

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

96308

3-BOYUTLU REEL UZAYDA BİR CİSMİN HAREKETİNİN
KİNEMATİK DİFERENSİYEL GEOMETRİSİ

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMAN
TEKEZİ

MUSTAFA YENEROĞLU

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

96308

ELAZIĞ
2000

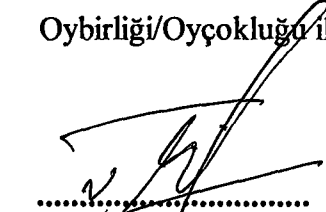
T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

3-BOYUTLU REEL UZAYDA BİR CİSMİN HAREKETİNİN
KİNEMATİK DİFERENSİYEL GEOMETRİSİ

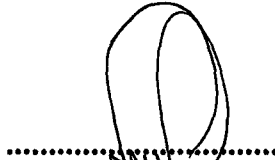
MUSTAFA YENEROĞLU

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu Tez, .06/10/2000. Tarihinde, Aşağıda Belirtilen Jüri Tarafından
Oybirliği/Oyçokluğu ile Başarılı/Başarısız Olarak Değerlendirilmiştir.


Danışman

Yrd.Doç.Dr. Vedat ASİL


Üye

Doç.Dr.Mahmut ERGÜT

.....
Üye

Doç.Dr.Rıfat GÜNEŞ

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

3-BOYUTLU REEL UZAYDA BİR CİSMİN HAREKETİNİN KİNEMATİK DİFERENSİYEL GEOMETRİSİ

Mustafa YENEROĞLU

Fırat Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

2000, Sayfa: 45

Bu çalışma üç bölüm olarak düzenlenmiştir.

Birinci bölümde; Lie operatörü, IR^n de uzaklık fonksiyonu, katı hareket, dönme, öteleme, ve düzlemsel hareket gibi temel tanımlar verildi.

İkinci bölümde; koordinat dönüşümleri, hareketler, homojen dönüşümler kavramları verildi. Ayrıca IR^3 de küresel hareketler incelendi ve küresel harekette koordinat dönüşümleri, dönme matrisinin karakteristik vektörleri, Hamilton Cayley formülü, Rodrigues denklemi, Euler parametreleri araştırıldı.

Katı harekette koordinat dönüşümleri, vida eksen, Rodrigues denklemi ve vida matrisi incelendi.

Üçüncü bölümde; bir hareketin cebirsel özellikleri araştırıldı. Ayrıca bir hareketin normu, türevi, matris grupları ve tanjant operatörü verildi.

ANAHTAR KELİMELEER: Hareket, Küresel Hareket, Katı Hareket, Vida Hareketi, Kinematik, Kuadratik Form, Lie Cebiri.

SUMMARY

Masters Thesis

KINEMATIC DIFFERENTIAL GEOMETRY OF A BODY MOTION IN THE 3-DIMENSIONAL REAL SPACE

Mustafa YENEROĞLU

Firat University
Graduate School of Science and Technology
Department of Mathematics

2000, Page: 45

This study has been arranged in three chapters.

In the first chapter; the fundamental definitions as Lie operator, distance function in the $\mathbb{R}^n$, rigid motion, rotation, translation and planar displacement are given.

In the second chapter; the conceptions the coordinate transformations, motions, homogeneous transformations are given. Further spherical motions are examined in the $\mathbb{R}^3$ and the coordinate transformations, the characteristic vectors of rotation matrix, the Hamilton Cayley formula, the Rodrigues equation, Euler parameters are given. In addition curvatures of surface obtained from rotation transformations are investigated for spherical motions.

The coordinate transformations, the screw axis, the Rodrigues equation and the screw matrix are examined for spatial motions.

In the three chapter; the algebraic properties a motion are investigated. In addition, we have given the norm, the matrix groups, the derivative of a motion and tangent operators.

Keywords: Motion, Spherical Motion, Spatial Motion, Screw Motion, Kinematic, Lie algebra, Quadratic Form.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın hazırlanmasında gerekli bütün imkanları sağlayarak bana yardımcı olan, her zaman yakın ilgi ve imkanlarını esirgemeyen, çok kıymetli Hocam; Yrd. Doç. Dr. Vedat ASIL'e ve Geometri Ana Bilim Dalı Başkanı sayın Hocam Doç.Dr. Mahmut ERGÜT'e şükranlarımı sunmayı bir borç bilir, saygılar sunarım.

Mustafa YENEROĞLU



İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET.....	I
SUMMARY.....	II
TEŞEKKÜR.....	III
İÇİNDEKİLER.....	IV
SİMGELER LİSTESİ.....	VI

BİRİNCİ BÖLÜM

1.1. TEMEL TANIM VE TEOREMLER.....	1
------------------------------------	---

İKİNCİ BÖLÜM

ÜÇ BOYUTLU UZAYDA HAREKET.....	8
2.1. KOORDİNAT DÖNÜŞÜMLERİ.....	8
2.2. HAREKET.....	8
2.3. REFERANS ÇATILARI ARASINDAKİ DÖNÜŞÜM.....	10
2.4. HOMOJEN DÖNÜŞÜMLER.....	11
2.5. KÜRESEL HAREKET.....	12
KOORDİNAT DÖNÜŞÜMÜ.....	12
DÖNME MATRİSİNİN KARAKTERİSTİK VEKTÖRLERİ.....	13
HAMILTON CAYLEY FORMÜLÜ.....	14
RODRIGUES DENKLEMİ.....	16
EULER PARAMETRELERİ.....	17
KÜRESEL HAREKETTE DÖNME DÖNÜŞÜMÜNDEN ELDE EDİLEN YÜZEYİN EĞRİLİKLERİ.....	18
2.6. KATI HAREKET.....	21
KOORDİNAT DÖNÜŞÜMÜ.....	21
KATI HAREKETİN VİDA EKSENİ.....	22

RODRIGUES DENKLEMİ.....	23
VİDA HAREKETİNİN DÖNÜŞÜMÜNE KARŞILIK GELEN MATRİS.....	24

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

HAREKETİN CEBİRSEL ÖZELLİKLERİ.....	27
3.1. HAREKETLER İÇİN NORM.....	27
3.2. MATRİS İŞLEMLERİNİN SÜREKLİLİĞİ.....	30
3.3. MATRİS GRUPLARI.....	30
3.4. BİR HAREKETİN TÜREVİ.....	32
3.5. TANJANT OPERATÖRÜ.....	33
3.6. $SO(n)$ nin TANJANT OPERATÖRLERİ.....	34
3.7. $H(n)$ nin TANJANT OPERATÖRLERİ.....	35
KAYNAKLAR.....	38

SİMGELER LİSTESİ

$\ \cdot \ $	: Norm
$\wedge$	: Vektörel çarpım
$[,]$	: Lie parentezi
$\in$	: Elaman
$\forall$	: Her
E^n	: n-boyutlu Öklid uzayı
$GL(n)$	: nxn, matrislerin grubu
$SO(n)$	: nxn, dönme matrislerin grubu
$H(n)$	: Homojen dönüşümlerin grubu
$\langle, \rangle$	: İç çarpım fonksiyonu
∇	: Gradient fonksiyonu
$\dot{T}$	: T nin noktasal türevi

1.BÖLÜM

TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER

II ve III cü bölümlerin daha iyi anlaşılması için bu bölümde bazı temel tanımlar verilecektir.

Tanım 1.1 (Ortogonal Matris): Çarpma İşlemine göre tersi bulunan ve tersi transpozuna eşit olan matrise *ortogonal matris* denir, yani $A^T=A^{-1}$ ise $A A^T= A^T A=I$ dir, [6].

Tanım 1.2 (Lineer Dönüşüm): V ve W aynı $\mathfrak{I}$ cismi üzerinde iki vektör uzayı olsun. Bir $L:V \rightarrow W$ dönüşümü için aşağıdaki aksiyomlar sağlanıyorsa bu dönüşüme *linear* dir denir, [6].

- i) $L(\alpha+\beta)=L(\alpha)+L(\beta)$, $\forall \alpha, \beta \in V$
- ii) $L(a\alpha) = aL(\alpha)$ $\forall a \in \mathfrak{I}$.

Tanım 1.3 (Projektif Uzay): $\mathfrak{I}$ üzerinde bir vektör uzayı V ve V deki sıfırdan farklı vektörlerin cümlesi $V'=V-\{0\}$ olsun. $\alpha, \beta \in V$ için $\beta=c\alpha$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir $c \in \mathfrak{I}$ skaları var ise $\alpha \approx \beta$ yazılır. Bu “ $\approx$ ” bağıntı V de bir denklik bağıntısıdır. Bu şekildeki tüm denklik sınıflarının cümlesine V ye karşılık gelen *projektif uzay* adı verilir. Eğer $\text{boy} V=n+1$ ise $\text{boy} P(V)=n$ olarak tanımlanır. Hatta $P(\mathfrak{I}^{n+1})$ uzayına $\mathfrak{I}^{n+1}$ üzerinde n -boyutlu standart projektif uzay denir ve $P^n(\mathfrak{I})$ ile gösterilir, [6].

Tanım 1.4 (Karakteristik Değer ve Karakteristik Vektör): Eğer $A:V \rightarrow V$ lineer dönüşümü için,

$$A(\alpha)=\lambda \alpha , \quad \alpha \in V , \lambda \in \mathfrak{I} ,$$

olaçak şekilde bir $\alpha \neq 0$ vektörü var ise λ sayısına A nın *karakteristik değeri* ve α vektörüne de A nın λ karakteristik değerine karşılık gelen *karakteristik vektör* denir, [6].

Tanım 1.5 (Karakteristik Polinom): $\mathfrak{F}$ üzerinde bir n -boyutlu vektör uzayı V olsun. $V \rightarrow V$ lineer dönüşümü bir $A \in \mathfrak{F}_n$ matrisine karşılık gelir. A matrisi üzerinde tanımlanan

$$P_A(x) = \det(xI_n - A) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$$

polinomuna bu lineer dönüşümünün ya da aynı şey demek olan A matrisinin *karakteristik polinomu* ve $P_A(x)=0$ denkleminde A nın *karakteristik denklemi* denir, [6].

Tanım 1.6 (Anti-Simetrik Matris): Bir A reel matrisi için $A^T = -A$ ise A matrisine *anti-simetrik matris* denir, [6].

Tanım 1.7 (Kuadratik Form): $\mathfrak{F}$ üzerindeki bir V vektör uzayı üzerinde bir f bilinear formu için $g(x) = f(x, x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j$ şeklinde tanımlanan g fonksiyonuna V üzerinde f ye göre bir *kuadratik form* adı verilir, [6].

Tanım 1.8 (Kuadratik Yüzey): Üç boyutlu reel uzayda bir noktanın koordinatları x, y, z olsun. x, y ve z ye göre ikinci dereceden genel bir denklem

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2mx + 2ny + 2pz + q = 0$$

biçimindedir. Üç boyutlu uzayda koordinatları bu denklemi sağlayan bütün noktaların geometrik yerine bir *kuadratik yüzey* denir, [6].

