } \mathbf{x} \in X_m \text{ için } g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \mu \\ & \mu \rightarrow \min \end{aligned} \quad (2.2.36)$$

problemini çözmeye çalışır. Aşağıdaki önermeler, Önerme 2.2.6 ve Önerme 2.2.7 ye benzer olarak kanıtlanabilir.

**Önerme 2.2.9.**  $(\mathbf{y}^*, \mu_*)$  ikilisi (2.2.36) probleminin çözümü olsun.  $\mu_*$  gerçel sayısı getiri matrisi (2.2.26) ile verilen oyunun değeri,  $\mathbf{y}^* \in Y_n$  ise II. oyuncunun optimal stratejisidir.

**Önerme 2.2.10.**  $\mathbf{y} \in Y_n$  olsun. Keyfi  $\mathbf{x} \in X_m$  için  $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \mu$  olması için gerek ve yeter koşul keyfi  $i = 1, 2, \dots, m$  için  $g(\mathbf{I}_i, \mathbf{y}) \leq \mu$  olmasıdır.

Önerme 2.2.10 gereği (2.2.36) problemi

$$\begin{aligned} & \mathbf{y} \in Y_n \\ & \text{keyfi } i = 1, 2, \dots, m \text{ için } g(\mathbf{I}_i, \mathbf{y}) \leq \mu \\ & \mu \rightarrow \min \end{aligned} \quad (2.2.37)$$

problemine dönüşür.

$$Y_n = \left\{ \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) : \forall j = 1, 2, \dots, n \text{ için } y_j \geq 0 \text{ ve } \sum_{j=1}^n y_j = 1 \right\}$$

ve

$$g(\mathbf{I}_i, \mathbf{y}) = \sum_{j=1}^n g_{ij} y_j$$

olduğundan (2.2.37) problemini

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n y_j &= 1 \\ y_j &\geq 0 \quad , \quad j = 1, 2, \dots, n \\ \sum_{j=1}^n g_{ij} y_j &\leq \mu \quad , \quad i = 1, 2, \dots, m \\ \mu &\rightarrow \min \end{aligned} \tag{2.2.38}$$

olarak ifade edebiliriz. Genelliği bozmadan  $\mu > 0$  olduğunu kabul edelim. O halde (2.2.38) problemini

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \frac{y_j}{\mu} &= \frac{1}{\mu} \\ \frac{y_j}{\mu} &\geq 0 \quad , \quad j = 1, 2, \dots, n \\ \sum_{j=1}^n g_{ij} \frac{y_j}{\mu} &\leq 1 \quad , \quad i = 1, 2, \dots, m \\ \mu &\rightarrow \min \end{aligned} \tag{2.2.39}$$

şeklinde ifade edebiliriz. Eğer  $j = 1, 2, \dots, n$  için  $Y_j = \frac{y_j}{\mu}$  dersek, (2.2.39) problemi

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n Y_j &= \frac{1}{\mu} \\ Y_j &\geq 0 \quad , \quad j = 1, 2, \dots, n \\ \sum_{j=1}^n g_{ij} Y_j &\leq 1 \quad , \quad i = 1, 2, \dots, m \\ \mu &\rightarrow \min \end{aligned} \tag{2.2.40}$$

şekline dönüşür.

Pozitif  $\mu$  sayısının minimalleştirilmesi  $\frac{1}{\mu}$  sayısının maksimalleştirilmesine denk olduğundan (2.2.40) problemi standart verilen

$$\begin{aligned}
& \max \left\{ \sum_{j=1}^n Y_j \right\} \\
& \sum_{j=1}^n g_{ij} Y_j \leq 1 \quad , \quad i = 1, 2, \dots, m \\
& Y_j \geq 0 \quad , \quad j = 1, 2, \dots, n
\end{aligned} \tag{2.2.41}$$

lineer programlama problemi olarak yazılabilir.

$\mathbf{Y}^* = (Y_1^*, Y_2^*, \dots, Y_n^*)$  olmak üzere  $(\mathbf{Y}^*, r_*)$  ikilisi (2.2.41) probleminin çözümlü olsun. Bu durumda  $\mathbf{y}^* = (\mu_* Y_1^*, \mu_* Y_2^*, \dots, \mu_* Y_n^*)$  ve  $\mu_* = \frac{1}{r_*}$  olmak üzere  $(\mathbf{y}^*, \mu_*)$  ikilisi (2.2.36) probleminin çözümü olur. O halde  $(\mathbf{y}^*, \mu_*)$  ikilisi (2.2.36) probleminin çözümü ise  $\mu_* = \frac{1}{r_*}$  sayısı getiri matrisi (2.2.26) ile verilen oyunun değeri,  $\mathbf{y}^* = (\mu_* Y_1^*, \mu_* Y_2^*, \dots, \mu_* Y_n^*) \in Y_n$  stratejisi de II. oyuncunun optimal stratejisi olur.

Böylece aşağıdaki teorem kanıtlanmış olur.

**Teorem 2.2.11.**  $(\mathbf{Y}^*, r_*)$  ikilisi (2.2.41) lineer programlama probleminin çözümü ise  $\mathbf{y}^* = (\mu_* Y_1^*, \mu_* Y_2^*, \dots, \mu_* Y_n^*) \in Y_n$  stratejisi getiri matrisi (2.2.26) ile verilen oyunda II. oyuncunun optimal stratejisi ve  $\mu_* = \frac{1}{r_*}$  sayısı da oyunun değeri olur.

Böylece getiri matrisi (2.2.26) olan oyunda II. oyuncunun optimal stratejisi ve oyunun değeri (2.2.41) lineer programlama probleminin çözümü yardımıyla bulunur.

Verilen bilgiler sonucunda  $(\mathbf{X}^*, r^*)$  ikilisi (2.2.35),  $(\mathbf{Y}^*, r_*)$  ikilisi de (2.2.41) lineer programlama problemlerinin çözümleri olsun. Bu durumda (2.2.35) ve (2.2.41) lineer programlama problemleri primal-dual çift olduğundan  $r^* = r_*$  olur. O halde getiri matrisi (2.2.26) olan oyunun değeri, (2.2.35) ve (2.2.41) lineer programlama problemlerinin çözümüyle bulunan ve birbirine eşit olan  $r^*$  ve  $r_*$  sayılarından herhangi birinin çarpım tersi olarak bulunur. Yani

$$\nu_* = \mu_* = \frac{1}{r^*} = \frac{1}{r_*}$$

olur.

Dolayısıyla (2.2.35) ve (2.2.41) lineer programlama problemlerinden elde edilen  $\mathbf{x}^* = (\nu_* X_1^*, \nu_* X_2^*, \dots, \nu_* X_m^*) \in X_m$  I. oyuncunun optimal stratejisi,

$\mathbf{y}^* = (\mu_* Y_1^*, \mu_* Y_2^*, \dots, \mu_* Y_n^*) \in Y_n$  de II. oyuncunun optimal stratejisi, (2.2.35) veya (2.2.41) lineer programlama problemlerinin herhangi birinin çözümünden elde edilen  $\nu_*$  veya  $\mu_*$  değeri de oyunun değeridir. Böylece (2.2.26) ile verilen oyunun çözümü  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \nu_* = \mu_*)$  olur.

### 3 ARALIK MATRİS OYUNLAR

Bu bölümde iki kişilik sıfır toplamı sonlu oyunların genişletilmiş hali olan aralık matris oyunlar araştırılacaktır. Aralık matris oyunlarının getiri matrisindeki elemanları aralıklar olacağından öncelikle aralık kavramını tanımlayıp ardından aralıklar üzerindeki işlemler ve aralık karşılaştırması ele alınacaktır.

#### 3.1 Aralık Tanımı

Aralık,  $\mathbb{R}$  gerçel sayılar kümesinin gerçel alt kümesi olarak ve bir gerçel sayının genişletilmesi olarak ifade edilmiştir [11].

**Tanım 3.1.1.**  $\mathbb{R}$  gerçel sayılar kümesi olmak üzere

$$\tilde{A} = [\underline{a}, \bar{a}] = \{x \in \mathbb{R} : \underline{a} \leq x \leq \bar{a}\}$$

şeklinde tanımlanan  $\mathbb{R}$  gerçel sayılar kümesinin  $\tilde{A}$  gerçel alt kümesine **aralık** denir.

Burada  $\underline{a}$  ve  $\bar{a}$  gerçel sayıları sırasıyla  $\tilde{A}$  aralığının alt ve üst sınırlarıdır. Eğer  $\underline{a} = \bar{a}$  ise  $\tilde{A} = [\underline{a}, \bar{a}]$  aralığı bir gerçel sayı olur.  $\mathbb{R}$  deki tüm aralıkların kümesi  $I(\mathbb{R})$  ile gösterilir. Ayrıca

$$m(\tilde{A}) = \frac{1}{2}(\bar{a} + \underline{a}) \quad \text{ve} \quad r(\tilde{A}) = \frac{1}{2}(\bar{a} - \underline{a})$$

olmak üzere  $m(\tilde{A})$  ve  $r(\tilde{A})$  sırasıyla  $\tilde{A}$  aralığının orta noktası ve yarıçapı olup  $\tilde{A}$  aralığı  $\tilde{A} = \langle m(\tilde{A}), r(\tilde{A}) \rangle$  şeklinde de gösterilebilir.

#### 3.2 Aralık İşlemleri

**Tanım 3.2.1.**  $\tilde{A} = [\underline{a}, \bar{a}], \tilde{B} = [\underline{b}, \bar{b}] \in I(\mathbb{R})$  iki aralık verilsin.

i) *Toplama*

$$\tilde{A} + \tilde{B} = [\underline{a} + \underline{b}, \bar{a} + \bar{b}]$$

ii) *Çıkarma*

$$\tilde{A} - \tilde{B} = [\underline{a} - \bar{b}, \bar{a} - \underline{b}]$$

iii) *Çarpma*

$$\tilde{A} \cdot \tilde{B} = [\min\{\underline{a}\underline{b}, \underline{a}\bar{b}, \bar{a}\underline{b}, \bar{a}\bar{b}\}, \max\{\underline{a}\underline{b}, \underline{a}\bar{b}, \bar{a}\underline{b}, \bar{a}\bar{b}\}]$$

iv)  $\alpha \in \mathbb{R}$  olmak üzere

$$\alpha \tilde{A} = \begin{cases} [\alpha \bar{a}, \alpha \underline{a}] & \alpha < 0 \\ [\alpha \underline{a}, \alpha \bar{a}] & \alpha \geq 0 \end{cases}$$

v) Bölme

$$\frac{\tilde{A}}{\tilde{B}} = \left[ \min \left\{ \underline{a}/\underline{b}, \underline{a}/\bar{b}, \bar{a}/\underline{b}, \bar{a}/\bar{b} \right\}, \max \left\{ \underline{a}/\underline{b}, \underline{a}/\bar{b}, \bar{a}/\underline{b}, \bar{a}/\bar{b} \right\} \right], \quad (\underline{b} \neq 0, \bar{b} \neq 0)$$

Ayrıca  $\tilde{A} - \tilde{A} \neq 0$  ve  $\frac{\tilde{A}}{\tilde{A}} \neq 1$  olabilir.

