



T.C.  
BURSA TEKNİK ÜNİVERSİTESİ  
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

SİMPLİKSEL LÜSTERNİK SCHNIRELMANN KATEGORİ

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

Hilal ALABAY

Matematik Anabilim Dalı

Matematik Tezli Yüksek Lisans Programı

TEMMUZ 2025

**T.C.  
BURSA TEKNİK ÜNİVERSİTESİ  
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

**SİMPLEKSEL LUSTERNİK SCHNIRELMANN KATEGORİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Hilal ALABAY**

**(22435022015)**

**ORCID: 0009-0008-2020-2239**

**Matematik Anabilim Dalı  
Matematik Tezli Yüksek Lisans Programı**

**Danışman: Doç. Dr. Ayşe BORAT**

**ORCID: 0000-0002-5628-7798**

**TEMMUZ 2025**



BTÜ, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü'nün 22435022015 numaralı Yüksek Lisans Öğrencisi Hilal ALABAY, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı "SİMPEKSEL LUSTERNİK SCHNIRELMANN KATEGORİ" başlıklı tezini aşağıda imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

**Tez Danışmanı :**      **Doç. Dr. Ayşe BORAT** .....  
Bursa Teknik Üniversitesi

**Jüri Üyeleri :**      **Dr. Öğr. Üyesi Mert Sinan ÖZ** .....  
Bursa Teknik Üniversitesi

**Doç. Dr. Tane VERGİLİ** .....  
Karadeniz Teknik Üniversitesi

**Savunma Tarihi**      : 21 Temmuz 2025  
**Teslim Tarihi**      : .... / .... / 2025



20.04.2016 tarihli Resmi Gazete’de yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince; Bu Lisansüstü teze, Bursa Teknik Üniversitesi’nin abonesi olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Lisansüstü Eğitim Enstitüsü’nün belirlemiş olduğu ölçütlere uygun rapor alınmıştır.

## İNTİHAL BEYANI

Bu tezde görsel, işitsel ve yazılı biçimde sunulan tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uyularak tarafımdan elde edildiğini, tez içinde yer alan ancak bu çalışmaya özgü olmayan tüm sonuç ve bilgileri tezde kaynak göstererek belgelediğimi, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim.

Öğrencinin Adı SOYADI: Hilal ALABAY

İmzası:

X



Canım Aileme,

## ÖNSÖZ

Lisans yıllarımdan itibaren akademik yolculuğumun her aşamasında yalnızca bilgi birikimi ve tecrübesi değil; aynı zamanda anlayışı, sabrı ve desteği ile beni her daim cesaretlendiren, en zorlu anlarda bile bana olan inancını kaybetmeyen, her zaman bir adım daha ileri gitmem için beni yüreklendiren kıymetli hocam Doç. Dr. Ayşe BORAT'a en içten teşekkürlerimi sunuyorum. Bu süreçte bana hem akademik hem de insani anlamda çok şey kattı; kendisine duyduğum saygı ve minnettarlık sonsuzdur.

Hayatımın her aşamasında yanımda olan, güvenleri ile içimi rahatlatan, sabır ve sevgileriyle bana güç veren ailem bu çalışmamın arkasındaki en önemli dayanaklarımdan biri oldu. Sevgili annem Remziye Alabay, babam Ahmet Alabay ve ablam Bahar Alabay'a verdikleri emek ve koşulsuz destekleri için en içten teşekkürlerimi sunuyorum.

Ayrıca bu süreci birlikte yürüdüğüm, karşılaştığımız zorluklarda birbirimize destek olduğumuz, bu yolculuğu benim için daha anlamlı kılan sevgili arkadaşlarım Esra Cihangirli, Tuğçe Ünal ve Gülay Bahar'a gönülden teşekkürlerimi sunarım.

Son olarak tez çalışmamı “2210-A Genel Yurt İçi Yüksek Lisans Burs Programı” kapsamında destekleyen ve ayrıca danışmanım Doç. Dr. Ayşe Borat'ın yürütücülüğündeki 122F295 numaralı TÜBİTAK projesinde bursiyer olarak yer alma fırsatı sundukları için TÜBİTAK'a ve danışman hocama teşekkür ederim.

Haziran 2025

Hilal ALABAY

## İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖNSÖZ.....	vii
İÇİNDEKİLER .....	viii
KISALTMALAR.....	ix
SEMBOLLER .....	x
ŞEKİL LİSTESİ .....	xi
ÖZET.....	xii
SUMMARY.....	xiii
<b>1. GİRİŞ .....</b>	<b>1</b>
<b>2. ÖN BİLGİLER.....</b>	<b>3</b>
2.1 Simpleksel Kompleksler .....	3
2.2 Graflar .....	8
2.3 Basit Homotopi (Simple Homotopy) .....	11
<b>3. SİMPLEKSEL LS-KATEGORİ.....</b>	<b>17</b>
3.1 Simpleksel LS-Kategori .....	17
3.2 Geometrik Simpleksel Kategori .....	22
3.3 Barisentirik Bölünme .....	25
3.4 Geometrik Realizasyon .....	28
3.5 Çarpımlar.....	30
3.6 Simpleksel Whitehead Kategorisi .....	34
3.7 Ko-fibrasyon .....	38
<b>4. GRAFLAR VE SİMPLEKSEL LS-KATEGORİ.....</b>	<b>41</b>
4.1 Ağaçsallık (Arboricity) .....	41
4.2 Simpleksel Lusternik Schnirelmann Kategori .....	42
<b>KAYNAKLAR.....</b>	<b>47</b>
<b>ÖZGEÇMİŞ.....</b>	<b>49</b>

## KISALTMALAR

- $cat(-)$**  : LS-kategori  
 **$cat^{Wh}(-)$**  : Whitehead kategori  
 **$dimK$**  :  $K$  simpleksel kompleksinin boyutu  
 **$gcat(-)$**  : Geometrik kategori  
 **$gscat(-)$**  : Geometrik simpleksel kategori  
 **$scat(-)$**  : Simpleksel LS-kategori  
 **$scat^{Wh}(-)$**  : Simpleksel Whitehead kategori

## SEMBOLLER

$c_v$	: Sabit dönüşüm
$d_G$	: $G$ grafının derecesi
$\iota$	: Kapsama dönüşümü
$ K $	: $K$ kompleksinin geometrik realizasyonu
$K^r$	: $K$ simpleksel kompleksinin $r$ -iskeleti
$K_n$	: $n$ köşeli tam graf
$K_0$	: $K$ simpleksel kompleksinin çekirdeği
$K * L$	: $K$ ve $L$ simpleksel komplekslerinin simpleksel joini
$K \searrow L$	: $K$ simpleksel kompleksinden $L$ simpleksel kompleksine elementer çöküş
$K \nearrow L$	: $K$ simpleksel kompleksinden $L$ simpleksel kompleksine elementer genişleme
$K \searrow\searrow L$	: $K$ simpleksel kompleksinden $L$ simpleksel kompleksine elementer güçlü çökme
$K \nearrow\nearrow L$	: $K$ simpleksel kompleksinden $L$ simpleksel kompleksine elementer güçlü genişleme
$lk(v; K)$	: $v$ köşe noktasının $K$ simpleksel kompleksindeki linki
$M(K_0)$	: $K_0$ 'ın maksimal simplekslerinin sayısı
$P$	: Grafta bir yol
$(s)$	: Açık simpleks
$[s]$	: Kapalı simpleks
$sdK$	: $K$ simpleksel kompleksinin barisentirik bölünmesi
$st(v; K)$	: $v$ köşe noktasının $K$ simpleksel kompleksindeki yıldızı (star)
$T^k$	: Genişletilmiş çarpım
$Y$	: Grafın ağaçsallığı
$\sim$	: Aynı bitişiklik sınıfında olma
$\sim_c$	: Bitişiklik
$\simeq$	: Homotopi denk
$\cong$	: İzomorfizm

## ŞEKİL LİSTESİ

### Sayfa

Şekil 2.1: 0-simpleks, 1-simpleks, 2-simpleks ve 3-simpleks .....	4
Şekil 2.2: K ve L simpleksel kompleksleri .....	4
Şekil 2.3: Kompleks olmaya aykırı üç simpleksel kompleks .....	5
Şekil 2.4: Kompleks olmaya aykırı durumu ortadan kaldırma işlemi .....	5
Şekil 2.5: K kompleksi ve 1-iskeleti .....	6
Şekil 2.6: $\varphi$ ve $\psi$ dönüşümleri .....	6
Şekil 2.7: K kompleksi ve $sdK$ .....	7
Şekil 2.8: (i) K simpleksel kompleksi (ii) $st(v; K)$ ve (iii) $lk(v; K)$ .....	7
Şekil 2.9: (i) K simpleksel kompleksi (ii) L simpleksel kompleksi ve (iii) $K*L$ .....	8
Şekil 2.10: K kompleksi ve geometrik realizasyonu.....	8
Şekil 2.11: $K$ 'nın geometrik realizasyonuna homotopi denk olan $S^1 \vee S^1$ .....	8
Şekil 2.12: (i) T ağaç grafi (ii) döngü içeren G grafi .....	10
Şekil 2.13: Yaprakları $v_3, v_4$ ve $v_5$ köşeleri olan G grafi .....	10
Şekil 2.14: G grafının bölünmeleri.....	10
Şekil 2.15: G grafi, G'nin alt grafi, G'nin geren alt grafi ve G'nin geren ağaç grafi....	11
Şekil 2.16: K ve L simpleksel kompleksleri .....	11
Şekil 2.17: K ve L simpleksel kompleksleri .....	12
Şekil 2.18: K kompleksinden L kompleksine elementer çökme .....	14
Şekil 2.19: K kompleksinden L kompleksine elementer güçlü çökme .....	15
Şekil 2.20: Bir dizi elementer çöküş ve genişleme.....	16
Şekil 3.1: Çöken ama güçlü çöken olmayan K simpleksel kompleksi .....	18
Şekil 3.2: (i) $K_1$ alt kompleksi (ii) $K_2$ alt kompleksi .....	18
Şekil 3.3: $scatK = 1$ olan K simpleksel kompleksi .....	19
Şekil 3.4: K simpleksel kompleksi, $sdK$ ile aynı güçlü homotopi tipine sahip değildir .....	26
Şekil 3.5: $K = K_5$ tam grafi .....	27
Şekil 3.6: $sdK_5$ 'i örten iki kategorik alt kompleksi .....	28
Şekil 3.7: Çöken ama güçlü çöken olmayan K simpleksel kompleksi .....	30
Şekil 3.8: $L = K \setminus \sigma$ alt kompleksi bitişiklik genişleme özelliğine sahip değildir ....	40
Şekil 4.1: $K_4$ grafının geren orman üzerinde minimal ayrışımı .....	42
Şekil 4.2: $K_5$ grafının geren orman üzerinde minimal ayrışımı.....	42
Şekil 4.3: $F_1$ orman grafını içeren bir $T_i$ ağaç grafi elde etme işlemi .....	44
Şekil 4.4: $K_5$ 'in üç kenarının ikiye bölünmesi .....	45
Şekil 4.5: $K_{19}$ tam grafi .....	46

# SİMPEKSEL LUSTERNİK SCHNIRELMANN KATEGORİ

## ÖZET

Bu yüksek lisans tez çalışması, D. Fernandez-Ternero, E. Macias-Virgos ve J. A. Vilches (2015) tarafından tanıtilan simpleksel LS-kategori ( $scatK$ ) kavramı ve bu kavramın bazı analoglarından bahsedilmiştir. Çalışmada, simpleksler, graflar ve homotopi teorisi çevresinde  $scatK$  kavramının temel özellikleri ele alınmıştır.

Dört bölümden oluşan çalışmada,  $scat(K)$  kavramının  $catX$  ve  $gscatK$  gibi bazı kavramlar ile ilişkisi araştırılmıştır. Ayrıca  $K$  kompleksinin geometrik realizasyon ve barisentirik bölünmesi altında  $scatK$  kavramının nasıl etkilendiği incelenmiştir.

Genişletilmiş çarpım (fat wedge) kavramı tanıtılmıştır ve bu kavram kullanılarak Whitehead LS-kategorisi ( $cat^{Wh}(X)$ ) tanıtılmıştır. Whitehead LS-kategorisi tanımı, simpleksel komplekslere uyarlanarak simpleksel Whitehead LS-kategori incelenmiştir. Bunun yanı sıra,  $(K, L)$  simpleksel çifti için homotopi genişletme teoreminin kombinatorik analogu tanıtılmıştır.

Son bölümde, graflar ele alınarak, simpleksel LS-kategorisi incelenmiştir. Ağaçsallık kavramı kullanılarak  $scatK$  için hesaplamalar yapılmıştır.

**Anahtar Kelimeler:** Simpleksel LS-kategori, Güçlü homotopi tipi, Barisentirik bölünme, Geometrik realizasyon, Whitehead kategorisi, Ağaçsallık.

# SIMPLICIAL LUSTERNIK SCHNIRELMANN CATEGORY

## SUMMARY

This master's thesis discusses the work on the notion of simplicial LS-category ( $scatK$ ) introduced by D. Fernandez-Ternero, E. Macias-Virgos, and J. A. Vilches (2015), along with some of its analogues. The thesis analyzes the basic properties of the simplicial LS-category in the context of simplexes, graphs, and homotopy theory.

The thesis, composed of four chapters, examines the relationship between the notion of  $scat(K)$  and certain related concepts such as  $catX$  and  $gscatK$ . It also investigates how the simplicial LS-category is affected by the geometric realization and the barycentric subdivision of the complex  $K$ .

The fat wedge is introduced and the Whitehead LS-category is defined using this notion. By adapting the definition of the Whitehead LS-category to simplicial complexes, the simplicial Whitehead LS-category is analyzed. Furthermore, a combinatorial analogue of the homotopy extension theorem for a simplicial pair  $(K, L)$  is presented.

In the final chapter, the graphs are considered, and their simplicial LS-category is examined. Calculations for  $scatK$  are carried out using the concept of the arboricity.

**Keywords:** Simplicial LS-category, Strong homotopy type, Barycentric subdivision, Geometric realization, Whitehead category, Arboricity.

## 1. GİRİŞ

LS-kategorinin tarihsel gelişimi, 20. yüzyılın başlarında Poincaré'nin analiz alanındaki çalışmalarına kadar uzanmaktadır. Poincaré, diferansiyel denklemlerin çözümlerinin, denklemlerin tanımlandığı uzayın topolojisi ile yakından ilişkili olduğunu fark etmiş ve bu keşif analizde yeni yaklaşımların ortaya çıkmasına öncülük etmiştir. Özellikle, “manifold” kavramı bu süreçte daha net bir şekilde tanımlanmış ve araştırmacılar, akışların karmaşıklığını manifoldun topolojik özellikleriyle ilişkilendirme problemine odaklanmıştır. Bu doğrultuda, manifold üzerindeki fonksiyonların kritik noktalarının minimum sayısını belirleme çalışmaları önemli bir adım olmuştur. [1]

1930'lu yıllarda L. Lusternik ve L. Schnirelmann, manifold üzerindeki herhangi bir düzgün (smooth) fonksiyon için kritik noktaların alt sınırını belirlemek amacıyla “kategori” adı verilen yeni bir değişmez (invariant) tanımlamışlardır. Bu yeni yaklaşım, kapalı jeodeziklerin varlığını ispatlamak gibi problemlere uygulanabilmiştir. Nitekim, bu yeni değişmezi kullanarak küre üzerinde en az üç kapalı jeodezi bulunduğunu göstermişlerdir. [1]

Daha sonra R. H. Fox (1941), LS-kategoriyi yeniden formüle ederek cebirsel topoloji içinde daha geniş bir çerçevede ele alınmasını sağlamıştır. Günümüzde, topolojik uzayların sayısal bir değişmezi olarak kabul edilen LS-kategori, homotopi teorisinde ve topolojik robotik gibi çeşitli uygulama alanlarında önemli bir rol oynamaktadır. Zaman içinde klasik tanıma farklı bakış açıları geliştirilmiş ve birçok çalışma yapılmıştır [1, 2]. 21. yüzyılda da LS-kategori, literatürde aktif olarak çalışılan önemli bir konu olma özelliğini sürdürmektedir.

Bu tez çalışmasının odak noktası, D. Fernàndez-Ternero, E. Macías-Virgòs, and J. A. Vilches (2015) tarafından tanıtılan simpleksel LS-kategori (*scatK*) kavramı ve onun bazı analogları hakkında yapılan çalışmaların bir derlemesini sunmaktır.

Bu tez toplam dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümü giriş niteliğindedir. ikinci bölümde, konunun daha iyi anlaşılabilmesi için simpleksler, graflar ve basit homotopi için gerekli ön bilgiler verilmiştir.

Üçüncü bölüm yedi alt başlık altında incelemiştir. Öncelikle  $catX$  ve  $scatK$  kavramları tanımlanmıştır. Daha sonra,  $scatK$ 'nın güçlü homotopi tipi değişmezi olduğu gösterilmiştir.  $K$  simpleksel kompleksinin çekirdeği  $K_0$ 'ın, köşe noktalarının sayısı ve maksimal simpleks sayısına bağlı olarak  $scatK$  için bir üst sınır sağlandığı sonucu verilmiştir.

İkinci alt bölümde, geometrik LS-kategori ve simpleksel LS-kategori tanıtılarak  $scatK \leq gscatK$  ilişkisi incelenmiştir. Ayrıca,  $scat(sdK) \leq scatK$  olduğu ispatı verilerek bu duruma ilişkin bir örnek verilmiştir.  $K$  kompleksinin geometrik realizasyonunun kategorisi  $cat(|K|)$  ile  $scatK$  arasındaki ilişki incelenmiş ve  $K$  kompleksinin  $n$ -inci barisentrik bölünmesi için  $cat|K| \leq scat(sd^N K)$  sonucu verilmiştir.

Beşinci alt bölümde, kategorik çarpımlar ele alınmış ve bu çarpımın kartezyen çarpımdan farklı olduğu hatırlatılmıştır. İki simpleksel dönüşüm bitişik (contiguous) ise bu simpleksel dönüşümlerin çarpımlarının da bitişik olduğu belirtilmiştir.  $K$  ve  $L$  sonlu iki simpleksel kompleksleri için  $scat(K \times L) + 1 \leq (scat(K) + 1)(scat(L) + 1)$  eşitsizliğinin ispatı verilmiştir.

Diğer taraftan, çarpımın özel bir alt uzayı olan genişletilmiş çarpım (fat wedge) kavramı tanıtılmış ve genişletilmiş çarpımın alt uzayı kullanılarak Whitehead LS-kategorisi ( $cat^{Wh}(X)$ ) tanımlanmıştır. Daha sonra, LS-kategorisinin Whitehead tanımı  $n$ -inci genişletilmiş çarpım kullanılarak simpleksel komplekslere uyarlanmıştır. ( $scat^{Wh}(K)$ ) ve bu kavramın güçlü homotopi değişmezi değişmezi olduğu gösterilmiştir. Ayrıca,  $scat(K)$  ve  $scat^{Wh}(K)$  ilişkisi incelenmiştir.  $K$  ve  $L$  simpleksel kompleksleri arasında taban noktalı güçlü denklik varsa  $scat^{Wh}(K) = scat^{Wh}(L)$  olduğu sonucu gösterilmiştir.

Son alt bölümde,  $(K, L)$  simpleksel çifti için homotopi genişletme teoreminin kombinatorik analogu tanımlanmış ve  $scat(K) = n$  için  $(K, L_j)$  çiftleri bitişiklik genişletme özelliğine sahipse,  $scat^{Wh}(K) = n$  olduğu ispatlanmıştır. Ayrıca  $scat(K) = scat^{Wh}(K)$  eşitliğinin ancak ve ancak her bir  $(K, L_j)$  çiftinin bitişiklik genişleme özelliğine sahip  $L_0, \dots, L_n$  kategorik örtüye sahip olması durumunda mümkün olduğu vurgulanmıştır.

Son bölümde, simpleksel komplekslerin özel bir durumu olan graflar ele alınmaktadır. Öncelikle  $\Upsilon(G)$  ile gösterilen ağaçsallık (arboricity) kavramı tanıtılmıştır ve bu kavram kullanılarak  $scatG = gscat(G) = \Upsilon(G) - 1$  sonucu elde edilmiştir. Kategorik alt kompleksler ile döngüsel olmayan (ağaç veya orman) alt graflar arasındaki denklik incelenmiştir. Son olarak bağlantılı graflar için  $scat(sdG) = cat|G|$  sonucu elde edilmiştir.

## 2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde temel kavramlar verilmektedir.

### 2.1 Simpleksel Kompleksler

*Tanım 2.1.1*  $V$ ,  $\mathbb{R}$  üzerinde bir vektör uzayı ve  $C \subset V$  alt kümesi olsun. Her  $c_1, c_2 \in C$  için  $tc_1 + (1-t)c_2 \in C$  ( $t \in [0, 1]$ ) ise  $C$ 'ye konveks denir. [3]

*Tanım 2.1.2*  $V$  vektör uzayındaki vektörlerin kümesi  $\{v_0, v_1, \dots, v_k\}$  olsun. Eğer  $\{v_1 - v_0, v_2 - v_0, \dots, v_k - v_0\}$  lineer bağımsız ise  $\{v_0, v_1, \dots, v_k\}$  kümesi konveks-bağımsızdır ( $c$ -bağımsız) denir. [3]

*Teorem 2.1.1* Varsayalım ki  $\{v_0, v_1, \dots, v_k\}$  kümesi  $c$ -bağımsız küme olsun.  $C$ ,  $\{v_0, v_1, \dots, v_k\}$  tarafından gerilen konveks küme olsun. Bu durumda  $C$ ,

$$\sum_{i=0}^k a_i v_i, \left( \sum_{i=0}^k a_i = 1 \text{ ve } a_i \geq 0, \forall i \right).$$

şeklindeki vektörlerden oluşur. Ayrıca her  $v \in C$  bu formda tek türlü olarak tanımlanır. [3]

*Tanım 2.1.3*  $\mathbb{R}^d$  uzayının bir  $A$  alt kümesinin konveks kılıfı (convex hull),  $conv A$ ,  $\mathbb{R}^d$  uzayında  $A$ 'yı içeren tüm konveks kümelerin kesişimidir. [4]

*Tanım 2.1.4*  $V$ ,  $\mathbb{R}$  üzerinde bir vektör uzayı olsun.  $\{v_0, v_1, \dots, v_k\}$   $c$ -bağımsız vektörleri ile gerilen konveks kümeye (kapalı)  $k$ -simpleks denir ve  $[v_0, v_1, \dots, v_k]$  ile gösterilir.  $k$ , simpleksin boyutudur. Eğer  $v \in [v_0, v_1, \dots, v_k]$  ise o zaman

$$v = \sum_{i=0}^k a_i v_i \left( \sum_{i=0}^k a_i = 1 \text{ ve } a_i \geq 0 \right)$$

olacak şekilde  $a_i$  katsayılarına  $v$ 'nin barisentrik koordinatları denir. [3]

*Tanım 2.1.5*  $\{v_0, v_1, \dots, v_k\}$   $c$ -bağımsız küme olsun.

$$[v \in [v_0, v_1, \dots, v_k]; \quad a_i(v_i) > 0, \quad i = 0, 1, \dots, k]$$

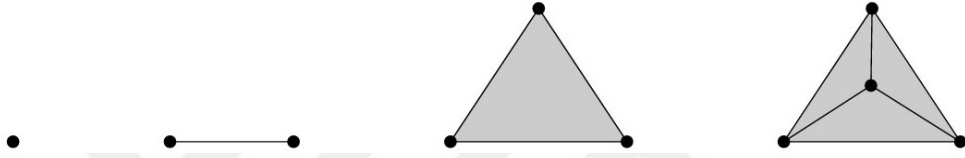
kümesine açık simpleks denir ve  $(v_0, v_1, \dots, v_k)$  ile gösterilir.

