

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

MODÜLER GRUBUNUN PİCARD GRUBUNDAKİ NORMALİYENİNİN
AĞAÇLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İlgt ZENGİN

TEMMUZ 2020
TRABZON



KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

MODÜLER GRUBUNUN PİCARD GRUBUNDAKİ NORMALLİYENİNİN
AĞAÇLARI

Ilgıt ZENGİN

ORCID: 0000 - 0003 - 2547 - 7852

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde
“YÜKSEK LİSANS (MATEMATİK)”
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 02.06.2020
Tezin Savunma Tarihi : 13.07.2020

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Bahadır Özgür GÜLER
ORCID : 0000 - 0003 - 3131 - 3643

Trabzon 2020

ÖNSÖZ

Bu çalışma Γ modüler grubunun alt yörüngesel graflarının, Picard grubundaki normalliyenin incelenmesi, bu normalliyenin altyörüngesel grafında herhangi bir ağacın gidebileceği en uzak köşesinin hesaplanması ve normalliyenin altyörüngesel graf karakterizasyonunun yapılması amacıyla Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisans tez çalışması olarak yapılmıştır.

Yüksek lisans öğrenimim boyunca ve bu çalışmada konunun belirlenmesinden çalışmanın tamamlanmasına kadar olan süreçte, yardımlarını desteğini esirgemediği ve özellikle zorlandığım süreçlerde sabır ve yol gösterdiği için danışman hocam sayın Prof. Dr. Bahadır Özgür GÜLER'e en içten dileklerimle saygı ve şükranlarımı sunuyorum.

Öğrenimim boyunca Karadeniz Teknik Üniversitesi Matematik Bölümünde üzerimde emeği olan tüm saygıdeğer hocalarıma çok teşekkür ederim. Ayrıca tezi hazırlama sürecinde bana her zaman destek olan, yalnız bırakmayan arkadaşlarıma ve tüm hayatım boyunca beni maddi ve manevi her yönden destekleyen sevgili anneme ve babama en içten teşekkürlerimi sunuyorum.

Son olarak bu zorlu sürecimde en büyük manevi desteğim olan canım kardeşim Hilal'e sonsuz teşekkür ederim.

Ilgıt ZENGİN
Trabzon, 2020

TEZ ETİK BEYANNAMESİ

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum “Modüler Grubunun Picard Grubundaki Normalliyenin Ağaçları” başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Prof. Dr. Bahadır Özgür GÜLER’in sorumluluğunda tamamladığımı, verileri/örnekleri kendim topladığımı, deneyleri/analizleri ilgili laboratuvarlarda yaptığımı/yaptırdığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim.

13/07/2020

İlgıt ZENGİN

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ.....	III
TEZ ETİK BEYANNAMESİ.....	IV
İÇİNDEKİLER.....	V
ÖZET	VI
SUMMARY	VII
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	VIII
TABLolar DİZİNİ.....	IX
SEMBOLLER DİZİNİ	X
1. GENEL BİLGİLER.....	1
1.1. Giriş.....	1
1.2. Matrislerin Geometrik Anlamı	1
1.3. Doğrusal Kesirli Lineer Dönüşümler	4
1.4. Sürekli Kesirler.....	15
1.4.1. Temel Tanım ve Teoremler	17
1.5. Sonlu Sürekli Kesirler	20
1.6. Möbiüs Dönüşümleri ve Sürekli Kesirler.....	28
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR	30
2.2. Γ nın $\hat{\mathbb{Q}}$ Üzerindeki Hareketi.....	31
2.3. Γ nın $\hat{\mathbb{Q}}$ Üzerindeki Alt Yörüngesel Grafları	32
2.3.1. $G_{u,n}$ ve $F_{u,n}$ Grafları.....	33
2.3.2. $G_{1,1}$ Grafi	34
2.3.3. $G_{1,2}$ Grafi	35
2.3.4. $G_{1,3}$ Grafi	36
2.4. Modüler Grubun Picard Grubundaki Normalliyeni	38
2.5.2.5. $N_{\mathbb{P}}(\Gamma)$ nın $\hat{\mathbb{Q}}$ Üzerindeki Alt Yörüngesel Grafları	39
2.5.1. $\bar{G}_{u,n}$ ve $\bar{F}_{u,n}$ Grafları.....	39
3. İRDELEME.....	52
4. SONUÇLAR	53
5. ÖNERİLER	54
6. KAYNAKLAR.....	55
ÖZGEÇMİŞ	

Yüksek Lisans Tezi

ÖZET

MODÜLER GRUBUNUN PICARD GRUBUNDAKİ NORMALLİYENİNİN AĞAÇLARI

İlgıt ZENGİN

Karadeniz Teknik Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Bahadır Özgür GÜLER

2020, 57 Sayfa

Bu tezde Modüler grubun Picard grubundaki normalliyeinin genişletilmiş rasyonel sayılar kümesi üzerindeki grup hareketinin neticesinde oluşan alt yörüngesel grafları ele alınmıştır. Bunlar içerisinde devre içermeyenleri yani ağaçları incelenmiştir.

Birinci bölümde tez boyunca kullandığımız kavramların hangi matematik alt disiplinlerle ilgili olduğu vurgulanmış ve bu konu hakkında asgari bilinmesi gerekenler özet olarak verilmeye çalışılmıştır. Doğrusal Kesirli Lineer Dönüşümler ve Sürekli Kesirler hakkında temel bilgiler paylaşılmıştır.

İkinci bölümde çalışmaya model teşkil ettiğinden modüler grubun alt yörüngesel grafları detaylandırılmış, sonrasında normalliyeinin alt yörüngesel graflarının devre içermemesi yani orman olma koşulu gerek ve yeter şart olarak elde edilmiştir. Sonrasında bu ormanlardaki ağaçların, graf teori açısından önemli bir parametre olan minimal uzunluklu olanları ile ilgili sonuçlar elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Doğrusal Kesirli Lineer Dönüşümler, Sürekli kesirler, Modüler grup, Picard grubu, Farey grafi, Alt yörüngesel graflar.

Master Thesis

SUMMARY

TREES OF THE NORMALIZER OF MODULAR GROUP IN PICARD GROUP

İlgt ZENGİN

The Graduate School of Natural and Applied Sciences
Mathematics Graduate Program
Supervisor: Prof. Dr. Bahadır Özgür GÜLER
2020, 57 Pages

In this thesis, the suborbital graphs of the normalizer of the Modular group in the Picard group as a result of its group action on the extended set of rational numbers are discussed. Among them, those that do not contain a circuit, i.e. trees, are examined.

In the first part, it is emphasized which mathematics sub-disciplines are related to the concepts we use throughout the thesis, and the general elementary knowledge about this subject is tried to be summarized. Basic information about linear fractional transformations and continuous fractions are given.

In the second part, the suborbital graphs of the modular group are detailed since it constitutes a model for our study, then the condition of being a forest means that the suborbital graphs of the normalizer do not contain a circuit has been obtained as a necessary and sufficient condition. Afterwards, the results related to the minimal lengths of trees in these forests, which are an important parameter in terms of graph theory, are obtained..

Key Words: Linear Fractional Transformations, Continued fractions, Modular group, Picard group, Farey graph, Suborbital graphs..

ŞEKİLLER DİZİNİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 1. x_1x_2 koordinat sistemi	1
Şekil 2. y_1y_2 koordinat sistemi	2
Şekil 3. Transformasyon örneği	2
Şekil 4. Transformasyon örneği	3
Şekil 5. Transformasyon örneği	3
Şekil 6. Transformasyon örneği	4
Şekil 7. Eğriler arasındaki açı.....	11
Şekil 8. Hiperbolik doğrular	11
Şekil 9. $\frac{21}{13}$ rasyonel sayısı için tek ve çift indisli yakınsayanlar	26
Şekil 10. Farey Grafi	35
Şekil 11. $G_{1,2}$ Grafi	36
Şekil 12. $G_{1,3}$ Grafi	37
Şekil 13. $F_{1,3}$ ve $F_{-1,3}$ grafları	48
Şekil 14. $\bar{F}_{1,3}$ grafi	49
Şekil 15. $F_{2,7}$ grafi.....	49
Şekil 16. $\bar{F}_{2,7}$ grafi	50
Şekil 17. $F_{1,4}$ grafi.....	50
Şekil 18. $\bar{F}_{1,4}$ grafi	50
Şekil 19. $\bar{F}_{1,4}$ grafi	51

TABLÖLAR DİZİNİ

	<u>Sayfa No</u>
Tablo 1. Sınıflandırma.....	8
Tablo 2. Sürekli kesrin yakınsayanları	26



SEMBOLLER DİZİNİ

$\mathbb{C}_\infty$: Genişletilmiş karmaşık sayılar kümesi

$\mathbb{C}$: Karmaşık sayılar kümesi

$\mathbb{H}$: Üst yarı düzlem

$\mathbb{R}$: Reel sayılar kümesi

$SL_2(\mathbb{C})$

$PSL_2(\mathbb{C})$: Karmaşık katsayılı lineer kesirli dönüşümlerin grubu

$l(f)$: düzgün eğrinin uzunluğu

$l_{\mathbb{H}}(f)$: hiperbolik yay uzunluğu

$\mu(E)$: hiperbolik alan

$PSL_2(\mathbb{R})$: Reel katsayılı lineer kesirli dönüşümlerin grubu

$\mathbb{Z}$: Tam sayılar kümesi

$\mathbb{N}$: Doğal sayılar kümesi

$\mathbb{Q}$: Rasyonel sayılar kümesi

Γ : Modüler grup

$\widehat{\mathbb{Q}}$: Genişletilmiş rasyonel sayılar kümesi

$O(\alpha, \beta)$: (α, β) nin yörüngesi

$\mathcal{G}(\alpha, \beta)$: (α, β) nin alt yörüngesel grafi

$\mathcal{G}_{u,n}$: $(\infty, u/n)$ nin alt yörüngesel grafi

$F_{u,n}$: Köşeleri $[\infty]$ bloğunda olan graf

F_m : Farey dizisi

F : Farey grafi

$\mathbb{P}$: Picar grubu

$N_{\mathbb{P}}(\Gamma)$: Γ nın $\mathbb{P}$ deki normalliyeni

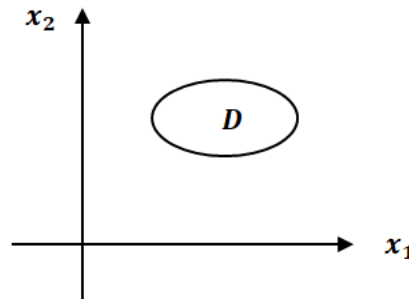


1. GENEL BİLGİLER

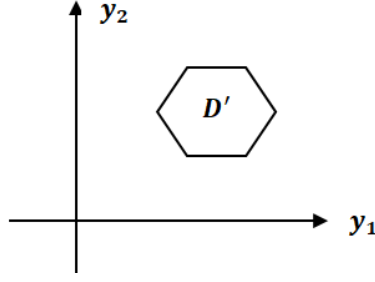
1.1. Giriş

Bir G -grubunun bir Ω -kümesi üzerindeki grup etkisi çalışılırken, çoğu zaman başka ek yapılar inşa etmekte mümkündür. Bu yapılardan ilk akla geleni şüphesiz çizgelerdir. Çizgeler çoğu kez problemin görselleştirilmesinin bir metodu olarak görülür, ve bu yüzden oldukça kullanışlıdır. Transitif grup hareketi neticesinde ortaya çıkan yörüngesel çizgeler fikri ilk kez 1967 C.C. Sims tarafından ortaya konmuştur. Modüler grubun Picard grubundaki normalliyi altyörüngesel graflarındaki ağaçları incelemek için bu metot esas alınacaktır. Tezdeki hesaplamaların tüm okuyucular için anlaşılır olabilmesi esas alındığında, doğrusal kesirli lineer dönüşümlerin (Möbiüs dönüşümleri) temel özelliklerini hatırlamakta fayda vardır. Sonrasında yine sürekli kesirlerle ilgili elemanter bilgiler paylaşılacak ve bu iki konu arasındaki bağlantı(link) verilerek birinci bölüm son bulacaktır. İkinci bölüm problemimize model teşkil ettiğinden Modüler grup ile başlayacak, sonrasında normaliyen için elde ettiğimiz sonuçlar sunulacaktır.

1.2. Matrislerin Geometrik Anlamı



Şekil 1. x_1x_2 koordinat sistemi

Şekil 2. y_1y_2 koordinat sistemi

Bir P düzlemi, bir de Q düzlemi alalım. P 'de x_1x_2 ve Q 'da y_1y_2 koordinat sistemi bulunsun. Aşağıdaki denklem sistemine bakıldığında

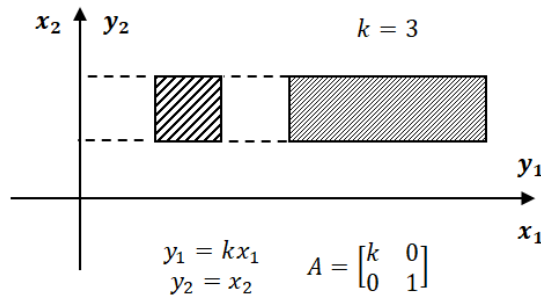
$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases} \quad (1)$$

(1)'e göre x_1x_2 düzlemindeki her $M(x_1, x_2)$ noktasına y_1y_2 düzleminde bir $M'(y_1, y_2)$ noktası tekabül etmektedir. Buna göre $a_{ij} \in \mathbb{R}$ olmak üzere D alanı noktası noktasına Q düzlemine nakledilebilir. (1)'deki denklemler doğrusal olduğundan bu işleme “koordinatların doğrusal (lineer) transformasyonu” denir ve (1)'den aşağıdaki matris elde edilir:

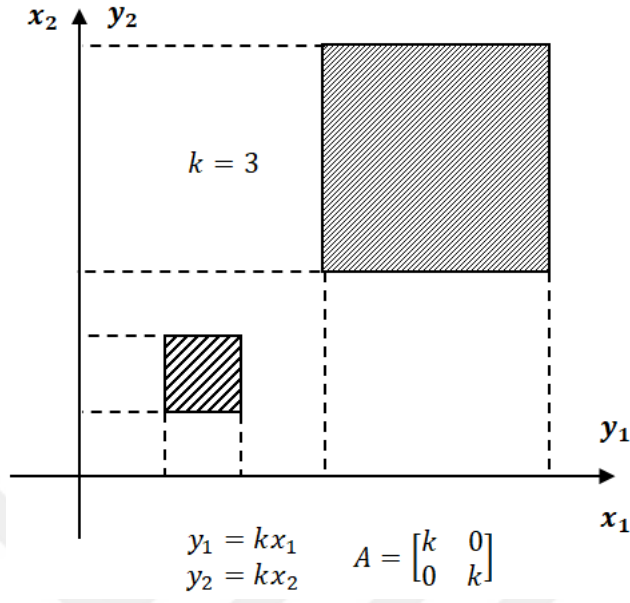
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Bazı transformasyon örnekleri;

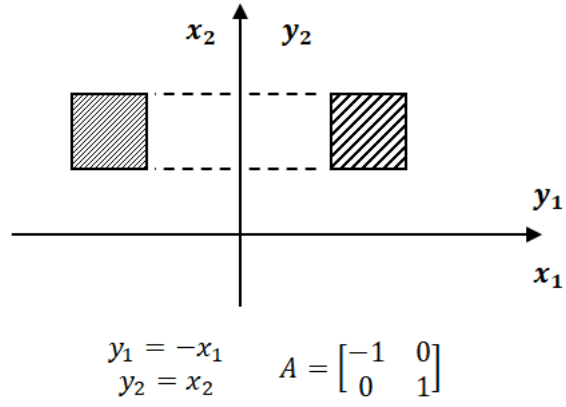
Durum I.