**Örnek 3.2.2.**  $\tilde{A} = [2, 3]$  ve  $\tilde{B} = [4, 5]$  olsun. O halde

$$\tilde{A} + \tilde{B} = [6, 8], \quad \tilde{A} - \tilde{B} = [-3, -1]$$

$$\tilde{A} \cdot \tilde{B} = [\min\{8, 10, 12, 15\}, \max\{8, 10, 12, 15\}] = [8, 15]$$

$$\frac{\tilde{A}}{\tilde{B}} = \left[ \min \left\{ \frac{2}{4}, \frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{3}{5} \right\}, \max \left\{ \frac{2}{4}, \frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{3}{5} \right\} \right] = \left[ \frac{2}{5}, \frac{3}{4} \right] \text{ bulunur. Ayrıca}$$

$$\tilde{A} - \tilde{A} = [-1, 1] \text{ ve}$$

$$\frac{\tilde{A}}{\tilde{A}} = \left[ \min \left\{ \frac{2}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{3}{3} \right\}, \max \left\{ \frac{2}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{3}{3} \right\} \right] = \left[ \frac{2}{3}, \frac{3}{2} \right] \text{ olmak üzere}$$

$$\tilde{A} - \tilde{A} \neq 0 \text{ ve } \frac{\tilde{A}}{\tilde{A}} \neq 1 \text{ olduğu elde edilir.}$$

Aralık karşılaştırmasına geçmeden önce üyelik fonksiyonu, fuzzy küme, üyelik derecesi, fuzzy sayı tanımlarını verelim [23].

**Tanım 3.2.3.**  $X$  evrensel kümesinin elemanlarını  $\{0, 1\}$  kümesine resmeden fonksiyona **üyelik fonksiyonu** denir. Yani üyelik fonksiyonu  $f_A$  ile gösterilmek üzere,  $f_A : X \rightarrow \{0, 1\}$  dir.  $A$  herhangi bir küme olmak üzere

$$f_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

dir.

**Tanım 3.2.4.**  $X$  evrensel küme olsun.  $A : X \rightarrow [0, 1]$  fonksiyonuna  $X$  üzerinde bir **bulanık (fuzzy) küme** denir.  $A$  fuzzy kümesi,  $f_A$  üyelik fonksiyonu ile karakterize edildiği için  $A$  fonksiyonu yerine genellikle  $f_A$  kullanılır.

$$f_A : X \rightarrow [0, 1] \\ x \rightarrow f_A(x)$$

olmak üzere  $f_A(x)$ ' e  $x$  elemanının **üyelik derecesi** denir.

**Tanım 3.2.5.** Bir fuzzy küme gerçel sayılarda tanımlanmış, konveks, normalleştirilmiş ve üyelik fonksiyonu parçalı sürekli ise bu kümeye bir **fuzzy sayı** denir.

### 3.3 Aralık Karşılaştırması

Gerçel sayıların " $<$ " bağıntısı ile sıralandığını biliyoruz.  $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$  için  $a < b$  ve  $b < c$  iken  $a < c$  olduğundan bu bağıntının geçişken olduğunu söyleyebiliriz.  $\tilde{A} = [\underline{a}, \bar{a}]$ ,  $\tilde{B} = [\underline{b}, \bar{b}] \in I(\mathbb{R})$  olmak üzere bu bağıntıya karşılık Moore [11], aralıklar için ayrık iki aralık arasındaki sıralamayı

$$\tilde{A} < \tilde{B} \Leftrightarrow \bar{a} < \underline{b}$$

şeklinde tanımlamıştır. Aralıklar için de  $\tilde{A} < \tilde{B}$  ve  $\tilde{B} < \tilde{C}$  iken  $\tilde{A} < \tilde{C}$  olur. Moore [11], aralıklar için başka bir geçişken sıralama bağıntısını ise

$$\tilde{A} \subseteq \tilde{B} \Leftrightarrow \underline{a} \geq \underline{b} \text{ ve } \bar{a} \leq \bar{b}$$

şeklinde tanımlamıştır. Bu sadece  $\tilde{A}$  aralığının  $\tilde{B}$  aralığının içinde olduğunu ifade eder, herhangi bir sıralama yapmaz.

Ishibuchi ve Tanaka [19] aralıkların hem alt hem de üst sınırlarının yardımıyla  $\leq_{LR}$  sıralama bağıntısını

$$\begin{aligned} \tilde{A} \leq_{LR} \tilde{B} &\Leftrightarrow \underline{a} \leq \underline{b} \text{ ve } \bar{a} \leq \bar{b} \\ \tilde{A} <_{LR} \tilde{B} &\Leftrightarrow \tilde{A} \leq_{LR} \tilde{B} \text{ ve } \tilde{A} \neq \tilde{B} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlamıştır.  $\leq_{LR}$  bağıntısının uygulanamadığı durumlar vardır. Bunun içinde Ishibuchi ve Tanaka [19] aralıkların orta noktaları ve yarıçaplarını kullanarak  $\leq_{mr}$  sıralama bağıntısını

$$\begin{aligned} \tilde{A} \leq_{mr} \tilde{B} &\Leftrightarrow m(\tilde{A}) \leq m(\tilde{B}) \text{ ve } r(\tilde{A}) \geq r(\tilde{B}) \\ \tilde{A} <_{mr} \tilde{B} &\Leftrightarrow \tilde{A} \leq_{mr} \tilde{B} \text{ ve } \tilde{A} \neq \tilde{B} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlamıştır.

$\leq_{LR}$  ve  $\leq_{mr}$  sıralama bağıntıları yansıyan, ters simetrik ve geçişkendir. Dolayısıyla aralıklar arasında kısmi sıralama tanımlıdır. Yani aralık karşılaştırmasında bu sıralama bağıntıları da yetersiz kalır. Bu yüzden herhangi iki aralığın karşılaştırılabilmesi için çalışmalar devam etmiş, oyuncuların seçimlerini de dikkate alan karşılaştırmalar araştırılmıştır [12, 13, 14].

Aralıkların fuzzy olarak karşılaştırmasını sağlayacak olan sıralama bağıntısı vermeden önce bazı durumlar için bu karşılaştırmayı yorumlayalım.

1. Durum:  $\bar{a} < \underline{b}$  ise  $\tilde{A}$  aralığının her bir elemanı  $\tilde{B}$  aralığının tüm elemanlarından küçük olduğu için rasyonel bir oyuncu  $\tilde{A}$  aralığını tercih etmez. Dolayısıyla  $\tilde{A} \leq \tilde{B}$  olur.

2. Durum:  $\underline{a} < \underline{b} < \bar{a} < \bar{b}$  ise rasyonel bir oyuncu hem minimum hem de maksimum değeri daha az olan  $\tilde{A}$  aralığını tercih etmez. Yani  $\tilde{A} \leq \tilde{B}$  olur.

3. Durum:  $\underline{a} = \underline{b}$  ve  $\bar{a} = \bar{b}$  yani  $\tilde{A} = \tilde{B}$  ise rasyonel bir oyuncu iki aralıktan birini diğerine tercih etmez. Hem  $\tilde{A} \leq \tilde{B}$  hem de  $\tilde{B} \leq \tilde{A}$  dır.

Dolayısıyla bu üç durum da bilinen aralık karşılaştırmasına göre aralıklar kesin karşılaştırılabilir.

4. Durum:  $\tilde{A} \subset \tilde{B}$  yani  $\underline{b} < \underline{a}$  ve  $\bar{a} < \bar{b}$  ise oyuncunun seçimi belirsizdir. Çünkü  $\tilde{B}$  aralığındaki değerlerin  $\tilde{A}$  aralığındaki değerlerden büyük olan değerleri olduğu gibi  $\tilde{A}$  aralığındaki değerlerden küçük olan değerleri de vardır. Bu durumda risk almayan bir oyuncu  $\tilde{A}$  aralığının minimum değeri daha büyük olduğundan daha fazla kaybetmemek için  $\tilde{A}$  aralığını seçecektir. Bunun aksine risk alan bir oyuncu  $\tilde{B}$  aralığının minimum değeri daha küçük olsa da maksimum değeri daha büyük olduğundan daha fazla kazanabilmek için  $\tilde{B}$  aralığını seçecektir.

Buradan görüldüğü üzere bu durumdaki iki aralığın karşılaştırılması, bilinen sıralama bağıntısı ile belirlenemez. Bu belirsizlik bulanık (fuzzy) mantık teorisi ile ele alınmıştır. Dolayısıyla üyelik değeri ile aralık karşılaştırmaları yapılabilir. O halde  $\tilde{A} \subset \tilde{B}$  olmak üzere  $\underline{a} = \underline{b} < \bar{a} < \bar{b}$  durumunu düşünelim. Bu durumda rasyonel bir oyuncu  $\tilde{B}$  aralığının maksimum değeri daha büyük olduğundan daha fazla kazanabilmek için  $\tilde{B}$  aralığını seçecektir. Dolayısıyla  $\tilde{A} \leq \tilde{B}$  kesin doğrudur ve üyelik değeri 1 olur. Diğer yandan  $\tilde{A}$  aralığını sağa kaydırıp üst sınırların eşitlendiği,  $\underline{b} < \underline{a} < \bar{a} = \bar{b}$  durumunu düşünelim. Bu durumda ise rasyonel bir oyuncu  $\tilde{A}$  aralığının minimum değeri daha büyük olduğundan  $\tilde{A}$  aralığını seçecektir. Dolayısıyla  $\tilde{A} \leq \tilde{B}$  kesin doğru değildir ve üyelik derecesi 0 olur. Bu ifadelerden görüldüğü üzere  $\tilde{A}$  aralığı soldan sağa doğru hareket ettirildiğinde üyelik değeri 1 den 0 a doğru gider. Yani  $\tilde{A} \leq \tilde{B}$  bağıntısının üyelik değeri 1 ise oyuncu kesin  $\tilde{B}$  aralığını, üyelik değeri 0 ise oyuncu kesin  $\tilde{A}$  aralığını seçer. Bu durumda sırasıyla  $\tilde{A}$  ve  $\tilde{B}$  aralıklarının genişliği  $w(\tilde{A}) = \bar{a} - \underline{a}$

ve  $w(\tilde{B}) = \bar{b} - \underline{b}$  olmak üzere

$$f(\tilde{A}, \tilde{B}) = \frac{\bar{b} - \bar{a}}{w(\tilde{B}) - w(\tilde{A})}$$

şeklinde ifade edilir. Özel olarak  $\tilde{A}$  ve  $\tilde{B}$  nin orta noktaları aynı olduğu zaman üyelik derecesi 0.5 olur.

Sonuç olarak herhangi iki aralık için ”  $\preceq$  ” sıralama bağıntısı fuzzy üyelik fonksiyonu ile aşağıdaki şekilde tanımlanabilir [12].

**Tanım 3.3.1.**  $\tilde{A} = [\underline{a}, \bar{a}]$ ,  $\tilde{B} = [\underline{b}, \bar{b}] \in I(\mathbb{R})$  olsun.  $\tilde{A}$  ve  $\tilde{B}$  nin fuzzy üyelik fonksiyonu

$$\varphi(\tilde{A} \preceq \tilde{B}) = \begin{cases} 1 & , \tilde{A} = \tilde{B}; \text{ veya } \bar{a} \leq \underline{b}, \tilde{A} \neq \tilde{B}; \text{ veya} \\ & \underline{a} < \underline{b} < \bar{a} < \bar{b} \\ 0 & , \bar{b} \leq \underline{a}, \tilde{A} \neq \tilde{B}; \text{ veya } \underline{b} < \underline{a} < \bar{b} < \bar{a} \\ \frac{\bar{b} - \bar{a}}{w(\tilde{B}) - w(\tilde{A})} & , \underline{b} \leq \underline{a} \leq \bar{a} \leq \bar{b}, w(\tilde{B}) > 0, \tilde{A} \neq \tilde{B} \\ \frac{\underline{b} - \underline{a}}{w(\tilde{A}) - w(\tilde{B})} & , \underline{a} \leq \underline{b} \leq \bar{b} \leq \bar{a}, w(\tilde{A}) > 0, \tilde{A} \neq \tilde{B} \end{cases}$$

şeklindedir.

