

**ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**KOMPLEKS DÜZLEMDE
1-PARAMETRELİ HAREKETLER
VE HOLDITCH TEOREMİ**

MUSTAFA DÜLDÜL

96890

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**DANIŞMAN
PROF. DR. NURİ KURUOĞLU**

SAMSUN-2000

**T.C. YÖKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANLASYON MERKEZİ**

**ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

Bu çalışma jürimiz tarafından **30/06/2000** tarihinde yapılan sınav ile Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS** tezi olarak kabul edilmiştir.

BAŞKAN: Prof. Dr. Nuri KURUOĞLU (Danışman)

Üye : Doç. Dr. Mustafa ÇALIŞKAN

Üye : Doç. Dr. Abdullah H. SOFİYEYEV

ONAY :

Yukarıdaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

18.07.2000

Prof. Dr. Ferhat ODABAŞ
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

KOMPLEKS DÜZLEMDE 1-PARAMETRELİ HAREKETLER VE HOLDITCH TEOREMİ

ÖZET

Bu çalışma temelde beş bölümden oluşmaktadır. Giriş bölümünde konunun ele alınma sebebi, ikinci bölümde ise konuya temel olan çalışmalar ortaya konuldu. Genel Bilgiler bölümünde ise hareketler ile ilgili temel kavramlara yer verildi.

Materyal ve Metot bölümünde, 1-parametrelî düzlemsel hareketler ve 1-parametrelî düzlemsel homotetik hareketler altında hızlar ve ivmeler incelendi. Daha sonra kapalı hareketler altında bir noktanın Steiner alan formülü verildi ve Holditch teoremi ifade ve ispat edildi. Bundan başka kompleks düzlemde 1-parametrelî kapalı hareketlerde yörünge alan formülü ve karışık alan formülü verildi. Bu karışık alan formülü yardımıyla Holditch teoremi tekrar ispat edildi.

Çalışmamızın orijinal kısmını oluşturan Bulgular bölümünde, kompleks düzlemde 1-parametrelî hareketler ve 1-parametrelî homotetik hareketler altında hızlar ve ivmeler yeniden incelenerek bunların kompleks düzlemdeki ifadeleri elde edildi. Daha sonra, kompleks düzlemde 1-parametrelî kapalı homotetik hareketlerde bir noktanın yörünge alan formülü ve karışık alan formülü elde edildi. Bu karışık alan formülü yardımıyla kompleks düzlemde 1-parametrelî kapalı homotetik hareketler altında Holditch teoremi ispat edildi.

Anahtar Kelimeler:

Homotetik Hareketler, Steiner alan formülü, Karışık alan formülü, Holditch teoremi

1-PARAMETER MOTIONS AND HOLDITCH THEOREM ON THE COMPLEX PLANE

ABSTRACT

This study consists of five basic chapters. In introduction, the reason why this study is taken into consideration is given and in the second chapter the basic studies have been presented. In the third chapter, fundamental concepts about motions are given.

In the fourth chapter, velocities and accelerations are examined under the 1-parameter motions and 1-parameter homothetic motions. Then, Steiner area formula of a point under the closed motions is given and the Holditch theorem is expressed and proved. Moreover, the orbit area formula and the mixture area formula are expressed under the 1-parameter motions in the complex plane. The Holditch theorem is proved again by means of this mixture area formula.

The fifth chapter is the original part of our study. In this chapter, velocities and accelerations under the 1-parameter motions and 1-parameter homothetic motions in the complex plane are examined and the complex expressions of these velocities and accelerations are obtained. Then, the orbit area formula of a point and the mixture area formula are obtained under the 1-parameter closed homothetic motions in the complex plane. Finally, the Holditch theorem is proved by means of this mixture area formula under the closed homothetic motions.

Key Words:

Homothetic Motions, Steiner area formula, Mixture area formula, Holditch theorem

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım süresince bana vakit ayırarak benimle yakından ilgilenen, bilgi ve tecrübesiyle beni yönlendiren ve yardımlarını esirgemeyen çok kıymetli Saygıdeğer Hocam Sayın **Prof. Dr. Nuri KURUOĞLU**' na en içten duygularımla sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca çalışmalarım boyunca her zaman yanımda olan Saygıdeğer Hocam Sayın **Yrd. Doç. Dr. Ayhan TUTAR**'a sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
1. GİRİŞ.....	1
2. LİTERATÜR ÖZETİ.....	2
3. GENEL BİLGİLER.....	3
4. MATERYAL VE METOT.....	6
4.1. 1-Parametrelili Hareketler.....	6
4.1.1. Türev Denklemleri.....	7
4.1.2. Hızlar ve Hızların Terkibi.....	8
4.1.3. İvmeler ve İvmelerin Terkibi.....	11
4.1.4. Kapalı Hareketler.....	13
4.1.5. Kapalı Bir Hareketin Yörünge Alanı.....	13
4.1.6. Holditch Teoremi.....	15
4.2. Homotetik Hareketler.....	18
4.2.1. Kapalı Düzlemsel Homotetik Hareket.....	18
4.2.2. Hızlar ve Hızların Terkibi.....	19
4.2.3. İvmeler ve İvmelerin Terkibi.....	21
4.2.4. Kapalı Bir Homotetik Hareketin Yörünge Alanı.....	23
4.2.5. Düzlemsel Kinematikte Homotetik Hareketler İçin Holditch Teoremi.....	26
4.3. Kompleks Düzlemde Steiner ve Karışık Alan Formülleri ve Holditch Teoremi.....	28
4.3.1. Kompleks Düzlemde 1-parametrelili Hareketler.....	28
4.3.2. Kapalı Hareketler İçin Steiner ve Karışık Alan Formülleri.....	30
4.3.3. Kapalı Hareketler İçin Holditch Teoremi.....	35
5. BULGULAR.....	36
5.1. Kompleks Düzlemde 1-parametrelili Hareketler.....	36
5.1.1. Hızlar ve Hızların Terkibi.....	36
5.1.2. İvmeler ve İvmelerin Terkibi.....	39
5.2. Kompleks Düzlemde 1-parametrelili Homotetik Hareketler.....	43
5.2.1. Hızlar ve Hızların Terkibi.....	43
5.2.2. İvmeler ve İvmelerin Terkibi.....	47
5.2.3. Kapalı Homotetik Hareketler İçin Steiner ve Karışık Alan Formülü.....	50
5.2.4. Kapalı Homotetik Hareketler İçin Holditch Teoremi.....	55
6. TARTIŞMA.....	57
7. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	58
8. KAYNAKLAR.....	59
9. ÖZGEÇMİŞ.....	60

1. GİRİŞ

Bu çalışmanın amacı “The Steiner formula and the Holditch Theorem for the homothetic motions on the planar kinematics [8]” adlı makalede Öklid düzleminde 1-parametrelili homotetik hareketler altında verilen hızlar ve ivmeler ile ilgili bağıntı ve sonuçların kompleks düzlemde 1-parametrelili homotetik hareketlerde nasıl elde edildiğinin araştırılması ve “Verallgemeinerung einer Formel von Steiner [3]” isimli makalede kompleks düzlemde 1-parametrelili kapalı hareketler altında elde edilen ifadelerin kompleks düzlemde 1-parametrelili kapalı homotetik hareketler altında ne şekilde elde edileceğinin gösterilmesidir.



2. LİTERATÜR ÖZETİ

Literatürde [8] de Öklid düzleminde 1-parametrelî homotetik hareketlerde hızlar ve ivmeler ile ilgili bağıntılar ve sonuçlar verilmiş ve 1-parametrelî kapalı düzlemsel homotetik hareketler altında sabit bir noktanın yörünge alan formülü elde edilmiştir. Ayrıca, homotetik oranının “1” e eşit olması durumunda [2] de verilen sonuçlar özel hal olarak elde edilmiştir. Bundan başka 1-parametrelî düzlemsel hareketlerde ifade ve ispat edilen Holditch teoremi homotetik hareketlere genelleştirilmiştir.

Diğer taraftan, [3] te kompleks düzlemde 1-parametrelî kapalı hareketlerde hareketli düzlemde alınan farklı iki sabit noktanın karışık alan formülü ifade edilmiş ve bu karışık alan formülü yardımıyla [4] te kompleks düzlemde 1-parametrelî kapalı hareketlerde Holditch teoreminin ispatı yapılmıştır. Ayrıca [3] ve [4] te elde edilen sonuçlar [5] te homotetik hareketlere genelleştirilmeye çalışılmış, fakat elde edilen teorem ve sonuçlar homotetik oranına bağılı olarak ifade edilememiştir. Bu çalışmada ise [3] te verilen tüm sonuçlar ve Holditch teoremi kompleks düzlemde 1-parametrelî homotetik hareketlere genelleştirilmiş ve elde edilen sonuçlar homotetik oranına bağılı olarak ifade edilmiştir. Ayrıca homotetik oranının “1” alınması halinde [3] teki sonuçlar özel hal olarak elde edilmiştir.

3. GENEL BİLGİLER

TANIM 3.1.

$A \neq \Phi$ bir cümle ve V de K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan bir

$$f : A \times A \rightarrow V$$

fonksiyonu varsa A ya V ile birleşen bir **afin uzay** denir.

$$(A1). \forall P, Q, R \in A \text{ için } f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R)$$

$$(A2). \forall P \in A \text{ ve } \forall \alpha \in V \text{ için } f(P, Q) = \alpha \text{ olacak şekilde bir tek } Q \in A \text{ noktası vardır.}$$

TANIM 3.2.

V , n -boyutlu reel vektör uzayı ve A da V ile birleşen bir afin uzay olsun. Eğer V bir iç-çarpım uzayı ise A ya **Öklid uzayı** denir ve genellikle E^n ile gösterilir.

TANIM 3.3.

K cismi üzerinde iki vektör uzayı V_1 ve V_2 olsun. V_1 ve V_2 ile birleşen afin uzaylar A_1 ve A_2 olmak üzere $f : A_1 \rightarrow A_2$ bir dönüşüm olsun. $P, Q \in A_1$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \psi_P : V_1 &\rightarrow V_2 \\ \overline{PQ} &\rightarrow \psi_P(\overline{PQ}) = \overline{f(P)f(Q)} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. Burada ψ_P dönüşümüne f ile birleşen dönüşüm adı verilir. Eğer ψ_P dönüşümü lineer ise f ye bir **afin dönüşüm** denir.

TANIM 3.4.

E_1^n ve E_2^n , sırasıyla, V_1 ve V_2 n -boyutlu iç çarpım uzayları ile birleşen birer öklid uzayı olsunlar. Bir

$$f : E_1^n \rightarrow E_2^n$$

afin dönüşümü $\forall \alpha, \beta \in V_1$ için

$$\langle \psi(\alpha), \psi(\beta) \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle$$

olacak şekilde bir

$$\psi : V_1 \rightarrow V_2$$

lineer dönüşümü ile birleşiyorsa f ye bir **izometri** denir.

TANIM 3.5.

n -boyutlu bir E^n öklid uzayının izometrilерinden biri f olsun. E^n deki bir $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ dik koordinat sistemine göre f nin matrisel ifadesi $A \in O(n)$, yani $\det A = \pm 1$ ve $C \in R^n_1$ olmak üzere

$$\begin{bmatrix} x' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}$$

formundadır. f ye E^n de bir **hareket** adı verilir. f hareketine, $\det A = 1$ ise **direkt hareket**, $\det A = -1$ ise **karşıt hareket** denir.

TANIM 3.6.

E^n , n -boyutlu Öklid uzayının bir f izometrisi için $f(O) = O$ olacak şekilde bir $O \in E^n$ noktası varsa f ye O noktası etrafında E^n in bir **dönmesi** adı verilir. Eğer hareket direkt hareket ise f ye **direkt dönme**, karşıt hareket ise **karşıt dönme** denir.

E^n de başlangıç noktası O olan bir dik koordinat sistemi $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ olsun. $f : E^n \rightarrow E^n$ izometrisi O noktası etrafındaki bir dönme ise f nin bu dik koordinat sistemine göre ifadesi

$$x' = Ax$$

şeklindedir. Burada, $A \in O(n)$ ve $x, x' \in R^n_1$ dir.

TANIM 3.7.

E^n , n -boyutlu Öklid uzayının bir f izometrisi ve $\forall X \in E^n$ için $f(X) = X + t$ olacak şekilde bir tek $t = (t_1, t_2, \dots, t_n) \in E^n$ noktası varsa f ye E^n in t ile belirtilen bir **ötelemesi** denir.

E^n de başlangıç noktası O olan bir dik koordinat sistemi $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ olsun. $f : E^n \rightarrow E^n$ izometrisi $t = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ noktası ile belli olan bir öteleme olsun. f nin bu dik koordinat sistemine göre ifadesi

$$\begin{bmatrix} x' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}$$

veya

$$x' = x + t$$

dir.

TANIM 3.8.

E hareketli düzleminin E' sabit düzlemine göre hareketi $B = E/E'$ ile gösterilmek üzere B hareketinin φ dönme açısı ve $\mathbf{u}$ öteleme vektörünün u_1, u_2 bileşenleri $\varphi = \varphi(t)$, $u_1 = u_1(t)$, $u_2 = u_2(t)$ şeklinde bir t reel parametresinin sürekli diferensiyellenebilen fonksiyonu iseler B hareketine **1-parametrelili düzlemsel hareket** denir.

TANIM 3.9.

u_1, u_2 ve φ ; bir t reel parametresinin sürekli diferensiyellenebilen fonksiyonları olmak üzere $u_1 = u_1(t)$, $u_2 = u_2(t)$, $\varphi = \varphi(t)$ fonksiyonları aynı $t_0 \leq t \leq t_1$ aralığında tanımlanmış olsun. Ayrıca

$$u_j(t+T) = u_j(t) \quad , \quad j=1,2$$

$$\varphi(t+T) = \varphi(t) + 2\pi\nu$$

bağıntıları sağlanacak şekilde en küçük bir $T > 0$ sayısı varsa, $\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{u}$ denklemi ile tanımlanan harekete T periyotlu ve ν dönme sayılı **1-parametrelili kapalı düzlemsel hareket** denir.

TANIM 3.10.

n -boyutlu Öklid uzayında bir cismin **homotetik hareketi**

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} hA & \mathbf{u} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{bmatrix}$$

dönüşümü ile ifade edilir. Burada A , $n \times n$ tipinde ortogonal bir matris, $h = hI_n$ skaler bir matris ve $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}'$, $\mathbf{u}$ birer $n \times 1$ -tipinde matrislerdir[1].

TANIM 3.11.

u_1, u_2 , φ ve h bir t reel parametresinin sürekli diferensiyellenebilen fonksiyonları olmak üzere $u_1 = u_1(t)$, $u_2 = u_2(t)$, $\varphi = \varphi(t)$ ve $h = h(t)$ fonksiyonları aynı $t_0 \leq t \leq t_1$ aralığında tanımlanmış olsun. Ayrıca

$$u_j(t+T) = u_j(t) \quad , \quad j=1,2$$

$$\varphi(t+T) = \varphi(t) + 2\pi\nu$$

bağıntıları sağlanacak şekilde en küçük bir $T > 0$ sayısı varsa, $\mathbf{x}' = h\mathbf{x} - \mathbf{u}$ denklemi ile tanımlanan harekete T periyotlu ve ν dönme sayılı **1-parametrelili kapalı düzlemsel homotetik hareket** denir.

4. MATERYAL VE METOT

4.1. 1-Parametrel Hareketler

E ve E' birbiri üzerinde hareket eden iki düzlem olsun. Burada E hareketli, E' ise sabit düzlemdir.

Hareketi inceleyebilmek için bir $O' \in E'$ başlangıç noktasını alalım ve bu noktaya $\{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2\}$ koordinat sistemini tesbit edelim. Aynı şekilde E -düzleminde alınan O başlangıç noktasına $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ koordinat sistemini tesbit edelim. Bu iki koordinat sistemini E ve E' -düzlemlerinin temsilcisi olarak kabul edecek ve hareketli koordinat sisteminin sabit koordinat sistemine göre hareketini inceleyeceğiz.

Bu koordinat sistemlerinin çeşitli konumları, şu iki büyüklük yardımı ile ifade edilebilir.

i.) Hareketli sistemin başlangıç noktasından sabit sistemin başlangıç noktasına giden $\overrightarrow{OO'} = \mathbf{u}$ öteleme vektörü,

ii.) Her iki koordinat sisteminin birbirine nazaran dönme açısı.

TANIM 4.1.1.

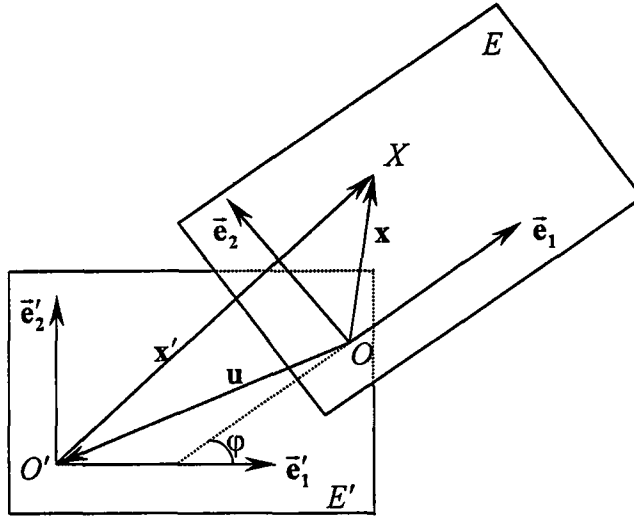
Sabit ve hareketli sistemin aynı indisli birim vektörleri arasındaki φ açısına **dönme açısı** denir.

$\overrightarrow{OO'} = \mathbf{u}$ öteleme vektörü, aşağıdaki gibi hareketli sistemin $\vec{e}_1$ ve $\vec{e}_2$ doğrultularındaki iki bileşene ayrılabilir.

$$(4.1.1) \quad \mathbf{u} = u_1 \vec{e}_1 + u_2 \vec{e}_2$$

TANIM 4.1.2.

E hareketli düzleminin E' sabit düzlemine göre hareketi $B = E/E'$ ile gösterilmek üzere B hareketinin φ dönme açısı ve $\mathbf{u}$ öteleme vektörünün u_1, u_2 bileşenleri $\varphi = \varphi(t)$, $u_1 = u_1(t)$, $u_2 = u_2(t)$ şeklinde reel bir t parametresinin fonksiyonu iseler $B = E/E'$ hareketine **1-parametrel düzlemsel hareket** denir. Buradaki t parametresi genel olarak zaman olarak alınır.



Şekil 4.1.1

$O = O'$ olduğu zaman, $\vec{e}_1$ ve $\vec{e}_2$ vektörleri $\vec{e}'_1$ ve $\vec{e}'_2$ doğrultularında bileşenlerine ayrılabilir ve buradan

$$(4.1.2) \quad \begin{aligned} \vec{e}_1 &= \cos \varphi \vec{e}'_1 + \sin \varphi \vec{e}'_2 \\ \vec{e}_2 &= -\sin \varphi \vec{e}'_1 + \cos \varphi \vec{e}'_2 \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir.