Şekil 3. Transformasyon örneği

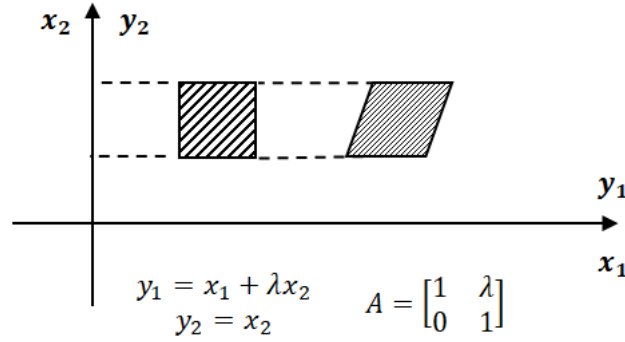
Durum II.

Şekil 4. Transformasyon örneği

Durum III.

Şekil 5. Transformasyon örneği

Durum IV.



Şekil 6. Transformasyon örneği

1.3. Doğrusal Kesirli Lineer Dönüşümler

Bu kısımda verilen temel bilgiler (Jones ve Singerman, 1987) ve (Anderson, 2000) kaynaklarından alıntıdır.

Tanım 1.3.1. $M: \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$

$$z \mapsto M(z) := \frac{az+b}{cz+d}; a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc \neq 0$$

$\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ olarak tanımlanan dönüşüme *Genel Möbiüs Dönüşümü* denir.

Önerme 1.3.2. $M: \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ $ad - bc \neq 0$ ise M bire-bir ve örten bir dönüşümdür.

İspat: Bire-bir olduğunu görmek için $M(z_1)=M(z_2)$ ise $z_1 = z_2$ olduğunu göstermek gerekir. $M(z_1)=M(z_2)$ olsun. $\frac{az_1+b}{cz_1+d} = \frac{az_2+b}{cz_2+d}$ eşitliğinden

$$acz_1z_2 + adz_2 + bcz_1 + bd = acz_1z_2 + adz_1 + bcz_2 + bd$$

$$adz_1 - bcz_1 = adz_2 - bcz_2$$

$$z_1(ad - bc) = z_2(ad - bc)$$

ve $ad - bc \neq 0$ olduğundan $z_1 = z_2$ olur. Yani M 1-1 bir dönüşüm dür. M nin örten olduğunu göstermek için $M(z) := \frac{az+b}{cz+d}$ ve $ad - bc \neq 0$ olacak şekilde $z \in \mathbb{C}$ bulunduğunu göstermek gerekir.

$$czM(z) + dM(z) = az + b$$

$$czM(z) - az = b - dM(z)$$

$$z(cM(z) - a) = b - dM(z)$$

$$z = \frac{b-d M(z)}{c M(z)-a}$$

olur. Buradan $(-a)(-d)-bc=ad-bc \neq 0$ olduğundan $z \in \mathbb{C}$ olacak şekilde bir z olduğundan M örtendir.

Önerme 1.3.3. $M: \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$

$$z \mapsto M(z) := \frac{az+b}{cz+d}, a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad-bc \neq 0 \text{ ise } M \text{ bir sabit dönüşümdür.}$$

İspat: $z \neq -\frac{d}{c}$ ve $ad-bc=0$ olduğundan, $ad=bc$. Her iki tarafa aynı ifade eklenirse $ad+acz=bc+acz$. Buradan $a(a+cz)=c(b+az)$. Böylece $\frac{a}{c} = \frac{az+b}{cz+d} = M(z)$ olur. Bu da, $M(z)$ 'nin $ad-bc$ şartı altında sabit bir dönüşüm olduğunu gösterir.

Sabit dönüşüm 1-1 ve örtenliği sağlamadığından $ad-bc=0$ olamaz.

Önerme 1.3.4. Tanım 1.1'de $ad - bc \neq 0$ yerine $ad - bc = 1$ alınabilir.

İspat: $M(z) := \frac{az+b}{cz+d}; a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc \neq 0$ Möbiüs Dönüşümünü ele alalım.

$ad-bc \neq 0$ olduğuna göre $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ olacak şekilde $\lambda = \frac{1}{\sqrt{ad-bc}}$ seçilirse

$$M(z) = \frac{\lambda az + \lambda b}{\lambda cz + \lambda d} = \frac{\lambda(az+b)}{\lambda(cz+d)} = \frac{az+b}{cz+d}$$

olur. Böylece yine aynı M dönüşümü elde edilir. O halde $M(z)$ ile tanımlanan Möbiüs dönüşümünün pay ve paydası $\lambda = \frac{1}{\sqrt{ad-bc}}$ ile

çarpılırsa;

$$M(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{\frac{a}{\sqrt{ad-bc}}z + \frac{b}{\sqrt{ad-bc}}}{\frac{c}{\sqrt{ad-bc}}z + \frac{d}{\sqrt{ad-bc}}}$$

ifadesi elde edilir. Bu dönüşümün determinanı;

$$\frac{a}{\sqrt{ad-bc}} \cdot \frac{d}{\sqrt{ad-bc}} - \frac{b}{\sqrt{ad-bc}} \cdot \frac{c}{\sqrt{ad-bc}} = \frac{ad-bc}{ad-bc} = 1$$

olur. Dolayısıyla Möbiüs dönüşümünün tanımındaki $ad - bc \neq 0$ yerine $ad - bc = 1$ alınabilir.

Önerme 1.3.5. $M: \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty, a, b, c, d \in \mathbb{C}$ ve $ad - bc \neq 0$ olmak üzere,

$$z \mapsto M(z) := \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d}, & z \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\} \\ \infty, & z = -\frac{d}{c} \\ \frac{a}{c}, & z = \infty \end{cases} \quad \text{ile tanımlanan } M\text{-dönüşümü bir}$$

homeomorfizmdir.

İspat: $z_0 \in \mathbb{C}_\infty$ keyfi ve sabit olsun. M 'nin z_0 da sürekli olduğunu gösterelim:

Eğer $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$ ise; $f(z) = az + b, g(z) = cz + d$ fonksiyonları z_0 da sürekli olduğundan $M(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$ bölüm fonksiyonu da z_0 da sürekli dir.

Eğer $z_0 = -\frac{d}{c}$ ise; $\lim_{z \rightarrow -\frac{d}{c}} M(z) = \lim_{z \rightarrow -\frac{d}{c}} \frac{az + b}{cz + d} = \infty = M\left(-\frac{d}{c}\right)$ olduğundan M ,

$z_0 = -\frac{d}{c}$ de sürekli dir.

Eğer $z_0 = \infty$ ise; $\lim_{z \rightarrow \infty} M(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c} = M(\infty)$ olduğundan M , $z_0 = \infty$ da sürekli dir.

$z_0 \in \mathbb{C}_\infty$ keyfi olduğundan M , $\mathbb{C}_\infty$ 'un her noktasında sürekli dir. O halde M , $\mathbb{C}_\infty$ ' da sürekli dir.

$$N: \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty, z \mapsto N(z) := \begin{cases} \frac{dz-b}{-cz+a}, & z \in \mathbb{C} \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\} \\ \infty, & z = \frac{a}{c} \\ -\frac{d}{c}, & z = \infty \end{cases} \quad \text{Möbiüs dönüşümünü göz önüne alalım.}$$

$\forall z \in \mathbb{C}_\infty$ için; $(M \circ N)(z) = z$ olduğundan M - örten ve $(N \circ M)(z) = z$ olduğundan M - birebirdir. Dolayısıyla $M^{-1} = N$ dir. Ayrıca N 'nin tanımından sürekli dir.

Sonuç olarak; M bir homeomorfizmdir.

Teorem 1.3.6. $Möb^+(\mathbb{H}) = \left\{ M: \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty \mid M(z) = \frac{az+b}{cz+d}, a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc = 1 \right\}$

kümesi fonksiyonların bileşke işlemine göre bir gruptur.

İspat: (i) $M_1 \circ (M_2 \circ M_3) = (M_1 \circ M_2) \circ M_3$; $\forall M_1, M_2, M_3 \in Möb^+(\mathbb{H})$

(ii) $M_e(z) = z$ ($a = d = 1, b = c = 0$), $Möb^+(\mathbb{H})$ 'nin birim elemanıdır.

(iii) $\forall M \in Möb^+(\mathbb{H})$ için $\exists M^{-1}(z) = \frac{dz-b}{-cz+a}$.

Tanım 1.3.7. $M: \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty, M(z) = \begin{cases} z + \alpha, & z \neq \infty \\ \infty, & z = \infty \end{cases}$ olarak tanımlanan $M(z)$ dönüşümüne öteleme dönüşümü denir.

Tanım 1.3.8. $M: \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty, M(z) = \begin{cases} \frac{1}{z}, & z \neq \infty \\ 0, & z = \infty \end{cases}$ olarak tanımlanan $M(z)$ dönüşümüne

inversiyon dönüşümü denir.

Tanım 1.3.9. $M: \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$, $T(z) = \begin{cases} az & , z \neq \infty \\ \infty & , z = \infty \end{cases}$ olarak tanımlanan $M(z)$ dönüşümüne çarpım dönüşümü denir.

Teorem 1.3.10. $M: \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$, $M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ ve $ad - bc \neq 0$ ise M dönüşümü, öteleme, inversiyon ve çarpım dönüşümlerinin bileşkesidir.

İspat: Önce $c=0$ için ispat yapılırsa,

$M(z) = \frac{az+b}{d} = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$ ve $ad-bc \neq 0$ olduğundan $ad \neq 0$ olur.

$M_1 := \frac{a}{d}z, M_2 := z + \frac{b}{d}$ olarak seçilirse, $M(z) = (M_2 \circ M_1)(z) = M_2(\frac{a}{d}z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$

Şimdi $c \neq 0$ için ispatlayalım.

$z \neq -\frac{d}{c}$ olmak üzere M_1, M_2, M_3, M_4 olarak aşağıdaki gibi seçilirse

$$M_1(z) = z + \frac{a}{c}, M_2(z) = z + \frac{d}{c}, M_3(z) = \frac{1}{z}, M_4(z) = \frac{bc-ad}{c^2}z$$

$$M(z) = (M_1 \circ M_2 \circ M_3 \circ M_4)(z)$$

olur. Gerçekten,

$$M(z) = (M_1 \circ M_2 \circ M_3 \circ M_4)(z)$$

$$= (M_1 \circ M_2 \circ M_3 \circ \left(z + \frac{d}{c}\right)) = (M_1 \circ M_4)\left(\frac{1}{z + \frac{d}{c}}\right). \quad M(z) = M_1\left(\frac{bc-ad}{c^2} \cdot \frac{1}{z + \frac{d}{c}}\right)$$

$$= \frac{bc-ad}{c^2} \cdot \frac{1}{z + \frac{d}{c}} + \frac{a}{c} = \frac{bc-ad}{c^2} \cdot \frac{c}{cz+d} + \frac{a}{c} = \frac{bc-ad}{c \cdot (cz+d)} + \frac{a}{d}$$

$$M(z) = \frac{bc-ad+acz+ad}{c \cdot (cz+d)} = \frac{bc+acz}{c(cz+d)} = \frac{c \cdot (b+az)}{c \cdot (cz+d)} = \frac{(b+az)}{(cz+d)}$$

olur.

Tanım 1.3.11. : $f: \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ bir fonksiyon olsun. $f(z) = z$ şartını sağlayan $z \in \mathbb{C}_\infty$ noktalarına f 'nin sabit noktaları denir.

$S(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $ad - bc = 1$, ($S \neq I$) Möbiüs dönüşümü verilsin.

$$S(z) = z \Leftrightarrow cz^2 + (d-a)z - b = 0$$

olacağından S 'nin en çok 2 tane sabit noktası vardır.

$$\Delta = (d-a)^2 + 4bc = d^2 + a^2 - 2ad + 4bc = d^2 + a^2 - 2(ad - bc) + 2bc$$

$= d^2 + a^2 - 2 + 2bc$ ve $ad - bc = 1$ eşitliklerinden $\Delta = (a + d)^2 - 4$ elde edilir. Buna göre sabit noktalar

$$z_{1,2} = \frac{-(d - a) \pm \sqrt{|a + d|^2 - 4}}{2c}$$

biçimindedir.

Tablo 1. Sınıflandırma

Parabolik	$ a + d = 2$	$S(z) = z + 1$	$\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ da tek bir sabit nokta
Hiperbolik	$ a + d > 2$	$S(z) = \lambda z$ ($\lambda \in \mathbb{R}^+$)	$\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ da iki sabit nokta
Eliptik	$ a + d > 2$	$S(z) = \frac{\cos\theta z + \sin\theta}{-\sin\theta z + \cos\theta}$ ($\theta \in \mathbb{R}$)	$\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ da konjuge iki sabit nokta

Önerme 1.3.12. $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}_\infty$ farklı üç nokta ve $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}_\infty$ farklı üç nokta olsun. Bu taktirde; $S(z_i) = w_i$ ($i = 1, 2, 3$) şartını sağlayan bir tane $S \in \text{Möb}^+(\mathbb{H})$ Möbiüs dönüşümü vardır.