Açık simpleks  $(s)$  ile, kapalı simpleks ise  $[s]$  ile gösterilir.

*Açıklama 2.1.1* Simplekslerle ilgili bazı özellikler şu şekildedir:

- (1) 0-boyutlu simpleks hem kapalı hem de açık yüzdür.
- (2) Açık bir  $(s)$  simpleksi kapalı  $[s]$  simpleksinde açık kümedir ve kapanışı  $[s]$  olur.
- (3) Kapalı  $[s]$  simpleksi açık yüzlerinin birleşimidir.
- (4) Bir simpleksin farklı açık yüzleri ayrıktır.
- (5) Açık  $(s)$  simpleksi, kapalı  $[s]$  simpleksinin içidir. [3]

Aşağıda 0-simpleks, 1-simpleks, 2-simpleks ve 3-simpleks verilmiştir.

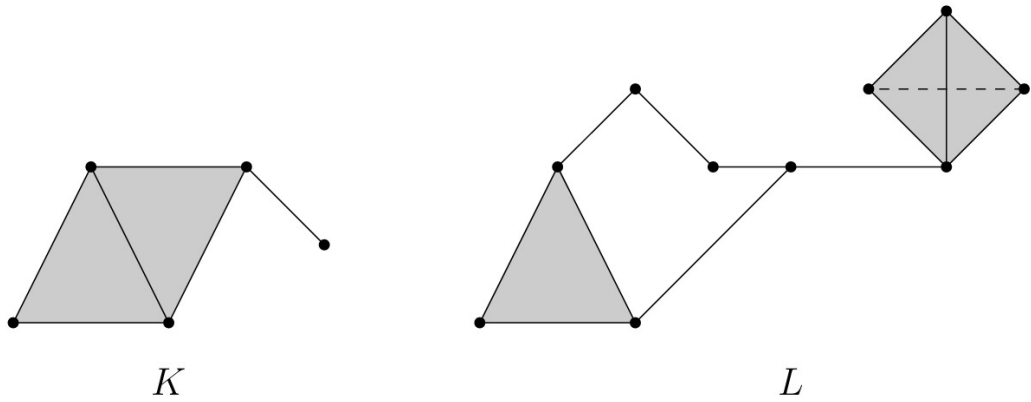


**Şekil 2.1** : 0-simpleks, 1-simpleks, 2-simpleks ve 3-simpleks.

*Tanım 2.1.6*  $K$  simpleksel kompleksi aşağıdaki şartları sağlayan,  $\mathbb{R}^n$  uzayında açık simplekslerin sonlu bir kümesidir.

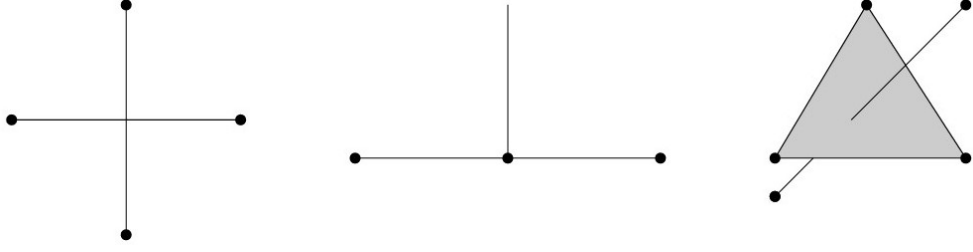
- (1)  $(s) \in K$  ise  $[s]$ 'nin tüm açık yüzleri  $K$  kompleksinin içindedir.
- (2)  $(s_1), (s_2) \in K$  ve  $(s_1) \cap (s_2) \neq \emptyset$  ise, o zaman  $(s_1) = (s_2)$  olur. [3]

Aşağıda  $K$  ve  $L$  simpleksel kompleksleri verilmiştir.



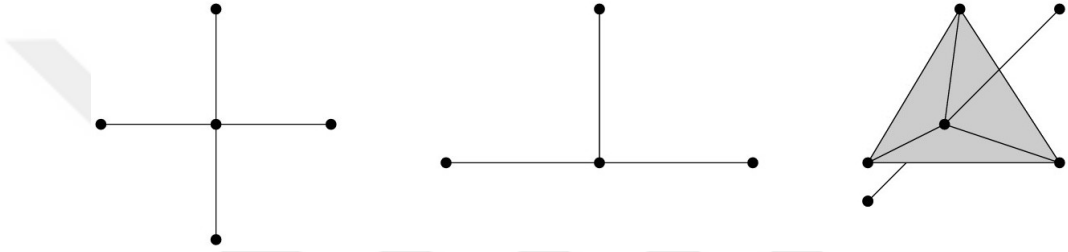
**Şekil 2.2** :  $K$  ve  $L$  simpleksel kompleksleri.

Örnek 2.1.1 Aşağıdaki üç örnek simpleksel kompleks olmaya aykırıdır.



Şekil 2.3 : Kompleks olmaya aykırı üç simpleksel kompleks.

Ancak simpleksel kompleks olabilmeleri için aşağıdaki gibi belirli simpleksler eklenerek kompleks hale getirilebilirler.



Şekil 2.4 : Kompleks olmaya aykırı durumu ortadan kaldırma işlemi.

Tanım 2.1.7  $K$  simpleksel kompleksinin boyutu,  $K$ 'nın simplekslerinin en büyük boyutlu olanının boyutudur ve  $\dim K$  ile gösterilir. [5]

Tanım 2.1.8  $K$  simpleksel kompleks olsun.  $L$  bir simpleksel kompleks ve  $(s) \in L$  iken  $(s) \in K$  ise  $L, K$  kompleksinin bir alt kompleksidir ve  $L \subset K$  ile gösterilir. [3]

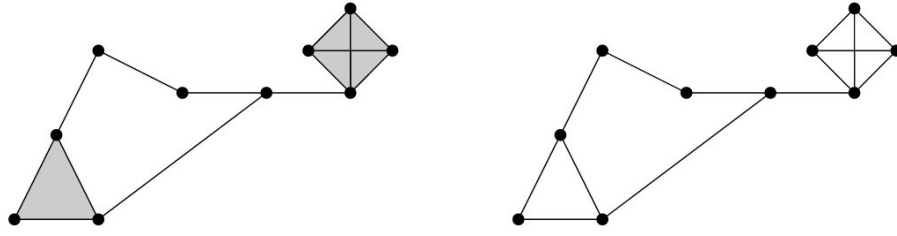
Tanım 2.1.9  $\tau \in K$  olacak şekilde bir simpleks olsun.  $\tau$  simpleksi tarafından üretilen alt kompleks  $\bar{\tau} := \{\sigma \in K : \sigma \subseteq \tau\}$  şeklinde tanımlanır. Eğer  $\sigma, \tau \in K$  ve  $\sigma \subseteq \tau$  ise, bu durumda  $\sigma, \tau$ 'nun bir yüzü (face),  $\tau$  ise  $\sigma$ 'nın bir eş yüzü (coface) olarak adlandırılır. [5]

Tanım 2.1.10  $K$  kompleks olsun ve  $r \leq \dim K$  tamsayı olsun.  $K$  kompleksinin  $r$ -iskeleti şu şekilde tanımlanır:

$$K^r := [(s) \in K; \dim s \leq r].$$

$K^r, K$  kompleksinin alt kompleksidir. [3]

Aşağıda  $K$  simpleksel kompleksi ve 1-iskeleti verilmiştir.



Şekil 2.5 :  $K$  kompleksi ve 1-iskeleti.

*Tanım 2.1.11*  $V$  sonlu bir küme olsun.  $V$  üzerinde  $L$  soyut simpleksel kompleks (abstract simplicial complex),  $V$  kümesinin boştan farklı alt kümelerinin şu özelliği sağlayan bir ailesidir: Eğer  $\sigma \in L$  ve  $\tau \subseteq \sigma$  boştan farklıysa, o zaman  $\tau \in L$  olur. [6]

*Tanım 2.1.12*  $K$  ve  $L$  soyut simpleksel kompleks olsun.  $K$  ve  $L$  arasındaki simpleksel dönüşüm (simplicial map), köşeler üzerinde bir  $\psi : K^{(0)} \rightarrow L^{(0)}$  eşlemesidir, öyle ki her  $\{v_0, v_1, \dots, v_k\} \in K$  soyut simpleks için  $\{\psi(v_0), \psi(v_1), \dots, \psi(v_k)\}$ ,  $L$ 'de bir soyut simpleks oluşturur. [6]

*Örnek 2.1.2* Aşağıdaki iki dönüşüm şu şekilde tanımlanmıştır:

$$\varphi : K \rightarrow L$$

$$v_0 \mapsto w_0$$

$$v_1 \mapsto w_0$$

$$v_2 \mapsto w_1$$

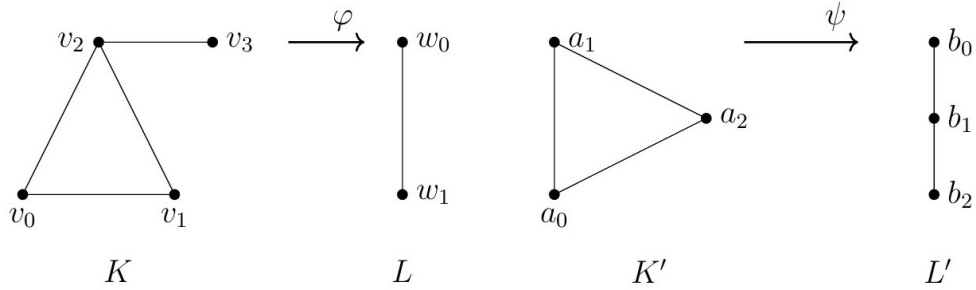
$$v_3 \mapsto w_1$$

$$\psi : K' \rightarrow L'$$

$$a_0 \mapsto b_0$$

$$a_1 \mapsto b_1$$

$$a_2 \mapsto b_2$$



Şekil 2.6 :  $\varphi$  ve  $\psi$  dönüşümleri.

bu dönüşümlerden  $\varphi$  dönüşümü  $K$  simpleksel kompleksindeki tüm simpleksleri  $L$  simpleksel kompleksindeki bir simplekse eşlediği için simpleksel dönüşümdür fakat  $\psi$  dönüşümü  $K'$  simpleksel kompleksindeki  $\{a_0, a_2\}$  simpleksini  $L'$  sim-

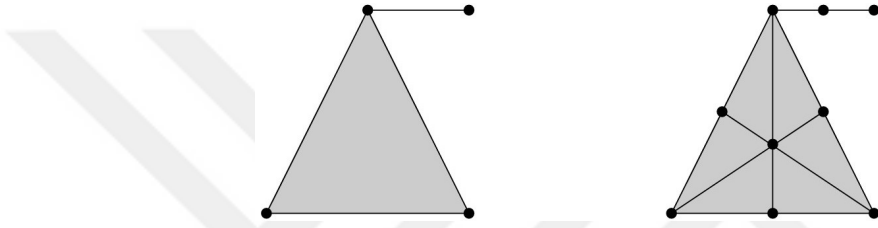
pleksel kompleksinde bulunmayan  $\{b_0, b_2\}$  simpleksine eşlediği için simpleksel bir dönüşüm değildir. [3]

*Tanım 2.1.13*  $K$  soyut simpleksel kompleks olsun.  $K$  simpleksinin  $sdK$  ile gösterilen birinci barisentrik bölünmesi (barycentric subdivision) şu şekilde tanımlanan soyut simpleksel komplekstir:

$$sdK = \{\{\sigma_1, \dots, \sigma_q\} \mid \sigma_1 \supset \dots \supset \sigma_q, \sigma_i \in K, q \geq 1\} \cup \{\emptyset\}.$$

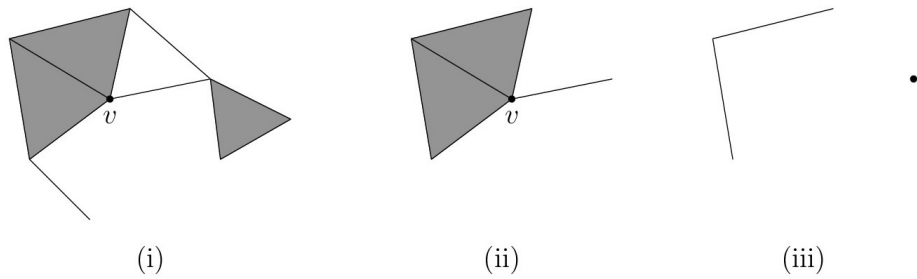
$sdK$ 'nın köşelerinin kümesi  $K$  simpleksinin boş olmayan simpleksleri tarafından indekslenir. [7]

Aşağıda  $K$  simpleksel kompleksinin birinci barisentrik bölünmesi verilmiştir.



**Şekil 2.7 :**  $K$  simpleksel kompleksi ve  $sdK$ .

*Tanım 2.1.14*  $K$  bir kompleks ve  $v$ ,  $K$  kompleksinin bir köşesi olsun.  $v$ 'nin  $K$  kompleksindeki yıldızı (star),  $\sigma \cup \{v\} \in K$  olacak şekilde  $\sigma \in K$  simpleksleridir ve  $st(v; K)$  ile gösterilir. Ayrıca  $st(v; K)$   $K$  kompleksinin alt kompleksidir.  $v$ 'nin  $K$  kompleksindeki linki,  $st(v; K)$ 'nin  $v$  köşesini içermeyen simplekslerin bir alt kompleksidir ve  $lk(v; K)$  ile gösterilir. [8]

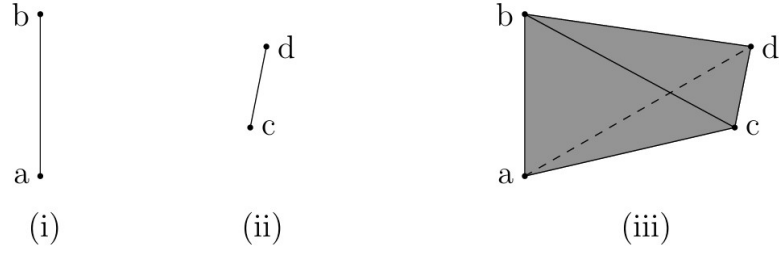


**Şekil 2.8 :** (i)  $K$  simpleksel kompleksi (ii)  $st(v; K)$  ve (iii)  $lk(v; K)$ .

*Tanım 2.1.15*  $K$  ve  $L$  simpleksel kompleks ve  $V(K) \cap V(L) \neq \emptyset$  olsun. Simpleksel join şu şekilde tanımlanır:

$$K * L = K \cup L \cup \{\sigma \cup \tau \mid \sigma, K \text{'nin simpleksi ve } \tau, L \text{'nin simpleksi olacak şekilde}\} [8]$$

*Örnek 2.1.3*  $K = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$  ve  $L = \{\{c\}, \{d\}, \{c, d\}\}$  verilsin.



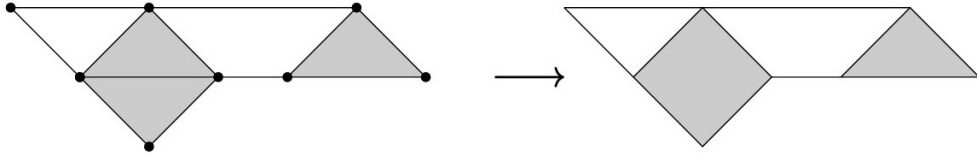
**Şekil 2.9 :** (i)  $K$  simpleksel kompleksi (ii)  $L$  simpleksel kompleksi ve (iii)  $K * L$ .

*Tanım 2.1.16*  $K \subset \mathbb{R}^{V(K)}$  sonlu simpleksel kompleksinin standart geometrik realizasyonu, tüm  $s \in K$  için  $\mathbb{R}^{V(K)}$  içindeki  $s$  simplekslerinin birleşimini alarak elde edilen topolojik uzay olarak tanımlanır.

$$|K| = \bigcup_{s \in K} s \subset \mathbb{R}^{V(K)},$$

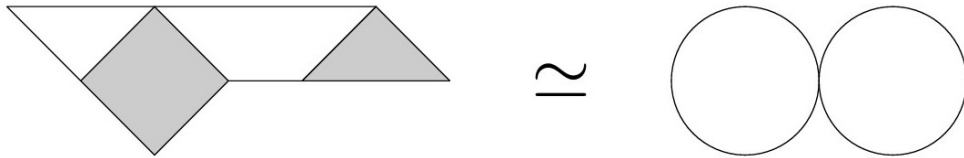
ile gösterilir. [7]

Aşağıda  $K$  simpleksel kompleksinin geometrik realizasyonu verilmiştir.



**Şekil 2.10 :**  $K$  simpleksel kompleksi ve geometrik realizasyonu.

$K$ 'nın geometrik realizasyonu ve iki çemberin bir noktada birleşimi (wedge sum of two circles) homotopi denktir.



**Şekil 2.11 :**  $K$ 'nın geometrik realizasyonuna homotopi denk olan  $S^1 \vee S^1$ .

## 2.2 Graflar

Özel bir durum olarak, boyutu 2'den küçük olan simpleksel kompleksler graf olarak adlandırılır. 0-boyutlu simpleksler grafın köşelerini, 1-boyutlu simpleksler

grafların kenarlarını oluşturur. Bu bağlantı, graf teorisinin simpleksel komplekslerin bir parçası olarak incelenmesini sağlar. Aşağıda graflara ait temel tanımlar ve özellikler verilmiştir.

*Tanım 2.2.1*  $G$  grafi,  $V = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$  köşe kümesinin ve bu köşelerin tümünü veya bir kısmını birleştiren  $E = \{e_0, e_1, \dots, e_m\}$  kenar kümesinin bir koleksiyonudur.  $G = (V, E)$  ikilisi ile veya kısaca  $G$  ile gösterilir. [9]

*Tanım 2.2.2*  $G$  bir graf olmak üzere  $v_i$  ve  $v_j$  köşeleri arasında  $v_i v_j = e$  kenarı mevcut ise  $v_i, v_j$  köşelerine komşu (adjacent / neighbours) denir. Eğer iki  $e_i \neq e_j$  kenarları ortak bir  $v_k$  köşesine sahip ise komşu (adjacent) denir. [10]

*Tanım 2.2.3* Bir  $G$  grafi yalnızca bir köşe noktasından oluşuyorsa  $G$  grafına aşikar (trivial) graf denir. [11]

*Tanım 2.2.4*  $x_i$ 'lerin hepsi birbirinden farklı olmak üzere

$$V = \{v_0, v_1, \dots, v_k\} \quad \text{ve} \quad E = \{v_0 v_1, v_1 v_2, \dots, v_{k-1} v_k\}$$

kümeleri alınsın. Graftaki bir yol,  $P = (V, E)$  grafidir.  $x_0$  ve  $x_k$  köşeleri  $P$  yolunun uçları ve  $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}$  köşeleri  $P$  yolunun iç köşeleridir. Bir yolun kenar sayıları yolun uzunluğunu belirler ve  $k$  uzunluğundaki bir yol  $P^k$  ile gösterilir. [10]

*Tanım 2.2.5*  $G$  grafının tüm köşeleri çift olarak birbiri ile komşu ise  $G$  grafına  $n$  köşeli tam graf denir ve  $K^n$  ile gösterilir. [10]

*Tanım 2.2.6*  $G$  bir graf olmak üzere,  $G$  grafının çift olarak komşu olmayan köşeler veya kenarlara bağımsız (independent) denir. [10]

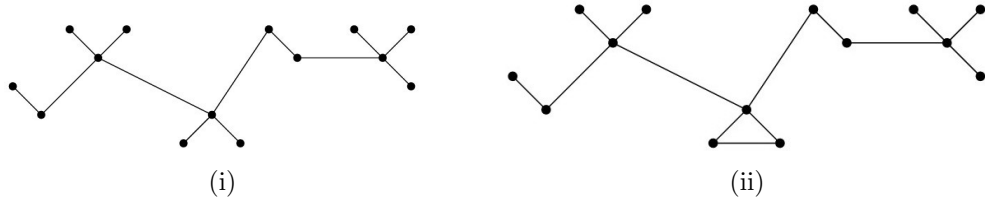
*Tanım 2.2.7*  $G$  grafında  $v$  köşesinin derecesi (degree)  $d_G(v) = d(v)$ ,  $v$  köşesine komşu olan kenarların sayısının toplamına eşittir. [10]

*Tanım 2.2.8*  $G$  bir graf olsun.  $G$  grafindaki bir döngü (cycle) farklı köşe ve kenarların bir  $v_0, e_1, v_1, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n$  alterne dizisi olarak ( $e_i$  kenarının köşeleri sırasıyla  $v_{i-1}$  ve  $v_i$  olmak üzere) ve  $v_0 = v_n$  şartını sağlayacak şekilde yazılır. [12]

Topolojik olarak bakıldığında döngüler  $S^1$  çemberinin üçgenleştirilmesidir.