4.1.1. Türev Denklemleri

Bir X noktasının her iki E, E' -düzlemlerine nazaran hızlarını araştırmak için önce hareketimizin türev denklemlerini teşkil edeceğiz. (4.1.2) denkleminde, $\vec{e}'_1$ ve $\vec{e}'_2$ vektörlerini sabit kabul ederek, t zamanına göre türev alınırsa,

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{e}_1}{dt} &= \dot{\vec{e}}_1 = -\dot{\varphi} \sin \varphi \vec{e}'_1 + \dot{\varphi} \cos \varphi \vec{e}'_2 = \dot{\varphi} (-\sin \varphi \vec{e}'_1 + \cos \varphi \vec{e}'_2) \\ \frac{d\vec{e}_2}{dt} &= \dot{\vec{e}}_2 = -\dot{\varphi} \cos \varphi \vec{e}'_1 - \dot{\varphi} \sin \varphi \vec{e}'_2 = -\dot{\varphi} (\cos \varphi \vec{e}'_1 + \sin \varphi \vec{e}'_2) \end{aligned}$$

bulunur. Bunları kısaca

$$(4.1.3) \quad \dot{\vec{e}}_1 = \dot{\varphi} \vec{e}_2, \quad \dot{\vec{e}}_2 = -\dot{\varphi} \vec{e}_1$$

şeklinde yazabiliriz.

Benzer olarak (4.1.1) denkleminin t ye göre türevi alınırsa

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \dot{\vec{u}} = \dot{u}_1 \vec{e}_1 + u_1 \dot{\vec{e}}_1 + \dot{u}_2 \vec{e}_2 + u_2 \dot{\vec{e}}_2$$

elde edilir. $\dot{\vec{e}}_1$ ve $\dot{\vec{e}}_2$ nın (4.1.3) deki değerleri burada yerlerine konursa

$$(4.1.4) \quad \dot{\mathbf{u}} = (\dot{u}_1 - u_2\dot{\phi})\vec{e}_1 + (\dot{u}_2 + u_1\dot{\phi})\vec{e}_2$$

bulunur.

(4.1.3) ve (4.1.4) denklemlerine $B = E/E'$ hareketinin **türev denklemleri** denir.

4.1.2. Hızlar ve Hızların Terkibi

E -düzleminin bizzat kendisi E' -düzlemine göre 1-parametrelili hareket yaparken, bir X noktası da hareketli E -düzlemindeki yerini t zamanı ile değiştirsin. Böylece iki hareketi bir araya getiriyor ve bu durumda hızların nasıl terkip edileceğini araştırıyoruz.

TANIM 4.1.3.

X noktasının E -düzlemine göre hız vektörüne, yani X noktası E -deki yörüngesini çizerken sahip olduğu vektörel hıza X noktasının **relatif(izafi) hızı** denir ve $\mathbf{V}_r$ ile gösterilir. Bu hız için

$$\mathbf{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2$$

denklemden, $\vec{e}_1$ ve $\vec{e}_2$ yi sabit tutarak, türev almak suretiyle

$$(4.1.5) \quad \mathbf{V}_r = \dot{x}_1\vec{e}_1 + \dot{x}_2\vec{e}_2$$

bulunur. Eğer X noktası E -de sabit ise $\mathbf{V}_r$ relatif hızı sıfırdır.

TANIM 4.1.4.

X noktasının E' -ne göre hız vektörüne X noktasının **mutlak hızı** denir ve $\mathbf{V}_a$ ile gösterilir.

$$(4.1.6) \quad \begin{aligned} \mathbf{x}' &= \overrightarrow{O'X} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OO'} \\ &= \mathbf{x} - \mathbf{u} = (x_1 - u_1)\vec{e}_1 + (x_2 - u_2)\vec{e}_2 \end{aligned}$$

eşitliğinin t ye göre türevi alınırsa $\mathbf{V}_a$ için şu elde edilir:

$$\mathbf{V}_a = (\dot{x}_1 - \dot{u}_1)\vec{e}_1 + (x_1 - u_1)\dot{\vec{e}}_1 + (\dot{x}_2 - \dot{u}_2)\vec{e}_2 + (x_2 - u_2)\dot{\vec{e}}_2.$$

Burada $\dot{\vec{e}}_1$ ve $\dot{\vec{e}}_2$ nın (4.1.3) deki değerleri dikkate alınırsa

$$\mathbf{V}_a = \{-\dot{u}_1 + (u_2 - x_2)\dot{\phi}\}\vec{e}_1 + \{-\dot{u}_2 + (-u_1 + x_1)\dot{\phi}\}\vec{e}_2 + \dot{x}_1\vec{e}_1 + \dot{x}_2\vec{e}_2$$

veya

$$\mathbf{V}_a = \{-\dot{u}_1 + (u_2 - x_2)\dot{\phi}\}\vec{e}_1 + \{-\dot{u}_2 + (-u_1 + x_1)\dot{\phi}\}\vec{e}_2 + \mathbf{V}_r$$

elde edilir. Burada

$$(4.1.7) \quad \mathbf{V}_r = \{-\dot{u}_1 + (u_2 - x_2)\dot{\phi}\}\vec{e}_1 + \{-\dot{u}_2 + (-u_1 + x_1)\dot{\phi}\}\vec{e}_2$$

ile gösterilen vektöre X noktasının **sürüklenme hız vektörü** denir.

O halde hızların terkiğine ait şu teorem verilebilir:

TEOREM 4.1.1.

Eğer X noktası her iki sisteme göre hareketli ise hız vektörleri arasında

$$(4.1.8) \quad \mathbf{V}_a = \mathbf{V}_f + \mathbf{V}_r$$

bağıntısı vardır[2].

TANIM 4.1.5.

Dönme açısının $\frac{d\phi}{dt} = \dot{\phi}$ türevine B hareketinin **açısal hızı** denir. Bundan sonra

sıfır öteleme hareketinden kaçınmak için $\dot{\phi} \neq 0$ kabul edeceğiz.

Şimdi B hareketinin her t anında sürüklenme hızı sıfır olan noktalarını araştıralım.

Böyle noktalar, t anında, yalnız hareketli E -düzleminde değil aynı zamanda sabit E' -düzleminde de sabit bulunmak zorundadırlar. O halde

$$\mathbf{V}_f = 0$$

olacağından (4.1.7) den

$$-\dot{u}_1 + (u_2 - x_2)\dot{\phi} = 0 \quad , \quad -\dot{u}_2 + (-u_1 + x_1)\dot{\phi} = 0$$

elde edilir.

$\dot{\phi} \neq 0$ olduğuna göre bu iki denklem her zaman tek türlü olarak çözülebilir. Bu çözümlere p_1 ve p_2 denilirse

$$(4.1.9) \quad \begin{aligned} p_1 &= x_1 = u_1 + \frac{\dot{u}_2}{\dot{\phi}} = u_1 + \frac{du_2}{d\phi} \\ p_2 &= x_2 = u_2 - \frac{\dot{u}_1}{\dot{\phi}} = u_2 - \frac{du_1}{d\phi} \end{aligned}$$

bulunur.

TANIM 4.1.6.

$\overrightarrow{OP} = \bar{\mathbf{p}} = p_1 \bar{\mathbf{e}}_1 + p_2 \bar{\mathbf{e}}_2$ yer vektörüne karşılık gelen $P = (p_1, p_2)$ noktasına $B = E / E'$ hareketinin t anındaki **pol(kutup) noktası, dönme polü veya ani dönme merkezi** denir.

Bundan dolayı aşağıdaki teorem verilebilir:

TEOREM 4.1.2.

Açısal hızı sıfır olmayan bir harekette, her t anında, sürüklenme hızı sıfır olan yani her iki düzlemde de sabit kalan bir tek nokta (pol noktası) vardır[2].

P pol noktası yardımı ile herhangi bir X noktasının V_r sürüklenme hızını şu şekilde de yazabiliriz:

Bunun için (4.1.9) dan

$$\dot{u}_1 = (u_2 - p_2)\dot{\phi} \quad , \quad \dot{u}_2 = -(u_1 - p_1)\dot{\phi}$$

ifadelerini hesaplar (4.1.7) de yerine yazarsak

$$(4.1.10) \quad V_r = \{-(x_2 - p_2)\bar{e}_1 + (x_1 - p_1)\bar{e}_2\}\dot{\phi}$$

elde edilir.

X noktasının sürüklenme hızının bu şekildeki ifadesinden önemli iki sonuç çıkartılabilir:

SONUÇ 4.1.1.

P polünden X noktasına giden pol ışınının

$$\overrightarrow{PX} = (x_1 - p_1)\bar{e}_1 + (x_2 - p_2)\bar{e}_2$$

vektörü V_r ye diktir; çünkü

$$\langle \overrightarrow{PX}, V_r \rangle = -(x_2 - p_2)(x_1 - p_1) + (x_1 - p_1)(x_2 - p_2) = 0$$

dır. Yani pol ışını hareketin her t anında sürüklenme hızına diktir.

SONUÇ 4.1.2.

V_r vektörünün uzunluğu için şu bağıntı vardır:

$$\|V_r\| = \dot{\phi} \|\overrightarrow{PX}\|$$

TANIM 4.1.7.

Her t anına bir P pol noktası ait olacağından B hareketi esnasında P pol noktası her iki E ve E' -düzlemlerinde muhtelif konumlar alır. P noktasının hareketli E -düzlemindeki yeri genel olarak bir eğridir, bu eğriye B nin **hareketli pol eğrisi** denir ve (P) ile gösterilir. P noktasının E' -düzlemindeki geometrik yerine ise **sabit pol eğrisi** denir ve (P') ile gösterilir.

4.1.3. İvmeler ve İvmelerin Terkibi

TANIM 4.1.8.

X noktasının E -düzlemine göre olan ivme vektörüne **relatif ivme vektörü** denir ve $\mathbf{b}_r$ ile gösterilir.

X noktasının E -düzlemine nazaran $\mathbf{V}_r$ relatif hızının t zamanına göre türevi alınarak bu vektörel ivme bulunur. Yani

$$(4.1.11) \quad \mathbf{b}_r = \dot{\mathbf{V}}_r = \ddot{x}_1 \bar{\mathbf{e}}_1 + \ddot{x}_2 \bar{\mathbf{e}}_2$$

dir. Burada $\bar{\mathbf{e}}_1$ ve $\bar{\mathbf{e}}_2$ sabit kabul edilmiştir.

TANIM 4.1.9.

X noktasının E' -düzlemine göre olan ivme vektörüne **mutlak ivme vektörü** denir ve $\mathbf{b}_a$ ile gösterilir.

$$\mathbf{V}_a = \mathbf{V}_f + \mathbf{V}_r = \{-(x_2 - p_2)\bar{\mathbf{e}}_1 + (x_1 - p_1)\bar{\mathbf{e}}_2\}\dot{\phi} + \dot{x}_1 \bar{\mathbf{e}}_1 + \dot{x}_2 \bar{\mathbf{e}}_2$$

mutlak hızının t ye göre türevi alınarak bu vektörel ivme bulunur.

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_a = \dot{\mathbf{V}}_a = & \{-(\dot{x}_2 - \dot{p}_2)\bar{\mathbf{e}}_1 - (x_2 - p_2)\ddot{\phi} + (\dot{x}_1 - \dot{p}_1)\bar{\mathbf{e}}_2 + (x_1 - p_1)\ddot{\phi}\}\dot{\phi} \\ & + \{-(x_2 - p_2)\bar{\mathbf{e}}_1 + (x_1 - p_1)\bar{\mathbf{e}}_2\}\ddot{\phi} + \ddot{x}_1 \bar{\mathbf{e}}_1 + \ddot{x}_2 \bar{\mathbf{e}}_2 + \dot{x}_2 \ddot{\phi} \bar{\mathbf{e}}_2 \end{aligned}$$

elde edilir. $\ddot{\phi}$ ve $\ddot{\phi}$ nın (4.1.3) deki değerlerini yerine yazarsak

$$\begin{aligned} (4.1.12) \quad \mathbf{b}_a = & \{\dot{p}_2 \dot{\phi} - (x_1 - p_1) \dot{\phi}^2 - (x_2 - p_2) \ddot{\phi}\} \bar{\mathbf{e}}_1 \\ & + \{-\dot{p}_1 \dot{\phi} - (x_2 - p_2) \dot{\phi}^2 + (x_1 - p_1) \ddot{\phi}\} \bar{\mathbf{e}}_2 \\ & + 2\dot{\phi} \{ -\dot{x}_2 \bar{\mathbf{e}}_1 + \dot{x}_1 \bar{\mathbf{e}}_2 \} + \mathbf{b}_r \end{aligned}$$

elde edilir. (4.1.12) deki

$$\begin{aligned} (4.1.13) \quad \mathbf{b}_r = & \{\dot{p}_2 \dot{\phi} - (x_1 - p_1) \dot{\phi}^2 - (x_2 - p_2) \ddot{\phi}\} \bar{\mathbf{e}}_1 \\ & + \{-\dot{p}_1 \dot{\phi} - (x_2 - p_2) \dot{\phi}^2 + (x_1 - p_1) \ddot{\phi}\} \bar{\mathbf{e}}_2 \end{aligned}$$

vektörüne X noktasının **sürüklenme ivme vektörü** denir.

O halde sürüklenme ivme vektörü hareketli sistemdeki sabit noktaların sabit sisteme göre ivmesidir.

$$(4.1.14) \quad \mathbf{b}_c = 2\dot{\phi} \{ -\dot{x}_2 \bar{\mathbf{e}}_1 + \dot{x}_1 \bar{\mathbf{e}}_2 \}$$

ile gösterilen $\mathbf{b}_c$ vektörüne ise **Coriolis-ivme vektörü** denir.

O halde ivmelerin terkibi şu teoremlerle ifade edilir:

TEOREM 4.1.3.

İki hareketin terkinde bir noktanın mutlak ivme vektörü, sürüklenme ivme vektörü ile Coriolis-ivme vektörü ve relatif ivme vektörünün toplamına eşittir, yani

$$\mathbf{b}_a = \mathbf{b}_f + \mathbf{b}_c + \mathbf{b}_r$$

dır[2].

SONUÇ 4.1.3.

$\mathbf{b}_c$ Coriolis-ivmesi $\mathbf{V}_r$ relatif hızına diktir. Çünkü,

$$\langle \mathbf{b}_c, \mathbf{V}_r \rangle = 2\dot{\phi}(-\dot{x}_1\dot{x}_2 + \dot{x}_1\dot{x}_2) = 0.$$

Bundan başka (4.1.14) den şunu söyleyebiliriz:

E -de sabit olmayan bir X noktasının Coriolis-ivmesi ancak ve ancak $\dot{\phi} \equiv 0$, yani B hareketi bir kaymaya(ötelemeye) uğradığı zaman, t nin bütün değerleri için sıfır olur. Bu takdirde, (4.1.7) ve (4.1.8) den dolayı

$$\mathbf{V}_a = \mathbf{V}_f + \mathbf{V}_r = (-\dot{u}_1 + \dot{x}_1)\vec{\mathbf{e}}_1 + (-\dot{u}_2 + \dot{x}_2)\vec{\mathbf{e}}_2$$

ve buradan türev alarak

$$\mathbf{b}_a = \mathbf{b}_f + \mathbf{b}_r = (-\ddot{u}_1 + \ddot{x}_1)\vec{\mathbf{e}}_1 + (-\ddot{u}_2 + \ddot{x}_2)\vec{\mathbf{e}}_2$$

bulunur. Demek ki ancak bir kayma hareketi halinde ivmeler hızlar gibi terkip olunurlar.

Şimdi genel bir B hareketinde, t zamanında, sürüklenme ivmesi sıfır olan noktaları araştıralım. $\mathbf{b}_f = 0$ dan

$$(x_1 - p_1)\dot{\phi}^2 + (x_2 - p_2)\ddot{\phi} = \dot{p}_2\dot{\phi}$$

$$(x_1 - p_1)\ddot{\phi} - (x_2 - p_2)\dot{\phi}^2 = \dot{p}_1\dot{\phi}$$

elde edilir. $\dot{\phi} \neq 0$ ise, $(x_1 - p_1)$ ve $(x_2 - p_2)$ ye göre homojen olmayan denklem sisteminin Δ ile gösterilen katsayılar determinantı

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dot{\phi}^2 & \ddot{\phi} \\ \ddot{\phi} & -\dot{\phi}^2 \end{vmatrix} = -(\dot{\phi}^4 + \ddot{\phi}^2) \neq 0$$

dır. Buna göre yukarıdaki denklem sistemi çözülebilir.

TANIM 4.1.10.

$\dot{\phi} \neq 0$ olmak üzere, t anında, sürüklenme ivmesi sıfır olan bir tek nokta vardır. Bu noktaya **ivme polü** denir.

İvme polünün koordinatları

$$(4.1.15) \quad \begin{aligned} x_1 &= p_1 + \frac{\dot{\phi}(\dot{p}_2\dot{\phi}^2 + \dot{p}_1\ddot{\phi})}{\dot{\phi}^4 + \ddot{\phi}^2} \\ x_2 &= p_2 - \frac{\dot{\phi}(\dot{p}_1\dot{\phi}^2 - \dot{p}_2\ddot{\phi})}{\dot{\phi}^4 + \ddot{\phi}^2} \end{aligned}$$

dir.

4.1.4. Kapalı Hareketler

TANIM 4.1.11.

u_1, u_2 ve φ ; bir t reel parametresinin sürekli diferensiyellenebilir fonksiyonları olmak üzere

$$u_1 = u_1(t), \quad u_2 = u_2(t), \quad \varphi = \varphi(t)$$

fonksiyonları aynı $t_0 \leq t \leq t_1$ aralığında tanımlanmış olsun. Eğer

$$u_j(t+T) = u_j(t), \quad j = 1, 2$$

$$\varphi(t+T) = \varphi(t) + 2\pi\nu$$

bağıntıları sağlanacak şekilde $T > 0$ en küçük sayı ise; E/E' hareketine T periyotlu ve ν dönme sayılı **1-parametrelili kapalı düzlemsel hareket** denir.

Burada ν bir tamsayıdır ve E' -ye göre E -düzleminin ilk durumuna gelinceye kadar (T zamanında) kaç tam devir yaptığını gösterir.

X noktasının E' -ye göre $d\mathbf{x}'$ değişimi, X in sürüklenme hızına karşılık geldiğinden (4.1.10) dan

$$(4.1.16) \quad d\mathbf{x}' = \{-(x_2 - p_2)\vec{e}_1 + (x_1 - p_1)\vec{e}_2\}d\varphi$$

dir.

4.1.5. Kapalı Bir Hareketin Yörünge Alanı

E -düzleminin sabit bir X noktasının F_X yörünge alanını hesaplamak istiyoruz. Bunun için

$$(4.1.17) \quad F_X = \frac{1}{2} \oint (x'_1 dx'_2 - x'_2 dx'_1)$$

Gauss alan formülünden faydalanacağız[6]. Burada eğri integrali X noktasının kapalı yörünge eğrisi üzerinde alınmaktadır.

$$[\mathbf{x}', d\mathbf{x}'] = \begin{vmatrix} x'_1 & x'_2 \\ dx'_1 & dx'_2 \end{vmatrix} = x'_1 dx'_2 - x'_2 dx'_1$$

eşitliği göz önüne alınırsa (4.1.17) den

$$(4.1.18) \quad F_X = \frac{1}{2} \oint [\mathbf{x}', d\mathbf{x}']$$

yazılabilir. (4.1.18) ifadesinde (4.1.6) ve (4.1.16) bağıntıları kullanılırsa,

$$\begin{aligned} F_X &= \frac{1}{2} \oint \begin{vmatrix} x_1 - u_1 & x_2 - u_2 \\ -(x_2 - p_2) & x_1 - p_1 \end{vmatrix} d\varphi \\ &= \frac{1}{2} \oint (x_1^2 + x_2^2 - x_1 p_1 - x_2 p_2 - x_1 u_1 - x_2 u_2 + u_1 p_1 + u_2 p_2) d\varphi \end{aligned}$$

elde edilir. (4.1.9) denklemlerinden

$$(4.1.19) \quad u_1 = p_1 - \frac{du_2}{d\varphi}, \quad u_2 = p_2 + \frac{du_1}{d\varphi}$$

bulunur. Bu değerler son eşitlikte yerine yazılırsa

$$F_X = \frac{1}{2} \oint (x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 p_1 - 2x_2 p_2 + x_1 \frac{du_2}{d\varphi} - x_2 \frac{du_1}{d\varphi} + u_1 p_1 + u_2 p_2) d\varphi$$

veya buradan

$$\begin{aligned} (4.1.20) \quad F_X &= \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2) \oint d\varphi - x_1 \oint p_1 d\varphi - x_2 \oint p_2 d\varphi + \frac{1}{2} x_1 \oint du_2 \\ &\quad - \frac{1}{2} x_2 \oint du_1 + \frac{1}{2} \oint (u_1 p_1 + u_2 p_2) d\varphi \end{aligned}$$

elde edilir.