İspat : Kabul edelim ki $S, T \in \text{Möb}^+(\mathbb{H})$ Möbiüs dönüşümleri için;

$S(z_i) = w_i$ ve $T(z_i) = w_i$ ($i = 1, 2, 3$) olsun. Bu durumda;

$S(z_i) = T(z_i)$, ($i = 1, 2, 3$) $\Rightarrow T^{-1} \circ S(z_i) = z_i$ ($i = 1, 2, 3$) olur. $T^{-1} \circ S \in \mu$ ve $T^{-1} \circ S$ 'nin en çok iki tane sabit noktası olabileceğinden

$z_1 \neq z_2 \neq z_3 \neq z$ olduğundan $T^{-1} \circ S = I \Rightarrow S = T$ elde edilir.

Önerme 1.3.13. : $z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}_\infty$ olmak üzere $S: \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$,

$$S(z) = \frac{\frac{z - z_3}{z - z_4}}{\frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}}, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C} \text{ ise;}$$

$S(z) = \frac{z - z_3}{z - z_4}, z_2 = \infty$; $S(z) = \frac{z_2 - z_4}{z - z_4}, z_3 = \infty$; $S(z) = \frac{z - z_3}{z_2 - z_4}, z_4 = \infty$ ile tanımlanan S -

Möbiüs dönüşümü $S(z_2) = 1, S(z_3) = 0, S(z_4) = \infty$ özelliğindeki yegane fonksiyondur.

Tanım 1.3.14. $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}_\infty$ farklı noktalar olmak üzere;

$$[z_1, z_2; z_3, z_4] = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)}$$

ifadesine z_1, z_2, z_3, z_4 sayılarının **çapraz oranı** denir.

Örneğin, $[z_2, z_2, z_3, z_4] = 1$ ve $[z, 1, 0, \infty] = z$ dir.

Önerme 1.3.15. Eğer $z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}_\infty$ farklı noktalar ve $T \in \text{Möb}^+(\mathbb{H})$ herhangi bir Möbiüs dönüşümü ise, her $z \in \mathbb{C}_\infty$ için $[z_1, z_2; z_3, z_4] = [T(z_1), T(z_2); T(z_3), T(z_4)]$ dir.

İspat: $S(z) = [z, z_2; z_3, z_4]$ olsun. $S \in \text{Möb}^+(\mathbb{H})$ dir. Eğer $\mu := S \circ T^{-1}$ alınırsa;

$\mu(T(z_2)) = S(z_2) = 1$, $\mu(T(z_3)) = S(z_3) = 0$ ve $\mu(T(z_4)) = S(z_4) = \infty$ olur böylece $\forall z \in \mathbb{C}_\infty$ için $S \circ T^{-1}(z) = [z, T(z_2); T(z_3), T(z_4)]$ olur. Özellikle, eğer $z = T(z_1) \Rightarrow T^{-1}(z) = z_1$ dir.

Önerme 1.3.16. $z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}_\infty$ üç farklı nokta ve $w_2, w_3, w_4 \in \mathbb{C}_\infty$ üç farklı nokta olsun. Bu taktirde $S(z_i) = w_i$ ($i = 1, 2, 3$) olacak şekilde bir tek $S \in \text{Möb}^+(\mathbb{H})$ Möbiüs dönüşümü vardır.

İspat : $T(z) := [z, z_2; z_3, z_4]$ ve $M(z) := [z, w_2; w_3, w_4]$ dönüşümleri göz önüne alalım;

$z_1 \neq z_2 \neq z_3 \neq z$ olduğundan $T \in \mu$ ve benzer şekilde $M \in \mu$ eğer $S := M^{-1} \circ T$ alınırsa;

$$S(z_2) = (M^{-1} \circ T)(z_2) = M^{-1}(T(z_2)) = M^{-1}(1) = w_2$$

$$S(z_3) = (M^{-1} \circ T)(z_3) = M^{-1}(T(z_3)) = M^{-1}(0) = w_3$$

$$S(z_4) = (M^{-1} \circ T)(z_4) = M^{-1}(T(z_4)) = M^{-1}(\infty) = w_4$$

dır şimdi S nin tek olduğunu gösterelim. Önerme (1.3.12.) den açıktır.

Örnek 1.3.17. $(2i, 1 + i, 3)$ üçlüsünü $(0, 2 + 2i, 4)$ üçlüsüne resmeden $\text{Möb}^+(\mathbb{H})$

dönüşümünü bulalım. $T(z) = \frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)}$ dönüşümünden

$$m(z) = \frac{(z-2i)(1+i-3)}{(z-3)(1+i-2i)} = \frac{(-2+i)z+(2+4i)}{(1-i)z-3+3i} \text{ için } (2i, 1 + i, 3) \xrightarrow{m} (0, 1, \infty)$$

$$n(z) = \frac{z(2+2i-4)}{(z-4)(2+i)} = \frac{(-2+2i)z}{(2+2i)z-8-8i} \text{ için } (0, 2 + 2i, 4) \xrightarrow{n} (0, 1, \infty) . \text{ Böylece}$$

$$n^{-1} \circ m(z) = \frac{(24+8i)z+(48-8i)}{(6+6i)z+(4-24i)} \text{ aranan dönüşümdür.}$$

Önerme 1.3.18. $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}_\infty$ dört farklı nokta olsun. Bu durumda $[z_1, z_2, z_3, z_4] \in \mathbb{R}$ olması için gerek ve yeter koşul bu dört noktanın bir çember üzerinde olmasıdır.

İspat : $S: \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$, $S(z) = [z, z_2, z_3, z_4]$ ile tanımlanırsa $S^{-1}(\mathbb{R}) = \{z \in \mathbb{C}_\infty | S(z) \in \mathbb{R}\}$ dir. Eğer bir Möbiüs dönüşümü altında $\mathbb{R}_\infty$ un resminin bir çember olduğu gösterilirse ispat biter.

$S(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ olsun. Eğer $z = x \in \mathbb{R}$ ve $w = S^{-1}(x)$ ise $x = S(w)$, buradan

$S(w) = \overline{S(\bar{w})}$, yani $\frac{aw+b}{cw+d} = \frac{a\bar{w}+b}{c\bar{w}+d}$ eşitliği elde edilir. Buradan da

$$(a\bar{c} - \bar{a}c)|w|^2 + (a\bar{d} - \bar{a}c)w + (b\bar{c} - d\bar{a})\bar{w} + (b\bar{d} - \bar{b}d) = 0 \dots (1)$$

Eğer $a\bar{c} \in \mathbb{R}$ ise $a\bar{c} - \bar{a}c = 0$ olur. $\left. \begin{array}{l} \alpha = 2(a\bar{d} - \bar{a}c) \\ \beta = i(b\bar{d} - \bar{b}d) \end{array} \right\}$ alınır ve (1) eşitliği i ile çarpılırsa

$\beta \in \mathbb{R}$ olduğundan

$$0 = Im(\alpha w) - \beta = Im(\alpha w - \beta) \dots (2)$$

$a\bar{c} \notin \mathbb{R}$ ise $\gamma \in \mathbb{C}$, $\delta \in \mathbb{R}$ sabitler olmak üzere (1) eşitliği

$$|w|^2 + \bar{\gamma}w + \gamma\bar{w} - \delta = 0$$

eşitliğine dönüşür. Eğer $\lambda := (|\gamma|^2 + \delta)^{1/2} = \left| \frac{ad-bc}{ac-\bar{a}c} \right| > 0$ alınırsa bu son eşitlik

$$|w + \gamma| = \lambda \dots (3)$$

γ ve λ, x 'den bağımsız ve (3) bir çember denklemi olduğundan ispat biter.

Önerme 1.3.19. Bir Möbiüs dönüşümü çemberleri çemberlere resmeder.

İspat : $D_1 \in \mathbb{C}_\infty$ keyfi bir çember ve $S \in Möb^+(\mathbb{H})$ keyfi bir Möbiüs dönüşümü olsun.

$z_2, z_3, z_4 \in D_1$ üzerinde alınan birbirinden farklı üç nokta ve onların S altındaki resimleri

$w_j = S(z_j); j = 2, 3, 4$ olsun. Bu durumda w_2, w_3, w_4 noktaları da bir D_2 çemberi belirler.

İddia; $S(D_1) = D_2$ dir. Aslında, keyfi $z \in \mathbb{C}_\infty$ için

$$[z, z_2, z_3, z_4] = [S(z), w_2, w_3, w_4] \dots (1)$$

olduğunu biliyoruz. Bir önceki teoremden $z \in D_1$ ise (1) eşitliğinin her iki tarafı da reel sayıdır. Buradan $S(z) \in D_2$ dir.

$$SL_2(\mathbb{C}) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{C} \text{ ve } ad - bc = 1 \right\}$$

kümesinin matris çarpımına göre bir grup olduğu bilinmektedir.

Teorem 1.3.20. $\mu : SL_2(\mathbb{C}) \rightarrow Möb^+(\mathbb{H})$, $\mu \left(M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = \left(m(z) = \frac{az+b}{cz+d} \right)$ ile

tanımlanan dönüşüm bir homomorfizmadır.

$m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ ve $n(z) = \frac{az+\beta}{\gamma z+\delta}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} n \circ m(z) &= \frac{\alpha m(z) + \beta}{\gamma m(z) + \delta} = \frac{\alpha \left(\frac{az+b}{cz+d} \right) + \beta}{\gamma \left(\frac{az+b}{cz+d} \right) + \delta} = \\ &= \frac{\alpha(az+b) + \beta(cz+d)}{\gamma(az+b) + \delta(cz+d)} = \frac{(\alpha a + \beta c)z + \alpha b + \beta d}{(\gamma a + \delta c)z + \gamma b + \delta d}. \end{aligned}$$

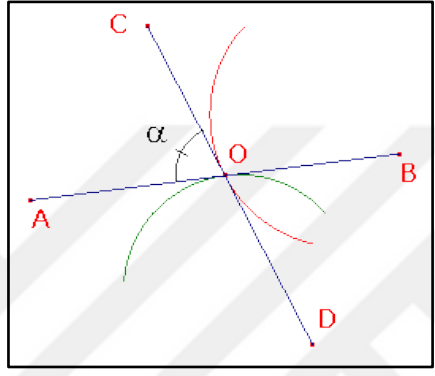
Diğer taraftan,

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a + \beta c & \alpha b + \beta d \\ \gamma a + \delta c & \gamma b + \delta d \end{pmatrix}$$

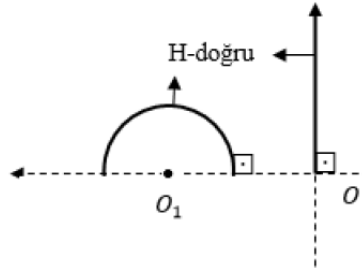
Üstelik $\zeta_{ek}(\mu) = \{ \alpha I \mid \alpha \in \mathbb{C} \} \subset SL_2(\mathbb{C})$ dir.

Dolayısıyla $Möb^+(\mathbb{H})$,

$PSL_2(\mathbb{C}) = SL_2(\mathbb{C}) / \zeta_{ek}(\mu)$ 'ye izomorftur.



Şekil 7. Eğriler arasındaki açı



Şekil 8. Hiperbolik doğrular

Tanım 1.3.21. C_1 ile C_2 , $\mathbb{C}$ düzleminde O ile gösterilen bir z_0 noktasında kesişen iki düzgün eğri ise bu iki eğri arasındaki açının ölçüsü $Açı(C_1, C_2)$, ilgili eğrilerin z_0 noktasındaki teğet doğruları arasındaki açının ölçüsüyle tanımlanır.

Tanım 1.3.22. $w = f(z)$, z_0 noktasının bir komşuluğunda tanımlı bir dönüşüm olsun. Eğer f , z_0 dan geçen yönlendirilmiş eğriler arasındaki açıları yön ve büyüklük bakımından koruyorsa bu durumda $w = f(z)$ dönüşümüne z_0 da konformdur denir.

Teorem 1.3.23. $w = f(z)$, z_0 noktasının bir komşuluğunda tanımlı bir dönüşüm olsun. Eğer $f'(z_0) \neq 0$ ise f , z_0 da konformdur.

Teorem 1.3.24. $Möb^+(\mathbb{H})$ 'nin elemanları konformdur.

İspat : $m(z) = \frac{az+b}{cz+d} \in Möb^+(\mathbb{H})$ alınırsa, $m'(z) = \frac{a(cz+d)-c(az+b)}{|cz+d|^2} = \frac{1}{|cz+d|^2} > 0$.

Tanım 1.3.25. $\mathbb{C}$ de $\mathbb{R}$ ye dik Öklid doğrularının $\mathbb{H}$ ile arakesiti olan yarı Öklid doğrularına ve $\mathbb{R}$ ye dik bilinen Öklid çemberlerinin $\mathbb{H}$ ile arakesitlerine hiperbolik doğrular adı verilir.

Teorem 1.3.26. $Möb^+(\mathbb{H})$, $\mathbb{H}$ üzerinde transitif olarak hareket eder.

İspat : $ai + b \in \mathbb{H}$ keyfi alınırsa, $a > 0$ olur. $T(z) = \frac{\frac{a}{\sqrt{a}}z + \frac{b}{\sqrt{a}}}{\frac{1}{\sqrt{a}}}$ olarak tanımlanırsa

$$\frac{a}{\sqrt{a}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a}} - 0 = 1$$

olduğundan $T \in Möb^+(\mathbb{H})$ dır. Üstelik $T(i) = ai + b$ olduğundan $G_i = \mathbb{H}$.

Teorem 1.3.27. $Möb^+(\mathbb{H})$, $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ üzerinde ikili transitiftir.

İspat : $a, b \in \mathbb{R}$ ve $a > b$ olsun. $S(z) = \frac{z-a}{z-b} \in Möb^+(\mathbb{H})$ ve $\Delta = \det S = a - b > 0$ olur.

Açıkça $(a, b) \xrightarrow{s} (0, \infty)$. Böylece $(\alpha, \beta), (\gamma, \delta) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ keyfi alındığında $S_1(z) = \frac{z-\alpha}{z-\beta}$

ve $S_2(z) = \frac{z-\gamma}{z-\delta}$ dönüşümleri için $(\alpha, \beta) \xrightarrow{S_2^{-1}S_1} (\gamma, \delta)$ olur.

