



T.C.
HATAY MUSTAFA KEMAL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BULANIK MANTIK KULLANILARAK POİSSON ve BİNOM
DAĞILIMLARININ İNCELENMESİ

Ömer Tuğrul KURDOĞLU

ENFORMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HATAY
HAZİRAN - 2020



T.C.
HATAY MUSTAFA KEMAL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**BULANIK MANTIK KULLANILARAK POİSSON ve BİNOM
DAĞILIMLARININ İNCELENMESİ**

Ömer Tuğrul KURDOĞLU

ENFORMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**HATAY
HAZİRAN - 2020**

T.C.
HATAY MUSTAFA KEMAL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**BULANIK MANTIK KULLANILARAK POİSSON ve BİNOM
DAĞILIMLARININ İNCELENMESİ**

Ömer Tuğrul KURDOĞLU

ENFORMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Dr. Öğr. Üyesi Hakan YETİŞKİN danışmanlığında hazırlanan bu tez **05/06/2020** tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından **OYBİRLİĞİ** ile kabul edilmiştir.

Dr. Öğr. Üyesi Hakan YETİŞKİN
Başkan

Prof. Dr. Bünyamin YILDIZ
Üye

Dr. Öğr. Üyesi Yaşar DAŞDEMİR
Üye

Kod No:

Doç. Dr. Cengiz KARACA
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

05/06/2020

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını ve tez üzerinde Yükseköğretim Kurulu tarafından hiçbir değişiklik yapılamayacağı için tezin bilgisayar ekranında görüntülendiğinde asıl nüsha ile aynı olması sorumluluğunun tarafıma ait olduğunu beyan ederim.

İmzası

Ömer Tuğrul KURDOĞLU

ÖZET

BULANIK MANTIK KULLANILARAK POISSON ve BINOM DAĞILIMLARININ İNCELENMESİ

Bu tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır.

İlk bölüm giriş bölümü olarak hazırlandı ve bulanık mantığın gelişim süreci ile kullanım alanları hakkında bilgi verildi.

Önceki çalışmalar adlı ikinci bölümde ise daha önce yapılan çalışmalarla ilgili literatüre yer verildi.

Materyal ve yöntem bölümünde ise bazı temel kavramlar, klasik kümeler, bulanık kümeler, üyelik fonksiyonları, bulanık sayılar, kesikli rassal değişkenler, bazı kesikli dağılımlar verildi.

Tezin esas kısmı olan dördüncü bölümde ise olasılık teorisinde kullanılan Poisson, Binom dağılımları ve onların özelliklerinin bulanık mantık teorisinde kullanımları ele alındı. Ayrıca bu dağılımlarla ilgili çeşitli örnekler ele alınarak yapılan hesaplamalar bulanık mantık teorisine uyarlandı.

Tezin son bölümü ise sonuç ve öneriler bölümü olarak düzenledi.

2020, 46 sayfa

Anahtar Kelimeler: Bulanık Mantık, Poisson Dağılımı, Binom Dağılımı.

ABSTRACT

EXAMINATION OF POISSON and BINOM DISTRIBUTIONS BY USING FUZZY LOGIC

This thesis consists of five chapters.

The first part is prepared as an introductory part and information is given about the development process of fuzzy logic and its usage areas.

In the second section called previous studies, the literature on previous studies is included.

In the material and method section, some basic concepts, classical sets, fuzzy sets, membership functions, fuzzy numbers, discrete random variables, some discrete distributions are given.

In the fourth chapter, which is the main part of the thesis, Poisson, Binom distributions used in probability theory and their properties in fuzzy logic theory are discussed. In addition, calculations made by considering various examples related to these distributions were adapted to fuzzy logic theory.

The last part of this thesis was arranged as conclusion and suggestion section.

2020, 46 pages

Key Words: Fuzzy Logic, Poisson Distribution, Binom Distribution.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tez konusunun belirlenmesinde, araştırılması ve yazımı sırasında sahip olduğu bilgi birikimi ve tecrübesi ile çalışmayı yönlendiren ve her türlü yardımı esirgemeyen saygıdeğer danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Hakan YETİŞKİN'e sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Tez konusunun belirlenmesi ve çalışmaların takibinde profesyonel yaklaşımları ve öngöruları ile yüksek lisans çalışmamı zenginleştiren ve yardımını esirgemeyen Prof. Dr. Bünyamin YILDIZ'a sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım

Çalışmalarım sırasında desteklerini esirgemeyen eşime ve anneme çok teşekkür ederim.

Ayrıca bu yüksek lisans tez çalışmasını rahmetli babam anısına ithaf ediyorum.

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	I
ABSTRACT.....	II
TEŞEKKÜR.....	III
İÇİNDEKİLER	IV
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	VI
ÇİZELGELER DİZİNİ	VII
SİMGELER DİZİNİ.....	VIII
1. GİRİŞ.....	1
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR.....	4
3. MATERYAL ve YÖNTEM.....	6
3.1. Bulanık Mantığın Düşünce Yapısı	6
3.2. Klasik Küme Teorisi.....	7
3.3. Bulanık Mantık Teorisi.....	9
3.4. Bulanık Kümelerin Gösterimleri	11
3.4.1. Bulanık Küme Üzerinde İşlemler	12
3.5. Üyelik Fonksiyonları	14
3.5.1. Üyelik Fonksiyon Çeşitleri.....	15
3.5.2. Üyelik Fonksiyonlarının Kısımları.....	18
3.5.3. Bulanık Kümeler için Bazı Tanımlamalar.....	18
3.5.4. Bulanık Kümelerin Büyüklüğü.....	20
3.6. Bulanık Sayılar	21
3.6.1. Üçgen Bulanık Sayılar.....	22
3.6.1.1 Üçgen Bulanık Sayılarda İşlemler	24
3.6.2. Yamuk Bulanık Sayılar	25
3.6.2.1 Yamuk Bulanık Sayılarda İşlemler	26
3.7. Sözel Değişkenler.....	27
3.8. Rassal Değişken Kavramı.....	28
3.8.1. Rassal Değişken Çeşitleri	29
3.8.1.1 Kesikli Rassal Değişkenler	29
3.8.1.2 Sürekli Rassal Değişken.....	29
3.9. Olasılık Dağılımları	30
3.9.1. Bazı Kesikli Dağılımlar	33
3.9.1.1 Bernoulli Dağılımı	33
3.9.1.2 Binom Dağılımı.....	34
3.9.1.3 Poisson Dağılımı	35
4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA	37
4.1. Bulanık Poisson ve Binom Dağılımları	37
4.1.1. Bulanık Rassal Değişken Kavramı	37
4.1.2. α -Kesimleri	38
4.2. Bulanık Binom Dağılımı	39
4.2.1. Binom Dağılımının Bulanık Ortalaması ve Varyansı	40
4.3. Bulanık Poisson Dağılımı.....	41
4.3.1. Poisson Dağılımının Bulanık Ortalaması ve Varyansı	42
5. SONUÇ ve ÖNERİLER.....	43
KAYNAKLAR	44

ÖZGEÇMİŞ	46
----------------	----



ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1. Klasik küme	10
Şekil 3.2. Bulanık küme	10
Şekil 3.3. Bulanık kümelerin birleşimi	12
Şekil 3.4. Bulanık kümenin kesişimi.....	13
Şekil 3.5. Bulanık kümenin tümleyeni	13
Şekil 3.6. Bulanık kümenin kapsayıcı	14
Şekil 3.7. Üçgen üyelik fonksiyonu	15
Şekil 3.8. Yamuk üyelik fonksiyonu.....	16
Şekil 3.9. Gaussal üyelik fonksiyonu	17
Şekil 3.10. Çan eğrisi üyelik fonksiyonu	17
Şekil 3.11. Üyelik fonksiyonunun kısımları	18
Şekil 3.12. Normal ve normal olmayan bulanık kümeler	19
Şekil 3.13. $\tilde{A} = [a_1, a_2, a_3]$ üçgen bulanık sayı	22
Şekil 3.14. $\tilde{A} = [a_1, a_2, a_3, a_4]$ yamuk bulanık sayı	25
Şekil 3.15. Yaş sözel değişkeni.....	27
Şekil 3.16. Zar atma deneyine ilişkin olasılık dağılımının grafiği	31
Şekil 3.17. Olasılık fonksiyonunun nokta ve çizgi grafiği.....	32
Şekil 3.18. Dağılım fonksiyonunun grafiği.....	32

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 3.1. Bulanık kümelerin sınıflandırılması ve üyelik dereceleri.....	19
Çizelge 3.2. Zar atma deneyinin olasılık dağılımı	30
Çizelge 3.3. Zar atma deneyinin olasılık fonksiyonu.....	32



SİMGELER DİZİNİ

$\in$	: Kümenin elemanıdır
$\notin$	: Kümenin elemanı değildir
$\subset$	: Alt küme
$\emptyset$	: Boş küme
$\bar{A}$	: A kümesinin tümleyeni
μ	: Kümeye ait olma değeri
$\mu_A(x)$	: x elemanının A kümesine aitlik değeri
$\cup$	: Birleşim
$\cap$	: Kesişim
$\tilde{A}$	: Bulanık $\tilde{A}$ kümesi
$\forall$	: Her
$\leq$	: Küçük eşit
$\geq$	: Büyük eşit
$/$	: Fark
α	: Bulanık kümelerde kesim seviyesi
$\tilde{A}_\alpha$	: $\tilde{A}$ bulanık kümesine ait alfa-kesim kümesi
$ \tilde{A} $	: Bulanık $\tilde{A}$ kümesinin büyüklüğü
$\bar{\tilde{A}}$	: $\tilde{A}$ bulanık kümesinin tümleyeni
$\oplus$	: Bulanık toplama işlemi
$\ominus$	: Bulanık çıkarma işlemi
$\otimes$	: Bulanık çarpma işlemi
$\oslash$	: Bulanık bölme işlemi
$\tilde{A}^{-1}$	: Bulanık ters işlem
Z	: Rassal değişkeni
S	: Örnek uzay
n_A	: A olayının eleman sayısı
n	: S örnek uzayının eleman sayısı

1. GİRİŞ

Günlük hayatımızda birçok olayda belirsizliklerle karşı karşıya kalırız. Öyle ki bu olaylarda belirsizliklere bir açıklama getirebilmek ve kesin tanımlamalarda bulunabilmek imkânsız bir hal alır. Bu nedenle belirsizlik, hemen hemen her düzeyde kaçınılmaz olarak insanların günlük hayatını etkileyen bir kavramdır. Örneğin çamaşır makinesinde yıkayacağımız çamaşırların ne kadar kirli olduğuna karar veriliyorken kesin bir tanımlamada bulunmak imkânsızdır. Bulanık mantık yaklaşık olarak akıl yürütme mantığını içerisinde bulunduran ve buna göre çeşitli işlemlerle sonucu optimize etmeye çalışan bir düşünce sistemine dayanmaktadır.

Klasik mantıktan farklı olarak bulanık mantıkta bir önerme, sadece doğru ya da sadece yanlış olmayıp bir netlik söz konusu değildir. Bu durum bulanık mantığı diğer mantık sistemlerinden ayıran en önemli özelliklerden birisidir.

Matematiksel olarak bulanık mantık teorisinin altında yatan ana fikir; bir önermenin doğruluğunun, önermelerle, kesin yanlış ve kesin doğru arasındaki sonsuz sayıda doğruluk değerlerini içeren ve bu değerleri sayısal olarak $[0,1]$ gerçel sayı aralığıyla ilişkilendiren bir fonksiyon olarak ortaya çıkmaktadır.

Bulanık mantık yaklaşımının klasik mantık yaklaşımına göre bir takım avantaj ve dezavantajları bulunmaktadır. Bulanık mantık kavramının avantajları şu şekilde sıralanabilir: İnsan düşünme tarzına yakın olması, matematiksel modellere uyum sağlaması, uygulamaların hızlı ve ucuz olması, insan davranışlarını formüle etmesi ve yeni olanaklara açık olması en önemli avantajlarıdır. Bulanık mantık yaklaşımında matematiksel modele ihtiyaç duyulmadığından; matematiksel modeli iyi tanımlanamamış, zamanla değişen ve doğrusal olmayan sistemler en başarılı uygulama alanlarıdır. Ayrıca çok karmaşık, belirsizlik içeren sistemlerin oluşturulmasına olanak tanır. İnsan faktörünün içine girdiği; belirsizlik, kişisel önyargı, davranış ve amaçların kapsandığı durumlarda uygulama alanı bulduğundan, gerçek hayat problemleri için klasik matematiksel modellemeden daha esnek ve güvenilirlerdir.

Bulanık mantığın avantajlarının yanında birtakım dezavantajları da mevcuttur. Bu dezavantajlardan bazıları şunlardır: Bu uygulamalarda kuralların mutlaka uzman deneyimlerine dayanarak tanımlanması gerekir. Karakteristik fonksiyonları ve bulanık mantık kurallarını tanımlamak her zaman kolay değildir. Üyelik fonksiyonlarının

belirlenmesinde kesin sonuç veren belirli bir yöntem ve öğrenme yeteneği yoktur. En uygun yöntem deneme yanılma yöntemidir, bu da çok uzun zaman alabilir. Uzun süren testler yapmadan gerçekten ne kadar üyelik işlevi gerektiğini kestirmek çok güçtür. Sistemlerin kararlılık, gözlenebilirlik ve denetlenebilirlik analizlerinin yapılmasında ispatlanmış kesin bir yöntemin olmayışı bulanık mantığın temel sorunudur. Günümüzde bu sadece pahalı deneylerle mümkün olmaktadır. Belirli formal tasarımın olmaması ve iyi metriklere sahip bulunmaması, geleneksel yöntemlere göre ne kadar iyi sonuç vereceğinin ve ne zaman kullanılması gerektiğinin kestirilememesi de dezavantajları arasında sayılabilir.

Gerçek hayatta karşılaşılan olaylardaki belirsizlikler karar aşamasında olan insanı çoğu kez olasılık kuramının kavramlarını ve yöntemlerini kullanmaya itmiştir. 1960'lı yılların başlarında karşılaşılan olayların çözümü için kullanılan olasılık kuramının kavram ve yöntemleri birtakım eleştirilere maruz kalmış ve insanları bu kavramları tekrar gözden geçirmeye itmiştir. Bu eleştiriler doğrultusunda olasılık kuramına alternatif olarak kullanılabilecek metotlar geliştirmek için yoğun çalışmalar yapılmıştır (Yenilmez, 2001).

Bulanık mantık kesin sınırları olmayan problemleri tanımlamak ve çözmek için geliştirilmiştir. İlk defa 1965 yılında, University of California, Berkeley'den Dr. Lotfi Zadeh tarafından doğal dildeki belirsizliği modellemek amacıyla ortaya konmuştur. Günlük hayata bulanık mantık ilk kez 1973 yılında Profesör H. Mamdani tarafından Londra'da Queen Mary College'da bulunan bir buhar makinesinde kullanılmıştır. Ticari olarak ise 1980 yılında Danimarka'da bulunan bir çimento fabrikasının fırını kontrol etme amacıyla kullanılmıştır (Günel, 1997).

Bulanık mantık yöntemi ile kontrol mekanizması üzerine birçok güncel araştırmalar yapılmış ve bu araştırmaların bir sonucu olarak yöntem, su kalite kontrolü, otomatik tren işletim sistemlerinin kontrolü, otomatik vinç taşıma sistemlerinin kontrolü, nükleer reaktör kontrolü, otomobil vites kontrolü gibi pek çok farklı alanda kullanılmıştır (Kartal, 2004).

Günümüzde görülmeye değer örnek bir bulanık mantık yöntemi, Japonya'da Sendai şehrindeki metro kontrol sisteminde kullanılmaktadır. 1987'den bu yana yöntem; trenlerin hatlarında hızlı bir şekilde gitmesini, yumuşak bir biçimde hızlanmalarını ve frenlemelerini, istasyona girişlerini hassas bir şekilde yaparak durmalarını, zaman

kaybetmeden ve yolcuları sarsmadan seyahat edebilmelerini sağlamaktadır (Paksoy ve ark., 2013).