Diğer taraftan $X = O(x_1 = x_2 = 0)$ orijin noktasının yörünge alanı hesaplanırsa

$$\begin{aligned} F_O &= \frac{1}{2} \oint \begin{vmatrix} -u_1 & -u_2 \\ p_2 & -p_1 \end{vmatrix} d\varphi \\ &= \frac{1}{2} \oint (u_1 p_1 + u_2 p_2) d\varphi \end{aligned}$$

bulunur.

Düzlemsel hareket kapalı olduğundan, $t = 0$ için

$$\varphi(T) = \varphi(0) + 2\pi\nu$$

olup

$$\int_0^T d\varphi(t) = \varphi(t) \Big|_0^T = \varphi(T) - \varphi(0) = 2\pi\nu$$

dür. Benzer şekilde $t = 0$ için $u_j(T) = u_j(0)$ olduğundan

$$\int_0^T du_j(t) = u_j(t) \Big|_0^T = u_j(T) - u_j(0) = 0$$

elde edilir. Bulunan bu değerler (4.1.20) de yerine yazılırsa

$$(4.1.21) \quad F_X = \pi v(x_1^2 + x_2^2) - x_1 \oint p_1 d\phi - x_2 \oint p_2 d\phi + F_O$$

bulunur.

$v \neq 0$ ise S Steiner noktasını elde ederiz.

TANIM 4.1.12.

$d\phi$ kitle elementli kitle örtülmesinde hareketli (P) pol eğrisinin ağırlık merkezine **Steiner noktası** denir ve S ile gösterilir.

S nin koordinatları s_1 ve s_2 olmak üzere

$$(4.1.22) \quad s_j = \frac{\oint p_j d\phi}{\oint d\phi} = \frac{1}{2\pi v} \oint p_j d\phi, \quad j = 1, 2$$

dir. Burada pay koordinat eksenlerine göre statik momenti, payda ise bu suretle örtülmüş (P) pol eğrisinin bütün kitlesini gösterir.

O halde (4.1.21) den X noktasının yörünge alanı için

$$(4.1.23) \quad F_X = F_O + \pi v(x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 s_1 - 2x_2 s_2)$$

Steiner alan formülü elde edilir[2].

4.1.6. Holditch Teoremi

TEOREM 4.1.4.

E' -düzleminde bir k ovali verilsin. Uzunluğu sabit olan bir doğru parçasının iki ucunu bu oval üzerinde hareket ettirelim. Doğru parçası üzerinde tespit edilen bir X noktasının E/E' düzlemsel hareketi esnasında çizdiği kapalı eğri ile k ovali arasındaki bölgenin alanı sadece X noktasının doğru parçası üzerinde seçilişine bağlıdır, yani bu alan k ovaline ve E/E' düzlemsel hareketine bağlı değildir[2].

İspat:

Şekil 4.1.2 de verilen k ovalini ve $\overline{OQ}$ doğru parçasını ele alalım. $\overline{OQ}$ doğru parçasının uzunluğu da q olsun. $\overline{OQ}$ doğru parçasının O ve Q uçları k yı tam bir defa kat edecek şekilde hareket etsin. Bu durumda $v=1$ dönme sayılı kapalı bir hareket meydana gelir.

O halde taralı bölgenin alanı k nın seçilişine değil, yalnız X noktasının k ovalinin içini tarayan $\overline{OQ}$ doğru parçasının O ve Q uç noktalarından olan uzaklığına, yani X noktasının $\overline{OQ}$ doğru parçası üzerindeki yerine bağlıdır.



4.2. Homotetik Hareketler

E -düzleminde hareketli koordinat sistemi $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ ve E' -düzleminde sabit koordinat sistemi $\{O'; \vec{e}'_1, \vec{e}'_2\}$ olsun.

E -düzleminde alınan sabit bir X noktasının, herhangi bir t anında,

$$(4.2.1) \quad \mathbf{x}' = h\mathbf{x} - \mathbf{u} = (hx_1 - u_1)\vec{e}_1 + (hx_2 - u_2)\vec{e}_2$$

denklemini ile tanımlanan homotetik hareketini inceleyelim. Burada h, t reel parametresinin sürekli diferensiyellenebilir fonksiyonudur.

Hareketli sistemin başlangıç noktasından sabit sistemin başlangıç noktasına giden $\overrightarrow{OO'} = \mathbf{u}$ vektörü

$$(4.2.2) \quad \mathbf{u} = u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2$$

şeklinde ifade edilebilir.

Hareketli düzlemin sabit düzleme göre dönme açısı φ dir.

Bir an için her iki koordinat sistemini çakışacak şekilde kaydırılmış olarak düşünelim. Bu durumda $\vec{e}_1$ ve $\vec{e}_2$ vektörleri $\vec{e}'_1$ ve $\vec{e}'_2$ doğrultularında bileşenlerine ayrılabilir ve

$$(4.2.3) \quad \begin{aligned} \vec{e}_1 &= \cos \varphi \vec{e}'_1 + \sin \varphi \vec{e}'_2 \\ \vec{e}_2 &= -\sin \varphi \vec{e}'_1 + \cos \varphi \vec{e}'_2 \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir.

4.2.1. Kapalı Düzlemsel Homotetik Hareket

TANIM 4.2.1.

u_1, u_2, φ ve h , bir t reel parametresinin sürekli diferensiyellenebilir fonksiyonları olmak üzere

$$u_1 = u_1(t), \quad u_2 = u_2(t), \quad \varphi = \varphi(t), \quad h = h(t)$$

fonksiyonları aynı $t_0 \leq t \leq t_1$ aralığında tanımlanmış olsun. Eğer

$$(4.2.4) \quad \begin{aligned} u_j(t+T) &= u_j(t), \quad j = 1, 2 \\ \varphi(t+T) &= \varphi(t) + 2\pi\nu \end{aligned}$$

bağıntıları sağlanacak şekilde $T > 0$ en küçük sayı ise,

$$\mathbf{x}' = (hx_1 - u_1)\vec{e}_1 + (hx_2 - u_2)\vec{e}_2$$

denklemleri ile tanımlanan harekete T periyotlu ve ν dönme sayılı **1-parametrelili kapalı düzlemsel homotetik hareket** denir. E -düzleminin E' -düzlemine göre kapalı homotetik hareketini $B = E / E'$ ile gösterelim.

X noktasının hareketli sistemdeki koordinatları (x_1, x_2) olmak üzere

$$(4.2.5) \quad \mathbf{x} = x_1 \bar{\mathbf{e}}_1 + x_2 \bar{\mathbf{e}}_2$$

dir.

4.2.2. Hızlar ve Hızların Terkibi

X noktasının E ve E' -düzlemlerine göre hızlarını hesaplamak için önce B hareketinin türev denklemlerini teşkil edelim. Bunun için (4.1.3) den

$$(4.2.6) \quad \dot{\bar{\mathbf{e}}}_1 = \dot{\phi} \bar{\mathbf{e}}_2, \quad \dot{\bar{\mathbf{e}}}_2 = -\dot{\phi} \bar{\mathbf{e}}_1$$

ve (4.1.4) den

$$(4.2.7) \quad \dot{\mathbf{u}} = (\dot{u}_1 - u_2 \dot{\phi}) \bar{\mathbf{e}}_1 + (\dot{u}_2 + u_1 \dot{\phi}) \bar{\mathbf{e}}_2$$

olduğunu biliyoruz. (4.2.6) ve (4.2.7) denklemlerine B hareketinin **türev denklemleri** denir.

B hareketinin relatif hızı, (4.2.5) den türev alınarak

$$(4.2.8) \quad \mathbf{V}_r = \dot{x}_1 \bar{\mathbf{e}}_1 + \dot{x}_2 \bar{\mathbf{e}}_2$$

ve mutlak hız ise (4.2.1) den türev alınarak

$$(4.2.9) \quad \mathbf{V}_a = \frac{d\mathbf{x}'}{dt} = \left\{ -\dot{u}_1 + (u_2 - hx_2)\dot{\phi} + \dot{hx}_1 \right\} \bar{\mathbf{e}}_1 + \left\{ -\dot{u}_2 + (-u_1 + hx_1)\dot{\phi} + \dot{hx}_2 \right\} \bar{\mathbf{e}}_2 + h\mathbf{V}_r$$

olarak bulunur. (4.2.9) eşitliğinde

$$(4.2.10) \quad \mathbf{V}_f = \left\{ -\dot{u}_1 + (u_2 - hx_2)\dot{\phi} + \dot{hx}_1 \right\} \bar{\mathbf{e}}_1 + \left\{ -\dot{u}_2 + (-u_1 + hx_1)\dot{\phi} + \dot{hx}_2 \right\} \bar{\mathbf{e}}_2$$

vektörüne X noktasının **sürüklenme hız vektörü** denir. Eğer X noktası E -de sabit ise, yani $\mathbf{V}_r = 0$ ise, bu durumda mutlak hız sürüklenme hızına eşit olur.

TEOREM 4.2.1.

E / E' homotetik hareketinde bir X noktasının hız vektörleri arasında

$$(4.2.11) \quad \mathbf{V}_a = \mathbf{V}_f + h\mathbf{V}_r$$

bağıntısı vardır[7].

Dönme açısının $\frac{d\phi}{dt} = \dot{\phi}$ türevine B hareketinin **açısal hızı** denildiğini biliyoruz.

Sıfır öteleme ve sıfır dönme durumlarından kaçınmak için $\dot{\phi} \neq 0$, $h = h(t) \neq \text{sabit}$ kabul edeceğiz.

Şimdi sürüklenme hızının sıfır olduğu noktaları araştıralım. Böyle noktalar t anında yalnız hareketli E -düzleminde değil aynı zamanda sabit E' -düzleminde de sabit olmak zorundadır. Buna göre

$$\mathbf{V}_r = 0$$

olacağından (4.2.10) dan

$$\begin{aligned} -\dot{u}_1 + (u_2 - hx_2)\dot{\phi} + \dot{h}x_1 &= 0 \\ -\dot{u}_2 + (hx_1 - u_1)\dot{\phi} + \dot{h}x_2 &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Bu denklemleri x_1 ve x_2 ye göre düzenlersek

$$\begin{aligned} \dot{h}x_1 - h\dot{\phi}x_2 &= \dot{u}_1 - u_2\dot{\phi} \\ h\dot{\phi}x_1 + \dot{h}x_2 &= \dot{u}_2 + u_1\dot{\phi} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu sistemin çözümleri p_1 ve p_2 ile gösterilirse

$$\begin{aligned} (4.2.12) \quad p_1 &= \frac{\dot{h}(\dot{u}_1 - u_2\dot{\phi}) + h\dot{\phi}(\dot{u}_2 + u_1\dot{\phi})}{\dot{h}^2 + h^2\dot{\phi}^2} \\ p_2 &= \frac{\dot{h}(\dot{u}_2 + u_1\dot{\phi}) - h\dot{\phi}(\dot{u}_1 - u_2\dot{\phi})}{\dot{h}^2 + h^2\dot{\phi}^2} \end{aligned}$$

bulunur.

$\overrightarrow{OP} = \mathbf{p} = p_1\vec{e}_1 + p_2\vec{e}_2$ yer vektörüne karşılık gelen $P = (p_1, p_2)$ noktasına $B = E/E'$ homotetik hareketinin t anındaki **pol(kutup) noktası** denir.

Bu pol noktasından faydalanarak herhangi bir X noktasının (4.2.10) eşitliği ile verilen sürüklenme hızı aşağıdaki şekilde de ifade edilebilir. Bunun için (4.2.12) den $\dot{u}_1$ ve $\dot{u}_2$ değerleri hesaplanırsa

$$(4.2.13) \quad \dot{u}_1 = p_1\dot{h} - p_2h\dot{\phi} + u_2\dot{\phi}, \quad \dot{u}_2 = p_1h\dot{\phi} + p_2\dot{h} - u_1\dot{\phi}$$

elde edilir. Bunları (4.2.10) da yerine yazarsak

$$(4.2.14) \quad \mathbf{V}_r = \{(x_1 - p_1)\dot{h} - (x_2 - p_2)h\dot{\phi}\}\vec{e}_1 + \{(x_1 - p_1)h\dot{\phi} + (x_2 - p_2)\dot{h}\}\vec{e}_2$$

bulunur. Sürüklenme hızının bu ifadesinden aşağıdaki sonuçlar verilebilir:

SONUÇ 4.2.1.

P polünden X noktasına giden

$$\overrightarrow{PX} = (hx_1 - p_1)\vec{e}_1 + (hx_2 - p_2)\vec{e}_2$$

pol ışını ile $\mathbf{V}_r$ nin iç-çarpımı

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{V}_r, \overrightarrow{PX} \rangle &= (hx_1 - p_1)(x_1 - p_1)\dot{h} - (hx_1 - p_1)(x_2 - p_2)h\dot{\phi} \\ &\quad + (hx_2 - p_2)(x_1 - p_1)h\dot{\phi} + (hx_2 - p_2)(x_2 - p_2)\dot{h} \end{aligned}$$

dır. $h = 1$ özel durumunda

$$\langle \mathbf{V}_r, \overrightarrow{PX} \rangle = 0$$

bulunur. Bu ise $h = 1$ için $\overrightarrow{PX}$ pol ışınının her t anında $\mathbf{V}_r$ ye dik olduğunu gösterir.

SONUÇ 4.2.2.

$\mathbf{V}_r$ vektörünün uzunluğu

$$\|\mathbf{V}_r\| = \sqrt{(\dot{h}^2 + h^2\dot{\phi}^2)[(x_1 - p_1)^2 + (x_2 - p_2)^2]}$$

olarak elde edilir. Eğer bu son eşitlikte $h = 1$ özel hali alınırsa düzlemsel hareketteki

$$\|\mathbf{V}_r\| = \phi \|\overrightarrow{PX}\|$$

eşitliğinin sağlandığı görülür.

4.2.3. İvmeler ve İvmelerin Terkibi

B kapalı homotetik hareketinin ivmelerini bulmak için (4.2.8) ve (4.2.9) ifadelerinin t ye göre türevlerini almalıyız. (4.2.8) den t ye göre türev alınırsa $\mathbf{b}_r$ relatif ivme vektörü için

$$(4.2.15) \quad \mathbf{b}_r = \ddot{x}_1 \bar{\mathbf{e}}_1 + \ddot{x}_2 \bar{\mathbf{e}}_2$$

bulunur.

X noktasının E' -düzlemine göre olan $\mathbf{b}_a$ mutlak ivme vektörü için (4.2.8) ve (4.2.14) eşitliklerinin (4.2.11) de yerine yazılmasıyla elde edilen mutlak hızın t ye göre türevi alınırsa,

$$\begin{aligned} (4.2.16) \quad \mathbf{b}_a &= \{(x_1 - p_1)(\ddot{h} - h\dot{\phi}^2) - (x_2 - p_2)(2\dot{h}\dot{\phi} + h\ddot{\phi}) - \dot{p}_1\dot{h} + \dot{p}_2h\dot{\phi}\}\bar{\mathbf{e}}_1 \\ &\quad + \{(x_1 - p_1)(2\dot{h}\dot{\phi} + h\ddot{\phi}) + (x_2 - p_2)(\ddot{h} - h\dot{\phi}^2) - \dot{p}_2\dot{h} - \dot{p}_1h\dot{\phi}\}\bar{\mathbf{e}}_2 \\ &\quad + 2(\dot{h}\dot{x}_1 - h\dot{x}_2\dot{\phi})\bar{\mathbf{e}}_1 + 2(h\dot{\phi}\dot{x}_1 + \dot{h}\dot{x}_2)\bar{\mathbf{e}}_2 + h\mathbf{b}_r \end{aligned}$$

elde edilir. Bu son ifadede

$$(4.2.17) \quad \mathbf{b}_f = \left\{ (x_1 - p_1)(\ddot{h} - h\dot{\phi}^2) - (x_2 - p_2)(2\dot{h}\dot{\phi} + h\ddot{\phi}) - \dot{p}_1\dot{h} + \dot{p}_2h\dot{\phi} \right\} \bar{\mathbf{e}}_1 \\ + \left\{ (x_1 - p_1)(2\dot{h}\dot{\phi} + h\ddot{\phi}) + (x_2 - p_2)(\ddot{h} - h\dot{\phi}^2) - \dot{p}_2\dot{h} - \dot{p}_1h\dot{\phi} \right\} \bar{\mathbf{e}}_2$$

vektörüne X noktasının **sürüklenme ivme vektörü**,

$$(4.2.18) \quad \mathbf{b}_c = 2(\dot{h}\dot{x}_1 - h\dot{x}_2\dot{\phi})\bar{\mathbf{e}}_1 + 2(h\dot{\phi}\dot{x}_1 + \dot{h}\dot{x}_2)\bar{\mathbf{e}}_2$$

vektörüne de **Coriolis-ivme vektörü** denir. O halde aşağıdaki teoremi verebiliriz.

TEOREM 4.2.2.

İki hareketin terkinde bir noktanın mutlak ivme vektörü, sürüklenme ivme vektörü ile Coriolis-ivme vektörü ve relatif ivme vektörünün h katının toplamına eşittir, yani

$$(4.2.19) \quad \mathbf{b}_a = \mathbf{b}_f + \mathbf{b}_c + h\mathbf{b}_r$$

dir[7].

Şimdi düzlemsel hareketler için verilen ivme pollerinin koordinatlarını homotetik hareketlere genelleştiren bir teorem verelim.

TEOREM 4.2.3.

Genel bir B düzlemsel homotetik hareketinde ivme polünün koordinatları aşağıdaki eşitliklerle verilir[7]:

$$(4.2.20) \quad x_1 = p_1 + \frac{\dot{p}_1\dot{h}\ddot{h} + \dot{p}_1h\ddot{h}\dot{\phi}^2 - \dot{p}_2h\ddot{h}\dot{\phi} + \dot{p}_2h^2\dot{\phi}^3 + 2\dot{p}_2\dot{h}^2\dot{\phi} + h^2\dot{p}_1\dot{\phi}\ddot{\phi} + \dot{p}_2h\dot{h}\ddot{\phi}}{(\ddot{h} - h\dot{\phi}^2)^2 + (2\dot{h}\dot{\phi} + h\ddot{\phi})^2} \\ x_2 = p_2 - \frac{\dot{p}_2\dot{h}\ddot{h} + \dot{p}_1h\ddot{h}\dot{\phi} - \dot{p}_1h^2\dot{\phi}^3 + \dot{p}_2h\ddot{h}\dot{\phi}^2 - 2\dot{p}_1\dot{h}^2\dot{\phi} - h\dot{p}_1\dot{h}\ddot{\phi} + \dot{p}_2h^2\dot{\phi}\ddot{\phi}}{(\ddot{h} - h\dot{\phi}^2)^2 + (2\dot{h}\dot{\phi} + h\ddot{\phi})^2}$$

İspat:

Sürüklenme ivme vektörünün sıfır olduğu noktalar ivme pollerini verdiği için (4.2.17) den

$$(x_1 - p_1)(\ddot{h} - h\dot{\phi}^2) - (x_2 - p_2)(2\dot{h}\dot{\phi} + h\ddot{\phi}) = \dot{p}_1\dot{h} - \dot{p}_2h\dot{\phi} \\ (x_1 - p_1)(2\dot{h}\dot{\phi} + h\ddot{\phi}) + (x_2 - p_2)(\ddot{h} - h\dot{\phi}^2) = \dot{p}_2\dot{h} + \dot{p}_1h\dot{\phi}$$

elde edilir. Bu ise homojen olmayan bir lineer denklem sistemidir. $\dot{h} \neq 0$ ve $\dot{\phi} \neq 0$ olduğundan sistemin katsayılar determinantı sıfırdan farklıdır. O halde sistem çözülürse istenen bulunur.