Sonuç 1.3.28. $Möb^+(\mathbb{H})$ hiperbolik doğrular üzerinde transitiftir.

İspat: Hiperbolik doğrular bitim noktaları ile karakterize edilebildiğinden, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{H}$ keyfi iki h-doğru ise $\exists a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ öyle ki $\alpha_1: a_1 \rightarrow b_1$ ve $\alpha_2: a_2 \rightarrow b_2$ yazılabilir. $Möb^+(\mathbb{H})$, $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ üzerinde ikili transitif olduğundan $\exists T \in Möb^+(\mathbb{H})$: $T(a_1) = a_2$ ve $T(b_1) = b_2$. Böylece $T(\alpha_1) = \alpha_2$.

$f: [a, b] \mapsto \mathbb{R}^2, f(t) = (x(t), y(t)) : x(t), y(t)$ -diferansiyellenebilir, sürekli fonksiyonuna düzlemde bir düzgün eğri denir. Bu eğrinin uzunluğu

$$l(f) := \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

ile hesaplanır. $\mathbb{R}^2$ yerine $\mathbb{C}$ alındığında $f(t) = x(t) + iy(t)$ eşitliğinden $f'(t) = x'(t) + iy'(t)$ ve $|f'(t)| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$ elde edilir. Böylece $l(f) = \int_a^b |f'(t)| dt$, yani $|dz| = |f'(t)| dt$. Buna göre $\int_a^b |f'(t)| dt = \int_f |dz|$ ile Euclid metriğine göre standart yay uzunluğu hesaplanmış olur. Buradan $\forall z \in \mathbb{C}$ için $|dz|$ -Euclidean yay uzunluğu yerine, $\rho(z)|dz|$ ile yeni bir yay uzunluğu ölçümü verilebilir.

Tanım 1.3.29. $f: [a, b] \mapsto \mathbb{C}$ diferansiyellenebilir bir eğri ve $\rho: \mathbb{C} \mapsto \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere, f nin $\rho(z)|dz|$ -yay uzunluğuna göre uzunluğu

$$l_\rho(f) = \int_f \rho(z)|dz| = \int_a^b \rho(f(t))|f'(t)|dt$$

ile tanımlanır.

Hiperbolik uzunluğun $Möb^+(\mathbb{H})$ altında invaryant kalması, yani

$$\forall \gamma \in Möb^+(\mathbb{H}) \text{ için } l_\rho(f) = l_\rho(\gamma \circ f)$$

olması istendiğinde,

Tanım 1.3.30. $f: [a, b] \mapsto \mathbb{H}$ diferansiyellenebilir bir eğri olmak üzere, f nin *hiperbolik yay uzunluğu* (h-uzunluk)

$$l_{\mathbb{H}}(f) = \int_f \frac{1}{\text{Im}(z)} |dz| = \int_a^b \frac{1}{\text{Im}(f(t))} |f'(t)|dt$$

ile tanımlanır.

Teorem 1.3.31. h-uzunluk $Möb^+(\mathbb{H})$ altında invaryanttır.

İspat: $l_{\mathbb{H}}(T(\gamma)) = l_{\mathbb{H}}(\gamma)$; $T \in Möb^+(\mathbb{H})$ olduğunu göstermek istiyoruz. $T \in Möb^+(\mathbb{H})$ ise

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}; ad-bc=1, T'(z) = \frac{1}{|cz+d|^2} \text{ olduğunu biliyoruz. } \left. \begin{array}{l} z = x + iy \\ T(z) = u + iv \end{array} \right\} \text{ alınır}$$

$$\text{Im}T(z) = \frac{\text{Im}(z)}{|cz+d|^2} \text{ olduğundan } v = \frac{y}{|cz+d|^2} \text{ olur. } T'(z) = \left| \frac{dT}{dz} \right| = \frac{v}{y}.$$

$$\begin{aligned} l_{\mathbb{H}}(T(\gamma)) &= \int_0^1 \frac{\left| \frac{dT}{dt} \right|}{v} dt = \int_0^1 \frac{\left| \frac{dT}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} \right|}{v} dt = \int_0^1 \frac{1}{|cz+d|^2} \frac{\left| \frac{dz}{dt} \right|}{v} dt \\ &= \int_0^1 \frac{v}{y} \frac{\left| \frac{dz}{dt} \right|}{v} dt = \int_0^1 \frac{\left| \frac{dz}{dt} \right|}{y} dt = \int_0^1 \frac{|dz|}{y} = l_{\mathbb{H}}(\gamma) \end{aligned}$$

Tanım 1.3.32. $E \subset \mathbb{H}$ bölgesi için *hiperbolik alan* (h-alan) $\mu(E) = \iint_E \frac{dx dy}{y^2}$ integrali

ile tanımlanır.

Teorem 1.3.33. h-uzunluk $Möb^+(\mathbb{H})$ altında invaryanttır.

İspat: $\mu(T(\gamma)) = \mu(\gamma)$; $T \in Möb^+(\mathbb{H})$ olduğunu göstermek istiyoruz. $\left. \begin{array}{l} z = x + iy \\ T(z) = u + iv \end{array} \right\}$

alınır Cauchy-Riemann eşitliklerinden

$$\begin{aligned} \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 = \left| \frac{dT}{dx} \right|^2 = \left| \frac{dT}{dz} \right|^2 = \frac{1}{|cz+d|^4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu(T(E)) &= \iint_{T(E)} \frac{dudv}{v^2} = \iint_E \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \frac{dxdy}{y^2} \\ &= \iint_E \frac{1}{|cz+d|^4} \frac{|cz+d|^4}{y^2} dxdy = \mu(E)\end{aligned}$$

$G, \mathbb{C}_\infty$ genişletilmiş kompleks düzleminin aşağıda verilen biçimdeki dönüşümlerin grubu olsun:

- i. $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1$
- ii. $z \mapsto \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d} \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = -1.$

i. tipindeki dönüşümlerin kümesi G de indeksi 2 olan bir alt grup oluşturur. Bu grup genellikle $PSL_2(\mathbb{R})$ ile ifade edilir. G ye $\mathbb{R}^4$ ün bir alt kümesi gözüyle bakarak yani,

$$\{(a, b, c, d): a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = \pm 1\}$$

kümesi ile ifade ederek, G üzerinde bir topoloji inşa edilebilir:

$$\begin{aligned}d(A, B) &= \|A - B\| = \left\| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \right\| \\ &= \sqrt{(a - \alpha)^2 + (b - \beta)^2 + (c - \gamma)^2 + (d - \delta)^2}\end{aligned}$$

Tanım 1.3.34.v $(G, \bullet)$ hem bir grup hem de bir topolojik uzay olsun. Eğer ;

(i) $F: G \times G \rightarrow G, F(g, h) := gh$

(ii) $f: G \rightarrow G, f(g) := g^{-1}$

dönüşümleri sürekli ise G ye bir topolojik grup adı verilir.

$M_2(\mathbb{R})$ ile 2×2 boyutunda, elemanları reel sayılar olan matrislerin kümesi gösterilsin.

$A = (a_{ij}) \in M_2(\mathbb{R})$ gösterimini kullanacağız. $m: M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ matris

çarpımının sürekli olduğunu göstermek istiyoruz. $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M_2(\mathbb{R})$ alalım.

$m(A, B)$ 'nin ij -elemanı $\sum_{k=1}^2 a_{ik}b_{kj}$ olur. $M_2(\mathbb{R})$, yukarıda bahsedildiği üzere $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times$

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ çarpım topolojisi üzerindeki doğal Öklid topolojisine sahip olduğundan $1 \leq i, j \leq 2$

koşulunu sağlayan her i, j tamsayı ikilisi için A matrisini ij -elemanına götüren bir

$p_{ij}: M_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ izdüşüm fonksiyonuna sahibiz. Böylece m sürekli olması için gerek ve

yeter koşul $M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R}) \xrightarrow{m} M_2(\mathbb{R}) \xrightarrow{p_{ij}} \mathbb{R}$ bileşke dönüşümünün sürekli olmasıdır.

Açıkça $p_{ij}m(A, B) = \sum_{k=1}^2 a_{ik}b_{kj}$, yani A ve B matrislerinin elemanlarının bir polinomu

olduğundan $p_{ij} \circ m$ bileşke dönüşümü süreklidir. $PSL_2(\mathbb{R}), M_2(\mathbb{R})$ 'nin hem bir alt grubu

hem de bir topolojik alt uzayıdır. Dolayısıyla Tanım (i) sağlanmıştır. Şimdi

$trs: PSL_2(\mathbb{R}) \rightarrow PSL_2(\mathbb{R}), A \rightarrow A^{-1}$ dönüşümünün sürekliliğini gösterelim. Benzer

şekilde $trs: PSL_2(\mathbb{R}) \rightarrow PSL_2(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sürekli olması için gerek ve yeter koşul tüm $PSL_2(\mathbb{R}) \xrightarrow{trs} PSL_2(\mathbb{R}) \xrightarrow{p_{jk}} \mathbb{R}, 1 \leq j, k \leq 2$ bileşke fonksiyonlarının sürekli olmasıdır. Her $p_{jk} \circ trs$ bileşke dönüşümü bir A matrisini A^{-1} in jk -elemanına götürür

Tanım 1.3.35. G bir topolojik grup, X herhangi bir topolojik uzay olsun.

$\alpha: G \times X \rightarrow X, \alpha(g, x) := gx$ ile tanımlanan α dönüşümü sürekli ve $\forall g_1, g_2 \in G, \forall x \in X$ için;

$$(i) g_1(g_2x) = (g_1g_2)x$$

$$(ii) 1x = x$$

şartları sağlanıyor ise (G, X, α) üçlüsüne bir topolojik dönüşüm grubu adı verilir.

Örnek 1.3.36. $(PSL_2(\mathbb{R}), \mathbb{H})$ bir topolojik dönüşüm grubudur. Öncelikle $\Lambda: PSL_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}, \Lambda(T, z) \mapsto Tz$, dönüşümü için, gerçekten de $Tz \in \mathbb{H}$ olduğunu görelim. Buna göre $z = x + iy, y > 0$ olduğunda $Im(Tz) > 0$ olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned} Tz &= \frac{(az + b)(c\bar{z} + d)}{|cz + d|^2} = \frac{az\bar{z} + adz + bc\bar{z} + bd}{|cz + d|^2} \\ &= \frac{a(x^2 + y^2) + adx + iady + bcx - ibcy + bd}{|cz + d|^2} \\ &= \frac{a(x^2 + y^2) + adx + bcx + bd}{|cz + d|^2} + i \frac{ady - bcy}{|cz + d|^2}. \\ Im(Tz) &= \frac{y}{|cz + d|^2} > 0. \end{aligned}$$

Λ dönüşümünün sürekliliğini göstermek için dizisel süreklilikten yararlanacağız. $(T_n, z_n) \rightarrow$

$$(T_0, z_0) \quad \text{verildiğinde} \quad \Lambda(T_n, z_n) = T_n z_n \rightarrow \Lambda(T_0, z_0) = T_0 z_0, \frac{a_n z_n + b_n}{c_n z_n + d_n} \mapsto \frac{a_0 z_0 + b_0}{c_0 z_0 + d_0}$$

olduğundan

Λ süreklidir. $Iz = z$ ve $(T_1 T_2)z = T_1(T_2 z)$ eşitlikleri matris formlarıyla çalışıldığında kolayca görülür.

Örnek 1.3.37. $(PGL_2(\mathbb{C}), \mathbb{C}_\infty)$ bir topolojik dönüşüm grubudur.

1.4. Sürekli Kesirler

Asal sayıların dağılımının araştırılması, sayılar teorisinin en dinamik konularından bir tanesidir. Riemann, asal sayıların sıklığının $s \neq 1$ olmak üzere tüm $s \in \mathbb{C}$ karmaşık sayıları için

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

eşitliğiyle tanımlanan Riemann-zeta fonksiyonunun davranışıyla yakın ilişkili olduğunu göstermiştir (Diamond, 1982). Bu yüzden Riemann-zeta fonksiyonu hem kompleks analizin, hem fonksiyonlar teorisinin, hem de sayılar teorisinin kesişiminde kalan önemli bir araştırma konusu olmuştur.

Böylesine önemli bir başka kompleks değerli fonksiyon da modüler formdur. Modüler form, $\mathbb{H}$ üst yarı düzlemi üzerinde Γ -Modüler grubunun grup hareketine bağlı olarak aşağıda daha detaylı verilen fonksiyonel eşitliği ve bir çeşit büyüme koşulunu gerçekleyen kompleks değerli analitik bir fonksiyondur. Buna göre, Γ modüler grubu için k değerli bir modüler form, $\mathbb{H}$ üzerinde

- (1) f , $\mathbb{H}$ üzerinde holomorf fonksiyondur,
- (2) $\forall z \in \mathbb{H}$ ve $\forall A \in (2, \mathbb{Z})$ için $f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^k f(z)$
- (3) f , cusp'larda (yani $z \rightarrow i\infty$ için) holomorftur

koşullarını sağlayan f -fonksiyonudur. 2. koşuldan f fonksiyonunun periyodik olduğu ve bu yüzden de Fourier serisine açılabilirdiği anlaşılır. Günümüzde modern sayılar teorisinin en önemli kısmını otomorf formlar (kabaca Öklid uzayındaki periyodik fonksiyonlar kavramının genel topolojik uzaylara genişlemesi), otomorf formlar teorisinin de en zengin ve analitik kısmını modüler formlar teşkil eder (Ford, 1951). Tanımından açıkça anlaşılacağı üzere, burada modüler grubun grup hareketinin incelenmesi esastır. Salt bu açıdan ele alındığında bile önemi aşikâr olmakla beraber, literatürde söz konusu grup hareketinin incelenmesinin Fibonacci dizileri ile ilişkisi ve Pell denklemlerinin çözümlerini üretmesi açısından da son derece önemli olduğu iyi bilinmektedir (Niven vd., 2001; Değer, 2017). Sürekli kesir, herhangi bir sayının tamsayı kısmı ve başka bir sayının çarpımsal tersinin toplamı olarak yazılması ve bu yazılışın bu diğer sayıya yinelemeli bir işlem yoluyla uygulanmasıyla elde edilen gösterimdir (Cuyt vd., 2008).