Yakın tarihte karşımıza çıkan bu ve benzeri örnekler, gelecekte çok daha ileri seviyede bulanık mantık yöntemi örneklerinin önümüze çıkabileceğini işaret etmekte olup, hayatımızın önemli bir alanını oluşturacaktır.

Bu çalışmada, bulanık mantık konusunun matematik konusu ile ilgili olan kısımları incelenmiş olup, bulanık mantık konusuyla yakın ilişki içinde olan olasılık konusuna değinilmiştir. Ayrıca olasılıkta kullanılan Poisson ve Binom dağılımlarının özellikleri ele alınarak, bu dağılımların bulanık mantık kullanılarak yapılan hesaplamaları üzerinde çalışılmıştır. Elde edilen bulgular neticesinde, olasılıkta kullanılan ve bulanık mantık içerisinde kullanılan Poisson ve Binom dağılımları ile elde edilen sonuçları değerlendirilmiştir.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Günlük hayatımızda karşımıza çıkan pek çok problemi matematiksel olarak modelleyip çözüme ulaşmak amacıyla ortaya konmuş olan bulanık mantık teorisi, uygulamalı matematikte geniş bir yer bulmuş ve pek çok araştırmacı tarafından dikkate alınarak insanoğlunun hayatını kolaylaştırmak amacıyla pek çok bilim dalında kullanılmıştır.

Bulanık mantık teorisi ilk olarak Amerikalı bilim adamı Black tarafından ortaya atılmıştır (Black, 1937). Bundan yaklaşık 30 yıl sonra Azeri bilim adamı Zadeh tarafından yayınlanan makaleyle bulanık küme kuramının temelleri oluşturulmuştur (Zadeh, 1965).

Bulanık doğrusal programlama konusunda ilk çalışma ise Belman ve Zadeh tarafından yapılmıştır (Belman ve Zadeh, 1970). Tanaka, Okuda ve Asai bulanık kısıtlarla, bulanık doğrusal programlamanın bir formülasyonunu önermiş ve bulanık sayılar arasında eşitsizlik ilişkilerine dayanan çözümlerde yeni bir metot geliştirmişlerdir (Tanaka ve ark., 1974).

Negoita ve Sularia bulanık kısıtlı doğrusal programlama problemlerini formüle etmiş ve bulanık amaç fonksiyonunun maksimize edildiği bir karar probleminin klasik bir matematiksel programlama problemine indirgenebileceğini göstermişlerdir (Negoita ve Sularia, 1976). Zimmermann (1976), Orlovsky (1978) bulanık doğrusal programlama konusunda çalışmışlardır. Werners etkileşimli bulanık bir model üzerine çalışmış ve “bulanık-ve” operatörü kavramını kullanmıştır (Werners, 1987).

Inuiguchi ve arkadaşları parçalı üyelik fonksiyonları olan bir bulanık doğrusal programlama üzerinde çalışmışlardır (Inuiguchi ve ark., 1990). Inuiguchi ve Sakawa doğrusal programlama problemlerinin belirsizliği ile bulanıklığın yumuşaklığını ve sağlamlığını bulanık bir objektif fonksiyonu ile araştırmışlardır (Inuiguchi ve Sakawa, 1998).

Buckley ve Feuring bütün parametrelerin ve değişkenlerin bulanık sayılar olduğunu, tamamen bulanıklaştırılmış doğrusal programa çözümlemesi üzerine çalışmışlardır. Bu amaçla bir optimizasyon problemini çok amaçlı doğrusal programlama haline dönüştürmüşler ve baskın olmayan çözümler kümesini incelemek için bulanık esnek programlama kullanımı kullanmışlardır (Buckley ve Feuring, 2000).

Liu, bulanık sayıların yeni bir yöntemle sıralanması esasına dayanarak, kısıtların yerine getirilmesine olanak sağlayan bulanık doğrusal programlama çözümlemesi

gerçekleştirmiştir (Liu, 2001). Chiang istatistiksel veriler ve istatistiksel güven aralığı kavramını kullanarak bir bulanık doğrusal programlama modellemesi yapmıştır (Chiang, 2001).

Mahdavi-Amiri ve Nasserı yamuk tipli bulanık sayılar için bulanık sıralama fonksiyonu üzerine çalışmışlardır. Yamuk tipli bulanık değişkenlerle doğrusal programlama problemini eşleştirip çeşitli sonuçlar elde etmişlerdir (Amiri ve Nasserı, 2007). Lotfi ve arkadaşları tüm parametreler ve değişkenlerin üçgen bulanık sayı olarak tanımlandığı problemler için simetrik üçgen üyelik fonksiyonu kullandıkları modellerinde, üçgen tipli bulanık sayıyı durulaştırmak için yeni bir yaklaşım ortaya atmışlardır (Lotfi ve ark., 2009). Kumar ve arkadaşları ise yaptıkları çalışmada aynı tür bulanık doğrusal programlama probleminin bulanık optimal kontrol çözümünü elde etmek için yeni bir yöntem ortaya koymuşlardır (Kumar ve ark., 2011).

Bulanık mantık teorisi ve uygulamaları ile ilgili ülkemizde dahil olmak üzere yapılmış pek çok çalışma mevcut olup bu çalışmaların çoğunluğu bulanık mantık yaklaşımının endüstriyel ve mühendislik alanlarında çeşitli problemlere uygulanması ile elde edilmiştir.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu bölümde; bulanık mantık düşünce yapısı, klasik küme teorisi, bulanık mantık teorisi, bulanık kümelerin gösterimleri, üyelik fonksiyonları, bulanık sayılar, sözel değişkenler, rassal değişken kavramı ve olasılık dağılımlarından bahsedilmiştir.

3.1. Bulanık Mantığın Düşünce Yapısı

Bilimsel çalışmaların büyük bir kısmında klasik mantık olarak da nitelendirilen Aristo Mantığı temel alınmaktadır. Bu kavrama göre olaylar, doğru ya da yanlış, siyah ya da beyaz kavramlarında olduğu gibi iki seçenekten oluşmaktadır. Ancak, gerçek hayata yönelik olaylar ve olgular her zaman bu kadar yalın değildir. Günlük hayatta karşılaşılan olaylar karar sürecinde bulunan bir insanın zihninde karmaşık süreçlerden geçirilmekte ve beraberinde birtakım belirsizlikler içermektedir. Bu belirsizliklerin birçoğu gerçekte rastgele faktörlerde tezahür etmediği gibi problemlerin çözümü ile alakalı veri kaynakları da çeşitlilik içerebilmektedir. Bu gibi durumlarda, Bulanık Mantık (Fuzzy Logic) ile Bulanık Küme Teorisi (Fuzzy Set Theory) birlikte en uygun çözüm yolu olarak yardımcı olmaktadır. Yetersiz veri sebebiyle ortaya çıkabilecek karmaşıklık ve belirsizlikler karar verme aşamasında bulunan bir insan veya bir sistem için bulanık mantık yöntemi yardımıyla kolaylıkla modellenebilmektedir (Uysal, 2010).

İnsan günlük hayatında karşılaştığı birçok olay ve sorunu kendi kişisel yargıları doğrultusunda inceler ve çözüm arar. Örnek verecek olursak, “hava sıcak” denildiğinde birçok kişi için hava kelimesi, günlük hayattaki kullanımını ifade etmektedir ancak sıcak kelimesinin anlam olarak görecesi insandan insana farklılıklar gösterebilmektedir. Erzurum’da bulunan bir kişi “sıcak” söylemini 25 °C algılamasına karşın, Şanlıurfa’da yaşayan bir kişi için bu 35 °C olabilir. Öte yandan birçok kişi bu görüşü ifade etmek için farklı sıcaklık seviyelerini tercih edebilmektedir. Bu nedenle “sıcak” ifadesinin altında insanların ima ettiği sayısal anlayışın bir sonucu olarak belirsiz (bulanık) bir durum ortaya çıkar. Bu durum rastgele değildir, ancak belirsizdir. Bu ve bunun gibi durumlarda göreceli kavramlar belirsizlik meydana getirir ve bu duruma bulanıklık denir (Şen, 2004).

Klasik mantık bulanık mantık ile kıyaslandığında bizi çok daha katı çizgiler çizmeye zorlar. Örneğin, batı edebiyatında “Novel” ismi ile anılan roman 90 veya daha fazla sayfadan oluşur. Novella ise 90’dan daha az sayfadan oluşur. Bu kıstasa göre 91

sayfalık bir eser roman yani Novel sıfatıyla anılırken, 89 sayfalık bir düz yazı uzun hikâye yani Novella ismiyle anılmaktadır. Bu durumda yazar karakter puntolarında ufak değişiklikler yapar ise bir Novella'yı Novel'e dönüştürme, aynı şekilde Novel'i Novella'a dönüştürme imkânına sahiptir. Bulanık mantık bu gibi karmaşık durumların önüne geçmektedir (Akpolat, 2000).

Bulanık mantık, bulanık küme teorisine dayanan bir matematiksel disiplindir. Doğru ve yanlış derecesine göre kategorize etmeyi konu almaktadır. Klasik mantığın aksine herhangi bir cümlemin doğruluğunu derecelendirir. Bulanık mantık klasik mantığın oldukça genişletilmiş hali olarak da değerlendirilebilir. Öyle ki doğru ve yanlış arasına kısmen doğru ya da kısmen yanlış kavramları da eklenerek bu küme genişletilmiştir (Ertuğrul, 1996).

Bulanık mantık matematikçilerin elinde bir sistemin temel girdilerine yanıt verecek algoritmalar bulunmadığında, belirsiz değerlere başvuran “sağduyulu” kurallar kullanarak sistemi denetleme ve betimleme işlevlerini görmektedir. Diğer bir deyişle belirsiz değerleri işlem altına alabilme ve kesin rakamlar ile belirtilemeyen durumlarda karar vermeyi kolaylaştırmaktadır (Öztemel, 2003).

3.2. Klasik Küme Teorisi

Aristo mantığı üzerine kurulan klasik bir küme, belirli alanda iyi tanımlanmış nesneler topluluğudur. Klasik küme anlayışında bütün hükümler iki sonuçludur. Bir nesne ya kümenin elemanıdır ya da değildir. Bu nedenle kümedeki elemanlar arasında ve kümeye dâhil olmayan elemanlar arasında keskin bir sınır vardır.

Klasik kümeler çeşitli metotlarla tanımlanabilirler. Bu metotlardan bir tanesi küme elemanlarının teker teker sayılarak ifade edilmesi, diğer bir tanesi ise küme elemanlarının ortak özelliklerini tarif etme metoduyla ifade edilmesidir. İlk bahsettiğimiz metot uzatılmış tanım, ikinci bahsettiğimiz metot ise kuvvetlendirilmiş tanımdır. Çeşitli nedenlerden ötürü kuvvetlendirilmiş tanım, uzatılmış tanıma göre daha çok tercih edilir.

X gibi bir evrensel küme (üzerinde işlem yapılan tüm kümeleri içine alan küme) içinde sonlu sayıda elemana sahip bir A kümesini ele alalım. a gibi bir eleman ile A kümesi arasındaki ilişki, a 'nın A ya ait olup olmaması ile ilgilidir. a , A kümesi içindeyse bu durum $a \in A$ ile eğer içinde değilse $a \notin A$ ile ifade edilir. A gibi bir kümenin bütün

elemanları aynı zamanda B gibi bir kümenin bütün elemanlarıysa A, B 'nin alt kümesidir ve bu durum $A \subset B$ ile gösterilir. Her küme kendisinin ve evrensel kümenin bir alt kümesidir. Eğer A kümesi ve B kümesi birbirlerinin alt kümeleri iseler bu iki kümeye eşit küme de denir ve $A = B$ ile gösterilir. Hiçbir elemanı olmayan kümeye boş küme denir ve $\emptyset$ ile gösterilir. Yalnız A kümesine ait olmayan tüm elemanlara sahip kümeye de A kümesinin tümleyeni denir ve $\bar{A}$ ile gösterilir.

Bir a elemanın A kümesinin elemanı olup olmadığı karakteristik fonksiyonunu (üyelik fonksiyonu) kullanılarak,

$$\mu_A(a): X \rightarrow \{0,1\}$$

şeklinde ifade edebiliriz. Bu ifade evrensel kümeden, $\{0,1\}$ kümesine bir fonksiyon olarak da tanımlanabilir.

Klasik küme operatörleri:

Birleşim: $A \cup B: \{a \mid a \in A \text{ veya } a \in B\}$

Kesişim: $A \cap B: \{a \mid a \in A \text{ ve } a \in B\}$

Klasik küme operatörlerinin özellikleri:

$$\overline{(\bar{A})} = A$$

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cup A = A$$

$$A \cap A = A$$

$$A \cup (A \cap B) = A$$

$$A \cap (A \cup B) = A$$

$$A \cup (\bar{A} \cap B) = A \cup B$$

$$A \cap (\bar{A} \cup B) = A \cap B$$

$$A \cup X = X$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$A \cup \emptyset = A$$

$$A \cap X = A$$

$$A \cap \bar{A} = \emptyset$$

$$A \cup \bar{A} = X$$

$$\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

$$\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

3.3. Bulanık Mantık Teorisi

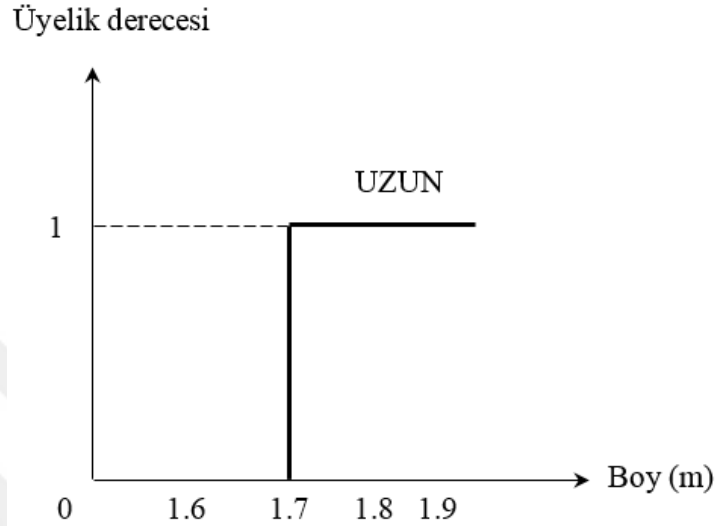
Bulanık mantık kuramının temelini bulanık kümeler oluşturmaktadır. Bulanık kümeler sınırları kesin hatlarla belirli olmayan kümelerdir. Kesin sınırlara sahip olmadıklarından kavramlar matematiksel olarak kolayca ifade edilemezler. Bu nedenle karmaşık sistemleri kontrol etmek oldukça zordur. Bulanık mantık bu zorluğa göre daha belirleyici bir tanımlama olanağına sahiptir. Günlük yaşantıda birçok şeyin net olmaması bulanık küme anlayışıyla günlük yaşam anlayışının yakınlığını ortaya çıkarmaktadır.

Bulanık kümeler kuramı, belirsiz ortamlarda doğru karar vermeyi sağlayan, mühendislikte ve diğer bilim dallarında geniş uygulama alanına sahip bir kuramdır. Birden fazla doğruluk değerine sahip olan bulanık kümeler pek çok bakımdan belirsiz olan seçim süreçlerine matematiksel açıdan bir kesinlik kazandıran kavram ve yöntemler bütünüdür (Konaçoğlu, 2017).