Ayrıca  $\varphi(\tilde{A} \preceq \tilde{B})$ ,  $\tilde{A} \preceq \tilde{B}$  sıralama bağıntısının kabul edilebilirlik derecesi olarak da ifade edilebilir.

Şimdi  $\tilde{A}$  aralığının  $\tilde{B}$  aralığından küçük olmadığını ifade eden  $\tilde{A} \succeq \tilde{B}$  bağıntısını tanımlayalım.

**Tanım 3.3.2.**  $\tilde{A}$  ve  $\tilde{B}$  aralıklarının fuzzy üyelik fonksiyonu  $\tilde{A} = \tilde{B}$  ise  $\varphi(\tilde{A} \succeq \tilde{B}) = 1$  olarak tanımlanır. Diğer durumlarda ise  $\varphi(\tilde{A} \succeq \tilde{B}) = 1 - \varphi(\tilde{A} \preceq \tilde{B})$  şeklinde olur. Yani

$$\varphi(\tilde{A} \succeq \tilde{B}) = \begin{cases} 1 & , \tilde{A} = \tilde{B}; \text{ veya } \bar{b} \leq \underline{a}, \tilde{A} \neq \tilde{B}; \text{ veya} \\ & \underline{b} < \underline{a} < \bar{b} < \bar{a} \\ 0 & , \bar{a} \leq \underline{b}, \tilde{A} \neq \tilde{B}; \text{ veya } \underline{a} < \underline{b} < \bar{a} < \bar{b} \\ \frac{\underline{a} - \underline{b}}{w(\tilde{B}) - w(\tilde{A})} & , \underline{b} \leq \underline{a} \leq \bar{a} \leq \bar{b}, w(\tilde{B}) > 0, \tilde{A} \neq \tilde{B} \\ \frac{\bar{a} - \bar{b}}{w(\tilde{A}) - w(\tilde{B})} & , \underline{a} \leq \underline{b} \leq \bar{b} \leq \bar{a}, w(\tilde{A}) > 0, \tilde{A} \neq \tilde{B} \end{cases}$$

ifade edilir.

Eğer fuzzy üyelik fonksiyonunun değeri 1 veya 0 yani  $\varphi(\tilde{A} \preceq \tilde{B}) = 1$  veya  $\varphi(\tilde{A} \preceq \tilde{B}) = 0$  ise  $\tilde{A}$  ve  $\tilde{B}$  aralıkları kesin karşılaştırılabilir. Aksi takdirde fuzzy karşılaştırılabilir.

**Örnek 3.3.3.**  $[-1, 4]$  ile  $[5, 7]$  aralıkları verilsin. Şimdi bu sıralama bağıntısına göre bu aralıkları inceleyelim.

$\varphi([-1, 4] \preceq [5, 7]) = 1$  olduğundan  $[-1, 4]$  aralığı  $[5, 7]$  aralığından küçüktür. Bu durumda oyuncu kesinlikle  $[5, 7]$  aralığını tercih edecektir.

$[2, 5]$  ile  $[1, 7]$  aralıkları  $1 < 2 < 5 < 7$  olduğundan fuzzy karşılaştırılabilir ve

$$\varphi([2, 5] \preceq [1, 7]) = \frac{7-5}{6-3} = \frac{2}{3}$$

olur. Bu durumda oyuncu  $\frac{2}{3}$  üyelik değeri ile  $[1, 7]$  aralığını tercih edecektir.

**Önerme 3.3.4.**  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}^+$  olmak üzere  $\varphi(\tilde{v} \preceq \tilde{v}_1) \leq 1$  ve  $\varphi(\tilde{v} \preceq \tilde{v}_2) \leq 1$  ise

$$\varphi((\alpha_1 + \alpha_2)\tilde{v} \preceq \alpha_1\tilde{v}_1 + \alpha_2\tilde{v}_2) \leq 1$$

olur.

*Kanıt.*  $\alpha_1 \in \mathbb{R}^+$  ve  $\varphi(\tilde{v} \preceq \tilde{v}_1) \leq 1$  ise

$$\varphi(\alpha_1\tilde{v} \preceq \alpha_1\tilde{v}_1) \leq 1$$

dir.  $\alpha_2 \in \mathbb{R}^+$  ve  $\varphi(\tilde{v} \preceq \tilde{v}_2) \leq 1$  ise

$$\varphi(\alpha_2\tilde{v} \preceq \alpha_2\tilde{v}_2) \leq 1$$

dir. O halde  $\varphi(\alpha_1\tilde{v} \preceq \alpha_1\tilde{v}_1) \leq 1$  ve  $\varphi(\alpha_2\tilde{v} \preceq \alpha_2\tilde{v}_2) \leq 1$  den

$$\varphi(\alpha_1\tilde{v} + \alpha_2\tilde{v} \preceq \alpha_1\tilde{v}_1 + \alpha_2\tilde{v}_2) \leq 1$$

dir. Yani

$$\varphi((\alpha_1 + \alpha_2)\tilde{v} \preceq \alpha_1\tilde{v}_1 + \alpha_2\tilde{v}_2) \leq 1$$

olur. □

Genel aralık matris oyunları için kesin karşılaştırma aynı satırda (veya sütunda) tüm aralıklar için sağlanmayabilir. Bu yüzden  $V$  aralık kümesinin maksimumu ve minimumu olan  $\tilde{v}_i$  aralığının üyelik değerini tanımlamak için aralık karşılaştırması genişletilmelidir. O halde şimdi  $V$  deki en küçük ve en büyük aralığın değerini tanımlayalım.

**Tanım 3.3.5.**  $V = \{\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \dots, \tilde{v}_n\}$  aralık kümesi olsun.  $\tilde{v}_i$  aralığının üyelik değeri

$$\xi(\tilde{v}_i) = \min_{1 \leq j \leq n} (\tilde{v}_i \preceq \tilde{v}_j)$$

olmak üzere  $V$  nin en küçük aralığı

$$\tilde{v}_i^* = \max_{1 \leq i \leq n} \xi(\tilde{v}_i)$$

değerine sahip  $\tilde{v}_i^*$  aralığıdır. Benzer şekilde  $\tilde{v}_i$  aralığının üyelik değeri

$$\delta(\tilde{v}_i) = \min_{1 \leq j \leq n} (\tilde{v}_i \succeq \tilde{v}_j)$$

olmak üzere  $V$  nin en büyük aralığı

$$\tilde{v}_i^* = \max_{1 \leq i \leq n} \delta(\tilde{v}_i)$$

değerine sahip  $\tilde{v}_i^*$  aralığıdır.

**Örnek 3.3.6.**  $V = \{-2, 2], [1, 6], [2, 4]\}$  aralık kümesi verilsin. Tanım 3.3.5 ten,

$$\begin{aligned} \xi([-2, 2]) &= \min\{-2, 2] \preceq [-2, 2], [-2, 2] \preceq [1, 6], [-2, 2] \preceq [2, 4]\} \\ &= \min\{1, 1, 1\} \\ &= 1 \\ \xi([1, 6]) &= \min\{[1, 6] \preceq [1, 6], [1, 6] \preceq [-2, 2], [1, 6] \preceq [2, 4]\} \\ &= \min\{1, 0, \frac{1}{3}\} \\ &= 0 \\ \xi([2, 4]) &= \min\{[2, 4] \preceq [2, 4], [2, 4] \preceq [-2, 2], [2, 4] \preceq [1, 6]\} \\ &= \min\{1, 0, \frac{2}{3}\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

olup  $\max \xi(\cdot) = 1$  olduğundan  $[-2, 2]$  aralığı en küçük aralık olur.

$$\begin{aligned} \delta([-2, 2]) &= \min\{-2, 2] \succeq [-2, 2], [-2, 2] \succeq [1, 6], [-2, 2] \succeq [2, 4]\} \\ &= \min\{1, 0, 0\} \\ &= 0 \\ \delta([1, 6]) &= \min\{[1, 6] \succeq [1, 6], [1, 6] \succeq [-2, 2], [1, 6] \succeq [2, 4]\} \\ &= \min\{1, 1, \frac{2}{3}\} \\ &= \frac{2}{3} \\ \delta([2, 4]) &= \min\{[2, 4] \succeq [2, 4], [2, 4] \succeq [-2, 2], [2, 4] \succeq [1, 6]\} \\ &= \min\{1, 1, \frac{1}{3}\} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

olup  $\max \delta(\cdot) = \frac{2}{3}$  olduğundan  $[1, 6]$  aralığı en büyük aralık olur.

Gerçel değerli oyunlardan farklı olarak en büyük veya en küçük aralık tek olmak zorunda değildir. Eşit olmayan aralıkların orta noktaları eşit olduğu zaman en büyük veya en küçük aralık birden fazla olabilir. Bu durum sıradaki örnekte gösterilmiştir.

**Örnek 3.3.7.**  $V = \{-2, 2], [1, 6], [2, 5]\}$  aralık kümesi verilsin. Tanım 3.3.5 ten en küçük aralık  $[-2, 2]$  aralığıdır. Yine Tanım 3.3.5 ten

$$\delta([-2, 2]) = 0, \quad \delta([1, 6]) = \frac{1}{2} \quad \text{ve} \quad \delta([2, 5]) = \frac{1}{2}$$

olup  $\delta([1, 6]) = \delta([2, 5]) = \frac{1}{2}$  olduğundan  $[1, 6]$  ve  $[2, 5]$  en büyük aralıklardır.

### 3.4 Aralık Matris Oyunlar

Bu bölümde iki kişilik sıfır toplamlı sonlu oyunlar aralık matris oyunlara genelleştirilecektir. I. oyuncunun stratejileri  $I_1, I_2, \dots, I_m$  ve II. oyuncunun stratejileri  $II_1, II_2, \dots, II_n$  olsun. I. oyuncu  $I_i$  stratejisini II. oyuncu da  $II_j$  stratejisini kullandığında I. oyuncunun getirisi  $\tilde{g}_{ij} = [\underline{g}_{ij}, \bar{g}_{ij}]$  olmak üzere aralık matris oyunun getiri matrisi

$$\tilde{\mathbf{G}} = \begin{matrix} & \begin{matrix} II_1 & II_2 & \dots & II_n \end{matrix} \\ \begin{matrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_m \end{matrix} & \begin{pmatrix} \tilde{g}_{11} & \tilde{g}_{12} & \dots & \tilde{g}_{1n} \\ \tilde{g}_{21} & \tilde{g}_{22} & \dots & \tilde{g}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{g}_{m1} & \tilde{g}_{m2} & \dots & \tilde{g}_{mn} \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (3.4.42)$$

dir. Burada oyun sıfır toplamlı olduğundan I. oyuncunun kazancı II. oyuncunun kaybına eşit olur.

Aralık matris oyunun saf stratejiler sınıfındaki *alt* ve *üst değeri* sırasıyla

$$\tilde{V}_P^L = \max_{i=1,2,\dots,m} \min_{j=1,2,\dots,n} \tilde{g}_{ij} \quad \text{ve} \quad \tilde{V}_P^U = \min_{j=1,2,\dots,n} \max_{i=1,2,\dots,m} \tilde{g}_{ij}$$

şeklinde tanımlanır. Eğer  $\tilde{V}_P^L = \tilde{V}_P^U = \tilde{V}$  ise  $\tilde{V}$  değerine saf stratejiler sınıfında *oyunun değeri* denir.