Her rasyonel sayı, bir sonlu sürekli kesir olarak gösterilebilir, ancak bu gösterim tek türlü değildir. Herhangi bir sonsuz sürekli kesrin değeri bir irrasyonel sayıdır ve yalnız bir tek irrasyonel sayıyı temsil eder. Sürekli kesirlerin, rasyonel yaklaşım teorisinde önemli bir yeri vardır ve birçok transandantal sayının oluşturulmasında büyük kolaylık sağlarlar (Niven vd., 2001). (Jones vd., 1991)'de altyörüngesel graflardaki köşelerin, bir sürekli kesir ile ifade edilebildiğinden bahsedilse de detaylı bir irdelemesi yapılmadı. (Değer vd.,

2011)'de aynı imprimitif ve transitif hareket için devre içermeyen altgrafları yani ağaçları(trees) incelendi. Ağaçlardaki minimal uzunluklu yolların Pringsheim sürekli kesiri olduğu gösterildi ve en uzak köşe hesaplandı. (Sarma vd., 2015; Kushwaha ve Sarma 2018)'de yine aynı altgraflardan biri olan $F_{1,2}$ altgrafının yeni bir tür sürekli kesir olarak tanımlanabildiği ve keyfi irrasyonel sayının da bu sürekli kesir cinsinden tek bir gösterime sahip olduğu gösterildi. (Akbaş vd., 2013)'de bazı altörüngesel graflardaki köşe kümeleri ile Fibonacci dizileri arasında kuvvetli bir ilişki olduğuna dair bulgular ortaya kondu. Son olarak (Guler vd., 2016)'da bazı kongrüans denklemlerinin çözümünde altörüngesel graflardan faydalanabileceği gösterildi. Bu çalışmanın amacı, sürekli kesirler ve Γ -Modüler grubunun normalliyenin grup hareketi arasındaki ilişkiyi incelemektir.

1.4.1. Temel Tanım ve Teoremler

Matematikte önemlerine binaen, calculusun, cebirin, aritmetiğin temel teoremi denen ifadeler vardır. Buna göre aritmetiğin temel teoremi kabaca, “Her tamsayının asal sayılar cinsinden tek türlü bir gösterimi vardır” biçiminde ifade edilir. Buradaki maksat asalların tamsayıların yapı-taşları olduğunun vurgulanması ve sayılar teorisinde asalların merkezi bir rolü olduğunun belirtilmesidir(Jones ve Jones, 1998). Bu bölümde, sürekli kesirlerin reel sayıların gösteriminde yine bir nevi yapı-taşı gibi nasıl rol aldığından bahsedilecektir(Niven vd., 2001). Öncelikle sürekli kesirlere ulaşmamızda yardımcı olacak bazı önemli tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 1.4.1.1. a, b tamsayılar olsun. $a = b \cdot c$ olacak şekilde bir c tamsayısı varsa b , a 'yı böler denir ve bu durum $a|b$ ile gösterilir.

Teorem 1.4.1.2.

- (1) $a|b$ ve $b|c \Rightarrow a|c$
- (2) $a|b \Rightarrow \forall c \in \mathbb{Z}$ için $a|bc$
- (3) $a|b$ ve $a|c \Rightarrow \forall x, y \in \mathbb{Z}$ için $a|xb + yc$ dir.

İspat:

(1) $a|b$ ve $b|c$ olduğunda $b = ma$ ve $c = nb$ olacak şekilde m ve n tamsayıları vardır. $b = ma$ değeri $c = nb$ eşitliğinde yerine yazılırsa $c = n \cdot (ma) = (nm) \cdot a$ bulunur. Bu da $a|c$ olduğunu gösterir.

(2) $a|b$ olduğunda $b = n.a$ olacak şekilde bir n tamsayısı vardır. Her iki taraf c ile çarpılırsa $b.c = n.a.c \Rightarrow b.c = (n.c).a$ bulunur. Bu da $a|b.c$ olduğunu gösterir.

(3) $a|b$ olduğunda $b = ma$ olacak şekilde bir m tamsayısı vardır. Her iki taraf x ile çarpılırsa $x.b = x.ma$ bulunur. Benzer şekilde $a|c$ olduğunda $y.c = y.na$ bulunur. Buradan, $xb + yc = x.ma + y.na = (xm + yn).a$ bulunur ki bu da $a|xb + yc$ olduğunu gösterir.

Tanım 1.4.1.3. a, b, c tamsayı için $c|a$ ve $c|b$ ise c ye a ile b nin bir ortak bölenidir denir.

Teorem 1.4.1.4.(Bölme Algoritması). $a, b \in \mathbb{Z}$ ve $b \neq 0$ tamsayıları verildiğinde

$$a = bq + r, \quad 0 \leq r < b$$

eşitliğini sağlayan bir tek $q, r \in \mathbb{Z}$ tamsayıları vardır.

Örnek 1.4.1.5. $a = 9, b = 4$ ise $9 = 2.4 + 1$, $0 \leq 1 < 4$ olduğundan $q = 2$ ve $r = 1$ 'dir. $a = -9, b = 4$ olsaydı $q = -3$ ve $r = 3$ olurdu.

Burada q sayısına bölüm, r sayısına da kalan adı verilir. $\frac{a}{b} = q + \frac{r}{b}$ ve $0 \leq \frac{r}{b} < 1$ olduğundan $\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor = q + \left\lfloor \frac{r}{b} \right\rfloor = q$ sonucu elde edilir. Böylece $q = \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor$ ve $r = a - b \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor$ eşitlikleri q ve r 'nin hesaplanmasını kolaylaştırır.

Örnek 1.4.1.6.

$a = 2023, b = 29$ ise

$$q = \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2023}{29} \right\rfloor = \lfloor 69,75 \dots \rfloor = 69,$$

$$r = a - b \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor = 2023 - 29.69 = 22 \text{ olur.}$$

Teorem 1.4.1.7. (İyi Sıralama Prensipleri): $\emptyset \neq A \subset \mathbb{N}$ ise A 'nın en küçük elemanı vardır.

İspat: Önce varlığı gösterelim.

$S = \{a - nb | n \in \mathbb{Z}\} = \{a, a \pm b, a \pm 2b, \dots\}$ kümesini tanımlayalım. Tamsayılardan oluşan bu küme negatif olmayan elemanları içerir ($n = -|a|$ alındığında), dolayısıyla $S \cap \mathbb{N} \subset \mathbb{N}$ boştan farklı bir altkümesi olup iyi sıralıdır. Böylece $S \cap \mathbb{N}$ 'nin $r = a - qb \geq 0 (q \in \mathbb{Z})$ formunda bir en küçük elemanı vardır. Buna göre $a = qb + r, r \geq 0, r < b$ olamaz, çünkü S 'nin $a = (q + 1)b = r - b < r$ formunda negatif olmayan bir elemanı olur ki bu r 'nin en küçük elemanı olması ile çelişir. Sonuç, $r < b$ 'dir.

Tekliği kanıtlamak için aksini varsayalım. $a = q_1b + r_1 = q_2b + r_2$ ve $0 \leq r_1 < b, 0 \leq, r_2 < b$ olsun. Buradan $r_1 - r_2 = (q_2 - q_1)b$ olur $q_2 \neq q_1$ ise $|q_2 - q_1| \geq 1$, dolayısıyla $|r_1 - r_2| \geq |b| = b$

Tanım 1.4.1.8. $a, b \in \mathbb{Z}$ olsun. d , a ile b 'nin bir pozitif ortak böleni olsun. Eğer a ile b 'nin her c ortak böleni için c/d ise d ortak bölenine a ile b 'nin bir en büyük ortak böleni denir ve $d=(a,b)$ ile gösterilir.

Şimdi ard arda aşağıdaki kalanlı bölmeleri yapalım:

$$u_0 = u_1 a_0 + u_2, \quad 0 < u_2 < u_1$$

$$u_1 = u_2 a_1 + u_3, \quad 0 < u_3 < u_2$$

$$u_2 = u_3 a_2 + u_4, \quad 0 < u_4 < u_3$$

...

$$u_{j-1} = u_j a_{j-1} + u_{j+1} \text{ ve } 0 < u_{j+1} < u_j$$

$$u_j = u_{j+1} a_j + 0$$

İşlem bu şekilde kalan 0 oluncaya kadar devam ettirilir. Kalanların gittikçe küçüldüğüne, $u_1 > u_2 > u_3 > \dots$ azalışına dikkat edilirse, sonlu adımdan sonra 0 kalanının bulunacağı açıktır.

Teorem 1.4.1.9.(Öklid Algoritması) Yukarıda ard arda yapılan kalanlı bölmeler arasında sıfırdan farklı en son kalan u_0 ile u_1 'in en büyük ortak bölenidir; yani $u_{j+1} = (u_0, u_1)$ 'dir.

Önerme 1.4.1.10. u_0 ile $u_1 \neq 0$ tamsayılar olmak üzere bölme algoritmasından

$$u_0 = a_0 u_1 + u_2$$

$$u_1 = a_1 u_2 + u_3$$

$$u_2 = a_2 u_3 + u_4$$

...

ilerlendiğinde $\frac{u_0}{u_1}$ ifadesi,

$$\frac{u_0}{u_1} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \dots}}}$$

şeklinde yazılabilir.

1.5. Sonlu Sürekli Kesirler

Tanım 1.5.1. $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ reel sayılar ve a_0 hariç hepsi pozitif olsun.

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}} + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}$$

şeklindeki bir ifadeye, *sonlu sürekli kesir* denir. $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ reel sayılarına sürekli kesirlerin kısmi bölümleri denir. $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ reel sayılarının hepsi tamsayı ise, sürekli kesre *basit sürekli kesir* denir (Niven vd., 2001). Sürekli kesirleri bütünüyle yazmak uzun olduğundan, $[a_0; a_1, \dots, a_n]$ gösterimi kullanılır. Ancak bu notasyonun en küçük ortak (EKOK) ile karıştırılmaması için $\langle a_0; a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ gösterimini tercih edeceğiz. Sonlu sürekli kesir tanımı aşağıdaki biçimde de ifade edilebilir:

$$\langle a_0 \rangle = a_0$$

$$\langle a_0; a_1 \rangle = a_0 + \frac{1}{a_1}$$

$$\langle a_0; a_1, \dots, a_n \rangle = \langle a_0; a_1, \dots, a_{n-2}, a_{n-1} + \frac{1}{a_n} \rangle \quad (n \geq 2)$$

Öklid Algoritması yordamıyla, rasyonel sayıları sürekli kesirler cinsinden ifade edebiliriz.

Örneğin;

$$225 = 1.157 + 68$$

$$157 = 2.68 + 21$$

$$68 = 3.21 + 5$$

$$21 = 4.5 + 1$$

olduğundan

$$\frac{225}{157} = 1 + \frac{68}{157}$$

$$= 1 + \frac{1}{\frac{157}{68}}$$

$$= 1 + \frac{1}{2 + \frac{21}{68}}$$

$$= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{68}{21}}}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{5}}} \\
&= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\frac{21}{5}}}} \\
&= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{5}}}}
\end{aligned}$$

olur. $5 = 4 + \frac{1}{1}$ yazılabileceğinden

$$\frac{225}{157} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1}}}}}$$

elde edilir.

Şimdi her sonlu sürekli kesrin bir rasyonel sayı ifade edeceği, daha sonra her rasyonel sayının sonlu bir sürekli kesir olarak ifade edilebileceği gösterilecektir.

Teorem 1.5.2. Her sonlu basit sürekli kesir bir rasyonel sayı gösterir.

İspat: Matematik induksiyon metodu ile kanıtlayacağız.

$n = 1$ için, $\langle a_0; a_1 \rangle = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1}$ ve $a_i \in \mathbb{Z}$ olduğundan $\langle a_0; a_1 \rangle \in \mathbb{Q}$.

Şimdi, a_0 hariç $a_0, a_1, \dots, a_k \in \mathbb{Z}^+$ ve $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\langle a_0, a_1, \dots, a_k \rangle \in \mathbb{Q}$ kabul edilsin.

Yine $a_0, a_1, \dots, a_{k+1} \in \mathbb{Z}^+$ olsun.

Yukarıdaki kabulden ötürü $\langle a_1; a_2, \dots, a_k, a_{k+1} \rangle \in \mathbb{Q}$.

Bu durumda, $y \neq 0$ olmak üzere $\langle a_1; a_2, \dots, a_k, a_{k+1} \rangle = \frac{x}{y}$ olacak şekilde x ve y tamsayıları vardır. O zaman,

$$\langle a_0; a_1, \dots, a_k, a_{k+1} \rangle = a_0 + \frac{1}{\langle a_1; a_2, \dots, a_k, a_{k+1} \rangle} = a_0 + \frac{1}{x/y} = \frac{a_0 x + y}{x} \in \mathbb{Q}.$$

Şimdi de her rasyonel sayının bir sonlu sürekli kesir olarak yazılabileceği gösterilecektir.

Teorem 1.5.3. Her rasyonel sayı bir sonlu basit sürekli kesir olarak ifade edilebilir.

İspat: u_0 ile $u_1 \neq 0$ tamsayılar olmak üzere, $x = \frac{u_0}{u_1}$ olsun.

Öklid Algoritması yordamıyla x in sürekli kesir açılımı

$$u_0 = u_1 a_1 + u_2 \quad 0 < u_2 < u_1,$$

$$u_1 = u_2 a_2 + u_3 \quad 0 < u_3 < u_2,$$

$$u_2 = u_3 a_3 + u_4 \quad 0 < u_4 < u_3,$$

...

$$u_{n-3} = u_{n-2} a_{n-2} + u_{n-1} \quad 0 < u_{n-1} < u_{n-2},$$

$$u_{n-2} = u_{n-1} a_{n-1} + u_n \quad 0 < u_n < u_{n-1},$$

$$u_{n-1} = u_n a_n.$$

Burada $a_2, a_3, \dots, a_n \in \mathbb{Z}^+$ dır. Bu eşitlikler kesir formunda ifade edilirse,

$$\frac{u_0}{u_1} = a_1 + \frac{u_2}{u_1} = a_1 + \frac{1}{u_1/u_2}$$

$$\frac{u_1}{u_2} = a_2 + \frac{u_3}{u_2} = a_2 + \frac{1}{u_2/u_3}$$

$$\frac{u_2}{u_3} = a_3 + \frac{u_4}{u_3} = a_3 + \frac{1}{u_3/u_4}$$

...

$$\frac{u_{n-3}}{u_{n-2}} = a_{n-2} + \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} = a_{n-2} + \frac{1}{u_{n-2}/u_{n-1}}$$

$$\frac{u_{n-2}}{u_{n-1}} = a_{n-1} + \frac{u_n}{u_{n-1}} = a_{n-1} + \frac{1}{u_{n-1}/u_n}$$

$$\frac{u_{n-1}}{u_n} = a_n$$

olur. Bu yazılışta u_1/u_2 'nin değeri ilk satırdaki yerine yazılırsa,

$$\frac{u_0}{u_1} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{u_2/u_3}}$$

elde edilir. Bu şekilde devam edilerek üçüncü satırda u_2/u_3 'ün değeri bir önceki satırda yerine yazılırsa,

$$\frac{u_0}{u_1} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{u_3/u_4}}}$$

olur. Böylece, son adımda

$$\frac{u_0}{u_1} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}}$$

neticesi bulunur.