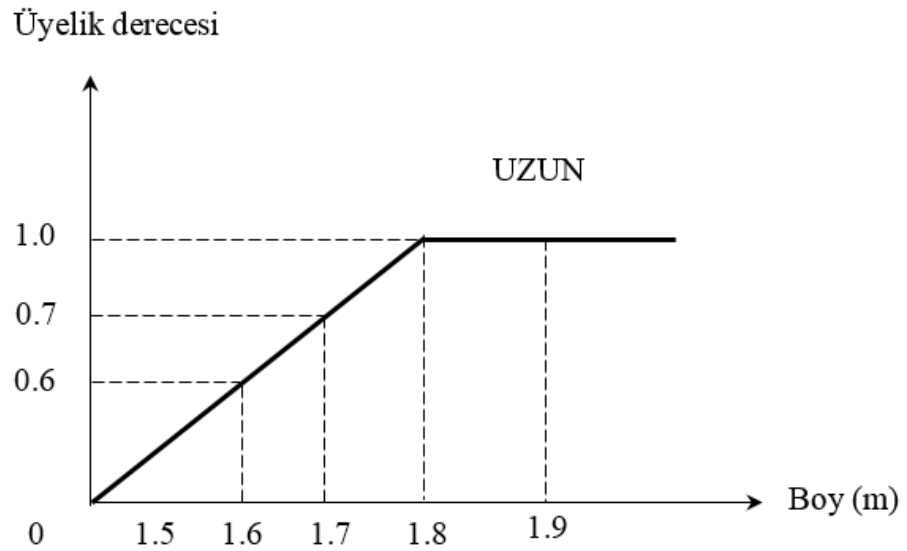
Klasik küme teorisinde belirsiz eleman diye bir şey söz konusu değildir. Bir eleman ya verilen kümeye aittir ya da bütünüyle kümenin dışındadır. Bundan yola çıkarak klasik kümelerde bir elemanın alabileceği üyelik (aitlik) değeri ya 0 ya da 1'dir. Bulanık kümeler ise değişik üyelik derecelerine sahip elemanları olan bir küme türüdür. Böylelikle bir küme, elemanlarının her birine 0 ile 1 arasında üyelik değeri atayabilen bir üyelik fonksiyonu ile karakterize edilebilir. Bulanık kümeye tam dâhil olan elemanların üyelik değerleri 1, kümeye dâhil olmayan elemanların üyelik değerleri 0 olarak atanmaktadır. Bulanık kümeye dâhil olup olmadıkları belirsiz olan elemanlara ise belirsizlik durumlarına göre 0 ile 1 arasında değerler atanır (Altaş, 1999). Örneğin “Uzun boylu kime denir?” sorusuna verilecek olan cevaba karşılık bir UZUN alt kümesini, klasik mantık ve bulanık mantığa göre tanımlayalım. Şekil 3.1’de görüldüğü üzere klasik küme mantığına göre 160 cm. boyundaki bir kişi uzun boylu insanlar kümesine dâhil değildir. Hatta 169 cm. boyundaki bir kişi dahi uzun boylu insanlar kümesi içinde değildir. Şekil

3.2’de bulanık küme grafiği incelendiğinde, bulanık mantığa göre 160 cm. boyundaki kişiye kısa denilemez. Çünkü kısmen de olsa uzun boylu insanlar kümesine dâhildir.

Bulanık mantıkta 160 cm boyundaki biri 0.6 üyelik derecesiyle, 170 cm. boyundaki biri 0.7 üyelik derecesiyle, 180 cm. boyundaki biri de 1.0 üyelik derecesiyle uzun boylu olabilir



Şekil 3.1. Klasik küme



Şekil 3.2. Bulanık küme

Verilen örnekteki gibi birinin uzun boylu olması, bulanık küme mantığında derecelerine ayrılabilir. Büyük üyelik dereceleri az bulanık kabul edilirken, küçük üyelik dereceleri daha bulanık olarak kabul edilir (Çobanoğlu, 2000).

3.4. Bulanık Kümelerin Gösterimleri

Bulanık kümeler de klasik kümeler gibi iki yöntemle gösterilirler. Bu yöntemlerden ilki küme elemanlarının üyelik derecelerine göre sıralanması, ikincisi de matematiksel olarak üyelik fonksiyonu tanımlamak şeklindedir. Bulanık kümelerde üyelik dereceleri arasındaki geçiş yumuşak ve sürekli. Elemanlar kümeye kısmi derecede aittir.

X , elemanları “ x ” ile gösterilen evrensel küme olarak tanımlansın. X ’in klasik bir alt kümesi olan A için üyelik, μ_A karakteristik fonksiyonu ile gösterilir ve $\{0,1\}$ olarak değişmektedir:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{Eğer } x \in A \text{ ise} \\ 0, & \text{Aksi halde} \end{cases}$$

Ancak küme değerinin $[0,1]$ aralığında olmasına izin verilirse, $\tilde{A}$ kümesi “Bulanık Küme” olarak isimlendirilir. $\mu_{\tilde{A}}(x)$, x ’in $\tilde{A}$ kümesi içindeki üyelik derecesidir ve $\mu_{\tilde{A}}(x)$ ’in 1’e yakın değerleri için x ’in $\tilde{A}$ kümesine üyeliği artar. $\mu_{\tilde{A}}(x)$ ’in 0’a yakın değerleri içinde x ’in $\tilde{A}$ kümesine üyeliği azalır (Zadeh, 1965).

Üyelik fonksiyonu grafiğinde x eksen üyeleri gösterirken, y eksen de üyelik derecelerini göstermektedir. $\tilde{A}$ bulanık kümesi, $\mu_{\tilde{A}}: X \rightarrow [0,1]$ $\tilde{A}$ ’nın üyelik fonksiyonu ve $\mu_{\tilde{A}}(x) \in [0,1]$, $x \in X$ ’in $\tilde{A}$ daki üyelik derecesi olmak üzere;

$$\tilde{A} = \{(\mu_{\tilde{A}}(x), x)\}$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu durumda X ’deki bulanık küme olan $\tilde{A}$;

$$\tilde{A} = \{(\mu_{\tilde{A}}(x), x)\} = \left\{ \frac{\mu_{\tilde{A}}(x)}{x} \right\}$$

$$\tilde{A} = \left\{ \frac{\mu_{\tilde{A}}(x_1)}{x_1} + \frac{\mu_{\tilde{A}}(x_2)}{x_2} + \dots + \frac{\mu_{\tilde{A}}(x_n)}{x_n} \right\} = \left\{ \sum_i \frac{\mu_{\tilde{A}}(x_i)}{x_i} \right\}, \quad i = (1, \dots).$$

X evreni sürekli ve sınırsız ise $\tilde{A}$ kümesi;

$$\tilde{A} = \left\{ \int \frac{\mu_{\tilde{A}}(x_i)}{x_i} \right\}$$

şeklinde ifade edilir. Her iki gösterimde de bölünme işareti asla bölmeyi göstermez, alttaki sayıya yani küme öğesine üstteki üyelik derecesinin karşılık geldiğini ifade etmektedir. $\sum$ ve $\int$ sembolleri de küme öğelerinin topluluğunu ifade etmektedir (Baykal ve Beyan,

2004).

Bulanık kümeler, bulanıklık ifade eden ya da bulanıklık algılanan sözel ifadelere ve bu ifadelerin alacağı şıklara göre şekillenirler. Bu sebeple bulanık küme üyelik dereceleri, klasik kümeler için evrensel kümede tanımlı elemanların üyelik dereceleri gibi kesinlik belirten sadece $\{0,1\}$ gibi değerleri ile değil, sürekli belirtilen ve $[0,1]$ aralığında üyelik dereceleri alan elemanlardan meydana gelmektedir.

3.4.1. Bulanık Küme Üzerinde İşlemler

X evrensel kümesinde tanımlı $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ bulanık kümelerinin üyelik fonksiyonları sırasıyla $\mu_{\tilde{A}}$ ve $\mu_{\tilde{B}}$ olsun. Birleşim, kesişim ve tümleyen gibi küme işlemleri, bulanık kümeler için üyelik fonksiyonları ile ifade edilir.

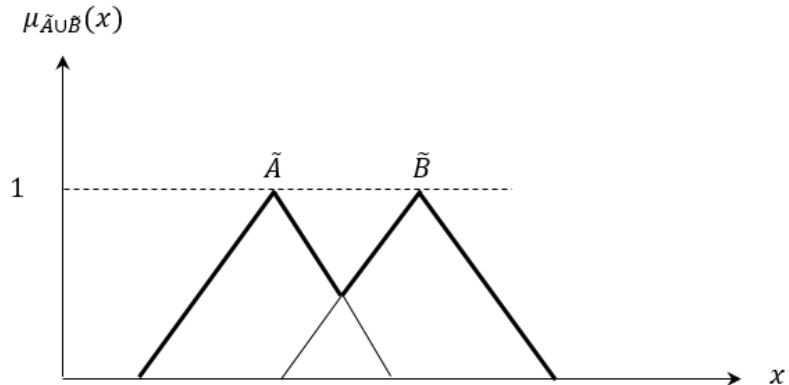
Bulanık kümeler klasik küme operatörlerinin bazı özelliklerini sağlamasına rağmen, klasik kümelerde temel olan iki karakteristiği; çelişmezlik ($\bar{A} \cap A = \emptyset$) ve üçünün olmazlığı ($\bar{A} \cup A = X$) durumlarını sağlamaz. Bunun nedeni A 'nın tümleyeninin sınırlarının bulanık olmasıdır (Baykal ve Beyan, 2004).

Birleşim:

X evrensel kümesinde tanımlı $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ bulanık kümelerine ait üyelik fonksiyonları sırasıyla $\mu_{\tilde{A}}(x)$ ve $\mu_{\tilde{B}}(x)$ olsun. İki bulanık kümenin birleşiminin üyelik fonksiyonu, bireysel üyelik fonksiyonlarının maksimumu olarak tanımlanır.

$$\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) = \max(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)), \quad \forall x \in X$$

Şekil 3.3' de $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ bulanık kümenin birleşimi gösterilmiştir.



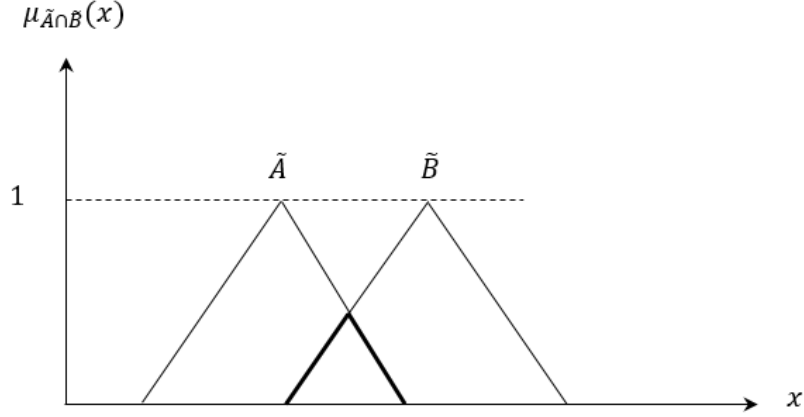
Şekil 3.3. Bulanık kümelerin birleşimi

Kesişim:

X evrensel kümesinde tanımlı $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ bulanık kümelerine ait üyelik fonksiyonları sırasıyla $\mu_{\tilde{A}}(x)$ ve $\mu_{\tilde{B}}(x)$ olsun. İki bulanık kümenin birleşiminin üyelik fonksiyonu, bireysel üyelik fonksiyonlarının minimumu olarak tanımlanır.

$$\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) = \min(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)), \forall x \in X$$

Şekil 3.4.' de $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ bulanık kümenin kesişimi gösterilmiştir.



Şekil 3.4. Bulanık kümenin kesişimi

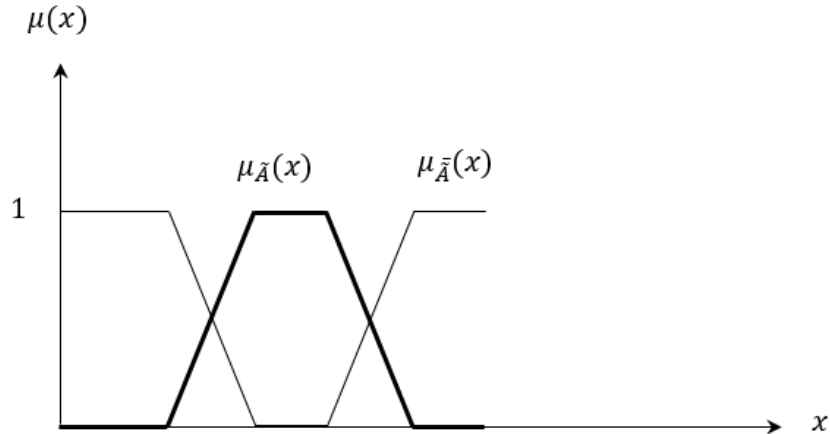
Tümleyen:

X evrensel kümesinde tanımlı $\tilde{A}$ bulanık kümesinin tümleyeni bulmak için bu kümenin elemanlarının üyelik dereceleri 1'den çıkarılmalıdır.

$\tilde{A}$ bulanık kümesinin tümleyeni $\tilde{\tilde{A}}$ ise şu şekilde bulunmaktadır:

$$\mu_{\tilde{\tilde{A}}}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x) \text{ veya } \mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{\tilde{A}}}(x) = 1$$

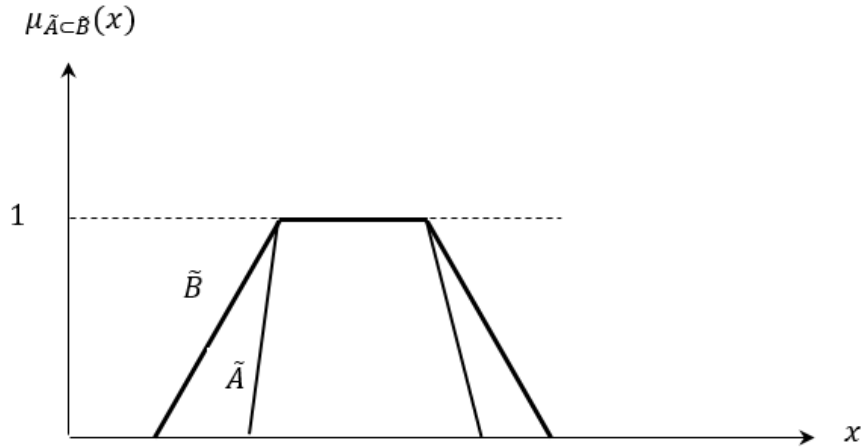
buradaki tümleyen “değil” bağlacına karşılık gelmektedir. Şekil 3.5.'de $\tilde{A}$ bulanık kümesinin tümleyeni gösterilmiştir.



Şekil 3.5. Bulanık kümenin tümleyeni

Kapsama:

X evrensel kümesinde tanımlı $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ bulanık kümelerine ait üyelik fonksiyonları sırasıyla $\mu_{\tilde{A}}(x)$ ve $\mu_{\tilde{B}}(x)$ olsun. $\forall x \in X$ için $\mu_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{\tilde{B}}(x)$ oluyorsa $\tilde{A}$ kümesi $\tilde{B}$ tarafından kapsanır denir ve $\tilde{A} \subset \tilde{B}$ ile ifade edilir. $\tilde{A}$ kümesinin $\tilde{B}$ kümesini kapsaması Şekil 3.6.'da olduğu gibidir.



Şekil 3.6. Bulanık kümenin kapsayıcı

Eşitlik:

X evrensel kümesinde tanımlı $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ bulanık kümelerine ait üyelik fonksiyonları sırasıyla $\mu_{\tilde{A}}(x)$ ve $\mu_{\tilde{B}}(x)$ olsun. $\forall x \in X$ için $\mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{B}}(x)$ oluyorsa $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ kümeleri eşittir denir ve $\tilde{A} = \tilde{B}$ ile gösterilir.

Fark:

X evrensel kümesinde tanımlı $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$ bulanık kümelerine ait üyelik fonksiyonları sırasıyla $\mu_{\tilde{A}}(x)$ ve $\mu_{\tilde{B}}(x)$ olsun. İki bulanık kümenin farkı şu şekilde tanımlanır;

$$\tilde{A}/\tilde{B} = \tilde{A} \cap \bar{\tilde{B}}$$

$$\mu_{\bar{\tilde{B}}}(x) = 1 - \mu_{\tilde{B}}(x) \text{ olduğundan,}$$

$$\mu_{\tilde{A} \cap \bar{\tilde{B}}}(x) = \min[\mu_{\tilde{A}}(x), 1 - \mu_{\tilde{B}}(x)]$$

olarak elde edilir.

3.5. Üyelik Fonksiyonları

Bir elemanın bir kümeye hangi derecede ait olduğunu bulabilmek için üyelik fonksiyonlarına ihtiyaç duyulmaktadır. Üyelik fonksiyonları üzerinde çalışılan elemanın

karakteri hakkında bilgi edinmemizi sağlayan, bulanık problemlerin daha kolay çözülmesi için kullanılan matematiksel modellerdir.

