T.C.

GEBZE TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

ASİMETRİK NORMLU UZAYLARDA KOMPAKTLIK

BİRGÜL YILMAZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN: DOÇ. DR. AYŞE SÖNMEZ

TEMMUZ 2025

T.C.
GEBZE TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

ASİMETRİK NORMLU UZAYLARDA KOMPAKTLIK

BİRGÜL YILMAZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN: DOÇ. DR. AYŞE SÖNMEZ

TEMMUZ 2025

T.R.
GEBZE TECHNICAL UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL

COMPACTNESS IN ASYMMETRIC NORMED SPACES

BİRGÜL YILMAZ

A THESIS OF MASTER OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

ADVISOR: DOÇ. DR. AYŞE SÖNMEZ

JULY 2025

YÜKSEK LİSANS JÜRİ ONAY FORMU

GTÜ Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Yönetim Kurulunun 08/07/2025 tarih ve 2025/35 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından 11/07/2025 tarihinde tez savunma sınavı yapılan Birgül Yılmaz'ın tez çalışması Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

JÜRİ

ÜYE
(TEZ DANIŞMANI) : DOÇ. DR. AYŞE SÖNMEZ

ÜYE : PROF. DR. MANSUR İSGENDEROĞLU

ÜYE : PROF. DR. NESRİN GÜLER

ONAY

Gebze Teknik Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Yönetim Kurulunun
……./……./...…. tarih ve …..…/…..... sayılı kararı.

İMZA/MÜHÜR

ÖZET

Bu çalışmada, asimetrik normlu lineer uzaylarda kompaktlık, ön kompaktlık ve diğer kompaktlık türlerine ilişkin yapılan makaleler incelenmiştir. İncelenen makalelerde, asimetrik normlu uzaylarda kompakt kümeler $\theta_q(0) := \{x \in X : q(x) = 0\}$ kümesi kullanılarak karakterize edilmiştir. (X, q) asimetrik normlu lineer uzayında bir K alt kümesinin q-kompakt olması için gerek ve yeter koşulun $K + \theta_q(0)$ kümesinin aynı topolojiye göre kompakt olması gerektiği ispatlanmıştır. Bu sonuçtan yararlanarak q asimetrik normu yardımıyla tanımlanan asimetrik normlu lineer uzaylardaki q-kompakt kümeler, q yardımıyla X üzerinde tanımlanan (X, q^s) normlu uzayındaki q^s -kompakt kümeler ile ilişkisi bağlamında ele alınmıştır. $\theta_q(0)$ kullanılarak, q-kompakt ve q^s -kompakt kümeler arasındaki ilişkiye dair sonuç verilmiştir. Sonlu boyutlu asimetrik normlu uzaylarda kompaktlığa ilişkin sonuçlar özel olarak incelenmiştir.

Söz konusu çalışmalarda, tanımdan q-ön kompakt kümelerin q-sınırlı olduğu, fakat q-kompakt olmayabileceğine dair örnek verilmiştir. Ayrıca, q-ön kompakt kümelerin sonlu toplamının, sonlu birleşiminin ve q-ön kompakt bir kümenin konveks zarfının yine q-ön kompakt olduğu gösterilmiştir. Bir A kümesinin q-ön kompakt olması için gerek ve yeter koşulun q^{-1} -kapanışının q-ön kompakt olması gerektiği ispatlanmıştır. İncelenen makalelerde ayrıca (X, q) asimetrik normlu lineer uzayın her güçlü q-kompakt alt kümenin q- kompakt olduğu ispatlanmış, fakat q-kompakt bir kümenin güçlü q-kompakt olmak zorunda olmadığına dair örnek verilmiştir.

Asimetrik normlu uzaylarda kompaktlığın karakterizasyonu için incelenen makalelerde sağ sınırlılık kavramı gibi ek koşullar tanımlanmış, ayrıca q^{-1} asimetrik normu ve q^s normundan yararlanılmıştır ve asimetrik normlu uzaylarda kompaktlığın normlu uzaylardaki kompaktlıktan farklılık gösterdiği ortaya konmuştur.

Anahtar Kelimeler: Asimetrik Norm, Kompaktlık, Ön Kompaktlık, Banach Kafesleri, Topolojik Vektör Uzayları.

ABSTRACT

In this study, articles about compactness, precompactness, and other types of compactness in asymmetric normed linear spaces are reviewed. In the reviewed articles, compact sets in asymmetric normed spaces are characterized using the set $\theta_q(0) := \{x \in X : q(x) = 0\}$. It has been proven that for a subset K in the asymmetric normed linear space (X, q) to be q-compact, it is necessary and sufficient that the set $K + \theta_q(0)$ is compact with respect to the same topology. By using this result, q-compact sets in asymmetric normed linear spaces are investigated in relation to the q^s-compact sets in the normed space (X, q^s) . Using the set $\theta_q(0)$, a result regarding the relationship between q-compact and q^s-compact sets is presented. Compactness results in finite-dimensional asymmetric normed spaces are also examined in detail.

In the reviewed studies, it is shown by using the definition that q-precompact sets are q-bounded, but an example is provided to show that they may not be q-compact. Moreover, it is proved that the finite union and finite sum of q-precompact sets, as well as the convex hull of a q-precompact set, are also q-precompact. It is proven that a necessary and sufficient condition for a set A to be q-precompact is that its q^{-1}-closure is q-precompact. The reviewed articles also show that every strongly q-compact subset of an asymmetric normed linear space (X, q) is q-compact; however, an example is provided to show that a q-compact set need not be strongly q-compact.

To characterize compactness in asymmetric normed spaces, the reviewed articles introduces additional conditions such as the concept of right boundedness and uses the asymmetric norm q^{-1} and the norm q^s. It has been shown that compactness in asymmetric normed spaces differs from compactness in normed spaces.

Keywords: Asymmetric Norm, Compactness, Precompactness, Banach Lattices, Topological Vector Spaces.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimimde ve bu tezin hazırlanmasında her türlü gösterdiği destek ve yardımlarından dolayı çok değerli hocam Doç. Dr. Ayşe SÖNMEZ'e en içten dileklerimle teşekkür ederim.

Bu çalışma boyunca yardımlarını ve desteklerini esirgemeyen sevgili aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{R}^+$	:	Pozitif reel sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	:	Doğal sayılar kümesi
m	:	Terimlerinin mutlak değerlerinin en küçük üst sınırı bir reel sayı olan tüm sayı dizilerinin oluşturduğu küme
c	:	Terimlerinin mutlak değerlerinin toplamı sonlu olan tüm sayı dizilerinin oluşturduğu küme
$\mathrm{conv}(A)$	:	A kümesinin konveks zarfı
$\overline{A}^q$	:	A kümesinin, q asimetrik normu tarafından üretilen topolojideki kapanışı

1. GİRİŞ

Matematiğin temel dallarından biri olan Fonksiyonel Analiz, özellikle normlu uzaylar, operatör teorisi ve yakınsaklık kavramları üzerine yoğunlaşarak modern matematiğin birçok alanında önemli uygulamalara sahiptir. Bu alanda, fonksiyon dizilerinin yakınsaklığı, kompaktlık ve süreklilik gibi kavramlar, 19. yüzyılın başlarından itibaren derinlemesine incelenmiştir.

Asimetrik normlu uzaylar, klasik normlu uzayların bir genellemesi olup, fonksiyonel analizde ve topoloji alanında önemli bir araştırma konusudur. Norm fonksiyonunun simetrik olma zorunluluğunun kaldırılmasıyla elde edilen bu uzaylarda, yakınsaklık, kompaktlık ve süreklilik gibi kavramlar klasik normlu uzaylara kıyasla farklı özellikler göstermektedir. Bu farklılıklar, asimetrik normlu uzayların yapısının daha iyi anlaşılmasını sağlamak ve bu uzaylarda geçerli olan temel teoremleri araştırmak için yeni yöntemler geliştirilmesini gerektirmiştir.

Asimetrik normlu uzaylarda kompaktlık kavramı, normlu uzaylarda olduğu gibi kapalı ve sınırlı kümelerle doğrudan ilişkilendirilmemektedir. Özellikle, bu uzaylarda kompaktlığın belirlenmesi için farklı kriterlerin tanımlanması gerekmektedir. Son yıllarda yapılan çalışmalar, bu tür uzaylarda kompaktlığın karakterizasyonunu sağlamak için farklı yöntemler geliştirmiştir. Stefan Cobzaş ın çalışması [1], asimetrik normlu uzayların yapısını anlamaya yönelik önemli katkılar sağlamış, bu uzaylarda topolojik ve analitik özelliklerin nasıl değiştiğine dair önemli sonuçlar ortaya koymuştur. Ayrıca, C. Alegre, I. Ferrando, L.M. García-Raffi, E.A. Sánchez Pérez [2] tarafından yapılan çalışmalar, asimetrik normlu uzaylarda kompaktlık kavramına dair detaylı incelemeler sunarak, klasik normlu uzaylardan farklı olarak yeni karakterizasyonlar önermiştir.

Bu tez çalışmasında, asimetrik normlu uzaylarda kompaktlık kavramı ele alınarak, bu uzaylarda kompaktlığın temel özellikleri ve karakterizasyonları incelenmiştir. Özellikle, literatürde önerilen yaklaşımlar göz önüne alınarak, bu uzaylardaki kompaktlık koşulları detaylandırılmış ve klasik normlu uzaylarla olan temel farklılıklar vurgulanmıştır. Çalışma, asimetrik normlu uzayların daha iyi anlaşılmasına katkı sağlamayı ve bu alandaki mevcut literatüre yeni bakış açıları kazandırmayı amaçlamaktadır.

2. ASİMETRİK NORMLU UZAYLAR

Bu bölümde tezde kullanılan temel kavramlar verilecektir. İlk olarak sözde metrik tanımı yaparak başlayacağız.