**Tanım 3.4.1.**

$$\min_{j=1,2,\dots,n} \tilde{g}_{i_*j} = \max_{i=1,2,\dots,m} \min_{j=1,2,\dots,n} \tilde{g}_{ij}$$

*koşulunu sağlayan  $I_{i_*}$  stratejisine I. oyuncunun **optimal saf stratejisi** denir.*

$$\max_{i=1,2,\dots,m} \tilde{g}_{ij_*} = \min_{j=1,2,\dots,n} \max_{i=1,2,\dots,m} \tilde{g}_{ij}$$

*koşulunu sağlayan  $II_{j_*}$  stratejisine II. oyuncunun **optimal saf stratejisi** denir.*

**Önerme 3.4.2.** *Getiri matrisi (3.4.42) ile verilen oyunda*

$$\tilde{V}_P^L \preceq \tilde{V}_P^U$$

*olur.*

**Örnek 3.4.3.** *Getiri matrisi*

$$\mathbf{G} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{c} \text{II}_1 \\ \text{II}_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{I}_1 \\ \text{I}_2 \end{array} & \begin{pmatrix} [0, 1] & [-2, -1] \\ [-1, 0] & [1, 2] \end{pmatrix} \end{array}$$

ile verilen oyunu ele alalım.

Oyunun alt değeri,

$$\begin{aligned} \tilde{V}_P^L &= \max_{i=1,2} \min_{j=1,2} \tilde{g}_{ij} = \max \left\{ \min_{j=1,2} \tilde{g}_{1j}, \min_{j=1,2} \tilde{g}_{2j} \right\} \\ &= \max \{ [-2, -1], [-1, 0] \} \\ &= [-1, 0] \end{aligned}$$

ve oyunun üst değeri,

$$\begin{aligned} \tilde{V}_P^U &= \min_{j=1,2} \max_{i=1,2} \tilde{g}_{ij} = \min \left\{ \max_{i=1,2} \tilde{g}_{1j}, \max_{i=1,2} \tilde{g}_{2j} \right\} \\ &= \min \{ [0, 1], [1, 2] \} \\ &= [0, 1] \end{aligned}$$

olur. Buradan  $\tilde{V}_P^L \neq \tilde{V}_P^U$  olduğundan oyunun saf stratejiler sınıfında değeri yoktur.

Bu örnekten görüldüğü üzere aralık matris oyunlarında da her zaman saf stratejiler sınıfında oyunun değeri olmayabilir.

Sırasıyla I. ve II. oyuncunun karma stratejileri kümesi

$$X_m = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m) : \forall i = 1, 2, \dots, m \text{ için } x_i \geq 0 \text{ ve } \sum_{i=1}^m x_i = 1 \right\}$$

ve

$$Y_n = \left\{ \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) : \forall j = 1, 2, \dots, n \text{ için } y_j \geq 0 \text{ ve } \sum_{j=1}^n y_j = 1 \right\}$$

dir.

**Tanım 3.4.4.** *Getiri matrisi (3.4.42) ile verilen aralık matris oyununda I. oyuncu  $\mathbf{x} \in X_m$  karma stratejisi ve II. oyuncu  $\mathbf{y} \in Y_n$  karma stratejisi ile oynamak üzere **oyunun getirisi***

$$\tilde{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m x_i \tilde{g}_{ij} y_j = \mathbf{x} \tilde{\mathbf{G}} \mathbf{y}^T$$

olarak tanımlanır.

Ayrıca  $\tilde{g}_{ij} = [\underline{g}_{ij}, \bar{g}_{ij}]$  olmak üzere oyunun getirisi

$$\tilde{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left[ \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m x_i \underline{g}_{ij} y_j, \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m x_i \bar{g}_{ij} y_j \right]$$

olur.

Getiri matrisi (3.4.42) ile verilen oyunun karma stratejiler sınıfındaki *alt* ve *üst değeri* sırasıyla

$$\tilde{V}^L = \max_{\mathbf{x} \in X_m} \min_{\mathbf{y} \in Y_n} \tilde{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad \text{ve} \quad \tilde{V}^U = \min_{\mathbf{y} \in Y_n} \max_{\mathbf{x} \in X_m} \tilde{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

olarak tanımlanır. Eğer  $\tilde{V}^L = \tilde{V}^U = \tilde{\nu}$  ise  $\tilde{\nu}$  değerine *oyunun değeri* denir.

**Tanım 3.4.5.**

$$\min_{\mathbf{y} \in Y_n} \tilde{g}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) = \max_{\mathbf{x} \in X_m} \min_{\mathbf{y} \in Y_n} \tilde{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \tilde{\nu}$$

koşulunu sağlayan  $\mathbf{x}^* \in X_m$  stratejisine I. oyuncunun *optimal stratejisi* ve

$$\max_{\mathbf{x} \in X_m} \tilde{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) = \min_{\mathbf{y} \in Y_n} \max_{\mathbf{x} \in X_m} \tilde{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \tilde{\nu}$$

koşulunu sağlayan  $\mathbf{y}^* \in Y_n$  stratejisine II. oyuncunun *optimal stratejisi* denir.

**Tanım 3.4.6.** I. oyuncunun *optimal stratejisi*  $\mathbf{x}^* \in X_m$ , II. oyuncunun *optimal stratejisi*  $\mathbf{y}^* \in Y_n$  ve oyunun değeri de  $\tilde{\nu}$  olmak üzere  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \tilde{\nu})$  üçlüsüne *oyunun çözümü* denir.

**Teorem 3.4.7.** İki kişilik sıfır toplamlı sonlu oyunun her zaman çözümü vardır.

**Teorem 3.4.8.**  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \tilde{\nu})$  nin oyunun çözüm olması için gerek ve yeter koşul

$$\text{keyfi } \mathbf{y} \in Y_n \quad \text{için} \quad \tilde{g}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) \geq \tilde{\nu}$$

$$\text{keyfi } \mathbf{x} \in X_m \quad \text{için} \quad \tilde{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \leq \tilde{\nu}$$

olmasıdır.

Teorem 3.4.8 gereği aşağıdaki sonuç elde edilebilir.

**Sonuç 3.4.9.**  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \tilde{\nu})$  üçlüsü verilen oyunun çözümü ise  $\tilde{g}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) = \tilde{\nu}$  dir.

$\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*)$  stratejisinde  $x_{i_*}^* > 0$  ise  $I_{i_*}$  saf stratejisi I. oyuncunun gereken stratejisi ve  $\mathbf{y}^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*)$  stratejisinde  $y_{j_*}^* > 0$  ise  $II_{j_*}$  saf stratejisi II. oyuncunun gereken stratejisi olduğunu biliyoruz. Sıradaki teorem I.

oyuncu  $\mathbf{x}^*$  optimal stratejisi ile oynarken II. oyuncu da  $\Pi_{j^*}$  gereken stratejisi ile oynarsa oyunun getirisinin verilen oyunun değerine eşit olduğunu ifade etmektedir. Benzer şekilde II. oyuncu  $\mathbf{y}^*$  optimal stratejisi ile oynarken I. oyuncu da  $I_{i^*}$  gereken stratejisi ile oynarsa oyunun getirisi verilen oyunun değerine eşit olur.

**Teorem 3.4.10.**  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \tilde{\nu})$  üçlüsü getiri matrisi (3.4.42) ile verilen aralık matris oyununun çözümü,  $I_{i^*}$  ve  $\Pi_{j^*}$  stratejileri de sırasıyla I. ve II. oyuncunun gereken stratejileri olsun. Bu durumda

$$\tilde{g}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) = \tilde{g}(I_{i^*}, \mathbf{y}^*) = \tilde{\nu}$$

ve

$$\tilde{g}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) = \tilde{g}(\mathbf{x}^*, \Pi_{j^*}) = \tilde{\nu}$$

olur.

*Kanıt.*  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \tilde{\nu})$  üçlüsü oyunun çözümü olduğundan  $\mathbf{x}^* \in X_m$  stratejisi I. oyuncunun optimal stratejisi,  $\mathbf{y}^* \in Y_n$  stratejisi II. oyuncunun optimal stratejisi,  $\tilde{\nu}$  de oyunun değeri olur. Dolayısıyla Sonuç 3.4.9 dan  $\tilde{g}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) = \tilde{\nu}$  olur. Genelliği bozmadan  $x_i^* > 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$  ( $k \leq m$ ) ve  $\sum_{i=1}^m x_i^* = 1$  için I. oyuncunun optimal stratejisini  $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*, 0, \dots, 0)$  olduğunu kabul edelim. Yani  $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*)$  optimal stratejisinde saf stratejiler ile gereken stratejilerin yerlerini değiştirerek gereken stratejileri ilk sıraya alalım. Keyfi  $1 \leq i^* \leq k$  alalım. O zaman  $I_{i^*}$  stratejisi I. oyuncunun gereken stratejisi ve  $x_{i^*}^* > 0$  olur.

Şimdi seçilen bir  $i^*$  için  $\tilde{g}(I_{i^*}, \mathbf{y}^*) = \tilde{\nu}$  olduğunu kanıtlayalım. Bunun için

$$\varphi(\tilde{g}(I_{i^*}, \mathbf{y}^*) \preceq \tilde{g}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)) = 1$$

$$\varphi(\tilde{g}(I_{i^*}, \mathbf{y}^*) \succeq \tilde{g}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)) = 1$$

olduğunu göstermeliyiz.

$\mathbf{x}^*$  optimal olduğu için  $\varphi(\tilde{g}(I_{i^*}, \mathbf{y}^*) \preceq \tilde{g}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)) = 1$  olduğu açıktır. Şimdi diğer durumun gerçekleştiğini gösterelim. Aksini varsayalım. Yani

$$\varphi(\tilde{g}(I_{i^*}, \mathbf{y}^*) \succeq \tilde{g}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)) < 1 \quad (3.4.43)$$

olsun. Öte yandan

$$\begin{aligned}
\tilde{\nu} = \tilde{g}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m x_i^* \tilde{g}_{ij} y_j^* \\
&= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^k x_i^* \tilde{g}_{ij} y_j^* \\
&= \sum_{i=1}^k x_i^* \left( \sum_{j=1}^n \tilde{g}_{ij} y_j^* \right) \\
&= \sum_{i=1}^k x_i^* \tilde{g}(\mathbf{I}_i, \mathbf{y}^*)
\end{aligned}$$

dir. Yani

$$\tilde{\nu} = \tilde{g}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) = \sum_{i=1}^k x_i^* \tilde{g}(\mathbf{I}_i, \mathbf{y}^*) \quad (3.4.44)$$

elde edilir.  $i \neq i_*$  olmak üzere

$$\varphi(\tilde{g}(\mathbf{I}_i, \mathbf{y}^*) \succeq \tilde{g}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)) = 1$$

olur. Buradan  $x_i^* > 0$  olmak üzere Önerme 3.3.4 ten

$$\varphi\left(\sum_{i=1, i \neq i_*}^k x_i^* \tilde{g}(\mathbf{I}_i, \mathbf{y}^*) \succeq \sum_{i=1, i \neq i_*}^k x_i^* \tilde{g}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)\right) = 1 \quad (3.4.45)$$

olur. (3.4.43) ve (3.4.45) ten

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^k x_i^* \tilde{g}(\mathbf{I}_i, \mathbf{y}^*) \succeq \sum_{i=1}^k x_i^* \tilde{g}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)\right) < 1 \quad (3.4.46)$$

bulunur. I. oyuncunun optimal stratejisi  $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*, 0, \dots, 0)$  olup  $\sum_{i=1}^k x_i^* = 1$  olduğu için (3.4.46) ifadesi

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^k x_i^* \tilde{g}(\mathbf{I}_i, \mathbf{y}^*) \succeq \tilde{g}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)\right) < 1 \quad (3.4.47)$$