SONUÇ 4.2.3.

Özel olarak (4.2.20) eşitliklerinde $h = 1$ alınırsa 1-parametrel düzlemsel hareketin (4.1.15) ile verilen ivme polünün koordinatları elde edilir.

4.2.4. Kapalı Bir Homotetik Hareketin Yörünge Alanı

X noktasının E' -düzlemine göre $d\mathbf{x}'$ değişimi X noktasının sürüklenme hızını verdiğinden (4.2.14) den

$$(4.2.21) \quad d\mathbf{x}' = \{(x_1 - p_1)dh - (x_2 - p_2)hd\varphi\}\tilde{\mathbf{e}}_1 + \{(x_1 - p_1)hd\varphi + (x_2 - p_2)dh\}\tilde{\mathbf{e}}_2$$

yazılabilir.

O halde (4.2.1) ve (4.2.21) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} [\mathbf{x}', d\mathbf{x}'] &= \begin{vmatrix} hx_1 - u_1 & hx_2 - u_2 \\ (x_1 - p_1)dh - (x_2 - p_2)hd\varphi & (x_1 - p_1)hd\varphi + (x_2 - p_2)dh \end{vmatrix} \\ &= (x_1^2 + x_2^2)h^2d\varphi - x_1p_1h^2d\varphi - x_2p_2h^2d\varphi + u_1p_1hd\varphi + u_2p_2hd\varphi \\ &\quad + u_1p_2dh - u_2p_1dh + u_2x_1dh - hp_2x_1dh - u_1x_2dh \\ &\quad + hp_1x_2dh - u_1x_1hd\varphi - u_2x_2hd\varphi \end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan, (4.2.13) den u_1 ve u_2 hesaplanırsa

$$(4.2.22) \quad u_1 = p_1h + \frac{p_2dh}{d\varphi} - \frac{du_2}{d\varphi}, \quad u_2 = p_2h - \frac{p_1dh}{d\varphi} + \frac{du_1}{d\varphi}$$

bulunur. Bu değerleri son eşitlikte yerine yazarsak

$$\begin{aligned} (4.2.23) \quad [\mathbf{x}', d\mathbf{x}'] &= (x_1^2 + x_2^2)h^2d\varphi - 2x_1p_1h^2d\varphi - 2x_2p_2h^2d\varphi + u_1p_1hd\varphi \\ &\quad + u_2p_2hd\varphi + u_1p_2dh - u_2p_1dh + x_1(-2hp_2dh + hdu_2 + u_2dh) \\ &\quad + x_2(2hp_1dh - hdu_1 - u_1dh) \end{aligned}$$

elde edilir. (4.2.23) ifadesini (4.1.18) alan formülünde yerine yazarsak,

$$\begin{aligned} (4.2.24) \quad F_x &= \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) \oint h^2d\varphi - x_1 \oint p_1h^2d\varphi - x_2 \oint p_2h^2d\varphi \\ &\quad + \frac{1}{2} \oint (u_1p_1hd\varphi + u_2p_2hd\varphi + u_1p_2dh - u_2p_1dh) \\ &\quad + \frac{1}{2}x_1 \oint (-2hp_2dh + hdu_2 + u_2dh) + \frac{1}{2}x_2 \oint (2hp_1dh - hdu_1 - u_1dh) \end{aligned}$$

bulunur.

Diğer taraftan, $X = O(x_1 = x_2 = 0)$ alınırsa, O orijin noktasının yörünge alanı için

$$\begin{aligned} (4.2.25) \quad F_o &= \frac{1}{2} \oint \begin{vmatrix} -u_1 & -u_2 \\ -p_1dh + p_2hd\varphi & -p_1hd\varphi - p_2dh \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \oint (u_1p_1hd\varphi + u_2p_2hd\varphi + u_1p_2dh - u_2p_1dh) \end{aligned}$$

bulunur.

Şimdi $\oint h^2 d\phi$ integralini göz önüne alalım. Bunu

$$\oint h^2 d\phi = \int_0^T h^2(t) \dot{\phi}(t) dt$$

olarak yazabiliriz. Burada $f(t) = h^2(t)$ ve $g(t) = \dot{\phi}(t)$ diyelim. $h = h(t)$ t nin sürekli fonksiyonu olduğundan $f(t) = h^2(t)$ de sürekli dir. $\phi = \phi(t)$ t nin sürekli fonksiyonu olduğundan tanım gereği türevi var ve türevi sürekli dir, yani $g(t) = \dot{\phi}(t)$ sürekli dir. Ayrıca hareket esnasında $\dot{\phi}(t) \neq 0$ olduğundan ve $\dot{\phi}(t)$ sürekli bir fonksiyon olduğundan $\dot{\phi}(t) < 0$ veya $\dot{\phi}(t) > 0$ dır, yani $\dot{\phi}(t)$ fonksiyonu $[0, T]$ aralığında her yerde aynı işaretli dir.

O halde $f(t) = h^2(t)$ ve $g(t) = \dot{\phi}(t)$ fonksiyonları $[0, T]$ aralığında sürekli ve $g(t)$ bu aralıkta her yerde aynı işaretli dir. Sürekli iki fonksiyonun çarpımı sürekli ve sürekli bir fonksiyon integrallenebilir olduğundan $g(t)$ ile $f(t)g(t)$ fonksiyonları $[0, T]$ aralığında integrallenebilir dir. O halde integral hesabın ortalama değer teoremi gereğince

$$\int_0^T f(t)g(t)dt = f(t_0) \int_0^T g(t)dt$$

olacak şekilde $\exists t_0 \in [0, T]$ vardır. Burada $f(t)$ ve $g(t)$ nin değerlerini yerine yazarsak,

$$\begin{aligned} \int_0^T h^2(t) \dot{\phi}(t) dt &= h^2(t_0) \int_0^T \dot{\phi}(t) dt \\ &= h^2(t_0) \left[\phi(t) \right]_0^T \\ &= h^2(t_0) [\phi(T) - \phi(0)] \end{aligned}$$

bulunur. Homotetik hareket kapalı olduğundan

$$\phi(t + T) = \phi(t) + 2\pi v$$

dür. $t = 0$ için

$$\phi(T) = \phi(0) + 2\pi v$$

veya

$$\phi(T) - \phi(0) = 2\pi v$$

olur. O halde

$$\int_0^T h^2(t) \dot{\phi}(t) dt = h^2(t_0) \cdot 2\pi\nu$$

yani

$$(4.2.26) \quad \oint h^2 d\phi = 2h^2(t_0)\pi\nu$$

elde edilir[8].

$\nu \neq 0$ için kapalı homotetik hareketin S Steiner noktasını elde edelim.

TANIM 4.2.2.

$h^2 d\phi$ kitle elementli kitle örtülmesinde hareketli (P) pol eğrisinin ağırlık merkezine **Steiner noktası** denir ve S ile gösterilir.

S nin koordinatları s_1 ve s_2 olmak üzere

$$(4.2.27) \quad s_j = \frac{\oint p_j h^2 d\phi}{\oint h^2 d\phi}, \quad j = 1, 2$$

dir. (4.2.26) eşitliği göz önüne alınırsa

$$(4.2.28) \quad \oint p_j h^2 d\phi = 2h^2(t_0)\pi\nu s_j, \quad j = 1, 2$$

bulunur.

O halde (4.2.25), (4.2.26) ve (4.2.28) eşitliklerini (4.2.24) de yerine yazarsak

$$\begin{aligned} F_X = F_O + (x_1^2 + x_2^2)h^2(t_0)\pi\nu - 2h^2(t_0)\pi\nu x_1 s_1 - 2h^2(t_0)\pi\nu x_2 s_2 \\ + \frac{1}{2}x_1 \oint (-2hp_2 dh + hdu_2 + u_2 dh) + \frac{1}{2}x_2 \oint (2hp_1 dh - hdu_1 - u_1 dh) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu son eşitlikte

$$(4.2.29) \quad \mu_1 = \frac{1}{2} \oint (-2hp_2 dh + hdu_2 + u_2 dh) \quad , \quad \mu_2 = \frac{1}{2} \oint (2hp_1 dh - hdu_1 - u_1 dh)$$

denilirse

$$(4.2.30) \quad F_X = F_O + h^2(t_0)\pi\nu(x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 s_1 - 2x_2 s_2) + \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2$$

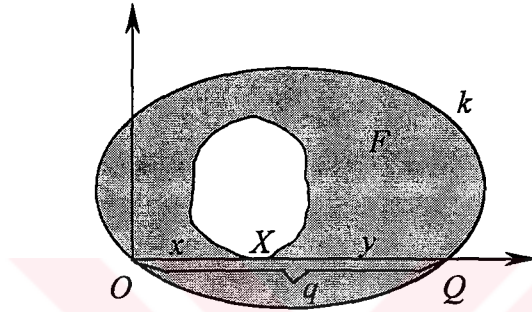
bulunur. Bu denklem kapalı düzlemsel homotetik hareketler için **Steiner alan formülüdür**[8].

4.2.5. Düzlemsel Kinematikte Homotetik Hareketler İçin Holditch Teoremi

TEOREM 4.2.4.

E/E' -düzlemsel homotetik hareketinde E' -düzleminde bir k ovali verilsin. Uzunluğu sabit olan bir doğru parçasının iki ucunu bu oval üzerinde hareket ettirelim. Doğru parçası üzerinde tespit edilen bir X noktasının E/E' düzlemsel homotetik hareketi esnasında çizdiği kapalı eğri ile k ovali arasındaki bölgenin alanı sadece X noktasının doğru parçası üzerinde seçilişine ve hareketin h homotetik oranına bağlıdır.

İspat:



Şekil 4.2.1

Şekil 4.2.1 de verilen k ovalini ve uzunluğu q olan $\overline{OQ}$ doğru parçasını ele alalım. $\overline{OQ}$ doğru parçasının O ve Q uç noktaları k yı tam bir defa kat edecek şekilde hareket etsin. Bu durumda $v = 1$ dönme sayılı kapalı bir hareket meydana gelir.

O , bir $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ dik koordinat sisteminin başlangıcı olarak seçilirse, X noktasının koordinatları $X = (x, 0)$ ve Q noktasının koordinatları $Q = (q, 0)$ olur. Bu durumda (4.2.30) alan formülünden X in yörünge alanı

$$(4.2.31) \quad F_X = F_O + h^2(t_0)\pi(x^2 - 2s_1x) + \mu_1x$$

bulunur. O ve Q noktaları aynı k ovalini çizdiği için O ve Q noktalarının yörünge alanları için

$$F_Q = F_O = F_O + h^2(t_0)\pi(q^2 - 2s_1q) + \mu_1q$$

elde edilir. Buradan

$$q[h^2(t_0)\pi(q - 2s_1) + \mu_1] = 0$$

olup, $q \neq 0$ olacağından

$$h^2(t_0)\pi(q - 2s_1) + \mu_1 = 0$$

veya

$$2s_1 = q + \frac{\mu_1}{h^2(t_0)\pi}$$

bulunur. Diğer taraftan

$$x + y = q$$

olduğundan (4.2.31) ifadesinden

$$\begin{aligned} F_x &= F_O + h^2(t_0)\pi \left[x^2 - \left(q + \frac{\mu_1}{h^2(t_0)\pi} \right) x \right] + \mu_1 x \\ &= F_O + h^2(t_0)\pi \left[x^2 - \left(x + y + \frac{\mu_1}{h^2(t_0)\pi} \right) x \right] + \mu_1 x \\ &= F_O + h^2(t_0)\pi \left(x^2 - x^2 - xy - \frac{\mu_1}{h^2(t_0)\pi} x \right) + \mu_1 x \\ &= F_O - h^2(t_0)\pi x y \end{aligned}$$

bulunur.

k ovali ile X noktasının kapalı yörünge eğrisi arasındaki taralı bölgenin alanını F ile gösterirsek

$$F = F_O - F_x$$

olduğundan

$$(4.2.32) \quad F = h^2(t_0)\pi x y$$

elde edilir[8].

O halde taralı bölgenin alanı k nın seçilişine değil, yalnız X noktasının k ovalinin içini tarayan $\overline{OQ}$ doğru parçasının O ve Q uç noktalarından olan uzaklığına, yani X noktasının $\overline{OQ}$ doğru parçası üzerindeki yerine ve hareketin h homotetik oranına bağlıdır.

SONUÇ 4.2.4.

$h = 1$ olması durumunda (4.2.32) den

$$F = \pi x y$$

elde edilir. Bu ise 1-parametrelili kapalı hareketlerde Holditch teoreminin sonucudur.

4.3. Kompleks Düzlemde Steiner ve Karışık Alan Formülleri ve Holditch Teoremi

4.3.1. Kompleks Düzlemde 1-parametrel Hareketler

TANIM 4.3.1.

E ve E' , sırasıyla, hareketli ve sabit kompleks düzlemler ve O ile O' de onların koordinat sistemlerinin orijin noktaları olsun. $\overrightarrow{O'O} = \mathbf{u}'$ olmak üzere

$$(4.3.1) \quad \mathbf{x}' = \mathbf{u}' + \mathbf{x} e^{i\varphi}$$

dönüşümü ile tanımlanan harekete **1-parametrel düzlemsel hareket** denir ve E/E' ile gösterilir[3]. Burada φ , E -nin E' -ye göre dönme açısı ve $\mathbf{x} = x_1 + ix_2$ ile $\mathbf{x}' = x'_1 + ix'_2$ ise $X \in E$ noktasının, sırasıyla, hareketli ve sabit dik koordinat sistemlerine göre konum vektörleridir. φ dönme açısı ve $\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{u}'$ vektörleri reel bir t parametresinin sürekli diferensiyellenebilir fonksiyonlarıdır. Bundan başka, $t = t_0$ başlangıç anında koordinat sistemleri çakışık olsun.

Eğer $\overrightarrow{OO'} = \mathbf{u}$ alınırsa,

$$(4.3.2) \quad \mathbf{u}' = -\mathbf{u} e^{i\varphi}$$

elde edilir. (4.3.1) ve (4.3.2) den

$$(4.3.3) \quad \mathbf{x}' = (\mathbf{x} - \mathbf{u}) e^{i\varphi}$$

bulunur.

X noktasının V_r relatif hızı, X noktasının hareketli E -düzlemine nazaran hızıdır.

Bu hız hareketli eksen sistemine göre

$$(4.3.4) \quad \mathbf{X}_r = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \dot{\mathbf{x}}$$

ifadesiyle verilir. Bu vektör sabit koordinat sisteminde

$$(4.3.5) \quad \mathbf{X}'_r = \mathbf{X}_r e^{i\varphi} = \dot{\mathbf{x}} e^{i\varphi}$$

ile ifade edilir[2].

(4.3.1) den V_a mutlak hızı, yani X noktasının E' -düzlemine göre hızı için

$$(4.3.6) \quad \mathbf{X}'_a = \frac{d\mathbf{x}'}{dt} = \dot{\mathbf{x}}' = \dot{\mathbf{u}}' + i\dot{\varphi}\mathbf{x}e^{i\varphi} + \dot{\mathbf{x}}e^{i\varphi}$$

bulunur[2].

(4.3.2) ifadesinin t ye göre türevi alınır

$$(4.3.7) \quad \dot{\mathbf{u}}' = -\dot{\mathbf{u}}e^{i\varphi} - i\mathbf{u}\dot{\varphi}e^{i\varphi} = -(\dot{\mathbf{u}} + i\mathbf{u}\dot{\varphi})e^{i\varphi}$$

bulunur. Bunu (4.3.6) da yerine yazarsak

$$(4.3.8) \quad \mathbf{X}'_a = i\dot{\varphi}\mathbf{x}e^{i\varphi} - (\dot{\mathbf{u}} + i\mathbf{u}\dot{\varphi})e^{i\varphi} + \dot{\mathbf{x}}e^{i\varphi}$$

elde edilir. Burada

$$(4.3.9) \quad \mathbf{X}'_r = i\dot{\varphi}\mathbf{x}e^{i\varphi} - (\dot{\mathbf{u}} + i\mathbf{u}\dot{\varphi})e^{i\varphi}$$

X noktasının V_r sürüklenme hız vektörüdür[2].

(4.3.8) ve (4.3.9) hız vektörlerinin hareketli düzlemin koordinat eksenlerine göre ifadeleri, sırası ile,

$$(4.3.10) \quad \mathbf{X}_a = \mathbf{X}'_a e^{-i\varphi} = i\dot{\varphi}\mathbf{x} - (\dot{\mathbf{u}} + i\mathbf{u}\dot{\varphi}) + \dot{\mathbf{x}}$$

ve

$$(4.3.11) \quad \mathbf{X}_r = \mathbf{X}'_r e^{-i\varphi} = i\dot{\varphi}\mathbf{x} - (\dot{\mathbf{u}} + i\mathbf{u}\dot{\varphi})$$

dır.

(4.3.5), (4.3.8) ve (4.3.9) ifadelerinden, bir X noktasının hız vektörleri arasında

$$(4.3.12) \quad \mathbf{X}'_a = \mathbf{X}'_r + \mathbf{X}'_r \setminus$$

bağıntısı vardır[2].

TANIM 4.3.2.

Dönme açısının $\frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$ türevine E/E' hareketinin **açısal hızı** denir.

Bundan sonra, sırf öteleme hareketinden kaçınmak için $\dot{\varphi} \neq 0$ kabul edeceğiz.

Şimdi E/E' hareketinin her t anında sürüklenme hızı sıfır olan noktalarını, yani pol noktalarını araştıralım.

$$\mathbf{X}'_r = 0$$

eşitliğinden

$$i\dot{\varphi}\mathbf{x}e^{i\varphi} - (\dot{\mathbf{u}} + i\mathbf{u}\dot{\varphi})e^{i\varphi} = 0$$

olup buradan

$$\mathbf{x} = \frac{\dot{\mathbf{u}} + i\mathbf{u}\dot{\varphi}}{i\dot{\varphi}}$$

veya

$$(4.3.13) \quad \mathbf{x} = \mathbf{p} = \mathbf{u} - i \frac{\dot{\mathbf{u}}}{\dot{\varphi}}$$

elde edilir. Buradan

$$\dot{\mathbf{u}} = i(\mathbf{p} - \mathbf{u})\dot{\phi}$$

olup bu ifadeyi (4.3.9) da yerine yazarsak

$$(4.3.14) \quad \mathbf{X}'_t = i\dot{\phi}(\mathbf{x} - \mathbf{p})e^{i\phi}$$

bulunur.

Şimdi hareketli düzlemin farklı iki sabit noktasının kapalı yörünge eğrilerinin Steiner ve karışık alan formüllerini hesaplayalım.

4.3.2. Kapalı Hareketler için Steiner ve Karışık Alan Formülleri

TANIM 4.3.3.

E/E' , 1-parametrelili düzlemsel hareket ve $t \in [t_0, t_1]$ reel bir kapalı aralık olsun.