Tanım 2.1: [1] X boştan farklı bir küme olsun. $d : X \times X \to [0, \infty)$ fonksiyonuna her $x, y, z \in X$ için

$i)$ $d(x, y) \geq 0$ ve $d(x, x) = 0$

$ii)$ $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

$iii)$ $d(x, y) = d(y, x) = 0 \Rightarrow x = y$

koşullarını gerçeklerse X kümesi üzerinde tanımlı bir sözde metrik denir. (X, d) ikilisine ise *sözde metrik uzay* denir.

(X, d) sözde metrik uzay olmak üzere her $x, y \in X$ için $d^{-1}(x, y) = d(y, x)$ şeklinde tanımlı d^{-1} fonksiyonu da X üzerinde bir sözde metrik tanımlar ve d nin eşleniği olarak adlandırılır. Her $x, y \in X$ için $d^s(x, y) = max\{d(x, y), d^{-1}(x, y)\}$ fonksiyonu X üzerinde bir metriktir.

Tanım 2.2: [1] X kümesi üzerinde d sözde metriği tanımlanmış olsun. Bu uzayda $B_d(x, \varepsilon)$ açık yuvarı ve $B_d[x, \varepsilon]$ kapalı yuvarı sırasıyla

$$B_d(x, \varepsilon) = \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\},$$

$$B_d[x, \varepsilon] = \{y \in X : d(x, y) \leq \varepsilon\}$$

şeklinde tanımlanır.

X kümesi üzerinde d sözde metriği tanımlanmış olsun. Bu durumda

$$\mathcal{B}_x = \{B_d(x, \varepsilon) : \varepsilon > 0\}$$

ailesinin, x noktasının bir esas komşuluklar ailesi olduğu

$$\tau_d = \{G \subseteq X : \forall x \in G,\ \exists \varepsilon_x > 0,\ B_d(x, \varepsilon_x) \subseteq G\},$$

X kümesi üzerinde bir topolojidir.

(X, τ_d) topolojik uzayı T_0-uzayıdır. Yani her $x, y \in X$ $(x \neq y)$ için bir $G \subset X$ açık kümesi

$$(x \in G \text{ ve } y \notin G) \text{ veya } (x \notin G \text{ ve } y \in G)$$

sağlanacak şekilde bulunabilir.

Örnek 2.3: [1] (Sorgenfrey doğrusu) Her $x, y \in \mathbb{R}$ için

$$d(x,y) := \begin{cases} y - x \ , \ x \leq y \ \ ise \\ \quad 1 \ , \ x > y \ \ ise \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan d fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde bir sözde metriktir.

$\mathcal{U}_x = \{[x, x+\varepsilon) : 0 < \varepsilon < 1\}$ ailesi, τ_d topolojisi için $x \in \mathbb{R}$ noktasındaki komşuluk tabanını oluşturur.

$\mathcal{U}_x = \{(x-\varepsilon, x], \ 0 < \varepsilon < 1\}$ ailesi, x noktasının $\tau_{d^{-1}}$ komşuluklarının bir tabanını oluşturur.

Asimetrik normlu uzaylar, normlu uzayların bir genelleştirmesi olup, temel farkları norm fonksiyonunun asimetrik olmasıdır.

Tanım 2.4: [2] X bir reel vektör uzayı olsun. Eğer $q : X \to [0, \infty)$ fonksiyonu her $x, y \in X$ ve $\alpha \geq 0$ için

(1) $q(x) = q(-x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(2) $q(\alpha x) = \alpha q(x)$

(3) $q(x+y) \leq q(x) + q(y)$

koşullarını gerçeklerse bu fonksiyona X kümesi üzerinde tanımlı bir *asimetrik norm* denir. Bu durumda (X, q) ikilisine *asimetrik normlu uzay* denir.

X üzerinde tanımlı q asimetrik normu kullanılarak $q^{-1}(x) = q(-x)$ şeklinde tanımlanan $q^{-1} : X \to [0, \infty)$ fonksiyonu da bir asimetrik normdur. Ayrıca $q^s(x) = max\{q(x), q^{-1}(x)\}$ ile tanımlanan $q^s : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu X üzerinde uzayında bir norm tanımlar. Her $x, y \in X$ için asimetrik normlar için $q(x) \leq q^s(x)$ ve $q^{-1}(x) \leq q^s(x)$ gerçekleşir.

Her asimetrik normlu uzay bir sözde metrik uzaydır. Çünkü (X, q) bir asimetrik normlu uzay ise her $x, y \in X$ için

$$d_q(x,y) = q(y-x)$$

şeklinde tanımlı d_q fonksiyonu X üzerinde bir sözde metrik tanımlar. Dolayısıyla (X, q) asimetrik normlu uzayında, her $x \in X$ ve $\varepsilon > 0$ olmak üzere yuvarlar için aşağıdaki notasyonlar kullanılacaktır:

$$B_q(x, \varepsilon) = \{y \in X : q(y - x) < \varepsilon\}$$

$$B_q[x, \varepsilon] = \{y \in X : q(y - x) \leq \varepsilon\}.$$

Benzer tanımlar (X, q^{-1}) asimetrik normlu lineer uzayı için verilebilir.

(X, q) asimetrik normlu uzay ise X üzerinde

$$\mathcal{B}_x = \{B_q(x, \varepsilon) : \varepsilon > 0\}$$

ailesinin, x noktasının bir esas komşuluklar ailesi olduğu

$$\tau_q = \{G \subseteq X : \forall x \in G,\ \exists \varepsilon_x > 0,\ B_q(x, \varepsilon_x) \subseteq G\}$$

topolojisi tanımlanır. (X, τ_q) topolojik uzayı T_0-uzayıdır. Birbirinden farklı $x, y \in X$ noktaları için $x - y \neq 0$ olduğundan asimetrik norm tanımından $q(x - y) > 0$ veya $q(y - x) > 0$ gerçekleşir. Genelliği bozmaksızın $q(x - y) > 0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $0 < \varepsilon < q(x - y)$ seçilirse $x \in B_q(x, \varepsilon)$ fakat $y \notin B_q(x, \varepsilon)$ sağlanır. Yani (X, τ_q) topolojik uzayının T_0-uzayı olduğu gösterilmiş olur.

Benzer şekilde, (X, q) asimetrik normu verildiğinde eşlenik q^{-1} asimetrik normu kullanılarak X üzerinde üretilen topoloji $\tau_{q^{-1}}$ ile, ayrıca X üzerinde üretilen q^s normunun ürettiği topoloji τ_{q^s} ile gösterilecektir.

Eğer bir küme q (veya q^s) tarafından üretilen topolojiye göre kompakt ise kümeye q-kompakt (veya q^s-kompakt) diyeceğiz. Aynı şekilde q-açık ve q-kapalı kümeler (veya q^s-açık ve q^s-kapalı kümeler) kavramlarını kullanacağız.

$B_q(x, \varepsilon)$ yuvarı q-açıktır. Çünkü $y \in B_q(x, \varepsilon)$ için $r = \varepsilon - q(y - x) > 0$ olmak üzere $B_q(y, r) \subset B_q(x, \varepsilon)$ sağlanır. $B_q[x, \varepsilon]$ kümesine, x merkezli ε yarıçaplı kapalı yuvar denir. Fakat genelde bu küme q-kapalı değildir. Bunun için Örnek 2.5 incelenebilir. $B_q[x, \varepsilon]$ yuvarı q^{-1}-kapalıdır. Bu ifadeyi ispatlamak için $y \notin B_q[x, \varepsilon]$ alınsın. $q(y - x) > \varepsilon$ olduğundan $r = q(y - x) - \varepsilon > 0$ için $B_{q^{-1}}(y, r) \cap B_q[x, \varepsilon] = \emptyset$ eşdeğer olarak $B_{q^{-1}}(y, r) \subset X \backslash B_q[x, \varepsilon]$ sağlanır. Çünkü $z \in B_{q^{-1}}(y, r) \cap B_q[x, \varepsilon]$ olsa, bu durumda

$$q(y - x) \leq q(y - z) + q(z - x) = q^{-1}(z - y) + q(z - x) < r + \varepsilon = q(y - x)$$

çelişkisi elde edilirdi. Dolayısıyla $X \backslash B_q[x, \varepsilon]$ kümesi q^{-1}-açık olduğundan $B_q[x, \varepsilon]$ yuvarı q^{-1}-kapalı bulunur.

(X, q) asimetrik normlu uzayında, $q(x) \leq q^s(x)$ ve $q^{-1}(x) \leq q^s(x)$ olduğundan

$$B_{q^s}(x, \varepsilon) \subset B_q(x, \varepsilon) \text{ ve } B_{q^s}(x, \varepsilon) \subset B_{q^{-1}}(x, \varepsilon)$$

kapsamaları gerçekleşir. Sonuç olarak τ_{q^s} topolojisi, τ_q ve $\tau_{q^{-1}}$ topolojilerinden daha incedir.

Örnek 2.5: [1] Reel sayılarda $u(a) = a^+ := \max\{a, 0\}$ bir asimetrik normdur. Bu durumda $a \in \mathbb{R}$ için $u^{-1}(a) = a^{-1} := \max\{-a, 0\}$ ve $u^s(a) = |a|$ şeklinde tanımlanır. u tarafından üretilen τ_u topolojisine $\mathbb{R}$ nin üst topolojisi, u^{-1} tarafından üretilen $\tau_{u^{-1}}$ topolojisine $\mathbb{R}$ nin alt topolojisi denir. τ_u topolojisine göre $\{(-\infty, a+\varepsilon) : \varepsilon > 0\}$ ailesi, x noktasının bir komşuluk tabanıdır. $\tau_{u^{-1}}$ topolojisine göre ise $\{(a - \varepsilon, \infty) : \varepsilon > 0\}$ ailesi x noktasının bir komşuluk tabanıdır.