Teorem 1.1 (Schwartz Eşitsizliği): Bir V iç çarpım uzayında $\forall x, y \in V$ için

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

Schwartz eşitsizliği vardır, [6].

Tanım 1.9 (Topolojik manifold): M bir topolojik manifold olsun. M için aşağıdaki önermeler doğru ise M ye bir n -boyutlu topolojik manifold denir, [8].

- 1) M bir Hausdorff uzayıdır.
- 2) M nin her bir açık alt cümlesi E^n e veya E^n nin bir açık alt cümlesine homeomorftur.
- 3) M sayılabilir çoklukta açık cümlelerle örtülebilir.

Tanım 1.10 (Diferensiyellenebilir Yapı): n -boyutlu bir M topolojik manifoldunun bir atlası $S = \{(\Psi_\alpha, W_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ olsun. Eğer S atlası için $W_\alpha \cap W_\beta \neq \emptyset$ olmak üzere $\forall \alpha, \beta \in A$ karşılık $\phi_{\alpha\beta}$ ve $\phi_{\beta\alpha}$ fonksiyonları C^k sınıfından diferensiyellenebilir iseler S ye C sınıfından *diferensiyellenebilirdir* denir. S atlası M üzerinde C^k sınıfından olduğu zaman S ye M üzerinde C^k sınıfından *diferensiyellenebilir yapı* adı verilir, [8].

Tanım 1.11 (Diferensiyellenebilir Manifold): M n -boyutlu topolojik manifold olsun. M üzerinde C^k sınıfından bir diferensiyellenebilir yapı tanımlanabilirse M ye C^k sınıfından *diferensiyellenebilir manifold* denir, [8].

Tanım 1.12 (İmmersiyon): M ve $\bar{M}$ birer C^∞ manifold ve $f: M \rightarrow \bar{M}$ bir C^∞ fonksiyonu olsun. Eğer f nin f_* Jakobian matrisi $\forall P \in M$ noktasında regüler ise f ye M den $\bar{M}$ içine bir immersiyon denir, [8].

Tanım 1.13 (Hiperüzey): N bir C^∞ $(n-1)$ manifold olsun. $f: N \rightarrow E^n$ fonksiyonu bir immersiyon ise $f(N) = M$ manifolduna E^n nin bir *hiperüzeyi* denir, [8].

Tanım 1.14 (Gauss Eğriliği): $M \subset E^3$ bir yüzey ve $\{X, Y\} \subset \chi(M)$ lineer bağımsız olmak üzere $Z = X \wedge Y$ verilsin. O zaman,

$$K: M \rightarrow \mathbb{R}$$

$$P \rightarrow K(P) = \frac{\det(z, D_x z, D_y z)}{\|z\|^4} \quad (1.1.1)$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona M nin *Gauss eğrilik fonksiyonu* ve $K(P)$ değerine de M nin P noktasında ki *Gauss eğriliği* denir, [8].

Tanım 1.15 (Ortalama Eğrilik): $M \subset E^3$ bir yüzey ve $\{X, Y\} \subset \chi(M)$ lineer bağımsız olmak üzere $Z = X \wedge Y$ verilsin. O zaman,

$$H: M \rightarrow \mathbb{R}$$

$$P \rightarrow H(P) = - \frac{\det(z, x, D_y z) + \det(z, y, D_x z)}{\|z\|^3} \quad (1.1.2)$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona M nin *ortalama eğrilik fonksiyonu* ve $H(P)$ değerine de M nin P noktasında ki *ortalama eğriliği* denir, [8].

Tanım 1.16 (Lie Grubu): Bir M diferensiyellenebilir manifoldu ve bir G grubu verilmiş olsun. Eğer aşağıdaki Aksiyomlar sağlanırsa (M, G) ikilisine bir *Lie grubu* denir, [8].

$L_1)$ M nin noktaları G nin elemanları ile çakışır.

$L_2)$ $M \times M \rightarrow M$

$(a, b) \rightarrow ab^{-1}$

işlemi her yerde diferensiyellenebilirdir.

Tanım 1.17 (Lie Operatörü): V bir K cismi üzerinde vektör uzayı olsun.

$$[,]: V \times V \rightarrow V$$

$$(X, Y) \rightarrow [,](X, Y) = [X, Y]$$

dönüşümü için aşağıdaki aksiyomlar sağlanıyorsa bu dönüşüme V üstünde bir Lie operatörü denir, [8].

1) Bilineer

2) Alterne ($\forall X, Y \in V$ için $[X, Y] = -[Y, X]$)

3) $\forall X, Y, Z \in V$ için

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

Tanım 1.18 (IRⁿ de Uzaklık Fonksiyonu): n-boyutlu reel vektör uzayı IRⁿ de bir $d: IR^n \times IR^n \rightarrow IR$ fonksiyonu $\forall x, y \in IR^n$ için

$$d(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}$$

biçiminde tanımlansın. Burada x_i ve y_i sırası ile x, y vektörlerinin bileşenlerini göstermektedir. Bu d fonksiyonuna IRⁿ de *uzaklık fonksiyonu* denir, [7].

Tanım 1.19 (Öklid Metriği ve Öklid Uzayı): $d: IR^n \times IR^n \rightarrow IR$

$$(x, y) \rightarrow d(x, y) = \|x - y\|$$

olarak tanımlanan uzaklık fonksiyonuna *Öklid Metriği* denir. (IRⁿ, d) ikilisinden ibaret olan metrik uzaya *n-boyutlu Öklid uzayı* adı verilir ve E^n ile gösterilir, [7].

Tanım 1.20 (Katı Hareket): E^n de d uzaklığını değişmez bırakan bir R fonksiyonuna E^n de bir *katı hareket* denir. Yani $R: E^n \rightarrow E^n$ fonksiyonu için

$$d(R(x), R(y)) = d(x, y), \quad \forall x, y \in E^n$$

şeklindedir, [7].

Tanım 1.21 (Dönme): $R_o: E^n \rightarrow E^n$ dönüşümü $0 \in E^n$ için $R_o(0) = 0$ ve $x \neq 0$ olmak üzere $\forall x \in E^n$ için $x \rightarrow R_o(x)$ biçiminde tanımlanan bir hareket olsun. R_o hareketine 0 noktası etrafında E^n nin bir dönme hareketi denir, [7].

Tanım 1.22 (Öteleme): $T: E^n \rightarrow E^n$ dönüşümü $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n$ için

$$T(x) = (x_1 + t_1, x_2 + t_2, \dots, x_n + t_n), \quad t_i \in IR, \quad 1 \leq i \leq n$$

ise T ye E^n de bir *öteleme* denir, [7].

Tanım 1.23 (Yansıma): g düzleminde herhangi bir doğru olmak üzere g nin her noktasını kendisine ve düzlemin diğer her bir noktasını g ye göre simetriği olan noktaya dönüştüren bir dönüşüme *yansıma* denir, [7].

Tanım 1.24 (Süreklilik): V iç çarpım uzayı, $\| \cdot \| : V \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $a \in V$ olsun. Her $\epsilon > 0$ için en az bir $\delta > 0$ vardır öyleki $\|x - a\| < \delta \Rightarrow \|x\| - \|a\| < \epsilon$ olacak şekilde $\| \cdot \|$ fonksiyonu a noktasında süreklidir, [10].

Tanım 1.25 (Yakınsaklık): (s_n) bir reel sayı dizisi ve $s \in \mathbb{R}$ olsun. Her $\epsilon > 0$ için $n > n_0$ olduğunda $|s_n - s| < \epsilon$ kalacak şekilde ϵ na bağlı bir n_0 sayısı bulunabiliyorsa (s_n) dizisi s ye *yakınsaktır* denir, [2].

Tanım 1.26 (Lineer Uzay): L boş olmayan bir cümle ve $\mathfrak{I}$ de bir cisim olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa L ye $\mathfrak{I}$ cismi üzerinde *lineer uzay* denir, [10].

- A) L , $+$ işlemine göre değişmeli gruptur. Yani
- 1) $\forall x, y \in L$ için $x + y \in L$ dir (kapalılık özelliği)
 - 2) $\forall x, y, z \in L$ için $x + (y + z) = (x + y) + z$ dir (birleşme özelliği)
 - 3) $\forall x \in L$ için $x + \theta = \theta + x$ olacak şekilde $\theta \in L$ vardır (birim eleman).
 - 4) $\forall x \in L$ için $x + (-x) = (-x) + x = \theta$ olacak şekilde $-x \in L$ vardır (ters eleman)
 - 5) $\forall x, y \in L$ için $x + y = y + x$ dir (değişme özelliği)
- B) $\forall x, y \in L$ ve $\forall \alpha, \beta \in \mathfrak{I}$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır.
- 1) $\alpha \cdot x \in L$ dir.
 - 2) $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$ dir.
 - 3) $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$
 - 4) $(\alpha \beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta x)$
 - 5) $1 \cdot x = x$ dir. Burada 1 , $\mathfrak{I}$ nin birim elemanıdır.

Tanım 1.27 (İnvaryant Altuzay): V bir vektör uzayı ve W da V nin bir alt vektör uzayı olsun . bir $A: V \rightarrow V$ lineer dönüşümünde eğer $\forall x \in W$ için $A(x) \in W$ oluyorsa W ya V nin bir *invaryant altuzayı* denir, [6].

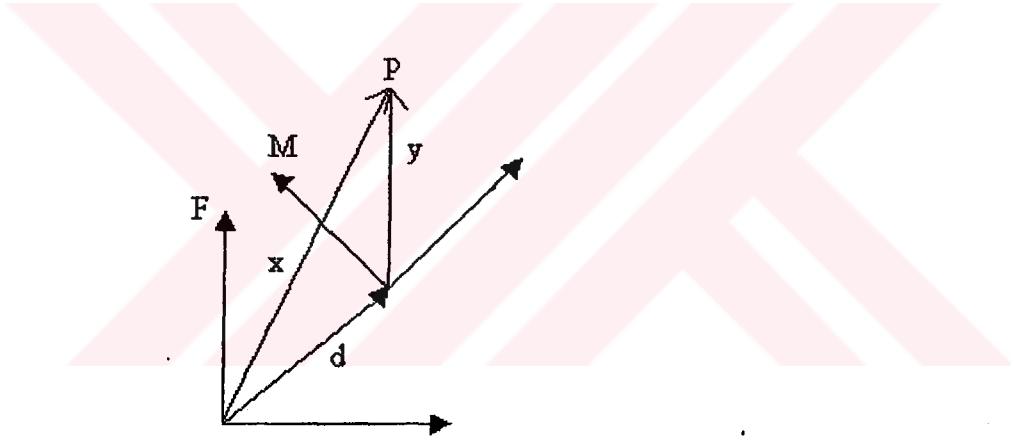
Tanım 1.28 (Düzlemsel Hareket): P noktasının M hareketli çatısına göre yer vektörü $\bar{y}$ ise F sabit çatısına göre koordinatları, o zaman

$$X = AY + D \quad (1.1.3)$$

denklemleri elde edilir. Burada

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

dir. Bu durumda (1.1.3) dönüşümüne bir *düzlemsel hareket* denir, şekil(1.1.1), [11].