Sonuç olarak $\frac{u_0}{u_1}$ sayısının $\langle a_0; a_1, \dots, a_n \rangle$ gösteriminde bir sürekli kesir ifadesi elde edilmiş olup, dolayısıyla da hipotezin doğruluğu kanıtlanmış olmaktadır. Yeniden $\xi_0 = \frac{u_0}{u_1}$ olmak üzere

$$\xi_i = a_i + \frac{1}{\xi_{i+1}}, 0 \leq i \leq j-1, \xi_j = a_j$$

gösterimini ele alacak olursak, a_i 'ler Öklid Algoritmasından elde edilen bölüm değerleridir. Burada a_0 pozitif, negatif ya da sıfır olabilir. Ancak $0 < u_2 < u_1$ olduğundan a_1 pozitiftir, ve benzer şekilde $a_2, \dots, a_j$ bölümleri pozitif tamsayılardır.

Öte yandan, bir rasyonel sayının sürekli kesir açılımı tek türlü değildir. Örneğin, $51/22$ rasyonel sayının sürekli kesir açılımı $51/22 = \langle 2, 3, 7 \rangle$ dir. Ancak $\langle 2, 3, 6, 1 \rangle$ 'in de aynı sayıyı verdiği kolayca görülür. Buna göre $x_j > 1$ için,

$$x_j = (x_j - 1) + 1 = (x_j - 1) + \frac{1}{1}$$

eşitliklerinden

$$\langle x_0; x_1, \dots, x_j \rangle = \langle x_0; x_1, \dots, x_j - 1, 1 \rangle$$

sonucu bulunur. Yukarıdaki örnek bu duruma uymaktadır. Eğer $x_j = 1$ ise o zaman da

$$x_{j-1} + \frac{1}{x_j} = x_{j-1} + \frac{1}{1} = x_{j-1} + 1$$

olduğundan

$$\langle x_0; x_1, \dots, x_{j-1}, x_j \rangle = \langle x_0; x_1, \dots, x_{j-2}, x_{j-1} + 1 \rangle$$

sonucu bulunur.

Sonuç 1.5.4.

1. Her sonlu sürekli kesir bir rasyonel sayıdır.
2. Her rasyonel sayının birinin uzunluğu çift ve diğerinin uzunluğu tek olan iki tür sürekli kesir açılımı vardır.

Önerme 1.5.5. $1 \leq i \leq j$ olmak üzere, $\langle x_0; x_1, \dots, x_j \rangle = \langle x_0; x_1, \dots, x_{i-1}, \langle x_i; x_{i+1}, \dots, x_j \rangle \rangle$ dir.

İspat. Esasen, sürekli kesir tanımından bu önermenin doğruluğu kolayca görülebilir. Yine de içerideki $\langle x_i; x_{i+1}, \dots, x_j \rangle$ sürekli kesrine matematik induksiyon uygulayalım. k ile sürekli kesrin içindeki terim sayısı gösterilmek üzere, $k = 1$ ise $i = j$, o zaman $\langle x_j \rangle = x_j$ olup eşitlik apaçık, dolayısıyla ispat tamamdır.

$k = 2$ olsun. Bu durumda $\langle x_{j-1}; x_j \rangle = x_{j-1} + \frac{1}{x_j}$ eşitliği, sürekli kesrin tanımından açıktır.

Şimdi yine içerideki $\langle x_i; x_{i+1}, \dots, x_j \rangle$ sürekli kesrinin m terimli olduğunda özdeşliğin doğru olduğunu kabul edip, $m + 1$ terime sahip olduğu durumu değerlendirelim. Matematik induksiyon iki kez uygulanır ve $k = 2$ için de bir kez uygulanırsa,

$$\begin{aligned} \langle x_0; x_1, \dots, x_j \rangle &= \langle x_0; x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, \langle x_{i+1}; x_{i+2}, \dots, x_j \rangle \rangle \\ &= \langle x_0; x_1, \dots, x_{i-1}, \langle x_i; \langle x_{i+1}; x_{i+2}, \dots, x_j \rangle \rangle \rangle \\ &= \langle x_0; x_1, \dots, x_{i-1}, \langle x_i; x_{i+1}, \dots, x_j \rangle \rangle \end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Önerme 1.5.6. $1 \leq i \leq j$ olmak üzere, $\langle x_0; x_1, \dots, x_j \rangle = x_0 + \frac{1}{\langle x_1; x_2, \dots, x_j \rangle}$ dir.

İspat. Bir önceki önermeden istifade edeceğiz. Buna göre

$$\langle x_0; x_1, \dots, x_j \rangle = \langle x_0; x_1, \dots, x_{i-1}, \langle x_i; x_{i+1}, \dots, x_j \rangle \rangle$$

olduğunu biliyoruz. $i = 1$ için

$$\langle x_0; x_1, \dots, x_j \rangle = \langle x_0; \langle x_1; x_2, \dots, x_j \rangle \rangle = x_0 + \frac{1}{\langle x_1; x_2, \dots, x_j \rangle}$$

elde edilir.

Tanım 1.5.7. $\langle a_0; a_1, \dots, a_n \rangle$ sürekli kesrine $\langle a_0; a_1, \dots, a_m \rangle$ sürekli kesrinin n . yakınsayanı denir ve r_n ile gösterilir. Burada $n < m$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ dır.

Şimdi sürekli kesrin yakınsayanlarına dair özellikleri ispatsız olarak ele alacağız (Khichin, 1964)

Teorem 1.5.8. $a_0 \in \mathbb{R}$ ve $a_1, a_2, \dots, a_m \in \mathbb{R}^+$ olsun.

$h_0, h_1, \dots, h_m$ ve $q_0, q_1, \dots, q_m$ dizileri

$$h_0 = a_0 \quad k_0 = 1$$

$$h_1 = a_0 a_1 + 1 \quad k_1 = a_1$$

$$h_n = a_n h_{n-1} + h_{n-2} \quad k_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}, \quad n = \overline{2, m}$$

olmak üzere n . yakınsayanı

$$r_n = \langle a_0; a_1, \dots, a_n \rangle = \frac{h_n}{k_n}, \text{ dir.}$$

Örnek 1.5.9. $\frac{21}{13}$ rasyonel sayısının n . yakınsayanlarını bulalım.

$$\begin{aligned}
 \frac{21}{13} &= 1 + \frac{8}{13} \\
 &= 1 + \frac{1}{\frac{13}{8}} \\
 &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{5}{8}} \\
 &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{8}{5}}} \\
 &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{3}{5}}} \\
 &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{5}{3}}}} \\
 &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{2}{3}}}} \\
 &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{3}{2}}}}} \\
 &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}}
 \end{aligned}$$

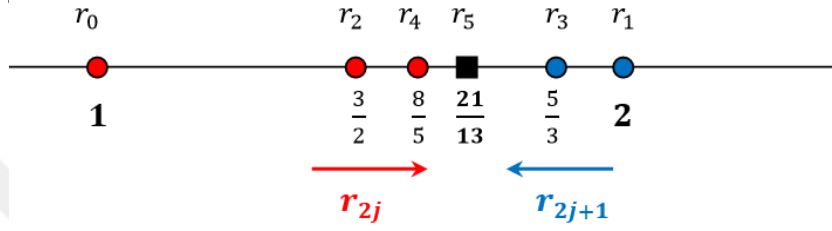
olduğundan $\frac{21}{13} = \langle \underbrace{1}_{a_0}; \underbrace{1}_{a_1}, \underbrace{1}_{a_2}, \underbrace{1}_{a_3}, \underbrace{1}_{a_4}, \underbrace{2}_{a_5} \rangle$ gösterimi elde edilir. Buna göre $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

için

h_n ve k_n dizileri tablodaki gibidir;

Tablo 2. Sürekli kesrin yakınsayanları

$h_0 = a_0 = 1$	$k_0 = 1$
$h_1 = a_0 a_1 + 1 = 1.1 + 1 = 2$	$k_1 = a_1 = 1$
$h_2 = a_2 h_1 + h_0 = 1.2 + 1 = 3$	$k_2 = a_2 k_1 + k_0 = 1.1 + 1 = 2$
$h_3 = a_3 h_2 + h_1 = 1.3 + 2 = 5$	$k_3 = a_3 k_2 + k_1 = 1.2 + 1 = 3$
$h_4 = a_4 h_3 + h_2 = 1.5 + 3 = 8$	$k_4 = a_4 k_3 + k_2 = 1.3 + 2 = 5$
$h_5 = a_5 h_4 + h_3 = 2.8 + 5 = 21$	$k_5 = a_5 k_4 + k_3 = 2.5 + 3 = 13$

Şekil 9. $\frac{21}{13}$ rasyonel sayısı için tek ve çift indisli yakınsayanlar

Teorem 1.5.10. $\langle a_0; a_1, \dots, a_m \rangle$ sonlu basit sürekli kesrinin n . yakınsayanı $r_n = \frac{h_n}{k_n}$ ise $(h_n, k_n) = 1$ ' dir.

Teorem 1.5.11. $\langle a_0; a_1, \dots, a_n \rangle$ sonlu basit sürekli kesrinin n . yakınsayanı r_n için $r_0 < r_2 < r_4 < \dots < r_5 < r_3 < r_1$ eşitsizliği sağlanır. Yani r_{2j} -çift indisli artarken, r_{2j+1} -tek indisli azalır. Üstelik $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n$ mevcuttur ve $\forall j \geq 0$ için $r_{2j} < \lim_{n \rightarrow \infty} r_n < r_{2j+1}$ ' dir.

Tanım 1.5.12. a_0 hariç hepsi pozitif tamsayılar olan $a_0, a_1, a_2, \dots$ tamsayılar dizisi $\langle a_0, a_1, a_2, \dots \rangle$ ile gösterilen bir sonsuz basit sürekli kesri tanımlar. $\langle a_0, a_1, a_2, \dots \rangle$ 'nin değeri $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle a_0, a_1, a_2, \dots \rangle$ ile hesaplanır.

Burada $r_n = \langle a_0; a_1, \dots, a_n \rangle$ n . yakınsayanı olup $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h_n}{k_n}$ 'dir.

Teorem 1.5.13. a_0 tamsayısı hariç $a_0, a_1, \dots$ pozitif tamsayılar olsun. $\langle a_0; a_1, a_2, \dots \rangle$ sonsuz sürekli kesri irrasyoneldir.

Teorem 1.5.14. Her $\alpha \in \mathbb{R}$ reel sayısı için tek bir sürekli kesir yazılışı vardır. Aynı α reel sayısının rasyonel olması için gerek yeter şart sürekli kesir yazılışının sonlu olması; irrasyonel sayı olması için gerek ve yeter şart sürekli kesir yazılışının sonsuz olmasıdır.

Tanım 1.5.15. Bir $\langle a_0; a_1, a_2, \dots \rangle$ sonsuz basit sürekli $r, n \in \mathbb{Z}$ için $a_r = a_{n+r}$ özelliğinde ise, sözlü ifade edilirse, belli bir adımdan sonra tekrarlı terimlerden oluşuyorsa *periyodiktir* denir.

Buna göre $\langle b_0; b_1, b_2, \dots, b_j, a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, \dots \rangle$ biçiminde ise gösterimdeki sadelik için $\langle b_0; b_1, b_2, \dots, b_j, \overline{a_0, a_1, \dots, a_{n-1}} \rangle$ ile gösterilir.

Örnek 1.5.16. (Cangül ve Çelik, 2002) $\sqrt{3}$ irrasyonel sayısının sürekli kesir açılımını yazalım;

$$\begin{aligned}
 \sqrt{3} &= 1 + (\sqrt{3} - 1) \\
 &= 1 + \frac{1}{\frac{\sqrt{3} + 1}{2}} \\
 &= 1 + \frac{1}{\frac{\sqrt{3} - 1}{2}} \\
 &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{\sqrt{3} - 1}{2}}} \\
 &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\sqrt{3} + 1}} \\
 &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \sqrt{3} - 1}} \\
 &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\sqrt{3} - 1}}} \\
 &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\sqrt{3} + 1}}}
 \end{aligned}$$

olduğundan $\sqrt{3} = \langle 1; 1, 2, 1, 2, \dots \rangle = \langle 1; \overline{1, 2} \rangle$

Örnek 1.5.17. $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ irrasyonel sayısının sürekli kesir gösterimini ve 3. yakınsayanını bulalım;

$$\frac{1+\sqrt{3}}{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \dots}}}}}$$

olduğu, yukarıdaki gibi gösterilir. Böylece

$$\frac{1+\sqrt{3}}{2} = \langle 1; \overline{2,1} \rangle$$

$$\frac{h_3}{k_3} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}$$

$$= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{3}{2}}}$$

$$= 1 + \frac{1}{2 + \frac{2}{3}}$$

$$= 1 + \frac{1}{\frac{8}{3}}$$

$$= 1 + \frac{3}{8}$$

$$= \frac{11}{8}$$

$h_3 = 11, k_3 = 8$ olup $r_3 = 1,375$, $\frac{1+\sqrt{3}}{2} \cong 1,365$ için iyi bir yaklaşımdır.

1.6. Möbiüs Dönüşümleri ve Sürekli Kesirler

Möbiüs dönüşümlerinin sürekli kesirlerle olan ilişkisine kısaca değinelim.