3.5.1. Üyelik Fonksiyon Çeşitleri

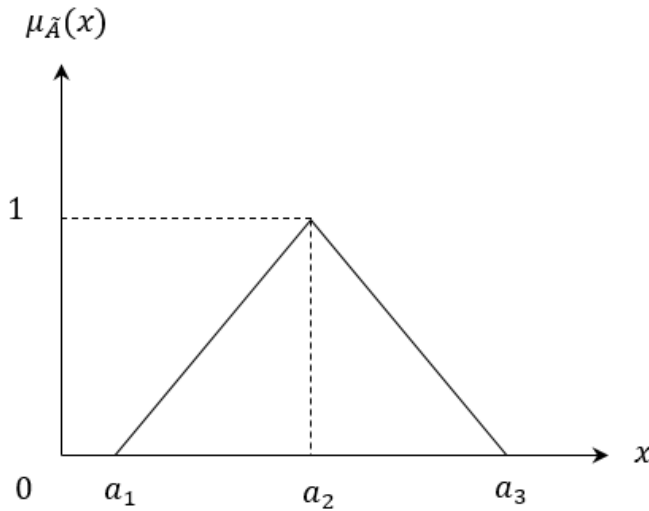
Birçok farklı üyelik fonksiyonu olmakla beraber en yaygın kullanılanları; üçgen üyelik fonksiyonu, yamuk üyelik fonksiyonu, Gaussian Üyelik Fonksiyonu ve çan eğrisi üyelik fonksiyonudur.

Üçgen Üyelik Fonksiyonu

Üçgen üyelik fonksiyonu üç parametre ile tanımlanmaktadır. Bu parametreler a_1 , a_2 ve a_3 olsun. Burada a_2 parametresi üyelik fonksiyonunun merkezini oluşturmaktadır. Üçgen üyelik fonksiyonunun sınırları a_1 ve a_3 değerleri arasında bulunmaktadır. Üçgen üyelik fonksiyonunun matematiksel olarak ifadesi şu şekildedir:

$$\mu_{\tilde{A}}(x; a_1, a_2, a_3) = \begin{cases} a_1 \leq x \leq a_2 & \text{ise } \frac{x - a_1}{a_2 - a_1} \\ a_2 \leq x \leq a_3 & \text{ise } \frac{a_3 - x}{a_3 - a_2} \\ x > a_3 \text{ veya } x < a_1 & \text{ise } 0 \end{cases}$$

Üçgen üyelik fonksiyonunun grafiği Şekil 3.7' de görüldüğü gibidir:



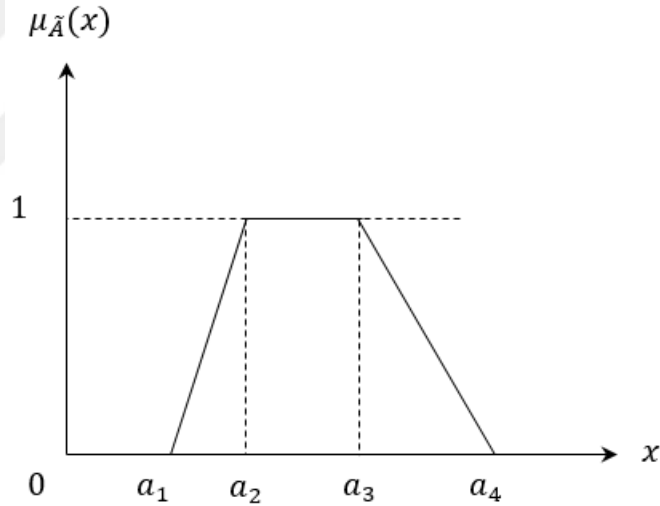
Şekil 3.7. Üçgen üyelik fonksiyonu

Yamuk Üyelik Fonksiyonu

Yamuk üyelik fonksiyonu dört parametre ile tanımlanmaktadır. Bu parametreler a_1 , a_2 , a_3 ve a_4 olsun. Yamuk üyelik fonksiyonu üçgen üyelik fonksiyonunun özel bir halidir. Yamuk üyelik fonksiyonunda sınırlar $a_1 - a_2$ ve $a_3 - a_4$ arasında kalmaktadır. Yamuk üyelik fonksiyonunun matematiksel olarak ifadesi şu şekildedir:

$$\mu_{\tilde{A}}(x: a_1, a_2, a_3, a_4) = \begin{cases} a_1 \leq x \leq a_2 \text{ ise } \frac{x - a_1}{a_2 - a_1} \\ a_2 \leq x \leq a_3 \text{ ise } 1 \\ a_3 \leq x \leq a_4 \text{ ise } \frac{a_4 - x}{a_4 - a_3} \\ x > a_4 \text{ veya } x < a_1 \text{ ise } 0 \end{cases}$$

Yamuk üyelik fonksiyonunun grafiği Şekil 3.8’ de görüldüğü gibidir:



Şekil 3.8. Yamuk üyelik fonksiyonu

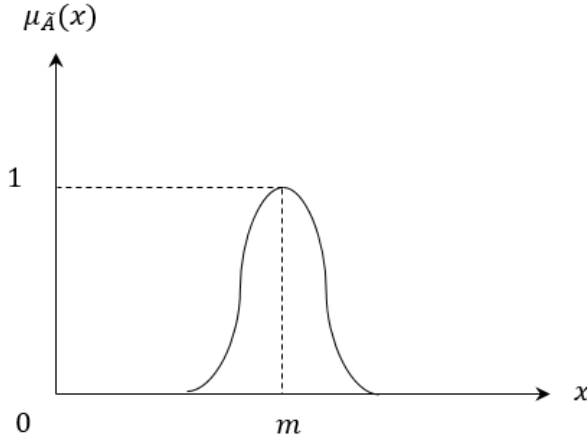
Gaussian Üyelik Fonksiyonu

Gaussian üyelik fonksiyonu m ve σ parametreleriyle belirtilirler.

$$\mu_{\tilde{A}}(x: m, \sigma) = \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Burada m fonksiyon merkezini belirtirken σ da fonksiyonun genişliğini ifade eder. σ değeri değiştirilerek fonksiyonun biçimi de değiştirilebilir. σ küçüldükçe üyelik fonksiyonu daha ince olurken, σ büyüdükçe üyelik fonksiyonu gittikçe yayvanlaşacaktır

(Yen ve Langari, 1999). Gaussian üyelik fonksiyonunun grafiği Şekil 3.9’ de görüldüğü gibidir:



Şekil 3.9. Gaussal üyelik fonksiyonu

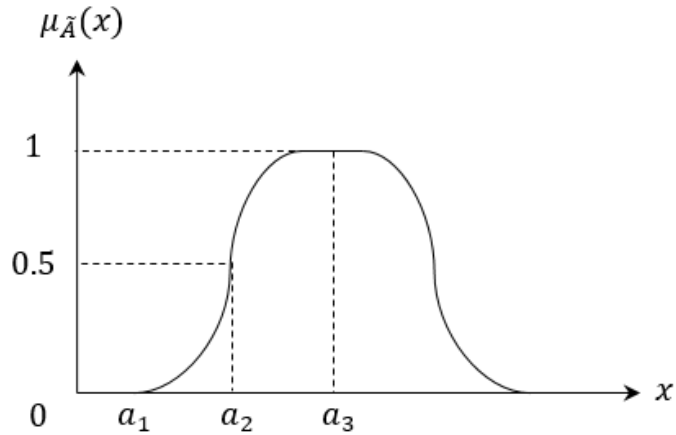
Çan Eğrisi Üyelik Fonksiyonu

Çan eğrisi üyelik fonksiyonu üç parametre ile tanımlanmaktadır.

$$\mu_{\tilde{A}}(x: a_1, a_2, a_3) = \left\{ \frac{1}{1 + \left| \frac{x - a_3}{a_1} \right|^{2a_2}} \right\}$$

burada a_2 parametresi genellikle pozitif değer almaktadır. a_1 ve a_3 değerlerinde değişiklik yapılarak fonksiyonun genişliği ve merkezi değiştirilebilmekte ve a_2 değeri geçiş noktalarındaki eğimi kontrol etmek için kullanılır.

Çan eğrisi üyelik fonksiyonunun grafiği Şekil 3.10’ da görüldüğü gibidir:



Şekil 3.10. Çan eğrisi üyelik fonksiyonu

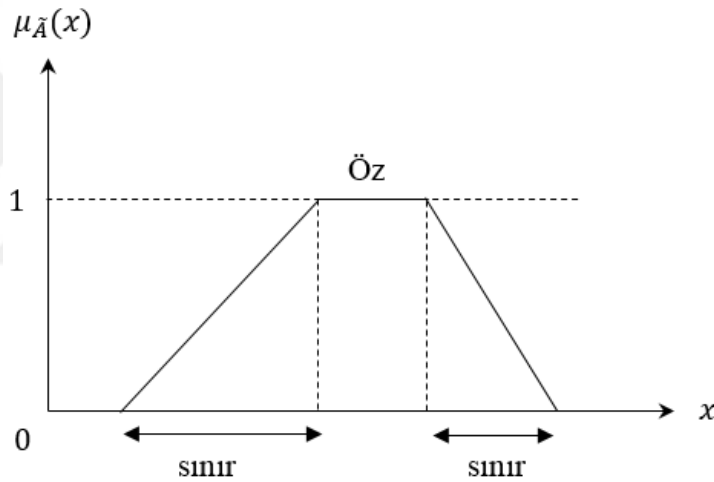
3.5.2. Üyelik Fonksiyonlarının Kısımları

Bir üyelik fonksiyonu öz, dayanak (destek), sınırlar olmak üzere üç kısımdan oluşmaktadır.

X evreninde tanımlı bir bulanık $\tilde{A}$ alt kümesinin elemanlarının üyelik derecesi 1'e eşit ise "öz", $\tilde{A}$ bulanık kümesinin tüm elemanlarını içeren aralığa "dayanak" (destek) ve üyelik dereceleri 1 veya 0'a eşit olmayanların oluşturduğu kısımlara ise üyelik fonksiyonunun "sınırları" veya "geçiş bölgeleri" denir.

Öz, dayanak (destek) ve sınır kavramlarının matematiksel gösterimi;

$\mu_{\tilde{A}}(x) \rightarrow \text{Öz}, \quad \mu_{\tilde{A}}(x) > 0 \rightarrow \text{Dayanak}, \quad 0 < \mu_{\tilde{A}}(x) < 1 \rightarrow \text{Sınırlar}$ şeklindedir. Şekil 3.11.' de üyelik fonksiyonlarının kısımları belirtilmiştir.



Şekil 3.11. Üyelik fonksiyonunun kısımları

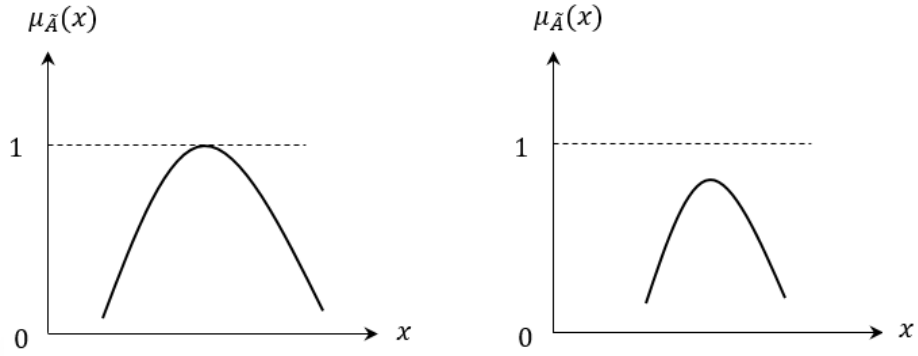
3.5.3. Bulanık Kümeler için Bazı Tanımlamalar

Bu kısımda bulanık kümelerle ilgili normallik, α kesim kümesi dışbükeylik, geçiş noktası ve düzey kümesi gibi kavramlar açıklanacaktır.

Normallik:

En az bir tane üyelik derecesi 1'e eşit olan kümeye normal bulanık küme denir. Aksi takdirde küme 'normal altı' olarak tanımlanır. Bulanık kümenin yüksekliği üyelik derecesinin en büyük olduğu öğeye karşılık gelir. O halde normal bulanık kümenin

yüksekliği 1'e eşittir. Normal olmayan bulanık kümeleri normal bulanık küme haline dönüştürebilmek için (dışbükey olmaları şartı ile), kümenin üyelik derecesinin, en büyük üyelik derecesine bölünmesi gerekir (Baykal ve Beyan, 2004). Şekil 3.12' de normal ve normal olmayan bulanık kümeler gösterilmiştir.



Şekil 3.12. Normal ve normal olmayan bulanık kümeler

α Kesim Kümesi:

α kesim kümesi, $\tilde{A}_\alpha$ üyelikleri α dan az olmayan üyelerden kurulmuştur. Burada α keyfi bir değerdir.

$$\tilde{A}_\alpha = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}$$

Yukarıdaki gösterimde $\geq$ yerine $>$ oluyorsa, buna güçlü α kesim kümesi denir. Örneğin boyla (uzunluk) alakalı olarak bir evrensel küme tanımlayalım. $X = \{1.70, 1.80, 1.90, 2.00\}$ ve erkekleri tanımlayan bir küme olsun. Bulanık kümeleri ise kısa boy, orta boy, uzun boy olarak sınıflandıırırsak bunların üyelik dereceleri de aşağıdaki Çizelge 3.1' deki gibi olsun.

Çizelgeye bakarak aşağıdaki yorumlar yapılabilir.

Çizelge 3.1. Bulanık kümelerin sınıflandırılması ve üyelik dereceleri

Boy (m)	Kısa Boy	Orta Boy	Uzun Boy
1.70	0.0	1.0	0.3
1.80	0.0	0.8	0.7
1.90	0.0	0.0	1.0
2.00	0.0	0.0	1.0

Orta boy bulanık kümesinin desteği;

$$\text{Destek(orta boy)} = \{1.70, 1.80\}$$

dir. Kısa boy kümesinin desteği boş kümedir. Orta boy ve uzun boy kümeleri normaldir. Çünkü en az 1 tam üyelik derecesine sahip elemanları vardır. $\alpha = 0.4$ olursa uzun boy kümesinin α kesim kümesi

$$\text{Uzun boy}_{0.4} = \{1.80, 1.90, 2.00\}$$

olacaktır. Bunun anlamı 0.4 ve daha fazla olasılıkla orta boy olanların kümesi demektir. $\alpha = 0.8$ olursa,

$$\text{Uzun boy}_{0.8} = \{1.90, 2.00\}$$

şeklinde olacaktır.

$\tilde{A}_{\alpha_1}$ ve $\tilde{A}_{\alpha_2}$ şeklinde iki kesim kümesi varsa $\alpha_1 \subseteq \alpha_2$ ise $\tilde{A}_{\alpha_1} \subseteq \tilde{A}_{\alpha_2}$ dir. Yukarıdaki örnekte $\text{Uzun boy}_{0.4} \subseteq \text{Uzun boy}_{0.8}$ olmaktadır.

Dışbükeylik:

Eğer üyelik fonksiyonu vadi şeklinde değilse bu bulanık küme dışbükeydir. X evreninde $\tilde{A}$ gibi bir bulanık küme tanımlansın. $\tilde{A}$ dışbükeyse;

$$\mu_{\tilde{A}}(\lambda a + (1 - \lambda)b) \geq \min\{\mu_{\tilde{A}}, \mu_{\tilde{A}}\}$$

$\forall a, b \in X$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ bu koşullarda $[a, b]$ aralığında verilen elemanların üyelik değerleri her iki noktanın üyelik değerlerinden az olamaz (Kosko, 1992).

Geçiş Noktası:

Bulanık kümelerin üyelik fonksiyonlarında üyelik derecelerinin 0.5'e eşit olması halindeki noktaya "geçiş noktası" denir ve;

$$\text{Geçiş noktası} \rightarrow \mu_{\tilde{A}}(x) = 0.5$$

şeklinde matematiksel olarak ifade edilir.