Şekil 1.1.1

2.BÖLÜM

3-BOYUTLU REEL UZAYDA HAREKETLER

Bu bölüm üç altbölüm olarak düzenlenmiştir. Birinci alt bölümde hareketler ile ilgili bazı kavramlar incelenmiştir. İkinci altbölümde küresel hareketlere ayrılmıştır. Üçüncü altbölümde ise katı hareketler ele alınmıştır.

2.1. Koordinat dönüşümleri

Hareketli bir cismin konumunu hareketli koordinat çatısındaki yere göre inceleyeceğiz. Bunun için bir F sabit koordinat çatısı seçildiğinde hareketli cisim bir M koordinat çatısına sahiptir ki bu anlamda M hareketli çatı olur. O halde F den M ye koordinat dönüşümü $H: F \rightarrow M$ şeklinde tanımlanır. Bu koordinat dönüşümü,

$$X = AY + D \quad (2.1.1)$$

şeklindedir. Burada $\vec{y}$ bir noktanın M ye göre ve $\vec{x}$ de aynı noktanın F ye göre yer vektörleridir. Ayrıca X ve Y de $\vec{x}, \vec{y}$ vektörlerinin bileşenlerinden oluşmuş kolon matrisleridir. Eğer hareketli cisim n boyutluysa, bu taktirde A nxn tipinde bir matris ve d de n boyutlu bir vektördür. Burada ki A ortogonal bir matrisidir, yani

$$A^T A = A A^T = I_n \quad (2.1.2)$$

dır. (2.1.2) ifadesinin determinantı hesaplanırsa

$$\det A = \pm 1$$

bulunur.

2.2. Hareket

n-boyutlu reel uzayda bir hareketi $H = (A, D)$ matris vektör çiftiyle tanımlarız.

Burada A, nxn, tipinde bir dönme matrisi, D de $\vec{d}$ n-boyutlu öteleme vektörünün kolon

matrisidir. Özel olarak $R=(A, 0)$ ve $T=(I_n, D)$ seçilirse R ye sadece dönme, T ye de sadece öteleme hareketi denir.

Bir bileşke hareketi düzlemde şu şekilde tanımlanabilir: $H_1:F \rightarrow M_1$ ve $H_2:M_1 \rightarrow M_2$ iki hareket ise bileşke hareket $H=H_1 H_2 : F \rightarrow M_2$ ye olur. (2.1.1) den $H_1=(A_1, D_1)$, $H_2=(A_2, D_2)$ ise H bileşke hareket

$$X = A_1 A_2 Y + A_1 D_2 + D_1 \quad (2.2.1)$$

biçiminde formülüze olur. Böylece $H = H_1 H_2 : F \rightarrow M_2$ bileşke hareket

$$H = H_1 H_2 = (A_1, D_1) (A_2, D_2) = (A_1 A_2, A_1 D_2 + D_1) \quad (2.2.2)$$

olarak tanımlanır. Burada D_1 ve D_2 , sırası ile $\vec{d}_1$ ve $\vec{d}_2$ öteleme vektörlerinin bileşenlerinden oluşan kolon matrisleridir.

H hareketinin H^{-1} ters hareketi mevcut olup,

$$Y = A^T X - A^T D \quad (2.2.3)$$

Şeklinde dir. Burada $H^{-1} = (A^T, -A^T D)$ dir. Ayrıca $HH^{-1} = H^{-1}H = I_n$ olduğundan $I_n = (I_{n-1}, 0)$ birim harekettir.

IR^n uzayında hareketlerin cümlesi aşağıdaki özellikleri sağlar, yani bir cebrik grup oluştururlar.

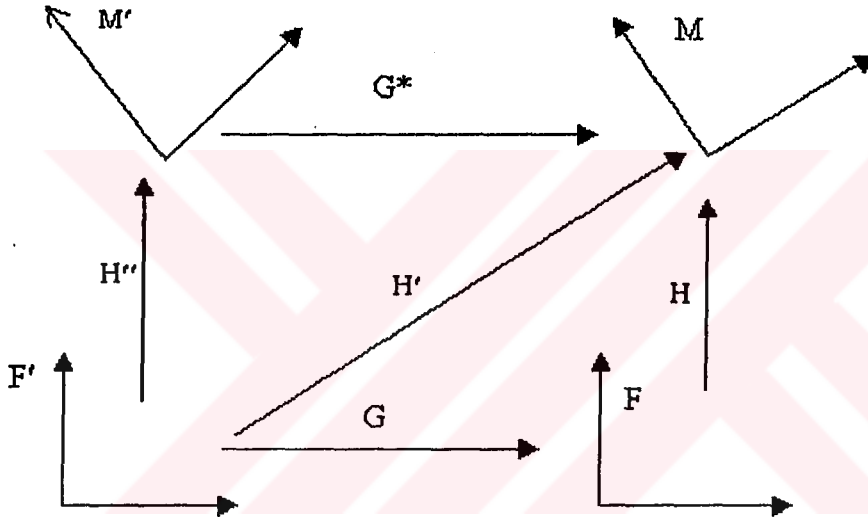
- 1) H_1, H_2 gibi iki hareketin bileşkesi yine bir harekettir,
- 2) $I_n = (I_{n-1}, 0)$ hareketi bileşke işlemine göre birim elemandır,
- 3) $\forall H = (A, D)$ hareketinin tersi mevcut olup, bir harekettir. $H = (A, D)$ nin tersi $H^{-1} = (A^T, -A^T D)$ dir.

Böylece aşağıdaki yardımcı teoremi verebiliriz:

Yardımcı Teorem 2.2.1: Hareketlerin cümlesi n -boyutlu uzayda bir $SE(n)$ öklid grubu oluştururlar, [11].

2.3. Referans Çatıları Arasındaki Dönüşüm

Kabul edelim ki düzlemde F den başka diğer bir sabit çatı F' olsun. Buna göre cismin hareketini inceleyelim. $G: F' \rightarrow F$ şeklinde tanımlayalım. Ayrıca F sabit çatısı ile M hareketli çatısı arasındaki hareket $H: F \rightarrow M$ dir. Bu taktirde $H': F' \rightarrow M$ hareketini göz önüne alırsak $H' = GH$ bileşke hareketi elde edilir. Bu da gösterir ki; başlangıcı F' olan H' ve başlangıcı F olan H farklı hareketlerdir. Bu nedenle hareket değiştirildiğinde sabit referans çatı da değişir.



Şekil (2.3.1)

Sabit çatılar arasında göz önüne aldığımız hareketi, hareketli çatılar arsında da ele alalım. O halde M den başka bir hareketli çatı M' alınırsa bu taktirde $(G^*)^{-1}: M \rightarrow M'$ hareketini tanımlayabiliriz. Buradan hareketli cismin M' çatısındaki konumu elde edilirse, $H'': F' \rightarrow M'$ bileşke hareket $H'' = GH(G^*)^{-1}$ ile tanımlanır. Sonuç olarak; $H': F' \rightarrow M$ ve $H'': F' \rightarrow M'$ hareketlerinde $H: F \rightarrow M$ hareketi korunur, [3].

2.4 Homojen Dönüşümler

Bir hareket bir lineer dönüşüm değildir. Gerçekten bir $\vec{d}$ ötelemesiyle $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ gibi iki vektörün toplamının dönüşümü

$$T(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x} + \vec{y} + \vec{d}$$

olup, her vektör ayrı, ayrı dönüşüme tabii tutulduğunda

$$T(\vec{x}) + T(\vec{y}) = \vec{x} + \vec{y} + 2\vec{d}$$

olur. $\mathbb{R}^n$ hareketleri $n \times n$ matris dönüşümleriyle ifade edilemez. Aksi taktirde, $\mathbb{R}^{n+1}$ de $h: x_{n+1} = 1$, n -boyutlu hiperdüzlem tanımlansın. Böylece h hiperdüzleminde katı hareket yapıldığında $\mathbb{R}^{n+1}$ de lineer dönüşümler mevcut olur. h ile $\mathbb{R}^n$ göz önüne alındığında $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n, 1)$, $(n+1)$ -boyutlu vektör içindeki her bir $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, n -boyutlu koordinat vektörüyle değişeceğinden $\vec{x} = (\vec{x}, 1)$ şeklinde yazılabilir. Böylece $\mathbb{R}^n$ de $H = (A, D)$ hareketi, $\mathbb{R}^{n+1}$ de $T = (A, D)$ lineer dönüşümüyle tanımlanacağından

$$\begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & D \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.4.1)$$

olur. $T = (A, \vec{d})$, $(n+1) \times (n+1)$ matrisine, $H = (A, D)$ hareketiyle ifade edilen homojen dönüşüm denir. $(\vec{x}, 1)$ koordinat vektörüne bağlı olarak homojen terim n -boyutlu projektif uzayda yorumlandı. (2.4.1) ile $\mathbb{R}^{n+1}$ de tanımlanan dönüşüm $h: x_{n+1} = 1$ hiperdüzleminde ki bir katı hareketi ile aynı zamanda meydana geldi.

İki hareketin bileşkesi yani $H = H_1 H_2$, $T = T_1 T_2$ homojen dönüşümlerin matris çarpımıyla verildi. $I = (I_n, 0)$ özdeşlik hareketi olmak üzere I $(n+1) \times (n+1)$ birim matrisidir. Ayrıca ters hareketin homojen dönüşümü T^{-1} invers matrisiyle bulunur. Böylece homojen dönüşümlerin $(n+1) \times (n+1)$ cümlesi bir matris grubu oluşturur ve $H(n)$ ile gösterilir.

2.5. KÜRESEL HAREKET

Küresel hareketler 5 altbölümde incelenmiştir. Küresel harekette koordinat dönüşümü, dönme matrisinin karakteristik vektörleri, Hamilton Cayley formülü, Rorigues denklemi, Euler parametreleri ve küresel harekette dönme dönüşümünden elde edilen yüzeyin eğrilikleri araştırılmıştır.

Koordinat Dönüşümü

F sabit ve M hareketli bir koordinat çatısı olsun. $X \in F$ noktasının M ye göre hareketi

$$X = AY \quad (2.5.1)$$

denklemleriyle ifade edilir. Burada X ve Y matrisleri, $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ vektörlerinin bileşenlerinden oluşmuş bir kolon matrisidir. Ayrıca $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ bir noktanın, sırasıyla, F ve M ye göre yer vektörleridir. (2.5.1.1) ifadesi için

$$X^T X = Y^T A^T A Y = Y^T Y \quad (2.5.2)$$

elde edilir. Burada $A^T A = A A^T = I_3$ olup A bir ortogonal matrisidir. Dönmeler determinantı 1 eşit olan ortogonal matrislerdir. Dönmelerin matris grupları SO(3) ile tanımlanır. Burada ki SO(3) ün özellikleri 3 bölümde verildi.