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots}}} \quad \text{sonsuz sürekli kesiri verildiğinde} \quad T_n(z) = \frac{a_n z + 1}{z} = a_n + \frac{1}{z}$$

dönüşümü için sürekli kesrin eşitinin $(T_0 \circ T_1 \circ \dots)(z)$ ile verilebildiği görülür. Üstelik n .

yaklaşım $\frac{h_n}{k_n} = (T_0 \circ \dots \circ T_n)(z)$ olup, gerçek değeri de $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h_n}{k_n} = \lim_{z \rightarrow \infty} (T_0 \circ \dots \circ T_n)(z)$

ile hesaplanabilir. Ayrıca, $\frac{h_n}{k_n} = \langle a_0; a_1, \dots, a_n \rangle = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}}}$ için

$\begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_n & h_{n-1} \\ k_n & k_{n-1} \end{pmatrix}$ eşitliği vardır (Potts, 1996).



2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

2.1. Modüler Grup

$PSL(2, \mathbb{R})$ nin üzerinde en çok çalışılan alt grubu olan $\Gamma := \{ T : z \rightarrow \frac{az+b}{cz+d} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z} \text{ ve } ad - bc = 1 \}$ modüler grubunu göz önüne alalım.

Bu grup aşağıdaki gibi 2×2 lik tamsayılar matrisiyle de temsil edilebilir:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \det A = 1.$$

A ve $-A$ aynı dönüşümü temsil ettiğinden söz konusu matrisi negatifi ile eş tutacağız. Böylece matris ve dönüşümü arasında bir ayrım yapılmayacaktır.

Teorem 2.1.1. Γ modüler grubu $X^2 = Y^3 = I$ bağıntısı ile verilen $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ve $Y = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ elemanları tarafından üretilir. Yani; $\Gamma = \langle X, Y \rangle$ dir.

İspat: 3 durumda ele alalım.

i. $a = 0$ ise $bc = -1$ olur. Buradan $b = -c = \pm 1$ elde edilir. Buradan

$$T(z) = \frac{\pm 1}{\pm z + d} = MS^{\pm d}(z) \text{ elde edilir.}$$

ii. $|a| = 1$ olsun. $\frac{-az-b}{-cz-d} = \frac{az+b}{cz+d}$ olduğundan $a = 1$ alabiliriz. Buradan $d - bc = 1$ olur.

Dikkat

edilirse

$$T(z) = \frac{z+b}{cz+d} \xrightarrow{M} \frac{-cz+d}{z+b} \xrightarrow{S} \frac{-1}{z+b}$$

Buradan $MS^c T(z) = \frac{-1}{z+b}$ ki bu bizi durum i'ye götürür.

iii. $|a| > 1$ olsun. Bu durumu, durum ii'ye dönüştürebiliriz. Amacımız T

dönüşümünü $|a_1| < |a|$ ve $|c_1| < |c|$ olacak şekilde değiştirerek yeni bir $T_1(z) = \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1}$

dönüşümü elde etmektir. Eğer bu mümkünse $|a_1|$, 1'e yakınsar, işlem tekrar ettirilerek en nihayetinde $|a_n| = 1$ olan T_n dönüşümü elde ederiz.

M_1 dönüşümü tanımlayalım. Öncelikle $|a| > |c|$ olduğunu kabul edelim. (Aksi takdirde, T yerine MT dönüşümünü göz önüne alırız. Şimdi uygun bir $n \in \mathbb{Z}$ alalım böylece $|a - nc|$ ifadesi $|a|$ ve $|c|$ değerlerinden küçüktür. S^n dönüşümünü uygulayarak $a - nc$ terimi elde edilir:

$$S^n T(z) = \frac{(a - nc)z + (b - nd)}{cz + d}$$

Buradan T dönüşümünü uygularız böylelikle $(a - nc)$ ve c yer değiştirir, buradan $T_1(z) := MS^{-n}T(z)$ olur ve ispat tamamlanır.

Γ modüler grubunun cusp kümesi $\hat{\mathbb{Q}}$ dır. Gerçekten;

$T \in \Gamma$ olmak üzere T nin sabit noktaları $z_{1,2} = \frac{(a-d) \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4}}{2c} = \frac{(a-d) \pm \sqrt{|a+d|^2 - 4}}{2c}$ şeklinde idi. Parabolik dönüşümde $|a + d| = 2$ olduğundan $z = \frac{(a-d)}{2c}$ olur ki burada $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ olduğundan $z = \frac{(a-d)}{2c} \in \hat{\mathbb{Q}}$ olur.

2.2. Γ nın $\hat{\mathbb{Q}}$ Üzerindeki Hareketi

$\hat{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ genişletilmiş rasyonel sayılar kümesinin her bir elemanı, $x, y \in \mathbb{Z}$ ve $(x, y) = 1$ olmak üzere, $\frac{x}{y}$ indirgenmiş kesri olarak yazılabilir. $\frac{x}{y} = \frac{-x}{-y}$ olduğundan bu gösterim tek değildir. ∞ u, $\frac{1}{0} = \frac{-1}{0}$ ile temsil edeceğiz.

Γ nın $\hat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketi $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \frac{x}{y} \rightarrow \frac{ax+by}{cx+dy}$ şeklindedir. $T \in \Gamma$ olmak üzere;

$$T\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{a \cdot \frac{x}{y} + b}{c \cdot \frac{x}{y} + d} = \frac{\frac{ax+by}{y}}{\frac{cx+dy}{y}} = \frac{ax+by}{cx+dy} \quad \text{ve}$$

$$T\left(\frac{-x}{-y}\right) = \frac{a \cdot \frac{-x}{-y} + b}{c \cdot \frac{-x}{-y} + d} = \frac{\frac{-ax - by}{y}}{\frac{-cx - dy}{y}} = \frac{-ax - by}{-cx - dy} = \frac{ax + by}{cx + dy}$$

olduğundan $T\left(\frac{x}{y}\right) = T\left(\frac{-x}{-y}\right)$ dir. Bu da Γ modüler grubunun $\hat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketinin iyi tanımlı olduğunu ifade eder.

Eğer $(x, y) = 1$ ve $ad - bc = 1$ ise $\frac{ax+by}{cx+dy}$ kesri de indirgenmiş formdadır.

Teorem 2.2.1.

- (i) Γ nın $\hat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketi transitiftir.
- (ii) $\hat{\mathbb{Q}}$ nın herhangi bir noktasının sabitleyeni sonsuz devirlidir.

Önerme 2.2.2. (G, Ω) transitif permütasyon grubu olsun. Bu takdirde; (G, Ω) primitiftir $\Leftrightarrow$ Her $\alpha \in \Omega$ için, $\alpha \in \Omega$ noktasının sabitleyeni olan G_α , G nin bir maksimal alt grubudur.

Önerme 2.2.3. (G, Ω) transitif olsun. Bu takdirde; (G, Ω) imprimitiftir $\Leftrightarrow \exists \alpha \in \Omega$ ve $H < G$ öyle ki $G_\alpha \not\leq H \not\leq G$ dir.

G yerine Γ modüler grubu, Ω yerine $\hat{\mathbb{Q}}$ alarak işlem yapacağız. Burada ∞ un sabitleyeni olan Γ_∞ , Γ modüler grubunun bir alt grubudur ve $\Gamma_\infty = \langle \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rangle$ dir. $\hat{\mathbb{Q}}$ üzerinde bir Γ invaryant denklik bağıntısını aşağıdaki şekilde elde edebiliriz.

Biliyoruzki, $\Gamma_0(n) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma : c \equiv 0 \pmod{n} \right\}$ kongruans alt grubu alındığında $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\Gamma_\infty < \Gamma_0(n) \leq \Gamma$ ve $n > 1$ ise $\Gamma_\infty < \Gamma_0(n) < \Gamma$ dir. Böylece Γ , $\hat{\mathbb{Q}}$ üzerinde imprimitif olarak hareket eder. $v = \frac{r}{s}$, $w = \frac{x}{y} \in \hat{\mathbb{Q}}$ olmak üzere, $v = g(\infty)$ ve $w = g'(\infty)$ olan $g, g' \in \Gamma$ vardır. Böylece, $g = \begin{pmatrix} r & * \\ s & * \end{pmatrix}$ ve $g' = \begin{pmatrix} x & * \\ y & * \end{pmatrix}$ formundadırlar. $v \approx w \Leftrightarrow g^{-1}g' \in H = \Gamma_0(n) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} * & * \\ -s & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & * \\ y & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ ry - sx & * \end{pmatrix} \in H = \Gamma_0(n) \Leftrightarrow ry - sx \equiv 0 \pmod{n}$ dir. Böylece, $\frac{r}{s} \approx \frac{x}{y} \Leftrightarrow ry - sx \equiv 0 \pmod{n}$ dir.

2.3. Γ nın $\hat{\mathbb{Q}}$ Üzerindeki Alt Yörüngesel Grafları

(G, Ω) bir transitif permütasyon grubu olsun. Bu takdirde, G $\Omega \times \Omega$ üzerinde $g: (\alpha, \beta) \rightarrow (g(\alpha), g(\beta))$ ile hareket eder. Bu hareketin yörüngelerine G nin alt yörüngeleri denir ve (α, β) yı içeren alt yörünge $O(\alpha, \beta)$ ile gösterilir. $O(\alpha, \beta)$ alt yörüngesinden bir $\mathcal{G}(\alpha, \beta)$ alt yörüngesel grafini aşağıdaki gibi elde edebiliriz:

* Köşeleri Ω nın elemanları ve

* $(\gamma, \delta) \in O(\alpha, \beta)$ ise γ dan δ ya yönlendirilmiş bir kenar vardır denir ve $\gamma \rightarrow \delta$ ile gösterilir.

Açık olarak, $O(\beta, \alpha)$ da bir alt yörüngedir ve $O(\alpha, \beta)$ ile $O(\beta, \alpha)$ alt yörüngeleri ya eşittir ya da ayrıktırlar. Eğer bu alt yörüngeler ayrık iseler $\mathcal{G}(\beta, \alpha)$ alt yörüngesel grafi $\mathcal{G}(\alpha, \beta)$ alt yörüngesel grafinin sadece ters yönlendirilmiştir ve bu durumda $\mathcal{G}(\alpha, \beta)$ ile $\mathcal{G}(\beta, \alpha)$ ya eşleşmiş alt yörüngesel graflar denir. Eğer $O(\alpha, \beta)$ ile $O(\beta, \alpha)$ alt yörüngeleri eşit iseler bu durumda $\mathcal{G}(\alpha, \beta) = \mathcal{G}(\beta, \alpha)$ alt yörüngesel grafi çift taraflı yönlendirilmiş kenarlardan oluşur. Bu durumda bu alt yörüngesel grafa kendi eşleşmiştir denir.

Teorem 2.3.1. $\frac{r}{s} \rightarrow \frac{x}{y}$ $\mathcal{G}_{u,n}$ de bir kenardır $\Leftrightarrow$

(a) $x \equiv ur \pmod{n}$, $y \equiv us \pmod{n}$, $ry - sx = n$ veya

(b) $x \equiv -ur \pmod{n}$, $y \equiv -us \pmod{n}$ ve $ry - sx = -n$

Sonuç 2.3.2. $u^2 \not\equiv -1 \pmod{n}$ ve $uv \equiv -1 \pmod{n}$ olsun. Bu takdirde; $\mathcal{G}_{u,n}$ ile $\mathcal{G}_{v,n}$ eşleşmiştir.

Sonuç 2.3.3. $\mathcal{G}_{u,n}$ kendi eşleşmiştir $\Leftrightarrow u^2 \equiv -1 \pmod{n}$ dir.

Sonuç 2.3.4. F nin kenarları $\mathbb{U}$ da kesişmezler.

2.3.1. $\mathcal{G}_{u,n}$ ve $F_{u,n}$ Grafları

Bu bölümde $F = \mathcal{G}_{1,1}$ Farey grafinin özelliklerini diğer $\mathcal{G}_{u,n}$ alt yörüngesel graflarına nasıl genişletebileceğimizi göreceğiz. $\frac{r}{s} \rightarrow \frac{x}{y} \in \mathcal{G}_{u,n} \Leftrightarrow ry - sx = \mp n \Leftrightarrow ry - sx \equiv 0 \pmod{n} \Leftrightarrow \frac{r}{s} \approx_n \frac{x}{y}$ dir ve her bir $\mathcal{G}_{u,n}$ $\Psi(n)$ tane alt grafin ayrık birleşiminden oluşur. Bu, $\approx_n$ Γ invaryant denklik bağıntısına göre, her bir alt grafin köşeleri bir tek blok oluşturur. Γ $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerinde transitif olarak hareket ettiğinden Γ bu blokları transitif olarak permüte eder. Bu da alt yörüngelerin her birinin birbirleriyle izomorf oldukları anlamına gelir. $\mathcal{G}_{u,n}$ nin, köşeleri ∞ u içeren $[\infty] = \left\{ \frac{x}{y} : \frac{x}{y} \approx \frac{1}{0} \right\} = \left\{ \frac{x}{y} : y \equiv 0 \pmod{n} \right\}$ bloğunda olan alt grafini $F_{u,n}$ ile göstereyim. Dolayısı ile; $\mathcal{G}_{u,n}$, $F_{u,n}$ nin $\Psi(n)$ tane ayrık kopyasından oluşur.

Teorem 2.3.1.1. $\frac{r}{s} \rightarrow \frac{x}{y}$ $F_{u,n}$ de bir kenardır $\Leftrightarrow$

(i) $x \equiv ur \pmod{n}$ ve $ry - sx = n$ veya

(ii) $x \equiv -ur \pmod{n}$ ve $ry - sx = -n$.

Lemma 2.3.1.2. (i) $F_{u,n}$ nin tüm v köşeleri için, $F_{u,n} \rightarrow F_{-u,n}$ ye $T(v) = -v$ ile verilen fonksiyon bir izomorfizmadır.

(ii) Eğer $m \mid n$ ise $F_{u,n}$ nin tüm v köşeleri için, $F_{u,n}$ den $F_{u,m}$ nin bir alt grafına $T(v) = nv/m$ ile verilen fonksiyon bir izomorfizmadır.