şekline dönüşür ve (3.4.44) ten

$$\varphi(\tilde{g}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \succeq \tilde{g}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)) < 1$$

olduğu elde edilir. Bu ise olamaz. O halde varsayımımız doğru değildir. Yani

$$\varphi(\tilde{g}(\mathbf{I}_{i_*}, \mathbf{y}^*) \succeq \tilde{g}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)) = 1$$

olmalıdır. Dolayısıyla her iki durumda sağlandığından

$$\tilde{g}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) = \tilde{g}(\mathbf{I}_{i_*}, \mathbf{y}^*) = \tilde{\nu}$$

olduğu elde edilir. Benzer şekilde II. oyuncunun  $\Pi_{j_*}$  gereken stratejisi için de  $\tilde{g}(\mathbf{x}^*, \Pi_{j_*}) = \tilde{\nu}$  olduğu kanıtlanabilir.  $\square$

### 3.5 Aralık Matris Oyunların Çözümü

#### 3.5.1 Kesin Tanımlı Aralık Matris Oyunların Çözümü

**Tanım 3.5.1.** *Denge aralığı olan aralık matris oyunlara kesin tanımlı aralık matris oyunlar denir.*

Getiri matrisi

$$\tilde{\mathbf{G}} = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{cccc} & \text{II}_1 & \text{II}_2 & \dots & \text{II}_n \\ \text{I}_1 & \left( \begin{array}{cccc} \tilde{g}_{11} & \tilde{g}_{12} & \dots & \tilde{g}_{1n} \end{array} \right. \\ \text{I}_2 & \left. \begin{array}{cccc} \tilde{g}_{21} & \tilde{g}_{22} & \dots & \tilde{g}_{2n} \end{array} \right. \\ \vdots & \left. \begin{array}{cccc} \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{array} \right. \\ \text{I}_m & \left. \begin{array}{cccc} \tilde{g}_{m1} & \tilde{g}_{m2} & \dots & \tilde{g}_{mn} \end{array} \right) \end{array}$$

ile verilen oyunda  $i$ . satırın minimum değeri  $j$ . sütunun maksimum değeri olduğunda elde edilen  $\tilde{g}_{ij}$  getirisi oyunun dengesidir.  $\tilde{g}_{ij}$  denge aralığı kesin tanımlı aralık oyununun değeri olup  $\tilde{g}_{ij} = \tilde{\nu}$ , I. oyuncunun optimal stratejisi  $\text{I}_i$ , II. oyuncunun optimal stratejisi  $\text{II}_j$  olmak üzere  $(\text{I}_i, \text{II}_j, \tilde{\nu})$  üçlüsü kesin tanımlı aralık matris oyunların çözümü olur.

**Örnek 3.5.2.**

$$\tilde{\mathbf{G}} = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{ccc} & \text{II}_1 & \text{II}_2 & \text{II}_3 \\ \text{I}_1 & \left( \begin{array}{ccc} [2, 4] & [-1, 0] & [2, 6] \end{array} \right. \\ \text{I}_2 & \left. \begin{array}{ccc} [3, 5] & [2, 3] & [3, 4] \end{array} \right. \\ \text{I}_3 & \left. \begin{array}{ccc} [-2, -1] & [0, 1] & [-1, 0] \end{array} \right) \end{array}$$

ile verilen oyunu ele alalım.

Burada  $\tilde{g}_{22} = [2, 3]$  aralığı ikinci satırın minimumu iken ikinci sütunun maksimumudur. Dolayısıyla denge aralığıdır ve oyun kesin tanımlı bir oyundur. Oyunun değeri de  $\tilde{g}_{22} = \tilde{\nu} = [2, 3]$  dir. I. oyuncunun optimal stratejisi  $\text{I}_2$  ve II. oyuncunun optimal stratejisi de  $\text{II}_2$  olmak üzere  $(\text{I}_2, \text{II}_2, [2, 3])$  üçlüsü oyunun çözümü olarak bulunur.

#### 3.5.2 $2 \times 2$ Aralık Matris Oyunların Çözümü

$[\underline{g}_{11}, \bar{g}_{11}], [\underline{g}_{12}, \bar{g}_{12}], [\underline{g}_{21}, \bar{g}_{21}], [\underline{g}_{22}, \bar{g}_{22}] \in I(\mathbb{R})$  aralıkları verilsin. Getiri matrisi

$$\tilde{\mathbf{G}} = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \begin{array}{cc} & \text{II}_1 & \text{II}_2 \\ \text{I}_1 & \left( \begin{array}{cc} [\underline{g}_{11}, \bar{g}_{11}] & [\underline{g}_{12}, \bar{g}_{12}] \end{array} \right. \\ \text{I}_2 & \left. \begin{array}{cc} [\underline{g}_{21}, \bar{g}_{21}] & [\underline{g}_{22}, \bar{g}_{22}] \end{array} \right) \end{array} \quad (3.5.48)$$

ile verilen  $2 \times 2$  aralık matris oyununu ele alalım. Bu oyunu çözebilmek için denge aralığının olup olmadığına bakılır. Eğer denge aralığı yoksa çözüm şu şekilde bulunur [14].

II. oyuncu tarafından seçilen strateji ne olursa olsun I. oyuncu kendi getirisini değiştirmeyecek  $\mathbf{x} = (x, 1 - x)$  karma stratejisini kullanır. Bu durumda

$$[\underline{g}_{11}, \bar{g}_{11}] \cdot x + [\underline{g}_{21}, \bar{g}_{21}] \cdot (1 - x) = [\underline{g}_{12}, \bar{g}_{12}] \cdot x + [\underline{g}_{22}, \bar{g}_{22}] \cdot (1 - x)$$

olup bu eşitlikten

$$\underline{g}_{11} \cdot x + \underline{g}_{21} \cdot (1 - x) = \underline{g}_{12} \cdot x + \underline{g}_{22} \cdot (1 - x) \quad (3.5.49)$$

ve

$$\bar{g}_{11} \cdot x + \bar{g}_{21} \cdot (1 - x) = \bar{g}_{12} \cdot x + \bar{g}_{22} \cdot (1 - x) \quad (3.5.50)$$

elde edilir. (3.5.49) ve (3.5.50) eşitliklerden  $x$  değeri

$$x = \frac{\underline{g}_{22} - \underline{g}_{21}}{(\underline{g}_{11} - \underline{g}_{12}) + (\underline{g}_{22} - \underline{g}_{21})} \quad \text{ve} \quad x = \frac{\bar{g}_{22} - \bar{g}_{21}}{(\bar{g}_{11} - \bar{g}_{12}) + (\bar{g}_{22} - \bar{g}_{21})} \quad (3.5.51)$$

bulunur.  $i, j = 1, 2$  için  $\underline{g}_{ij}$  ve  $\bar{g}_{ij}$  değerleri  $\bar{g}_{ij} = \underline{g}_{ij} + \alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  eşitliğini sağladığı durumda

$$\frac{\underline{g}_{22} - \underline{g}_{21}}{(\underline{g}_{11} - \underline{g}_{12}) + (\underline{g}_{22} - \underline{g}_{21})} = \frac{\bar{g}_{22} - \bar{g}_{21}}{(\bar{g}_{11} - \bar{g}_{12}) + (\bar{g}_{22} - \bar{g}_{21})}$$

olur. Bir başka deyişle (3.5.51) için tüm aralıklar aynı uzunlukta olduğu zaman yalnız bir  $x$  değeri bulunur. Dolayısıyla

$$x = \frac{\underline{g}_{22} - \underline{g}_{21}}{(\underline{g}_{11} - \underline{g}_{12}) + (\underline{g}_{22} - \underline{g}_{21})}$$

dir. O halde

$$\mathbf{x} = \left( \frac{\underline{g}_{22} - \underline{g}_{21}}{(\underline{g}_{11} - \underline{g}_{12}) + (\underline{g}_{22} - \underline{g}_{21})}, \frac{\underline{g}_{11} - \underline{g}_{12}}{(\underline{g}_{11} - \underline{g}_{12}) + (\underline{g}_{22} - \underline{g}_{21})} \right)$$

olarak elde edilir.

Benzer şekilde I. oyuncu tarafından seçilen strateji ne olursa olsun II. oyuncu kendi getirisini değiştirmeyecek  $\mathbf{y} = (y, 1 - y)$  karma stratejisini kullanır. Bu durumda

$$[\underline{g}_{11}, \bar{g}_{11}] \cdot y + [\underline{g}_{12}, \bar{g}_{12}] \cdot (1 - y) = [\underline{g}_{21}, \bar{g}_{21}] \cdot y + [\underline{g}_{22}, \bar{g}_{22}] \cdot (1 - y)$$

olup bu eşitlikten

$$\underline{g}_{11} \cdot y + \underline{g}_{12} \cdot (1 - y) = \underline{g}_{21} \cdot y + \underline{g}_{22} \cdot (1 - y) \quad (3.5.52)$$

ve

$$\bar{g}_{11} \cdot y + \bar{g}_{12} \cdot (1 - y) = \bar{g}_{21} \cdot y + \bar{g}_{22} \cdot (1 - y) \quad (3.5.53)$$

bulunur. (3.5.52) ve (3.5.53) eşitliklerden  $y$  değeri

$$y = \frac{\underline{g}_{22} - \underline{g}_{12}}{(\underline{g}_{11} - \underline{g}_{12}) + (\underline{g}_{22} - \underline{g}_{21})} \quad \text{ve} \quad y = \frac{\bar{g}_{22} - \bar{g}_{12}}{(\bar{g}_{11} - \bar{g}_{12}) + (\bar{g}_{22} - \bar{g}_{21})} \quad (3.5.54)$$

bulunur.  $i, j = 1, 2$  için  $\underline{g}_{ij}$  ve  $\bar{g}_{ij}$  değerleri  $\bar{g}_{ij} = \underline{g}_{ij} + \alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  eşitliğini sağladığı durumda

$$\frac{\underline{g}_{22} - \underline{g}_{12}}{(\underline{g}_{11} - \underline{g}_{12}) + (\underline{g}_{22} - \underline{g}_{21})} = \frac{\bar{g}_{22} - \bar{g}_{12}}{(\bar{g}_{11} - \bar{g}_{12}) + (\bar{g}_{22} - \bar{g}_{21})}$$

olur. Bir başka deyişle (3.5.54) için tüm aralıklar aynı uzunlukta olduğu zaman yalnız bir  $y$  değeri bulunur. Dolayısıyla

$$y = \frac{\underline{g}_{22} - \underline{g}_{12}}{(\underline{g}_{11} - \underline{g}_{12}) + (\underline{g}_{22} - \underline{g}_{21})}$$

dir. O halde

$$\mathbf{y} = \left( \frac{\underline{g}_{22} - \underline{g}_{12}}{(\underline{g}_{11} - \underline{g}_{12}) + (\underline{g}_{22} - \underline{g}_{21})}, \frac{\underline{g}_{11} - \underline{g}_{21}}{(\underline{g}_{11} - \underline{g}_{12}) + (\underline{g}_{22} - \underline{g}_{21})} \right)$$

olarak elde edilir. I. veya II. oyuncunun getirileri oyunun değerini verdiğiinden dolayı

$$\tilde{\nu} = [\underline{g}_{11}, \bar{g}_{11}] \cdot x + [\underline{g}_{21}, \bar{g}_{21}] \cdot (1 - x)$$

veya

$$\tilde{\nu} = [\underline{g}_{11}, \bar{g}_{11}] \cdot y + [\underline{g}_{12}, \bar{g}_{12}] \cdot (1 - y)$$

olur. Bu  $\tilde{\nu}$  değerlerinin herhangi birinde  $x$  veya  $y$  sayılarından herhangi birini yerine yazdığımızda oyunun değeri

$$\tilde{\nu} = \left[ \frac{\underline{g}_{22}\underline{g}_{11} - \underline{g}_{12}\underline{g}_{21}}{(\underline{g}_{11} - \underline{g}_{12}) + (\underline{g}_{22} - \underline{g}_{21})}, \frac{\bar{g}_{22}\bar{g}_{11} - \bar{g}_{12}\bar{g}_{21}}{(\bar{g}_{11} - \bar{g}_{12}) + (\bar{g}_{22} - \bar{g}_{21})} \right]$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla  $\mathbf{x}$  ve  $\mathbf{y}$  optimal stratejiler,  $\tilde{\nu}$  de oyunun değeri olmak üzere  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tilde{\nu})$  üçlüsü getiri matrisi (3.5.48) ile verilen  $2 \times 2$  aralık matris oyununun çözümü olur.