(2.5.1) dönüşümü ilk konumu F sabit çatısında son konumu M hareketli çatısında olan bir harekettir. Burada bir P noktası göz önüne alındığında bunun ilk konumu $\vec{x}$ ve son konumu $\vec{y}$ dir. Böylece P noktası küre üzerinde hareketli bir noktadır.

A: F $\rightarrow$ M dönüşümü $A = R_y R_x R_z$, y,x,z koordinat eksenleri etrafında dönmelerin bir dizisi olarak elde edilir. Bu dizinin matris formu

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olur.

Dönme Matrisinin Karakteristik Vektörleri

Bir dönme hareketi altında konumu değişmeyen hareketli cismin noktalarının cümlesi

$$AY = Y$$

matris denkleminde elde edilir. Bu denklemi

$$AY = \lambda Y \quad (2.5.3)$$

karakteristik değer polinomuna genişletildiğinde, F in $\vec{x}$ koordinatları M nin $\vec{y}$ koordinatının λ katına eşit olur. Bu durumda $\lambda = 1$ için çözümler incelenecektir. Şimdi A nın karakteristik değerlerini inceleyelim:

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$$

ifadesi açılıp gerekli işlemler yapılırsa

$$-\lambda^3 + \lambda^2(a_{11} + a_{22} + a_{33}) - \lambda(M_{11} + M_{22} + M_{33}) + \det A = 0$$

elde edilir. Burada M_{ij} A dönme matrisinin i . satır ve j . sütun minörüdür. O halde

$$-\lambda^3 + \lambda^2(a_{11} + a_{22} + a_{33}) - \lambda(M_{11} + M_{22} + M_{33}) + 1 = 0$$

olur. Burada $M_{ij} = a_{ij}$ olarak alırsak bu denklem

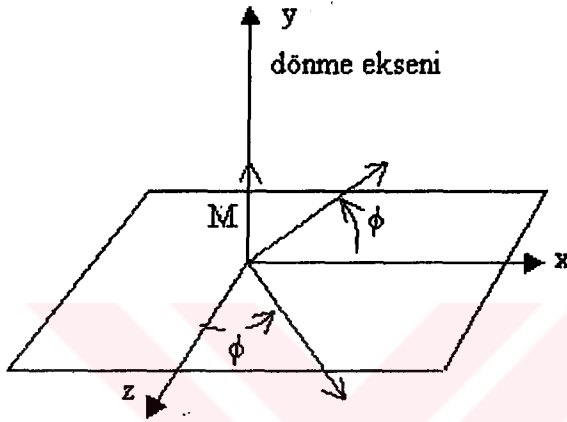
$$-\lambda^3 + \lambda^2(a_{11} + a_{22} + a_{33}) - \lambda(a_{11} + a_{22} + a_{33}) + 1 = 0$$

şeklinde olur. Buradan $\lambda = 1$ in bir kök olduğunu kolayca görebiliriz. Öyleyse karakteristik polinom

$$(\lambda - 1)(\lambda^2 - \lambda(a_{11} + a_{22} + a_{33} - 1) + 1) = 0$$

dır. Bu denklemin diğer kökleri kompleks olduğundan burada kompleks karakteristik değerler üzerinde durulmayacaktır.

$\lambda = 1$ e karşılık gelen karakteristik vektör $\vec{b}$ olmak üzere, bu vektör yönünde ki $v = t \vec{b}$ doğrusunun bütün noktaları dönme esnasında sabit kalır, [6].



Şekil (2.5.1)

Hamilton Cayley Formülü

Dönme açılı kenarları $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ olan eşkenar dörtgenin köşegenleri $\vec{x} - \vec{y}$ ve $\vec{x} + \vec{y}$ olsun. Bu takdirde

$$(\vec{X} - \vec{Y})^T (\vec{X} + \vec{Y}) = 0 \quad (2.5.4)$$

olur. Eğer $\vec{X} + \vec{Y} = (\vec{A} + \vec{I})\vec{Y}$ ve $\vec{X} - \vec{Y} = (\vec{A} - \vec{I})\vec{Y}$ alınırsa

$$\vec{X} - \vec{Y} = (\vec{A} - \vec{I}) (\vec{A} + \vec{I})^{-1} (\vec{X} + \vec{Y}) \quad (2.5.5)$$

dır. Buradan

$$\vec{B} = (\vec{A} - \vec{I}) (\vec{A} + \vec{I})^{-1} \quad (2.5.6)$$

diyelim. $B^T = -B$ olduğundan B matrisi anti-simetrik matrisdir. Dolayısıyla (2.5.6) ifadesi bize Hamilton Cayley formülünü verir.

Hamilton Cayley formülüyle bir ortogonal matris ve bir anti-simetrik matris tanımlar. Bunun terside doğrudur. Gerçekten (2.5.6) ifadesini A için çözdüğümüzde

$$A = (I - B)^{-1}(I + B) \quad (2.5.7)$$

elde edilir. $(I - B)$ singüler değildir. Böylece (2.5.7) ifadesi gerçekleşir.

B anti-simetrik matris olduğundan $b_{ii} = 0$, $b_{ij} = -b_{ji}$ olur. Buna göre

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -b_3 & b_2 \\ b_3 & 0 & -b_1 \\ -b_2 & b_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.5.8)$$

biçiminde tanımlanır ve B nin elemanları $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ vektörünün bileşenlerinden oluşur. $\vec{u}$ herhangi bir vektör ve bu vektöre karşılık gelen kolon matrisi U olmak üzere

$$B U = \vec{b} \wedge \vec{u} \quad (2.5.9)$$

dır.

Cayley formülü ile elde edilen B anti-simetrik matrisinin $\vec{b}$ vektörü $\lambda = 1$ e karşılık gelen A dönme matrisinin karakteristik vektörüdür. Gerçekten bu vektör

$$(A - I)X = 0 \quad (2.5.10)$$

denkleminin çözümüdür. Eğer A yerine (2.5.7) ifadesi yazılıp gerekli işlemler yapılırsa

$$B X = 0 \quad (2.5.11)$$

elde edilir. Böylece (2.5.9) ve (2.5.11) birlikte göz önüne alındığında

$$\vec{x} = \vec{b}$$

olur.

Rodrigues Denklemi

Dönen cismin noktalarının sabit ve hareketli çatıya göre koordinatları arasında

$$X - Y = B (X + Y) \quad (2.5.12)$$

bağıntısı vardır. Burada B matrisi A ortogonal matrisine karşılık gelen anti-simetrik matrisidir. Bu ifadeyi (2.5.9) yardımıyla

$$\vec{x} - \vec{y} = \vec{b} \wedge (\vec{x} + \vec{y}) \quad (2.5.13)$$

şeklinde yazabiliriz. Bu denkleme Rodrigues denklemi denir ve $\vec{b}$ de Rodrigues vektörüdür, [10].

(2.5.13) ifadesinden elde edilen $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ vektörleri yerine, şekil (2.5.2) de görüleceği gibi $\vec{b}$ ye dik düzlem üzerinde bunların izdüşümü olan $\vec{x}^*$ ve $\vec{y}^*$ vektörlerini alalım. Böylece $\vec{b}$ ile $\vec{x}^* + \vec{y}^*$ vektörleri birbirine diktir ve $\vec{x}^* - \vec{y}^*$ nin normu

$$\|\vec{x}^* - \vec{y}^*\| = \|\vec{b}\| \|\vec{x}^* + \vec{y}^*\| \quad (2.5.14)$$

bağıntısıyla bulunur. $\vec{x}^* + \vec{y}^*$ ve $\vec{x}^* - \vec{y}^*$ vektörleri tepe açısı ϕ ve kenarları $\vec{x}^*$, $\vec{y}^*$ olan eşkenar dörtgenin köşegenleridir. Böylece

$$\tan(\phi/2) = \frac{\|\vec{x}^* - \vec{y}^*\|}{\|\vec{x}^* + \vec{y}^*\|} \quad (2.5.15)$$

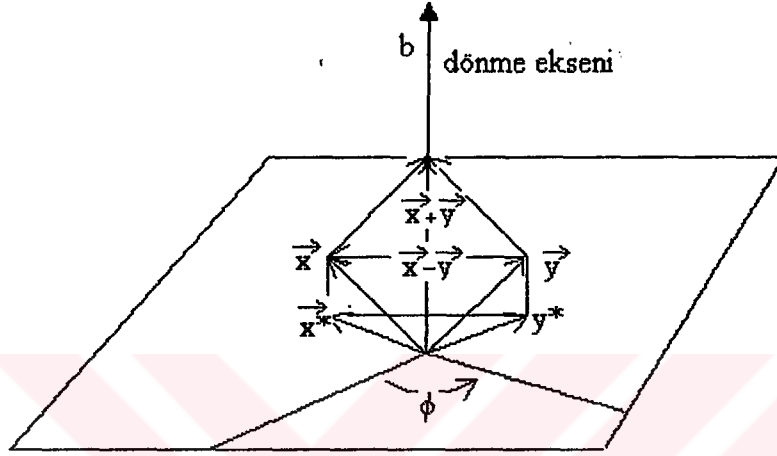
dir. (2.5.14) ve (2.5.15) birlikte göz önüne alınırsa

$$\|\vec{b}\| = \tan(\phi/2)$$

şeklinde bulunur. $\vec{s} = (s_x, s_y, s_z)$ vektörü $\vec{b}$ boyunca birim vektör olmak üzere,

$$b_1 = \tan(\phi/2) s_x, b_2 = \tan(\phi/2) s_y, b_3 = \tan(\phi/2) s_z \quad (2.5.16)$$

şeklinde olur. b_i ler $\vec{b}$ vektörünün bileşenleri olup B, anti-simetrik matrisinin elemanlarıdır.