Düzey Kümesi:

Üyelik fonksiyon değerini açıkça gösteren α değeri $[0,1]$ aralığındadır. Düzey kümesi α ile elde edilebilir.

$$\tilde{A}_\alpha = \{x | \mu_{\tilde{A}}(x) = \alpha, \alpha \geq 0, x \in X\}$$

şeklinde gösterilir.

3.5.4. Bulanık Kümelerin Büyüklüğü

Bulanık sayının büyüklüğünü göstermede bulanık kümenin önemini değerlendirmek için kullanılan üç yöntem vardır.

Bu yöntemlerden ilki üyelik değerlerinin toplamı ile büyüklüğün elde edilmesidir. Buna skalar nicellik denir.

$$|\tilde{A}| = \sum_{x \in X} \mu_{\tilde{A}}(x)$$

İkinci olarak evrensel küme ile bulanık kümenin büyüklüğü oranlanır. Buna Bağlı nicellik denir.

$$||\tilde{A}|| = \frac{|\tilde{A}|}{|X|}$$

Üçüncü yöntemde bulanık küme olarak asallığın açıklanmasıdır. Bunun için kesim kümesi olarak $\tilde{A}_\alpha$ yı ele alalım. $\tilde{A}_\alpha$ nın eleman sayısı $|\tilde{A}_\alpha|$ dır. Diğer bir deyişle $\tilde{A}$ da elemanların $|\tilde{A}_\alpha|$ olma olasılığı α dır. Bulanık nicellik $||\tilde{A}||$ nın üyelik değeri olarak tanımlanır ve $\alpha \in \tilde{A}_A$ olmak üzere;

$$\mu_{||\tilde{A}||}(|\tilde{A}_\alpha|) = \alpha$$

ile hesaplanır. $\tilde{A}_\alpha$ bir alfa kesim kümesi ve $\tilde{A}_A$ bir düzey kümesidir (Baykal ve Beyan, 2004).

3.6. Bulanık Sayılar

X evrensel kümesinde bulanık $\tilde{A}$ kümesi aşağıda verilen koşulları sağladığında, R üzerinde bir bulanık sayı olarak adlandırılır.

- $\mu_{\tilde{A}}(x) = 1$ olacak şekilde en az bir $x \in R$ içerir.
- Herhangi bir $\alpha \in [0,1]$ için $\tilde{A} = \{x: \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}$ kümesi R üzerinde bir konveks kümedir (Wu, 1997).
- $\tilde{A}$, R üzerinde bir bulanık sayı olsun. Eğer herhangi bir $\alpha \in [0,1]$ için $\tilde{A}_\alpha$ sınırlı bir küme ise $\tilde{A}$, R üzerinde sınırlı bir bulanık sayıdır denir.
- $\tilde{A}$, R üzerinde bir bulanık sayı olsun. Herhangi bir $\alpha \in [0,1]$ için eğer $\{X_n\} \subset \tilde{A}_\alpha$ $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = x$ olduğunda, $x \in \tilde{A}_\alpha$ ise $\tilde{A}$, R üzerinde kapalı bulanık sayıdır denir.
- $\tilde{A}$ normal konveks bulanık küme ve $\mu_{\tilde{A}}$ birebir olduğunda $\tilde{A}_\alpha$ ya standart bulanık sayı denir.

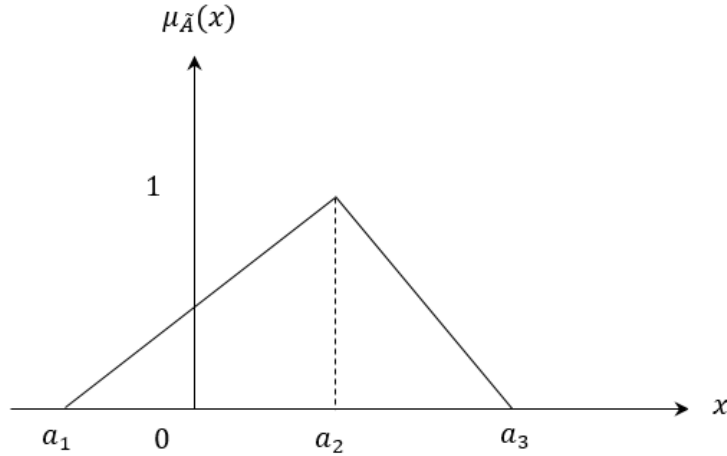
Ele alınan konuya göre değişik bulanık sayılar kullanmak mümkündür. Genel olarak pratik uygulamalarda kullanılan üçgen ve yamuk olmak üzere iki tane bulanık sayı söz konusudur.

3.6.1. Üçgen Bulanık Sayılar

Üçgen bulanık sayılar, üç tane gerçek sayılarla tanımlanmış bulanık sayıların özel bir çeşididir. (a_1, a_2, a_3) şeklinde ifade edilir. a_1, a_2 ve a_3 parametreleri sırasıyla; en küçük olası değeri, olası değeri, en büyük olası değeri göstermektedir. a_1 ve a_3 parametreleri bulanık küme desteğinin alt ve üst sınır değerleri, a_2 parametresi ise tam üyelikli tek sayı olmak üzere üçgen bulanık sayının tanımı;

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x: a_1, a_2, a_3) = \begin{cases} a_1 \leq x \leq a_2 & \text{ise } \frac{x - a_1}{a_2 - a_1} \\ a_2 \leq x \leq a_3 & \text{ise } \frac{a_3 - x}{a_3 - a_2} \\ x > a_3 \text{ veya } x < a_1 & \text{ise } 0 \end{cases}$$

olarak yapılabilir. Üçgen bulanık sayılar Şekil 3.13' deki gibi gösterilirler.



Şekil 3.13. $\tilde{A} = [a_1, a_2, a_3]$ üçgen bulanık sayı

Bir üçgen bulanık sayı α kesmeleri (güven aralığı) ile gösterilebilir. $\forall \alpha \in [0,1]$ ve $a_1^\alpha, a_3^\alpha \in R$ için;

$$\alpha = \frac{a_1^\alpha - a_1}{a_2 - a_1} \Rightarrow a_1^\alpha = (a_2 - a_1)\alpha + a_1$$

$$\alpha = (a_3 - a_3^\alpha)/(a_3 - a_2) \Rightarrow a_3^\alpha = -(a_3 - a_2)\alpha + a_3$$

$$\tilde{A}_\alpha = [a_1^\alpha, a_3^\alpha] = [(a_2 - a_1)\alpha + a_1, -(a_3 - a_2)\alpha + a_3]$$

elde edilmiş olur.

Üçgen bulanık sayılarda aritmetik işlemler α kesimleri kullanılarak veya aralık sayı işlemleri kullanılarak yapılabilir.

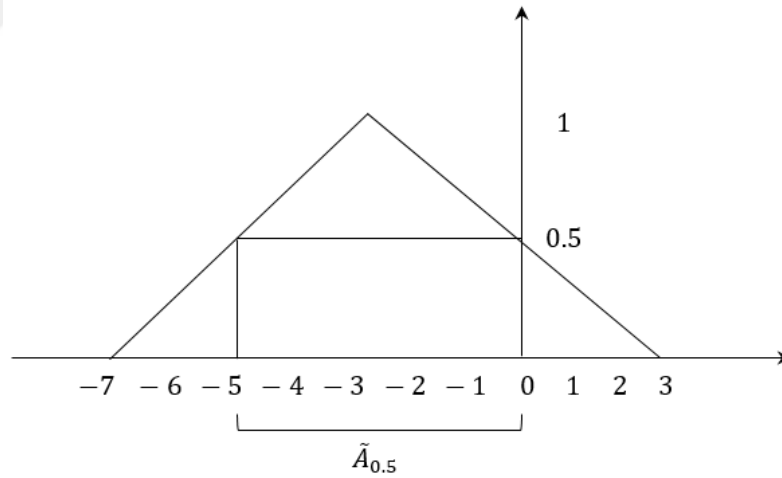
Örnek olarak üçgen bulanık sayı $\tilde{A} = (-7, -3, 3)$, üyelik fonksiyonu;

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} -7 \leq x \leq -3 & \text{ise } \frac{x+7}{4} \\ -3 \leq x \leq 3 & \text{ise } \frac{3-x}{6} \\ x > 3 \text{ veya } x < -7 & \text{ise } 0 \end{cases}$$

dır. Bu bulanık sayıdan α kesim düzey aralığı;

$$\frac{x+7}{4} = \alpha \Rightarrow x = 4\alpha - 7$$

$$\frac{3-x}{6} = \alpha \Rightarrow x = -6\alpha + 3$$



$$\tilde{A}_\alpha = [a_1^\alpha, a_3^\alpha] = [4\alpha - 7, -6\alpha + 3]$$

dır. $\alpha = 0.5$ olarak alınarak $\tilde{A}_{0.5}$ hesaplanırsa;

$$\tilde{A}_{0.5} = [a_1^{0.5}, a_3^{0.5}] = [-5, 0]$$

olarak elde edilir.

3.6.1.1 Üçgen Bulanık Sayılarda İşlemler

Üçgen bulanık sayılarda işlem yaparken dikkate alınması gereken bazı özellikler vardır. Bu özelliklerden bir tanesi toplama ve çıkarma işlemleri ile ilgilidir. İki üçgen bulanık sayının toplama ve çıkarma işlemlerinin sonucu yine bir üçgen bulanık sayıdır. Diğer bir özellik ise; üçgen bulanık sayılarda çarpma, bölme ve ters işlem sonuç olarak her zaman üçgen bulanık sayı vermez.

$\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3)$ ve $\tilde{B} = (b_1, b_2, b_3)$ iki üçgen bulanık sayı ve k da pozitif bir reel sayı olmak üzere:

Toplama işlemi:

$$\begin{aligned}\tilde{A} \oplus \tilde{B} &= (a_1, a_2, a_3) \oplus (b_1, b_2, b_3) \\ &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)\end{aligned}$$

Çıkarma işlemi:

$$\begin{aligned}\tilde{A} \ominus \tilde{B} &= (a_1, a_2, a_3) \ominus (b_1, b_2, b_3) \\ &= (a_1 - b_3, a_2 - b_2, a_3 - b_1)\end{aligned}$$

Çarpma işlemi:

$$\begin{aligned}\tilde{A} \otimes \tilde{B} &= (a_1, a_2, a_3) \otimes (b_1, b_2, b_3) \\ &= (a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2, a_3 \cdot b_3)\end{aligned}$$

Sabit sayılarla çarpma işlemi:

$$\begin{aligned}\tilde{A} \otimes k &= (a_1, a_2, a_3) \otimes k \\ &= (a_1 \cdot k, a_2 \cdot k, a_3 \cdot k)\end{aligned}$$

Bölme işlemi:

$$\begin{aligned}\tilde{A} \oslash \tilde{B} &= (a_1, a_2, a_3) \oslash (b_1, b_2, b_3) \\ &= (a_1 / b_3, a_2 / b_2, a_3 / b_1)\end{aligned}$$

Ters işlem:

$$\tilde{A}^{-1} = (a_1, a_2, a_3)^{-1} = (1/a_3, 1/a_2, 1/a_1)$$

olarak tanımlanır. Burada “ $\oplus$ ” bulanık toplama işlemini, “ $\ominus$ ” bulanık çıkarma işlemini, “ $\otimes$ ” bulanık çarpma işlemini ve “ $\oslash$ ” bulanık bölme işlemini göstermektedir.

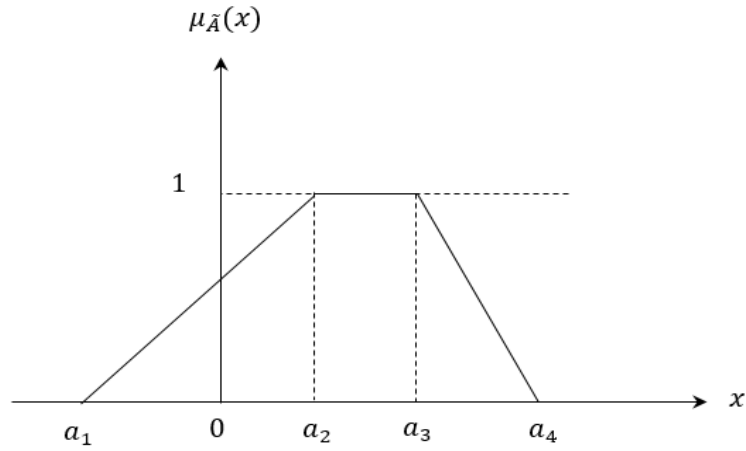
3.6.2. Yamuk Bulanık Sayılar

Yamuk bulanık sayı en sık kullanılan bulanık sayı çeşitlerindendir. Yamuk bulanık sayıların daha sık kullanılma nedeni üçgen bulanık sayıların yamuk bulanık sayıların özel bir şekli olması ve sözel değişkenlerle kolay kavranabilir olmasıdır.

Yamuk bulanık sayılar (a_1, a_2, a_3, a_4) olmak üzere dört parametre ile tanımlanırlar. a_1 ve a_4 ; bulanık küme desteğinin alt ve üst sınır değerleri ve a_2 ve a_3 ; tam üyelikli sayıların kümesinin sınırlarını göstermek üzere;

$$\mu_{\tilde{A}}(x: a_1, a_2, a_3, a_4) = \begin{cases} a_1 \leq x \leq a_2 & \text{ise } \frac{x - a_1}{a_2 - a_1} \\ a_2 \leq x \leq a_3 & \text{ise } 1 \\ a_3 \leq x \leq a_4 & \text{ise } \frac{a_4 - x}{a_4 - a_3} \\ x > a_4 \text{ veya } x < a_1 & \text{ise } 0 \end{cases}$$

şeklinde ifade edilirler. Yamuk bulanık sayılar Şekil 3.14' deki gibi gösterilirler.



Şekil 3.14. $\tilde{A} = [a_1, a_2, a_3, a_4]$ yamuk bulanık sayı

Bir üçgen bulanık sayı α kesmeleri (güven aralığı) ile ifade edilebilir. $\forall \alpha \in [0,1]$ ve $a_1^\alpha, a_4^\alpha \in R$ için;

$$\alpha = \frac{a_1^\alpha - a_1}{a_2 - a_1} \Rightarrow a_1^\alpha = (a_2 - a_1)\alpha + a_1$$

$$\alpha = \frac{a_4 - a_4^\alpha}{a_4 - a_3} \Rightarrow a_4^\alpha = -(a_4 - a_3)\alpha + a_4$$

$$\tilde{A}_\alpha = [a_1^\alpha, a_4^\alpha] = [(a_2 - a_1)\alpha + a_1, -(a_4 - a_3)\alpha + a_4]$$

dir. Burada $a_2 = a_3$ olduğunda sayının üçgen bulanık sayı olduğu açıkça görülmektedir.

3.6.2.1 Yamuk Bulanık Sayılarda İşlemler

Yamuk bulanık sayılarla yapılan toplama ve çıkarma işlemlerinin sonucu yine bir yamuk bulanık sayıdır. Çarpma, bölme ve tersine çevirme işlemlerinde sonucun yine yamuk bulanık sayı olma zorunluluğu yoktur.