Eğer

$$(4.3.15) \quad \begin{aligned} \mathbf{u}'(t+T) &= \mathbf{u}'(t) \\ \phi(t+T) &= \phi(t) + 2\pi\nu, \quad \forall t \in [t_0, t_1] \end{aligned}$$

olacak şekilde en küçük bir $T > 0$ sayısı varsa, E/E' hareketine **1-parametrelili kapalı düzlemsel hareket** denir. Burada T , kapalı hareketin periyodu ve ν de kapalı hareketin dönme sayısıdır.

X , E -de sabit bir nokta olsun. X in E' -ye göre $d\mathbf{x}'$ değişimi X in sürüklenme hızına karşılık geldiğinden, (4.3.14) den

$$(4.3.16) \quad d\mathbf{x}' = i(\mathbf{x} - \mathbf{p})e^{i\phi}d\phi$$

dir.

Ayrıca X noktasının F_X yörünge alanı

$$(4.3.17) \quad F_X = \frac{1}{2} \oint (x'_1 dx'_2 - x'_2 dx'_1) = \frac{1}{2} \oint [\mathbf{x}', d\mathbf{x}']$$

formülü ile verilir[6]. Burada $\mathbf{a} = a_1 + ia_2$, $\mathbf{b} = b_1 + ib_2$ olmak üzere $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ sembolü

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

determinantının yerine kullanılmıştır.

Eğer (4.3.3) ve (4.3.16) ifadeleri (4.3.17) de yerine yazılır ve

$$(4.3.18) \quad \begin{aligned} [\mathbf{a} e^{i\phi}, \mathbf{b} e^{i\phi}] &= [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \\ [\mathbf{a}, i\mathbf{b}] &= \frac{1}{2}(\mathbf{a}\bar{\mathbf{b}} + \bar{\mathbf{a}}\mathbf{b}) \end{aligned}$$

eşitlikleri göz önüne alınırsa

$$(4.3.19) \quad F_x = \frac{1}{4} \oint \{(\mathbf{x} - \mathbf{u})(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{p}}) + (\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{u}})(\mathbf{x} - \mathbf{p})\} d\varphi$$

elde edilir.

Eğer $X = O(x_1 = x_2 = 0)$ alınırsa, O orijin noktasının yörünge alanı için

$$(4.3.20) \quad F_O = \frac{1}{4} \oint (\mathbf{u}\bar{\mathbf{p}} + \bar{\mathbf{u}}\mathbf{p}) d\varphi$$

bulunur.

Ayrıca, $t = 0$ için (4.3.15) den

$$\varphi(T) = \varphi(0) + 2\pi\nu$$

olur. O halde

$$\oint d\varphi = \int_0^T \dot{\varphi}(t) dt = \varphi(t) \Big|_0^T = \varphi(T) - \varphi(0)$$

olup

$$(4.3.21) \quad \oint d\varphi = 2\pi\nu$$

elde edilir. Benzer şekilde $t = 0$ için (4.3.15) den

$$\mathbf{u}'(T) = \mathbf{u}'(0)$$

veya

$$u_j(T) = u_j(0), \quad j = 1, 2$$

olup

$$\oint du_j = \int_0^T \dot{u}_j(t) dt = u_j(t) \Big|_0^T = u_j(T) - u_j(0) = 0$$

bulunur.

Diğer taraftan, $\nu \neq 0$ olmak üzere, 1-parametrelili kapalı düzlemsel hareketin

$S = (s_1, s_2)$ Steiner noktası için

$$(4.3.22) \quad \mathbf{s} = s_1 + is_2 = \frac{\oint \mathbf{p} d\varphi}{\oint d\varphi}$$

olduğunu biliyoruz.

O halde (4.3.21) ve (4.3.22) den

$$(4.3.23) \quad \oint \mathbf{p} d\varphi = 2\pi\nu\mathbf{s}$$

elde edilir. (4.3.19) dan

$$F_X = \frac{1}{4} \oint \{2\mathbf{x}\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\bar{\mathbf{p}} - \bar{\mathbf{x}}\mathbf{p} - \mathbf{u}\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{u}}\mathbf{x} + \mathbf{u}\bar{\mathbf{p}} + \bar{\mathbf{u}}\mathbf{p}\} d\varphi$$

olup, X sabit bir nokta olduğundan

$$(4.3.24) \quad F_X = \frac{1}{2} \mathbf{x}\bar{\mathbf{x}} \oint d\varphi - \frac{1}{4} \mathbf{x} \oint \bar{\mathbf{p}} d\varphi - \frac{1}{4} \bar{\mathbf{x}} \oint \mathbf{p} d\varphi \\ - \frac{1}{4} \bar{\mathbf{x}} \oint \mathbf{u} d\varphi - \frac{1}{4} \mathbf{x} \oint \bar{\mathbf{u}} d\varphi + \frac{1}{4} \oint (\mathbf{u}\bar{\mathbf{p}} + \bar{\mathbf{u}}\mathbf{p}) d\varphi$$

bulunur.

Diğer taraftan (4.3.13) den

$$\oint \mathbf{p} d\varphi = \oint \left(\mathbf{u} - i \frac{d\mathbf{u}}{d\varphi} \right) d\varphi \\ = \oint \mathbf{u} d\varphi - i \oint d\mathbf{u} \\ = \oint \mathbf{u} d\varphi - i (\oint du_1 + i \oint du_2)$$

olup buradan

$$(4.3.25) \quad \oint \mathbf{p} d\varphi = \oint \mathbf{u} d\varphi$$

elde edilir.

(4.3.20), (4.3.21), (4.3.23) ve (4.3.25) eşitliklerini (4.3.24) de yerine yazarsak

$$(4.3.26) \quad F_X = F_O + \pi v (\mathbf{x}\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\bar{\mathbf{s}} - \bar{\mathbf{x}}\mathbf{s})$$

bulunur. (4.3.26) eşitliğine **Steiner alan formülü** adı verilir[3].

(4.3.26) eşitliğinde $\mathbf{x} = x_1 + ix_2$ ve $\mathbf{s} = s_1 + is_2$ değerleri yerlerine yazılırsa,

$$F_X = F_O + \pi v (x_1^2 + x_2^2 - 2x_1s_1 - 2x_2s_2)$$

bulunur. Buradan

$$x_1^2 + x_2^2 - 2s_1x_1 - 2s_2x_2 + \frac{F_O - F_X}{\pi v} = 0$$

yazabiliriz. O halde bu son eşitlikten aşağıdaki teorem verilebilir.

TEOREM 4.3.1.

Eşit yörünge alanına sahip E hareketli düzleminin bütün sabit noktaları E' düzleminde merkezi Steiner noktası olan aynı bir çember üzerinde bulunurlar[4].

X ve Y hareketli düzlemin sabit iki noktası ve Z de $\overline{XY}$ doğru parçası üzerinde diğer bir sabit nokta olsun. Bu durumda

$$(4.3.27) \quad \mathbf{z} = \lambda \mathbf{x} + \xi \mathbf{y}, \quad \lambda + \xi = 1, \quad \lambda, \xi \in \mathbb{R}$$

yazılabilir. (4.3.3) kullanılarak

$$(4.3.28) \quad \mathbf{z}' = \lambda \mathbf{x}' + \xi \mathbf{y}'$$

bulunur.

Şimdi F_x, F_y yörünge alanları yardımıyla F_z yörünge alanını bulalım.

(4.3.17) ve (4.3.28) ifadeleri göz önüne alınırsa

$$F_z = \frac{1}{2} \oint [\mathbf{z}', d\mathbf{z}'] = \frac{1}{2} \oint [\lambda \mathbf{x}' + \xi \mathbf{y}', \lambda d\mathbf{x}' + \xi d\mathbf{y}']$$

bulunur. Bu son eşitlikten

$$\begin{aligned} F_z &= \frac{1}{2} \oint (\lambda^2 [\mathbf{x}', d\mathbf{x}'] + \lambda \xi [\mathbf{x}', d\mathbf{y}'] + \lambda \xi [\mathbf{y}', d\mathbf{x}'] + \xi^2 [\mathbf{y}', d\mathbf{y}']) \\ &= \frac{1}{2} \lambda^2 \oint [\mathbf{x}', d\mathbf{x}'] + \frac{1}{2} \lambda \xi \oint ([\mathbf{x}', d\mathbf{y}'] + [\mathbf{y}', d\mathbf{x}']) + \frac{1}{2} \xi^2 \oint [\mathbf{y}', d\mathbf{y}'] \end{aligned}$$

olup burada

$$(4.3.29) \quad F_{xy} = \frac{1}{4} \oint ([\mathbf{x}', d\mathbf{y}'] + [\mathbf{y}', d\mathbf{x}'])$$

denilirse

$$(4.3.30) \quad F_z = \lambda^2 F_x + 2\lambda \xi F_{xy} + \xi^2 F_y$$

elde edilir. Burada F_{xy} ye X ve Y noktalarının **karışık alan formülü** adı verilir[3].

Şimdi bu karışık alan formülünü hesaplayalım.

(4.3.3) ve (4.3.16) eşitliklerini (4.3.29) da yerine yazarsak

$$F_{xy} = \frac{1}{4} \oint ([(\mathbf{x} - \mathbf{u})e^{i\varphi}, i(\mathbf{y} - \mathbf{p})e^{i\varphi}] + [(\mathbf{y} - \mathbf{u})e^{i\varphi}, i(\mathbf{x} - \mathbf{p})e^{i\varphi}]) d\varphi$$

olup (4.3.18) eşitliklerini kullanırsak

$$F_{xy} = \frac{1}{4} \oint ([(\mathbf{x} - \mathbf{u}), i(\mathbf{y} - \mathbf{p})] + [(\mathbf{y} - \mathbf{u}), i(\mathbf{x} - \mathbf{p})]) d\varphi$$

veya

$$\begin{aligned} F_{xy} &= \frac{1}{8} \oint [(\mathbf{x} - \mathbf{u})(\bar{\mathbf{y}} - \bar{\mathbf{p}}) + (\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{u}})(\mathbf{y} - \mathbf{p}) + (\mathbf{y} - \mathbf{u})(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{p}}) + (\bar{\mathbf{y}} - \bar{\mathbf{u}})(\mathbf{x} - \mathbf{p})] d\varphi \\ &= \frac{1}{8} \oint [2\mathbf{x}\bar{\mathbf{y}} + 2\bar{\mathbf{x}}\mathbf{y} - (\mathbf{x} + \mathbf{y})\bar{\mathbf{p}} - (\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{y}})\mathbf{p} - (\mathbf{x} + \mathbf{y})\bar{\mathbf{u}} - (\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{y}})\mathbf{u} + 2\mathbf{u}\bar{\mathbf{p}} + 2\bar{\mathbf{u}}\mathbf{p}] d\varphi \end{aligned}$$

$$F_{xy} = \frac{1}{4}(\bar{x}\bar{y} + \bar{x}y)\oint d\varphi - \frac{1}{8}(\bar{x} + y)\oint \bar{p}d\varphi - \frac{1}{8}(\bar{x} + \bar{y})\oint p d\varphi \\ - \frac{1}{8}(\bar{x} + y)\oint \bar{u}d\varphi - \frac{1}{8}(\bar{x} + \bar{y})\oint u d\varphi + \frac{1}{4}\oint (\bar{u}\bar{p} + \bar{u}p)d\varphi$$

bulunur. (4.3.20), (4.3.21) ve (4.3.23) ifadelerini son eşitlikte yerine yazarsak

$$(4.3.31) \quad F_{xy} = F_o + \frac{\pi v}{2}(\bar{x}\bar{y} + \bar{x}y - (\bar{x} + y)\bar{s} - (\bar{x} + \bar{y})s)$$

elde edilir[3].

(4.3.31) den

$$F_{xx} = F_o + \frac{\pi v}{2}(2\bar{x}\bar{x} - 2\bar{x}s - 2\bar{x}s) \\ = F_o + \pi v(\bar{x}\bar{x} - \bar{x}s - \bar{x}s)$$

yani

$$F_{xx} = F_x$$

bulunur.

Şimdi F_{xy} alanını F_x ve F_y alanları yardımıyla ifade edelim.

(4.3.26) ve (4.3.31) eşitliklerinden

$$F_x - 2F_{xy} + F_y = F_o + \pi v(\bar{x}\bar{x} - \bar{x}s - \bar{x}s) - 2F_o \\ - \pi v[\bar{x}\bar{y} + \bar{x}y - (\bar{x} + y)\bar{s} - (\bar{x} + \bar{y})s] + F_o + \pi v(\bar{y}\bar{y} - \bar{y}s - \bar{y}s) \\ = \pi v(\bar{x}\bar{x} - \bar{x}\bar{y} - \bar{x}y + \bar{y}\bar{y}) \\ = \pi v(\bar{x} - \bar{y})(\bar{x} - \bar{y}) \\ = \pi v(\bar{x} - \bar{y})(\bar{x} - \bar{y})$$

olup X ve Y noktaları arasındaki uzaklığa d denilirse

$$F_x - 2F_{xy} + F_y = \pi v d^2$$

elde edilir. Buradan

$$(4.3.32) \quad F_{xy} = \frac{1}{2}(F_x + F_y - \pi v d^2)$$

bulunur.

O halde (4.3.27) ve (4.3.32) ifadeleri (4.3.30) da yerine yazılırsa

$$F_z = (1 - \xi)^2 F_x + 2(1 - \xi)\xi \left[\frac{1}{2}(F_x + F_y - \pi v d^2) \right] + \xi^2 F_y$$

veya

$$(4.3.33) \quad F_z = \lambda F_x + \xi F_y - \lambda \xi \pi v d^2$$

elde edilir[3].

4.3.3. Kapalı Hareketler İçin Holditch Teoremi

TEOREM 4.3.2.

k , E' -düzleminde bir oval (yani kapalı bir konveks eğri) ve $\overline{XY}$ de k nın sabit d uzunluklu kirişi olsun. Bu kirişin Z noktası tarafından a ve b uzunluklu iki parçaya bölündüğünü kabul edelim. E/E' kapalı düzlemsel hareketi esnasında, eğer $\overline{XY}$ kirişi k ovali etrafında tam bir dönme yaparsa, k ovali ile Z noktası tarafından çizilen kapalı eğri arasındaki alan a ve b parametrelerine, yani Z noktasının $\overline{XY}$ kirişi üzerindeki seçilişine, bağlıdır.

İspat:

Kabul edelim ki $\overline{XY}$ reel eksenin yönünü göstere. Bu durumda

$$(4.3.34) \quad d = y - x, \quad a = z - x = \xi d, \quad b = y - z = \lambda d, \quad a + b = d$$

eşitlikleri elde edilir.

Z noktasının yörünge alanı için dönme sayısı $v = 1$ olduğundan (4.3.33) den

$$(4.3.35) \quad F_z = \frac{1}{d} (bF_x + aF_y) - \pi ab$$

elde edilir.

Ayrıca, X ve Y noktaları aynı k ovalini çizdiğinden $F_x = F_y$ dir. Bu takdirde

(4.3.35) den

$$\begin{aligned} F_z &= \frac{1}{d} (b + a) F_x - \pi ab \\ &= F_x - \pi ab \end{aligned}$$

bulunur.

k ovali ile Z noktasının çizdiği kapalı eğri arasındaki alan F ile gösterilirse

$$F = F_x - F_z$$

olduğundan

$$F = \pi ab$$

bulunur[4]. Bu ise ispatı tamamlar.

5. BULGULAR

Çalışmamızın orijinal kısmını teşkil eden bu bölümde, düzlemler kompleks düzlem olarak göz önüne alınmıştır. Bu durumda 1-parametrelili düzlemsel hareketler ve 1-parametrelili düzlemsel homotetik hareketlerde hızlar ve ivmeler incelenerek bunlarla ilgili bağıntı ve sonuçlar yeniden ifade edilmiştir. Ayrıca kompleks düzlemde, 1-parametrelili düzlemsel homotetik hareketler altında karışık alan formülü elde edilmiş ve bu alan formülü yardımı ile Holditch teoremi ispat edilmiştir.

5.1. Kompleks Düzlemde 1-parametrelili Hareketler

5.1.1. Hızlar ve Hızların Terkibi

E -düzlemi E' -düzlemine göre 1-parametrelili hareket yaparken, bir X noktası da hareketli E -düzlemindeki yerini t zamanı ile değiştirsin. Böylece iki hareketi bir araya getiriyor ve bu durumda hızların nasıl terkip edileceğini araştırıyoruz.

X noktasının V_r relatif hızı hareketli eksen sistemine göre (4.3.4) den

$$(5.1.1) \quad \mathbf{X}_r = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \dot{\mathbf{x}}$$

ifadesiyle veya sabit koordinat sistemine göre (4.3.5) den

$$(5.1.2) \quad \mathbf{X}'_r = \mathbf{X}_r e^{i\varphi} = \dot{\mathbf{x}} e^{i\varphi}$$

ile ifade edilir.

X noktasının V_a mutlak hızı, sabit eksen sistemine göre (4.3.8) den

$$(5.1.3) \quad \mathbf{X}'_a = i\dot{\varphi}\mathbf{x}e^{i\varphi} - (\dot{\mathbf{u}} + i\mathbf{u}\dot{\varphi})e^{i\varphi} + \dot{\mathbf{x}}e^{i\varphi}$$

ile veya hareketli koordinat sistemine göre (4.3.10) dan

$$(5.1.4) \quad \mathbf{X}_a = \mathbf{X}'_a e^{-i\varphi} = i\dot{\varphi}\mathbf{x} - (\dot{\mathbf{u}} + i\mathbf{u}\dot{\varphi}) + \dot{\mathbf{x}}$$

ifadesi ile verilir.

X noktasının V_r sürüklenme hızı sabit koordinat sistemine göre (4.3.9) dan

$$(5.1.5) \quad \mathbf{X}'_r = i\dot{\varphi}\mathbf{x}e^{i\varphi} - (\dot{\mathbf{u}} + i\mathbf{u}\dot{\varphi})e^{i\varphi}$$

ile veya hareketli eksen sistemine göre (4.3.11) den

$$(5.1.6) \quad \mathbf{X}_r = \mathbf{X}'_r e^{-i\varphi} = i\dot{\varphi}\mathbf{x} - (\dot{\mathbf{u}} + i\mathbf{u}\dot{\varphi})$$

şeklinde ifade edilir.

Diğer taraftan, E/E' hareketinin pol noktası için (4.3.13) den

$$(5.1.7) \quad \mathbf{x} = \mathbf{p} = \mathbf{u} - i \frac{\dot{\mathbf{u}}}{\dot{\phi}}$$

olduğunu biliyoruz. Pol noktası yardımıyla sürüklenme hızının ifadesi (4.3.14) den

$$(5.1.8) \quad \mathbf{X}'_r = i\dot{\phi}(\mathbf{x} - \mathbf{p})e^{i\varphi}$$

dir.

X noktasının sürüklenme hızının (5.1.8) ifadesinden aşağıdaki sonuçlar çıkartılabilir:

SONUÇ 5.1.1.