Şekil 2.5.2

Euler Parametreleri

B matrisi $\vec{s}$ birim vektörü ve ϕ açısına bağlı olarak

$$B = \tan(\phi/2) S$$

yazılırsa, (2.5.7) ifadesinde ki A ortogonal matrisi ($S, \vec{s}$ vektörünün bileşenlerinden oluşan anti-simetrik matrisi)

$$A = (\cos(\phi/2) I_3 - \sin(\phi/2) S)^{-1} (\cos(\phi/2) I_3 + \sin(\phi/2) S) \quad (2.5.17)$$

şeklinde yazabiliriz.

$$C = (\cos(\phi/2) I_3 + \sin(\phi/2) S)$$

sabiti A'nın Euler parametresidir. Buradan

$$c_0 = \cos(\phi/2), \quad c_1 = \sin(\phi/2)s_x, \quad c_2 = \sin(\phi/2)s_y, \quad c_3 = \sin(\phi/2)s_z \quad (2.5.18)$$

dır. (2.5.17) ifadesindeki matrisin tersi

$$[\cos(\phi/2) I_3 - \sin(\phi/2) S]^{-1} = \cos(\phi/2) I_3 + \sin(\phi/2) S + \frac{\sin^2(\phi/2)}{\cos(\phi/2)} S$$

şeklinde bulunur. Bu son ifade C ile çarpılırsa

$$A = I_3 + 2 \sin(\phi/2) \cos(\phi/2) S + 2 \sin^2(\phi/2) S^2 \quad (2.5.19)$$

yada

$$A = I_3 + \sin\phi S + (1 - \cos\phi) S^2 \quad (2.5.20)$$

elde edilir. Burada S ve S^2 sırasıyla anti-simetrik ve simetrik matrislerdir.

Küresel Harekette Dönme Dönüşümünden Elde Edilen Yüzeyin Eğrilikleri

(2.5.12) veya (2.5.13) den

$$\begin{aligned} x_1 - y_1 &= -(x_2 + y_2)b_3 + (x_3 + y_3)b_2 \\ x_2 - y_2 &= (x_1 + y_1)b_3 - (x_3 + y_3)b_1 \\ x_3 - y_3 &= -(x_1 + y_1)b_2 + (x_2 + y_2)b_1 \end{aligned} \quad (2.5.21)$$

elde edilir. Ayrıca

$$f(\vec{x} - \vec{y}, \vec{x} + \vec{y}) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} (x_i - y_i) (x_j + y_j) \quad (2.5.22)$$

formu yazılabilir. (2.5.21) (2.5.22) birlikte göz önüne alınıp, gerekli işlemler yapıldığında

$$g(\vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y}) = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{21}b_3 - a_{31}b_2 & \frac{1}{2}(a_{11}b_3 + a_{22}b_3 + a_{31}b_1 - a_{32}b_2) & \frac{1}{2}(a_{11}b_2 - a_{21}b_1 + a_{23}b_3 - a_{32}b_2) \\ -\frac{1}{2}(a_{11}b_3 + a_{22}b_3 + a_{31}b_1 - a_{32}b_2) & -a_{12}b_3 + a_{32}b_1 & \frac{1}{2}(a_{12}b_2 - a_{13}b_3 - a_{22}b_1 + a_{33}b_1) \\ \frac{1}{2}(a_{11}b_2 - a_{21}b_1 + a_{23}b_3 - a_{32}b_2) & -\frac{1}{2}(a_{12}b_2 - a_{13}b_3 - a_{22}b_1 + a_{33}b_1) & a_{13}b_2 - a_{23}b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{bmatrix}^T$$

matris formu elde edilir.

Burada $\vec{x} + \vec{y} = \vec{v}$ denirse matris formu

$$g(\vec{v}, \vec{v}) = \mathbf{V} \mathbf{A} \mathbf{V}^T \quad (2.5.23)$$

biçiminde olur. Böylece

$$\begin{aligned} g(\vec{v}) &= (a_{21}b_3 - a_{31}b_2) v_1^2 + (-a_{12}b_3 + a_{32}b_1) v_2^2 + (a_{13}b_2 - a_{23}b_1) v_3^2 \\ &+ 2\left[\frac{1}{2}(a_{11}b_3 + a_{22}b_3 + a_{31}b_1 - a_{32}b_2) v_1 v_2 + \frac{1}{2}(a_{11}b_2 - a_{21}b_1 + a_{23}b_3 - a_{32}b_2) v_1 v_3 \right. \\ &\left. + \frac{1}{2}(a_{12}b_2 - a_{13}b_3 - a_{22}b_1 + a_{33}b_1) v_2 v_3\right] \end{aligned} \quad (2.5.24)$$

kuadrik formu elde edilir. Bu formda a_{ij} $1 \leq i, j \leq 3$ leri hesaplayalım. Bunları hesaplamak için Euler parametresinden elde edilen (2.5.20) ifadesi göz önüne alınarak A matrisinin elemanları,

$$\begin{aligned} a_{11} &= (b_2^2 + b_3^2) \frac{\sin \phi}{\tan \phi / 2}, \quad a_{12} = -b_1 b_2 \frac{\sin \phi}{\tan \phi / 2}, \quad a_{13} = -b_1 b_3 \frac{\sin \phi}{\tan \phi / 2} \\ a_{21} &= -b_1 b_2 \frac{\sin \phi}{\tan \phi / 2}, \quad a_{22} = (b_1^2 + b_3^2) \frac{\sin \phi}{\tan \phi / 2}, \quad a_{23} = -b_2 b_3 \frac{\sin \phi}{\tan \phi / 2} \\ a_{31} &= -b_1 b_3 \frac{\sin \phi}{\tan \phi / 2}, \quad a_{32} = -b_2 b_3 \frac{\sin \phi}{\tan \phi / 2}, \quad a_{33} = (b_1^2 + b_2^2) \frac{\sin \phi}{\tan \phi / 2} \end{aligned}$$

bulunur. Bu değerler (2.5.24) deki $g(\vec{v})$ kuadratik formunda yerine yazılırsa

$$g(\vec{v}) = [(b_2^2 + b_3^2)v_1^2 + (b_1^2 + b_3^2)v_2^2 + (b_1^2 + b_2^2)v_3^2 - 2(b_1b_2 v_1v_2 + b_1b_3 v_1v_3 + b_2b_3 v_2v_3)] \frac{\sin \phi}{\tan \phi/2} \quad (2.5.25)$$

dır. Böylece (2.5.25) ile bir kuadratik yüzey elde etmiş oluruz. Eğer (2.5.25) ifadesinde ki b_i ler $1 \leq i \leq 3$ s_x, s_y, s_z birim vektörleri cinsinden ifade edilirse o zaman yüzeyin denklemi

$$g(\vec{v}) = [\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle - (s_x v_1 + s_y v_2 + s_z v_3)^2] \tan(\phi/2) \sin \phi \quad (2.5.26)$$

olur. Şimdi (2.5.26) ifadesinin Gauss ve Ortalama eğriliklerini hesaplayalım: Bunun için Tanım (1.14) ve Tanım (1.15) göz önüne alalım. Buna göre

$$\nabla g = [2(v_1, v_2, v_3) - 2(s_x v_1 + s_y v_2 + s_z v_3)(s_x, s_y, s_z)] \tan(\phi/2) \sin \phi \quad (2.5.27)$$

şeklinde olur. ∇g nin normu

$$\begin{aligned} \|\nabla g\| &= 2 \tan(\phi/2) \sin \phi \sqrt{\langle (v_1, v_2, v_3), (v_1, v_2, v_3) \rangle - (s_x v_1 + s_y v_2 + s_z v_3)^2} \|\vec{s}\| \\ \|\nabla g\| &= 2 \sqrt{g(v)} \tan \frac{\phi}{2} \sin \phi \end{aligned} \quad (2.5.28)$$

olarak elde edilir. Burada $\|\vec{s}\| = 1$ dir. Böylece

$$z = \frac{1}{2 \tan \frac{\phi}{2} \sin \phi} \nabla g$$

ve

$$\begin{aligned} x &= \left(\frac{v_2 - (s_x v_1 + s_y v_2 + s_z v_3)s_y}{v_1 - (s_x v_1 + s_y v_2 + s_z v_3)s_x}, 1, 0 \right) \\ y &= \left(0, \frac{(v_1 - (s_x v_1 + s_y v_2 + s_z v_3)s_x)(v_3 - (s_x v_1 + s_y v_2 + s_z v_3)s_z)}{v_2 - (s_x v_1 + s_y v_2 + s_z v_3)s_y}, \right. \\ &\quad \left. v_1 - (s_x v_1 + s_y v_2 + s_z v_3)s_x \right) \end{aligned}$$

olur. Burada $s_x v_1 + s_y v_2 + s_z v_3 = u$ denirse

$$D_{xz} = \left(-\frac{v_2 - us_y}{v_1 - us_x} (1 - s_x^2) - s_x s_y, \frac{v_2 - us_y}{v_1 - us_x} s_x s_y + 1 - s_y^2, \frac{v_2 - us_y}{v_1 - us_x} s_x s_z - s_y s_z \right)$$

$$D_{yz} = \left(\frac{(v_1 - us_x)(v_3 - us_z)}{v_2 - us_y} s_x s_y - (v_1 - us_x) s_x s_z, \right. \\ \left. \frac{(v_1 - us_x)(v_3 - us_z)}{v_2 - us_y} (1 - s_y^2) - (v_1 - us_x) s_y s_z, \right. \\ \left. \frac{(v_1 - us_x)(v_3 - us_z)}{v_2 - us_y} s_y s_z + (v_1 - us_x) (1 - s_z^2) \right)$$

elde edilir. Bu değerler (1.1.1) ve (1.1.2) de yerine yazılırsa,

$$K = 0$$

ve

$$H = \frac{\sqrt{g(\vec{v})} \tan(\phi/2) \sin \phi}{g(\vec{v})}$$

bulunur.

2.6. KATI HAREKET

Katı hareket 5 altbölümde oluşmuştur. Bu bölümde sırasıyla katı harekette koordinat dönüşümü, katı hareketin vida eksen, Rodrigues vektörü, vida hareketinin dönüşümüne karşılık gelen matris ve bu matrisin karakteristik vektörleri incelenmiştir.

Koordinat Dönüşümü

Bir noktanın F sabit çatısına ve M hareketli çatısına göre yer vektörleri sırasıyla x ve y olsun. F ve M arasındaki bir katı hareket

$$X = AY + D \quad (2.6.1)$$

dönüşümüyle tanımlanır. Burada A ortogonal matris olup dönme matrisidir, D ise öteleme vektörü $\vec{d}$ nin kolon matrisi, X ve Y de $\vec{x}, \vec{y}$ nin kolon matrisleridir.

Katı Hareketin Vida Ekseni

Kabul edelim ki hareketin öncesinde ve sonrasında koordinatları değişmeyen bir nokta c olsun. c noktasının F çatisına göre yer vektörü $\vec{c}$ olmak üzere bu vektörü kolon matrisi olarak kabul eden matris C dir. Buradan

$$C = A C + D \text{ veya } (I - A)C = D \quad (2.6.2)$$

denklemi elde edilir. (2.6.2.1) denklemi C ye göre çözüldüğünde

$$C = -(A - I_3)^{-1} D \quad (2.6.3)$$

olur. Burada $(A - I_3)$ singülerdir. Çünkü 3×3 dönme matrisinin bir karakteristik değeri 1 dir. Dolayısıyla (2.6.3) denkleminin aşikar çözümü yoktur. Böylece aşağıdaki yardımcı teorem ispatlanmış olur.