*Tanım 2.2.9* Ağaç, döngüsel olmayan (acyclic) ve bağlantılı bir graf olarak adlandırılır. Döngü içermeyen ve bağlantısız her graf ise ormandır. Dolayısıyla, bir orman, bileşenleri ağaçlardan oluşan bir graf yapısıdır. [12]

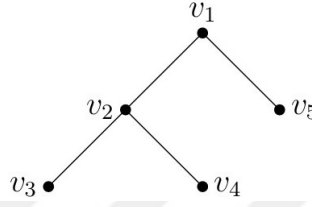
Aşağıda ağaç graf ve döngü içeren bir graf verilmiştir.



Şekil 2.12 : (i)  $T$  ağaç grafi (ii) döngü içeren  $G$  grafi.

*Tanım 2.2.10* Ağaç grafın bir dereceli köşelerine ağacın yaprak köşeleri (leaf vertex) denir. Aşık olmayan tüm ağaçların yaprağı vardır. [10]

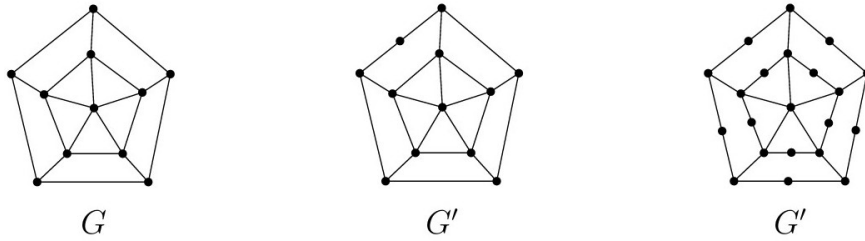
*Örnek 2.2.1*  $G$  grafının yaprakları  $v_3, v_4$  ve  $v_5$  köşeleridir.



Şekil 2.13 : Yaprakları  $v_3, v_4$  ve  $v_5$  köşeleri olan  $G$  grafi.

*Tanım 2.2.11*  $G$  bir graf olsun. Eğer  $e = uv$ ,  $G$  grafının bir kenarı ise ve  $w$ ,  $G$  grafının köşesi değil ise o zaman  $e$  kenarı,  $uw$  ve  $wv$  kenarları ile değiştirilmesi bölünme (subdivision) olarak adlandırılır. [12]

*Örnek 2.2.2* Aşağıda  $G$  grafi ve  $G$  grafının iki tane bölünmesi verilmiştir.



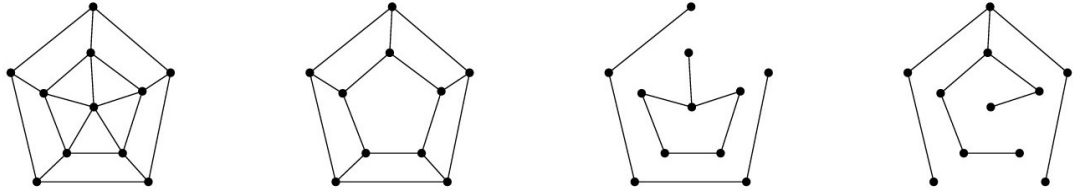
Şekil 2.14 :  $G$  grafının bölünmeleri.

*Tanım 2.2.12*  $G = (V, E)$  ve  $G' = (V', E')$  grafları için  $G \cup G' = (V \cup V', E \cup E')$  ve  $G \cap G' = (V \cap V', E \cap E')$  olmak üzere, eğer  $G \cap G' = \emptyset$  ise  $G$  ve  $G'$  grafları ayrıktır. Eğer  $V' \subseteq V$  ve  $E' \subseteq E$  ise  $G'$  grafi  $G$  grafının alt grafidir  $G' \subseteq G$  ile gösterilir.  $G$  grafının tüm köşe noktalarından ve bazı kenarlarından oluşan alt grafa giren (spanning) alt graf denir. [10]

*Tanım 2.2.13* Bir grafın alt ağacı (subtree), ağaç olan bir alt graftır. Eğer bu ağaç giren bir alt graf ise, grafın giren alt ağacı olarak adlandırılır. [11]

Şekil 2.15'deki ilk görselde  $G$  grafi verilmiştir. Daha sonrasında sırası ile  $G$

grafının alt grafi, geren alt grafi ve geren ağaç grafi verilmiştir.



**Şekil 2.15 :**  $G$  grafi,  $G$ 'nin alt grafi,  $G$ 'nin geren alt grafi ve  $G$ 'nin geren ağaç grafi.

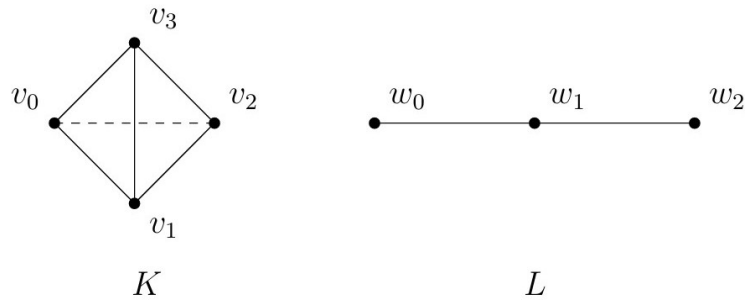
*Tanım 2.2.14*  $G$  boş olmayan bir graf olsun. Eğer  $G$  grafının herhangi iki köşesi  $G$  grafında bir yolla birbirine bağlıysa bağlantılı graf (connected graph) olarak adlandırılır. Aksi takdirde  $G$  grafi bağlantısızdır (disconnected). [10]

*Tanım 2.2.15*  $G = (V, E)$  ve  $G' = (V', E')$  iki graf olsun.  $G$  ve  $G'$  grafları arasında  $\forall v_1, v_2 \in V$   $e = v_1v_2 \in E \Leftrightarrow \psi(v_1)\psi(v_2) \in E'$  olacak şekilde birebir ve örten  $\psi : V \rightarrow V'$  dönüşümü varsa  $G$  ve  $G'$  grafları izomorftur denir ve  $G \cong G'$  ile gösterilir. Böyle bir  $\psi$  dönüşümüne izomorfizm denir. [10]

### 2.3 Basit Homotopi (Simple Homotopy)

*Tanım 2.3.1*  $\varphi, \psi : K \rightarrow L$  simpleksel dönüşümler olsun.  $K$  simpleksel kompleksindeki herhangi bir  $\sigma = \{v_0, \dots, v_n\}$  için  $\{\varphi(v_0), \varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n), \psi(v_0), \psi(v_1), \dots, \psi(v_n)\}$   $L$  kompleksinde bir simpleks ise,  $\varphi$  ve  $\psi$  bitişiktir (contiguous) denir.  $\varphi \sim_c \psi$  ile gösterilir. [13]

*Örnek 2.3.1* 3-boyutlu  $K$  kompleksi ve 1 boyutlu  $L$  kompleksi aşağıdaki gibi verilsin.



**Şekil 2.16 :**  $K$  ve  $L$  simpleksel kompleksleri.

$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 : K \rightarrow L$  dönüşümleri aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$\varphi_1 : K \rightarrow L$$

$$\varphi_2 : K \rightarrow L$$

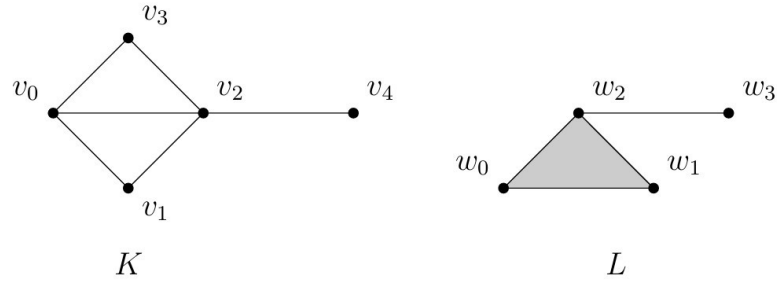
$$\varphi_3 : K \rightarrow L$$

$v_0 \mapsto w_0$	$v_0 \mapsto w_1$	$v_0 \mapsto w_2$
$v_1 \mapsto w_0$	$v_1 \mapsto w_1$	$v_1 \mapsto w_1$
$v_2 \mapsto w_1$	$v_2 \mapsto w_1$	$v_2 \mapsto w_1$
$v_3 \mapsto w_1$	$v_3 \mapsto w_1$	$v_3 \mapsto w_1$

$\varphi_1$  ve  $\varphi_2$ ,  $\varphi_2$  ve  $\varphi_3$  dönüşümleri bitişiktir. Diğer taraftan  $(\varphi_1 \cup \varphi_3)(v_0, v_1) = \{\varphi_1(v_0), \varphi_1(v_1), \varphi_3(v_0), \varphi_3(v_1)\} = \{w_0, w_2, w_1\}$  olduğu için bitişik değildir. Dolayısıyla bitişik özelliği denklik bağlantısı değildir. [3]

**Tanım 2.3.2**  $\varphi, \psi : K \rightarrow L$  simpleksel dönüşümler olsun.  $\varphi$  ve  $\psi$  simpleksel dönüşümlerinin aynı bitişiklik (contiguity) sınıfında olması şu şekilde tanımlanır:  $\varphi = \varphi_1 \sim_c \varphi_2 \sim_c \dots \sim_c \varphi_n = \psi$  olacak şekilde sonlu tane  $\varphi_i : K \rightarrow L$  simpleksel dönüşümü vardır ve  $\varphi \sim \psi$  ile gösterilir. [8, 13]

**Örnek 2.3.2**  $K$  ve  $L$  simpleksel kompleks olsun.



**Şekil 2.17** :  $K$  ve  $L$  simpleksel kompleksleri.

$\varphi, \psi : K \rightarrow L$  simpleksel dönüşümleri aşağıdaki gibi tanımlansın:

$\varphi : K \rightarrow L$	$\psi : K \rightarrow L$
$v_0 \mapsto w_0$	$v_0 \mapsto w_2$
$v_1 \mapsto w_0$	$v_1 \mapsto w_2$
$v_2 \mapsto w_1$	$v_2 \mapsto w_3$
$v_3 \mapsto w_1$	$v_3 \mapsto w_3$
$v_4 \mapsto w_1$	$v_4 \mapsto w_3$

$\sigma = \{v_0, v_3\}$ ,  $K$ 'da bir simpleks olmasına rağmen  $(\varphi \cup \psi)(\sigma) = \varphi(\sigma) \cup \psi(\sigma) = \{w_0, w_1, w_2, w_3\}$   $L$ 'de bir simpleks değildir. Bu sebeple,  $\varphi$  ve  $\psi$  simpleksel

dönüşümleri aynı bitişiklik sınıfında değildir. Diğer taraftan aşağıdaki gibi tanımlanmış ve  $\varphi = \varphi_1 \sim_c \varphi_2 \sim_c \varphi_3 \sim_c \varphi_4 \sim_c \varphi_5 = \psi$  olacak şekilde simpleksel dönüşümler dizisi vardır.

$\varphi_1 : K \rightarrow L$	$\varphi_2 : K \rightarrow L$	$\varphi_3 : K \rightarrow L$	$\varphi_4 : K \rightarrow L$	$\varphi_5 : K \rightarrow L$
$v_0 \mapsto w_0$	$v_0 \mapsto w_1$	$v_0 \mapsto w_0$	$v_0 \mapsto w_2$	$v_0 \mapsto w_2$
$v_1 \mapsto w_0$	$v_1 \mapsto w_1$	$v_1 \mapsto w_0$	$v_1 \mapsto w_2$	$v_1 \mapsto w_2$
$v_2 \mapsto w_1$	$v_2 \mapsto w_2$	$v_2 \mapsto w_2$	$v_2 \mapsto w_2$	$v_2 \mapsto w_3$
$v_3 \mapsto w_1$	$v_3 \mapsto w_2$	$v_3 \mapsto w_2$	$v_3 \mapsto w_2$	$v_3 \mapsto w_3$
$v_4 \mapsto w_1$	$v_4 \mapsto w_2$	$v_4 \mapsto w_2$	$v_4 \mapsto w_2$	$v_4 \mapsto w_3$

Böylece  $\varphi$  ve  $\psi$  simpleksel dönüşümleri aynı bitişiklik sınıfındadır ama bitişik değildir.

*Tanım 2.3.3*  $\varphi : K \rightarrow L$  simpleksel dönüşümü verilsin. Eğer  $\varphi \circ \psi \sim id_L$  ve  $\psi \circ \varphi \sim id_K$  olacak şekilde  $\psi : L \rightarrow K$  simpleksel dönüşümü varsa,  $\varphi$ 'ye güçlü denk (strong equivalent) denir.  $K$  ve  $L$  arasında güçlü denklik vardır denir;  $K \sim L$  ile gösterilir. [8]

*Tanım 2.3.4*  $(K, v_0)$  ve  $(L, w_0)$  noktalı (pointed) simpleksel kompleksler olsun. Hem  $\varphi, \psi : K \rightarrow L$  homotopi denklemleri hem de  $\psi \circ \varphi \sim id_K$  ve  $\varphi \circ \psi \sim id_L$  ifadelerini oluşturan bitişik dönüşümleri, taban noktalarını koruyorsa  $(K, v_0)$  ve  $(L, w_0)$ , aynı noktalı güçlü homotopi tipine sahiptir (the same pointed strong homotopy type) denir.  $(K, v_0) \sim (L, w_0)$  ile gösterilir. [14]

*Tanım 2.3.5*  $L$  bir simpleksel kompleks olmak üzere  $L' \subseteq L$  alt kompleksini alalım. Köşeleri  $L'$  kompleksine ait olan,  $L$  kompleksinin her bir simpleksi eğer  $L'$  kompleksinin de bir simpleksi oluyorsa,  $L'$  kompleksine  $L$  kompleksinin tam (full) alt kompleksi denir. [14]

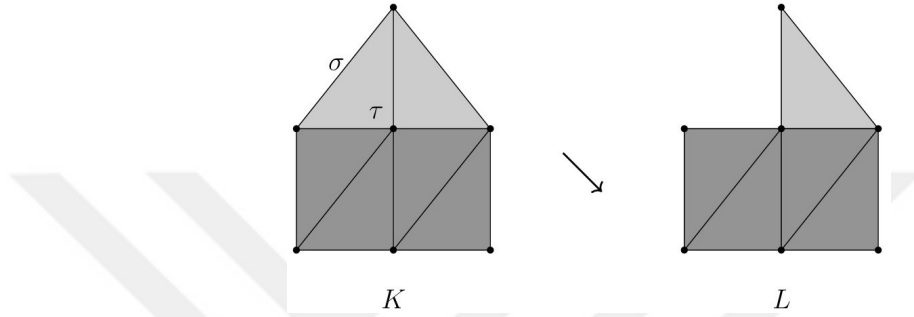
*Önerme 2.3.1*  $\varphi, \psi : K \rightarrow L$  iki simpleksel dönüşüm olsun.  $\varphi(K'), \psi(K') \subset L'$  olacak şekilde  $K' \subset K$  alt kompleksi ve  $L' \subset L$  tam alt kompleksi verilsin. Eğer  $\varphi \sim_c \psi$  ise  $\varphi', \psi' : K' \rightarrow L'$  kısıtlanmış dönüşümleri de bitişiktir. [14]

*Tanım 2.3.6*  $K$  simpleksel kompleks ve  $\sigma \in K$  olsun. Eğer  $\sigma$ ,  $K$  içinde başka hiçbir simpleksin alt kümesi değil ise,  $\sigma$  maksimal simpleks olarak adlandırılır. [7]

*Tanım 2.3.7*  $K$  bir simpleksel kompleks ve  $v$ ,  $K$ 'nın bir köşesi olsun.  $v$  köşesini içeren her maksimal simpleks,  $v \neq v'$  olacak şekilde  $v'$  köşesini içeriyorsa  $v$  köşesi  $v'$  köşesi tarafından domine edilir ( $v$  is dominated by  $v'$ ) denir. [8]

*Tanım 2.3.8*  $K$  sonlu simpleksel kompleks olsun. Eğer  $K$  baskın (domine eden) köşeye sahip değilse minimal bir komplekstir.

*Tanım 2.3.9*  $K$  simpleksel kompleks olsun.  $\{\sigma^{(p-1)}, \tau^{(p)}\} \in K$  simpleks çifti olsun öyle ki  $\sigma, \tau$ 'nin bir yüzü olsun ve  $\sigma$  simpleksinin başka bir eş yüzü olmasın. O zaman  $K - \{\sigma, \tau\}$ ,  $K$  simpleksel kompleksinin elementer çöküş (elementary collapse) olarak adlandırılan simpleksel kompleksidir ve çökme işlemi  $K \searrow K - \{\sigma, \tau\}$  ile gösterilir. Diğer taraftan, elementer çökmenin tersi elementer genişletme (elementary expansion) olarak adlandırılır ve  $K \nearrow K \cup \{\sigma^{(p-1)}, \tau^{(p)}\}$  ile gösterilir. [5]



**Şekil 2.18** :  $K$  kompleksinden  $L$  kompleksine elementer çökme.

*Tanım 2.3.10* Bir simpleksel kompleks  $K$ , eğer aşağıdaki gibi bir dizi elementer çöküş varsa çökebilir (collapsible) olarak adlandırılır:

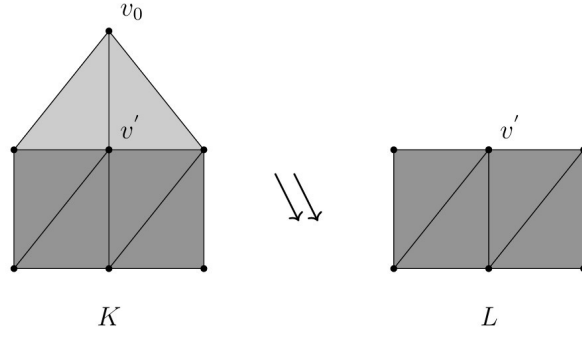
$$K = K_0 \searrow K_1 \searrow \cdots \searrow K_{n-1} \searrow K_n = \{v\}. [5]$$

*Tanım 2.3.11*  $K$  soyut simpleksel kompleks ve  $v_0 \in K$  bir simpleks olsun.  $v_0$ 'ın açık yıldızı (open star),

$$ostar_K(v_0) := \{\sigma \in K \mid \sigma \supseteq \{v_0\}\}$$

şeklinde tanımlanır. Bir başka deyişle,  $ostar_K(v_0)$ ,  $v_0$ 'ı içeren tüm simplekslerin oluşturduğu alt kümedir. [7]

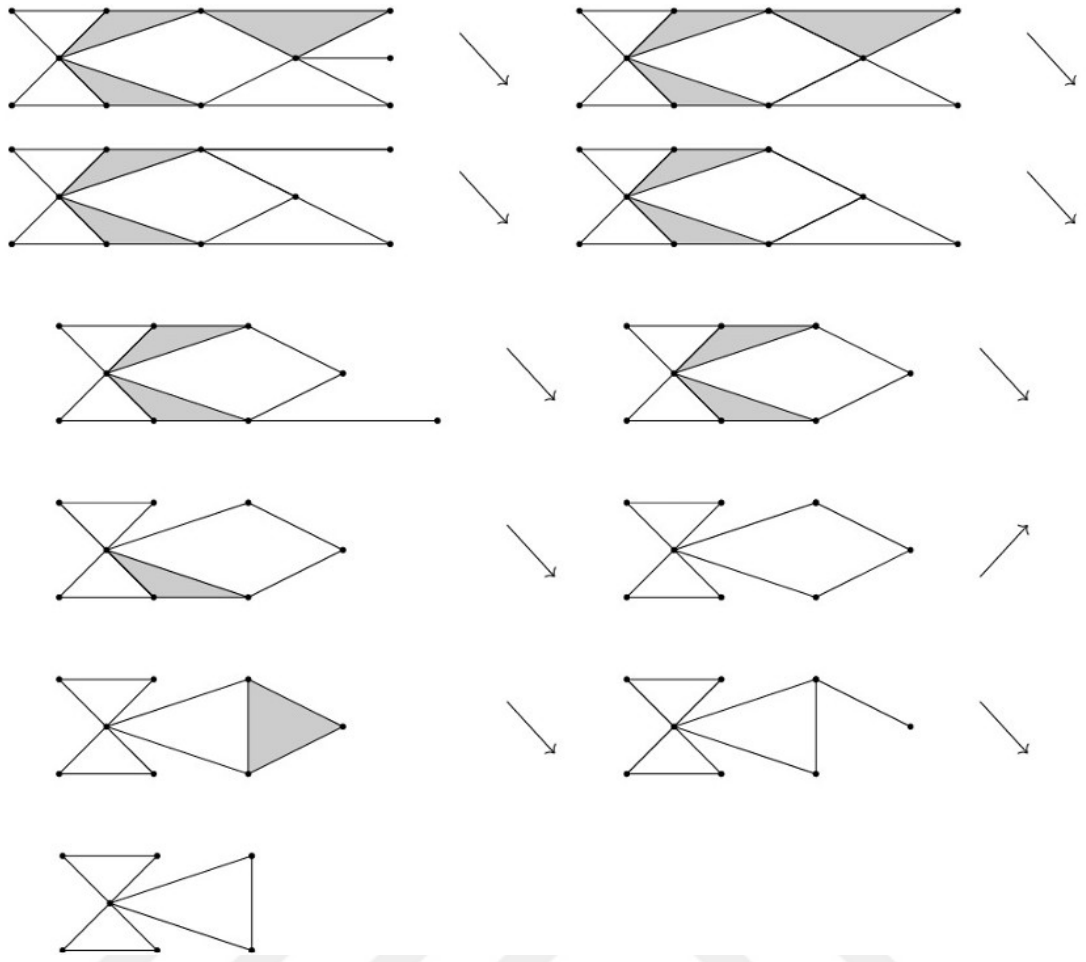
*Tanım 2.3.12*  $K$  simpleksel kompleks olsun.  $K$  simpleksel kompleksinden domine edilen bir  $v_0$  köşe noktasının açık yıldızının (open star) çıkarılma işlemine elementer güçlü çöküş (elementary strong collapse) denir ve  $K$ 'dan  $L$ 'ye elementer çökme  $K \searrow\searrow L$  ile gösterilir. Elementer güçlü çöküşün tersine elementer güçlü genişletme (elementary strong expansion) denir ve  $K$ 'dan  $L$ 'ye elementer genişleme  $K \nearrow\nearrow L$  ile gösterilir. [5]



**Şekil 2.19** :  $K$  kompleksinden  $L$  kompleksine elementer güçlü çökme.

*Tanım 2.3.13*  $K$  ve  $L$  simpleksel kompleks olsun. Bir dizi elementer güçlü çöküş veya elementer güçlü genişletme, sırasıyla güçlü çöküş veya güçlü genişletme olarak adlandırılır. Eğer  $K$  simpleksel kompleksini  $L$  simpleksel kompleksine dönüştüren bir dizi güçlü çöküşler ve güçlü genişlemeler varsa  $K$  ve  $L$  kompleksleri aynı güçlü homotopi tipine sahiptir (have the same strong homotopy type) denir. Bu durumda özel olarak,  $L = *$  (bir nokta) ise,  $K$  bir noktanın güçlü homotopi tipine sahiptir. Eğer  $K$ 'dan bir noktaya bir dizi elementer güçlü çökmeler varsa  $K$ 'ya güçlü çökebilir (strongly collapsible) denir. [5]

*Örnek 2.3.3* Aşağıda, ilk simpleksel komplekse bir dizi elementer çöküş ve elementer genişleme işlemi uygulayarak, onunla aynı simpleksel homotopi tipine sahip başka bir simpleksel kompleks elde edeceğiz.