### Örnek 3.5.3.

$$\tilde{\mathbf{G}} = \begin{array}{cc} & \text{II}_1 & \text{II}_2 \\ \text{I}_1 & [1, 2] & [6, 7] \\ \text{I}_2 & [4, 5] & [2, 3] \end{array}$$

ile verilen  $2 \times 2$  aralık matris oyununu ele alalım. Verilen oyunun denge aralığı yoktur. O halde

$$x = \frac{2 - 4}{(1 - 6) + (2 - 4)} = \frac{2}{7} \Rightarrow \mathbf{x} = (x, 1 - x) = \left(\frac{2}{7}, \frac{5}{7}\right)$$

$$y = \frac{2 - 6}{(1 - 6) + (2 - 4)} = \frac{4}{7} \Rightarrow \mathbf{y} = (y, 1 - y) = \left(\frac{4}{7}, \frac{3}{7}\right)$$

$$\tilde{v} = \left[ \frac{1 \cdot 2 - 4 \cdot 6}{(1 - 6) + (2 - 4)}, \frac{2 \cdot 3 - 5 \cdot 7}{(3 - 5) + (2 - 7)} \right] = \left[ \frac{22}{7}, \frac{29}{7} \right]$$

olmak üzere oyunun çözümü

$$\left( \mathbf{x} = \left(\frac{2}{7}, \frac{5}{7}\right), \mathbf{y} = \left(\frac{4}{7}, \frac{3}{7}\right), \left[ \frac{22}{7}, \frac{29}{7} \right] \right)$$

üçlüsü olarak bulunur.

### 3.5.3 $2 \times n$ Aralık Matris Oyunların Çözümü

Bu kısımda  $2 \times n$  aralık matris oyunların çözümünde kullanılan ve oyunun değerini karakterize eden bir önermenin kanıtını vermeden önce önermenin kanıtında kullanılacak olan yardımcı iki teorem verilecektir. Sonra  $2 \times n$  oyunların çözümünde kullanılan grafik yöntem aralıklar için gösterilecektir. P. K. Nayak ve M. Pal'ın [18], H. Akyar ve E. Akyar'ın [22]  $2 \times n$  aralık oyunların çözümünde kullanılan grafik yöntemiyle ilgili çalışması bulunmaktadır.

**Yardımcı Teorem 3.5.4.** Her bir  $\tilde{C}_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) aralık olmak üzere  $\{\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \dots, \tilde{C}_n\}$  aralıklar kümesi verilsin.

$$\min_{\mathbf{y} \in Y_n} \left\{ \sum_{j=1}^n \tilde{C}_j y_j \right\} = \min_{1 \leq j \leq n} \{ \tilde{C}_j \} \quad (3.5.55)$$

eşitliği geçerlidir.

*Kanıt.* Fuzzy sıralama indeksi yardımıyla  $\min_{1 \leq j \leq n} \tilde{C}_j$  bulunur.

$$\min_{1 \leq j \leq n} \tilde{C}_j = \tilde{C}_l$$

olduğunu varsayalım. Buradan

$$\varphi(\tilde{C}_j \succeq \tilde{C}_l) = 1 \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

olduğu açıktır. Herhangi bir  $y_j \geq 0$  için

$$\varphi(\tilde{C}_j y_j \succeq \tilde{C}_l y_j) = 1 \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

dir.  $y_j \geq 0$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) ve  $\sum_{j=1}^n y_j = 1$  olduğundan

$$\varphi\left(\sum_{j=1}^n \tilde{C}_j y_j \succeq \sum_{j=1}^n \tilde{C}_l y_j = \tilde{C}_l\right) = 1$$

olur. Buradan

$$\varphi\left(\min_{\mathbf{y} \in Y_n} \left\{ \sum_{j=1}^n \tilde{C}_j y_j \right\} \succeq \tilde{C}_l\right) = 1 \quad (3.5.56)$$

elde edilir. Öte yandan  $\mathbf{y} = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$  için  $\tilde{C}_l = \tilde{C}_1 \times 0 + \tilde{C}_2 \times 0 + \dots + \tilde{C}_l \times 1 + \dots + \tilde{C}_n \times 0$  den

$$\varphi\left(\tilde{C}_l \succeq \min_{\mathbf{y} \in Y_n} \left\{ \sum_{j=1}^n \tilde{C}_j y_j \right\}\right) = 1 \quad (3.5.57)$$

dir. (3.5.56) ve (3.5.57) den

$$\min_{\mathbf{y} \in Y_n} \left\{ \sum_{j=1}^n \tilde{C}_j y_j \right\} = \tilde{C}_l = \min_{1 \leq j \leq n} \{ \tilde{C}_j \}$$

olur. □

**Yardımcı Teorem 3.5.5.** Her bir  $\tilde{D}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) aralık olmak üzere  $\{\tilde{D}_1, \tilde{D}_2, \dots, \tilde{D}_m\}$  aralıklar kümesi verilsin.

$$\max_{\mathbf{x} \in X_m} \left\{ \sum_{i=1}^m \tilde{D}_i x_i \right\} = \max_{1 \leq i \leq m} \{ \tilde{D}_i \} \quad (3.5.58)$$

eşitliği geçerlidir.

*Kanıt.* Yardımcı Teorem 3.5.4 e benzer şekilde (3.5.58) eşitliğinin de doğru olduğu gösterilebilir. □

**Önerme 3.5.6.**  $\tilde{\nu}$  değeri iki kişilik sıfır toplamlı  $m \times n$  oyunun değeri olsun.  $O$  halde

$$\max_{\mathbf{x} \in X_m} \min_{\mathbf{y} \in Y_n} \tilde{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max_{\mathbf{x} \in X_m} \min_{j=1,2,\dots,n} \tilde{g}(\mathbf{x}, \Pi_j) = \tilde{\nu} \quad (3.5.59)$$

$$\min_{\mathbf{y} \in Y_n} \max_{\mathbf{x} \in X_m} \tilde{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \min_{\mathbf{y} \in Y_n} \max_{i=1,2,\dots,m} \tilde{g}(\mathbf{I}_i, \mathbf{y}) = \tilde{\nu} \quad (3.5.60)$$

eşitlikleri doğrudur.

*Kanıt.* Getiri matrisi (3.4.42) ile verilen oyunun çözümü  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \tilde{v})$  olsun. O halde

$$\mathbf{y} \in Y_n \quad \text{için} \quad \varphi(\tilde{v} \preceq \tilde{g}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y})) = 1 \quad (3.5.61)$$

$$\mathbf{x} \in X_m \quad \text{için} \quad \varphi(\tilde{v} \succeq \tilde{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*)) = 1 \quad (3.5.62)$$

olur. (3.5.59) eşitliğinin doğru olduğunu kanıtlayalım. Bunun için

$$\varphi\left(\tilde{v} \preceq \max_{\mathbf{x} \in X_m} \min_{j=1,2,\dots,n} \tilde{g}(\mathbf{x}, \Pi_j)\right) = 1$$

$$\varphi\left(\tilde{v} \succeq \max_{\mathbf{x} \in X_m} \min_{j=1,2,\dots,n} \tilde{g}(\mathbf{x}, \Pi_j)\right) = 1$$

olduğunu göstermeliyiz.  $\Pi_j$  saf stratejisi  $Y_n$  karma stratejiler kümesine ait olduğundan (3.5.61) den

$$\varphi(\tilde{v} \preceq \tilde{g}(\mathbf{x}^*, \Pi_j)) = 1 \quad (3.5.63)$$

olur.  $\forall j = 1, 2, \dots, n$  için (3.5.63) geçerli olduğundan

$$\varphi\left(\tilde{v} \preceq \min_{j=1,2,\dots,n} \tilde{g}(\mathbf{x}^*, \Pi_j)\right) = 1$$

ve

$$\varphi\left(\tilde{v} \preceq \max_{\mathbf{x} \in X_m} \min_{j=1,2,\dots,n} \tilde{g}(\mathbf{x}, \Pi_j)\right) = 1$$

olduğu elde edilir.

Şimdi diğer durumun gerçekleştiğini gösterelim. Aksini varsayalım. Yani

$$\varphi\left(\tilde{v} \succeq \max_{\mathbf{x} \in X_m} \min_{j=1,2,\dots,n} \tilde{g}(\mathbf{x}, \Pi_j)\right) < 1 \quad (3.5.64)$$

olsun.  $\exists \hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_m) \in X_m$  için (3.5.64) ifadesi

$$\varphi\left(\tilde{v} \succeq \min_{j=1,2,\dots,n} \tilde{g}(\hat{\mathbf{x}}, \Pi_j)\right) < 1 \quad (3.5.65)$$

olur.  $\tilde{g}(\hat{\mathbf{x}}, \Pi_j) = \sum_{i=1}^m \hat{x}_i \tilde{g}_{ij}$  olduğundan (3.5.65) ifadesi

$$\varphi\left(\tilde{v} \succeq \min_{j=1,2,\dots,n} \sum_{i=1}^m \hat{x}_i \tilde{g}_{ij}\right) < 1$$

olur. Yardımcı Teorem 3.5.4 ten

$$\varphi\left(\tilde{v} \succeq \min_{\mathbf{y} \in Y_n} \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m \hat{x}_i \tilde{g}_{ij}\right) y_j\right) < 1$$

olur. Buradan

$$\varphi\left(\tilde{v} \succeq \max_{\mathbf{x} \in X_m} \min_{\mathbf{y} \in Y_n} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m x_i \tilde{g}_{ij} y_j\right) < 1 \quad (3.5.66)$$

bulunur.  $\tilde{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m x_i \tilde{g}_{ij} y_j$  olup (3.5.66) dan

$$\varphi\left(\tilde{\nu} \succeq \max_{\mathbf{x} \in X_m} \min_{\mathbf{y} \in Y_n} \tilde{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\right) < 1 \quad (3.5.67)$$

bulunur. Teorem 2.1.12 gereğince

$$\max_{\mathbf{x} \in X_m} \min_{\mathbf{y} \in Y_n} \tilde{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \tilde{\nu}$$

olduğundan (3.5.67) ifadesinden

$$\varphi(\tilde{\nu} \succeq \tilde{\nu}) < 1$$

elde edilir. Bu ise olamaz. O halde varsayımımız doğru değildir. Yani

$$\varphi\left(\tilde{\nu} \succeq \max_{\mathbf{x} \in X_m} \min_{j=1,2,\dots,n} \tilde{g}(\mathbf{x}, \Pi_j)\right) = 1$$

olmalıdır. Dolayısıyla her iki durum da sağlandığından

$$\max_{\mathbf{x} \in X_m} \min_{\mathbf{y} \in Y_n} \tilde{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max_{\mathbf{x} \in X_m} \min_{j=1,2,\dots,n} \tilde{g}(\mathbf{x}, \Pi_j) = \tilde{\nu}$$

olduğu elde edilir.