τ_u topolojisinde $B_u[x, \varepsilon] = (-\infty, x + \varepsilon]$ kapalı yuvarı açık değildir. Çünkü $(x + \varepsilon, \infty) \notin \tau_u$ gerçekleşir.

Bu uzayda toplama işlemi, $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \tau_u \times \tau_u)$ uzayından $(\mathbb{R}, \tau_u)$ uzayına süreklidir. Ancak çarpma işlemi, herhangi bir $(a, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ noktasında sürekli değildir.

Toplama işleminin sürekliliği doğrudan kanıtlanabilir. Son ifadenin doğruluğunu görmek için, $\varepsilon > 0$ olmak üzere $\alpha\beta$ nın $V = (-\infty, \alpha\beta + \varepsilon)$ τ_u-komşuluğunu göz önüne alalım. Yeterince büyük $n \in \mathbb{N}$ için $-n$, α ve β nın τ_u-komşuluklarına aittir fakat $n^2 = (-n)(-n)$ çarpımı V ye ait değildir.

Genel olarak, asimetrik bir norm tarafından üretilen topoloji T_0 ancak T_1 değildir. Gerçekten de, Örnek 2.5 teki $(\mathbb{R}, u)$ uzayının T_0 olduğu ancak -1 in, 1 in her komşuluğuna ait olduğu görülür.

Asimetrik normlu uzaylarda toplama işlemi daima sürekli fakat skalerle çarpma işlemi sürekli değildir. Ancak negatif olmayan skalerler ile çarpma işlemi süreklidir.

Lemma 2.6: [3] (X, q) asimetrik normlu uzay olsun. $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ üzerinde Öklid topolojisi varsa $(\mu, x) \rightarrow \mu x$ ile tanımlı $(\mathbb{R}^+ \cup \{0\}) \times X \rightarrow X$ fonksiyonu süreklidir.

İspat. $\varepsilon > 0$ ve $(\mu, x) \in (\mathbb{R}^+ \cup \{0\}) \times X$ olsun. $\delta_1 q^s(x) < \frac{\varepsilon}{2}$ sağlanacak şekilde $\delta_1 > 0$ vardır. $\mu \geq 0$ olduğundan $\delta_2 := \frac{\varepsilon}{2}(\mu + \delta_1)$ biçiminde tanımlanırsa $\delta_2 > 0$ olur.

$|\lambda-\mu|<\delta_1$ sağlayan $\lambda\geq 0$ ve $y\in B_q(x,\delta_2)$ için

$$\begin{aligned} q(\lambda y-\mu x) &= q(\lambda y-\lambda x+\lambda x-\mu x) \\ &\leq q(\lambda y-\lambda x)+q(\lambda x-\mu x) \\ &\leq \lambda q(y-x)+q^s(\lambda x-\mu x) \\ &< (\mu+\delta_1)\frac{\varepsilon}{2(\mu+\delta_1)}+|\lambda-\mu|q^s(x) \\ &< \frac{\varepsilon}{2}+\delta_1\cdot q^s(x)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon \end{aligned}$$

gerçekleşir. Böylece negatif olmayan skaler ile çarpma işleminin sürekli olduğu gösterilmiş olur. □

(X,q) bir asimetrik normlu uzay ve (x_n), X de bir dizi olsun. τ_q topolojisine göre (x_n) dizisinin x e yakınsaması $x_n\xrightarrow{q}x$ ile gösterilip aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$x_n\xrightarrow{q}x\Leftrightarrow q(x_n-x)\to 0.$$

Benzer şekilde q^{-1} için,

$$x_n\xrightarrow{q^{-1}}x\Leftrightarrow q^{-1}(x_n-x)\to 0\Leftrightarrow q(x-x_n)\to 0$$

şeklinde tanımlanır [1].

2.1. Asimetrik Normlu Uzaylarda Kompakt Kümeler

(X,q) asimetrik normlu lineer uzay ve $x\in X$ olmak üzere

$$\theta_q(x)=\{y\in X: d_q(x,y)=q(y-x)=0\}$$

kümesi tanımlanır. Özel olarak $x=0$ alınırsa;

$$\theta_q(0)=\{y\in X: d_q(0,y)=q(y)=0\}$$

kümesi elde edilir [4]. Normlu uzaylarda $\theta_q(x)=\{x\}$ ve özel olarak $\theta_q(0)=\{0\}$ gerçeklendiği kolayca görülebilir. Asimetrik normlu uzayda ise asimetrik norma bağlı olarak farklı kümeler elde edilir. Örneğin, Örnek 2.5 deki asimetrik normlu uzay için

$$\theta_u(x)=\{y\in\mathbb{R}: u(y-x)=max\{y-x,0\}=0\}=(-\infty,x],$$

özel olarak $\theta_u(0)=(-\infty,0]$ bulunur.

Şimdi $\theta_q(x)$ kümesine dair [4] nolu çalışmalarda verilen birkaç gözlemi ifade edip ispatlayacağız.

$\theta_q(x)$ kümesinin $(X, \tau_{q^{-1}})$ asimetrik normlu uzayında $\{x\}$ kümesinin kapanışı olduğu görülebilir.

$y \in \theta_q(x)$ ise $q(y-x) = 0$ yani $q^{-1}(x-y) = 0$ ve her $\varepsilon > 0$ reel sayısı için $q^{-1}(x-y) < \varepsilon$, bir diğer deyişle her $\varepsilon > 0$ için $x \in B_{q^{-1}}(y, \varepsilon)$ gerçekleşir. Bu durumda y, $\{x\}$ kümesinin $\tau_{q^{-1}}$ asimetrik normlu uzaydaki kapanışına ait olur. $\{x\}$ kümesinin $\tau_{q^{-1}}$ uzayındaki kapanışına ait her noktasının $\theta_q(x)$ e ait olduğu kolayca gösterilebilir.

(X, q) asimetrik normlu uzayının T_1-uzayı olması için gerek ve yeter koşul $\theta_q(0) = \{0\}$ olmasıdır. Bu ifadeyi ispatlamak için ilk olarak (X, q) bir T_1-uzayı fakat $\theta_q(0) \neq \{0\}$ olsa, bu durumda $x \neq 0$ olacak şekilde bir $x \in \theta_q(0)$ var olduğunu gözlemleyelim. X, T_1- uzayı olduğundan öyle bir $\varepsilon_0 > 0$ vardır ki $x \notin B_q(0, \varepsilon_0)$ gerçekleşir. Yani $q(x) \geqslant \varepsilon_0$ olması anlamına gelir, bu ise $q(x) = 0$ olması ile çelişir. Dolayısıyla (X, q) bir T_1- uzayı ise $\theta_q(0) = \{0\}$ bulunur.

$\theta_q(0) = \{0\}$ fakat $(X, q), T_1-$ uzayı olmadığı durumda birbirinden farklı öyle $x, y \in X$ noktaları vardır ki her $\varepsilon > 0$ için $y \in B_q(x, \varepsilon)$ gerçekleşir. Yani

$$q(y-x) < \varepsilon \quad (\forall \varepsilon > 0) \Rightarrow q(y-x) = 0$$

ve $\theta_q(0) = \{0\}$ kabul ettiğimizden $y - x = 0$ yani $y = x$ çelişkisi elde edilir. Sonuç olarak $\theta_q(0) = \{0\}$ ise (X, q) uzayı T_1- uzayı bulunur.

Her $x, y \in \theta_q(0)$ ve $\alpha \geq 0$ için $\alpha x \in \theta_q(0)$ ve $x + y \in \theta_q(0)$ gerçeklendiği asimetrik norm özellikleri kullanılarak kolayca görülebilir. Sonuç olarak $\theta_q(0)$ konveks konidir.

Lemma 2.7: [4] (X, q) asimetrik normlu lineer uzay ve $A \subset X$ olsun. Burada

$$A + \theta_q(0) = \{z \in X : z = x + y,\ x \in A\ ve\ y \in \theta_q(0)\}$$

olmak üzere

$$\bigcup_{x \in A} \theta_q(x) = A + \theta_q(0)$$

eşitliği gerçekleşir.

İspat. $z \in \bigcup_{x\in A} \theta_q(x)$ olsun. Bu durumda öyle bir $x \in A$ vardır ki $q(z-x) = 0$ gerçekleşir. $z - x = y$ yazılırsa $z = x + y$ ve $y \in \theta_q(0)$ elde edilir.

Bu durumda $z = x + y \in A + \theta_q(0)$ dır. Böylece $\bigcup_{x\in A} \theta_q(x) \subset A + \theta_q(0)$ olduğu görülür.

Ters kapsamayı göstermek için $w \in A + \theta_q(0)$ olsun. Bu durumda öyle bir $x \in A$ ve $y \in \theta_q(0)$ vardır ki, $w = x + y$ yani $w - x = y$ bulunur. Bu durumda $q(w-x) = q(y) = 0$ gerçekleşir. Böylece $w \in \theta_q(x)$ ve $w \in \bigcup_{x\in A} \theta_q(x)$ bulunur. Buradan

$$A + \theta_q(0) \subset \bigcup_{x\in A} \theta_q(x)$$

kapsaması elde edilir. Dolayısıyla $\bigcup_{x\in A} \theta_q(x) = A + \theta_q(0)$ elde edilir. □

Lemma 2.8: [4] (X,q) asimetrik normlu lineer uzay ve $x \in X$ olsun. Bu durumda

$$B_q(x,\varepsilon) = B_q(x,\varepsilon) + \theta_q(0)$$

eşitliği gerçekleşir.

İspat. $z \in B_q(x,\varepsilon) + \theta_q(0)$ olsun. Bu durumda öyle bir $y \in B_q(x,\varepsilon)\ ve\ w \in \theta_q(0)$ vardır ki $z = y + w$ dır. O halde

$$q(z-x) = q(y+w-x) \leq q(y-x) + q(w) < \varepsilon + 0 = \varepsilon$$

sağlanır. Bu durumda $z \in B_q(x,\varepsilon)$ ve dolayısıyla $B_q(x,\varepsilon) + \theta_q(0) \subset B_q(x,\varepsilon)$ olduğu görülür.