Şekil 2.20 : Bir dizi elementer çöküş ve genişleme.

### 3. SİMPLKSEL LS-KATEGORİ

#### 3.1 Simpleksel LS-Kategori

*Tanım 3.1.1*  $X$  topolojik uzayı ve  $U \subseteq X$  açık bir alt kümesi olsun. Eğer  $U$ ,  $X$  içinde bir  $x$  noktasına büzülebiliyorsa,  $U$ 'ya kategoriktir denir. Bir başka deyişle, Eğer  $\iota : U \hookrightarrow X$  kapsama dönüşümü,  $x \in X$  için  $c_x$  sabit dönüşümü ile homotop ise  $U$  kategoriktir. [1]

*Tanım 3.1.2*  $X$  topolojik uzayı için şu şartı sağlayan en küçük  $n \geq 0$  tamsayısına  $X$  uzayının LS-kategorisi denir:  $X$ 'in öyle  $n+1$  tane  $U_0, U_1, \dots, U_n$  kategorik açık alt kümesi vardır ki  $X$ 'i örter.  $X$  uzayının LS-kategorisi  $catX$  ile gösterilir. [1]

*Tanım 3.1.3*  $K$  bir simpleksel kompleks olsun.  $K$  kompleksinin alt komplekslerinden oluşan  $\{U_0, U_1, \dots, U_n\}$  koleksiyonu,

$$\bigcup_{i=0}^n U_i = K$$

koşulunu sağlıyor ise  $K$ 'nın bir örtüsüdür bir başka deyişle  $K$ 'yı örter denir. [5]

*Tanım 3.1.4*  $K$  soyut simpleksel kompleks olsun. Eğer  $\iota : U \hookrightarrow K$  kapsama dönüşümü ve  $c_v : U \rightarrow K$  sabit dönüşümü ( $v$ ,  $K$ 'nın bir köşesi olmak üzere) aynı bitişiklik sınıfında ise  $(\iota \sim c_v)$ ,  $U \subset K$  alt kompleksine kategoriktir denir. [14]

*Tanım 3.1.5*  $K$  soyut simpleksel kompleks olsun. Şu şartı sağlayan en küçük  $n \geq 0$  tamsayısına  $K$ 'nin simpleksel LS-kategorisi denir:  $K$  kompleksinin öyle  $n+1$  tane  $U_0, U_1, \dots, U_n$  kategorik alt kompleksi vardır ki  $K$ 'yı örter.  $scatK$  ile gösterilir. [15]

*Lemma 3.1.1*  $V \subset U \subset K$ ,  $K$ 'nın alt kompleksleri olsun. Eğer  $U$ ,  $K$ 'da kategorik ise  $V$  de  $K$ 'da kategoriktir. [14]

*İspat.*  $U$ ,  $K$ 'da kategorik olsun. Bu durumda  $\iota : U \hookrightarrow K$  kapsama dönüşümü ve  $c : U \rightarrow K$  sabit dönüşümü için  $\iota \sim c$  sağlanır.  $j : V \rightarrow U$  kapsama dönüşümünü alalım. Bu durumda  $\iota \circ j : V \hookrightarrow K$  kapsama dönüşüm ve  $c \circ j : V \rightarrow K$  sabit dönüşüm olur. Ayrıca  $\iota \circ j \sim c \circ j$  sağlanır. [14]  $\square$

*Önerme 3.1.1* Tanım 3.1.5'den aşağıdaki varsayımlar yapılabilir:

(1)  $U_0, \dots, U_n$  örtüsündeki her kategorik alt kompleks  $K$  kompleksinin maksimal simplekslerinin bir birleşimidir.

(2)  $K$  kompleksinin her maksimal simpleksi örtünün elemanlarından yalnız birinde bulunur. [14]

*İspat.*  $U_0, \dots, U_n \subset K$  kategorik bir örtü olsun. Her  $U_j$  alt kompleksini,  $K$  kompleksinde maksimal olan  $\sigma \in U_j$  simplekslerinin birleşimi olarak tanımlanan başka bir  $V_j$  (boş olabilir) alt kompleksi ile değiştirelim.

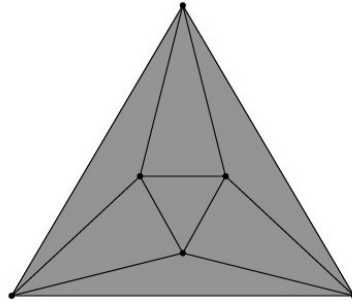
İlk olarak,  $V_0, \dots, V_n$  örtüsü  $K$  kompleksinin bir örtüsüdür çünkü eğer  $\mu$ ,  $K$  kompleksinin bir simpleksi ise  $\mu$  öyle bir  $\sigma$  maksimal simpleksinin içinde yer almalıdır ki bu da  $\mu$  simpleksinin bazı  $U_j$ 'de yer almasını sağlar. O zaman  $\mu \subset \sigma \in V_j$  bir başka deyişle,  $\mu \in V_j$  olur. Böylece  $V_j \subset U_j$  olduğu için, Lemma 3.1.1'e göre  $V_j$  kategoriktir.

İkinci kısım, her maksimal simpleksi  $V_j$ 'lerden biri hariç hepsinden çıkarırsak, ortaya çıkan alt kompleksler Lemma 3.1.1'e göre hala kategoriktir ve  $K$  kompleksini örter. [14]  $\square$

*Tanım 3.1.6* Bir kompleksin güçlü çöken olması bir noktaya güçlü çöktüğü bir başka deyişle, bir noktanın güçlü homotopi tipine sahip olduğu anlamına gelir. [8]

*Sonuç 3.1.1*  $K$  simpleksel kompleks olsun.  $scatK = 0$  olması için gerek yeter şart bir noktanın aynı güçlü homotopi tipine sahip olmasıdır. [15]

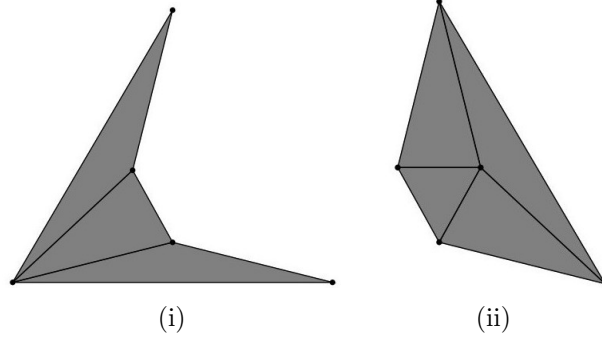
*Örnek 3.1.1* Şekil 3.1'deki  $K$  simpleksel kompleksi [16]'da yer almaktadır. Şekildeki  $K$  simpleksel kompleksi baskın köşe içermez dolayısıyla, çökebilir ancak güçlü çöken değildir, güçlü çöken olmadığından dolayı  $scatK \geq 1$  olur.



**Şekil 3.1** : Çöken ama güçlü çöken olmayan  $K$  simpleksel kompleksi.

Şekil 3.2'de  $K$ 'nın güçlü çöken iki alt kompleksi verilmiştir. Böylece  $scat(K) = 1$

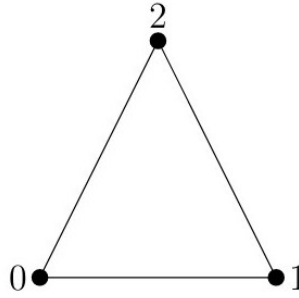
olur.



Şekil 3.2 : (i)  $K_1$  alt kompleksi (ii)  $K_2$  alt kompleksi.

Bu örnek,  $scat$ 'in kompleksin geometrik realizasyonundan çok simpleksel yapısına bağlı olduğunu göstermektedir. [15]

Örnek 3.1.2 Şekil 3.3'deki  $K$  simpleksel kompleksi güçlü çöken değildir. Bu durumda  $scat(K) = 1$  olur. [14]



Şekil 3.3 :  $scatK = 1$  olan  $K$  simpleksel kompleksi.

Örnek 3.1.3  $K$  sonlu simpleksel kompleks olsun ve  $a$ ,  $K$  kompleksinin bir köşesi olmasın.  $\{v_0, \dots, v_n\}$ ,  $K$  kompleksinin bir simpleksi olmak üzere  $\{v_0, \dots, v_n, a\}$  formundaki simplekslerle gerilen komplekse  $K * a$  konisi denir.  $K * a$  güçlü çöker, bir başka deyişle,  $scat(K * a) = 0$  olur. Bu sonuç,  $lk(u, K * a) = lk(u, K) * a$  [17] eşitliği dikkate alınarak ispatlanabilir. [14]

Bu alt bölümün önemli teoremlerinden biri  $scat(-)$ 'in güçlü homotopi tipi değişmezi olduğunu söyleyen Teorem 3.1.1'dir. Teoremin ispatında Önerme 3.1.2 kullanılacaktır. Bu önermeyi ispatlamak için Lemma 3.1.2 ve Lemma 3.1.3'den faydalanılacaktır.

Lemma 3.1.2  $f, g : K \rightarrow L$  dönüşümleri  $f \sim_c g$  şartını sağlayan iki simpleksel dönüşüm ve  $h : N \rightarrow K$  başka bir simpleksel dönüşüm olsun. O zaman  $f \circ h \sim_c g \circ h$  olur. Başka bir  $h' : L \rightarrow N$  simpleksel dönüşüm alınırsa benzer şekilde  $h' \circ f \sim_c h' \circ g$  olur. [15]

*İspat.*  $f \sim_c g$  olduğu için  $K$  kompleksindeki herhangi bir  $\sigma = \{v_0, \dots, v_n\}$  için  $L$  kompleksinde  $\{f(v_0), \dots, f(v_n), g(v_0), \dots, g(v_n)\}$  oluşturur.

Şimdi  $h : N \rightarrow K$  simpleksel dönüşümü için  $N$  kompleksindeki herhangi bir  $\beta = \{w_0, \dots, w_n\}$  simpleksini alalım.  $h$  simpleksel dönüşüm olduğundan dolayı,  $\{h(w_0), \dots, h(w_n)\}$ ,  $K$  kompleksinde bir simplekstir. Bu sebeple  $f \sim_c g$  olduğundan dolayı,

$$\{f(h(w_0)), \dots, f(h(w_n)), g(h(w_0)), \dots, g(h(w_n))\}$$

da  $L$  kompleksinde bir simpleks oluşturur. Böylece,  $f \circ h \sim_c g \circ h$  olur.

Benzer şekilde  $h' : L \rightarrow N$  için de  $h' \circ f \sim_c h \circ g$  olduğu gösterilir.  $\square$

*Lemma 3.1.3*  $K = K_0 \begin{array}{c} \xrightarrow{f_1} \\ \xleftarrow{g_1} \end{array} K_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{f_2} \\ \xleftarrow{g_2} \end{array} \dots \begin{array}{c} \xrightarrow{f_n} \\ \xleftarrow{g_n} \end{array} K_n = L$ , her  $i = \{1, \dots, n\}$  için

$$f_i \circ g_i \sim_c id_{K_i} \text{ ve } g_i \circ f_i \sim_c id_{K_{i-1}}$$

olacak şekilde dönüşümlerin iki dizisi olsun. Bu durumda  $K$  ve  $L$  kompleksleri arasında güçlü denklik vardır. [15]

*İspat.*  $f_i \circ g_i \sim_c id_{K_i}$  ve  $g_i \circ f_i \sim_c id_{K_{i-1}}$  olduğu için  $\varphi = f_n \circ f_{n-1} \circ \dots \circ f_1 : K \rightarrow L$  ve  $\psi = g_1 \circ g_2 \circ \dots \circ g_n : L \rightarrow K$  dönüşümleri vardır. Burada

$$\begin{aligned} \varphi \circ \psi &= (f_n \circ f_{n-1} \circ \dots \circ f_1) \circ (g_1 \circ g_2 \circ \dots \circ g_n) \sim_c id_L \\ \psi \circ \varphi &= (g_1 \circ g_2 \circ \dots \circ g_n) \circ (f_n \circ f_{n-1} \circ \dots \circ f_1) \sim_c id_K \end{aligned}$$

olur. Bu durumda  $K$  ve  $L$  kompleksleri arasında güçlü denklik vardır.  $\square$

*Önerme 3.1.2*  $f : K \rightarrow L$  ve  $g : L \rightarrow K$ ,  $g \circ f \sim id_K$  olacak şekilde iki simpleksel dönüşüm olsun. Bu durumda  $scatK \leq scatL$  olur. [15]

*İspat.*  $U \subset L$  kategorik alt kompleks olsun.  $\iota_U$  kapsama dönüşümü, bazı  $c_v$  sabit dönüşüm ile aynı bitişiklik sınıfında olduğundan dolayı,  $\varphi_i : U \rightarrow K$ ,  $i \in \{0, \dots, n\}$ , biçiminde dönüşümler dizisi vardır ki

$$\iota_U = \varphi_0 \sim_c \dots \sim_c \varphi_n = c_v$$

olur.  $f^{-1}(U) \subset K$  alt kompleksini ele alalım.  $f^{-1}$  kategorik olduğunu gösterilmelidir.  $g \circ f \sim id_K$  olduğundan  $\psi_i : K \rightarrow K$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ , dönüşümler dizisi vardır ki

$$id_K = \psi_0 \sim_c \cdots \sim_c \psi_m = g \circ f.$$

$f'$  dönüşümünü,  $f$  dönüşümünün  $f^{-1}(U)$  alt kompleksine kısıtlanması olarak tanımlayalım. Bir başka deyişle,

$$f' : f^{-1}(U) \rightarrow U \text{ ve } f'(x) = f(x).$$

Ayrıca  $j : f^{-1}(U) \subset K$  kapsama dönüşümü olsun. O zaman Lemma 3.1.2'den dolayı

$$j = id_K \circ j = \psi_0 \circ j \sim_c \cdots \sim_c \psi_m \circ j = g \circ f \circ j \quad (3.1)$$

olur.  $f \circ j = \iota_U \circ f'$  olduğundan dolayı,

$$g \circ f \circ j = g \circ \iota_U \circ f' = g \circ \varphi_0 \circ f' \sim_c \cdots \sim_c g \circ \varphi_n \circ f'$$

olur.

Ancak  $\varphi_n = c_v$ , bir başka deyişle,  $g \circ \varphi_n \circ f' : f^{-1}(U) \rightarrow g(U)$ ,  $c_{g(v)}$  sabit dönüşümüne eşittir. Denklem (3.1)'den de dolayı,

$$j \sim c_{g(v)}$$

elde edilir. Böylece  $f^{-1}(U) \subset K$  alt kompleksi kategoriktir.

Son olarak  $scat(L) = n$  ve  $\{U_0, \dots, U_n\}$ ,  $L$  kompleksinin kategorik örtüleri olsun. O zaman  $\{f^{-1}(U_0), \dots, f^{-1}(U_n)\}$ ,  $K$  kompleksinin kategorik bir örtüsüdür. Bu durumda  $scat(K) \leq n$  olduğundan dolayı  $scat(K) \leq scat(L)$  olur. [15]  $\square$

*Teorem 3.1.1* Simpleksel LS-kategori, bir güçlü homotopi tipi invariantıdır. Bir başka deyişle,  $K \sim L$  ise  $scat(K) = scat(L)$  olur. [14, 15]

*İspat.*  $K \sim L$  olduğu için  $f : K \rightarrow L$  ve  $g : L \rightarrow K$  dönüşümleri vardır ki  $g \circ f \sim id_K$  ve  $f \circ g \sim id_L$  sağlanır. Böylece Önerme 3.1.2'den  $scatK \leq scatL$  ve  $scatL \leq scatK$  olur. Bu durumda  $scatK = scatL$  elde edilir.  $\square$

*Tanım 3.1.7* Sonlu simpleksel  $K$  kompleksinin çekirdeği (core),  $K \searrow \searrow K_0$  olacak şekilde baskın köşeleri olmayan bir  $K_0 \subset K$  alt kompleksidir. [16]

*Sonuç 3.1.2* Aşağıdakiler  $scat(K)$  için bir katı üst sınırdır (strictly bounded from above). Bir başka deyişle, aşağıdakiler  $scatK$  sayısından büyüktür (fakat eşit değildir). [14]

- (1)  $K$  kompleksinin köşe sayısı
- (2)  $K_0$  çekirdeğinin maksimal simplekslerinin sayısı

*İspat.*  $v \in K_0$  bir köşe noktası olmak üzere  $v$ 'nin starı  $st(v)$  ile gösterilsin.  $st(v)$   $K_0$ 'ın güçlü çöken alt kompleksidir. Çünkü  $st(v)$ 'deki tüm köşeler  $v$  köşesi tarafından domine edilirler. Böylece  $\{st(v) : v \in K_0\}$  ailesinin  $K_0$ 'ın kategorik alt kompleksi ile oluşturulan bir örtüsü olduğu söylenebilir.  $K_0$ 'daki köşelerin sayısı  $m$  ile gösterilsin bu durumda  $scat(K_0) < m$  olur.  $scat(K)$  güçlü homotopi invariantı olduğundan dolayı  $scat(K) = scat(K_0) < m$  bulunur.

Diğer taraftan  $M(K_0)$ ,  $K_0$ 'nın maksimal simplekslerinin sayısı olsun. O zaman herhangi bir maksimal simpleks,  $K_0$ 'ın güçlü çöken alt kompleksi olduğu için ve Önerme 3.1.1'den dolayı  $scat(K_0) < M(K_0)$  sonucu elde edilir. [14]  $\square$

### 3.2 Geometrik Simpleksel Kategori

R. H. Fox tarafından [18] tanıtılan geometrik LS-kategorisinin analogu olan geometrik simpleksel kategori D. Fernandez-Ternero, E. Macias-Virgos ve J.A. Vilches tarafından [15]'de tanıtılmıştır.  $gscat(K)$  ile  $scat(K)$  arasındaki temel fark, bir kategorik örtüde yer alan her alt kompleksin,  $K$  içinde değil kendi içinde güçlü çöken olmasıdır. Diğer bir deyişle, sabit bir dönüşüm ile aynı bitişiklik sınıfında olan dönüşüm, kapsama dönüşümü değil, birim dönüşüm olmalıdır. Bu durum doğrudan  $scat(K) \leq gscat(K)$  sonucunu verir. Ancak bu eşitsizlik bazı komplekslerde katı (strict) olabilir; örneğin, 2-boyutlu torusun standart üçgensel ayrıştırmasında olduğu gibi. Geometrik simpleksel kategori, klasik simpleksel kategoriden farklı olarak bazı önemli özelliklere sahip değildir; örneğin homotopi değişmezi değildir. Bununla birlikte, [15]'de ispatlandığı üzere, Sonuç 3.1.2'de verilen üst sınırlar  $gscat(K)$  için de geçerlidir çünkü  $gscat K_0 = \max\{gscat L : L \sim K\}$  eşitliği [15] sağlanır. [1]

*Tanım 3.2.1*  $X$  topolojik uzay olsun. Şu şartı sağlayan en küçük  $n \geq 0$  tam sayısına  $X$  uzayının geometrik kategorisi denir:  $X$ 'in öyle  $n+1$  tane  $U_0, U_1, \dots, U_n$  büzülebilir açık alt kümesi vardır ki  $X$ 'i örter.  $gcat X$  ile gösterilir. [1]

*Tanım 3.2.2*  $K$  simpleksel kompleks olsun. Şu şartı sağlayan en küçük  $n \geq 0$  tam sayısına  $K$  simpleksel kompleksinin geometrik kategorisi denir:  $K$  simpleksel kompleksinin öyle  $n+1$  tane  $U_0, U_1, \dots, U_n \subset K$  örtüsü vardır ki her  $i = 0, \dots, n$  için  $U_i \sim *$  sağlanır.  $gscat(K)$  ile gösterilir. [15]

*Önerme 3.2.1*  $K$  ve  $L$  sonlu simpleksel kompleksler olsun.  $K * L$  güçlü çöken olması için gerek yeter şart  $K$  veya  $L$  güçlü çökendir. [8]

*İspat.* Varsayalım ki  $v$ ,  $K$ 'nın baskın bir köşesi olsun. Bu durumda  $lk(K; v)$  bir konidir (cone) ve bundan dolayı  $lk(K * L; v) = lk(K; v) * L$  da koni olur. Bu nedenle  $v$  köşesi  $K * L$  kompleksinde de baskındır. Dolayısıyla, eğer  $K$  bir  $v_0$  köşesine güçlü çöker ise  $K * L \searrow \searrow v_0 L \searrow \searrow v_0$  olur.