P polünden X noktasına giden pol ışınının

$$\overrightarrow{PX} = (\mathbf{x} - \mathbf{p})e^{i\varphi}$$

vektörü $\mathbf{X}'_r$ ye diktir. Gerçekten, $\mathbf{a} = a_1 + ia_2$, $\mathbf{b} = b_1 + ib_2$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{a}e^{i\varphi}, \mathbf{b}e^{i\varphi} \rangle &= \langle (a_1 + ia_2)(\cos\varphi + i\sin\varphi), (b_1 + ib_2)(\cos\varphi + i\sin\varphi) \rangle \\ &= \langle (a_1 \cos\varphi - a_2 \sin\varphi, a_1 \sin\varphi + a_2 \cos\varphi), (b_1 \cos\varphi - b_2 \sin\varphi, b_1 \sin\varphi + b_2 \cos\varphi) \rangle \\ &= a_1 b_1 + a_2 b_2 \end{aligned}$$

olduğundan

$$(5.1.9) \quad \langle \mathbf{a}e^{i\varphi}, \mathbf{b}e^{i\varphi} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$$

bulunur. O halde

$$\langle \mathbf{X}'_r, \overrightarrow{PX} \rangle = \langle i\dot{\phi}(\mathbf{x} - \mathbf{p})e^{i\varphi}, (\mathbf{x} - \mathbf{p})e^{i\varphi} \rangle$$

olup (5.1.9) kullanılırsa

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{X}'_r, \overrightarrow{PX} \rangle &= \langle i\dot{\phi}(\mathbf{x} - \mathbf{p}), (\mathbf{x} - \mathbf{p}) \rangle \\ &= \langle (x_1 - p_1, x_2 - p_2), -(x_2 - p_2), x_1 - p_1 \rangle \dot{\phi} \\ &= [-(x_1 - p_1)(x_2 - p_2) + (x_1 - p_1)(x_2 - p_2)] \dot{\phi} \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Yani pol ışını hareketin her t anında sürüklenme hızına diktir.

SONUÇ 5.1.2.

$\mathbf{X}'_r$ vektörünün uzunluğu

$$\|\mathbf{X}'_r\| = \sqrt{\langle \mathbf{X}'_r, \mathbf{X}'_r \rangle}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}'_r &= \sqrt{\langle i\dot{\phi}(\mathbf{x} - \mathbf{p}), i\dot{\phi}(\mathbf{x} - \mathbf{p}) \rangle} \\
&= \sqrt{\langle (-(x_2 - p_2), x_1 - p_1), (-(x_2 - p_2), x_1 - p_1) \rangle \dot{\phi}^2} \\
&= \sqrt{\dot{\phi}^2 [(x_2 - p_2)^2 + (x_1 - p_1)^2]} \\
&= \dot{\phi} \|\overrightarrow{PX}\|
\end{aligned}$$

dir.

Şimdi (P) ve (P') pol eğrilerini çizen P pol noktasının hızlarını araştıralım. Pol noktası $\mathbf{X}'_r = 0$ ile tanımlandığından (4.3.12) eşitliğinden $X = P$ için

$$\mathbf{X}'_a = \mathbf{X}'_r = \dot{\mathbf{p}} e^{i\varphi}$$

bulunur. Böylece aşağıdaki teoremi verebiliriz:

TEOREM 5.1.1.

Sabit ve hareketli düzlemlerdeki pol eğrilerini çizen P pol noktasının her t anındaki hızları birbirinin aynıdır.

TEOREM 5.1.2.

1-parametrelili düzlemsel bir E/E' hareketinde E -düzleminin (P) hareketli pol eğrisi E' -düzleminin (P') sabit pol eğrisi üzerinde kaymaksızın yuvarlanır.

İspat: Teorem (5.1.1) den dolayı her t anında (P) ve (P') pol eğrileri P pol noktasında birbirine teğettir (Şekil 5.1.1). Ayrıca, (P) nin t_0 , t_1 e karşılık gelen noktaları arasındaki yay uzunluğu

$$ds = \|\mathbf{X}'_r\| dt$$

dir.

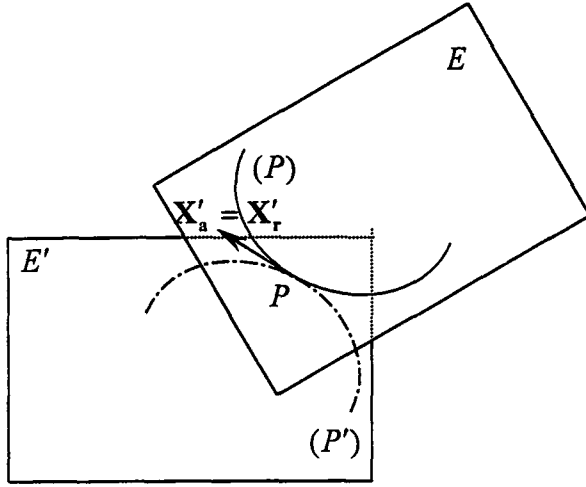
(P') nün t_0 , t_1 e karşılık gelen noktaları arasındaki yay uzunluğu

$$ds' = \|\mathbf{X}'_a\| dt$$

olur. P pol noktası için $\mathbf{X}'_a = \mathbf{X}'_r$ olduğundan

$$ds' = ds$$

bulunur. O halde (P) ve (P') pol eğrileri her t anında birbirine teğet ve aldıkları ds ve ds' yolları aynıdır. Dolayısıyla tanımdan (P) hareketli pol eğrisi (P') sabit pol eğrisi üzerinde kaymaksızın yuvarlanır.



Şekil 5.1.1

5.1.2. İvmeler ve İvmelerin Terkibi

X noktasının relatif ivme vektörü, X noktasının E -düzlemine göre olan ivme vektörüdür ve X in E -düzlemine nazaran $\mathbf{X}_r$ vektörel hızının t zamanına göre türevi alınarak bulunur. O halde (5.1.1) den

$$(5.1.10) \quad \mathbf{b}_r = \dot{\mathbf{X}}_r = \ddot{\mathbf{x}}$$

elde edilir. Bu vektör sabit koordinat sistemine göre

$$(5.1.11) \quad \mathbf{b}'_r = \mathbf{b}_r e^{i\varphi} = \ddot{\mathbf{x}} e^{i\varphi}$$

ile ifade edilir.

X noktasının mutlak ivme vektörü X noktasının E' -düzlemine göre olan ivme vektörüdür. Bu ivme vektörü (5.1.2) ve (5.1.8) den elde edilen

$$\mathbf{X}'_a = \mathbf{X}'_t + \mathbf{X}'_r = i\dot{\varphi}(\mathbf{x} - \mathbf{p})e^{i\varphi} + \dot{\mathbf{x}}e^{i\varphi}$$

mutlak hızının t ye göre türevi alınarak bulunur. O halde

$$\begin{aligned} \mathbf{b}'_a = \dot{\mathbf{X}}'_a &= i\ddot{\varphi}(\mathbf{x} - \mathbf{p})e^{i\varphi} + i\dot{\varphi}(\dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{p}})e^{i\varphi} - \dot{\varphi}^2(\mathbf{x} - \mathbf{p})e^{i\varphi} + \ddot{\mathbf{x}}e^{i\varphi} + i\dot{\varphi}\dot{\mathbf{x}}e^{i\varphi} \\ &= (\mathbf{x} - \mathbf{p})(i\ddot{\varphi} - \dot{\varphi}^2)e^{i\varphi} + i\dot{\varphi}\dot{\mathbf{x}}e^{i\varphi} - i\dot{\varphi}\dot{\mathbf{p}}e^{i\varphi} + i\dot{\varphi}\dot{\mathbf{x}}e^{i\varphi} + \ddot{\mathbf{x}}e^{i\varphi} \end{aligned}$$

olup

$$(5.1.12) \quad \mathbf{b}'_a = (\mathbf{x} - \mathbf{p})(i\ddot{\varphi} - \dot{\varphi}^2)e^{i\varphi} - i\dot{\varphi}\dot{\mathbf{p}}e^{i\varphi} + 2i\dot{\varphi}\dot{\mathbf{x}}e^{i\varphi} + \mathbf{b}'_r$$

elde edilir. Buradaki

$$(5.1.13) \quad \mathbf{b}'_r = (\mathbf{x} - \mathbf{p})(i\ddot{\phi} - \dot{\phi}^2)e^{i\varphi} - i\dot{\phi}\dot{\mathbf{p}}e^{i\varphi}$$

vektörüne X noktasının **sürüklenme ivme vektörü** ve

$$(5.1.14) \quad \mathbf{b}'_c = 2i\dot{\phi}\dot{\mathbf{x}}e^{i\varphi}$$

vektörüne de X noktasının **Coriolis- ivme vektörü** denir.

O halde sürüklenme ivme vektörü hareketli sistemdeki sabit noktaların sabit sisteme göre ivmesidir.

O halde ivmelerin terkibi şu teoremle ifade edilir:

TEOREM 5.1.3.

İki hareketin terkinde bir noktanın mutlak ivme vektörü; sürüklenme ivme vektörü, Coriolis-ivme vektörü ve relatif ivme vektörünün toplamına eşittir:

$$(5.1.15) \quad \mathbf{b}'_a = \mathbf{b}'_r + \mathbf{b}'_c + \mathbf{b}'_r.$$

(5.1.12), (5.1.13) ve (5.1.14) ile verilen ivme vektörleri hareketli sisteme göre, sırası ile,

$$(5.1.16) \quad \mathbf{b}_a = \mathbf{b}'_a e^{-i\varphi} = (\mathbf{x} - \mathbf{p})(i\ddot{\phi} - \dot{\phi}^2) - i\dot{\phi}\dot{\mathbf{p}} + 2i\dot{\phi}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{b}_r$$

$$(5.1.17) \quad \mathbf{b}_r = \mathbf{b}'_r e^{-i\varphi} = (\mathbf{x} - \mathbf{p})(i\ddot{\phi} - \dot{\phi}^2) - i\dot{\phi}\dot{\mathbf{p}}$$

$$(5.1.18) \quad \mathbf{b}_c = \mathbf{b}'_c e^{-i\varphi} = 2i\dot{\phi}\dot{\mathbf{x}}$$

vektörleri ile ifade edilirler.

SONUÇ 5.1.3.

$\mathbf{b}'_c$ Coriolis-ivmesi $\mathbf{X}'_r$ relatif hızına diktir. Çünkü, (5.1.2) ve (5.1.14) den

$$\langle \mathbf{X}'_r, \mathbf{b}'_c \rangle = \langle \dot{\mathbf{x}} e^{i\varphi}, 2i\dot{\phi}\dot{\mathbf{x}} e^{i\varphi} \rangle$$

olup (5.1.9) kullanılırsa

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{X}'_r, \mathbf{b}'_c \rangle &= \langle \dot{\mathbf{x}}, 2i\dot{\phi}\dot{\mathbf{x}} \rangle \\ &= 2\langle (\dot{x}_1 + i\dot{x}_2), i\dot{\phi}(\dot{x}_1 + i\dot{x}_2) \rangle \\ &= 2\langle (\dot{x}_1, \dot{x}_2), (-\dot{\phi}\dot{x}_2, \dot{\phi}\dot{x}_1) \rangle \\ &= 2(-\dot{\phi}\dot{x}_2\dot{x}_1 + \dot{\phi}\dot{x}_1\dot{x}_2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

dır.

Teorem 5.1.3 de ifade edilen (5.1.15) eşitliği ivmelerin hızlardan farklı bir yapı ile birbirleri arasındaki ilgiyi vermektedir. Eğer E -deki hareketli X noktasının Coriolis-ivmesi sıfır ise ivmeler de hızlardaki gibi (4.3.12) eşitliğine benzer şekilde

$$\mathbf{b}'_a = \mathbf{b}'_r + \mathbf{b}'_r$$

eşitliğine sahip olur. Bununla ilgili aşağıdaki sonucu verebiliriz.

SONUÇ 5.1.4.

E -hareketli düzleminde hareketli X noktasının Coriolis-ivmesi sıfır ise, E/E' hareketi bir kayma (öteleme) hareketidir ve bu ifadenin tersi de doğrudur.

İspat:

X noktasının $\mathbf{b}'_c$ Coriolis-ivme vektörü

$$\mathbf{b}'_c = 2i\dot{\phi}\dot{\mathbf{x}}e^{i\varphi} = 0$$

olsun. Bu durumda

$$\dot{\phi} = 0$$

elde edilir. Bu ise φ nin sabit olduğunu, yani E/E' hareketinin sadece kaymadan ibaret olduğunu gösterir.

Tersine, E/E' hareketi sadece bir kayma hareketi olsun. Bu durumda $\varphi = \text{sabit}$ olacağından $\mathbf{b}'_c = 0$ elde edilir.

Şimdi genel bir E/E' hareketinde, t anında, sürüklenme ivmesi sıfır olan noktaları araştıralım. Bu durumda

$$\mathbf{b}'_r = 0$$

eşitliğinden

$$(\mathbf{x} - \mathbf{p})(i\ddot{\phi} - \dot{\phi}^2)e^{i\varphi} - i\dot{\phi}\dot{\mathbf{p}}e^{i\varphi} = 0$$

bulunur. Buradan

$$\mathbf{x} - \mathbf{p} = \frac{i\dot{\phi}\dot{\mathbf{p}}}{i\ddot{\phi} - \dot{\phi}^2}$$

olup ivme polünü

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + \frac{i\dot{\phi}\dot{\mathbf{p}}}{i\ddot{\phi} - \dot{\phi}^2}$$

veya

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + \frac{\dot{\phi}\ddot{\phi}\dot{\mathbf{p}}}{\ddot{\phi}^2 + \dot{\phi}^4} - i\frac{\dot{\phi}^3\dot{\mathbf{p}}}{\ddot{\phi}^2 + \dot{\phi}^4}$$

şeklinde elde ederiz. O halde aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz:

TEOREM 5.1.4.

Açısal hızı sıfır olmayan bir harekette, t anında, sürüklenme ivmesi sıfır olan nokta, yani ivme polü,

$$(5.1.19) \quad \mathbf{x} = \mathbf{p} + \frac{\dot{\phi}\ddot{\phi}\dot{\mathbf{p}}}{\ddot{\phi}^2 + \dot{\phi}^4} - i \frac{\dot{\phi}^3\dot{\mathbf{p}}}{\ddot{\phi}^2 + \dot{\phi}^4}$$

eşitliği ile verilir. Burada $\mathbf{p}$, hareketin t anındaki pol noktasıdır.



5.2. Kompleks Düzlemde 1-parametrel Homotetik Hareketler

TANIM 5.2.1.

E ve E' , sırasıyla, hareketli ve sabit kompleks düzlemler ve O ile O' de onların koordinat sistemlerinin orijin noktaları olsun. $\overline{O'O} = \mathbf{u}'$ olmak üzere

$$(5.2.1) \quad \mathbf{x}' = \mathbf{u}' + h\mathbf{x}e^{i\varphi}$$

dönüşümü ile tanımlanan harekete **1-parametrel düzlemsel homotetik hareket** denir ve E/E' ile gösterilir. Burada h E/E' hareketinin homotetik oranı, φ E -nin E' -ye göre dönme açısı ve $\mathbf{x} = x_1 + ix_2$ ile $\mathbf{x}' = x'_1 + ix'_2$ ise $X \in E$ noktasının, sırasıyla, hareketli ve sabit dik koordinat sistemlerine göre konum vektörleridir. h homotetik oranı, φ dönme açısı ve $\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{u}'$ vektörleri reel bir t parametresinin sürekli diferensiyellenebilir fonksiyonlarıdır. Ayrıca, $t = t_0$ başlangıç anında koordinat sistemleri çakışık olsun.

Eğer $\overline{OO'} = \mathbf{u}$ alınırsa,

$$(5.2.2) \quad \mathbf{u}' = -\mathbf{u}e^{i\varphi}$$

elde edilir. (5.2.1) ve (5.2.2) den

$$(5.2.3) \quad \mathbf{x}' = (h\mathbf{x} - \mathbf{u})e^{i\varphi}$$

bulunur.

5.2.1. Hızlar ve Hızların Terkibi

X , E -düzleminde bir nokta olsun. X noktasının $\mathbf{V}_r$ relatif hızı, X in hareketli E -düzlemine göre hızıdır. Bu hız hareketli eksen sistemine göre

$$(5.2.4) \quad \mathbf{X}_r = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \dot{\mathbf{x}}$$

ifadesiyle verilir. Bu vektör sabit koordinat sisteminde

$$(5.2.5) \quad \mathbf{X}'_r = \mathbf{X}_r e^{i\varphi} = \dot{\mathbf{x}} e^{i\varphi}$$

ile ifade edilir.

X noktasının E' -düzlemine göre hızı, X in $\mathbf{V}_a$ mutlak hızıdır. (5.2.3) ifadesinin t ye göre türevi alınır, mutlak hız

$$\mathbf{X}'_a = \dot{h}\mathbf{x}e^{i\varphi} + h\dot{\mathbf{x}}e^{i\varphi} - \dot{\mathbf{u}}e^{i\varphi} + ih\dot{\varphi}\mathbf{x}e^{i\varphi} - i\mathbf{u}\dot{\varphi}e^{i\varphi}$$

olup buradan

$$\mathbf{X}'_a = (\dot{h} + ih\dot{\phi})\mathbf{x}e^{i\phi} - (\dot{\mathbf{u}} + i\mathbf{u}\dot{\phi})e^{i\phi} + h\dot{\mathbf{x}}e^{i\phi}$$

veya

$$(5.2.6) \quad \mathbf{X}'_a = (\dot{h} + ih\dot{\phi})\mathbf{x}e^{i\phi} - (\dot{\mathbf{u}} + i\mathbf{u}\dot{\phi})e^{i\phi} + h\mathbf{X}'_r$$

elde edilir. Burada

$$(5.2.7) \quad \mathbf{X}'_r = (\dot{h} + ih\dot{\phi})\mathbf{x}e^{i\phi} - (\dot{\mathbf{u}} + i\mathbf{u}\dot{\phi})e^{i\phi}$$

X noktasının $\mathbf{V}_r$ sürüklenme hız vektörüdür.

Mutlak hız ve sürüklenme hız vektörlerinin hareketli düzlemin koordinat eksenlerine göre ifadeleri (5.2.6) ve (5.2.7) den

$$(5.2.8) \quad \mathbf{X}_a = \mathbf{X}'_a e^{-i\phi} = (\dot{h} + ih\dot{\phi})\mathbf{x} - (\dot{\mathbf{u}} + i\mathbf{u}\dot{\phi}) + h\mathbf{X}_r$$

$$(5.2.9) \quad \mathbf{X}_r = \mathbf{X}'_r e^{-i\phi} = (\dot{h} + ih\dot{\phi})\mathbf{x} - (\dot{\mathbf{u}} + i\mathbf{u}\dot{\phi})$$

şeklinde bulunur.

Eğer X noktası E -düzleminde sabit bir nokta ise $\mathbf{X}_r = \mathbf{X}'_r = 0$ dır. Bu durumda mutlak hız sürüklenme hızına eşit olur.

(5.2.5), (5.2.6) ve (5.2.7) ifadelerinden aşağıdaki teoremi verebiliriz:

TEOREM 5.2.1.

E/E' homotetik hareketinde bir X noktasının mutlak hızı, sürüklenme hızı ile relatif hızın h katının toplamına eşittir, yani

$$(5.2.10) \quad \mathbf{X}'_a = \mathbf{X}'_r + h\mathbf{X}'_r.$$

Bundan sonra, sırf dönme ve sırf öteleme durumlarından kaçınmak için

$$\dot{\phi}(t) \neq 0, \quad h = h(t) \neq \text{sabit}$$

kabul edeceğiz.