$\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ ve $\tilde{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ iki üçgen bulanık sayı ve k da pozitif bir reel sayı olmak üzere:

Toplama işlemi:

$$\begin{aligned}\tilde{A} \oplus \tilde{B} &= (a_1, a_2, a_3, a_4) \oplus (b_1, b_2, b_3, b_4) \\ &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, a_4 + b_4)\end{aligned}$$

Çıkarma işlemi:

$$\begin{aligned}\tilde{A} \ominus \tilde{B} &= (a_1, a_2, a_3, a_4) \ominus (b_1, b_2, b_3, b_4) \\ &= (a_1 - b_4, a_2 - b_3, a_3 - b_2, a_4 - b_1)\end{aligned}$$

Çarpma işlemi:

$$\begin{aligned}\tilde{A} \otimes \tilde{B} &= (a_1, a_2, a_3, a_4) \otimes (b_1, b_2, b_3, b_4) \\ &= (a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2, a_3 \cdot b_3, a_4 \cdot b_4)\end{aligned}$$

Sabit sayılarla çarpma işlemi:

$$\begin{aligned}\tilde{A} \otimes k &= (a_1, a_2, a_3, a_4) \otimes k \\ &= (a_1 \cdot k, a_2 \cdot k, a_3 \cdot k, a_4 \cdot k)\end{aligned}$$

Bölme işlemi:

$$\begin{aligned}\tilde{A} \oslash \tilde{B} &= (a_1, a_2, a_3, a_4) \oslash (b_1, b_2, b_3, b_4) \\ &= (a_1/b_4, a_2/b_3, a_3/b_2, a_4/b_1)\end{aligned}$$

Ters işlem:

$$\tilde{A}^{-1} = (a_1, a_2, a_3, a_4)^{-1} = (1/a_4, 1/a_2, 1/a_3, 1/a_1)$$

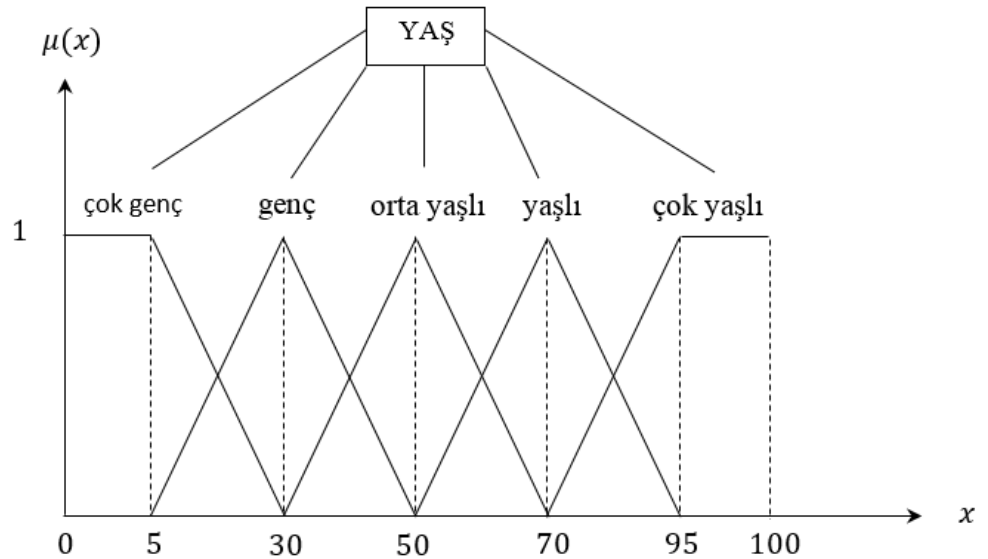
olarak tanımlanır. Burada “ $\oplus$ ” bulanık toplama işlemini, “ $\ominus$ ” bulanık çıkarma işlemini, “ $\otimes$ ” bulanık çarpma işlemini ve “ $\oslash$ ” bulanık bölme işlemini göstermektedir.

3.7. Sözel Değişkenler

Gerçek hayatta bazı kelimelerin anlamı karmaşıklık ve belirsizlik gösterebildiği için, dilsel bir değişkenin bulanık kümelerle dayanarak tanımlanması gerekir. Sözel değişkenler, kesin bir şekilde ifade edilemeyen kavramların yaklaşık olarak nitelendirilmesini sağlar. Böylece sözel değişkenler, sözel ifadeleri matematiksel olarak ifade edebilmek için bulanık kümelerin kullanımlarını gerektiren bir araç haline gelirler (Özkan, 2003).

Değerlerini konuşma dilinden alan kelime ve cümlelere sözel değişkenler denilir. Sözel değişkenleri daha iyi analiz edebilmek için doğal dilde yaş kelimesini ele alalım. Yaş kelimesi bir sözel değişkendir ve değerleri; çok genç, genç, orta yaşlı, yaşlı, çok yaşlı gibi kelimelerle tanımlanır. Bu değerlere sözel değişken yaşı terimleri olarak nitelendirilir ve bunlar bulanık kümelerle temsil edilir.

Örnek verecek olursak yaş; çok genç, genç, orta yaşlı, yaşlı ve çok yaşlı gibi bulanık kümeleri içeren bir sözel değişkendir. Burada her terim kendine uygun bir üyelik fonksiyonu ile ifade edilir. Yaş sözel değişkenini evrensel küme $[0,100]$ olmak üzere çok genç, genç, orta yaşlı, yaşlı ve çok yaşlı terimlerini üçgen bulanık sayılar yardımıyla tanımlayacak olursak üyelik fonksiyonu Şekil 3.15.'de görüldüğü gibi tanımlanabilir (Bojadziev, 2007).



3.8. Rassal Değişken Kavramı

Sonucu önceden bilinmeyen herhangi bir rassal deneyin veya olayın şansa bağlı sonuçlarını sayısal değerlerle ifade eden değişken türlerine rassal değişken adı verilir. Rassal değişkenler $X, Y, Z, \dots$ gibi büyük harflerle, alabileceği değerler ise $x, y, z, \dots$ gibi küçük harflerle gösterilirler.

Örneğin bir zar atma rassal deneyini göz önüne alalım. Deney 1, 2, 3, 4, 5, veya 6 ile sonuçlanır ve bu sonuçların sayısal değerler olduğu açıktır. Örnekte rassal değişkeni,

Z: Zarın üzerindeki noktaların sayısı

olarak tanımlarsak rassal değişkenin alacağı değerler 1, 2, 3, 4, 5, veya 6 olacaktır. Buna göre zar atma deneyinde, deneyin sayısal olan sonuçları Z rassal değişkeni yardımıyla yine sayısal değerle ifade edilmiş olur.

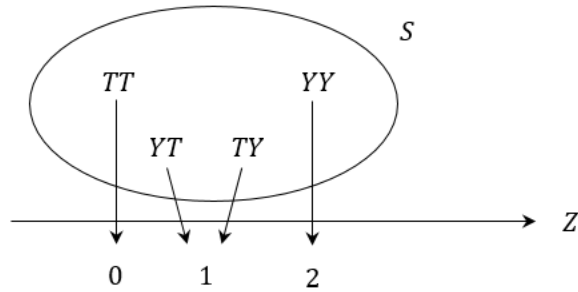
Para atma deneyini göz önüne aldığımızda ise deneyin yazı (Y) veya tura (T) ile sonuçlanacağı açıktır. Burada rassal değişkeni,

Z: Y sayısı

olarak tanımlarsak rassal değişkenin alacağı değer 0 veya 1 olacağı açıktır. Yani rassal değişken yardımıyla deneyin sayısal olmayan sonuçlarının (Y veya T), rassal değişken yardımıyla sayısal değerlerle (0 ve 1) ifade edilebileceği görülmektedir.

İki paranın birlikte atıldığı bir deneyde, Z rassal değişkeni yazı gelme durumunu gösterebilir. Buna göre Z nin aldığı değerleri ve bu değerleri alma olasılıklarını bulalım.

Deneyin örnek uzayı; $S = \{TT, YT, TY, YY\}$ olup Z rassal değişkeni yazı gelme durumunu gösterdiğine göre Z rassal değişkeni TT sonucunu 0, YT ve TY sonuçlarını 1 ve YY sonucunu ise 2 olarak alacaktır.



$$P(Z = 0) = P(TT) = \frac{1}{4}$$

$$P(Z = 1) = P(YT, TY) = \frac{2}{4}$$

$$P(Z = 2) = P(YY) = \frac{1}{4}$$

$$P(Z = 0) + P(Z = 1) + P(Z = 2) = 1 \text{ dir.}$$

$$P(Z \geq 1) = (YT, TY, YY) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$P(0 \leq Z \leq 1) = P(TT, YT, TY) = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{3}{4}$$

olur. Buna göre herhangi bir Z rassal değişkeninin S örneklem uzayından R reel sayılar kümesine bir aktarım yapan fonksiyon olduğunu söyleyebiliriz.

3.8.1. Rassal Değişken Çeşitleri

Rassal değişkenler aldıkları değerlere göre kesikli ya da sürekli olarak adlandırılırlar.

3.8.1.1 Kesikli Rassal Değişkenler

Z bir rassal değişken olsun. Z nin alabileceği değerlerin sayısı sonlu ya da sayılabilir sonsuzlukta ise Z ye kesikli rassal değişken denir.

Kesikli rassal değişkenlere verilebilecek örnekler:

- Bir beyaz eşya mağazasında aylık veya haftalık çamaşır makinesi satışlarının sayısı,
- Bir madeni paranın iki kez atılması sonucunda tura gelme sayısı,
- 1 saat içerisinde bir berbere gelen müşteri sayısı.

3.8.1.2 Sürekli Rassal Değişken

Z bir rassal değişken olsun. Z bir aralıkta veya birden çok aralıkta her değeri alabiliyorsa Z ye sürekli rassal değişken denir. Sürekli rassal değişkenler ölçümle ya da tartımla ifade edilirler. Bir başka ifadeyle sayımla ifade edilemeyen rassal değişkenlerdir.

Sürekli rassal değişkenlere verilebilecek örnekler:

- Bir kimsenin boy uzunluğu,

- Bir kasadaki patateslerin ağırlığı,
- Rüzgârın hızı.

3.9. Olasılık Dağılımları

Olasılık dağılımı, $P(Z = z)$, Z kesikli rassal değişkeninin aldığı değerler ile bu değerlere karşılık gelen olasılıkları ifade eder.

İki zarın aynı anda atılması deneyi için olasılık dağılımını elde edelim.

A olayı : Z rassal değişkeninin 7 değerini alması ($Z = 7$), ya da başka bir ifadeyle, iki zarın üzerindeki noktaların toplamının 7 değerini alması olarak tanımlansın. Bu durumda A kümesinin elemanları aşağıda gösterildiği gibidir;

$$A = \{(1,6), (6,1), (2,5), (5,2), (3,4), (4,3)\} \text{ ve } n_A = 6 \text{ dır.}$$

Bu örnekte, S örnek uzayının eleman sayısının,

$$\begin{aligned} S = \{ & (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6) \\ & (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6) \\ & \vdots \\ & (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6) \} \end{aligned}$$

36 olduğu açıktır. Herhangi bir A olayının gerçekleşme olasılığı ise

$$P(A) = \frac{n_A}{n}$$

n_A : A olayının eleman sayısı

n : S örnek uzayının eleman sayısı

olarak tanımlandığından,

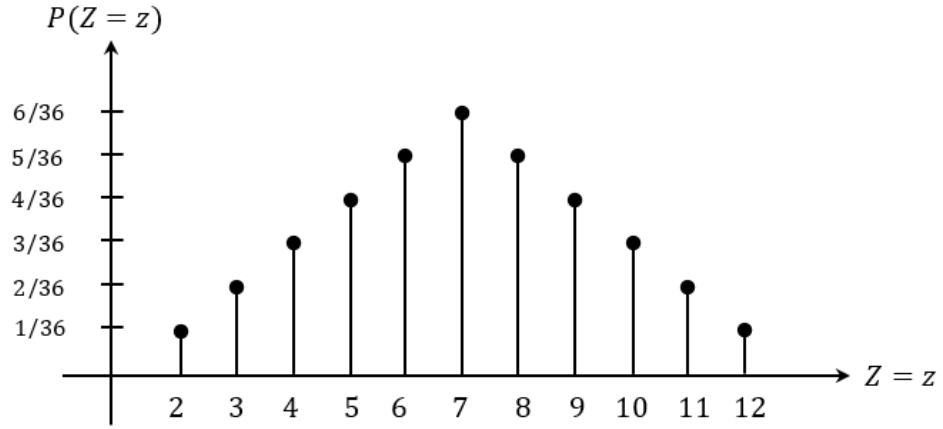
$$P(A) = P(Z = 7) = \frac{n_A}{n} = \frac{6}{36}$$

bulunur. Benzer şekilde diğer olasılık değerleri de hesaplanarak aşağıdaki Çizelge 3.2.'de verilen olasılık dağılımı elde edilir.

Çizelge 3.2. Zar atma deneyinin olasılık dağılımı

$Z = z$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(Z = z)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

Zar atma deneyine ilişkin olasılık dağılımının grafiği Şekil 3.16.' da belirtildiği gibi elde edilir.



Şekil 3.16. Zar atma deneyine ilişkin olasılık dağılımının grafiği

Kesikli birikimli olasılık dağılımı,

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = \sum_{i \leq z} P(Z = i)$$

olarak tanımlanmaktadır. Başka bir ifadeyle $F_Z(z)$ fonksiyonu, Z rassal değişkeninin belirli bir z den daha küçük veya eşit değer alması olasılığını ifade eder. Birikimli olasılık dağılımı z nin bütün değerleri için 0 ile 1 arasında değerler alır. Yani,

$$0 \leq F_Z(z) \leq 1$$

dir.

Örnek olarak düzgün altı yüzlü bir zar bir kez atılsın. Z rassal değişkeni üste gelen yüzdeki noktaların sayısı olarak tanımlansın. Bu deney için olasılık dağılımı $P(Z = z)$ 'i ve birikimli olasılık dağılımı $F_Z(z)$ 'i bulalım.

Zar atma deneyinde örnek uzay,

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

dır. Z rassal değişkeni, 1 den 6 ya kadar herhangi bir tam sayı olacaktır. Örnek uzayda 6 örnek nokta vardır ve her biri 1/6 olasılıkla elde edilir. O halde Z rassal değişkeninin olasılık fonksiyonu Çizelge 3.3.' de görüldüğü üzere;

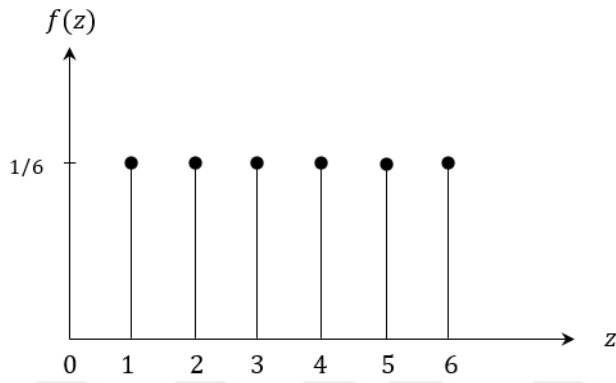
Çizelge 3.3. Zar atma deneyinin olasılık fonksiyonu

$Z = z$	1	2	3	4	5	6
$f(z) = P(Z = z)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

şeklinde olur. Bu olasılık fonksiyonu,

$$f(z) = 1/6, \quad z = 1, 2, \dots, 6$$

şeklinde de ifade edilebilir.

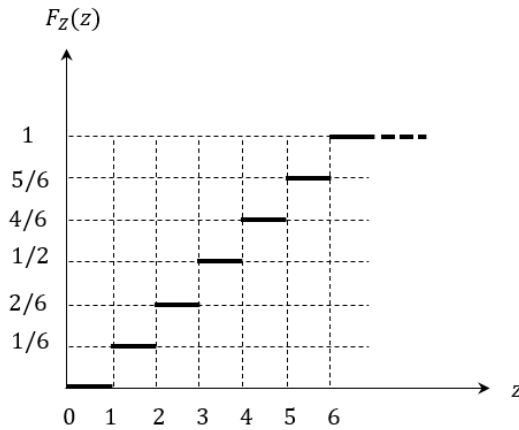


Şekil 3.17. Olasılık fonksiyonunun nokta ve çizgi grafiği

Zar atma deneyi için dağılım fonksiyonu,

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 1 \text{ ise} \\ \frac{j}{6} & j \leq z \leq j+1, \quad j = 1, 2, \dots, 5 \\ 1, & z \geq 6 \text{ ise} \end{cases}$$

dır.



Şekil 3.18. Dağılım fonksiyonunun grafiği

3.9.1. Bazı Kesikli Dağılımlar

Rassal değişkenleri modellemek için kullanılan birçok olasılık dağılımı vardır. Olasılık dağılımlarının bir diğer adı da kesikli dağılımdır. Bu kısımda, olasılık ve istatistik teorisinde sık kullanılan bazı kesikli dağılımlar incelenecektir.

3.9.1.1 Bernoulli Dağılımı

Bir denemede sadece iki sonuçtan bahsediliyorsa bu denemeyi modellemek için kullanılan dağılıma Bernoulli dağılımı denir. Bu iki sonuç genellikle başarı ve başarısızlık olarak adlandırılır. Başarı durumunda 1, başarısızlık durumunda ise 0 değeri ile ifade edilir. Denemenin başarıyla sonuçlanma olasılığı p , başarısızlıkla sonuçlanma olasılığı $1 - p$ olarak gösterilir.