Yardımcı Teorem 2.6.1: Bir katı harekette sabit bir nokta yoktur, [2].

Buradan şu sonucu verilebilir.

Sonuç 2.6.1: Genel bir A $n \times n$ tipindeki dönme matrisinde, $(A - I_n)$ matrisi n nin çift değerleri için singüler değildir. Burada pol adı verilen bir tek sabit nokta vardır. n tek değerleri için A nın karakteristik değerlerinden biri 1 eşit olduğundan $(A - I_n)$ bu anlamda singülerdir ve burada sabit bir nokta yoktur,[2].

Bununla beraber bir katı harekette sabit noktalar yoktur. Burada vida ekseni adı verilen bir sabit doğru vardır. Bu doğrunun konumu hareketin öncesinde ve sonrasında aynıdır. Doğru üzerindeki her nokta doğru boyunca hareketlidir. Doğru yönünde $\vec{b}$ Rodrigues vektörü verildiğinde hareketin dönme eksenidir.

$\vec{b}$ ye dik düzlem üzerinde $\vec{d}$ öteleme vektörünün dik izdüşümü $\vec{d}^*$ olmak üzere

$$(I - A)C = D^* \quad (2.6.4)$$

denkleminin çözümünü araştıracağız.

$\vec{b}$ ye dik düzlemde çevrilen ve $\vec{b}$ etrafında ki dönmelerle düzlemsel hareketin bir noktası C ve yer vektörü $\vec{c}$ olsun. Böylece $L = \vec{c} + t \vec{b}$ istenen doğrudur. Hareket bu doğru boyunca bir pür dönmeye indirgenirse dönüşüm boyunca $\delta \vec{s} = \vec{d} - \vec{d}^*$, $\delta = \frac{\|\vec{d} - \vec{d}^*\|}{\|\vec{b}\|}$, $\vec{s} = \frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|}$ olur.

C için (2.6.4) ün çözümü ve (2.5.7) den

$$BC = -\frac{1}{2}(I - B) D^* \quad (2.6.5)$$

elde edilir. Bu da (2.5.9) dan

$$\vec{b} \wedge \vec{c} = -\frac{1}{2}(\vec{d}^* - \vec{b} \wedge \vec{d}^*)$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklemi $\vec{b}$ ile vektörel çarpıma tabii tutup, $\langle \vec{b}, \vec{c} \rangle = 0$ alırsak

$$\vec{c} = \frac{1}{2} \left(\frac{\vec{b} \wedge \vec{d}^*}{\langle \vec{b}, \vec{b} \rangle} + \vec{d}^* \right) \quad (2.6.6)$$

sonucunu elde ederiz.

Rodrigues Denklemi

Dönmeler için elde edilen Rodrigues denklemini $L = \vec{c} + t \vec{b}$ vida eksenini kullanılarak katı hareketler içinde verebiliriz. C vida eksenini üzerinde bir nokta olmak üzere Rodrigues denklemini elde etmede kullanılan yapı şekil (2.6.1) de görüleceği gibi $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ yerine $\vec{CY}$ ve $\vec{CX} - \delta \vec{s}$ vektörlerini alırız.

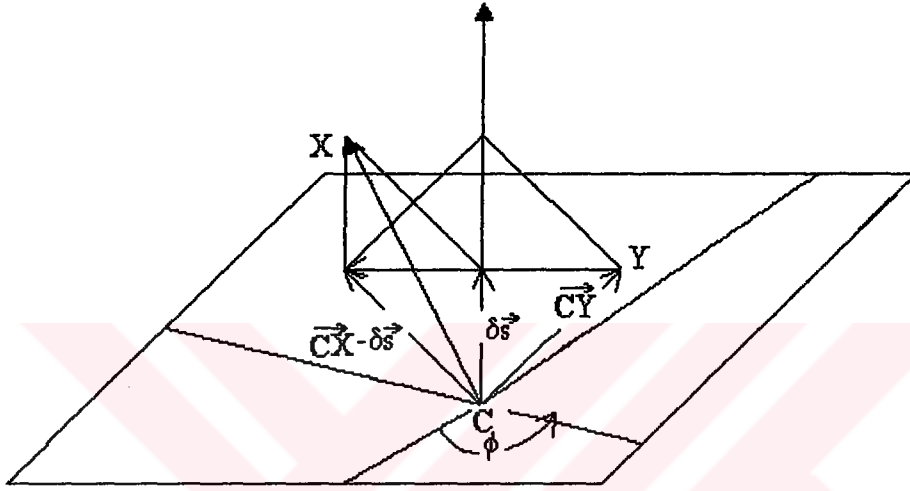
Böylece

$$(\vec{C}\vec{X}) - \delta \vec{s} \cdot \vec{C}\vec{Y} = \vec{b} \wedge (\vec{C}\vec{X} - \delta \vec{s} + \vec{C}\vec{Y}) \quad (2.6.7)$$

olur. Buradan

$$\vec{Y}\vec{X} = \vec{b} \wedge (\vec{C}\vec{X} + \vec{C}\vec{Y}) + \delta \vec{s} \quad (2.6.8)$$

bulunur. Buna genel bir katı hareketin Rodrigues denklemi denir.



Şekil 2.6.1

Vida Hareketinin Dönüşümüne Karşılık Gelen Matris

Vida ekseninin tanımlanmasıyla, bu eksen üzerindeki dönüşüm ve dönmeyle $H=(A, \vec{d})$ hareketi verilir. L vida eksenini olmak üzere L boyunca δ uzunluğu ve ϕ açılı vida hareketine bağlı olarak H hareketi belirtilir.

Vida eksenini F sabit referans çatısında $L = \vec{c} + t \vec{s}$ doğrusu olsun. Burada $\vec{s}$ birim vektör ve $\langle \vec{c}, \vec{s} \rangle = 0$ şeklinde seçilmiştir. ϕ dönme açısı verildiğinde $\vec{b} = \vec{s} \tan(\phi/2)$ Rodrigues vektörü elde edilir. $\vec{b}$ nin bileşenleri B anti-simetrik matrisini oluşturursa, A dönme matrisi Cayley formülünden elde edilir.

Eğer vida eksenini F in orijininden geçerse $\vec{c} = \vec{0}$ ve $\vec{d} = \delta \vec{s}$ olur ki hareket $H' = (A, \delta \vec{s})$ dir.

Şayet vida eksenini orjinden geçmezse bu durumda $\vec{c} \neq 0$ dır. F' , c noktasında bulunan ve vida eksenini üzerine yerleştirilmiş sabit referans çatısı olmak üzere F den F' ye konumu $T: F \rightarrow F'$ dönüşümüyle tanımlanır ve $T = (I, \vec{c})$ dir. Bu dönüşümle birlikte $H' = (A, \delta \vec{s})$ göz önüne alındığında $H = TH'T^{-1}$ elde edilir. Buradan $T^{-1} = (I, -\vec{c})$ dir. Böylece

$$H = TH'T^{-1} = (I, -\vec{c})'(A, \delta \vec{s})(I, \vec{c}) = (A, \delta \vec{s} - A\vec{c} + \vec{c}) \quad (2.6.9)$$

olur. Buradan $\vec{d}$ öteleme vektörü

$$D = \delta S + (I - A)C \quad (2.6.10)$$

biçiminde elde edilir. Bu hareketle elde edilen matris $(A, \vec{d})$ 4x4 tipindedir.

Vida eksenini $H = (A, \vec{d})$ katı hareketinde ifade edilen 4x4 homojen dönüşümlerin bir invaryant alt uzayında elde edildi. Öyleyse

$$\begin{bmatrix} A & D \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} P \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{veya} \quad T \vec{p} = \lambda \vec{p} \quad (2.6.11)$$

karakteristik değer probleminin çözümünü bulalım. Bu problemin karakteristik denklemi

$$(1 - \lambda)^2 (\lambda^2 - 2\lambda \cos \phi + 1) = 0 \quad (2.6.12)$$

dir. Böylece T nin karakteristik değeri $\lambda = 1$ olup çift köktür. Diğer kökleri ise kompleks değerli olup bunlar λ_1 ve λ_1^* olsun. Bu iki kompleks değere karşılık gelen karakteristik vektörler $x = (x, 0)$ ve $x^* = (x^*, 0)$ olsun. A nın karakteristik vektörleri 3-boyutlu olduğundan dördüncü bileşen 0 olacaktır.

$\lambda = 1$ karşılık gelen karakteristik vektörü bulalım.

$$(T-I) \vec{p} = 0 \quad (2.6.13)$$

olup, buradan

$$(T-I) = \begin{bmatrix} A-I & D \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olur. O halde $\vec{b} = (\vec{b}, 0)$ T nin karakteristik vektörüdür. Çünkü $\vec{b}$, A nın karakteristik vektörüdür. Böylece (2.6.13) ifadesinin başka çözümü yoktur, yani $T = (A, \vec{d})$ nin diğer karakteristik vektörleri mevcut değildir.

$\vec{c} = (\vec{c}, 1)$ vektörü göz önüne alırsa

$$(T-I)C = D - D^* = \delta S \quad (2.6.14)$$

olur. $\vec{c} = (\vec{c}, 1)$ ve $\vec{s} = (\vec{s}, 0)$ vektörleri V düzlemini gerer, yani T nin diğer invariantlarıdır. Böylece $\vec{v} = v_1 \vec{c} + v_2 \vec{s}$ genel bir vektörünü göz önüne aldığımızda (2.6.5.4) den

$$(T-I)V = (T-I)(v_1 C + v_2 S) = v_1 \delta S$$

bağıntısı elde edilir. Sonuç olarak

$$TV = V + v_1 \delta S$$

şeklindedir. V nin $\vec{v}$ vektörü T homojen dönüşümüyle V nin bir diğer vektörüne dönüşmüştür. Böylece V, T nin invariantıdır. Bu düzlem $L = \vec{c} + t \vec{s}$ doğrusuyla $\mathbb{R}^4$ ün $x_4=1$ hiper düzlemine bağlanmıştır. Bu doğru vida eksenidir. Her $\vec{v}$ vektörü

$$(T-I)(T-I)V = 0$$

bağıntısıyla bulunur.

3.BÖLÜM

HAREKETİN CEBİRSEL ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde bir hareketin cebirsel özellikleri araştırılmıştır. Hareket için norm, bir hareketin türevi, hareket yardımıyla tanımlanan tanjant operatörleri incelenmiştir.

Bir katı cismin hareketi

$$\begin{aligned} H: F &\rightarrow M \\ t &\rightarrow H(t) \end{aligned}$$

sürekli dönüşümüyle ifade edilir. Burada F sabit çatıdır. M hareketli çatısının konumu t parametresi ile değişir. $H(t)$ nin sürekliliği $H(t_1)$ ve $H(t_2)$ gibi iki hareket arasındaki uzaklığın büyüklüğüdür. Buradaki genel düşünce lineer dönüşümler için geçerlidir. Öyleyse uzay ve düzlem hareketlerini göz önüne aldığımızda buradaki dönüşümler homojen dönüşümlerle ifade edilir, [11].