Tersine olarak,  $K * L$ 'nin güçlü çöken olduğunu varsayalım.  $v$ ,  $K * L$ 'nin baskın noktası olsun ve  $v \in K$  olsun. O halde  $lk(K * L; v) = lk(K; v) * L$  konidir. Bu nedenle  $lk(K; v)$  bir konidir veya  $L$  konidir. Eğer  $L$  koni ise  $L$  güçlü çöker. Diğer taraftan  $lk(K; v)$ 'nin koni olduğunu varsayalım.  $(K \setminus v) * L = (K * L) \setminus v$  güçlü çöker olduğundan dolayı tümevarımdan  $K \setminus v$  veya  $L$  güçlü çöker ve  $K \searrow \searrow K \setminus v$  olduğundan  $K$  veya  $L$  güçlü çöker. [8]  $\square$

*Önerme 3.2.2*  $K$  simpleksel kompleks olsun. O zaman  $scatK \leq gscatK$  olur. [15]

*İspat.*  $gscatK = n$  olsun. Bu durumda şu şartı sağlayan  $K$ 'nın bir  $\{U_0, U_1, \dots, U_n\}$  örtüsü vardır: Her  $i = 0, \dots, n$  için  $U_i$  güçlü çöker. Böylece  $id_{U_i} : U_i \rightarrow U_i$  birim dönüşümü ve  $c_{v_0} : U_i \rightarrow U_i$  sabit dönüşümü aynı bitişiklik sınıfındadır. Buradan,  $\iota_{U_i} : U_i \hookrightarrow K$  kapsama dönüşüm ve  $c_{v_0} : U_i \rightarrow K$  sabit dönüşüm olmak üzere  $\iota_{U_i} \sim c_{v_0}$  bulunur. Sonuç olarak  $scatK \leq n$  elde edilir. [15]  $\square$

*Lemma 3.2.1*  $K$  sonlu simpleksel kompleks ve  $v \in K$ ,  $v'$  tarafından domine edilen bir köşe olsun. O zaman  $\iota : K \setminus v \hookrightarrow K$  kapsama dönüşümü güçlü denktir ve  $r : K \rightarrow L$  retraksiyon dönüşümü olsun. Böylece  $K \sim L$  olur. [8, 15]

*İspat.*  $r : K \rightarrow K \setminus v$  dönüşümü şu şekilde tanımlansın:  $r$ ,  $K \setminus v$  üzerinde birim gibi davransın ve  $r(v) = v'$  olsun.  $v \in \sigma$  olacak şekilde  $\sigma \in K$  simpleksini alalım.  $\sigma \subseteq \sigma'$  olacak şekilde  $\sigma'$  maksimal simpleksini alalım. Böylece,  $v' \in \sigma'$  olur ve  $r(\sigma) = \sigma \cup \{v'\} \setminus \{v\}$ ,  $K \setminus v$ 'nin simpleksidir. Ayrıca  $(\iota \circ r)(\sigma) \cup id_K(\sigma) = \sigma \cup \{v'\} \subseteq \sigma'$ ,  $K$ 'da bir simplekstir. Böylece  $\iota \circ r \sim id_K$  olur.

Eğer  $\sigma \in K \setminus v$  ise,  $(r \circ \iota)(\sigma) \cup id_{K \setminus v}(\sigma) = \sigma$ ,  $K$ 'da simplekstir Böylece  $r \circ \iota \sim id_{K \setminus v}$  olur. Burada  $K \sim K \setminus v$  elde edilir. [8]  $\square$

*Teorem 3.2.1* Eğer  $K$  kompleksinden  $L$  kompleksine güçlü çöküş var ise  $gscatK \leq gscatL$  olur. [15]

*İspat.* Genellemeyi bozmadan  $L = K \setminus v$  olacak şekilde  $r : K \rightarrow L$  dönüşümünün elementer güçlü çöküş olduğunu varsayarak ispat yapalım.  $\iota : L \hookrightarrow K$  kapsama dönüşümü olmak üzere  $\iota \circ r \sim id_K$  ise  $K$  simpleksel kompleksindeki herhangi bir  $\sigma = \{v_0, \dots, v_p\}$  simpleksi için  $K$ 'da bir  $(\iota \circ r)(\sigma) \cup id_K = \{(\iota \circ r)(v_0), \dots, (\iota \circ r)(v_p), id_K(v_0), \dots, id_K(v_p)\}$  simpleks oluşuyorsa  $r \circ \iota = id_L$  olur.  $V$ ,  $L$ 'nin güçlü

çöken alt kompleksi olsun. Bu durumda  $id_V$  birim dönüşümü ile  $c_w : V \rightarrow V$  sabit dönüşümü aynı bitişiklik sınıfındadır. Bir başka deyişle,

$$id_V = \varphi_0 \sim_c \cdots \sim_c \varphi_n = c_w$$

olacak şekilde  $\varphi_i : V \rightarrow V, i = 0, 1, \dots, n$  dönüşümleri vardır.

$r|_{r^{-1}(V)}$  kısıtlanışını  $r' : r^{-1}(V) \rightarrow V$  ile gösterelim. Benzer şekilde  $\iota' : V \rightarrow r^{-1}(V)$  kapsama dönüşümünü gösterebiliriz (iyi tanımlıdır çünkü  $r \circ \iota = id_V$ ).

Ayrıca  $\varphi_i \sim_c \varphi_{i+1}$  olduğundan dolayı Lemma 3.1.2'den  $\iota' \circ \varphi_i \circ r' \sim_c \iota' \circ \varphi_{i+1} \circ r'$  olur.

$$\iota' \circ \varphi_n \circ r' = \iota' \circ c_w \circ r' = c_{\iota(w)}$$

dönüşümünün sabit dönüşüm olduğu açıktır. Diğer taraftan

$$\iota' \circ \varphi_0 \circ r' = \iota' \circ id_V \circ r' = \iota' \circ r'$$

olur ve son dönüşüm  $id_{r^{-1}(V)}$ 'ye bitişiktir. Eğer  $\sigma, r^{-1}(V)$ 'nin bir simpleksi ise o zaman  $K$ 'nin de bir simpleksidir. Buradan  $id_K(\sigma) \cup (\iota \circ r)(\sigma)$ , ifadesinin  $K$ 'nin bir simpleksi olduğu görülür ve bu simpleks  $r^{-1}(V)$ 'nin içinde kalır çünkü  $r \circ \iota = id_V$ . Ayrıca  $(\iota \circ r)(\sigma) = (\iota' \circ r')(\sigma)$  olduğundan dolayı  $\sigma \cup (\iota' \circ r')(\sigma)$  da  $r^{-1}(V)$ 'nin simpleksidir.

Buradan  $c_w$  sabit dönüşümünün  $id_{r^{-1}(V)}$  birim dönüşümü ile aynı bitişiklik sınıfında olduğu görülür. Böylece  $r^{-1}(V)$ 'nin güçlü çöküş olduğu ispatlanmış olur.

Şimdi  $gscat L = m$  alalım. Bu durumda  $\{V_0, \dots, V_m\}$ ,  $L$ 'nin güçlü çöken alt komplekslerinin bir örtüsü olsun. Böylece  $K$ 'nin güçlü çöken alt komplekslerinin bir örtüsü  $\{r^{-1}(V_0), \dots, r^{-1}(V_m)\}$  olur. Buradan  $gscat K \leq m$  bulunur. [15]  $\square$

*Sonuç 3.2.1*  $K$  kompleksinin çekirdeği  $K_0$  olsun.  $K$  kompleksine güçlü denk olan tüm  $L$  kompleksleri için  $gscat L$  değerlerinden maksimum olanı  $gscat K_0$  sayısını verir. [15]

*Önerme 3.2.3*  $K$  ve  $L$  sonlu simpleksel kompleksler olsun.  $gscat(K * L) \leq \min\{gscat(K), gscat(L)\}$  olur. [14]

*İspat.*  $\min\{gscat(K), gscat(L)\} = gscat(K) = m$  olsun.  $K$ 'yi örten  $m + 1$  tane  $U_0, U_1, \dots, U_m$  güçlü çöken alt kompleks vardır.  $U_0 * L, U_1 * L, \dots, U_m * L$  alt komplekslerini göz önünde bulunduralım. Bu alt kompleksler Önerme 3.2.1'den dolayı güçlü çökendir ve  $K * L$ 'nin bir örtüsünü verir. [14]  $\square$

### 3.3 Barisentrik Bölünme

*Tanım 3.3.1*  $\varphi : K \rightarrow L$  simpleksel dönüşüm olsun.  $\varphi$  dönüşümünün barisentrik bölümleri üzerine indirgenmiş dönüşümü  $sd\varphi : sdK \rightarrow sdL$  şu şekilde tanımlanır:

$$(sd\varphi)(\{\sigma_1, \dots, \sigma_q\}) = \{\varphi(\sigma_1), \dots, \varphi(\sigma_q)\}.$$

Burada  $sd\varphi$  simpleksel dönüşümdür.  $sd(id) = id$  ve  $sd(\varphi \circ \psi) = sd(\varphi) \circ sd(\psi)$  eşitlikleri vardır. [14]

*Önerme 3.3.1*  $\varphi, \psi : K \rightarrow L$  simpleksel dönüşümleri aynı bitişiklik sınıfında ise  $sd\varphi, sd\psi : sdK \rightarrow sdL$  aynı bitişiklik sınıfındadır. [14]

*İspat.* Genelliği kaybetmeden,  $\varphi, \psi : K \rightarrow L$  simpleksel dönüşümlerini bitişik alalım,  $\varphi \sim_c \psi$ . Bir başka deyişle, herhangi bir  $\sigma \in K$  için  $\varphi(\sigma) \cup \psi(\sigma)$   $L$ 'de bir simplekstir.  $F : sdK \rightarrow sdL$  dönüşümü, şu şekilde tanımlansın.

$$F(\{\sigma_1, \dots, \sigma_q\}) = \{\varphi(\sigma_1) \cup \psi(\sigma_1), \dots, \varphi(\sigma_q) \cup \psi(\sigma_q)\}.$$

$\Omega(sd\varphi, F) = \{\sigma \in K : (sd\varphi)(\{\sigma\}) = F(\{\sigma\})\}$  kümesinin boyutu adım adım artırılarak  $sd\varphi \sim F$  olduğu ispatlanır.

Eğer  $sd\varphi = F$  ise ispat açıktır. Aksi durumda öyle bir  $\mu \in K$  vardır ki  $\mu \notin \Omega(sd\varphi, F)$  sağlanır veya eşdeğer olarak  $\varphi(\mu), \varphi(\mu) \cup \psi(\mu)$ 'nin içindedir fakat  $\varphi(\mu) \cup \psi(\mu)$ 'ye eşit değildir. Bu özelliği taşıyan  $\mu$  simpleksini maksimum boyutta seçelim. Bu durumda eğer  $\mu, \sigma$ 'nın bir öz (proper) yüzü ise  $\varphi(\sigma) = \varphi(\sigma) \cup \psi(\sigma)$  olur. Artık yeni bir  $F_1 : sdK \rightarrow sdL$  dönüşümünü aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz:

$$F_1(\{\sigma\}) = \begin{cases} (sd\varphi)(\{\sigma\}), & \sigma \neq \mu, \\ F(\{\mu\}), & \sigma = \mu. \end{cases}$$

(1)  $F_1$  simpleksel dönüşümdür.  $\{\sigma_1, \dots, \sigma_q\}$ ,  $sdK$ 'nın simpleksi olsun.

Eğer her  $j = 1, \dots, q$  için  $\sigma_j \neq \mu$  ise

$$F_1(\{\sigma_1, \dots, \sigma_q\}) = \{\varphi(\sigma_1), \dots, \varphi(\sigma_q)\}.$$

Eğer öyle bir  $j$  için  $\sigma_j = \mu$  ise  $F_1(\{\sigma_1, \dots, \sigma_q\}) = \{\varphi(\sigma_1), \dots, \varphi(\mu) \cup \varphi(\mu), \dots, \varphi(\sigma_q)\}$  olur. Her iki durumda da görüntü  $sdL$ 'nin bir simpleksidir. İkinci durumda  $\mu$  simpleksinin maksimalliğinden,  $i > j$  için  $\varphi(\mu) \cup \psi(\mu) \subset \varphi(\sigma_i)$  sonucu çıkar.

(2)  $sd\varphi \sim_c F_1$  sağlanır. Çünkü  $\{\sigma_1, \dots, \sigma_q\} \in sdK$  ise bu durumda

$$\begin{aligned} & (sd\varphi)(\{\sigma_1, \dots, \sigma_q\}) \cup F_1(\{\sigma_1, \dots, \sigma_q\}) \\ &= (\{\varphi(\sigma_1), \dots, \varphi(\sigma_q)\}) \cup \{F_1(\{\sigma_1\}), \dots, F_1(\{\sigma_q\})\} \end{aligned}$$

simpleksi, aşağıdaki simplekse eşittir

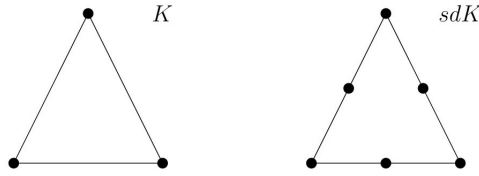
$$\{\varphi(\sigma_1), \dots, \varphi(\sigma_{j-1}), \varphi(\sigma_j) \cup \psi(\sigma_j), \dots, \varphi(\sigma_q) \cup \psi(\sigma_q)\},$$

burada  $j$  - eğer böyle bir  $j$  var ise -  $\sigma_j = \mu$  olacak şekilde en küçük indekstir.

(3) Son olarak,  $F_1$ 'in tanımı gereği  $\Omega(sd\varphi, F) \subsetneq \Omega(F_1, F)$  olur.

Bu prosedürü tekrarlayarak,  $sd\varphi \sim F$  olacak şekilde bir dizi bitişik dönüşümü  $sd\varphi \sim_c F_1 \sim_c \dots \sim_c F$  elde edilir. Aynı argümanı  $\psi$  için uygulayarak  $sd\psi \sim F$  da ispatlanır. Dolayısıyla  $sd\varphi \sim sd\psi$  olur. [14]  $\square$

*Açıklama 3.3.1* Bölme (subdivision) güçlü homotopi tipinin bir invaryantı değildir. Örneğin, Şekil 3.4'de verilen  $K$  kompleksi ve barisentrik bölünmesi olan  $sdK$ 'yı alalım. İki kompleks de minimaldir, çünkü domine edilmiş köşeleri yoktur. Fakat  $K$  ve  $sdK$  izomorf değildir. Böylece aynı güçlü homotopi tipine sahip değildir. [8, 14]



**Şekil 3.4 :**  $K$  simpleksel kompleksi,  $sdK$  ile aynı güçlü homotopi tipine sahip değildir.

*Teorem 3.3.1*  $K$  simpleksel kompleks olsun. Bu durumda  $scat(sdK) \leq scat(K)$  olur. [14]

*İspat.*  $scatK = n$  ve  $U_0, \dots, U_n$ ,  $K$ 'nın kategorik örtüsü olsun.  $sdK$ 'nın,  $sdU_0, \dots, sdU_n$  alt komplekslerini alalım. Her bir  $\iota_j : U_j \hookrightarrow K$  kapsama dönüşümü için  $\iota_j \sim c_{v_j}$  olacak şekilde  $c_{v_j} : U_j \rightarrow K$  sabit dönüşümleri  $\iota_j$  kapsama dönüşümleri ile aynı bitişiklik sınıfında olduğundan Önerme 3.3.1'den dolayı

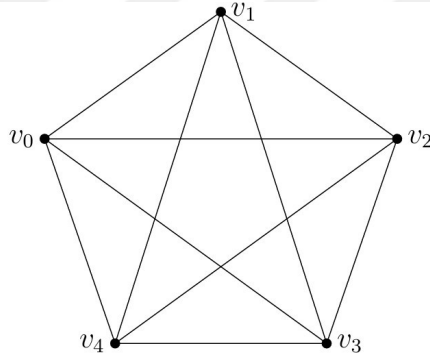
$sdl_j \sim sdc_{v_j}$  olur. Ayrıca  $sdl_j : sdU_j \hookrightarrow sdK$  kapsama dönüşümüdür ve  $sdc_{v_j}$ , sabit dönüşümüdür. O zaman  $sdU_j$  kategorik alt komplekstir ve  $scat(sdK) \leq n$  olur. [14]  $\square$

**Teorem 3.3.2**  $K$  bir kompleks olsun.  $K$  güçlü çökendir ancak ve ancak  $sdK$  güçlü çökendir. [16]

**Sonuç 3.3.1**  $K$  sonlu simpleksel kompleks olsun. O zaman  $scatK = 1$  ise  $scat(sdK) = 1$  olur. [14]

*İspat.*  $K$  sonlu simpleksel kompleks ve  $scatK = 1$  olsun. Teorem 3.3.1'e göre  $scat(sdK) \leq 1$  elde edilir. Varsayalım ki  $scat(sdK) = 0$  olsun. Bu durumda  $sdK$  güçlü denktir. Teorem 3.3.2,  $K$  kompleksinin güçlü çöken olduğunu gösterir. Bir başka deyişle,  $scatK = 0$  olur. Bu ise başlangıç varsayımımızla çelişir. Dolayısıyla  $scat(sd(K)) = 1$  olmalıdır. [14]  $\square$

**Örnek 3.3.1**  $K$ , 1-boyutlu simpleksel kompleks olan  $K_5$  tam grafi olsun.



**Şekil 3.5 :**  $K = K_5$  tam grafi.

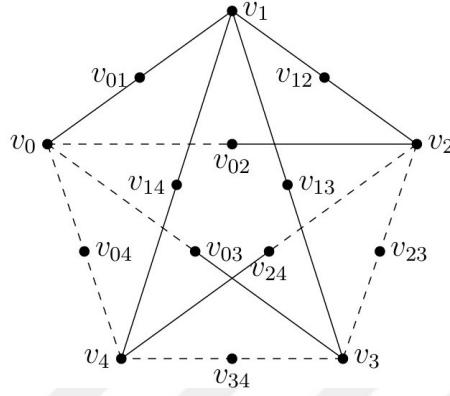
$K$ 'nın aşağıdaki kategorik örtüsünü alalım:

$$\begin{aligned} U_0 &= v_0v_1 \cup v_0v_2 \cup v_0v_3 \cup v_0v_4, \\ U_1 &= v_1v_4 \cup v_1v_2 \cup v_2v_3, \\ U_2 &= v_1v_3 \cup v_3v_4 \cup v_2v_4. \end{aligned}$$

Bu nedenle  $scat(K_5) \leq 2$  olur. Dahası  $K$ , iki kategorik alt kompleks tarafından örtülmez. Varsayalım ki iki kategorik alt kompleks tarafından örtülmüş olsun. Bu durumda iki alt kompleksten birinin en az 5 kenar içermesi gerekir. Herhangi bir ağaç grafta kenar sayısından bir tane fazla köşe olur. Bu durumda 5 kenarı olan ormanın en az 6 köşesi olmalıdır fakat bu  $K_5$  grafi için mümkün değildir. En az 5 köşeli herhangi bir kategorik alt kompleksin olmadığı, dolayısıyla  $K_5$

grafının herhangi iki kategorik alt kompleks tarafından örtülmediği sonucuna ulaşıldı. Böylece  $scat(K_5) = 2$  olur.

Diğer taraftan  $K$ 'nın birinci barisentrik bölünmesinin kategorik örtüsü, Şekil 3.6'te gösterildiği gibi  $L_0$  (düz kenarlarla çizilmiştir) alt kompleksi ve  $L_1$  (kesikli kenarlarla çizilmiştir) alt kompleksidir.  $sd(K_5)$  güçlü çöken olmadığından dolayı  $1 = scat(sdK_5) < scat(K_5) = 2$  olur. [14]



**Şekil 3.6 :**  $sdK_5$ 'i örten iki kategorik alt kompleksi.

### 3.4 Geometrik Realizasyon

Bu bölümün amacı  $K$  kompleksinin simpleksel kategorisini,  $K$ 'nın geometrik realizasyonu olarak adlandırılan  $X = |K|$ 'nin LS-kategorisi ile karşılaştırmaktır. [13, 14]

*Tanım 3.4.1* Eğer  $Y$  normal uzayı ve onun kapalı alt uzayı  $F \subset Y$  için, her  $F \rightarrow Y$  dönüşümü  $F$ 'nin  $Y$  uzayındaki bir komşuluğuna genişletilebiliyorsa,  $X$  uzayına mutlak komşuluk retraksiyonu (absolute neighborhood retract, ANR) denir. [19]

$X$  uzayı normal ANR olduğundan Tanım 3.1.2'deki kategorik kümelerin kapalı olarak alınabileceği [1] kitabındaki Önerme 1.10'da ispatlanmıştır. Bu durum özellikle, geometrik realizasyon için gereklidir. (Ayrıca bkz. [20–22])

*Teorem 3.4.1*  $X = |K|$  verilsin. Bu durumda  $catX \leq n$  ancak ve ancak  $K$  kompleksinin bir  $K'$  bölünmesinin (subdivision), her birinin geometrik realizasyonu  $X$  içinde büzülebilir olan öyle  $L_0, L_1, \dots, L_n$  alt kompleksleri vardır ki  $X = |L_0| \cup \dots \cup |L_n|$  sağlanır. [14]

*Teorem 3.4.2*  $K$  sonlu simpleksel kompleks olsun.  $cat|K| \leq scatK$  olur. [14]

*İspat.*  $scatK = n$  olsun ve  $\{U_0, \dots, U_n\}$ ,  $K$ 'nin kategorik simpleksel örtüsü olsun. Her  $\iota_j : U_j \rightarrow K$  kapsama dönüşümü  $c_{v_j}$  sabit dönüşümü ile aynı bitişiklik sınıfındadır. Bu durumda geometrik realizasyonları üzerindeki  $|\iota_j|, |c_{v_j}| : |U_j| \rightarrow |K|$  indirgenmiş dönüşümleri homotopiktir,  $|\iota_j| \simeq |c_{v_j}|$  [13].  $|\iota_j| : |U_j| \hookrightarrow |K|$  dönüşümünün kapsama dönüşüm ve  $|c_{v_j}| : U_j \rightarrow K$  dönüşümünün sabit dönüşüm olduğu açıktır. Bu nedenle  $|U_0|, \dots, |U_n|$  altuzayları  $|K|$  kompleksinin kategorik kapalı örtüsüdür.  $|K|$  normal ANR olduğu için, açık örtüler yerine kapalı örtüler alınmasında hiçbir sakınca yoktur. O zaman  $cat(|K|) \leq n$  olur. [14]  $\square$

*Önerme 3.4.1* Herhangi bir soyut simpleksel kompleks  $K$  için  $|K|$  ve  $|sdK|$  topolojik uzayları homeomorftur. [7]

*Sonuç 3.4.1*  $cat(|K|) \leq scat(sd^N(K))$ . [14]

*İspat.* Teorem 3.4.2'deki  $cat|K| \leq scat(K)$  eşitsizliği Önerme 3.4.1 kullanılarak

$$cat|sd^N K| \leq scat(sd^N K)$$

şeklinde yeniden ifade edilir. Diğer taraftan Teorem 3.4.2'den dolayı  $cat|K| = cat|sd^N K|$  olur. Dolayısıyla

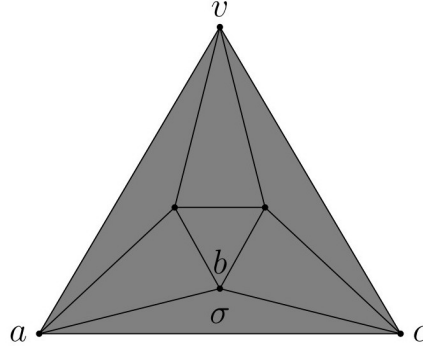
$$cat|K| = cat|sd^N K| \leq scat(sd^N K)$$

olur ve

$$cat|K| \leq scat(sd^N K)$$

sonucuna ulaşılır.  $\square$

*Örnek 3.4.1* Şekil 3.7'de verilen  $K$  simpleksel kompleksini ele alalım.  $K$  baskın bir köşe içermediğinden dolayı güçlü çöken değildir. Ancak  $K$ , güçlü çöken iki kategorik alt kompleks tarafından örtüldüğü için  $scatK = 1$  olur.  $K$  kompleksinin geometrik realizasyonu büzülebilirdir; başka bir deyişle  $cat(|K|) = 0$ .