$0 \in \theta_q(0)$ ve her $x \in B_q(x,\varepsilon)$ elemanı $x = x + 0$ şeklinde yazılabildiğinden

$$B_q(x,\varepsilon) \subset B_q(x,\varepsilon) + \theta_q(0)$$

gerçekleşir. Sonuç olarak $B_q(x,\varepsilon) = B_q(x,\varepsilon) + \theta_q(0)$ eşitliği elde edilir. □

Lemma 2.9: [4] (X,q) asimetrik normlu lineer uzay ve A kümesi X in açık bir alt kümesi olsun. Bu durumda

$$A = A + \theta_q(0)$$

eşitliği sağlanır.

İspat. $A \subset A + \theta_q(0)$ olduğu kolayca görülebilir çünkü $0 \in \theta_q(0)$ dır. Kapsamanın tersini göstermek için $z \in A + \theta_q(0)$ alınsın. Bu durumda öyle bir $x \in A$ *ve* $y \in \theta_q(0)$ vardır ki $z = x + y$ yazılabilir. A açık bir küme olduğu için $B_q(x, \varepsilon) \subset A$ gerçeklenecek şekilde bir $\varepsilon > 0$ reel sayısı vardır. Bir önceki lemmadan $B_q(x, \varepsilon) = B_q(x, \varepsilon) + \theta_q(0)$ eşitliği bilindiğinden $z \in A$ bulunur. □

Lemma 2.10: [4] (X, q) asimetrik normlu lineer uzayında $\{A_i : i \in I\}$ küme ailesi verilsin. O halde

$$\bigcup_{i \in I}(A_i + \theta_q(0)) = \Big(\bigcup_{i \in I} A_i\Big) + \theta_q(0)$$

gerçekleşir.

İspat. $x \in \bigcup_{i \in I}(A_i + \theta_q(0))$ ise en az bir $i \in I$ için $x \in A_i + \theta_q(0)$ gerçekleşir. Bu durumda uygun bir $x_i \in A_i$ *ve* $z \in \theta_q(0)$ için $x = x_i + z$ yazılabilir. $x_i \in \bigcup_{i \in I} A_i$ ve $x = x_i + z$ olduğundan $x \in (\bigcup_{i \in I} A_i) + \theta_q(0)$ bulunur.

$x \in \big(\bigcup_{i \in I} A_i\big) + \theta_q(0)$ ise bu durumda uygun bir $i \in I$ için $x_i \in A_i$ *ve* $z \in \theta_q(0)$ için $x = x_i + z$ yazılabilir ve $x \in \bigcup_{i \in I}(A_i + \theta_q(0))$ bulunur. □

Önerme 2.11: [4] (X, q) asimetrik normlu lineer uzay ve $K \subset X$ olsun. K kümesinin τ_q topolojisine göre kompakt olması için gerek ve yeter koşul $K + \theta_q(0)$ kümesinin aynı topolojiye göre kompakt olmasıdır.

İspat. K kompakt ve $\{A_i : i \in I\}$ ailesi $K + \theta_q(0)$ ın herhangi bir açık örtüsü olsun. Her A_i açık olduğundan Lemma 2.9 nedeniyle

$$A_i = A_i + \theta_q(0)$$

eşitliği sağlanır. Lemma 2.10 dan

$$K + \theta_q(0) \subset \Big(\bigcup_{i \in I} A_i\Big) + \theta_q(0)$$

bulunur. K kompakt olduğundan, K nın $K \subset \bigcup_{j \in J} A_j$ sağlayan $\{A_j : j \in J \subset I\}$ sonlu alt örtümü vardır. Lemma 2.10 tekrar uygulanırsa $K + \theta_q(0) \subset \bigcup_{j \in J}(A_j + \theta_q(0))$ elde edilir. Bu ise $\{A_j + \theta_q(0) : j \in J \subset I\}$ kümesinin $K + \theta_q(0)$'ın sonlu bir alt örtüsü olduğu anlamına gelir. Dolayısıyla $K + \theta_q(0)$ kompakt bulunur. Şimdi $K + \theta_q(0)$ kompakt olsun. K nın herhangi bir $\{A_i : i \in I\}$ açık örtüsü için $\{A_i + \theta_q(0) : i \in I\}$

$K + \theta_q(0)$ ın bir açık örtüsüdür. $K + \theta_q(0)$ kompakt olduğundan bu örtülüşten sonlu $\{A_j + \theta_q(0) : j \in J \subset I\}$ sonlu alt örtüsü elde edilir. Lemma 2.10 dan

$$K + \theta_q(0) \subset \bigcup_{j\in J} A_j + \theta_q(0) \Rightarrow K \subset \bigcup_{j\in J} A_j$$

ve $\{A_j : j \in J \subset I\}$, K nın $\{A_i : i \in I\}$ açık örtüsünün bir sonlu alt örtüsü olarak elde edilir. Böylece K kompakt bulunur. $\square$

Sonuç 2.12: [4] $K_0 \subset K + \theta_q(0)$ kapsaması gerçeklensin. Eğer $K + \theta_q(0)$ kompakt küme ve $K_0 + \theta_q(0) = K + \theta_q(0)$ ise, bu durumda K_0 da kompakt kümedir.

K kümesi (X, q^s) in kompakt bir kümesi ise, bu durumda $K + \theta_q(0)$, (X, q) nun kompakt bir kümesidir.

2.2. Sonlu Boyutlu Asimetrik Normlu Uzaylar

(X, q) bir asimetrik normlu lineer uzay ve $M \subset X$ olsun. τ_q yardımıyla M üzerinde tanımlanan alt uzay topolojisi kompakt ise M kümesine bu topolojik uzayda kompakttır denir.

Bir $M \subset X$ kümesi, içerdiği her dizinin, limiti yine M de olan yakınsak bir alt diziye sahip olması durumunda kompakt olur.

Lemma 2.13: [4] $(X, \|.\|)$, $\{e_1, ..., e_n\}$ tabanına sahip sonlu boyutlu lineer uzay olsun. X de $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisinin $x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_n e_n$'e yakınsaması için gerek ve yeter koşul her $i = 1, 2, ..., n$ için $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisinin i-inci koordinat dizisinin Öklid normuna göre λ_i ye yakınsamasıdır.

Sonlu boyutlu lineer uzaylarda dizilerin yakınsaklığına ilişkin sonuç asimetrik normlu lineer uzaylar için aşağıdaki teorem yardımıyla genelleştirilmektedir [4].

Teorem 2.14: [4] (X, q), $\{e_1, ..., e_n\}$ tabanına sahip sonlu boyutlu bir T_1 asimetrik normlu lineer uzay olsun. Bu durumda X de $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisinin q normuna göre $x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_n e_n$ e yakınsaması için gerek ve yeter koşul her $i = 1, ..., n$ için $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ nın i-inci koordinat dizilerinin Öklid normuna göre λ_i ye yakınsamasıdır.

*İspat.*Öncelikle $i = 1, 2, \ldots, n$ olmak üzere, $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisinin i-inci koordinatının Öklid normuna göre λ_i ye yakınsadığını varsayalım. $M > 0$ reel bir sayı ve $\frac{\varepsilon}{n}$ verilmiş olsun. Her i için $k \geq k_0^i$ iken

$$|(x_k)_i - \lambda_i| < \frac{\varepsilon}{nM}$$

sağlanacak şekilde k_0^i vardır. $k_0 = \max\{k_i^0 : i = 1, \ldots, n\}$ olsun. O halde M sabiti, q^s normu ve Öklid normunun eşdeğer olması nedeniyle varolan pozitif reel sayı olmak üzere $k \geq k_0$ için

$$q(x_k - x) \leq \sum_{i=1}^{n} q((x_k)_i - \lambda_i) \leq \sum_{i=1}^{n} q^s((x_k)_i - \lambda_i) \leq \sum_{i=1}^{n} M|(x_k)_i - \lambda_i| \leq \varepsilon,$$

sağlanır.

$(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisinin, X üzerinde q asimetrik normuna göre 0 a yakınsadığını varsayalım . Ancak bazı $n_0 \in \{1, \ldots, n\}$ için $((\lambda_k)_{n_0})_{k\in\mathbb{N}}$ dizisinin Öklid normuna göre 0 a yakınsamadığını varsayalım. Burada her $k \in \mathbb{N}$ için

$$x_k = (\lambda_k)_1 e_1 + (\lambda_k)_2 e_2 + \cdots + (\lambda_k)_n e_n$$

şeklindedir. Bu durumda öyle bir $r > 0$ vardır ki her $k \in \mathbb{N}$ için $|(\lambda_k)_{n_0}| > r$ olduğunu varsayabiliriz. Her $k \in \mathbb{N}$ için $M_k = \max\{|(\lambda_k)_i| : i = 1, \ldots, n\}$ tanımlayalım. $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisini her $k \in \mathbb{N}$ için $y_k = x_k/M_k$ şeklinde tanımlayalım. Bu durumda her $k \in \mathbb{N}$ için

$$q(y_k) = \frac{q(x_k)}{M_k} < \frac{q(x_k)}{r}$$

geçerli olur ve dolayısıyla $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi q asimetrik normuna göre 0 a yakınsar.

$(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisinin sadece -1 ve 1 terimlerini içeren koordinat alt dizisine sahip bir koordinat dizinin var olduğunu gözlemleyelim.