3.1. Hareketler İçin Norm

T bir hareketin $n \times n$ tipinde matrisi olsun. Bu matrisin büyüklüğünü bulmak için T yi oluşturan elamanlar n -boyutlu vektörler olarak göz önüne alınabilir. Böylece

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \cdots & t_{nn} \end{bmatrix} = [t_1, t_2, \dots, t_n]$$

matrisinin büyüklüğü,

$$\text{mag}(T) = \sqrt{\sum t_{ij}^2} = \sqrt{\sum |t_i|^2} \quad (3.1.1)$$

dir, [11]. Burada $|t_i|$ n -boyutlu vektör olarak gözönüne alınan ve i . kolonun büyüklüğüdür. Şimdi T nin kolon vektörlerinin en büyük değerlisini gözönüne alıp diğer kolonların büyüklüğünün buna eşit olduğunu kabul edersek (3.1.1) yardımıyla aşağıdaki tanımı verebiliriz.

Tanım 3.1.1:

$$\|T\| = \sqrt{n} \max(|t_i|, (i=1, 2, \dots, n) = \sqrt{n} |t_{\max}| \quad (3.1.2)$$

formülüne hareketler için bir norm denir, [11].

$\text{mag}(T)$ ve $\|T\|$ arasında

$$\text{mag}(T) \leq \|T\| \quad (3.1.3)$$

bağıntısı vardır.

S ve T matrisleri arasındaki farkın normu

$$\|T - S\| = \sqrt{n} \max|t_i - s_i| = \sqrt{n} |t_i - s_i|_{\max} \quad (3.1.4)$$

şeklinde tanımlanır. Burada t_i ve s_i ($i = 1, 2, \dots, n$) T ve S matrislerinin i inci kolonunun n-boyutlu vektörleridir.

Yardımcı Teorem 3.1.1: Sürekli bir norm fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlar, [10].

- i) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$
- ii) $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$
- iii) $\|kA\| = |k| \|A\|$

İspat:

i) Üçgen eşitsizliğinden

$$|a_i + b_i| \leq |a_i| + |b_i|$$

olduğundan

$$|a_i + b_i| \leq |a_i| + |b_i| \leq |a_{\max}| + |b_{\max}|$$

olur. Buradan da

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$$

elde edilir.

ii) AB çarpımının bir kolonunu $\sum_{i=1}^n b_{ij}a_i$ şeklinde yazabiliriz. Bu kolonun büyüklüğü üçgen eşitsizliğinden

$$\left| \sum_{i=1}^n b_{ij}a_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |b_{ij}| |a_i|$$

olarak elde edilir. $m = (|a_1|, |a_2|, \dots, |a_n|)$ vektörü ile B nin kolon vektörü olan b_j nin $(1 \leq j \leq n)$ iç çarpımında Schwartz eşitsizliği kullanılırsa

$$|\langle b_j, m \rangle| \leq |b_j| |m|$$

olur. Sonuç olarak $|m| \leq \sqrt{n} |a_{\max}|$ olduğundan

$$\left| \sum_{i,j=1}^n b_{ij}a_i \right| \leq \sqrt{n} |b_{\max}| |a_{\max}|$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$$

bulunur.

iii)

$$|ka_i| = |k| |a_i|, \quad 1 \leq i \leq n$$

olduğundan

$$\|kA\| = \sqrt{n} \max(|ka_i|) = \sqrt{n} \max(|k| |a_i|) = |k| \sqrt{n} \max(|a_i|) = |k| \|A\|$$

olur.

Böylece yardımcı teoremin ispatı tamamlanmış olur.

3.2. Matris İşlemlerinin Sürekliliği

Tanım (3.1.1) gözönüne alıp, hareketlere karşılık gelen T ve S matrisleri bileştirildiğinde, bunların t_{ij} ve s_{ij} elamanları da bileşir. T matrisinin ij elamanı için $x_{ij}(T)=t_{ij}$ olacak şekilde $x_{ij}(T)$ fonksiyonunu gözönüne alalım. Aynı şekilde S için de $x_{ij}(S)=s_{ij}$ dir. T ve S nin ij inci elemanları arasındaki farkın normu istenildiği kadar küçük alınırsa bu elemanlar arasındaki farkın mutlak değeri normdan o kadar daha küçük olacaktır. Bu anlamda bu fonksiyon süreklidir. Çünkü $|t_{ij} - s_{ij}|$ farkı $|t_i - s_i|_{\max}$ farkına eşit ya da daha küçüktür. Geçekten ε çok küçük bir pozitif sayı olmak üzere

$$|x_{ij}(T) - x_{ij}(S)| = |t_{ij} - s_{ij}| \leq \sqrt{n} |t_i - s_i|_{\max} = \|T - S\| < \varepsilon \quad (3.2.1)$$

olur.

$x_{ij}(T)$ ve $x_{ij}(S)$ fonksiyonları sürekli olduğundan bu fonksiyonların toplama, çıkarma, bölme ve çarpımından elde edilen fonksiyonlar da süreklidir. Öyleyse $R=TS$ sürekli fonksiyondur. Aynı nedenle $\det T$ ve T^{-1} invers matrisi de süreklidir.

3.3. Matris Grupları:

Yardımcı Teorem 3.3.1.: $n \times n$ tipinde ve tersi mevcut matrislerin cümlesi bir cebrik gruptur ve $GL(n)$ ile gösterilir, [11].

İspat:

- i) S ve T tersi mevcut iki matris olsun. Bu matrislerin çarpımından elde edilen matrisin determinantı sıfırdan farklı olup tersi mevcuttur.
- ii) I_n matrisi birim matris olup determinantı 1 e eşittir.
- iii) Buradaki matrislerin determinantı sıfırdan farklı olduğundan $n \times n$ matrislerinin tersi vardır.

Buda ispatı tamamlar.

Bu yardımcı teoremden şunu diyebiliriz: Bu tip matrislerin oluşturduğu cebrik grup bir Lie Grubudur. Grup ve matris çarpımları sürekli olduğundan $GL(n)$ bir Lie grubudur.

$GL(n)$ nin alt cümleleri de bir cebrik grup olup matris çarpımına göre alt grupturlar. Burada $GL(n)$ in iki alt grubu üzerinde duracağız. Bunlar $SO(n)$ ve $H(n)$ dir.

Tanım 3.3.1 ($SO(n)$): $SO(n)$ $n \times n$ tipindeki dönme matrislerinin oluşturduğu gruptur. A $n \times n$ tipinde dönme matrisi $AA^T = I_n$ ve $\det(A) = 1$ özelliklerini sağladığından $SO(n)$ Lie grubunun alt grubudur. Ayrıca $A^{-1} = A^T$ olduğundan A nın inversi vardır ve $\det(I_n) = 1$ olacak şekilde birim matris mevcuttur. Diğer taraftan A ve B tersleri mevcut, determinantları 1 e eşit olan iki matris ise $AB \in SO(n)$ de dir. Çünkü

$$(AB)^T(AB) = B^T A^T AB = B^T B = I_n$$

olur, [11].

3-boyutlu uzayda dönmeler $SO(3)$ grubuyla ifade edilir.

Tanım 3.3.2 ($H(n)$): $H(n)$ Homojen dönüşümlerin cümlesinin oluşturduğu gruptur. Özel olarak $n=3$ seçilirse $H(3)$ ile düzlemsel hareket, $n=4$ olursa $H(4)$ ile de katı hareketlerin grubu ifade edilir,[11].

Şimdi

$$T=(A,D)=\begin{bmatrix} A & D \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$n \times n$ matrislerinin cümlesini gözönüne alalım. A , $(n-1) \times (n-1)$ tipindeki dönme matrisi, D , $\vec{d}$ öteleme vektörünün bileşenlerinden oluşmuş $(n-1) \times 1$ tipinde bir matrisi ve 0 da $1 \times (n-1)$ tipinde bir sıfır satır matrisidir.

$T=(A_1,D_1)$ ve $S=(A_2,D_2)$ matrislerinin çarpımı

$$TS = (A_1 A_2, A_1 D_2 + D_1)$$

şeklinde dir. Buradan $(A_1 A_2)$ $(n-1) \times (n-1)$ dönme matrisi ve $(A_1, D_2 + D_1)$ de $(n-1) \times 1$ biçiminde bir matrisidir. Böylece $H(n)$ nin elamanlarının her çiftinin çarpımı da $H(n)$

nin elemanıdır. I_n birim matrisi $H(n)$ nin elemanıdır ve $I_n = (I_{n-1}, 0)$ şeklindedir. Burada I_{n-1} birim dönme matrisi ve 0 da $n-1$ boyutlu sıfır vektöründen oluşmuş kolon matrisidir. Son olarak $T=(A,D)$ tersi $T^{-1}=(A^T, A^TD)$ olup buda $H(n)$ nin elemanıdır.

3.4. Bir Hareketin Türevi

Bir hareketin sürekli bir hareketi

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R} &\rightarrow GL(n) \\ t &\rightarrow T(t) \end{aligned}$$

biçiminde bir lineer dönüşümdür. Eğer hareket; düzlemselse $T:\mathbb{R}\rightarrow H(3)$, küresel hareketse $T:\mathbb{R}\rightarrow SO(3)$ ve katı hareketse $T:\mathbb{R}\rightarrow H(4)$ şeklinde tanımlanır. Böylece $T(t)$ ya düzlemsel ya küresel ya da katı harekettir.

Genellikle $T:\mathbb{R}\rightarrow GL(n)$ nin elemanları reel parametrelili sürekli fonksiyonlardır.

Böylece, bu matris fonksiyonunun türevi her elemanın türevidir, yani $\dot{T}(t)$ olur, [11].

$T:\mathbb{R}\rightarrow GL(n)$ fonksiyonuna önemli bir örnek $T(t)=K+tS$ dir. Burada K ve S $n \times n$ tipinde matrislerdir. K tersi mevcut bir matris ve S de herhangi bir matris olup singülerde olabilir. $GL(n)$ sürekliliği t nin küçük değerlerinde mevcut olduğundan $K+tS$ matrisinin tersi vardır. $T(t)$ nin türevi basitçe $\dot{T}(t)=S$ olur. Özel olarak $T(t)=K+tE_i$ olsun. Burada E_i , $n \times n$ tipindeki matrislerin vektör uzayının temel bazıdır. Böylece tersi mevcut olan dönüşümlerin sürekli cümlesinin türevi bir genel $n \times n$ tipinde matrisdir.