**Şekil 3.7 :** Çöken ama güçlü çöken olmayan  $K$  simpleksel kompleksi.

Öte yandan, tüm barisentrik bölünmelerinin simpleksel kategorisi 1 olur [14]. Bunun nedeni, Teorem 3.3.2'ye göre, bir kompleksin güçlü çöken olmasının, ancak ve ancak barisentrik bölünmesinin de güçlü çöken olması ile mümkün olmasıdır. Bir başka deyişle,  $scatK = 0$  ancak ve ancak  $scat(sdK) = 0$  olmasıdır. Fakat  $K$  kompleksi güçlü çöken olmadığından dolayı  $scatK = 1$  olur. Teorem 3.3.1 tekrar uygulanarak, tüm  $N$  pozitif tamsayıları için  $0 < scat(sd^N(K)) = 1$  elde edilir. [14]

### 3.5 Çarpımlar

*Tanım 3.5.1*  $K$  ve  $L$  iki soyut simpleksel kompleks olsun.  $K$  ve  $L$  komplekslerinin  $K \times L$  (veya  $K \amalg L$ ) ile gösterilen kategorik çarpımı şu şekilde tanımlanır:  $K \times L$ 'nin köşeleri  $v \in K$  ve  $w \in L$  olmak üzere  $(v, w)$  köşe çiftleridir.  $K \times L$ 'nin simpleksleri  $\{(v_1, w_1), \dots, (v_q, w_q)\}$  köşelerinin kümesidir, burada  $\{v_1, \dots, v_q\}$   $K$ 'nin bir simpleksi ve  $\{w_1, \dots, w_q\}$   $L$ 'nin bir simpleksidir. [14]

Kategorik çarpım tanımı, literatürde aşağıdaki biçimde de tanımlanmaktadır:

*Tanım 3.5.2*  $K$  ve  $L$  soyut simpleksel kompleks olsun.  $K \times L$  aşağıdaki şekilde tanımlanan soyut simpleksel komplekstir.

$V(K \times L) := V(K) \times V(L)$  köşe noktalarının kümesi olsun.  $\pi_1 : V(K \times L) \rightarrow V(K)$  ve  $\pi_2 : V(K \times L) \rightarrow V(L)$  projeksiyon dönüşümleri olmak üzere  $\pi_1(\sigma) \in K$  ve  $\pi_2(\sigma) \in L$  ise  $\sigma \in K \times L$  olur.

Bu tanımla birlikte  $\pi_1$  ve  $\pi_2$  küme dönüşümleri  $\pi_1 : K \times L \rightarrow K$  ve  $\pi_2 : K \times L \rightarrow L$  simpleksel dönüşümlerine indirgenir. [7]

*Açıklama 3.5.1* Tanım 3.5.1'de verilen kategorik çarpım komplekslerin kartezyen çarpımı ile karıştırılmamalıdır. Örnek olarak  $K^1 \times K^1$  kategorik çarpımı  $K^3$ 'e izomorf iken kartezyen çarpım  $K^2$ 'dir. Ayrıca  $|K^n|$ ,  $|K|^{n'}$ 'e homeomorf değildir.

Ancak [14]'te kanıtlandığı gibi her iki çarpımın geometrik realizasyonu aynı homotopi tipine sahiptir. Böylece  $|K^n| \simeq |K|^n$  olur. [7, 14]

$n \geq 1$  için  $K^n = K \times \cdots \times K$  ile gösterilsin.

Tanım gereği, her  $j = 1, \dots, n$  için  $\pi_j : K \rightarrow K^n$  projeksiyonu simpleksel dönüşümdür.  $\Delta : K \rightarrow K^n, v \mapsto (v, \dots, v)$  diyagonal dönüşümü de simpleksel dönüşümdür.

Eğer  $\varphi_1, \dots, \varphi_n : K \rightarrow L$  simpleksel dönüşüm ise

$$\begin{aligned} (\varphi_1, \dots, \varphi_n) : K &\rightarrow L^n \\ (v) &\rightarrow (\varphi_1(v), \dots, \varphi_n(v)) \end{aligned}$$

dönüşümü de simpleksel dönüşümdür.

Eğer  $\varphi : K \rightarrow L$  simpleksel dönüşüm ise,

$$\begin{aligned} \varphi^n : K^n &\rightarrow L^n \\ (v_1, \dots, v_n) &\rightarrow (\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n)) \end{aligned}$$

dönüşümü de simpleksel dönüşümdür. [14]

*Önerme 3.5.1* 1.  $\varphi, \psi : K \rightarrow L$  ve  $\varphi', \psi' : K' \rightarrow L', \varphi \sim_c \psi$  ve  $\varphi' \sim_c \psi'$  olacak şekilde simpleksel dönüşümler olsun. Öyleyse  $\varphi \times \varphi' \sim_c \psi \times \psi' : K \times K' \rightarrow L \times L'$  olur.

2.  $\varphi \sim_c \psi : K \rightarrow L$  ve  $\varphi' \sim_c \psi' : K \rightarrow L'$  ise  $(\varphi, \varphi') \sim_c (\psi, \psi') : K \rightarrow L \times L'$  olur. [14]

*İspat.* (1)  $\varphi \sim_c \varphi'$  olduğu için  $\sigma = \{v_0, \dots, v_n\} \in K$  alındığında  $L$  kompleksinde  $\{\varphi(v_0), \dots, \varphi(v_n), \varphi'(v_0), \dots, \varphi'(v_n)\}$  bir simpleks oluşturur. Diğer taraftan,  $\psi \sim_c \psi'$  olduğu için  $\sigma' = \{w_0, \dots, w_m\} \in K'$  alındığında  $L'$  kompleksinde  $\{\psi(w_0), \dots, \psi(w_m), \psi'(w_0), \dots, \psi'(w_m)\}$  bir simpleks oluşturur.

$\sigma \times \sigma' = \{(v_0, w_0), \dots, (v_n, w_m)\} \in K \times K'$  için

$$\begin{aligned} (\varphi \times \varphi')(\sigma \times \sigma') &= \{(\varphi(v_0), \varphi'(w_0)), \dots, (\varphi(v_n), \varphi'(w_m))\} \\ (\psi \times \psi')(\sigma \times \sigma') &= \{(\psi(v_i), \psi'(w_j)), \dots, (\psi(v_n), \psi'(w_m))\} \end{aligned}$$

olacak şekilde  $(\varphi \times \varphi')(\sigma \times \sigma') \cup (\psi \times \psi')(\sigma \times \sigma')$ ,  $L \times L'$  kompleksinde bir simpleks oluşturmali.

$(\varphi \times \varphi')(\sigma \times \sigma') \cup (\psi \times \psi')(\sigma \times \sigma')$ ,  $L \times L'$  içinde bir simpleks olduğunu göstermek için  $\pi_1$  ve  $\pi_2$  projeksiyonları altında bu birleşimin bir simplekse karşılık gelmesi gerekir. Gerçekten de  $\pi_1$  projeksiyonu altında  $\sigma \times \sigma'$ 'nin ilk bileşenine bakıldığında  $\pi_1((\varphi \times \varphi')(\sigma \times \sigma')) = \varphi(\sigma)$  ve benzer şekilde  $\pi_1((\psi \times \psi')(\sigma \times \sigma')) = \psi(\sigma)$  olur. Dolayısıyla,

$$\pi_1((\varphi \times \varphi')(\sigma \times \sigma') \cup (\psi \times \psi')(\sigma \times \sigma')) = \varphi(\sigma) \cup \psi(\sigma)$$

$L$  simpleksel kompleksinde bir simpleks oluşturur. Benzer şekilde,

$$\pi_2((\varphi \times \varphi')(\sigma \times \sigma') \cup (\psi \times \psi')(\sigma \times \sigma')) = \varphi'(\sigma') \cup \psi'(\sigma')$$

$L'$  simpleksel kompleksinde bir simpleks oluşturur.

Sonuç olarak  $(\varphi \times \varphi')(\sigma \times \sigma') \cup (\psi \times \psi')(\sigma \times \sigma')$ ,  $L \times L'$ 'de simpleks oluşturur. Böylece  $\varphi \times \varphi' \sim_c \psi \times \psi'$  olur.

(2)  $\varphi \sim_c \psi$  olduğu için  $\sigma = \{v_0, \dots, v_n\} \in K$  alındığında  $L$  kompleksinde  $\{\varphi(v_0), \dots, \varphi(v_n), \psi(v_0), \dots, \psi(v_n)\}$  bir simpleks oluşturur. Diğer taraftan,  $\varphi' \sim_c \psi'$  olduğu için  $\sigma = \{v_0, \dots, v_n\} \in K$  alındığında  $L'$  kompleksinde  $\{\varphi(v_0), \dots, \varphi(v_n), \psi(v_0), \dots, \psi(v_n)\}$  bir simpleks oluşturur.

Öyleyse  $\sigma = \{v_0, \dots, v_n\} \in K$  için  $L \times L'$  simpleksel kompleksinde  $(\varphi, \varphi')(\sigma) \cup (\psi, \psi')(\sigma)$  bir simpleks oluşturmaktadır.

$$(\varphi, \varphi')(\sigma) = \{(\varphi(v_i), \varphi'(v_i)) | v_i \in \sigma\}$$

$$(\psi, \psi')(\sigma) = \{(\psi(v_i), \psi'(v_i)) | v_i \in \sigma\}.$$

$(\varphi, \varphi')(\sigma) \cup (\psi, \psi')(\sigma)$  bileşiminin projeksiyon dönüşümleri altındaki görüntüleri

$$\pi_1((\varphi, \varphi')(\sigma) \cup (\psi, \psi')(\sigma)) = \varphi(\sigma) \cup \psi(\sigma)$$

olur ve  $\varphi \sim_c \psi$  varsayımından dolayı  $L$  simpleksel kompleksinde bir simpleks oluşturur. Benzer şekilde,

$$\pi_2((\varphi, \varphi')(\sigma) \cup (\psi, \psi')(\sigma)) = \varphi'(\sigma) \cup \psi'(\sigma)$$

olur ve  $\varphi' \sim_c \psi'$  varsayımından dolayı  $L'$  simpleksel kompleksinde bir simpleks oluşturur. Böylece,  $(\varphi, \varphi')(\sigma) \cup (\psi, \psi')(\sigma)$ ,  $L \times L'$  kompleksinde bir simplekstir. Dolayısıyla,  $(\varphi, \varphi') \sim_c (\psi, \psi')$  elde edilir.  $\square$

*Sonuç 3.5.1*  $K \sim L$  aynı güçlü homotopi tipine sahip iki kompleks olsun. Bu durumda  $K^n \sim L^n$  olur. [14]

*İspat.*  $K \sim L$  olduğundan dolayı  $\varphi : K \rightarrow L$  ve  $\psi : L \rightarrow K$  dönüşümleri vardır ki  $\varphi \circ \psi \sim id_L$  ve  $\psi \circ \varphi \sim id_K$  sağlanır.

Tümevarım kullanarak

$n = 1$  için  $K^1 = K \sim L = L^1$  tanım gereği doğrudur. Bu nedenle başlangıç adımı sağlamaktadır.

$n = k$  için  $K^k \sim L^k$  olduğunu varsayalım. Bir başka deyişle,  $K$  ve  $L$  arasında güçlü homotopi denkliğini sağlayan  $\varphi^k : K^k \rightarrow L^k$  ve  $\psi^k : L^k \rightarrow K^k$  dönüşümleri vardır ve  $\varphi^k \circ \psi^k \sim id_{L^k}$  ve  $\psi^k \circ \varphi^k \sim id_{K^k}$  sağlanır.

$n = k + 1$  için çarpımın tanımından dolayı,  $K^{k+1} = K^k \times K$  ve  $L^{k+1} = L^k \times L$  olur. Önerme 3.5.1'in 1. maddesinden dolayı, eğer  $\varphi^k \sim_c \psi^k$  ve  $\varphi \sim_c \psi$  ise  $\varphi^k \times \varphi \sim_c \psi^k \times \psi$  olur. Böylece,

$$\begin{aligned} (\varphi^k \times \varphi) \circ (\psi^k \times \psi) &\sim id_{K^{k+1}} \\ (\psi^k \times \psi) \circ (\varphi^k \times \varphi) &\sim id_{L^{k+1}} \end{aligned}$$

olur. Bu, tam olarak  $K^{k+1} \sim L^{k+1}$  demektir.

Tümevarım yoluyla, her  $n$  için  $K^n \sim L^n$  olduğu ispatlanmış olur.  $\square$

*Teorem 3.5.1*  $K$  ve  $L$  sonlu simpleksel kompleks olsun. Bu durumda

$$scat(K \times L) + 1 \leq (scat(K) + 1)(scat(L) + 1). [14]$$

*İspat.*  $scatK = n$  ve  $scatL = m$  olsun.  $K$  kompleksinin  $U_0, \dots, U_n$  olacak şekilde kategorik örtüsü ve  $L$  kompleksinin  $V_0, \dots, V_m$  olacak şekilde kategorik örtüsü vardır.  $0 \leq i \leq n$  ve  $0 \leq j \leq m$  için  $U_i \times V_j \subset K \times L$  alt kompleksini dikkate alarak  $U_i \times V_j$  kompleksinin  $K \times L$ 'nin kategorik örtüsü olduğunu göstereceğiz.

$u_i$ ,  $K$  kompleksinin bir köşe noktası olmak üzere  $\iota_{U_i}$  kapsama dönüşümü,  $c_{u_i}$  sabit dönüşümü ile aynı bitişiklik sınıfındadır. Benzer şekilde  $v_i$ ,  $L$  kompleksinin bir köşe noktası olmak üzere  $\iota_{V_j}$  kapsama dönüşümü,  $c_{v_j}$  sabit dönüşümü ile aynı bitişiklik sınıfındadır. Önerme 3.5.1'e göre  $\iota_{U_i} \times \iota_{V_j} : U_i \times V_j \rightarrow K \times L$  dönüşümü  $c_{u_i} \times c_{v_j} : U_i \times V_j \rightarrow K \times L$  dönüşümü ile aynı bitişiklik sınıfındadır. Burada  $\iota_{U_i} \times \iota_{V_j} = \iota_{U_i \times V_j}$  ve  $c_{u_i} \times c_{v_j} = c_{(u_i, v_j)}$  olduğu açıktır ve  $(u_i, v_j)$ ,  $K \times L$ 'nin köşe noktasıdır. Bu nedenle  $U_i \times V_j$  kategoriktir.

Şimdi  $\{U_i \times V_j\}$ 'nin  $K \times L$  kompleksinin bir örtüsü olduğunu kanıtlayacağız. Eğer  $\{(u_0, v_0), \dots, (u_q, v_q)\}$ ,  $K \times L$  kompleksinin bir simpleksi ise  $\{u_0, \dots, u_q\}$ ,  $K$  kompleksinin bir  $U_i$  alt kompleksinde bulunur ve  $\{v_0, \dots, v_q\}$ ,  $L$ 'nin bir  $V_j$  alt

kompleksinde bulunur. Bu durumda  $\{(u_0, v_0), \dots, (u_q, v_q)\}$ ,  $U_i \times V_j$  kompleksinde bulunur. Böylece  $scat(K \times L) + 1 \leq (n + 1)(m + 1)$  sonucuna varılır. [14]  $\square$

### 3.6 Simpleksel Whitehead Kategorisi

Kategorinin Whitehead tanımı ( $cat^{Wh}(-)$ ) için, çarpımın özel bir alt uzayı olan ve genişletilmiş çarpım (fat wedge) adı verilen ve aşağıda tanımlanan belirli bir alt uzay kullanılır.

*Tanım 3.6.1*  $X$  bir topolojik uzay olmak üzere

$$T^k(X) = \{(x_1, \dots, x_k) \in X \mid \text{en az bir } x_j \text{ taban noktasıdır (basepoint)}\}$$

ile tanımlanan çarpım uzayının bir alt uzayına genişletilmiş çarpım adı verilir. [1]

Örneğin, eğer  $k = 2$  ise  $T^2(X) = \{(x_1, x_2)\} = X \vee X$  olur.  $j : T^k(X) \hookrightarrow X^k$  kapsama dönüşümü ve  $\Delta : X \rightarrow X^k$ ,  $x \mapsto (x, x, \dots, x)$ , diyagonal dönüşüm olmak üzere  $X$  topolojik uzayı için LS-kategorisinin Whitehead tanımını verelim. [1]

*Tanım 3.6.2*  $X$  topolojik uzay olsun. Şu şartı sağlayan en küçük  $n \geq 0$  tam sayısına  $X$ 'nin Whitehead kategorisi denir ve  $cat^{Wh}(X)$  ile gösterilir. Aşağıdaki diyagramı homotopik anlamda değişmeli yapan öyle bir  $\Delta' : X \rightarrow T^{n+1}X$  dönüşümü mevcuttur. [1, 14]

$$\begin{array}{ccc} X & \overset{\Delta'}{\dashrightarrow} & T^{n+1}(X) \\ & \searrow \Delta & \downarrow j \\ & & X^{n+1} \end{array}$$

Yukarıdaki tanım bazı özel şartlarla verilen  $X$  uzayının topolojik LS-kategorisi ile çakışır. Bu sebeple LS-kategorisini hesaplamak için kullanışlı bir araçtır. Bu bölümde LS-kategorisinin Whitehead tanımının soyut simpleksel komplekslere uyarlanmasından bahsedilecektir.

*Tanım 3.6.3*  $K$  simpleksel kompleks olsun ve  $K$ 'nin bir  $v_0$  köşesini taban noktası olarak seçelim. Her  $j = 1, \dots, n$  için

$$K_j = \pi_j^{-1}(\{v_0\}) = K \times K \times \dots \times \{v_0\} \times \dots \times K$$

tanımlansın. [14]

*Tanım 3.6.4*  $n \geq 1$  için  $n - inci$  genişletilmiş çarpımı  $K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_n \subset K^n$  ile tanımlanır ve  $T^n(K)$  ile gösterilir.

Örneğin,  $T^1(K) = \{v_0\}$  bir noktadır.  $T^2(K) = K \vee K$  olur.  $T^n(K)$ 'nin  $K^n$  kompleksinin tam alt kompleksi olmadığı gözlemlenebilir. [14]

$\varphi : (K, v_0) \rightarrow (L, w_0)$  dönüşümünün genişletilmiş çarpım üzerinde ürettiği simpleksel dönüşüm  $T^n\varphi : T^n K \rightarrow T^n L$ ,  $\varphi^n : K^n \rightarrow L^n$  dönüşümünün kısıtlanmasıdır. [14]

*Önerme 3.6.1*  $\varphi, \psi : K \rightarrow L$  taban noktalarını koruyan bitişik iki simpleksel dönüşüm olsun. Bu durumda indirgenmiş dönüşümleri  $T^n\varphi, T^n\psi : T^n K \rightarrow T^n L$  de bitişiktir. [14]

*Sonuç 3.6.1*  $(K, v_0) \sim (L, w_0)$  aynı noktalı güçlü homotopi tipine sahip iki tane noktalı simpleksel kompleks olsun. O zaman  $T^n K \sim T^n L$  olur. [14]

$I : T^{n+1}K \hookrightarrow K^{n+1}$  kapsama dönüşüm ve  $\delta : K \rightarrow T^{n+1}K$ ,  $x \mapsto (x, x, \dots, x)$  diyagonal dönüşüm olmak üzere  $K$  simpleksel kompleksi için simpleksel LS-kategorisinin Whitehead tanımını verelim.

*Tanım 3.6.5*  $K$  simpleksel kompleks olsun. Şu şartı sağlayan en küçük  $n \geq 0$  tam sayısına  $K$ 'nin simpleksel Whitehead kategorisi denir ve  $scat^{Wh}(K)$  ile gösterilir. Aşağıdaki diyagramı bitişiklik anlamında değişmeli yapan öyle bir  $\delta : K \rightarrow T^{n+1}K$  simpleksel dönüşümü mevcuttur. Bir başka deyişle,  $I \circ \delta \sim \Delta$  sağlanır. [14]

$$\begin{array}{ccc} T^{n+1}K & \xrightarrow{I} & K^{n+1} \\ \delta \uparrow & \nearrow \Delta & \\ K & & \end{array}$$

*Teorem 3.6.1*  $scat(K) \leq scat^{Wh}(K)$ . [14]

*İspat.*  $scat^{Wh}(K) = n$  olsun. Tanım 3.6.5'den dolayı  $I \circ \delta \sim \Delta$  olacak şekilde öyle bir  $\delta : K \rightarrow T^{n+1}K$  simpleksel dönüşümü vardır.  $j - inci$  bileşene izdüşüm dönüşümü  $\pi_j : K^{n+1} \rightarrow K$  ile gösterilsin.  $K_j = K \times K \times \dots \times \{v_0\} \times \dots \times K$  olmak üzere  $K_j \subset T^{n+1}K$  alt kompleksleri verilsin.