$m \in \{1, \ldots, n\}$ olmak üzere bu alt diziyi $((\lambda_{kj})_m)_{j\in\mathbb{N}}$ ile gösterelim. $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisinin bu koşulu sağlayan $(y_{kj})_{j\in\mathbb{N}}$ alt dizisini ve $((\lambda_{kj})_1)_{j\in\mathbb{N}}$ birinci koordinat dizisini göz önüne alalım. $((\lambda_{kj})_1)_{j\in\mathbb{N}}$ dizisinin yakınsak bir alt dizisi vardır. Bu süreci n-inci bileşene kadar devam ettirerek, $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisinin bir $(y_{kl})_{l\in\mathbb{N}}$ alt dizisini elde ederiz ki bu alt dizinin her koordinat dizisi yakınsamaktadır; ancak m-inci koordinat alt dizisi yalnızca -1 ve 1 terimlerinden oluşmaktadır. Dolayısıyla, $(y_{kl})_{l\in\mathbb{N}}$ dizisi q^s normuna göre sıfırdan farklı bir y noktasına yakınsar.

Ancak $l \in \mathbb{N}$ için $q(y) \leq q(y - y_{kl}) + q(y_{kl})$ tüm geçerli olduğundan lemma 2.13 nedeniyle $q(y) = 0$ elde edilir, bu ise $y = 0$ anlamına gelir ki bu bir çelişkidir.

Böylece $i = 1, \ldots, n$ için her koordinat dizisi $((\lambda_k)_i)_{k\in\mathbb{N}}$ yakınsamaktadır.

Sonuç olarak, $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi q'ya göre x'e yakınsıyorsa, $(x_k - x)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi q ya göre 0 a yakınsar. Dolayısıyla her i için $((x_k)_i - (x)_i)_{k\in\mathbb{N}}$ koordinat dizisi 0 a yakınsar. Bu da $((x_k)_i)_{i\in\mathbb{N}}$ i-inci koordinat dizisinin $(x)_i$ i-inci koordinatına yakınsadığını gösterir. □

Tanım 2.15: [4] (X, q) asimetrik normlu lineer uzayına, X üzerinde $\tau_q = \tau_{\|.\|}$ olacak şekilde bir $\|.\|$ normu varsa normlanabilirdir denir.

Sonuç 2.16: [4] (X, q) sonlu boyutlu T_1 asimetrik normlu bir lineer uzay olsun.
O halde (X, q), q^s normu ile normlanabilirdir.

İspat.$(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi X kümesinde q ya göre x noktasına yakınsayan bir dizi olsun. Lemma 2.13 ve Teorem 2.14 e göre, $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi q^s normuna göre de x noktasına yakınsar. □

Sonuç 2.16 ya göre sonlu boyutlu durumda T_1 ayırma aksiyomunu sağlanıyorsa T_2 ayırma aksiyomunu da sağlanır.

Teorem 2.17: [4] (X, q), T_1 asimetrik normlu bir lineer uzay olsun. $B_q[0, 1]$ birim yuvarının kompakt olması için gerek ve yeter koşul uzayın sonlu boyutlu olmasıdır.

İspat.$B_q[0, 1]$, (X, q) nun kompakt bir alt kümesi olsun. Bir önceki sonuç nedeniyle, $B_q[0, 1]$, (X, q^s) uzayında da kompakttır. $B_{q^s}[0, 1] \subseteq B_q[0, 1]$ ve $B_{q^s}[0, 1]$, (X, q^s) de kapalı olduğundan (X, q^s) de kompakt bulunur. (X, q^s) ve böylece (X, q) sonlu boyutlu bulunur.

Tersine, $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ kümesinin (X, q) uzayının bir tabanı olduğunu varsayalım. Bu durumda her $x \in X$ elemanı

$$x = \lambda_1(x)e_1 + \lambda_2(x)e_2 + \cdots + \lambda_n(x)e_n$$

şeklinde ifade edilebilir.

Böylece, $\lambda_i : X \to \mathbb{R}$ olmak üzere n adet lineer fonksiyon tanımlamış oluruz. Teorem 2.14 e göre, her bir λ_i fonksiyonu (X, q) uzayından Öklid normu ile donatılmış $\mathbb{R}$'ye sürekli bir fonksiyondur. Bu nedenle, her $i = 1, \ldots, n$ için

$$|\lambda_i(x)| \leq M_i q(x) \quad (\forall x \in X)$$

gerçeklenecek şekilde pozitif reel $M_i > 0$ sabitleri vardır. Şimdi $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $B_q[0,1]$ de bir dizi olsun. Bu durumda $|\lambda_i(x_k)| \leq M_i$, $i = 1,\ldots,n$, $k \in \mathbb{N}$ gerçeklenir. Böylece birinci koordinat dizisi $(\lambda_1(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ sınırlıdır ve bu nedenle yakınsak bir alt diziye sahiptir. $(\lambda_2(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ ikinci koordinat dizisi de yakınsak bir alt diziye sahiptir. Bu işlemi sürdürerek, $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisinin her koordinat dizisi yakınsak olan bir $(x_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ alt dizisini elde ederiz. Teorem 2.14 e göre $(x_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$, q^s normuna göre bir $y \in X$ noktasına yakınsar.

Ayrıca, $q(x_{k_j}) \leq 1$ ve her $j \in \mathbb{N}$ için $q(y) - q(x_{k_j}) < q(y - x_{k_j})$ eşitsizliklerinden dolayı $q(y) \leq 1$ elde edilir. Sonuç olarak, $Bq[0,1]$ kümesi (X, q^s) normlu uzayında kompakt bir kümedir ve dolayısıyla bir önceki sonuca göre (X, q) uzayında da kompakt bulunur. □

Teorem 2.18: [4] (X, q) sonlu boyutlu asimetrik normlu bir lineer uzay olsun. (X, q) nun normlanabilir olması için gerek ve yeter koşulu her kompakt kümenin kapalı olmasıdır.

İspat.(X, q) sonlu boyutlu asimetrik normlu uzayında her kompakt küme kapalı fakat (X, q) normlanabilir olmadığı durumda Sonuç 2.16 ya göre Hausdorff uzayı değildir. X de öyle bir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi ve $x, y \in X$ $(x \neq y)$ noktaları vardır ki τ_q topolojisine göre $x_n \xrightarrow{q} x$ ve $x_n \xrightarrow{q} y$ gerçekleşir. $K = \{x\} \cup \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, (X, q) da kompakt ve $y \in \overline{K} - K$ olduğundan, K kapalı olamaz. Dolayısıyla (X, q) normlanabilirdir.

Sonlu boyutlu normlu uzaylarda bir alt kümenin kompakt olması için gerek ve yeter koşul kapalı ve sınırlı olması olduğudan, sonlu boyutlu asimetrik normlu uzay normlanabilir ise her kompakt küme kapalıdır. □

Şimdi q asimetrik normu ve q^s normu tarafından üretilen yuvarlar arasındaki ilişkiye dair sonuçlar verilecektir.

Not 2.19: [3] Her $x \in X$ için $q(x) \leq q^s(x)$ eşitsizliği sağlandığından, aşağıdaki kapsama ilişkileri her zaman geçerlidir:

$$B_{q^s}(x,\varepsilon) + \theta_q(0) \subset B_q(x,\varepsilon) \quad \text{ve} \quad B_{q^s}[x,\varepsilon] + \theta_q(0) \subset B_q[x,\varepsilon] \qquad (1)$$

İlk kapsamayı göstermek için $w \in B_{q^s}(x,\varepsilon)+\theta_q(0)$ alınsın. Uygun $y \in B_{q^s}(x,\varepsilon)$ ve $z \in \theta_q(0)$ için $w = y + z$ şeklinde ifade edilebilir. Bu durumda

$$q(w-x) \leq q(w-y) + q(y-x) = q(z) + q(y-x) \leq q^s(y-x) < \varepsilon$$

yani $w \in B_q(x, \varepsilon)$ bulunur. İkinci kapsama da benzer şekilde gösterilebilir.

Tanım 2.20: [3] X reel vektör uzayı olsun. X üzerinde tanımlı q ve p asimetrik normlarının eşdeğer olması için gerek ve yeter koşul

$$\kappa q(x) \leqslant p(x) \leqslant \lambda q(x) \quad (\forall x \in X)$$

(eşdeğer olarak $\lambda B_q[0,1] \subseteq B_p[0,1] \subseteq \kappa B_q[0,1]$) sağlanacak şekilde $\kappa > 0$ ve $\lambda > 0$ reel sayılarının var olmasıdır.

X üzerinde eşdeğer iki normun aynı topolojiyi ürettiği kolayca görülebilir.

Lemma 2.21: [3] p ve q, X üzerinde eşdeğer iki norm olsun. Bu durumda q^s ve p^s eşdeğer ve $\theta_p(0) = \theta_q(0)$ gerçekleşir.

Tanım 2.22: [4] Bir X vektör uzayındaki q asimetrik normuna ancak ve ancak

$$rB_q[0,1] \subset B_{q^s}[0,1] + \theta_q(0)$$

koşulunu sağlayan bir $r > 0$ sabiti varsa sağ sınırlı denir.

Bu durumda ayrıca $B_q[0,1]$ sağ sınırlıdır denir. Özel olarak $r = 1$ ise, q asimetrik normuna, 1-sınırlı denir.

Uyarı 2.23: [3] (X, q) asimetrik normlu lineer uzay olsun. q normunun $1-$ sınırlı olması için gerek ve yeter koşul

$$B_q[0,1] = B_{q^s}[0,1] + \theta_q(0)$$

olmasıdır.

Bu eşitliği göstermek için sağ sınırlılık tanımı ve (1) ile ifade edilen kapsamalar kullanılabilir.

Lemma 2.24: [3] (X, q) asimetrik normlu uzayını sağ sınırlı olması için gerek ve yeter koşul

$$B_q[0,1] \subset K + \theta_q(0)$$

kapsaması sağlanacak şekilde q^s-sınırlı bir K kümesinin var olmasıdır.