Benzer şekilde (3.5.60) eşitliği de kanıtlanabilir.  $\square$

Şimdi  $2 \times n$  aralık oyunların çözümünü bulmak için bir grafik yöntemi ifade edelim. Getiri matrisi

$$\tilde{\mathbf{G}} = \begin{matrix} & \Pi_1 & \Pi_2 & \dots & \Pi_n \\ \begin{matrix} I_1 \\ I_2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} \tilde{g}_{11} & \tilde{g}_{12} & \dots & \tilde{g}_{1n} \\ \tilde{g}_{21} & \tilde{g}_{22} & \dots & \tilde{g}_{2n} \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (3.5.68)$$

ile verilen iki kişilik sıfır toplamlı  $2 \times n$  oyununu ele alalım. Oyunun değeri  $\tilde{\nu}_*$  olsun.

I. oyuncunun iki tane saf stratejisi olduğundan karma stratejisini  $\mathbf{x} = (x, 1-x)$ ,  $x \in [0, 1]$  şeklinde ifade edilebilir. Bu durumda keyfi  $j = 1, 2, \dots, n$  için

$$\tilde{g}(\mathbf{x}, \Pi_j) = \tilde{g}_{1j}x + \tilde{g}_{2j}(1-x), \quad x \in [0, 1]$$

olduğu elde edilir. Keyfi  $j = 1, 2, \dots, n$  için  $\tilde{\varphi}_j(\cdot) : [0, 1] \rightarrow I(\mathbb{R})$  olmak üzere

$$\tilde{\varphi}_j(x) = \tilde{g}(\mathbf{x}, \Pi_j)$$

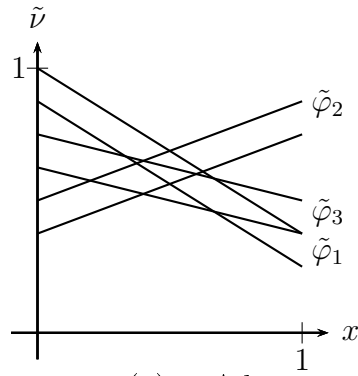
şeklinde gösterirsek

$$\tilde{\varphi}_j(x) = \tilde{g}_{1j}x + \tilde{g}_{2j}(1 - x), \quad x \in [0, 1]$$

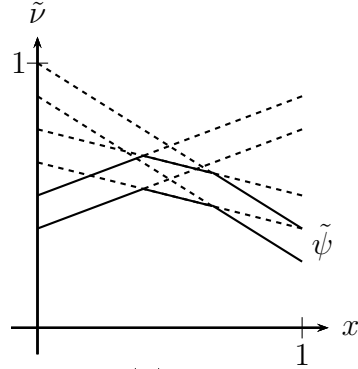
olur. Önerme 3.5.6 dan

$$\tilde{\nu}_* = \max_{\mathbf{x} \in X_2} \min_{j=1,2,\dots,n} \tilde{g}(\mathbf{x}, \Pi_j) = \max_{\mathbf{x} \in [0,1]} \min_{j=1,2,\dots,n} \tilde{\varphi}_j(x)$$

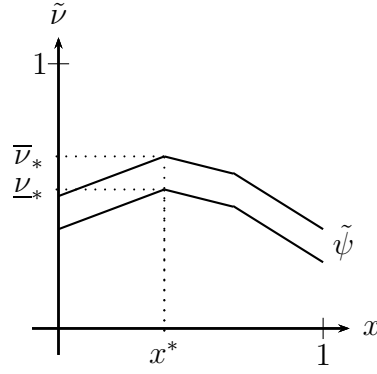
olup  $\tilde{\nu}_*$  sayısı getiri matrisi (3.5.68) ile verilen oyunun değeri olur.



3.3 (a) 1. Adım



3.3 (b) 2. Adım



3.3 (c) 3. ve 4. Adımlar

Şekil 3.3: Oyunun çözümünü bulmak için bir grafik yöntem

Şimdi (3.5.68) getiri matrisi ile verilen aralık oyunun çözümünü bulabilmek için grafik yöntemin adımlarını verelim.

1. Adım  $Ox\tilde{v}$  düzleminde keyfi  $j = 1, 2, \dots, n$  için  $\tilde{\varphi}_j(\cdot) : [0, 1] \rightarrow I(\mathbb{R})$  dönüşümlerinin grafiklerini çizelim (Şekil 3.3(a)).

2. Adım Her  $x \in [0, 1]$  için  $\tilde{\psi}(x) = \min_{j=1,2,\dots,n} \tilde{\varphi}_j(x)$  olmak üzere  $\tilde{\psi}(\cdot) : [0, 1] \rightarrow I(\mathbb{R})$  dönüşümünün grafiğini çizelim (Şekil 3.3(b)).

3. Adım  $\tilde{\psi}(\cdot) : [0, 1] \rightarrow I(\mathbb{R})$  dönüşümünün grafiğini kullanarak bu dönüşümün  $[0, 1]$  aralığındaki maksimumunu  $\tilde{v}_* = \max_{x \in [0, 1]} \tilde{\psi}(x)$  bulunur (Şekil 3.3(c)). Dolayısıyla (3.5.68) matrisi ile verilen aralık oyunun değeri elde edilmiş olur.

4. Adım  $\tilde{\psi}(\cdot) : [0, 1] \rightarrow I(\mathbb{R})$  dönüşümüne  $[0, 1]$  aralığında maksimum değerini veren  $x^* \in [0, 1]$  sayısını buluruz (Şekil 3.3(c)).  $\tilde{v}_*$  oyunun değeri olmak üzere

$$\tilde{v}_* = \max_{x \in [0, 1]} \tilde{\psi}(x) = \max_{x \in [0, 1]} \min_{j=1,2,\dots,n} \tilde{\varphi}_j(x) = \min_{j=1,2,\dots,n} \tilde{\varphi}_j(x^*)$$

olduğundan  $\mathbf{x}^* = (x^*, 1-x^*) \in X_2$  karma stratejisi verilen oyunda I. oyuncunun optimal stratejisi olur.

5. Adım II. oyuncunun optimal stratejisini buluruz.

$$J_* = \{j : \tilde{g}(\mathbf{x}^*, \Pi_j) = \tilde{v}_*\}$$

olsun.  $\mathbf{y}^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*)$  stratejisi II. oyuncunun karma optimal stratejisi olduğunu kabul edelim. Şimdi  $\Pi_{j^*}$  saf stratejisi II. oyuncunun gereken stratejisi olmak üzere Teorem 3.4.10 dan  $\tilde{g}(\mathbf{x}^*, \Pi_{j^*}) = \tilde{v}_*$  olduğundan  $j^* \in J_*$  olur.  $j \notin J_*$

için II. oyuncunun  $\Pi_j$  stratejisi gereken strateji değildir.  $\Pi_j$  gereken strateji olmadığında gereken strateji tanımına göre  $y_j = 0$  olur.

I. oyuncunun  $\mathbf{x}^* = (x^*, 1 - x^*) \in X_2$  optimal stratejisinde  $x^*$  ve  $1 - x^*$  sayılarından en az biri veya her ikisi de aynı anda sıfırdan farklı olur. Bu durumda

$$I_* = \begin{cases} \{2\} & , \quad x^* = 0 \quad \text{ise} \\ \{1, 2\} & , \quad x^* \in (0, 1) \quad \text{ise} \\ \{1\} & , \quad x^* = 1 \quad \text{ise} \end{cases}$$

olsun. O halde gereken strateji tanımına göre I. oyuncunun  $i \in I_*$  stratejisine karşılık  $I_i$  saf stratejisi, gereken strateji olur. Böylece Teorem 3.4.10 gereği keyfi  $i_* \in I_*$  için

$$\tilde{g}(I_{i_*}, \mathbf{y}^*) = \tilde{v}_*$$

olur. Bu eşitlik yardımıyla II. oyuncunun  $\mathbf{y}^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*)$  karma optimal stratejisi elde edilir.

### Örnek 3.5.7.

$$\tilde{\mathbf{G}} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \Pi_1 & \Pi_2 & \Pi_3 \end{array} \\ \begin{array}{l} I_1 \\ I_2 \end{array} \left( \begin{array}{ccc} [6, 8] & [3, 5] & [1, 3] \\ [0, 2] & [2, 4] & [4, 6] \end{array} \right)$$

matrisi ile verilen  $2 \times 3$  aralık oyununun çözümünü bulalım.

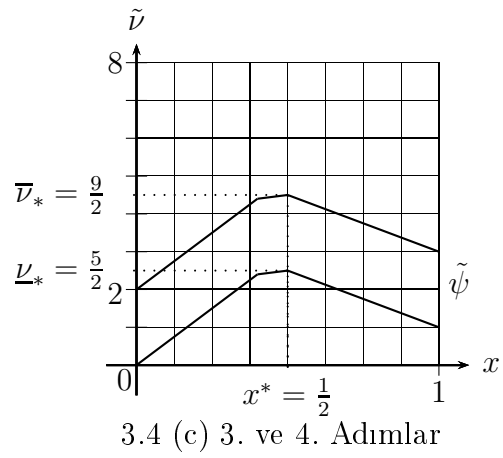
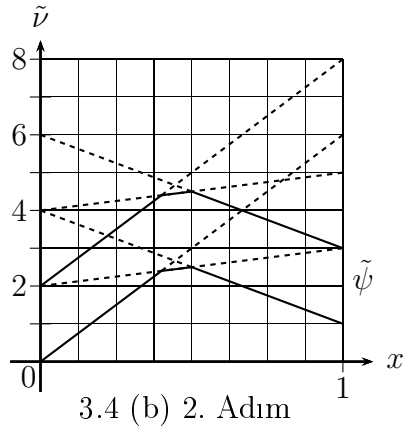
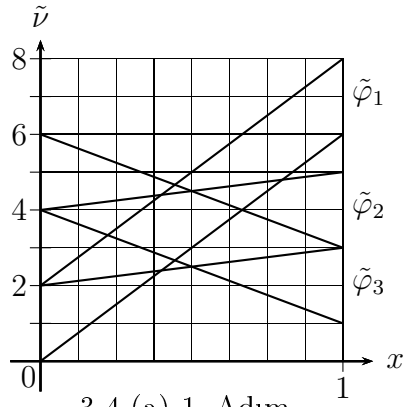
Verilen oyun sadeleştirilebilir değildir. Bu oyunun çözümünü grafik yöntemi kullanarak bulalım. I. oyuncunun  $\mathbf{x} = (x, 1 - x) \in X_2$ ,  $x \in [0, 1]$  karma stratejisi ve II. oyuncunun saf stratejileri  $\Pi_j$ ,  $j = 1, 2, 3$  için  $\tilde{\varphi}_j(x) = \tilde{g}(\mathbf{x}, \Pi_j)$  dönüşümlerini hesaplayalım.

$$\tilde{\varphi}_1(x) = \tilde{g}(\mathbf{x}, \Pi_1) = x \cdot [6, 8] + (1 - x) \cdot [0, 2] = [6x, 2 + 6x] \quad , \quad x \in [0, 1]$$

$$\tilde{\varphi}_2(x) = \tilde{g}(\mathbf{x}, \Pi_2) = x \cdot [3, 5] + (1 - x) \cdot [2, 4] = [2 + x, 4 + x] \quad , \quad x \in [0, 1]$$

$$\tilde{\varphi}_3(x) = \tilde{g}(\mathbf{x}, \Pi_3) = x \cdot [1, 3] + (1 - x) \cdot [4, 6] = [4 - 3x, 6 - 3x] \quad , \quad x \in [0, 1]$$

bulunur.