$I \circ \delta \sim \Delta$  olduğundan dolayı, her  $i = 1, 2, \dots, m - 1$  için  $(\varphi_i, \varphi_{i+1})$  bitişik olacak şekilde bir dizi  $I \circ \delta = \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m = \Delta$  dönüşümlerini alalım.  $K_j \subset T^{n+1}K$  olmak üzere  $L_j = \Delta^{-1}(K_j)$  ile gösterilsin. Burada  $K = L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_{n+1}$  olur. Bu durumda gösterilmek istenen şey her  $L_j \subset K$  alt kompleksinin kategorik olduğuna indirgenmiş olur. Bir başka deyişle,  $I_j : L_j \hookrightarrow K$  dönüşümünün sabit

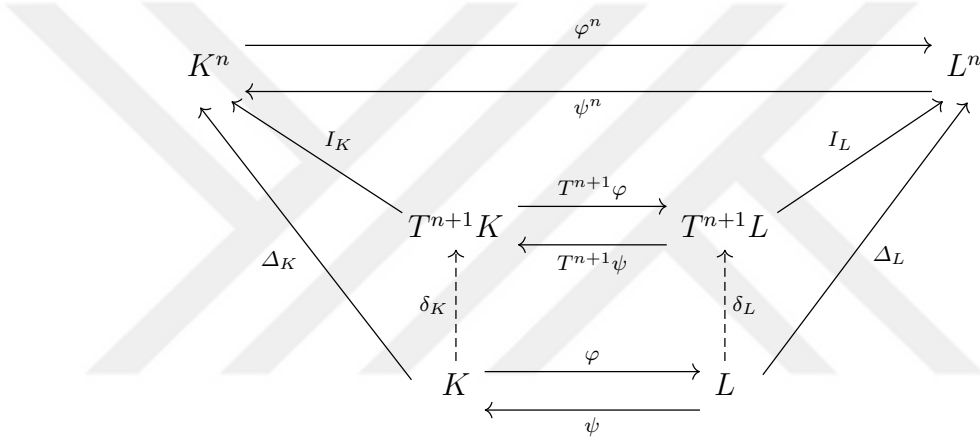
dönüşüm ile aynı bitişiklik sınıfında olması gösterilecektir.

$\forall i = 1, \dots, m-1 \quad \varphi_i \sim_c \varphi_{i+1} : K \rightarrow K^{n+1}$  olduğundan dolayı  $\pi_j \circ \varphi_i \circ I_j \sim_c \pi_j \circ \varphi_{i+1} \circ I_j$  olur. Diğer taraftan  $\Delta(L_j) \subset K$  olduğundan dolayı,  $\pi_j \circ \varphi_1 \circ I_j = \pi_j \circ I \circ \delta \circ I_j$  sabit dönüşüm olan  $c_{v_0}$ 'dır.

Ayrıca  $\pi_j \circ \varphi_m \circ I_j = \pi_j \circ \Delta \circ I_j$ ,  $I_j$  kapsama dönüşümüdür. O zaman  $I_j \sim_c c_{v_0}$  olduğu bulunur. Bu durumda  $K$ 'yı örten  $n+1$  tane kategorik alt kompleks bulunmuş olur ve  $scat(K) \leq n$  olduğu görülür. [14]  $\square$

**Önerme 3.6.2** Eğer  $(K, v_0) \sim (L, v_0)$  taban noktalı güçlü denk ise Sonuç 3.6.1'den dolayı  $scat^{Wh}(K) = scat^{Wh}(L)$  sağlanır. [14]

*İspat.*  $scat^{Wh}(L) = n$  olsun. Aşağıdaki diyagramı, Sonuç 3.5.1'den dolayı  $K^{n+1} \sim L^{n+1}$  ve Sonuç 3.6.1'den dolayı  $T^{n+1}K \sim T^{n+1}L$  dikkate alalım. [14]



$\varphi \circ \psi \sim id_L$  ve  $\psi \circ \varphi \sim id_K$  olduğundan dolayı  $\varphi^{n+1} \circ \psi^{n+1} \sim id_{L^{n+1}}$  ve  $\psi^{n+1} \circ \varphi^{n+1} \sim id_{K^{n+1}}$  elde edilir.

Ayrıca

$$\begin{aligned} T^{n+1}\varphi \circ T^{n+1}\psi &\sim id_{T^{n+1}L} \\ T^{n+1}\psi \circ T^{n+1}\varphi &\sim id_{T^{n+1}K} \end{aligned}$$

olur. Diyagramdan dolayı

$$\begin{aligned} I_L \circ T^{n+1}\varphi &= \varphi^n \circ I_K & \text{ve} & & I_K \circ T^{n+1}\psi &= \psi^n \circ I_L \\ \Delta_L \circ \varphi &= \varphi^n \circ \Delta_K & \text{ve} & & \Delta_K \circ \psi &= \psi^n \circ \Delta_L \end{aligned}$$

bulunur.  $\delta_K := T^{n+1}\psi \circ \delta_L \circ \varphi$  tanımlayalım.

$I_L \circ \delta_L \sim \Delta_L$  olduğundan dolayı

$$\begin{aligned}
I_K \circ \delta_K &= (I_K \circ T^{n+1}\psi) \circ \delta_L \circ \varphi \\
&= \psi^n \circ (I_L \circ \delta_L) \circ \varphi \\
&\sim (\psi^n \circ \Delta_L) \circ \varphi \\
&= \Delta_K \circ (\psi \circ \varphi) \\
&\sim \Delta_K \circ id_K \\
&= \Delta_K
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece  $scat^{Wh}(K) \leq scat(L)$  bulunur. Eşitsizliğin diğer tarafında benzer şekilde kanıtlanır. [14]  $\square$

$v_0$  taban noktası  $K_0$  çekirdeğinin içinde alınsın. Böylece domine edilmiş köşeler silindiğinde  $(K, v_0) \sim (K_0, v_0)$  taban noktalı denklik elde edilir. Bu durumda aşağıdaki sonuçtan bahsedebiliriz.

*Sonuç 3.6.2*  $K$  kompleksinin simpleksel Whitehead kategorisi,  $K_0$ 'ın simpleksel Whitehead kategorisine eşittir. Böylece  $scat^{Wh}K = scat^{Wh}K_0$  olur. [14]

*Lemma 3.6.1*  $K_0$  minimal kompleks ve  $\varphi : K_0 \rightarrow K_0$  birim dönüşüm ile aynı bitişiklik sınıfında olan bir simpleksel dönüşüm olsun. O zaman  $\varphi$  birim dönüşümdür. [16]

*Teorem 3.6.2*  $scat^{Wh}(K) \leq 1$  olacak şekilde  $K$  simpleksel kompleksini alalım. Bu durumda  $K$  güçlü çökendir ve  $scat(K) = 0$  olur. [14]

*İspat.*  $scat^{Wh}(K) = 0$  ise Teorem 3.6.1'den dolayı  $scat(K) = 0$  olur.

Eğer  $scat^{Wh}(K) = 1$  ise Sonuç 3.6.2'den dolayı  $scat^{Wh}(K_0) = 1$  olur. Tanım 3.6.5'den dolayı,  $\Delta : K_0 \rightarrow K_0^2$  diyagonal dönüşümü olmak üzere,  $I \circ \delta \sim \Delta$  olacak şekilde öyle bir  $\delta : K_0 \rightarrow T^2K_0$  simpleksel dönüşüm vardır.  $\pi_1, \pi_2 : (K_0)^2 \rightarrow K_0$  kategorik çarpımın projeksiyonları olsun. Bu durumda  $K_0$  minimal kompleks olduğu için ve Lemma 3.6.1'dan dolayı aşağıdakiler sağlanır.

$$I \circ \delta \sim \Delta \implies \pi_1 \circ I \circ \delta \sim \pi_1 \circ \Delta = 1 \implies \pi_1 \circ I \circ \delta = 1.$$

sağlanır çünkü Lemma 3.6.1'dan dolayı  $K_0$  minimal komplekstir.  $L_1 = \Delta^{-1}(K_1) = \Delta^{-1}(\{v_0\} \times K)$  ve  $L_2 = \Delta^{-1}(K_2) = \Delta^{-1}(K \times \{v_0\})$  alt komplekslerini alalım. Bu durumda,  $v \in L_1$  için  $\delta(v) \in L_1$  olduğundan dolayı  $v_0 = \pi_1 \circ I \circ \delta(v) = v$  bulunur. Bu da  $L_1 = \{v_0\}$  olduğunu söyler.

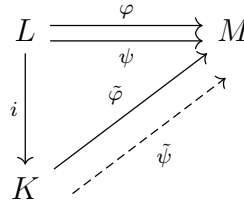
Benzer şekilde  $\pi_2 \circ I \circ \delta = 1 = \pi_2 \circ \Delta$  ifadesi  $L_2 = \{v_0\}$  sonucunu verir. Bu durumda  $K_0 = L_1 \cup L_2 = \{v_0\}$  olur. Böylece  $K$  kompleksinin bir nokta ile aynı güçlü homotopi tipine sahip olduğu gösterilmiş olur. [14]  $\square$

*Örnek 3.6.1* Şekil 3.7'deki  $K$  kompleksinin  $scat(K) = 1$ 'dir. Bu yüzden  $K$  güçlü çöken değildir. Theorem 3.6.2'dan dolayı  $scat^{Wh}(K) \geq 2$  olur. O halde  $scat^{Wh}(K) > scat(K)$  elde edilir. [14]

### 3.7 Ko-fibrasyon

“Homotopi genişletme (extension) özelliği” topolojide önemli bir kavramdır. Ko-fibrasyon tüm uzaylara göre “homotopi genişletme özelliğini” sağlayan  $A \rightarrow X$  bir dönüşümdür. Eğer  $A, X$  CW kompleksinin bir alt kompleksi ise  $(X, A)$  çiftinin homotopi genişletme özelliğine sahip olduğu [23] ve [22]'den dolayı iyi bilinmektedir. Dolayısıyla  $L \subset K$  simpleksel kompleksi ise  $(|K|, |L|)$  geometrik realizasyon çifti (topolojik) homotopi genişletme özelliğine sahiptir. Bu bölümde tamamen kombinatorik olarak  $(K, L)$  simpleksel çifti için homotopi genişletme teoremi kombinatorik analog tanımlanacaktır.

*Tanım 3.7.1* Eğer aşağıdaki şart sağlanıyorsa  $i : L \rightarrow K$  simpleksel dönüşümü bitişiklik genişletme özelliğine sahiptir denir. Eğer  $\varphi, \psi : L \rightarrow M$  simpleksel dönüşümleri aynı bitişiklik sınıfında ise  $(\varphi \sim \psi)$  ve  $\varphi$  dönüşümünün genişletmesi verildiğinde (bir başka deyişle,  $\tilde{\varphi} \circ i = \varphi$  olacak şekilde  $\tilde{\varphi} : K \rightarrow M$  simpleksel dönüşümü var ise),  $\psi$ 'nin bir  $\tilde{\psi}$  genişletmesi vardır ve  $\tilde{\varphi} \sim \tilde{\psi}$  şartı sağlanır. [14]



*Örnek 3.7.1*  $K$  kompleksinin çekirdeği  $K_0$  olsun.  $\iota : K_0 \rightarrow K$  kapsama dönüşümü simpleksel ko-fibrasyondur.  $K_0, K$  kompleksinin çekirdeği olduğu için daha önce açıklandığı gibi  $r \circ \iota = id_{K_0}$  ve  $\iota \circ r \sim id_K$  olacak şekilde  $r : K \rightarrow K_0$  retraksiyon dönüşümü vardır. Bu durumda  $\tilde{\psi} = r \circ \psi$  vardır çünkü  $\tilde{\varphi} \sim \varphi \circ r$ . [14]

*Teorem 3.7.1*  $K$  bağlantılı simpleksel kompleks ve  $scat K = n$  olsun. Varsayalım ki  $K$  kompleksinin öyle bir  $L_0, \dots, L_n$  kategorik örtüsü vardır ki tüm  $(K, L_j)$  çiftleri bitişiklik genişletme özelliğine sahiptir. O zaman  $scat^{Wh}(K) = n$  olur. [14]

*İspat.* Teorem 3.6.1'den dolayı sadece  $scat^{Wh}(K) \leq n$  olduğunu ispatlamak yeterlidir. Hipoteze göre  $v_j, K$  kompleksinin köşe noktası olmak üzere her

bir  $I_j : L_j \rightarrow K$  kapsama dönüşümü,  $c_{v_j}$  sabit dönüşümü ile aynı bitişiklik sınıfındadır. İki sabit dönüşüm ancak ve ancak  $v_i, v_j$  köşe noktaları aynı simpleks üzerinde ve  $K$  simpleksi bağlantılı ise bitişiktir. Tüm köşe noktalarının eşit olduğunu, örneğin  $v_0$  taban noktasına eşit olduğunu varsayabiliriz. Simpleksel genişletme özelliği  $i = I_j, \varphi = I_j, \psi = v_0$  ve  $\tilde{\varphi} = id_K$  olarak  $\tilde{\psi}_j(L_j) = \{v_0\}$  olacak şekilde  $\tilde{\psi}_j \sim id_K$  dönüşümlerini verir.

$$\delta : K \rightarrow T^{n+1}K, \delta(v) = (\tilde{\psi}_1(v), \dots, \tilde{\psi}_{n+1}(v))$$

dönüşümü tanımlanır. Dönüşüm iyi tanımlıdır çünkü her  $v$  köşesi bir  $L_j$ 'nin dolayısıyla  $\tilde{\psi}_j(v) = v_0$ 'in içindedir ve bu  $\delta(v)$ 'nin  $j$  - inci koordinatının taban noktasıdır. Dahası  $\delta$  simpleksel dönüşümdür. Aslında herhangi bir  $\sigma \in K$  simpleksi için  $\delta(\sigma)$ ,  $K^{n+1}$ 'de bir simplekstir (Tanım 3.5.1). Dahası  $\sigma$ ,  $L_j$  ve  $\delta(L_j) \subset K_j$  içindedir. O zaman  $\delta(\sigma) \in K_j \subset T^{n+1}K$ .

Şimdi

$$\tilde{\psi}_j = \tilde{\varphi}_j^1 \sim_c \dots \sim_c \tilde{\varphi}_j^m = id_K$$

$\tilde{\psi}_j$  ve  $id_K$  dönüşümlerini birbirine bağlayan dönüşümler dizisi olsun ( $m$ 'nin  $j$ 'ye bağlı olmadığı açıktır). O zaman

$$(\tilde{\varphi}_1^k, \dots, \tilde{\varphi}_{n+1}^k) : K \rightarrow K^{n+1}, k = 1, \dots, m,$$

dönüşümleri  $J \circ \delta = (\tilde{\psi}_1, \dots, \tilde{\psi}_{n+1})$  ve  $\Delta = (1, \dots, 1)$  dönüşümleri arasındaki bir dizi bitişik dönüşümü tanımlar. Dolayısıyla  $J \circ \delta \sim \Delta$  bir başka deyişle,  $scat^{Wh}K \leq n$  olur. [14]  $\square$

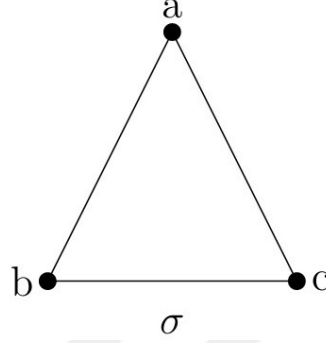
*Açıklama 3.7.1* Teorem 3.7.1 ve Teorem 3.6.1'in ispatında  $scatK = scat^{Wh}K$  ancak ve ancak her bir  $(K, L_j)$  çiftinin bitişiklik genişletme özelliğine sahip olduğu  $L_0, \dots, L_n$  kategorik örtüsü olması durumunda mümkündür.

Sonuç olarak Şekil 3.7'deki  $K$  kompleksinin bazı kategorik örtüleri Teoremin hipotezini doğrulamakta başarısız olur çünkü  $scatK = 1$ 'dir ama  $scat^{Wh}K > 2$  olur. [14]

*Örnek 3.7.2* Şekil 3.7'deki  $\sigma = \{a, b, c\}$ ,  $K$  kompleksinin alt kompleksi olan  $L = K \setminus \sigma$  alt kompleksi bitişiklik genişletme özelliğine sahip değildir.  $v$ ,  $K$  kompleksinin üst köşesi (upper vertex) olsun (Şekil 3.7'deki gibi).  $L$ ,  $v$ 'ye güçlü çöken olduğundan  $\varphi = \iota : L \rightarrow K$  kapsama dönüşümü ve  $\psi = c_v : L \rightarrow K$  sabit dönüşümü aynı bitişiklik sınıfındadır.  $\tilde{\varphi} = id_K : K \rightarrow K$  birim dönüşüm

olacak şekilde sabitleyelim. Eğer  $\tilde{\psi} \sim id_K$  olacak şekilde  $\psi(L) = \{v\}$  varsa bitişiklik dönüşümlerin bir  $\tilde{\psi} \sim_c \varphi_1 \cdots \sim_c id_K$  dizisi olmalıdır. Ancak  $a, b, c \in L$  olduğundan  $\varphi_1$  simpleksel dönüşümü sabit dönüşüm olmalı ve  $id_K$ 'nin sabit bir dönüşüme bitişik olduğunu elde ederiz ki bu bir çelişkidir çünkü  $scat(K) \neq 0$ . [14]

*Örnek 3.7.3* N. Scoville tarafından daha basit bir örnek verilmiştir. Şekil 3.8'de  $K$   $a, b, c$  köşelerine sahip 1-boyutlu kompleks olsun ve  $\sigma$ ,  $b$  ve  $c$  köşelerini birleştiren 1-simpleks olsun. O zaman  $L = K \setminus \sigma$  alt kompleksi bitişiklik genişletme özelliğine sahip değildir. [14]



**Şekil 3.8 :**  $L = K \setminus \sigma$  alt kompleksi bitişiklik genişletme özelliğine sahip değildir.

## 4. GRAFLAR VE SİMPEKSEL LS-KATEGORİ

### 4.1 Ağaçsallık (Arboricity)

Bu bölümde tek boyutlu komplekslerin bir başka deyişle, grafların LS-kategorisinin incelenmesi üzerine odaklanılmıştır. Graf teoride iyi bilinen ağaçsallığı (arboricity) kavramı bu bölümde önemli bir rol oynayacaktır. Temel olarak, ağaçsallığı, bir grafın ayrık geren ormanlara (disjoint spanning forests), bir başka deyişle, tüm köşeleri örten ve bağlantılı olması gerekmeyen döngüsel olmayan (acyclic) alt grafların minimal ayrışımının kardinalitesine dayanır. Bu bölümün amacı grafın ağaçsallığının hem simpleksel kategorilerle hemde geometrik simpleksel kategorilerle çakıştığını kanıtlamaktır.

*Açıklama 4.1.1* Aaronson ve Scoville [24] simpleksel olarak ayrık LS-kategori adını verdikleri bir kavram tanıtmıştır. Bir boyutlu durum için bu kavramın ağaçsallığına denk olduğunu kanıtladılar.

*Tanım 4.1.1*  $G$  bir graf olsun.  $\Upsilon(G)$  ile gösterilen  $G$ 'nin ağaçsallığı,  $G$ 'nin ayrıştırılabileceği kenardan ayrık geren ormanların minimum sayısıdır. [12]

*Teorem 4.1.1*  $G$  aşık olmayan bir graf ve  $q_n$ ,  $G$ 'nin  $n$  köşeli herhangi bir alt grafindaki maksimum kenar sayısı olsun. O zaman

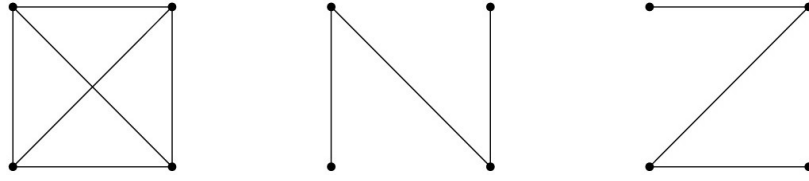
$$\Upsilon(G) = \max_n \left\lfloor \frac{q_n}{n-1} \right\rfloor$$

olur. [12, 25]

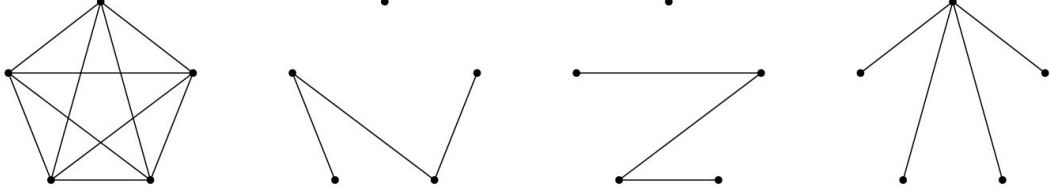
Tam grafların özel durumu için aşağıdaki formül kullanılır: [14]

$$\Upsilon(K_{2n}) = n = \Upsilon(K_{2n-1}).$$

Örneğin  $\Upsilon(K_4) = 2$  ve  $\Upsilon(K_5) = 3$ ;  $K_4$  ve  $K_5$  graflarının geren ormanlar üzerindeki minimal ayrışimleri Şekil 4.1 ve Şekil 4.2'de gösterilmiştir. [12]



Şekil 4.1 :  $K_4$  grafinin geren orman üzerinde minimal ayrışımı.



Şekil 4.2 :  $K_5$  grafinin geren orman üzerinde minimal ayrışımı.