İspat.(X, q) sağ sınırlı olsun. Bu durumda

$$rB_q[0,1] \subset B_{q^s}[0,1] + \theta_q(0)$$

sağlanacak şekilde $r > 0$ vardır. $K := \frac{1}{r}B_{q^s}[0,1]$ biçiminde tanımlanan K kümesi q^s-sınırlıdır ve

$$B_q[0,1] \subset K + \frac{1}{r}\theta_q(0) = K + \theta_q(0)$$

sağlanır. Tersine $B_q[0,1] \subset K + \theta_q(0)$ olacak şekilde bir K, q^s-sınırlı kümesi var olsun. $K \subset hB_{q^s}[0,1]$ olacak şekilde $h > 0$ sayısı göz önüne alınsın. Bu durumda,

$$B_q[0,1] \subset K + \theta_q(0) \subset hB_{q^s}[0,1] + \theta_q(0) = hB_{q^s}[0,1] + h\theta_q(0)$$

olur. Böylece $1/hB_q[0,1] \subset B_{q^s}[0,1] + \theta_q(0)$, yani q sağ sınırlı bulunur. $\square$

2.3. 1-Sınırlı Eşdeğer Asimetrik Norm

(X,p) asimetrik normlu lineer uzay olmak üzere, [5] numaralı çalışmada p den yararlanarak her $x \in X$ için

$$q_p(x) := \inf\{p^s(x-y) \mid y \in \theta_p(0)\}.$$

şeklinde tanımlanan $q_p : X \to [0,\infty)$ fonksiyonunun bir asimetrik norm olduğu ve aşağıdaki özellikleri sağladığı ispatlanmıştır.

(p1) $p(x) \leq q_p(x)$ her $x \in X$ için,

(p2) $B_{q_p}[0,1] \subseteq B_p[0,1]$,

(p3) $B_{q_p}[0,1] = B_{p^s}[0,1] + \theta_p(0)$,

(p4) p nin q_p ye eşdeğer olması için gerek ve yeter koşul p nin sağ sınırlı olmasıdır.

q_p normunun ayrıca aşağıdaki özellikleri sağladığı ispatlanmıştır [3].

Lemma 2.25: [3] (X,p) asimetrik normlu uzay olsun. Aşağıdaki ifadeler geçerlidir:

(p5) $\theta_p(0) = \theta_{q_p}(0)$ (diğer bir deyişle, $p(x) = 0$ ancak ve ancak $q_p(x) = 0$),

(p6) $p^s = q_p^s$ (özellikle $B_{p^s}[0,1] = B_{q_p^s}[0,1]$),

(p7) q_p, 1-sınırlıdır,

(p8) $B_{q_p}[0,1] = B_p[0,1]$ eşitliğinin geçerli olması için gerek ve yeter koşul p nin 1-sınırlı olmasıdır.

Lemma 2.26: [3] X vektör uzayı üzerinde q ve p eşdeğer asimetrik normlar olsun. Bu durumda, q nun sağdan sınırlı olması için gerek ve yeter koşul p nin sağdan sınırlı olmasıdır.

İspat. q ve p eşdeğer olduğundan, Lemma 2.21 nedeniyle q^s ve p^s de eşdeğerdir ve $\theta_q(0) = \theta_p(0)$ sağlanır. Bu durumda, q_p ile q_q de eşdeğerdir. Eğer q sağdan sınırlı ise, (p4) özelliğinden dolayı q, q_q ya eşdeğerdir ve q_q da q_p ye eşdeğer olduğundan, p de q_p ye eşdeğerdir. Dolayısıyla, (p4) özelliği tekrar kullanılarak p nin sağdan sınırlı olduğu sonucu elde edilir. $\square$

A, X vektör uzayının konveks ve yutan (absorbing) alt kümesi olsun. Bu durumda A kümesinin g_A ölçüm fonksiyoneli

$$g_A(x) = \inf\{t > 0 \mid x \in tA\}, \quad x \in X$$

şeklinde tanımlanır. Bu fonksiyonelin bazı temel özellikleri aşağıda sıralanmıştır:

(a) $g_A(x+y) \leq g_A(x) + g_A(y)$ $(\forall x, y \in X)$

(b) $g_A(tx) = tg_A(x)$ ($\forall t \geq 0$ ve $\forall x \in X$)

(c) $\{x \in X \mid g_A(x) < 1\} \subset A \subset \{x \in X \mid g_A(x) \leq 1\}$,

(d) Eğer $X = \mathbb{R}^n$ ve A, $\mathbb{R}^n$ nin Öklid topolojisine göre kapalı bir küme ise, bu durumda

$$A = \{x \in X \mid g_A(x) \leq 1\}$$

gerçekleşir.

Burada verilen tanım ve özellikler için [6, 7] numaralı kaynaklar kullanılabilir.

Ayrıca eğer A hiçbir doğru içermiyorsa, bu durumda g_A aşağıda verilen özelliği sağlar [3]:

(e) $g_A(x) = 0 = g_A(-x) \Rightarrow x = 0$.

Örnek 2.27: [3] $B_q[0,1]$ kapalı birim yuvarın sağ sınırlı fakat q-kompakt olmadığı sonlu boyutlu (X, q) asimetrik nomrlu uzayı vardır.

İspat. $X = \mathbb{R}^2$ olsun.

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq \frac{1}{x-2} + 2,\ x < 2\right\}$$

ve $q : X \to [0, \infty)$, A kümesinin ölçüm fonksiyoneli olarak tanımlansın, yani

$$q((x,y)) = \inf\{t > 0 \mid (x,y) \in tA\}$$

olsun. Ölçüm fonksiyonelinin yukarıda verilen özellikleri kullanılırsa q, X üzerinde $A = B_q[(0,0), 1]$ eşitliğinin sağlandığı bir asimetrik normdur. Ayrıca, $x^+ = max\{x, 0\}$

olmak üzere $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$p((x,y)) = \max\{x^+, y^+\},$$

asimetrik kafes normu göz önüne alınsın. $B_p[0,1] \subset B_q[0,1] \subset 2B_p[0,1]$ olduğundan, p ve q eşdeğerdir. p sağ sınırlı olduğu için, Lemma 2.26 gereği q da sağdan sınırlıdır.

Şimdi, $B_q[(0,0),1]$ ın kompakt olmadığını gösterelim. $\mathcal{U} = \{B_q((2,t),1)\}_{t<0}$ ailesini göz önüne alalım. Her $t < 0$ için,

$$B_q((2,t),1) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < \frac{1}{x-4} + 2 + t,\ x < 4\right\}$$

ve $\mathcal{U}$, $B_q[(0,0),1]$ için bir açık örtüdür. Ayrıca, $t > s$ ise $B_q((2,s),1) \subset B_q((2,t),1)$ olduğundan, $\mathcal{U}$ iç içe geçmiş bir ailedir. $y = \frac{1}{x-2} + 2$ ve $x \geq 3 - \sqrt{1 - 2/t}$ koşullarını sağlayan her $(x,y) \in B_q[(0,0),1]$ noktasının $B_q((2,t),1)$ kümesine ait olmadığı görülebilir. $\mathcal{U}$ iç içe geçmiş olduğundan, $B_q[(0,0),1]$ kapalı birim yuvarı $\mathcal{U}$ nun sonlu bir alt örtüsü ile örtülemez. Dolayısıyla, $B_q[(0,0),1]$ kompakt değildir. $\square$

2.4. Asimetrik Normlu Uzaylarda Sınırlı, Ön Kompakt ve Kompakt Kümeler

(X,q) asimetrik normlu lineer bir uzay olsun.

Tanım 2.28: [2] Her $x \in A$ için $q(x) \leq M$ olacak şekilde pozitif bir M sabiti varsa, X in A altkümesi q-sınırlıdır. Eğer q-sınırlı ve q^{-1}-sınırlı ise A kümesi q^s-sınırlıdır.

Asimetrik normlu uzaylarda sınırlılık, klasik normlu uzaylardaki sınırlılık kavramından daha genel bir kavramdır. Çünkü, asimetrik normlu uzaylarda kullanılan norm fonksiyonu $q : X \to \mathbb{R}^+$ simetrik değildir; yani genellikle $q(x) \neq q(-x)$ olabilir. Bu özellik, sınırlı kümelerin tanımını ve geometrik yorumunu etkiler [1].

Tanım 2.29: [2] (X,q) asimetrik normlu lineer uzay ve A, X in bir alt kümesi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_q(a_i, \varepsilon)$$

olacak sekilde A nın sonlu bir $\{a_1, .., a_n\}$ noktalar kümesi bulunabiliyorsa A kümesine $q-$ön kompakt denir.

(X,q) asimetrik normlu lineer uzayın A alt kümesine, her $\varepsilon > 0$ için

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_q(x_i, \varepsilon)$$

olacak şekilde X de sonlu bir $\{x_1, ..., x_n\}$ noktalar kümesi bulunabiliyorsa dış $q-$ön kompakt denir.

Tanım gereği, eğer A kümesi q-ön kompakt ise, bu durumda dış q-ön kompakttır.

Önerme 2.30: [2] (X,q) asimetrik normlu lineer uzay olsun. X in bir A altkümesinin q-ön kompakt olması için gerek ve yeter koşul her $\varepsilon > 0$ için

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_q(x_i, \varepsilon) \quad \text{ve} \quad B_{q^{-1}}(x_i, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset \quad (\forall i \in \{1, \ldots, n\})$$

gerçeklenecek şekilde X de sonlu bir $\{x_1, \ldots, x_n\}$ kümesinin var olmasıdır.

İspat.$\Rightarrow$: q-ön kompakt küme tanımından kolayca elde edilir.

$\Leftarrow$: $\varepsilon > 0$ pozitif sayısı için X de sonlu bir $\{x_1, \ldots, x_n\}$ kümesi

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_q(x_i, \frac{\varepsilon}{2}) \quad \text{ve} \quad B_{q^{-1}}(x_i, \frac{\varepsilon}{2}) \cap A \neq \emptyset$$

koşullarını sağlayacak şekilde var olsun.