Şekil 3.4: Getiri matrisi  $\tilde{\mathbf{G}}$  olan oyunun grafik yöntemiyle çözümü

1. Adım  $\tilde{\varphi}_j(\cdot) : [0, 1] \rightarrow I(\mathbb{R})$ ,  $j = 1, 2, 3$  dönüşümlerinin grafiklerini çizelim (Şekil 3.4 (a)).

2. Adım Her  $x \in [0, 1]$  için  $\tilde{\psi}(x) = \min_{j=1,2,3} \tilde{\varphi}_j(x)$  olmak üzere  $\tilde{\psi}(\cdot) : [0, 1] \rightarrow I(\mathbb{R})$  dönüşümünün grafiğini çizelim. Şekil 3.4 (b) de görüldüğü gibi

$$\tilde{\psi}(x) = \begin{cases} \tilde{\varphi}_1(x) & , x \in [0, \frac{2}{5}] \text{ ise} \\ \tilde{\varphi}_2(x) & , x \in (\frac{2}{5}, \frac{1}{2}] \text{ ise} \\ \tilde{\varphi}_3(x) & , x \in (\frac{1}{2}, 1] \text{ ise} \end{cases}$$

yani

$$\tilde{\psi}(x) = \begin{cases} [6x, 2 + 6x] & , x \in [0, \frac{2}{5}] \text{ ise} \\ [2 + x, 4 + x] & , x \in (\frac{2}{5}, \frac{1}{2}] \text{ ise} \\ [4 - 3x, 6 - 3x] & , x \in (\frac{1}{2}, 1] \text{ ise} \end{cases} \quad (3.5.69)$$

olur (Şekil 3.4 (b)).

3. Adım (3.5.69) ile verilen  $\tilde{\psi}(\cdot) : [0, 1] \rightarrow I(\mathbb{R})$  dönüşümünün grafiğini kullanarak (Şekil 3.4 (c)), bu dönüşümün  $[0, 1]$  aralığındaki maksimumu yani  $\tilde{v}_* = \max_{x \in [0,1]} \tilde{\psi}(x)$  değerini bulalım. Bu dönüşüm maksimum değerini  $x = \frac{1}{2}$

noktasında alır ve bu  $\tilde{v}_*$  değeri,  $\tilde{v}_* = \left[ \frac{5}{2}, \frac{9}{2} \right]$  olur. O halde verilen oyunun değeri  $\tilde{v}_* = \left[ \frac{5}{2}, \frac{9}{2} \right]$  olur.

4. Adım Şimdi de  $\tilde{\psi}(\cdot) : [0, 1] \rightarrow I(\mathbb{R})$  dönüşümüne  $[0, 1]$  aralığında maksimum değerini veren  $x^* \in [0, 1]$  sayısını bulalım. Bu sayı 3. Adım da  $\tilde{v}_*$  değerini hesaplarken bulunmuştu. Yani Şekil 3.4 (c) den de görüldüğü üzere  $x^* = \frac{1}{2}$  olur.

O halde verilen oyunda I. oyuncunun optimal stratejisi  $\mathbf{x}^* = \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$  olur.

5. Adım Son olarak II. oyuncunun optimal stratejisini bulalım. Şekil 3.4 (c) den

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\mathbf{x}^*, \Pi_2) &= [2 + 6x, 4 + x] = \left[ 2 + 6 \cdot \frac{1}{2}, 4 + \frac{1}{2} \right] = \left[ \frac{5}{2}, \frac{9}{2} \right] \\ \tilde{g}(\mathbf{x}^*, \Pi_3) &= [4 - 3x, 6 - 3x] = \left[ 4 - 3 \cdot \frac{1}{2}, 6 - 3 \cdot \frac{1}{2} \right] = \left[ \frac{5}{2}, \frac{9}{2} \right] \end{aligned}$$

olur. O halde  $J_* = \{2, 3\}$ , yani  $\Pi_2$  ve  $\Pi_3$  stratejileri II. oyuncunun gereken stratejileri olup  $\Pi_1$  gereken strateji değildir. Bu durumda II. oyuncunun optimal stratejisi

$$\mathbf{y}^* = (0, y^*, 1 - y^*)$$

şeklinindedir. Ayrıca I. oyuncunun optimal stratejisi  $\mathbf{x}^* = \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \in X_2$  olduğundan I. oyuncunun  $I_1$  ve  $I_2$  stratejileri gereken stratejilerdir.  $I_* = \{1, 2\}$  ve

oyunun değeri  $\tilde{v}_* = \left[ \frac{5}{2}, \frac{9}{2} \right]$  olduğundan Teorem 3.4.10 gereği

$$\tilde{g}(I_1, \mathbf{y}^*) = \left[ \frac{5}{2}, \frac{9}{2} \right] \quad \text{ve} \quad \tilde{g}(I_2, \mathbf{y}^*) = \left[ \frac{5}{2}, \frac{9}{2} \right]$$

olur.  $\mathbf{y}^* = (0, y^*, 1 - y^*)$  olduğundan

$$\tilde{g}(I_1, \mathbf{y}^*) = 0 \cdot [6, 8] + y^* \cdot [3, 5] + (1 - y^*) \cdot [1, 3] = [1 + 2y^*, 3 + 2y^*]$$

$$\tilde{g}(I_2, \mathbf{y}^*) = 0 \cdot [0, 2] + y^* \cdot [2, 4] + (1 - y^*) \cdot [4, 6] = [4 - 2y^*, 6 - 2y^*]$$

olarak bulunur. Bu durumda

$$[1 + 2y^*, 3 + 2y^*] = \left[ \frac{5}{2}, \frac{9}{2} \right] \quad \text{ve} \quad [4 - 2y^*, 6 - 2y^*] = \left[ \frac{5}{2}, \frac{9}{2} \right]$$

elde edilir. Bu eşitlikler çözüldüğünde  $y^* = \frac{3}{4}$  bulunur. Dolayısıyla verilen oyunda II. oyuncunun optimal stratejisi  $\mathbf{y}^* = (0, y^*, 1 - y^*)$  den

$$\mathbf{y}^* = \left( 0, \frac{3}{4}, \frac{1}{4} \right)$$

olduğu elde edilir. Böylece verilen oyunun çözümü

$$\left( \mathbf{x}^* = \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), \mathbf{y}^* = \left( 0, \frac{3}{4}, \frac{1}{4} \right), \left[ \frac{5}{2}, \frac{9}{2} \right] \right)$$

üçlüsü olarak bulunur.

## 4 SONUÇ

Bu çalışmada, matris oyunlar aralık matris oyunlara genelleştirilerek aralık matris oyunların çözümleri incelenmiştir.

Öncelikle oyun teorisi ile ilgili temel kavramlar üzerinde durulmuş, iki kişilik sıfır toplamlı sonlu oyunların yani matris oyunların çözümleri incelenmiştir. Aralık matris oyunların çözümünde getiri matrisindeki aralıklar arasındaki sıralama önemlidir. Bu yüzden aralık karşılaştırmasında bir bağıntıya ihtiyaç duyulmuştur. Aralık matris oyunların çözümüne geçmeden önce aralıkların fuzzy karşılaştırması için bir sıralama bağıntısı verilmiştir.

Verilen bir oyunda oyunculardan herhangi biri optimal stratejisi ile oynadığında diğer oyuncu da gereken stratejisiyle oynarsa elde edilen getirinin oyunun değerine eşit olacağını ifade eden bir teorem ile oyunun değerini karakterize eden bir önerme ayrıca aralık matris oyunlar için bu sıralama bağıntısı yardımıyla kanıtlanmıştır.

$2 \times n$  matris oyunların çözümünde kullanılan grafik yöntemi yardımıyla  $2 \times n$  aralık matris oyunların çözümü de incelenmiştir. Getiri matrisindeki aralıkların yarıçapı yani uzunlukları eşit olan aralıklar dikkate alınarak  $2 \times n$  aralık matris oyununun çözümü incelenmiştir. Getiri aralıklarının uzunlukları farklı olan  $2 \times n$  aralık matris oyunların çözümü de mevcut yöntemler geliştirilerek ya da yeni yöntemler ortaya koyarak çözümleri incelenebilir.

## Kaynaklar

- [1] Zermelo, E., "Über eine anwendung der mengenlehre auf die theorie des schachspiels", *Proceedings of the Fifth International Congress of Mathematicians*, **2**, 501-504, 1913.
- [2] von Neumann, J., "Zur theorie der gesellschaftsspiele", *Mathematische Annalen*, **100**, 295-320, 1928.
- [3] von Neumann, J. ve Morgenstern, O., *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1944.
- [4] Nash, J. F., "The bargaining problem", *Econometrica*, **18**, 155-162, 1950.
- [5] Nash, J. F., "Equilibrium points in n-person games", *Proceedings of the National Academy of Sciences*, U. S. A., **36**, 48-49, 1950.
- [6] Nash, J. F., "Non-Cooperative Games", *The Annals of Mathematics*, **54**(2), 286-295, 1951.
- [7] Nash, J. F., "Two-person cooperative games", *Econometrica*, **21**, 128-140, 1953.
- [8] Kumar, S. ve Reddy, D. S. N., "Graphical solution of  $(n \times m)$  matrix of a game theory", *European Journal of Operational Research*, **112**, 467-471, 1999.
- [9] Nair, K. G. K. ve Ranjith, G., "Solutions of  $(3 \times 3)$  games using graphical method", *European Journal of Operational Research*, **112**, 472-478, 1999.
- [10] Moore, R. E., *Interval Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1966.
- [11] Moore, R. E., *Methods and Applications of Interval Analysis*, SIAM, Philadelphia, 1979.
- [12] Collins, W. D. ve Hu, C., "Interval matrix games", *Knowledge Processing with Interval and Soft Computing- Chapter7*, Springer, London, 2008.

- [13] Sengupta, A. ve Pal, T. K., "On comparing interval numbers", *European Journal of Operational Research*, **127**, 28-43, 2000.
- [14] Nayak, P. K. ve Pal M., "Linear programming technique to solve two person matrix games with interval pay-offs", *Asia-Pacific Journal of Operational Research*, **26**(2), 285-305, 2009.
- [15] Zadeh, L. A., "Fuzzy sets", *Information and Control*, **8**(3), 338-353, 1965.
- [16] Liu, S-T. ve Kao, C., "Matrix games with interval data", *Computers and Industrial Engineering*, **56**(4), 1697-1700, 2009.
- [17] Li, D-F., "Linear programming approach to solve interval-valued matrix games", *Omega* **39**(6), 655-666, 2011.
- [18] Nayak, P. K. ve Pal M., "Solution of rectangular interval games using graphical method", *Tamsui Oxford Journal of Mathematical Sciences* **22**(1), 95-115, 2006.
- [19] Ishibuchi, H. ve Tanaka, H., "Multiobjective programming in optimization of the interval objective function", *European Journal of Operational Research*, **48**(2), 219-225, 1990.
- [20] Ferguson, T. S., *Game Theory*, University of California at Los Angeles, 2013.  
[http://www.math.ucla.edu/~tom/Game\\_Theory/mat.pdf](http://www.math.ucla.edu/~tom/Game_Theory/mat.pdf)
- [21] Guseinov, K. G., Akyar, E. ve Düzce, S. A., *Oyun Teorisi Çatışma ve Anlaşmanın Matematiksel Modelleri*, Seçkin Yayınları, Ankara, 2010.
- [22] Akyar, H. ve Akyar E., "A graphical method for solving interval matrix games", *Abstract and Applied Analysis*, 17 pages, 2011.
- [23] Kwang, H. Lee, *First Course on Fuzzy Theory and Applications*, Springer, Germany, 2005.