## 4.2 Simpleksel Lusternik Schnirelmann Kategorisi

*Açıklama 4.2.1* Bir graftaki,  $v$  olarak adlandırılan yaprak köşesi ve  $v'$ 'yi içeren tek  $vv'$  kenarının silinmesine standart elementer çöküş denir. Dolayısıyla  $v$ ,  $v'$  tarafından domine edilir ve böylece graftaki her elementer çöküş bir elementer güçlü çöküştür. [14]

*Lemma 4.2.1*  $G$  bağlantılı bir graf olsun ve  $L \subset G$  en az bir  $C$  döngüsü içeren bir alt graf olsun. Eğer  $\varphi : L \rightarrow G$ ,  $\iota_L : L \rightarrow G$  kapsama dönüşümüne bitişik bir simpleksel dönüşüm ise  $\varphi(L)$ ,  $C$  döngüsünü içerir.  $\varphi(L) \subset L$  ve  $\varphi|_C, \iota_C : C \rightarrow G$  kapsama dönüşümüdür. [14]

*İspat.*  $L$  alt grafindaki her  $e$  kenarı,  $\varphi(e) \cup e$ 'nin  $G$  grafinda bir simpleks olduğunu doğrular (graflar için simpleks kavramı bir köşe veya bir kenardır). Bir başka deyişle,  $\varphi(e) \subseteq e$ ; dolayısıyla  $\varphi(e) = e$  veya  $\varphi(e)$ ,  $e$ 'nin uç köşe noktalarından biridir. Bu da şu anlama gelir:  $\varphi(L) \subseteq L$ .

$C$ ,  $L$ 'nin içinde bir döngü olsun ve sırasıyla  $\varphi|_C$  ve  $\iota_C$  ile gösterilen  $\varphi$ 'nin ve  $\iota_L$ 'nin  $C$  döngüsüne kısıtlamalarını ele alalım. Bitişik dönüşümlerin bileşkesi de bitişik olduğu için, bu dönüşümler de bitişiktir. Dolayısıyla, eğer  $\varphi$  dönüşümü  $C$  döngüsünün her kenarını kendisine götürüyorsa,  $\varphi(C) = C$  ve dolayısıyla  $\varphi(L)$ ,  $C$  döngüsünü içerir. Aksi takdirde,  $C$ 'de öyle bir  $e_1$  kenarı vardır ki  $\varphi(e_1) \neq e_1$  olur. Genelliği kaybetmeden  $\varphi(e_1) = v_0$  olduğunu varsayabiliriz. Şimdi  $e_1$ 'e  $v_1$  köşesinde ( $v_1 \neq v_0$  olacak şekilde) komşu olan  $e_2$  kenarını ele alalım.  $\varphi$  dönüşümü simpleksel olduğu için bu durum  $\varphi(e_2) \subseteq e_2$  olması ile çelişir. Son olarak  $C$  döngüsündeki tüm kenarlar  $\varphi$  tarafından sabit kaldığı için  $\varphi(L)$ 'nin en az bir

döngü içerdiği sonucuna varılır.  $\square$

*Açıklama 4.2.2*  $P \subset G$ ,  $G$  grafında bir yol olsun.  $\iota_P : P \rightarrow G$  kapsama dönüşümüne bitişik olan  $\varphi : P \rightarrow G$  simpleksel dönüşümü vardır. Yukarıdaki ispatın aynı argümanı ile,  $P$ 'de bulunan herhangi bir  $e$  kenarı  $\varphi(e) = e$  ya da  $\varphi(e) = u$  sağlar; burada  $u$ ,  $e$ 'nin 1 dereceli uç köşelerinden biridir. Bir başka deyişle,  $u$   $P$ 'nin yaprak köşesidir. Böylece, kapsama dönüşümüne bitişik simpleksel dönüşüm tarafından indirgenmiş tek olası indirgemelerin standart çöküşler olduğu sonucuna varılır. [14]

Bir sonraki sonuç, graflar için kategorik alt kompleks ve döngüsel olmayan alt graf kavramları arasındaki denkliği ortaya koymaktadır.

*Teorem 4.2.1*  $G$  bağlantılı bir graf ve  $L \subseteq G$  alt graf olsun. Bu durumda  $L$ ,  $G$  grafında kategoriktir ancak ve ancak  $L$  alt grafi ormandır. [14]

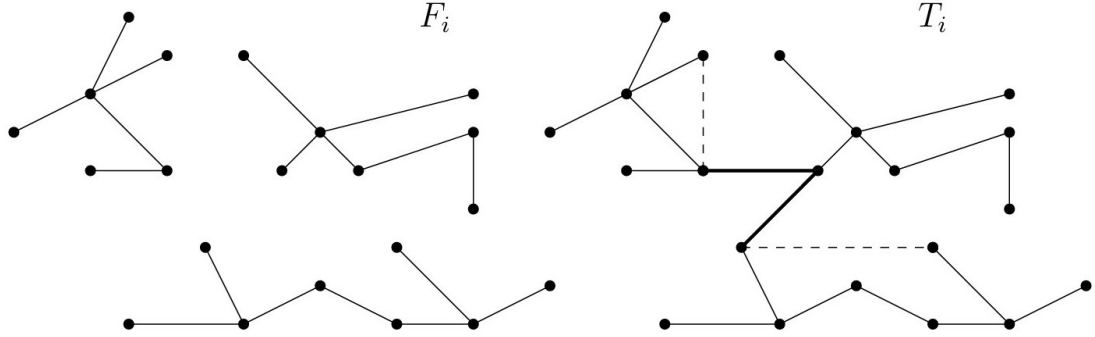
*İspat.* Kategorik olan ancak döngüsel (non-acyclic) olan bir  $L \subset G$  alt grafi olduğunu varsayalım. Tanım gereği, öyle bir  $v \in G$  köşe noktası vardır ki  $\iota = \iota_L : L \rightarrow G$  kapsama dönüşümü ve  $c = c_v : L \rightarrow G$  sabit dönüşümleri aynı bitişiklik sınıfındadır ve bu da doğrudan bitişik  $\varphi_i : L \rightarrow G$  dönüşümlerinden oluşan  $\iota_L = \varphi_1 \sim_c \cdots \sim_c \varphi_m = c_v$  dizisini verir.

$\iota_L \sim_c \varphi_2$  ele alalım. Ayrıca  $L$  en az bir  $C$  döngüsü içerdiği için bir önceki lemmadan  $\varphi_2(L)$ 'nin en azından  $C$  döngüsünü içerdiği sonucuna varılır. Dahası,  $(\varphi_2)|_C$ ,  $\iota_C : C \hookrightarrow G$  kapsama dönüşümüdür. Şimdi  $\varphi_2 \sim_c \varphi_3$  ele alalım.  $\varphi_2(L) \subset L$  olur. Ayrıca  $\iota_C = (\varphi_2)|_C \sim_c (\varphi_3)|_C$  bulunur. Bir önceki lemmayı tekrar uygulayarak  $\varphi_3(C)$  dönüşümünü  $\iota_C : C \hookrightarrow G$  kapsama dönüşümü olduğu sonucuna varılır. Bu argümanı tekrarlayarak bir noktaya deforme olabilen bir döngüye ulaşılır oysa bu imkansızdır. Dolayısıyla  $L$ 'nin,  $G$  grafının döngüsü olmayan alt grafi olduğu, bir başka deyişle,  $L$  alt grafının bir orman olduğu sonucuna ulaşılır.

Tersine olarak,  $L$ 'nin bir orman olduğunu varsayalım. Bir başka deyişle,  $L$ ,  $i = 1, \dots, n$  olacak şekilde  $T_i$  ağaçlarının ayrı birleşimi olduğunu varsayalım. Her bir  $T_i \hookrightarrow G$  kapsama dönüşümünün,  $T_i$  ağacını  $v_i$  köşelerinden birine götüren sabit dönüşüm ile aynı bitişiklik sınıfında olduğu açıktır.  $G$  grafi bağlantılı olduğundan  $G$ 'deki her  $v_i$  köşesini bir  $v_0$  köşesi ile birleştiren en az bir yol vardır. O zaman  $L \hookrightarrow G$  kapsama dönüşümü  $c_v$  sabit dönüşümü ile aynı bitişiklik sınıfındadır. Dolayısıyla  $L$ ,  $G$  grafının kategorik bir alt kompleksidir. [14]  $\square$

*Lemma 4.2.2*  $G$  bağlantılı bir graf olsun.  $G$ 'nin ormanlar tarafından örtülen her bir örtüsü için,  $G$ 'nin aynı sayıda elemana sahip olan ağaçlar tarafından örtülen bir örtüsü vardır. [14]

*İspat.*  $F_1, \dots, F_k$ ,  $G$ 'nin ormanlar tarafından örtülen bir örtüsü olsun.  $G$  bağlantılı olduğundan,  $F_i$  ormanındaki iki  $T$  ve  $T'$  ağacı ve herhangi  $v \in T$  ve  $v' \in T'$  köşeleri verildiğinde, bunlar  $G$  grafindaki herhangi bir yol aracılığıyla birbirine bağlanabilir.  $F_i$ 'ye böyle bir yol ekleyerek ve eğer döngü oluştuysa, yolun  $F_i$ 'de bulunmayan kenarlarını kaldırarak,  $F_i$ 'nin  $T$  ve  $T'$  ağaçlarını birbirine bağlanır.



**Şekil 4.3 :**  $F_i$  orman grafini içeren bir  $T_i$  ağaç grafi elde etme işlemi.

Kalan ağaçlar için bu argümanı tekrarlayarak,  $F_i$  ormanını içeren bir  $T_i$  ağacı elde ederiz. Son olarak,  $G$  grafinin her ormanı üzerinde aynı prosedür uygulanarak  $G$ 'nin  $T_1, \dots, T_k$  ağaçları tarafından bir örtüsünü elde ederiz. [14]  $\square$

*Teorem 4.2.2*  $G$  bağlantılı bir graf olsun. O zaman  $gscat(G) = \Upsilon(G) - 1$  olur. [14]

*İspat.*  $\Upsilon(G) = k + 1$  olduğunu varsayalım, böylece tanım gereği  $G$ 'nin  $k + 1$  tane kenar-ayrık geren (edge-disjoint spanning) ormandan oluşan örtüsü vardır. Lemma 4.2.2'den dolayı  $G$ 'nin  $k + 1$  tane ağaçtan meydana gelen örtüsünü oluşturabiliriz. Ağaçlar güçlü çöken olduğundan  $gscat(G) \leq k$  sonucu elde edilir. Diğer taraftan,  $gscat(G) = k$  olduğunu varsayalım. Buradan  $G$ 'nin  $k + 1$  tane güçlü çöken alt kompleksi vardır. Teorem 4.2.1'den dolayı bu kompleksler ağaçlardır. Bu ağaçları  $T_0, \dots, T_k$  ile gösterelim. Herhangi bir  $T_i$  ağacından başlayarak,  $T_i$  tarafından örtülmeyen tüm izole köşeleri ekleyerek bir  $F_i$  geren ormanı elde edebiliriz. Eğer bir kenar birden fazla ormanda bulunuyorsa, kenar-ayrık (edge-disjoint) ormanlar tarafından bir örtü elde etmek için, biri hariç tüm ormanlardan bu kenar çıkarılır. Dolayısıyla  $\Upsilon(G) \leq k + 1$  olur. [14]  $\square$

*Sonuç 4.2.1* Herhangi bir  $G$  grafi için  $scat(G) = gscat(G) = \Upsilon(G) - 1$ . [14]

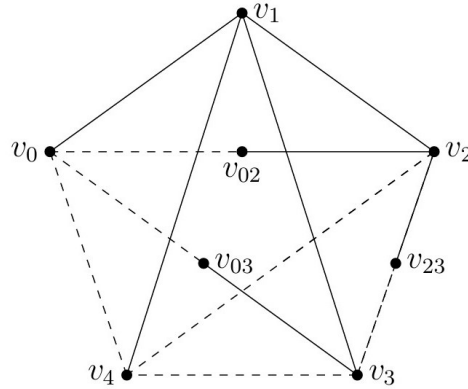
*İspat.*  $\Upsilon(G) = k + 1$  olduğunu varsayalım, böylece tanım gereği  $G$ 'nin  $k + 1$  tane kenar-ayrık geren ormandan oluşan örtüsü vardır. Teorem 4.2.1'den dolayı Bu örtüler  $G$  grafinda kategorik olur. Dolayısıyla  $scat(G) \leq k$  olur.

Diğer taraftan  $scat(G) = k$  olsun. Bu durumda  $G$  grafi, her biri  $G'$ 'de kategorik olan  $k + 1$  tane alt grafla örtülür. Kategorik tanımı gereği her bir  $L_i$  alt grafi için  $\iota_{L_i} : L_i \rightarrow G$  kapsama dönüşümü ile  $c_{v_i} : L_i \rightarrow G$  sabit dönüşümü aynı bitişiklik sınıfındadır. Amacımız bu kategorik alt graf örtülerinin herbirinin orman olduğunu göstermektir. Varsayalım ki  $L_i$  alt graflarından en az biri  $C$  döngüsü içersin.  $c_{v_i} : L_i \rightarrow G$  sabit dönüşümünün görüntüsü sabit bir noktadır ve döngü içermez. Lemma 4.2.1'den dolayı bu bir çelişkidir. Bu durumda  $L$  kategorik değildir. Dolayısıyla bu örtüdeki  $L_i$  alt grafları döngü içermez, bir başka deyişle,  $L$  orman olduğu sonucuna ulaşılır. Buradan  $\Upsilon(G) \leq k + 1$  olur ve dolayısıyla  $scat(G) = \Upsilon(G) - 1$  olur.  $\square$

*Önerme 4.2.1*  $G$  bağlantılı bir graf olsun. Eğer  $G$  ağaç graf ise  $scatG = cat|G| = 0$  olur. Aksi takdirde,  $G$  grafindaki geren ağaçlardan sadece birinin kenarlarının ikiye bölünmesiyle elde edilen bölünmesi (subdivision)  $G'$  grafi olsun. Bu durumda  $scat(G') = cat|G| = 1$ . [14]

*İspat.*  $G$  grafinda geren bir  $T$  ağaç grafını ele alalım. Maksimal ağacı  $T$  olan bağlantılı bir  $X$  grafi verilsin. Bu durumda  $\pi_1(X)$  temel grubunun bazıları,  $X - T$ 'nin  $e_\alpha$  kenarlarına karşılık gelen  $[F_\alpha]$  sınıflarından oluşur [23]. Şimdi  $T$ 'nin dışındaki her kenar barisentrik olarak bölünsün daha sonra,  $G$ 'nin  $G'$  bölünmesi, aşağıdaki gibi inşa edilen iki farklı (ayrık olmayan)  $T_1$  ve  $T_2$  tarafından örtüsü olabilir (Şekil 3.6):  $T_1$ ,  $T$ 'nin her yaprak köşesine bir kenar (subdivided olanlardan bir kenar) eklenerek elde edilen  $T$ 'nin bir uzantısıdır. Benzer şekilde  $T_2$ ,  $T$ 'nin tüm yaprak köşelerine diğer kenarın ( $T_1$  ağacını oluşturmak için daha önce eklenmemiş olan) eklenmesiyle elde edilir. Tanım gereği hem  $T_1$  hem de  $T_2$ ,  $G'$  grafini örten geren ağaçlardır ve dolayısıyla  $scat(G') = cat|G| = 1$  olur. [14]  $\square$

*Örnek 4.2.1*  $K_5$  grafi verilsin.  $scat(K'_5) = 1$  olduğunu elde etmek için sadece üç kenarın ikiye bölünmesi gerekir (Şekil 4.4). [14]



**Şekil 4.4** :  $K_5$ 'in üç kenarının ikiye bölünmesi.

*Sonuç 4.2.2*  $G$  bağlantılı graf olsun.  $scat(sdG) = cat|G|$  olur. [14]

*Açıklama 4.2.3* Yukarıdaki sonuçlar dikkate alındığında, bir boyutlu durumda ilgi çekici bir sonuç olarak şundan bahsedilebilir.  $G$  bir graf olmak üzere,  $scatG - scat(sdG) = scatG - cat|G|$  farkının gayet büyük olabilir. [14]

*Örnek 4.2.2*  $K_{19}$  tam grafi verilsin. Bu graf için  $\Upsilon(K_{19}) = 10$  olduğundan Sonuç 4.2.1'e göre

$$scatK_{19} = \Upsilon(K_{19}) - 1 = 9$$

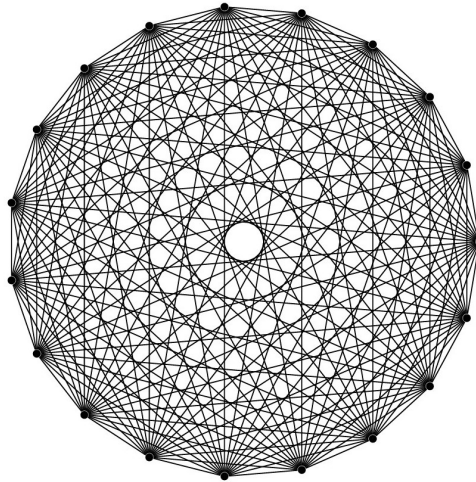
olarak hesaplanır. Diğer taraftan,  $K_{19}$  grafindaki bir geren ağaçtaki kenarların ikiye bölünmesi ile oluşan grafi  $K'_{19}$  ile gösterelim. O zaman Önerme 4.2.1'den dolayı,

$$cat|K_{19}| = scat(K'_{19}) = 1$$

olur. Bu durumda,

$$scatK_{19} - scat(K'_{19}) = scatK_{19} - cat|K_{19}| = 9 - 1 = 8$$

olduğu görülür. Böylece, elde edilen sonucun oldukça büyük olduğu basitçe gösterilmiş olur.



Şekil 4.5 :  $K_{19}$  tam grafi.

## KAYNAKLAR

- [1] **Cornea, O., Lupton, G., Oprea J., Tanrè, D.** (2003). *Lusternik–Schnirelmann Category*, Mathematical Surveys and Monographs (103). Providence, RI: American Mathematical Society.
- [2] **Farber, M., Ghrist, R., Burger, M., Koditschek, D. (ed.).** (2006). *Topology and Robotics*, Providence, RI: American Mathematical Society.
- [3] **Singer, I. M., Thorpe, J. A.** (1967). *Lecture Notes on Elementary Topology and Geometry*. New York: Springer-Verlag.
- [4] **Brøndsted, A.** (1983). *An Introduction to Convex Polytopes*. New York: Springer-Verlag.
- [5] **Scoville, N. A.** (2019). *Discrete Morse Theory* (Vol. 90 of Student Mathematical Library). Providence, RI: American Mathematical Society.
- [6] **Virk, Z.** (2022). *Introduction to Persistent Homology*. Ljubljana: Založba UL FRI, University of Ljubljana.
- [7] **Kozlov, D.** (2008). *Combinatorial Algebraic Topology* (Algorithms and Computation in Mathematics). Berlin: Springer.
- [8] **Barmak, J. A.** (2011). *Algebraic Topology of Finite Topological Spaces and Applications* (Lecture Notes in Mathematics 2032). Heidelberg: Springer.
- [9] **Christofides, N.** (1975). *Graph Theory: An Algorithmic Approach* (Computer Science and Applied Mathematics). London: Academic Press.
- [10] **Diestel, R.** (2005). *Graph Theory* (3rd ed., Graduate Texts in Mathematics). New York: Springer-Verlag Heidelberg.
- [11] **Bondy, J. A., Murty, U. S. R.** (1976). *Graph Theory with Applications*. New York: Springer.
- [12] **Harary, F.** (1969). *Graph Theory*. New York: Addison-Wesley Publishing Company.
- [13] **Spanier, E. H.** (1966). *Algebraic Topology*. New York: Springer-Verlag.
- [14] **Fernández-Ternero, D., Macías-Virgós, E., Minuz, E., Vilches, J. A.** (2019). Simplicial Lusternik–Schnirelmann Category. *Pub. Mat.*, 63(1), 265–293.
- [15] **Fernández-Ternero, D., Macías-Virgós, E., Vilches, J. A.** (2015). Lusternik–Schnirelmann category of simplicial complexes and finite spaces. *Topology and its Applications*, 194, 37–50.
- [16] **Barmak, J. A., Minian, E. G.** (2012). Strong homotopy types, nerves and collapses. *Discrete Comput. Geom.*, 47(2), 301–328.

- [17] **Ayala, R., Domínguez, E., Quintero, A.** (1987). Topología poliedral. *Publicaciones del Seminario Matemático García de Galdeano*, 12(2).
- [18] **Fox, R. H.** (1941). On the Lusternik–Schnirelmann category. *Annals of Mathematics*, 42(2), 333–370.
- [19] **James, I. M. (Ed.)**. (1995). *Handbook of Algebraic Topology*. North Holland: Elsevier.
- [20] **Dold, A.** (1972). *Lectures on Algebraic Topology*. New York-Berlin: Springer-Verlag.
- [21] **James, I. M. (ed.)** (1999). *History of Topology*. Amsterdam: Elsevier.
- [22] **Lundell, A. T., Weingram, S.** (1969). *The Topology of CW Complexes*. New York: Springer.
- [23] **Hatcher, A.** (2002). *Algebraic Topology*. Cambridge: Cambridge University Press.
- [24] **Aaronson, S., Scoville, N. A.** (2013). Lusternik–Schnirelmann category for simplicial complexes. *Illinois Journal of Mathematics*, 57(3), 743–753.
- [25] **Nash-Williams, C. ST. J. A.** (1961). Edge-disjoint spanning trees of finite graphs. *Journal of the London Mathematical Society*, 36(1), 445–450.

## ÖZGEÇMİŞ

**Ad-SOYAD** : Hilal ALABAY

### ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans** : 2022, Bursa Teknik Üniversitesi, Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi, Matematik

### MESLEKİ DENEYİM VE ÖDÜLLER:

- Lisans Bölüm Birinciliği

### TEZDEN TÜRETİLEN ESERLER, SUNUMLAR VE PATENTLER:

- 1. Bursa Matematik Günleri, Lusternik Schnirelmann Kategori, 11 Nisan 2025. Bursa

### DİĞER ESERLER, SUNUMLAR VE PATENTLER:

- **Alabay, H., Borat, A., Cihangirli, E., Dirican Erdal, E. (2024).** “Higher Analogues of Discrete Topological Complexity”, *Rev. Real Acad. Cienc. Exactas Fis. Nat. Ser. A-Mat.*, 118, 125.
- **Alabay, H., Borat, A., Cihangirli, E., Dirican Erdal, E. (2023).** Yüksek ayrık topolojik karmaşıklık, *35. Ulusal Matematik Sempozyumu*, Edirne, TÜRKİYE: 4-8 Eylül 2023.