$a_i \in B_{q^{-1}}(x_i, \frac{\varepsilon}{2}) \cap A$ için

$$B_q(x_i, \frac{\varepsilon}{2}) \subseteq B_q(a_i, \varepsilon)$$

gerçeklendiği görülebilir. Çünkü eğer $x \in B_q(x_i, \frac{\varepsilon}{2})$ ise, bu durumda

$$q(x - a_i) \leq q(x - x_i) + q(x_i - a_i) < \frac{\varepsilon}{2} + q^{-1}(a_i - x_i) < \varepsilon$$

yani $x \in B_q(a_i, \varepsilon)$ bulunur. Dolayısıyla A kümesi q-ön kompakttır. □

q-ön kompaktlık, q-kompaktlığı gerektirmez. Örneğin $\mathbb{R}$ üzerinde Örnek 2.5 de verilen $q(x) = x^+$ asimetrik normu göz önüne alalım. $(\mathbb{R}, q)$ asimetrik normlu uzayında $\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$ kümesi q-ön kompakttır. Çünkü her $\varepsilon > 0$ için

$$\mathbb{R}^- \subseteq -\varepsilon + B_q(0, \varepsilon)$$

sağlanır. Fakat bu küme q-kompakt değildir, çünkü

$$\mathbb{R}^- \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (-\infty, -\tfrac{1}{n})$$

şeklindeki bir q-açık örtü, sonlu alt örtü içermez.

Önerme 2.31: [2] (X,q) asimetrik normlu lineer uzayında $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $q-yaknsak$ ve $x_0,\ \lim_n x_n$ e ait olsun. Bu durumda $\{x_0\}\cup\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$ kümesi q-ön kompakttır.

İspat. $\varepsilon > 0$ verilsin. $x_0 \in \lim_n x_n$ olduğundan her $n \geq n_0$ için $x_n \in B_q(x_0,\varepsilon)$ gerçeklenecek biçimde $n_0\in\mathbb{N}$ vardır. Bu durumda

$$\{x_0\}\cup\{x_n : n\in\mathbb{N}\}\subset B_q(x_0,\varepsilon)\cup\{B_q(x_i,\varepsilon) : 1\leq i\leq n_0\}$$

kapsaması sağlanır. Dolayısıyla $\{x_0\}\cup\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$ kümesi q-ön kompakt bulunur. Bu önermede limit noktasının eklenmesi önemli, çünkü aksi durumda küme q-ön kompakt olmayabilir. Bu durum için aşağıdaki örnek incelenebilir. □

Örnek 2.32: [2] m kümesi üzerinde $q\left((a_i)_{i=1}^{\infty}\right) = \sup a_i^+, \{a_i\}_{n=1}^{\infty}\in m$ asimetrik normu tanımlansın. $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisi

$$\begin{aligned}
&x_1 = (1,0,0,0,\cdots)\\
&x_2 = (1,1,0,0,\cdots)\\
&\vdots\\
&x_n = \left(1,1,\ldots,1^{n)},0,\cdots\right)
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. Yani dizinin n. terimi, ilk n terimi 1 ve diğer tüm terimleri 0 olacak şekilde tanımlanmış olsun. Eğer $z=(1,1,\cdots)$ ise;

$$q(x_n - z) = q\left((0,\ldots,0^{n)},-1,-1,\ldots)\right) = 0$$

olur. Dolayısıyla $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi z ye q-yakınsaktır. Bir önceki önerme nedeniyle $\{x_n : n\in\mathbb{N}\}\cup\{z\}$ kümesi q-ön kompakttır.

$\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$ kümesinin $q-$ön kompakt olmadığı görülebilir.

Eğer $\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$ kümesi $q-$ön kompakt olsaydı, $\varepsilon=\frac{1}{2}$ için

$$\{x_n : n\in\mathbb{N}\}\subset\bigcup_{j=1}^{p} B_q\left(x_{i_j},\frac{1}{2}\right)$$

kapsaması gerçeklenecek biçimde $\{i_1,\cdots i_P\}$ sonlu indeks kümesi bulunabilirdi. O halde $n > i_P$ ise $x_n\in B_q\left(x_{i_k},\frac{1}{2}\right)$ olacak şekilde uygun bir $i_k\in\{i_1,\cdots i_P\}$ bulunurdu. Bu ise imkansızdır, çünkü $q\left(x_n - x_{i_k}\right)=1$ gerçekleşir. Bu durumda ayrıca

$$\lim_n x_n = \{y\geq(1,1,\cdots) : y\in\ell_\infty\}$$

olduğu gözlemlenebilir. $\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$ kümesi q-sınırlıdır ancak q-ön kompakt değildir.

Önerme 2.33: [2] (X, q) asimetrik normlu lineer uzay olsun,

1.q-ön kompakt kümelerin sonlu toplamı ve sonlu birleşimi q-ön kompakt bir kümedir.

2.q-ön kompakt bir kümenin konveks zarfı q-ön kompakt bir kümedir.

İspat.(1) q- ön kompakt kümelerin sonlu toplamının q-ön kompakt olduğunu göstermek için, herhangi iki q-ön kompakt kümenin toplamının q-ön kompakt olduğunu göstermek yeterlidir, çünkü ispat tümevarım ile tamamlanabilir. A_1 ve A_2 herhangi iki q-ön kompakt kümesinin toplamının q-ön kompakt olduğunu göstermek için $\varepsilon > 0$ alınsın. Bu durumda $\frac{\varepsilon}{2}$ için

$$A_1 \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_q(x_i^1, \frac{\varepsilon}{2}) \quad \text{ve} \quad A_2 \subset \bigcup_{i=1}^{m} B_q(x_i^2, \frac{\varepsilon}{2})$$

koşullarını sağlayan $\{x_1^1, \ldots, x_n^1\} \subset A_1$ ve $\{x_1^2, \ldots, x_m^2\} \subset A_2$ sonlu kümeleri vardır. $z \in A_1 + A_2$ ise $z_1 \in A_1,\ z_2 \in A_2$ olmak üzere $z = z_1 + z_2$ dir. Bu durumda

$$q(z_1 - x_i^1) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{ve} \quad q(z_2 - x_j^2) < \frac{\varepsilon}{2}$$

sağlanacak şekilde x_i^1 ve x_j^2 elemanları vardır. Böylece

$$q(z - (x_i^1 + x_j^2)) = q((z_1 - x_i^1) + (z_2 - x_j^2)) \leq q(z_1 - x_i^1) + q(z_2 - x_j^2) < \varepsilon$$

bulunur. Dolayısıyla, $\{x_i^1 + x_j^2 : i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m\}$ kümesinin elemanlarını merkez kabul eden ε yarıçaplı q-yuvarları $A_1 + A_2$ kümesini kapsar. Yani $A_1 + A_2$ kümesi q-ön kompakt bulunur.

(2) A, X in q-ön kompakt bir altkümesi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için

$$A \subset \{x_1, \ldots, x_n\} + B_q(0, \frac{\varepsilon}{2})$$

sağlanacak şekilde A nın sonlu bir $\{x_1, \ldots, x_n\}$ alt kümesi bulunabilir.

A kümesinin konveks zarfı conv(A) ile gösterilsin. Bu durumda:

$$\text{conv}(A) \subset \text{conv}(\{x_1, \ldots, x_n\}) + B_q(0, \frac{\varepsilon}{2})$$

sağlanır. conv$(\{x_1, \ldots, x_n\})$ kümesi q^s-kompakt olduğundan, q-ön kompakttır. Dolayısıyla

$$\text{conv}(\{x_1, \ldots, x_n\}) \subset \{y_1, \ldots, y_n\} + B_q(0, \frac{\varepsilon}{2})$$

gerçeklenecek şekilde conv$(\{x_1,\ldots,x_n\})$ de sonlu $\{y_1,\ldots,y_n\}$ kümesi bulunabilir. Bu durumda

$$\text{conv}(A) \subset \{y_1,\ldots,y_n\} + B_q(0,\frac{\varepsilon}{2}) + B_q(0,\frac{\varepsilon}{2}) \subset \{y_1,\ldots,y_n\} + B_q(0,\varepsilon)$$

kapsamaları ve böylece conv(A) kümesinin q-ön kompakt olduğu sonucu elde edilir.

□

Önerme 2.34: [2] (X,q) asimetrik normlu uzayın A alt kümesinin q-ön kompakt olması için gerek ve yeter koşul A nın q^{-1}-kapanışının q-ön kompakt olmasıdır.

İspat.(⇒) A kümesi q-ön kompakt ve $\varepsilon > 0$ olsun. A kümesinin

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_q(x_i,\frac{\varepsilon}{2}) \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_q[x_i,\frac{\varepsilon}{2}]$$

sağlanacak şekilde sonlu bir $\{x_1,\ldots,x_n\}$ kümesi vardır. $B_q[a_i,\frac{\varepsilon}{2}]$ yuvarları q^{-1}-kapalıdır. Bu durumda,

$$\overline{A}^{q^{-1}} \subseteq \overline{\bigcup_{i=1}^{n} B_q[x_i,\frac{\varepsilon}{2}]}^{q^{-1}} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \overline{B_q[x_i,\frac{\varepsilon}{2}]}^{q^{-1}} = \bigcup_{i=1}^{n} B_q[x_i,\frac{\varepsilon}{2}] \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_q(x_i,\varepsilon)$$

yani A nın q^{-1}-kapanışı, q-ön kompakt bulunur.