Şimdi sürüklenme hızının sıfır olduğu noktaları araştıralım. Böyle noktalar, t anında, sadece E hareketli düzleminde değil aynı zamanda E' sabit düzleminde de sabit olmak zorundadır. Bu durumda (5.2.7) ifadesi göz önüne alınır ve sıfıra eşitlenirse

$$\mathbf{x} = \frac{\dot{\mathbf{u}} + i\mathbf{u}\dot{\phi}}{\dot{h} + ih\dot{\phi}}$$

elde edilir. Buradan

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} = \frac{(\dot{\mathbf{u}} + i\mathbf{u}\dot{\phi})(\dot{h} - ih\dot{\phi})}{(\dot{h} + ih\dot{\phi})(\dot{h} - ih\dot{\phi})}$$

$$\mathbf{p} = \frac{\dot{\mathbf{u}}\dot{h} + \mathbf{u}h\dot{\phi}^2 + i(\mathbf{u}\dot{h}\dot{\phi} - \dot{\mathbf{u}}h\dot{\phi})}{\dot{h}^2 + h^2\dot{\phi}^2}$$

olup

$$(5.2.11) \quad \mathbf{p} = \frac{\dot{\mathbf{u}}\dot{h} + \mathbf{u}h\dot{\phi}^2}{\dot{h}^2 + h^2\dot{\phi}^2} + i \frac{\mathbf{u}\dot{h}\dot{\phi} - \dot{\mathbf{u}}h\dot{\phi}}{\dot{h}^2 + h^2\dot{\phi}^2}$$

bulunur. (5.2.11) de $\mathbf{p} = p_1 + ip_2$ ve $\mathbf{u} = u_1 + iu_2$ yazılırsa

$$(5.2.12) \quad p_1 = \frac{dh(du_1 - u_2 d\phi) + h d\phi(du_2 + u_1 d\phi)}{dh^2 + h^2 d\phi^2}$$

$$p_2 = \frac{dh(du_2 + u_1 d\phi) - h d\phi(du_1 - u_2 d\phi)}{dh^2 + h^2 d\phi^2}$$

elde edilir.

$\overrightarrow{OP} = \mathbf{p} = p_1 + ip_2$ noktası E/E' homotetik hareketinin pol (kutup) noktasıdır.

Pol noktasından faydalanarak X noktasının (5.2.7) ile verilen sürüklenme hızı aşağıdaki gibi de ifade edilebilir. Bunun için

$$\mathbf{p} = \frac{\dot{\mathbf{u}} + i\mathbf{u}\dot{\phi}}{\dot{h} + ih\dot{\phi}}$$

eşitliğinden $\dot{\mathbf{u}}$ değeri hesaplanırsa

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{p}(\dot{h} + ih\dot{\phi}) - i\mathbf{u}\dot{\phi}$$

bulunur. Bunu (5.2.7) de yerine yazarsak

$$(5.2.13) \quad \mathbf{X}'_r = (\dot{h} + ih\dot{\phi})(\mathbf{x} - \mathbf{p})e^{i\phi}$$

elde edilir.

Sürüklenme hızının bu ifadesinden aşağıdaki sonuçlar verilebilir:

SONUÇ 5.2.1.

P polünden X noktasına giden

$$\overrightarrow{PX} = (h\mathbf{x} - \mathbf{p})e^{i\phi}$$

pol ışını ile $\mathbf{X}'_r$ sürüklenme hızının iç-çarpımı

$$\langle \mathbf{X}'_r, \overrightarrow{PX} \rangle = \langle (\dot{h} + ih\dot{\phi})(\mathbf{x} - \mathbf{p})e^{i\phi}, (h\mathbf{x} - \mathbf{p})e^{i\phi} \rangle$$

olup, (5.1.9) göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{X}'_r, \overrightarrow{PX} \rangle &= \langle (\dot{h} + ih\dot{\phi})(\mathbf{x} - \mathbf{p}), (h\mathbf{x} - \mathbf{p}) \rangle \\
&= \langle (hx_1 - p_1, hx_2 - p_2), (\dot{h}(x_1 - p_1) - h\dot{\phi}(x_2 - p_2), \dot{h}(x_2 - p_2) + h\dot{\phi}(x_1 - p_1)) \rangle \\
&= \dot{h}[(hx_1 - p_1)(x_1 - p_1) + (hx_2 - p_2)(x_2 - p_2)] \\
&\quad + h\dot{\phi}[(hx_2 - p_2)(x_1 - p_1) - (hx_1 - p_1)(x_2 - p_2)]
\end{aligned}$$

olur. Burada özel olarak $h = 1$ alınırsa

$$\langle \mathbf{X}'_r, \overrightarrow{PX} \rangle = 0$$

bulunur. Bu ise $h = 1$ için $\overrightarrow{PX}$ pol ışının her t anında $\mathbf{X}'_r$ ye dik olduğunu gösterir.

SONUÇ 5.2.2.

$\mathbf{X}'_r$ vektörünün uzunluğu için

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{X}'_r\| &= \sqrt{\langle \mathbf{X}'_r, \mathbf{X}'_r \rangle} \\
&= \sqrt{\langle (\dot{h} + ih\dot{\phi})(\mathbf{x} - \mathbf{p})e^{i\phi}, (\dot{h} + ih\dot{\phi})(\mathbf{x} - \mathbf{p})e^{i\phi} \rangle} \\
&= \sqrt{(\dot{h}^2 + h^2\dot{\phi}^2) \langle (\mathbf{x} - \mathbf{p})e^{i\phi}, (\mathbf{x} - \mathbf{p})e^{i\phi} \rangle}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu son eşitlikte $h = 1$ alınırsa

$$\|\mathbf{X}'_r\| = \dot{\phi} \|\overrightarrow{PX}\|$$

bulunur.

Şimdi (P) ve (P') pol eğrilerini çizen P pol noktasının hızlarını araştıralım. Pol noktası $\mathbf{X}'_r = 0$ ile tanımlandığından (5.2.10) eşitliğinden $X = P$ için

$$(5.2.14) \quad \mathbf{X}'_a = h\mathbf{X}'_r = h\dot{\mathbf{p}}e^{i\phi}$$

bulunur. Böylece aşağıdaki teoremi verebiliriz:

TEOREM 5.2.2.

Sabit ve hareketli düzlemlerdeki pol eğrilerini çizen P dönme polünün her t anındaki hızları birbirinden farklıdır.

TEOREM 5.2.3.

1-parametrelili E/E' düzlemsel homotetik hareketinde E -düzleminin (P) hareketli pol eğrisi E' -düzleminin (P') sabit pol eğrisi üzerinde kayarak yuvarlanır.

İspat:

(P) nin t_0 , t_1 e karşılık gelen noktaları arasındaki yay uzunluğu

$$ds = \|\mathbf{X}'_r\|dt$$

dir.

(P') nün t_0 , t_1 e karşılık gelen noktaları arasındaki yay uzunluğu

$$ds' = \|\mathbf{X}'_a\|dt$$

olur. P pol noktası için $\mathbf{X}'_a = h\mathbf{X}'_r$ olduğundan

$$ds' \neq ds$$

dir. O halde (P) hareketli pol eğrisi (P') sabit pol eğrisi üzerinde kayarak yuvarlanır.

SONUÇ 5.2.3.

$h=1$ olması durumunda $ds'=ds$ elde edilir. Bu durumda pol eğrileri birbiri üzerinde kaymaksızın yuvarlanır.

5.2.2. İvmeler ve İvmelerin Terkibi

X noktasının relatif ivme vektörü (5.2.4) ile verilen relatif hızın t ye göre türevi alınmasıyla

$$(5.2.15) \quad \mathbf{b}_r = \dot{\mathbf{X}}_r = \ddot{\mathbf{x}}$$

elde edilir. Bu vektör sabit koordinat sisteminde

$$(5.2.16) \quad \mathbf{b}'_r = \mathbf{b}_r e^{i\varphi} = \ddot{\mathbf{x}} e^{i\varphi}$$

ile ifade edilir.

X noktasının mutlak ivme vektörü, mutlak hızın t ye göre türevi alınarak bulunur. O halde (5.2.5) ve (5.2.13) eşitliklerinin (5.2.10) da yerine yazılmasıyla elde edilen

$$\mathbf{X}'_a = \mathbf{X}'_r + h\mathbf{X}'_r = (\dot{h} + ih\dot{\varphi})(\mathbf{x} - \mathbf{p})e^{i\varphi} + h\dot{\mathbf{x}}e^{i\varphi}$$

mutlak hızının t ye göre türevi alınır

$$\begin{aligned} \mathbf{b}'_a = \dot{\mathbf{X}}'_a &= (\ddot{h} + i\dot{h}\dot{\varphi} + ih\ddot{\varphi})(\mathbf{x} - \mathbf{p})e^{i\varphi} + (\dot{h} + ih\dot{\varphi})(\dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{p}})e^{i\varphi} \\ &\quad + (\dot{h} + ih\dot{\varphi})(\mathbf{x} - \mathbf{p})i\dot{\varphi}e^{i\varphi} + h\dot{\mathbf{x}}e^{i\varphi} + h\ddot{\mathbf{x}}e^{i\varphi} + ih\dot{\varphi}\dot{\mathbf{x}}e^{i\varphi} \\ &= (\ddot{h} + i\dot{h}\dot{\varphi} + ih\ddot{\varphi})(\mathbf{x} - \mathbf{p})e^{i\varphi} + (\dot{h} + ih\dot{\varphi})\dot{\mathbf{x}}e^{i\varphi} - (\dot{h} + ih\dot{\varphi})\dot{\mathbf{p}}e^{i\varphi} \\ &\quad + (\dot{h} + ih\dot{\varphi})(\mathbf{x} - \mathbf{p})i\dot{\varphi}e^{i\varphi} + \dot{\mathbf{x}}(\dot{h} + ih\dot{\varphi})e^{i\varphi} + h\ddot{\mathbf{x}}e^{i\varphi} \end{aligned}$$

olup

$$(5.2.17) \quad \mathbf{b}'_a = \left[\ddot{h} - h\dot{\phi}^2 + i(h\ddot{\phi} + 2\dot{h}\dot{\phi}) \right] (\mathbf{x} - \mathbf{p}) e^{i\varphi} - (\dot{h} + ih\dot{\phi}) \dot{\mathbf{p}} e^{i\varphi} + 2\dot{\mathbf{x}}(\dot{h} + ih\dot{\phi}) e^{i\varphi} + h\mathbf{b}'_r$$

elde edilir. Buradaki

$$(5.2.18) \quad \mathbf{b}'_r = \left[\ddot{h} - h\dot{\phi}^2 + i(h\ddot{\phi} + 2\dot{h}\dot{\phi}) \right] (\mathbf{x} - \mathbf{p}) e^{i\varphi} - (\dot{h} + ih\dot{\phi}) \dot{\mathbf{p}} e^{i\varphi}$$

vektörüne X noktasının **sürüklenme ivme vektörü** ve

$$(5.2.19) \quad \mathbf{b}'_c = 2\dot{\mathbf{x}}(\dot{h} + ih\dot{\phi}) e^{i\varphi}$$

vektörüne X noktasının **Coriolis- ivme vektörü** denir.

O halde sürüklenme ivme vektörü, hareketli sistemdeki sabit noktaların sabit sisteme göre ivmesidir.

(5.2.17), (5.2.18) ve (5.2.19) dan ivmelerin terkibine ait aşağıdaki teoremi verebiliriz.

TEOREM 5.2.4.

İki hareketin terkibinde bir noktanın mutlak ivme vektörü, sürüklenme ivme vektörü ile Coriolis-ivme vektörü ve relatif ivme vektörünün h katının toplamına eşittir:

$$(5.2.20) \quad \mathbf{b}'_a = \mathbf{b}'_r + \mathbf{b}'_c + h\mathbf{b}'_r.$$

(5.2.17), (5.2.18) ve (5.2.19) eşitlikleri ile verilen ivme vektörleri hareketli sistemde, sırasıyla,

$$(5.2.21) \quad \mathbf{b}_a = \mathbf{b}'_a e^{-i\varphi} = \left[\ddot{h} - h\dot{\phi}^2 + i(h\ddot{\phi} + 2\dot{h}\dot{\phi}) \right] (\mathbf{x} - \mathbf{p}) - (\dot{h} + ih\dot{\phi}) \dot{\mathbf{p}} + 2\dot{\mathbf{x}}(\dot{h} + ih\dot{\phi}) + h\mathbf{b}_r$$

$$(5.2.22) \quad \mathbf{b}_r = \mathbf{b}'_r e^{-i\varphi} = \left[\ddot{h} - h\dot{\phi}^2 + i(h\ddot{\phi} + 2\dot{h}\dot{\phi}) \right] (\mathbf{x} - \mathbf{p}) - (\dot{h} + ih\dot{\phi}) \dot{\mathbf{p}}$$

$$(5.2.23) \quad \mathbf{b}_c = \mathbf{b}'_c e^{-i\varphi} = 2\dot{\mathbf{x}}(\dot{h} + ih\dot{\phi})$$

vektörleri ile ifade edilir.

Düzlemsel hareketler için verilen ivme polünü homotetik hareketlere genelleştiren aşağıdaki teoremi verelim.

TEOREM 5.2.5.

Genel bir E/E' düzlemsel homotetik hareketinde ivme polü

$$(5.2.24) \quad \mathbf{x} = \mathbf{p} + \frac{(\dot{h} + ih\dot{\phi}) \dot{\mathbf{p}}}{\ddot{h} - h\dot{\phi}^2 + i(h\ddot{\phi} + 2\dot{h}\dot{\phi})}$$

eşitliği ile verilir.

İC. YÜKSEKÖĞRETİM ENSTİTÜSÜ
DÜZLEMSEL HAREKETLER
DOKÜMANLARI

İspat:

Sürüklenme ivme vektörünün sıfır olduğu noktalar ivme polünü verdiğiinden (5.2.18) den

$$\left[\ddot{h} - h\dot{\phi}^2 + i(h\ddot{\phi} + 2\dot{h}\dot{\phi}) \right] (\mathbf{x} - \mathbf{p})e^{i\varphi} - (\dot{h} + ih\dot{\phi})\dot{\mathbf{p}}e^{i\varphi} = 0$$

olup buradan

$$\mathbf{x} - \mathbf{p} = \frac{(\dot{h} + ih\dot{\phi})\dot{\mathbf{p}}e^{i\varphi}}{\ddot{h} - h\dot{\phi}^2 + i(h\ddot{\phi} + 2\dot{h}\dot{\phi})e^{i\varphi}}$$

veya

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + \frac{(\dot{h} + ih\dot{\phi})\dot{\mathbf{p}}}{\ddot{h} - h\dot{\phi}^2 + i(h\ddot{\phi} + 2\dot{h}\dot{\phi})}$$

elde edilir.

Burada özel olarak $h = 1$ alınırsa 1-parametrelî düzlemsel hareketler için verilen

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + \frac{i\dot{\phi}\dot{\mathbf{p}}}{i\ddot{\phi} - \dot{\phi}^2}$$

ivme polü elde edilir.

5.2.3. Kapalı Homotetik Hareketler İçin Steiner ve Karışık Alan Formülleri

E/E' , T periyotlu ve ν dönme sayılı 1-parametrelili kapalı düzlemsel homotetik hareket olsun. O halde

$$(5.2.25) \quad \begin{aligned} \mathbf{u}'(t+T) &= \mathbf{u}'(t) \\ \varphi(t+T) &= \varphi(t) + 2\pi\nu \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır.

Şimdi hareketli düzlemdeki sabit bir noktanın E/E' kapalı homotetik hareketi esnasında çizdiği kapalı eğrinin yörünge alanını hesaplayalım.

X , E -de sabit bir nokta olsun. X in E' -ye göre $d\mathbf{x}'$ değişimi X in sürüklenme hızına karşılık geldiğinden (5.2.13) den

$$(5.2.26) \quad d\mathbf{x}' = (dh + i h d\varphi)(\mathbf{x} - \mathbf{p})e^{i\varphi}$$

dir.

X noktasının F_X yörünge alanının

$$(5.2.27) \quad F_X = \frac{1}{2} \oint [\mathbf{x}', d\mathbf{x}']$$

olduğunu (4.3.17) den biliyoruz.

(5.2.3) ve (5.2.26) eşitliklerini (5.2.27) de yerine yazarsak

$$(5.2.28) \quad F_X = \frac{1}{2} \oint [(h\mathbf{x} - \mathbf{u})e^{i\varphi}, (\mathbf{x} - \mathbf{p})(dh + i h d\varphi)e^{i\varphi}]$$

bulunur.

Eğer

$$(5.2.29) \quad [\mathbf{a}e^{i\varphi}, \mathbf{b}e^{i\varphi}] = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$$

ve

$$(5.2.30) \quad [\mathbf{a}, (dh + i h d\varphi)\mathbf{b}] = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]dh + \frac{1}{2}[\mathbf{a}\bar{\mathbf{b}} + \bar{\mathbf{a}}\mathbf{b}]h d\varphi$$

eşitlikleri göz önüne alınırsa (5.2.28) den

$$(5.2.31) \quad F_X = \frac{1}{2} \oint \left\{ [h\mathbf{x} - \mathbf{u}, \mathbf{x} - \mathbf{p}]dh + \frac{1}{2}[(h\mathbf{x} - \mathbf{u})(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{p}}) + (h\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{u}})(\mathbf{x} - \mathbf{p})]h d\varphi \right\}$$

elde edilir.

Eğer $X = O(x_1 = x_2 = 0)$ alınırsa, O orijin noktasının yörünge alanı için

$$(5.2.32) \quad F_O = \frac{1}{2} \oint [(u_1 p_2 - u_2 p_1)dh + (u_1 p_1 + u_2 p_2)h d\varphi]$$

bulunur.

Ayrıca (4.2.26) dan

$$(5.2.33) \quad \oint h^2 d\varphi = 2h^2(t_0)\pi v, \quad t_0 \in [0, T]$$

olduğunu biliyoruz.

Diğer taraftan, $v \neq 0$ alınarak, 1-parametrelili kapalı düzlemsel homotetik hareketin

$S = (s_1, s_2)$ Steiner noktası için (4.2.27) den

$$(5.2.34) \quad \mathbf{s} = s_1 + is_2 = \frac{\oint \mathbf{p} h^2 d\varphi}{\oint h^2 d\varphi}$$

dir. O halde buradan

$$\oint \mathbf{p} h^2 d\varphi = \mathbf{s} \oint h^2 d\varphi$$

veya (5.2.33) kullanılırsa

$$(5.2.35) \quad \oint \mathbf{p} h^2 d\varphi = 2h^2(t_0)\pi v \mathbf{s}$$

bulunur.

Ayrıca (5.2.12) den u_1 ve u_2 yi hesaplırsak

$$(5.2.36) \quad u_1 = p_1 h + \frac{p_2 dh}{d\varphi} - \frac{du_2}{d\varphi}, \quad u_2 = p_2 h - \frac{p_1 dh}{d\varphi} + \frac{du_1}{d\varphi}$$

elde edilir.