Bernoulli dağılımına sahip herhangi bir Z rassal değişkeninin olasılık dağılımı,

$$P(Z = z) = \begin{cases} 1 - p, & z = 0 \\ p, & z = 1 \end{cases}$$

ya da genel bir ifade olan

$$P(Z = z) = p^z(1 - p)^{1-z}, \quad z = 0, 1$$

Örnek olarak bir beyaz eşya fabrikasında üretilen 100 tane çamaşır makinesini göz önüne alalım. Bu çamaşır makinelerinden 4 tanesinin üretim sırasında oluşan hatadan dolayı bozuk olarak üretildiği bilinsin. Üretim anında geliş güzel seçilen bir çamaşır makinesinin sağlam olmasını başarı ($Z = 1$), bozuk olmasını ise başarısızlık ($Z = 0$) olarak tanımlayalım.

Çamaşır makinesi üretim deneyinde, M sağlam makineleri, N de bozuk makineleri göstermek üzere,

$$A = \{M_1, M_2, \dots, M_{96}\} \text{ ve } S = \{M_1, M_2, \dots, M_{96}, N_1, N_2, N_3, N_4\}$$

dir. Buradan,

$$n_A = 96 \text{ ve } n = 100$$

bulunur. O halde,

$$p = P(Z = 1) = P(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{96}{100} = 0.96$$

ve

$$1 - p = P(Z = 0) = 1 - P(Z = 1) = 0.04$$

olup Bernoulli dağılımı,

$$P(Z = z) = (0.96)^z(0.04)^{1-z}, \quad z = 0, 1$$

şeklinde ifade edilir.

3.9.1.2 Binom Dağılımı

Başarı olasılığı p , başarısızlık olasılığı $1 - p$ olan bir Bernoulli denemesinin aynı koşullar altında, bağımsız olarak n kez tekrarlanması ile oluşan deneye Binom deneyi denir.

Binom denemesinin gerçekleşmesi için aşağıdaki koşulları sağlaması gerekmektedir:

- Deney aynı şartlar altında n defa tekrarlanmalıdır.
- Her olayın iki sonucu olmalıdır.
- Her olayın gerçekleşme olasılığı aynı p sayısına eşit olmalıdır.
- Deneyler birbirlerinden bağımsız olmalıdırlar.

Binom dağılımı kesikli dağılımların en yaygın kullanılanıdır. Z rassal değişkeni Binom dağılımına sahip olduğunda $Z \sim \text{Binom}(n, p)$ ile gösterilir.

Binom (n, p) dağılımına sahip Z rassal değişkeninin olasılık dağılımı,

$$P(Z = z) = \binom{n}{z} p^z (1 - p)^{n-z}, \quad z = 0, 1, \dots, n$$

olarak tanımlanır.

Binom (n, p) dağılımını daha iyi kavrayabilmek için şu örneği göz önüne alalım: Bir çikolata firmasının satışa sunduğu 40'lık kolilerdeki çikolataların %92'si bozulmadan tüketiciye ulaşıyor. Bir müşteri, bu firmaya ait 5 koli çikolata satın alıyor ve eve gittiğinde her bir koliden rassal olarak 1 tane çikolata seçiyor. Bu çikolatalardan en fazla 4 tanesinin sağlam olma olasılığını bulunuz.

Örnekte,

Y : Seçilen çikolata sayısı

olarak tanımlanırsa, $Y \sim \text{Binom}(n = 5, p = 0.92)$ olduğu görülür. Rassal olarak seçilen 5 çikolatadan en fazla 4 tanesinin sağlam olma olasılığı $P(Y \leq 4)$ olarak ifade edilir. O halde,

$$P(Y \leq 4) = P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2) + P(Y = 3) + P(Y = 4)$$

$$\begin{aligned}
&= 1 - P(Y > 4) \\
&= 1 - P(Y = 5) \\
&= 1 - \binom{5}{5} (0.92)^5 (0.08)^0 \\
&= 1 - \frac{5!}{5! 0!} (0.6590)(1) \\
&= 1 - 0.6590 \\
&= 0.3410
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

3.9.1.3 Poisson Dağılımı

Poisson dağılımı kesikli dağılımlar içerisinde Binom dağılımından sonra yaygın olarak kullanılan bir dağılımdır. Günlük hayatta ve uygulamada çok sayıda kullanım alanı bulunmaktadır.

Belirlenmiş bir alan veya zaman içerisinde rastgele ve az sayıda meydana gelebilecek olayların olasılıklarının hesaplanabilmesi için uygun bir modeldir.

Z , Poisson dağılımına sahip bir rassal değişken ise $Z \sim \text{Poisson}(\lambda)$ olarak gösterilir. $Z \sim \text{Poisson}(\lambda)$ dağılımına sahip Z rassal değişkeninin olasılık dağılımı,

$$P(Z = z) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^z}{z!}, \quad z = 0, 1, 2, \dots, \lambda > 0$$

olarak tanımlanır.

Burada λ , birim zaman veya uzayda gerçekleşen ortalama olay sayısını, z , birim zaman veya birim uzayda gerçekleşen olay sayısını, e , Euler sayısını (yaklaşık olarak $\cong 2.718 \dots$) ifade etmektedir. Poisson dağılımını daha iyi kavrayabilmek için şu örneği göz önüne alalım:

Marmara bölgesinde bir yılda ortalama 6 kez deprem olduğu biliniyorsa, önümüzdeki bir yılda en az 3 kez deprem olma olasılığını bulmaya çalışalım.

Bu örnekte

Z : Marmara bölgesinde bir yılda meydana gelen deprem sayısı

olarak tanımlanırsa, $Z \sim \text{Poisson}(\lambda = 6)$ olduğu görülür. Önümüzdeki bir yılda Marmara bölgesinde en az 3 deprem olma olasılığı,

$$P(\text{en az 3 deprem}) = P(Z \geq 3)$$

$$= P(Z = 3) + P(Z = 4) + P(Z = 5) + \dots$$

dır.

$P(Z = z)$ olasılık dağılımı olduğundan

$$P(Z = 0) + P(Z = 1) + P(Z = 2) + P(Z = 3) + \dots = 1$$

dir. Buradan,

$$P(Z = 3) + P(Z = 4) + \dots = 1 - \{P(Z = 0) + P(Z = 1) + P(Z = 2)\}$$

olduğu görülür. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} 1 - \{P(Z = 0) + P(Z = 1) + P(Z = 2)\} &= 1 - \left\{ \frac{e^{-6}6^0}{0!} + \frac{e^{-6}6^1}{1!} + \frac{e^{-6}6^2}{2!} \right\} \\ &= 1 - 25e^{-6} \\ &= 0.9380 \end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Marmara bölgesinde önümüzdeki bir yılda 3 defa deprem olma olasılığı 0.9380 veya %93.80'dir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

Bu bölümde bulanık sayılar teorisi kullanılarak Poisson ve Binom Dağılımları incelendi. Bunun yanı sıra Binom ve Poisson Dağılımlarının bulanık ortalaması ve varyansı örnekler verilerek açıklandı.

4.1. Bulanık Poisson ve Binom Dağılımları

Bulanık Binom ve Poisson dağılımına geçmeden önce bu dağılımlarda kullanacak olduğumuz bulanık Rassal değişken kavramını ortaya koymamız gerekmektedir.

4.1.1. Bulanık Rassal Değişken Kavramı

Bulanık rassal değişken kavramı ilk olarak Kwakernaak tarafından ortaya konulmuş olup önceden bilinmesi mümkün olmayan bir olayın bulanık rassal değişkeni olarak tanımlanmıştır. Burada olasılık teorisiyle ilgili olarak beklenen değer ve varyansın her ikisi de birer bulanık sayıdır (Kwakernaak, 1978).

Bulanık üyelik fonksiyonu aralıklı olarak farklı değerler alabilir. Bu nedenle, bulanık rassal değişken değeri bulanık üyelik fonksiyonunu kullanacak olan rastgele bir değişken olmalıdır.

$x_i, i \in \mathbb{N}$ bir bulanık rassal değişken olsun. Eğer x_i değerleri sayılabilir sayıda ise x_i kesikli bulanık rassal değişken olarak adlandırılır. Bir kesikli bulanık rassal değişkenin olasılık fonksiyonu kesikli değerler ve onların bu değerlere karşılık gelen olasılıklarını gösterecektir. Bunun yanı sıra x_i 'nin bulanık değerleri $\mu(x_i)$ olarak gösterilecektir.

Üyelik fonksiyonu, kesikli olması durumunda bulanık olasılık kütle fonksiyonu kullanılarak gösterilecektir. Buna karşılık sürekli olması durumunda ise bu fonksiyon bulanık olasılık yoğunluk fonksiyonu olacaktır.

Değişkenin kesikli rassal değişken olması durumunda bulanık rassal değişkeni genelleştirmek için A kümesini X in bir bulanık alt kümesi olarak alalım. X deki n tane x değeri için $A(x) \neq 0$ ise bu A alt kümesi bir ayrık bulanık küme olarak tanımlanabilir. Eğer $1 \leq i \leq n$ için $A(x) \neq 0$ olduğunu kabul edersek bu bulanık kümeyi,

$$\tilde{A} = \mu_1, \dots, \mu_2, \dots, \mu_i, \dots, \mu_n$$

olarak yazabiliriz.

Bu çalışmada kesikli bulanık kümeleri bir X kümesindeki herhangi bir uzay olarak alacak ve $\tilde{A}(x_i) = \tilde{\mu}_i$, $1 \leq i \leq n$ gösterimini kullanacağız.

$X = x_1, \dots, x_n$ sonlu bir küme ve P her i değeri için X in bütün alt kümelerinde tanımlı $1 \leq i \leq n$, $1 \leq a_i \leq n$, $P(x_i) = a_i$ şeklinde bir olasılık fonksiyonu olsun.

Olasılık teorisinden bilindiği üzere a_i , $1 \leq i \leq n$ değerlerinin toplamı 1 olmalıdır. X ve P arasındaki ilişki kesikli olasılık dağılımından belirlenebilir.

Şimdi bulanık mantık notasyonunu, terminolojiyi ve hesaplamaları kolaylaştırmak için her a_i sayısına uygulayalım. a_i değerlerini ve onlara karşılık gelen bulanık değerleri $\tilde{a}_i$ olarak yazalım. Benzer şekilde olasılık teorisini $1 \leq i \leq n$, $\forall a_i$ için uygulayarak $0 < \tilde{a}_i < 1$ değerlerini elde edelim ve a_i olasılık değerlerini $\tilde{a}_i = a_i$ olarak gösterelim. Ayrıca bütün olasılık dağılımını göstermek için $\tilde{A}$ gösterimini kullanalım. Buna göre bulanık rassal değerler, $X=x_i$ bulanık olasılık değerleriyle eşleşecektir ve $\tilde{A} = a_i$ bir kesikli bulanık olasılık dağılımı oluşturacaktır. Doğal olarak P değeri $\tilde{P}(x_i) = \tilde{a}_i$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq \tilde{a}_i \leq n$ olacaktır.

Olasılık değerlerinin toplamını sağlamak için ise bir kısıtlamanın yapılması gerekmekte olup kaçırılmış bir gözlem duruma göre bu tahmin edilmelidir. Yani bütün α değerleri için $\tilde{a}_i[\alpha]$ deki a_i değeri tahmin edilebilir ve $a_i \in \tilde{a}_i[1]$ değeri $\sum_{i=1}^n a_i = 1$ eşitliğini sağlamalıdır.

4.1.2. α -Kesimleri

Zadeh'in çalışmasında belirtildiği gibi bir rassal küme bu kümesinin α -kesimleri ile elde edilir. Bir A kümesinin α -kesimleri A_α ile gösterilmekte ve

$$A_\alpha = \{x : \mu_A(x) \geq \alpha\}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

olarak tanımlanmaktadır. α -kesimleri rastgele bir kümenin ana bileşenleri olarak kullanılır ve $[0,1]$ aralığı üzerinde düzgün olarak dağıldığı varsayılır.

Bulanık bir A kümesi rassal bir kümeden üretilebilir. Bu durumu açıklamak için $\mu_{A_\alpha}(x)$ in A_α kümesinin üyelik fonksiyonunu gösterdiğini farz edelim. Bu takdirde A kümesinin üyelik fonksiyonu A_α nın üyelik fonksiyonları cinsinden $\mu_A(x) = \sup_{\alpha} (\alpha \wedge \mu_{A_\alpha}(x))$, $0 \leq \alpha \leq 1$ olarak gösterilebilir ve buna ek olarak

$$\mu_A(x) = \int_0^1 \mu_{A_\alpha}(x) d\alpha$$

dır.

4.2. Bulanık Binom Dağılımı

Bulanık Binom dağılımı bulanık rassal değişken üzerinde tanımlanmakta olup bu dağılım hakkındaki ilk çalışmalar Buckley tarafından yapılmıştır (Buckley, 2007).

$X = \{x_1, x_2, \dots, x_i\}$ kesikli rassal değişken olmak üzere ilk olarak Binom dağılımının başlangıç tanımlamalarını yapalım. n örneklem sayısı, p tek bir örneklem için başarı olasılığı ve doğal olarak $1 - p$ ise başarısızlık olasılıkları olsunlar.

Buna göre X bir rassal Binom değişkeni olarak tanımlanabilir. Bu tanımlamayı genelleştirmek için $i \in [1, n]$ olmak üzere x_i başarılı olma olasılıkları bağımsız örneklem için n kez tekrarlanmalıdır. Böylece;

$$P(x) = \binom{n}{x} p^x q^{nx}, \quad x = 0, 1, \dots, n$$

yazılır. Bulanık Binom olasılık kütle fonksiyonu $\tilde{p}$ başarı ve $\tilde{q}$ başarısızlığı için bulanık sayılar kullanılarak elde edilir. Bulanık olasılığı hesaplamak için gerekli olan $\tilde{p}$ ve $\tilde{q}$ bulunuyorken bulanık cebir kullanırız ve $\tilde{P}(x)$ in maksimum ve minimum değerlerini elde etmek için

$$\tilde{P}(k_1)[\alpha] = \min \left\{ \binom{n}{x} \tilde{p}^x \tilde{q}^{nx} \right\}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (4.1)$$

$$\tilde{P}(k_2)[\alpha] = \max \left\{ \binom{n}{x} \tilde{p}^x \tilde{q}^{nx} \right\}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (4.2)$$

şeklinde α –kesimlerini kullanırız. Burada $p \in \tilde{p}[\alpha]$, $q \in \tilde{q}[\alpha]$ ve $p + q = 1$ dir. Bunun yanı sıra $\tilde{P}(\alpha)$ bulanık olasılığı $[P(k_1), P(k_2)]$ aralığında elde edilecektir. Böylece

$$\tilde{P}(x) = \binom{n}{x} p^x q^{nx}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

yazılır. Şimdi bunu bir örnek üzerinde uygulayalım.

Bir otomobil üreticisi şirket garanti süresi dâhilinde otomobilleri için iç mekan ekipmanlarının deformasyonunu geliştirmek amacıyla ölçülmüş bir (12,16,24) yüzdelik aralığında hesaplamalar yapmıştır. Bu üretici şirket gelişi güzel seçilen örneklemden 10 arabanın garanti süresi sonuna kadar hiçbir iç mekân deformasyonuna uğramadığını tespit ettiğine göre bu durum için bulanık olasılığı hesaplayalım.

Bu problemi çözmek için ilk olarak p ve q değerlerini tanımlayalım. Bu taktirde $\tilde{q} = 1 - \tilde{p} = 1 - (0,12,0.16,0.24) = (0.76,0.84,0.88)$ olarak elde edilir. Şimdi $\tilde{P}[10]$ bulanık sayısını hesaplamamız gerekmektedir. Bu sebeple (4.1) ve (4.2) denklemlerini yazacak olursak,

$$P(k_1)[\alpha] = \min \left\{ \binom{10}{0} \tilde{p}^0 (1 - \tilde{p})^{(10-0)} \right\}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

$$P(k_2)[\alpha] = \max \left\{ \binom{10}{0} \tilde{p}^0 (1 - \tilde{p})^{(10-0)} \right\}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

elde ederiz. Buradan $P(k_1)[\alpha] = \min\{(1 - \tilde{p})^{10}\}$ ve $P(k_2)[\alpha] = \max\{(1 - \tilde{p})^{10}\}$ olarak elde edilir. $\alpha = 0$ olmak üzere $\tilde{p}[\alpha]$ için $\frac{d(1-p)^{10}}{dp} \geq 0$ olup 10 otomobil olması durumu için olasılığı

$$\tilde{P}(10)[\alpha] = \left[(1 - p_1(\alpha))^{10}, (1 - p_2(\alpha))^{10} \right]$$

olarak yazabiliriz.