(⇐) $\overline{A}^{q^{-1}}$ kümesi q-ön kompakt ise, her $\varepsilon > 0$ için $\overline{A}^{q^{-1}}$ kümesinin sonlu $\{x_1,\ldots,x_n\}$ altkümesi

$$A \subset \overline{A}^{q^{-1}} \subset \bigcup_{i=1}^{n} \Big(x_i + B_q(0,\frac{\varepsilon}{2})\Big)$$

sağlanacak şekilde bulunabilir. Her $i \in \{1,\ldots,n\}$ için $x_i \in \overline{A}^{q^{-1}}$ gerçekleşir. Bu durumda, sabit bir i için $a_i \in A$

$$q^{-1}(a_i - x_i) = q(x_i - a_i) < \varepsilon/2$$

gerçeklenecek biçimde vardır. Şimdi

$$x_i + B_q(0,\frac{\varepsilon}{2}) \subset a_i + B_q(0,\varepsilon)$$

kapsamasının sağlandığını gösterelim. $y \in x_i + B_q(0,\frac{\varepsilon}{2})$ olsun. O halde $q(y - x_i) < \frac{\varepsilon}{2}$ ve

$$q(y - a_i) \leq q(y - x_i) + q(x_i - a_i) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

yani $y \in a_i + B_q(0,\varepsilon)$ elde edilir. Dolayısıyla, A kümesi q-ön kompakt bulunur. □

Tanım 2.35: [8] (X, q) asimetrik normlu uzayın K alt kümesine,

$$K_0 \subseteq K \subseteq K_0 + \theta_q(0)$$

gerçeklenecek biçimde X in q^s-kompakt K_0 alt kümesi varsa güçlü $q-$kompakt denir.

Aşağıdaki önermede (X, q) asimetrik normlu lineer uzayının her güçlü $q-$kompakt alt kümesinin $q-$kompakt olduğu gösterilmiştir.

Önerme 2.36: [2] (X, q) asimetrik normlu lineer uzay olsun. K_0, q^s-kompakt olmak üzere

$$K_0 \subset K \subset K_0 + \theta_q(0)$$

kapsamasını sağlayan X in K alt kümesi q-kompakttır.

İspat. $\{A_i\}_{i\in I}$, K kümesinin bir q-açık örtüsü olsun. K_0, K kümesinin bir alt kümesi ve her $i \in I$ için A_i q^s-açık olduğundan, $\{A_i\}_{i\in I}$, K_0 ın q^s-açık örtüsüdür. Bu nedenle

$$K_0 \subset \bigcup_{j=1}^{n} A_{i_j}$$

gerçeklenecek şekilde $\{A_{i_j}\}_{j=1}^{n}$ sonlu alt örtüsü vardır. Lemma 2.9 ve Lemma 2.10 kullanılarak

$$K \subset K_0 + \theta_q(0) \subset \bigcup_{j=1}^{n} A_{i_j} + \theta_q(0) = \bigcup_{j=1}^{n} \left(A_{i_j} + \theta_q(0)\right) = \bigcup_{j=1}^{n} A_{i_j}$$

elde edilir. Bu ise K kümesinin q-kompakt olduğu sonucunu verir. $\square$

q-kompakt bir küme güçlü q-kompakt olmak zorunda değildir. Bunun için aşağıdaki örnek incelenebilir.

Örnek 2.37: [2] $q((\alpha_i)_{i=1}^{\infty}) := \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^+$ şeklinde tanımlanmış olsun. (c, q) asimetrik normlu uzayında

$$\begin{aligned}
x_0 &= (0, 0, 0, 0, \ldots), \\
x_1 &= \left(\frac{1}{2^0}, -1, 0, 0, \cdots\right), \\
x_2 &= \left(\frac{1}{2^1}, 0, -1, 0, \cdots\right), \\
&\vdots \\
x_n &= \left(\frac{1}{2^{n-1}}, 0, 0, \ldots, -1^{n+1)}, 0, \cdots\right)
\end{aligned}$$

olmak üzere $K = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ kümesi tanımlansın. İlk olarak K kümesinin q-kompakt olduğunu ispatlayalım. $\{A_i\}_{i\in I}$, K için bir q-açık örtü olsun. Bu durumda uygun bir $i_0 \in I$ için $x_0 \in A_{i_0}$ gerçekleşir ve A_{i_0} açık olduğundan uygun bir $\delta > 0$ için $B_q(x_0, \delta) \subset A_{i_0}$ kapsaması gerçeklenir.

Eğer $x_n \in K$ ise, $q(x_n - x_0) = q(x_n) = \frac{1}{2^{n-1}}$ olur. $\frac{1}{2^{n_0-1}} < \delta$ sağlayan n_0 seçilirse bu durumda her $n \geq n_0$ ve $x_n \in B_q(x_0, \delta) \subset A_{i_0}$ kapsaması sağlanır. $j = 1, 2, ..., n_0 - 1$ olmak üzere $x_j \in A_{i_j}$ sağlayan açık örtümün A_{i_j} elemanları için

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{n_0-1} A_{i_j} \cup A_{i_0}$$

kapsaması sağlanır. K, q-kompakt bulunur.

Şimdi $K_0 \subset K$ olacak şekilde bir q^s-kompakt K_0 kümesinin var olamayacağını göstereceğiz.

Eğer $K_0 \subset K$ bir q^s-kompakt küme ise, bu durumda K_0 sonlu kümedir veya K_0, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin bir q^s-yakınsak alt dizisini içermelidir. Fakat bu mümkün değildir, çünkü $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nın alt dizileri q^s-Cauchy değildir, eğer $j \neq k$ ise

$$q^s(x_j - x_k) = \left|\frac{1}{2^j} - \frac{1}{2^k}\right| + 1 + 1 > 2$$

olduğu gözlemlenebilir. Eğer K_0 sonlu ise, $K \subset K_0 + \theta_q(0)$ olması mümkün değildir. $n \neq m$ ve $x_m \in x_n + \theta_q(0)$ olmak üzere x_n ve x_m elemanları seçilirse $q(x_m - x_n) = 0$ bulunur.

Ancak $m > n$ ise bu durumda $q(x_m - x_n) = 1 \neq 0$ ve $m < n$ için

$$q(x_m - x_n) = \frac{1}{2^m} - \frac{1}{2^n} + 1 \neq 0$$

çelişkisi bulunur.

Sonuç olarak, K kümesi için $K_0 \subset K \subset K_0 + \theta_0$ koşulunu sağlayacak herhangi bir q^s-kompakt K_0 kümesi bulunamaz.

3. SONUÇLAR

Asimetrik norm yardımıyla tanımlanan topolojik uzayda, klasik analizde yer alan pek çok kavramın incelendiği çalışmalar yapılmıştır. Bu tezde, asimetrik normlu lineer uzaylarda kompaktlık kavramına dair yapılan makalelerden elde edilen bazı sonuçlar derlenmiştir.

Bu makalelerde asimetrik normun temel özellikleri ve bu norm altında elde edilen topolojiye dair sonuçlar, giriş bölümünde verilmiştir. (X, q) asimetrik normlu uzayında yuvarların özellikleri verilirken, birçok kavramda yapıldığı gibi, (X, q^{-1}) asimetrik normlu uzayı da kullanılmıştır. Ayrıca klasik normlu uzaylardan farkı, bölümde verilen örnek üzerinden incelenmiştir.

İkinci bölümde asimetrik normlu uzayların karakterizasyonunda rol oynayan $\theta_q(0)$ kümesine ve sonlu boyutlu asimetrik uzaylarda kompaktlığa ilişkin sonuçlar verilmiştir. Yine kompaktlıkta önemli bir rol oynayan sağ sınırlılık kavramına dair sonuçlarda bu bölümdedir. İncelenen makalelerde verilen, (X, q) asimetrik normlu uzayında q-ön kompaktlık, dış q- ön kompaktlık kavramları ve bu kavramlar arasındaki ilişkiler de bu bölümdedir. Son olarak güçlü q-kompakt kümenin, q- kompakt olduğuna dair sonuç ve tersinin doğru olmadığına dair örnek verilmiştir.

Asimetrik normlu uzaylarda, klasik normlu uzaylarda geçerli olan kompaktlığa ilişkin bazı sonuçlarının geçerli olmadığı, buna karşın daha zayıf versiyonlarının kullanılabileceği görülmüştür.

KAYNAKLAR

[1] Cobzas, Stefan, (2012), "'Functional analysis in asymmetric normed spaces'", Springer Science & Business Media.

[2] Alegre, C ve diğ., (2008). "Compactness in asymmetric normed spaces". *Topology and its Applications*, 155(6), 527–539.

[3] Jonard-Pérez, Natalia ve Sánchez-Pérez, Enrique A, (2018). "Local compactness in right bounded asymmetric normed spaces". *Quaestiones Mathematicae*, 41(4), 549–563.

[4] García-Raffi, LM, (2005). "Compactness and finite dimension in asymmetric normed linear spaces". *Topology and its Applications*, 153(5-6), 844–853.

[5] Conradie, Jurie, (2015). "Asymmetric norms, cones and partial orders". *Topology and its Applications*, 193, 100–115.

[6] Rudin, Walter, (1973), "'Functional Analysis'", McGraw-Hill Book Company.

[7] Webster, R., (1994), "'Convexity'", Oxford University Press.

[8] Conradie, JJ ve Mabula, MD, (2013). "Completeness, precompactness and compactness in finite-dimensional asymmetrically normed lattices". *Topology and its Applications*, 160(15), 2012–2024.

ÖZGEÇMİŞ

2013 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde lisans eğitimine başlamış ve 2018 yılında mezun olmuştur. 2017-2018 eğitim-öğretim yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fatih Eğitim Fakültesinde pedagojik formasyon eğitimini tamamlamıştır. 2020 yılında Gebze Teknik Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü'nde yüksek lisans eğitimine başlamış olup bu programa halen devam etmektedir. Lisans eğitiminden sonra çeşitli özel ve devlet kurumlarında matematik öğretmeni olarak görev yapmıştır.

TEZ ÇALIŞMASI KAPSAMINDA YAPILAN YAYINLAR

Yılmaz B., Sönmez A., (2025), “Asimetrik Normlu Uzaylarda Kompaktlık,” Lisansüstü Poster Sunumu, Gebze Teknik Üniversitesi, 26-27 Mayıs.