(5.2.31) den

$$\begin{aligned} F_X = & \frac{1}{2} \oint \{ (hx_1 - u_1)(x_2 - p_2)dh - (hx_2 - u_2)(x_1 - p_1)dh \\ & + \frac{1}{2} (2h\mathbf{x}\bar{\mathbf{x}} - h\bar{\mathbf{x}}\mathbf{p} - h\mathbf{x}\bar{\mathbf{p}} - \mathbf{u}\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{u}}\mathbf{x} + \mathbf{u}\bar{\mathbf{p}} + \bar{\mathbf{u}}\mathbf{p})hd\varphi \} \end{aligned}$$

olup, X sabit bir nokta olduğundan

$$\begin{aligned} F_X = & \frac{1}{2} \oint [(u_1 p_2 - u_2 p_1)dh + (u_1 p_1 + u_2 p_2)hd\varphi] \\ & + \frac{1}{2} \mathbf{x}\bar{\mathbf{x}} \oint h^2 d\varphi - \frac{1}{4} \mathbf{x} \oint \bar{\mathbf{p}} h^2 d\varphi - \frac{1}{4} \bar{\mathbf{x}} \oint \mathbf{p} h^2 d\varphi - \frac{1}{2} x_1 \oint u_1 h d\varphi - \frac{1}{2} x_2 \oint u_2 h d\varphi \\ & + \frac{1}{2} x_1 \oint (-hp_2 dh + u_2 dh) + \frac{1}{2} x_2 \oint (hp_1 dh - u_1 dh) \end{aligned}$$

bulunur. Burada (5.2.32), (5.2.33), (5.2.35) ve (5.2.36) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
F_X = F_O + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{x}} \bar{\mathbf{x}} 2h^2(t_0) \pi v - \frac{1}{4} \bar{\mathbf{x}} 2h^2(t_0) \pi v \bar{\mathbf{s}} - \frac{1}{4} \bar{\mathbf{x}} 2h^2(t_0) \pi v \mathbf{s} \\
- \frac{1}{2} x_1 \oint (p_1 h^2 d\phi + p_2 h dh - h du_2) - \frac{1}{2} x_2 \oint (p_2 h^2 d\phi - p_1 h dh + h du_1) \\
+ \frac{1}{2} x_1 \oint (-h p_2 dh + u_2 dh) + \frac{1}{2} x_2 \oint (h p_1 dh - u_1 dh)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu son eşitlikte

$$(5.2.37) \quad \mu_1 = \frac{1}{2} \oint (-2p_2 h dh + h u_2 + u_2 dh) \quad , \quad \mu_2 = \frac{1}{2} \oint (2p_1 h dh - h u_1 - u_1 dh)$$

alınır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$F_X = F_O + h^2(t_0) \pi v (\bar{\mathbf{x}} \bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}} \bar{\mathbf{s}} - \bar{\mathbf{x}} \mathbf{s}) + \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2$$

bulunur. $\boldsymbol{\mu} = \mu_1 + i\mu_2$ alınır,sa,

$$(5.2.38) \quad F_X = F_O + h^2(t_0) \pi v (\bar{\mathbf{x}} \bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}} \bar{\mathbf{s}} - \bar{\mathbf{x}} \mathbf{s}) + \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{x}} \bar{\boldsymbol{\mu}} + \bar{\mathbf{x}} \boldsymbol{\mu})$$

elde edilir.

(5.2.38) formülü 1-parametrelili kapalı düzlemsel homotetik hareketler için **Steiner alan formülüdür**.

(5.2.38) de özel olarak $h = 1$ alınır,sa,

$$F_X = F_O + \pi v (\bar{\mathbf{x}} \bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}} \bar{\mathbf{s}} - \bar{\mathbf{x}} \mathbf{s})$$

elde edilir. Bu ise [3] te verilen 1-parametrelili kapalı düzlemsel hareketler için Steiner alan formülüdür.

(5.2.38) ifadesi düzenlenirse

$$F_X = F_O + h^2(t_0) \pi v (x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 s_1 - 2x_2 s_2) + \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2$$

veya buradan

$$x_1^2 + x_2^2 - 2 \left(s_1 - \frac{\mu_1}{2h^2(t_0) \pi v} \right) x_1 - 2 \left(s_2 - \frac{\mu_2}{2h^2(t_0) \pi v} \right) x_2 + \frac{F_O - F_X}{h^2(t_0) \pi v} = 0$$

elde edilir. O halde aşağıdaki teoremi verebiliriz.

TEOREM 5.2.6.

Eşit yörünge alanına sahip E hareketli düzleminin bütün sabit noktaları E' düzleminde

$$M = \left(s_1 - \frac{\mu_1}{2h^2(t_0) \pi v}, s_2 - \frac{\mu_2}{2h^2(t_0) \pi v} \right)$$

merkezli aynı bir çember üzerinde bulunurlar.

$h = 1$ özel durumunda M noktası S Steiner noktası olur.

Şimdi hareketli düzlemde alınan farklı iki sabit noktanın karışık alan formülünü hesaplayalım.

X ve Y hareketli düzlemde sabit iki nokta ve $\overline{XY}$ doğru parçası üzerinde diğer bir nokta Z olsun. Bu durumda

$$(5.2.39) \quad \mathbf{z} = \lambda \mathbf{x} + \xi \mathbf{y}, \quad \lambda + \xi = 1, \quad \lambda, \xi \in \mathbb{R}$$

yazılabilir. (5.2.1) kullanılarak

$$(5.2.40) \quad \mathbf{z}' = \lambda \mathbf{x}' + \xi \mathbf{y}'$$

bulunur.

Şimdi F_X, F_Y yörünge alanları yardımıyla F_Z yörünge alanını bulalım.

(5.2.27) ve (5.2.40) kullanılırsa,

$$F_Z = \frac{1}{2} \oint [\mathbf{z}', d\mathbf{z}'] = \frac{1}{2} \oint [\lambda \mathbf{x}' + \xi \mathbf{y}', \lambda d\mathbf{x}' + \xi d\mathbf{y}']$$

bulunur. Bu son eşitlikten,

$$(5.2.41) \quad F_{XY} = \frac{1}{4} \oint ([\mathbf{x}', d\mathbf{y}'] + [\mathbf{y}', d\mathbf{x}'])$$

olmak üzere

$$(5.2.42) \quad F_Z = \lambda^2 F_X + 2\lambda\xi F_{XY} + \xi^2 F_Y$$

elde edilir. F_{XY} ye X ve Y noktalarının **karışık alan formülü** adı verilir.

(5.2.3) ve (5.2.26) eşitliklerini (5.2.41) de yerine yazarsak

$$F_{XY} = \frac{1}{4} \oint \left([(h\mathbf{x} - \mathbf{u})e^{i\varphi}, (dh + ihd\varphi)(\mathbf{y} - \mathbf{p})e^{i\varphi}] + [(h\mathbf{y} - \mathbf{u})e^{i\varphi}, (dh + ihd\varphi)(\mathbf{x} - \mathbf{p})e^{i\varphi}] \right) d\varphi$$

olup, (5.2.29) ve (5.2.30) eşitlikleri kullanırsa

$$\begin{aligned} F_{XY} &= \frac{1}{4} \oint \{ ([h\mathbf{x} - \mathbf{u}, \mathbf{y} - \mathbf{p}] + [h\mathbf{y} - \mathbf{u}, \mathbf{x} - \mathbf{p}]) dh \\ &\quad + \frac{1}{2} [(h\mathbf{x} - \mathbf{u})(\bar{\mathbf{y}} - \bar{\mathbf{p}}) + (h\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{u}})(\mathbf{y} - \mathbf{p}) + (h\mathbf{y} - \mathbf{u})(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{p}}) + (h\bar{\mathbf{y}} - \bar{\mathbf{u}})(\mathbf{x} - \mathbf{p})] h d\varphi \} \\ &= \frac{1}{4} \oint \{ (hx_1y_2 - hx_1p_2 - u_1y_2 + u_1p_2 - hx_2y_1 + hx_2p_1 + u_2y_1 - u_2p_1 \\ &\quad + hx_2y_1 - hy_1p_2 - u_1x_2 + u_1p_2 - hx_1y_2 + hy_2p_1 + u_2x_1 - u_2p_1) dh \\ &\quad + \frac{1}{2} [2h(\mathbf{x}\bar{\mathbf{y}} + \bar{\mathbf{x}}\mathbf{y}) - h((\mathbf{x} + \mathbf{y})\bar{\mathbf{p}} + (\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{y}})\mathbf{p}) - (\mathbf{x} + \mathbf{y})\bar{\mathbf{u}} - (\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{y}})\mathbf{u} + 2\bar{\mathbf{u}}\bar{\mathbf{p}} + 2\bar{\mathbf{u}}\mathbf{p}] h d\varphi \} \end{aligned}$$

bulunur. X sabit bir nokta olduğundan

$$\begin{aligned}
 F_{xy} = & \frac{1}{2} \oint [(u_1 p_2 - u_2 p_1) dh + (u_1 p_1 + u_2 p_2) h d\phi] \\
 & + \frac{1}{4} \{ (x_1 + y_1) \oint (-h p_2 dh + u_2 dh) + (x_2 + y_2) \oint (h p_1 dh - u_1 dh) \\
 & + (\bar{x}\bar{y} + \bar{x}\bar{y}) \oint h^2 d\phi - \frac{1}{2} (\mathbf{x} + \mathbf{y}) \oint \bar{\mathbf{p}} h^2 d\phi - \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{y}}) \oint \mathbf{p} h^2 d\phi \\
 & - (x_1 + y_1) \oint u_1 h d\phi - (x_2 + y_2) \oint u_2 h d\phi \}
 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu son eşitlikte (5.2.32), (5.2.33), (5.2.35) ve (5.2.36) ifadeleri yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
 F_{xy} = F_o + & \frac{1}{4} (\bar{x}\bar{y} + \bar{x}\bar{y}) 2h^2(t_0) \pi v - \frac{1}{8} (\mathbf{x} + \mathbf{y}) 2h^2(t_0) \pi v \bar{s} - \frac{1}{8} (\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{y}}) 2h^2(t_0) \pi v s \\
 & - \frac{1}{4} (x_1 + y_1) \oint (p_1 h^2 d\phi + h p_2 dh - h du_2) - \frac{1}{4} (x_2 + y_2) \oint (p_2 h^2 d\phi - h p_1 dh + h du_1) \\
 & + \frac{1}{4} (x_1 + y_1) \oint (-h p_2 dh + u_2 dh) + \frac{1}{4} (x_2 + y_2) \oint (h p_1 dh - u_1 dh)
 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifadeyi düzenler ve (5.2.37) yi göz önüne alırsak

$$(5.2.43) \quad F_{xy} = F_o + \frac{h^2(t_0) \pi v}{2} [\bar{x}\bar{y} + \bar{x}\bar{y} - (\mathbf{x} + \mathbf{y}) \bar{s} - (\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{y}}) s] + \frac{1}{4} [(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \bar{\mu} + (\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{y}}) \mu]$$

bulunur. (5.2.43) formülü 1-parametrelili kapalı düzlemsel homotetik hareketler için **karışık alan formülüdür.**

$h=1$ özel durumunda $\mu = \bar{\mu} = 0$ olacağından (5.2.43) karışık alan formülünden [3] tarafından verilen 1-parametrelili kapalı düzlemsel hareketler için

$$F_{xy} = F_o + \frac{\pi v}{2} (\bar{x}\bar{y} + \bar{x}\bar{y} - (\mathbf{x} + \mathbf{y}) \bar{s} - (\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{y}}) s)$$

karışık alan formülü bulunur.

(5.2.43) de Y noktası yerine X noktası alınırsa

$$F_{xx} = F_x$$

elde edilir.

Şimdi F_{xy} alanını F_x ve F_y alanları yardımıyla ifade edelim.

(5.2.38) ve (5.2.43) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
F_X - 2F_{XY} + F_Y &= F_O + h^2(t_0)\pi v(\mathbf{x}\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\bar{\mathbf{s}} - \bar{\mathbf{x}}\mathbf{s}) + \frac{1}{2}(\mathbf{x}\bar{\boldsymbol{\mu}} + \bar{\mathbf{x}}\boldsymbol{\mu}) \\
&\quad - 2F_O - h^2(t_0)\pi v[\mathbf{x}\bar{\mathbf{y}} + \bar{\mathbf{x}}\mathbf{y} - (\mathbf{x} + \mathbf{y})\bar{\mathbf{s}} - (\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{y}})\mathbf{s}] \\
&\quad - \frac{1}{2}[(\mathbf{x} + \mathbf{y})\bar{\boldsymbol{\mu}} + (\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{y}})\boldsymbol{\mu}] \\
&\quad + F_O + h^2(t_0)\pi v(\mathbf{y}\bar{\mathbf{y}} - \mathbf{y}\bar{\mathbf{s}} - \bar{\mathbf{y}}\mathbf{s}) + \frac{1}{2}(\mathbf{y}\bar{\boldsymbol{\mu}} + \bar{\mathbf{y}}\boldsymbol{\mu}) \\
&= h^2(t_0)\pi v(\mathbf{x}\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\bar{\mathbf{y}} - \bar{\mathbf{x}}\mathbf{y} + \mathbf{y}\bar{\mathbf{y}}) \\
&= h^2(t_0)\pi v(\mathbf{x} - \mathbf{y})(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{y}}) \\
&= h^2(t_0)\pi v(\mathbf{x} - \mathbf{y})(\overline{\mathbf{x} - \mathbf{y}})
\end{aligned}$$

bulunur. X ve Y noktaları arasındaki uzaklığa d denirse

$$F_X - 2F_{XY} + F_Y = h^2(t_0)\pi v d^2$$

elde edilir. Buradan

$$(5.2.44) \quad F_{XY} = \frac{1}{2}(F_X + F_Y - h^2(t_0)\pi v d^2)$$

bulunur.

(5.2.39) ve (5.2.44) ifadeleri (5.2.42) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
F_Z &= (1 - \xi)^2 F_X + 2(1 - \xi)\xi \left[\frac{1}{2}(F_X + F_Y - h^2(t_0)\pi v d^2) \right] + \xi^2 F_Y \\
&= [(1 - \xi)^2 + (1 - \xi)\xi] F_X + [(1 - \xi)\xi + \xi^2] F_Y - (1 - \xi)\xi h^2(t_0)\pi v d^2
\end{aligned}$$

veya

$$(5.2.45) \quad F_Z = \lambda F_X + \xi F_Y - \lambda \xi h^2(t_0)\pi v d^2$$

elde edilir.

5.2.4. Kapalı Homotetik Hareketler İçin Holditch Teoremi

TEOREM 5.2.7.

k , E' -düzleminde bir oval (yani kapalı bir konveks eğri) ve $\overline{XY}$ de k nın sabit d uzunluklu kirişi olsun. Bu kirişin Z noktası tarafından a ve b uzunluklu iki parçaya bölündüğünü kabul edelim. E/E' kapalı düzlemsel homotetik hareketi esnasında, eğer $\overline{XY}$ kirişi k ovali etrafında tam bir dönme yaparsa, k ovali ile Z noktası tarafından

çizilen kapalı eğri arasındaki alan a , b ve h parametrelerine, yani Z noktasının $\overline{XY}$ kirişi üzerindeki seçilişine ve hareketin homotetik oranına, bağlıdır.

İspat:

Kabul edelim ki $\overline{XY}$ reel eksenin yönünü göstere. Bu durumda

$$(5.2.46) \quad d = y - x, \quad a = z - x = \xi d, \quad b = y - z = \lambda d, \quad a + b = d$$

eşitlikleri elde edilir.

Z noktasının yörünge alanı için dönme sayısı $\nu = 1$ olduğundan (5.2.45) den

$$F_z = \frac{b}{d} F_x + \frac{a}{d} F_y - \frac{b}{d} \frac{a}{d} h^2(t_0) \pi d^2$$

veya

$$(5.2.47) \quad F_z = \frac{1}{d} (b F_x + a F_y) - h^2(t_0) \pi ab$$

bulunur.

Ayrıca, X ve Y noktaları aynı k ovalini çizdiğinden $F_x = F_y$ dir. Bu takdirde (5.2.47) den

$$\begin{aligned} F_z &= \frac{1}{d} (b + a) F_x - h^2(t_0) \pi ab \\ &= F_x - h^2(t_0) \pi ab \end{aligned}$$

elde edilir.

k ovali ile Z noktasının çizdiği kapalı eğri arasındaki alan F ile gösterilirse

$$F = F_x - F_z$$

olduğundan

$$F = h^2(t_0) \pi ab$$

bulunur.

SONUÇ 5.2.4. $h = 1$ özel durumunda [4] de 1-parametrel düzlemsel hareketler için verilen

$$F = \pi ab$$

bağıntısı elde edilir.

6. TARTIŞMA

[7] de Öklid düzleminde 1-parametrelili homotetik hareketlerde incelenmiş olan hızlar ve ivmeler, kompleks düzlemde 1-parametrelili homotetik hareketler altında incelenmiştir. Öklid düzleminde hızlar ve ivmeler ile ilgili elde edilen bağıntıların kompleks düzlemde de sağlandığı görülmüştür. Ayrıca Öklid düzleminde noktanın koordinatlarına bağlı olarak ifade edilen sonuçlar kompleks düzlemde sadece noktaya bağlı olarak ifade edilmiş ve böylece hızlar ve ivmelerin ifadeleri açık ve daha anlaşılır şekilde elde edilmiştir. Daha sonra [8] de Öklid düzleminde 1-parametrelili kapalı homotetik hareketlerde verilen bir noktanın Steiner alan formülünün kompleks düzlemde 1-parametrelili kapalı homotetik hareketlerdeki ifadesi elde edilmiştir.

Diğer taraftan, [3] te kompleks düzlemde 1-parametrelili hareketlerde ifade edilen hareketli düzlemin farklı iki sabit noktasının karışık alan formülü, kompleks düzlemde 1-parametrelili kapalı homotetik hareketlere genelleştirilmiştir. Özel olarak homotetik oranının “1” alınması durumunda [3] tarafından verilen formül elde edilmiştir. Bundan başka karışık alan formülü noktaların yörünge alanları cinsinden ifade edilmiş ve kompleks düzlemde 1-parametrelili kapalı homotetik hareketlerde Holditch teoremi ispatlanmıştır. Bundan başka [5] te homotetik oranına bağlı olarak ifade edilemeyen teorem ve sonuçlar çalışmamızda homotetik oranına bağlı olarak ifade edilmiştir.

7. SONUÇ VE ÖNERİLER

Kompleks düzlemde 1-parametrelî hareketler ve 1-parametrelî homotetik hareketler altında incelenen hızlar ve ivmeler ile ilgili elde edilen sonuçlar Bulgular bölümünde ifade edilmiştir. Ayrıca 1-parametrelî kapalı düzlemsel homotetik hareketlerde ifade edilen karışık alan formülü ve bu alan yardımıyla elde edilen sonuçlar Bulgular bölümünde verilmiştir.

Benzer çalışmalarda, 1-parametrelî kapalı düzlemsel hareketlerde elde edilen bir noktanın yörünge alan formülü yerine açık hareketlerde, yani kapalı olmayan hareketlerde bir doğru parçası tarafından taranan alan formülü hesaplanabilir.



8. KAYNAKLAR

- [1] **HACISALİHOĞLU, H. H.**, 1971, On the Rolling of one Curve or Surfaces upon another, Royal Irish Academy, Vol. 71, 13-17.
- [2] **MÜLLER, H. R.**, 1963, Kinematik Dersleri, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, Ankara, 287s.
- [3] **MÜLLER, H. R.**, 1978, Verallgemeinerung einer Formel von Steiner, Abh.d. Brschw. Wiss.Ges.Bd. XXIX, 107-113.
- [4] **MÜLLER, H. R.**, 1978, Über Trägheitsmomente bei Steinerscher Massenbelegung, Abh.d.Brschw. Wiss.Ges.Bd. XXIX, 115-119.
- [5] **SIVRIDAG, A. I., KELES, S.**, 1992, On the closed planar homothetic motions and the orbital areas, Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Series A V.41, 93-98
- [6] **SPIVAK, M.**, 1965, Calculus on Manifolds, W. A. Benjamin, New York.
- [7] **TUTAR, A.**, Düzlemsel Kinematikte Homotetik Hareketler İçin Holditch Teoremi, 1989, Yüksek Lisans Tezi, İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Malatya, 40s.
- [8] **TUTAR, A., KURUOĞLU, N.**, 1999, The Steiner formula and the Holditch Theorem for the homothetic motions on the planar kinematics, Mechanism and Machine Theory 34, 1-6.

9. ÖZGEÇMİŞ

1976 yılında Kadirli’de doğdu. İlköğrenimini Kadirli Cengiz Topel ilkokulunda, ortaöğrenimini K.Maraş Çukurova Elektrik Anadolu Lisesinde tamamladı. 1994 yılında Ondokuz Mayıs Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Bölümünde yüksek öğrenimine başladı ve 1998 yılında mezun oldu. Aynı yıl Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında Yüksek lisans öğrenimine ve Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde Araştırma Görevlisi olarak göreve başladı. Halen bu görevini sürdürmektedir.

MUSTAFA DÜLDÜL