Buradan $\tilde{p}[\alpha] = [p_1(\alpha), p_2(\alpha)] = [0.12 + 0.06\alpha, 0.24 - 0.12\alpha], \quad 0 \leq \alpha \leq 1$ olarak elde edilir.

4.2.1. Binom Dağılımının Bulanık Ortalaması ve Varyansı

α -kesimleini kullanarak bulanık Binom dağılımının bulanık ortalaması $k_i \in \tilde{k}_i[\alpha], 1 \leq i \leq n$ ve $\sum_{i=1}^n k_i = 1$ için aşağıdaki gibi hesaplanabilir:

$$\tilde{\mu}[\alpha] = \sum_{i=1}^n x_i k_i$$

bu sebeple,

$$\tilde{\mu}[\alpha] = \sum_{i=1}^n i \binom{n}{i} p^i q^{n-i}$$

olarak yazılabilir. Burada $\tilde{\mu}[\alpha] = n\tilde{p}$ dir.

Varyans ise aynı mantık doğrultusunda aşağıdaki gibi hesaplanabilir:

$$\tilde{\sigma}^2[\alpha] = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_i)^2 k_i$$

Sonuç olarak, bulanık binom dağılımının bulanık varyansı olan $\tilde{\sigma}^2[\alpha] = n\tilde{p}\tilde{q}$ olarak yazılabilir.

Şimdi bir örnek üzerinde bulanık Binom dağılımının varyansını hesaplayalım. $\tilde{p}$, (0.14,0.27,0.65) şeklinde lineer bir üçgen bulanık üyelik fonksiyonuna sahip olsun.

Bildiğimiz üzere , $\tilde{\sigma}^2[\alpha] = n\tilde{p}\tilde{q}$ olup $\tilde{\sigma}^2[\alpha] = n\tilde{p}(1 - \tilde{p})$ olarak yazabiliriz ve buradan $(1 - \tilde{p}) = (0.35,0.73,0.86)$ olarak elde edilir.

4.3. Bulanık Poisson Dağılımı

Poisson dağılımı sürekli bir uzayda verileri kesikli olan örneklemelerle karakterize edilir. Zaman değişkeni sürekli olmasına rağmen kesikli değerler olarak düzenli bir gözlem zamanı göz önüne alınmalıdır. Diğer taraftan bulanık Poisson dağılımı ancak bulanık bir rassal değişkenle gösterilebilir.

Bulanık Poisson dağılımı konusunda yapılan ilk çalışmalar Buckley tarafından gerçekleştirilmiş daha sonra ise Kahraman ve Kaya tarafından bu model birçok örneğe uygulanmıştır (Kahraman and Kaya, 2010).

Bulanık Poisson dağılımını genelleştirmek için $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ şeklindeki kesikli rassal değişkenini tanımlayalım. Buradan X , Poisson olasılık kütle fonksiyonuna sahip olacak olup $P(x)$ olasılığı $X = x$ olasılığı için tanımlı olacaktır ve

$$P(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

olarak yazılabilir. Burada $x = 0,1,2, \dots, n$ ve $\lambda > 0$ dır.

Bulanık Poisson olasılık kütle fonksiyonu $\tilde{\lambda} > 0$ bulanık sayısı kullanılarak elde edilir. $\tilde{P}(x)$ ile $X = x$ için bulanık olasılığı gösterelim. Buna göre α –kesim cebirini kullanarak,

$$\tilde{P}(x)[\alpha] = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, \quad \lambda \in \tilde{\lambda}[\alpha], \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

bulanık olasılığı hesaplanabilir. Ayrıca bulanık gösterim x e bağlı olacak olup burada $\tilde{\lambda}[0]$ gözlemlenir. Sabit bir x değeri için $m(\lambda) = \frac{\lambda e^{-\lambda}}{x!}$ değerini hesaplayalım. Burada ayrıca $m(\lambda)$ fonksiyonunun $\lambda < x$ için monoton artan bir fonksiyon olduğunu, $\lambda = x$ için maksimum değerini aldığını ve $\lambda > x$ için ise azalan bir fonksiyon olduğunu belirtelim.

Bulanık Poisson dağılımının analizini özetlemek için;

$$\tilde{\lambda}[\alpha] = [\lambda_1(\alpha), \lambda_2(\alpha)] \text{ ve } 0 \leq \alpha \leq 1$$

olarak alalım. Buna göre:

1. $x > \lambda_2(0)$ için $\tilde{P}(x)[\alpha] = [m(\lambda_1), m(\lambda_2)]$
2. $\lambda_1(0) > x$ için $\tilde{P}(x)[\alpha] = [m(\lambda_2), m(\lambda_1)]$
3. $x \in \tilde{\lambda}[0]$ için $\alpha, \beta \in \tilde{\lambda}[0,1]$
 - a. $\tilde{P}(x)[\alpha] = [m(\lambda_1), m(x)], \quad 0 \leq \alpha \leq \beta$
 - b. $\tilde{P}(x)[\alpha] = [m(x), m(\lambda_2)], \quad \beta \leq \alpha \leq 1.$

olacaktır.

Şimdi bir örnek üzerinde bulanık Poisson dağılımının bulanık olasılığını bulmaya çalışalım. Bunun için x in bir paydaki sıkıntılı ürünlerin $x = 0.1$ şeklindeki yüzdesi ve $\tilde{\lambda} = (0.06, 0.1, 0.18)$ olduğunu göz önüne alarak $\tilde{P}(0.1)$ olasılığını belirleyelim.

$x = 0.1 \in [0.06, 0.18]$ olduğundan bu aralığı ilk olarak $\tilde{\lambda}[0]$ için değerlendirelim. Buna göre $\tilde{\lambda}[0] = [0.12 + 0.06\alpha, 0.24 - 0.08\alpha]$ olup $\tilde{P}(0.1)$ olasılığını hesaplamak için bulanık aralıkları yorumlamamız gerekmektedir.

$$p_1(\alpha) = \min\{m(\lambda)\}, \quad p_2(\alpha) = \max\{m(\lambda)\}, \quad \lambda \in \tilde{\lambda}[\alpha]$$

yazılabilir. Buradan (4.14) denklemi göz önüne alınarak,

$$\tilde{P}(0.1)[\alpha] = [m(0.08 + 0.06\alpha), m(0.1)], \quad 0 \leq \alpha \leq 0.5$$

$$\tilde{P}(0.1)[\alpha] = [m(0.1), m(0.18 - 0.08\alpha)], \quad 0.5 \leq \alpha \leq 1$$

olduğu elde edilir.

4.3.1. Poisson Dağılımının Bulanık Ortalaması ve Varyansı

Bu kısımda bulanık Poisson olasılık dağılımının bulanık varyansını ve bulanık ortalamasını hesaplayalım. Bulanık Binom dağılımındaki aynı mantık kullanılarak benzer işlemler yapılırsa,

$$\tilde{\mu}[\alpha] = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} kh(\lambda) \right\}$$

olarak yazılabilir. Bunun yanı sıra bu gösterim $\tilde{\mu} = \tilde{\lambda}$ için basitleştirilebilir. Şimdi benzer şekilde varyans hesaplanacak olursa,

$$\tilde{\sigma}^2[\alpha] = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} (k - \mu)^2 h(\lambda) \right\}$$

olarak elde edilir. Bu bize $\tilde{\sigma}^2 = \lambda$ için benzer gösterimi vermektedir.

5. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu çalışmada, bulanık Binom ve Poisson dağılımları incelenerek bu dağılımlar için örneklere yer verilmiştir. Özellikle kesikli rassal değişkenler bakımından bu dağılımların sonraki çalışmalara bir kaynak oluşturması düşünülmüş ve çeşitli başka modellerin sezgisel bulanık olasılıklar dikkate alınarak genişletilebilmesi için bulanık mantık konusu detaylı bir şekilde ele alınmıştır.



KAYNAKLAR

- Akpolat, H. 2000. Bulanık mantık ders notları, **Fırat Üniversitesi Elektronik Bilgisayar Öğretmenliği Bölümü**.
- Altaş, İ. H., 1999. Bulanıklık kavramı, enerji, elektrik, elektromekanik, **3E Bileşim Yayıncılık A.Ş.**, s: 80-85, İstanbul.
- Baykal, N., Beyan, T., 2004. Bulanık mantık: ilke ve temelleri, **Bıçaklar Kitabevi**, Ankara.
- Bellman, R. E., Zadeh, L. A., 1970. Decision making an fuzzy environment, **Management Science**, 17(4): 141-164.
- Black, M., 1937. Vagueness: an exercise in logical analysis, **Philosophy of Science**, 4(4): 427-455.
- Bojadziev, G. M. 2007. Fuzzy Logic for Business, Finance, and Management (2nd Edition). **World Scientific Publishing**, 253. Canada
- Buckley, J. J. ve Feuring T., 2000. Evolutionary Algorithm Solution to Fuzzy Problems: Fuzzy linear Programming. **Fuzzy Sets and Systems**. 109(1), 35-53.
- Buckley, J.J., 2007. Fuzzy probabilities. Springer,. Fuzzy logic for business, finance and management, **World Scientific Publishing**, 2:253, Canada.
- Chiang, J., 2001. Fuzzy linear programming based on statistical confidence interval and interval valued fuzzy set, **European Journal of Operational Research**, 129(1): 65-86.
- Çobanoğlu, B., 2000. Bulanık mantık ve bulanık küme teorisi, **Niksar Myo/Gop Üniversitesi**.
- Ertuğrul, İ., 1996. Bulanık mantık ve bir üretim planlamasında uygulama örneği, Doktora tezi, **Sosyal Bilimler Enstitüsü, Pamukkale Üniversitesi**, Denizli.
- Günel, Ü., 1997. Bulanık mantık. **Otomasyon Dergisi**, 55:50-55.
- Inuiguchi, M. ve Sakawa M., 1998. Robust Optimization Under Softness in A Fuzzy Linear Programming Problem. **International Journal of Approximate Reasoning**. 18(1), 21-34.
- Inuiguchi, M., Ichihashi H. ve Kume Y., 1990. A Solution Algorithm For Fuzzy Linar Programming With Piecewise Linar Membership Functions. **Fuzzy Sets and Systems**. 34(1), 15-31.
- Inuiguchi, M., Ichihashi H. ve Tanka H., 1990. Fuzzy Programming: A Survey of Recent Developments. In Stochastic Versus Fuzzy Approach Esto Multi Objective Mathematical Programming Under Uncertainty (45-68). **Springer**, Dordrecht.
- Kahraman, C., Kaya, I. 2010. Fuzzy acceptance sampling plans. In: Kahraman, C., Yavuz, M. (eds.), Production Engineering and Management under Fuzziness. **Springer**, Berlin.
- Karal, Ö., 2004. Java ortamında bulanık mantık kontrol: kamyon yükleme-boşaltma uygulaması , Yüksek lisans tezi, **Fen Bilimleri Enstitüsü Pamukkale Üniversitesi**.
- Konaçoğlu, J., 2017. Bulanık mantık yaklaşımı ile insan kaynakları yöntemi, Yüksek Lisans Tezi, **Yıldız Teknik Üniversitesi**.
- Kosko, B., 1992. Neural networks and fuzzy systems, **Printice-Hall Company**, USA.
- Kumar, A., Kaur, A., 2011. Application of classical transportation methods for solving fuzzy transportation problems, **Journal of Transportation Systems Engineering and Information Technology**, 11(5): 68-80.

- Kumar, A., Kaur, A., 2011. Methods for solving fully fuzzy transportation problems based on classical transportation methods, **International Journal of Operations Research and Information Systems**, 2(4): 52-71.
- Kwakernaak, H., 1978. Fuzzy random variables-I. **Definitions and theorems. Inf. Sci.** 15, 1–29.
- Liu, X., 2001. Measuring the satisfaction of constraints in fuzzy linear programming, **Fuzzy Sets and Systems**, 122(2): 263-275.
- Lotfi, F. H., Allahviranloo T., Jondabeh M. A. ve Alizadeh L., 2009. Solving A Full Fuzzy Linear Programming Using Lexicography Method and Fuzzy Approximate Solution. **Applied Mathematical Modelling**. 33(7), 3151-3156.
- Mahdavi-Amiri, N. ve Nasseri S. H., 2007. Duality Results and A Dual Simplex Method For linear Programming Problems with Trapezoidal Fuzzy Variables. **Fuzzy Sets and systems**. 158(17), 1961-1978.
- Negoita, C. V., Sularia, M., 1976. On fuzzy mathematical programming and tolerances in planning, **Economic Computation and Economic Cybernetics Studies and Research**, 1(3):3-15.
- Orlovsky, S. A., 1978. Decision-making with a fuzzy preference relation, **Fuzzy Sets and Systems**, 1(3): 155-167.
- Özkan, M. M., 2003. Bulanık hedef programlama, **Ekin Kitabevi Yayınları**, Bursa.
- Öztemel, E. 2003. Yapay sinir ağları, 1. Basım, **Papatya Yayıncılık**, İstanbul.
- Paksoy T., Pehlivan N., Özceylan E., 2013, Bulanık küme teorisi/bulanık matematiksel programlamaya giriş, **Nobel Akademik Yayıncılık Eğitim Danışmanlık Şti.**, Ankara, s: 17.
- Şen, Z., 2004. Mühendislikte bulanık (fuzzy) mantık ile modelleme prensipleri, **Su Vakfı Yayınları**, İstanbul.
- Uysal, M. P., 2010. Öğrenme stillerinin bulanık mantıkla modellenmesi. 4th International Computer and Instructional **Technologies Symposium**, Selçuk University, Konya, Turkey, s:1040-1045.
- Yen, J., Langari, R., 1999. Fuzzy Logic, Intelligence, Control and Information, **Prentice Hall**, New Jersey.
- Yenilmez, K. 2001. Bulanık doğrusal programlama problemleri için yeni çözüm yaklaşımları ve duyurululuk analizi, Doktora tezi, **Fen Bilimleri Enstitüsü, Osmangazi Üniversitesi**, Eskişehir.
- Zadeh, L.A., 1965, Fuzzy sets, **Information & Control**, 8(3): 338-353.
- Zadeh, L. A., 1973. Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes, **IEEE Transactions on System Man and Cybernetics**, SMC-3:28-44.
- Zadeh, L.A., 1995. Discussion: Probability theory and fuzzy logic are complementary rather than competitive. **Technometrics** 37(3), 271–276.
- Zimmermann, H. J., 1976. Description and optimization of fuzzy systems, **International Journal of General Systems**, 2(4): 209-215.
- Tanaka, H., Okuda, T., Asai, K., 1974. On fuzzy mathematical programming, **Journal of Cybernetics**, 3(4): 37-46.
- Werners, B., 1987. An interactive fuzzy linear programming systems, **Fuzzy Sets and Systems**, 23(1): 131-147.
- Wu, H.C. 1997. Fuzzy-valued integrals of fuzzy-valued measurable functions with respect to fuzzy-valued measures based on closed intervals, **Fuzzy Sets and Systems**, 87: 65-78.

ÖZGEÇMİŞ

1988 yılında Hatay'ın Kırıkhan ilçesinde doğdu. İlköğretimi 2003 yılında İssime İlköğretim Okulunda ve ortaöğretimi 2006 yılında Şemsettin Mursaloğlu Lisesinde Hatay'da tamamladı. 2013 yılında Mustafa Kemal Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden mezun oldu. 2015 yılında Mustafa Kemal Üniversitesi Eğitim Fakültesinde Pedagojik Formasyon eğitimini tamamladı. 2017 yılında Mustafa Kemal Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Enformatik Bölümünde yüksek lisansa başladı.