$t_{ij}(t)$ fonksiyonun her elemanı

$$l_{ij}(t) = t_{ij}(t_0) + (t - t_0) \dot{t}_{ij}(t_0)$$

tanjant doğrusunun $t=t_0$ komşuluğun da yakınsar. Aynı zamanda

$$L(t) = T(t_0) + (t - t_0) \dot{T}(t_0) \quad (3.4.1)$$

lineer denkleminin $T(t_0)$ komşuluğunda yakınsar. Böylece $n \times n$ tipindeki matrislerin cümlesi lineer uzayda gözönüne alındığında $T(t_0)$, $T(t)$ nin teğetidir. Dolayısıyla $\dot{T}(t_0)$ $T(t_0)$ hareketinin $t=t_0$ noktasındaki türevidir.

3.5. Tanjant Operatörü

$T: \mathbb{R} \rightarrow GL(n)$ matris fonksiyonu F de $Y(t)=T(t)y$ noktalarının sürekli bir cümlesini oluşturur. Burada y , 3×1 tipinde bir matrisdir. $t=t_0$ da $Y(t)$ nin tanjant yönündeki türevi ,

$$\dot{Y}(t_0) = \dot{T}(t_0) y = (\dot{T}(t_0) T^{-1}(t_0)) Y(t_0) \quad (3.5.1)$$

şeklinde elde edilir. Bu denklemden

$$\dot{T}(t) = (\dot{T} T^{-1}(t)) T(t) \quad (3.5.2)$$

bulunur. Böylece $GL(n)$ üzerindeki tanjant operatörü bu matrisle gösterilir.

Şimdi $R(t)$ dönme hareketinin türevi

$$\dot{R}(t) = S R(t) \quad (3.5.3)$$

olsun. Burada S sabit bir matris olup $R(t)$ nin tanjant operatörüdür. Eğer $R(0) = R_0$ başlangıç koşulunu gözönüne alırsak bu durumda

$$\begin{aligned} R(t) &= R_0 \exp(tS) \\ &= R_0 \left(I + (tS) + \frac{(tS)^2}{2} + \frac{(tS)^3}{3!} + \dots \right) \end{aligned} \quad (3.5.4)$$

çözümüne sahiptir. Buda bir üstel seri açılımıdır. Eğer bu serinin P_n ve P_{n+1} kısmi toplamaları arasındaki farkın normu alınırsa

$$\|P_{n+1} - P_n\| = \left\| \frac{(tS)^{n+1}}{(n+1)!} \right\| \quad (3.5.5)$$

elde edilir. Buradan

$$\|P_{n+1} - P_n\| \leq \frac{|t|^{n+1} \|S\|}{(n+1)!} \quad (3.5.6)$$

olur. t ve $\|S\|$ sabit değerler olup n sonsuza yaklaştığımızda (3.5.6) ifadesi 0 yaklaşır.

(3.5.3.) ifadesini R_0^{-1} ile çarparsak $R(0)=I$ başlangıç koşuluna sahip olacaktır.

Böylece

$$R(t) = \exp(tS) \quad (3.5.7)$$

olur. Buradaki dönüşümlerin cümlesi

$$R(t_1)R(t_2) = \exp(t_1S)\exp(t_2S) = \exp((t_1+t_2)S) = R(t_1+t_2) \quad (3.5.8)$$

Özelliğine sahiptir. Dolayısıyla bu özellikteki dönüşümler bir parametrelili alt grup olarak adlandırılır.

Lie çarpımı tanjant operatörler içinde verilebilir. T ve S tanjant operatörleri arasındaki Lie çarpımı

$$T \times S = TS - ST$$

şeklinde bir tanjant operatördür. Bu çarpım ile tanjant operatörlerinin vektör uzayı $GL(n)$ grubunda Lie cebiri oluşturur, [11].

3.6. $SO(n)$ nin Tanjant Operatörleri

Dönme matrislerinin tanjant operatörleri, $GL(n)$ grubunda tanımlandığı gibi tanımlanır. Bununla birlikte $GL(n)$ nin tanjant operatörü olmayan $SO(n)$ nin de tanjant operatörü değildir, [11]. $SO(n)$ nin tanjant operatörleri $AA^T = I$ bağıntısından bulunur. O halde $SO(n)$ tanjant operatörleri dönme matrislerinden elde edilir. $AA^T = I$ bağıntısının türevi

$$\dot{A}A^T + A\dot{A}^T = 0 \quad (3.6.1)$$

elde edilir. Buradan

$$\dot{A} A^T = -(\dot{A} A^T)^T \quad (3.6.2)$$

yazılabilir. Dolayısıyla

$$\dot{A} A^{-1} = \dot{A} A^T = -(\dot{A} A^T)^T = \Omega \quad (3.6.3)$$

olur. Böylece $SO(n)$ nin tanjant operatörü anti-simetriktir. Ω matrisi $A(t)$ dönme matrisinin açısal hız matrisidir.

Ω sabit açısal hız matrisi verildiğinde,

$$\dot{A}(t) = \Omega A(t) \quad (3.6.4)$$

matris denkleminde dönmelerin 1-parametrel grubunu buluruz. Buradan

$$A(t) = \exp(t\Omega) \quad (3.6.5)$$

İfadesi (3.6.4) ün çözümüdür. Ayrıca $A(0)=I$ dir. Bu üstel ifadede $\bar{w}$, Ω ile birleştirilmiş vektör olsun. Buradan $\|\bar{w}\| = \omega$ olmak üzere Ω normal

$$\Omega = \omega S \quad (3.6.6)$$

şeklinde bulunur. (3.6.5) ifadesini açık olarak yazarak (3.6.6) ifadesi (3.6.5) de kullanırsak

$$A(t) = \exp(t\Omega) = I + \sin(\omega t)S + (1 - \cos(\omega t))S^2 \quad (3.6.7)$$

elde edilir. Burada S matrisi, $\bar{s}$ birim vektörünün bileşenlerinden oluşmuş anti-simetrik matris olup $S^3 + S = 0$ dir. Bu da Ω tanjant operatörüyle elde edilen $\bar{w}$ eksen etrafında ki bir pür dönme denklemidir. Bir başka deyişle t değişkenli ω sabit açısal hızlı $\bar{w}$ etrafındaki cismin dönmesidir.

3.7. $H(n)$ nin Tanjant Operatörleri:

$SO(n)$ deki gibi burada da $GL(n)$ nin tanjant operatörü olmayan $H(n)$ nin de tanjant operatörü değildir, [11]. Böylece

Şimdi $H(n)$ nin bir parametrelili alt grubu olan $H(4)$ gözönüne alındığında

$$\dot{T}(t) = ST(t) \quad (3.7.2)$$

denklemini elde edilir. $S=(\Omega, v)$ bir sabit matrisidir. (3.7.2) nin çözümü

$$T(t) = \exp(tS) \quad (3.7.3)$$

olur.

Kabul edelim ki $t=0$ anında sabit ve hareketli çatı çakışık, yani $T(0)=I$ olsun Bu durumda (3.7.3) ün bileşenlerini $\vec{v}$ lineer hız vektörüne göre çözersek $\vec{v}^* = \vec{c} \wedge \vec{w}$ ve $k\vec{w} = \vec{v} - \vec{v}^*$ olup bunlar sırasıyla w açısal hız vektörüne dik ve paraleldir.

$\vec{v}^* = \vec{c} \wedge \vec{w}$ da $\vec{v}^* = 0$ olduğundan $\vec{v} = k\vec{w}$ dir. Buradan $\Omega \vec{w} = 0$ dir. Ayrıca

$$S^2 = \begin{bmatrix} \Omega^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olup,

$$T(t) = \exp(tS) = \begin{bmatrix} \exp(\Omega t) & k\vec{w}t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(t) & k\vec{w}t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.7.4)$$

elde edilir. Böylece $A(t)$ Ω nın üstel ifadesinden elde edilen dönme matrisidir.

Şimdi genel bir durumu göz önüne alalım. $\vec{w}$ açısal ve $\vec{v}$ lineer hızlı $T(t):F \rightarrow M$ genel bir hareketin tanjant operatörü S olsun. Eğer $\vec{v}^* = \vec{c} \wedge \vec{w}$ bağıntısından c noktası F' çatısının orijiniyse ve S' de F' nün tanjant operatörü ise bu durumda v ve w kolineer

olur. $H: F \rightarrow F'$ koordinat dönüşümünden $H=(I,C)$ olsun. Bu dönüşüm ve S' operatöründen, (3.7.3) ifadesi

$$T(t) = H \exp(t S') H^{-1} \quad (3.7.5)$$

olur. Bunu açarsak

$$T(t) = \begin{bmatrix} I & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A(t) & k\bar{w}t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(t) & k\bar{w}t + (I - A(t)C) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.7.6)$$

elde edilir. Bu sonuç (2.6.10) ifadesiyle karşılaştırıldığında genel bir vidanın üstel dönüşümü bir pür vida hareketi tanımlar. Böylece t parametrelili bu hareket c boyunca w yönündeki doğru etrafında $\|\bar{w}\| = \omega$ açısal hızlı dönme oluşturur ve $k\bar{w}$ lineer hızı bu doğru üzerindedir, [11].

KAYNAKLAR

- 1) ASİL, V. *The roles in curves theory of exponential mappings in 3-dimensional Euclidean space*"Pure and Applied Mathematical Sciences, Vol.XXXIII, No.1-2, Mach 1991.
- 2) BALCI, M. *Analiz I.*"Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları .1996.
- 3) BOTTEMA, O., and ROTH, B. *"Theoretical Kinematics."* North-Holland Press, New York. 1979.
- 4) BROCKETT, R. V. *"Robotic Manipulators and the Product of Exponentials Formula"*. Proc MTNS-83 Int. Sym., Beer-Sheva, Israel. 1983.
- 5) DENAVIT, J., and HARTENBERG, R. S. *"Introduced the Homogeneous Form of Spatial Transformations to Kinematics"* ASME J. Appl. Mech. Vol.22. 1955.
- 6) HACISALİHOĞLU, H. H. *"Lineer Cebir"*. Gazi Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları. 1987.
- 7) HACISALİHOĞLU, H.H. *"Dönüşümler ve Geometriler"*. Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları. 1998.
- 8) HACISALİHOĞLU, H.H. *"Diferensiyel Geometri "*. Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları. 1996.
- 9) HUNT, K. H. *"Kinematics Geometry of Mechanisms"*. Clarendon Press, Oxford. 1978.
- 10) KREYSZIG, E. *"Fonksiyonel Analize Giriş I."* Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları. 1996.

- 11) McCARTHY, J.M. *An Introduction to Theoretical Kinematics.* The MIT Press Cambridge, Massachusetts London, England. 1990.
- 12) SATTINGER, D. H., and WEAVER, O. L. *"Lie Groups and Algebras with Applications to Physics, Geometry and Mechanics"*. Springer-Verlag, New York. 1986.
- 13) SUGIMOTO, K., and DUFFY, J. *"Application of Linear Algebra to Screw Systems"*. Mech. Mach. Theory. Vol.17, No.1. 1982.