İspat: (i) $F_{u,n}$ nin köşelerinin kümesi $[\infty]_n = \left\{ \frac{x}{y} \in \widehat{\mathbb{Q}} : y \equiv 0 \pmod{n} \right\}$ ve $F_{-u,n}$ nin köşelerinin kümesi $[\infty]_{-n} = \left\{ \frac{x}{y} \in \widehat{\mathbb{Q}} : y \equiv 0 \pmod{-n} \right\} = \left\{ \frac{x}{y} \in \widehat{\mathbb{Q}} : y \equiv 0 \pmod{n} \right\}$ olduğundan $[\infty]_n = [\infty]_{-n} := [\infty]$ dur. $T(v) = -v$ fonksiyonunun $[\infty]$ üzerinde birebir örten olduğu açıktır. Şimdi T dönüşümünün yapı koruyan olduğunu göstereyim. $\frac{a}{bn} \rightarrow \frac{c}{dn} \in F_{u,n}$ olsun.

Teorem 2.3.1.1. (i) veya (ii) sağlanır. Farzedelim ki teoremin (i) şıkkı sağlansın. Bu durumda, $c \equiv ua \pmod{n}$ ve $ad - bc = 1$ dir. Böylece, $(-c) \equiv u(-a) \pmod{n} \equiv -(-u)(-a) \pmod{n}$ ve $(-a)d - (-b)c = -1$ dir. Dolayısı ile, Teorem 2.3.1.1 (ii) ye göre $\Rightarrow \frac{-a}{bn} \rightarrow \frac{-c}{dn} \in F_{-u,n}$ dir. Benzer şekilde Teorem 2.3.1.1. in (ii) şıkkının sağlandığı varsayılp Teorem 2.3.1.1 (i) ye göre $\frac{-a}{bn} \rightarrow \frac{-c}{dn} \in F_{-u,n}$ olduğu gösterilebilir. Böylece T birebir ve örten ve yapı koruyan bir dönüşümdür yani T bir izomorfizmadır.

(ii) $F_{u,n}$ nin köşelerinin kümesi $[\infty]_n = \{\frac{x}{y} \in \mathbb{Q} : y \equiv 0 \pmod{n}\}$ ve $F_{u,m}$ nin köşelerinin kümesi $[\infty]_m = \{\frac{x}{y} \in \mathbb{Q} : y \equiv 0 \pmod{m}\}$ dir. $T: [\infty]_n \rightarrow [\infty]_m$, $T(v) = nv/m$ dönüşümünün birebir olduğu açıktır. Şimdi gösterelim ki T dönüşümü yapı koruyan bir dönüşümdür: $v = \frac{r}{sn} \rightarrow \frac{x}{yn} = w \in F_{u,n}$ olsun. $T(v) = \frac{r}{sn} \rightarrow \frac{x}{ym} = T(w) \in F_{u,m}$ olduğunu gösterelim. Farzedelim ki teorem 2.3.1.1 (i) sağlansın. Bu durumda, $x \equiv ur \pmod{n}$ ve $ry - sx = 1$ dir. $m \mid n$ olduğundan $x \equiv ur \pmod{m}$ dir. Dolayısıyla $x \equiv ur \pmod{m}$ ve $ry - sx = 1$ olduğundan Teorem 2.3.1.1 (ii) gereği $\frac{r}{sm} \rightarrow \frac{x}{ym} \in F_{u,m}$ de bir kenardır. Benzer şekilde teoremin (ii) şıkkının sağlandığı varsayılp $\frac{r}{sm} \rightarrow \frac{x}{ym} \in F_{u,m}$ de bir kenar olduğu gösterilebilir. Bu bize T nin bir $F_{u,n}$ den $F_{u,m}$ ye bir monomorfizma olduğunu söyler. Ancak $F_{u,m}$ nin bir alt grafına izomorftur.

Lemma 2.3.1.2 (ii) de $m = 1$ olduğu durumda aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 2.3.1.3. $F_{u,n}$ nin tüm v köşeleri için $F_{u,n}$ den $F (= \mathcal{G}_{1,1} = F_{1,1})$ in bir alt grafına $f: v \rightarrow -v$ ile verilen bir izomorfizma vardır.

Tanım 2.3.1.4. k_1, k_2, k_3 üç köşe olmak üzere $k_1 \rightarrow k_2 \rightarrow k_3 \rightarrow k_1$ şeklinde, yani kenarların hepsi aynı yönde ise buna yönlendirilmiş üçgen; $k_1 \rightarrow k_2 \leftarrow k_3 \rightarrow k_1$ gibi farklı yönde kenar varsa buna da ters yönlendirilmiş üçgen denir. Kendi eşleşmiş bir alt yörüngesel grafa bu iki kavram birbirine denktir.

Teorem 2.3.1.5. $F_{u,n}$ yönlendirilmiş bir üçgen içerir $\Leftrightarrow u^2 \mp u + 1 \equiv 0 \pmod{n}$.

2.3.2. $\mathcal{G}_{1,1}$ Grafı

Bu durumda, $u = n = 1$. Böylece $v = r/s$ ve $w = x/y$ köşelerinin komşu köşeler olması için gerek ve yeter koşul $y - sx = \pm 1$. Ayrıca, her $m \geq 1$ ve $m \in \mathbb{Z}$ için, m

ağırlıklı F_m Farey dizisi x/y öyle ki $|y| \leq m$ formundaki tüm rasyonel sayıların, artan bir sırası ile verilir.

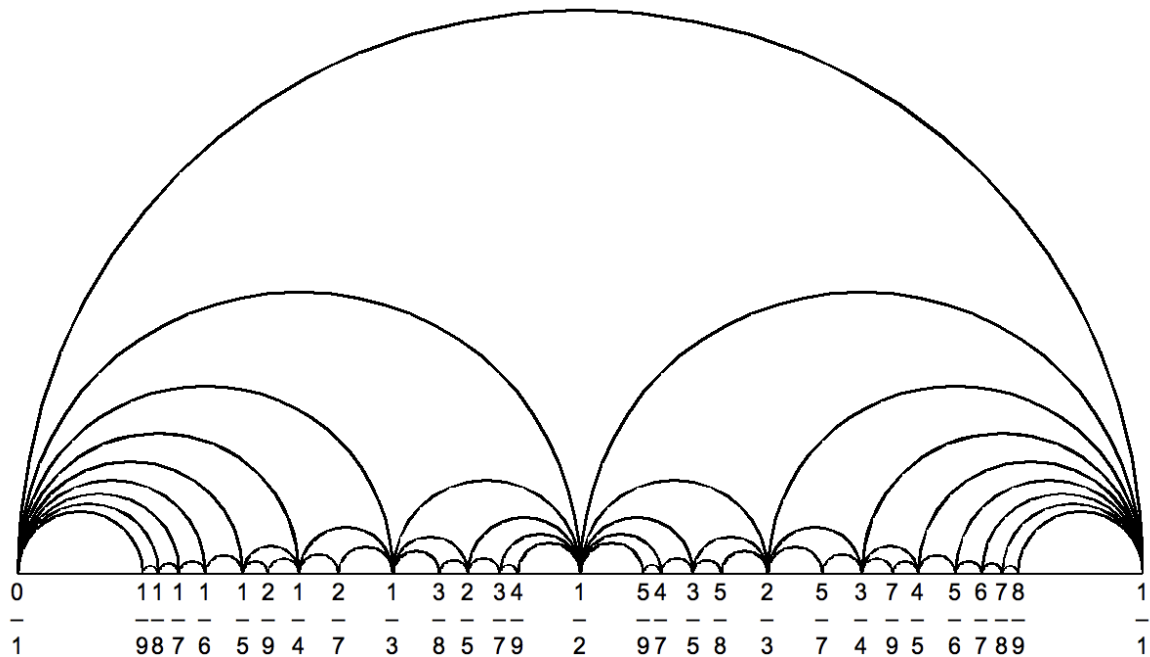
Lemma 2.3.2.1. $r/s, x/y \in \mathbb{Q}$ indirgenmiş formdaki rasyonel sayılar olmak üzere aşağıdaki üç koşul birbiriyle eşdeğerdir:

(I) r/s ve x/y rasyonel sayıları F -Farey grafında komşu köşelerdir

$$(II) \quad ry - sx = \pm 1$$

(III)) r/s ve x/y rasyonel sayıları $F_m, m \in \mathbb{N}$ Farey dizisinde ardışık terimlerdir.

Buradan F nin basit bir şekilde inşasını yapmak mümkündür. Herbir terim kendinden önceki ve sonrak terimlerin toplamının medyanı(ortadeğeri) olacak şekilde 2 valanslı (bir köşede buluşan kenar sayısı) bir F_m ağacı (içerisinde devre bulunmayan bağlantılı graf) olur. Bu ağaçların biraraya gelmesiyle oluşan çizgede F nin $\mathbb{Q}$ üzerine indirgenmiş alt grafıdır. Sonuç olarak ∞ ile etiketlediğimiz köşeyi tamsayılarla birleştirerek F -Farey grafını elde ederiz.



Şekil 10. Farey Grafi

2.3.3. $G_{1,2}$ Grafi

$u = n = 1$ alındığında, $\Gamma_0(n)$ otomatikman Γ grubuna dönüşür. Dolayısıyla $\widehat{\mathbb{Q}}$ ile gösterdiğimiz tek bir yörüngeye sahip oluruz. Böylece elde edilen çizge klasik Farey grafi

olur. Şimdi de $u = 1, n = 2$ alalım. Bu durumda yörüngemiz bloklara parçalanır. Blok sayısı $\varphi(2) = |\Gamma: \Gamma_0(2)| = 3$ olduğundan, bu blokları $[0], [1], [2] = [\infty]$ ile göstereceğiz.

Aşağıdaki Farey dizisi

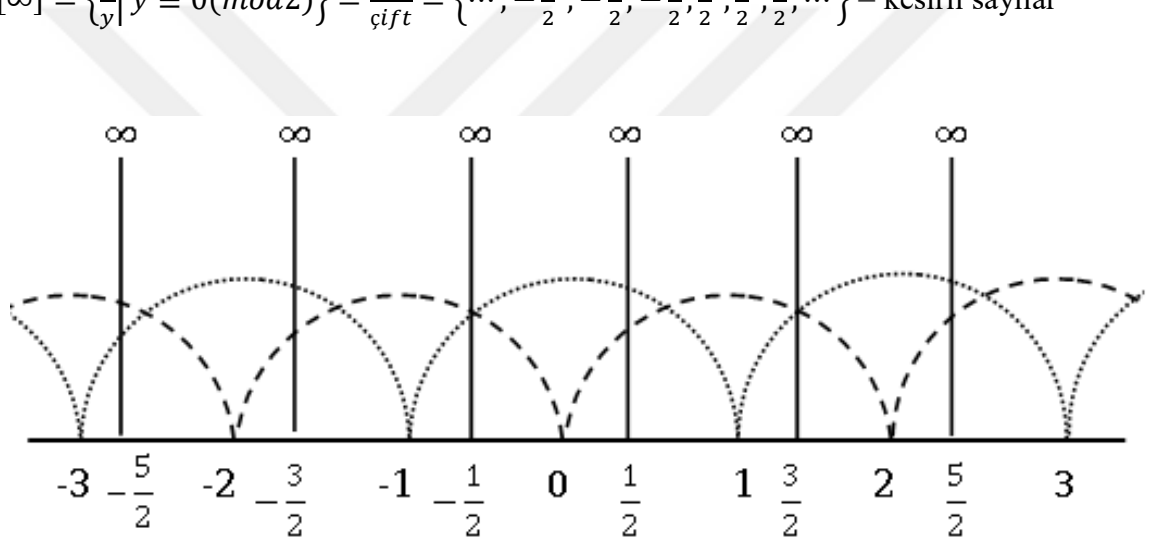
$$F_2 = \left\{ \dots, -3, -\frac{5}{2}, -2, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \dots \right\}$$

ve $[j] = \{x/y \in \hat{Q} \mid x \equiv jy \pmod{n}\}$ olduğu gözönüne alındığında, bloklar aşağıdaki gibi oluşur;

$$[0] = \left\{ \frac{x}{y} \mid x \equiv 0 \pmod{2} \right\} = \frac{\text{çift}}{\text{tek}} = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\} = \text{çift tamsayılar}$$

$$[1] = \left\{ \frac{x}{y} \mid x \equiv y \pmod{2} \right\} = \frac{\text{tek}}{\text{tek}} = \{\dots, -3, -1, 0, 1, 3, \dots\} = \text{tek tamsayılar}$$

$$[\infty] = \left\{ \frac{x}{y} \mid y \equiv 0 \pmod{2} \right\} = \frac{\text{tek}}{\text{çift}} = \left\{ \dots, -\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots \right\} = \text{kesirli sayılar}$$



Şekil 11. $G_{1,2}$ Grafi

Burada, $G_{1,2}$ grafi $D_{1,2}, E_{1,2}, F_{1,2}$ alt graflarının birleşimidir. Bu alt graflarda sırasıyla kenarları kırık-çizgi, noktalı-çizgi ve düz-çizgi ile gösterilen ve $[0], [1], [\infty]$ bloklarına karşılık gelen çizgelerdir. $G_{1,2}$ bir ormandır ve alt graflarda bu ormanın ağaçlarıdır. Üstelik kendisiyle eşleşmiştir ve F nin aksine yönsüz bir graftır.

2.3.4. $G_{1,3}$ Grafi

$G_{1,1}$ ve $G_{1,2}$ graflarının aksine, $G_{1,3}$ grafi ne kendisiyle eşleşmiştir ne de bir ormandır. Bu yüzden bu özelliklere haiz genelleştirilmiş Farey grafları içerisindeki en basit durumu

temsil ettiğinden, açık ifadesini bilmek önemlidir. Şimdi bu kısımda bu grafin özelliklerini daha açık ifade etmeye çalışacağız. Kısım 2.6. da yaptığımız gibi;

$$F_3 = \left\{ \dots, -2, -\frac{5}{3}, -\frac{3}{2}, -\frac{4}{3}, -1, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, 2, \dots \right\}$$

$\varphi(3) = |\Gamma: \Gamma_0(3)| = 4$ olduğundan, bu blokları $[0], [1], [2], [3] = [\infty]$ ile gösterelim.

$$[0] = \left\{ \frac{x}{y} \mid x \equiv 0 \pmod{3} \right\} = \left\{ 0, \frac{3}{2}, 3, \frac{9}{2}, 6, \dots \right\} = \left\{ \frac{3k}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$[1] = \left\{ \frac{x}{y} \mid x \equiv y \pmod{3} \right\} = \left\{ 1, \frac{5}{2}, 4, \frac{11}{2}, 7, \dots \right\} = \left\{ \frac{3k+2}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

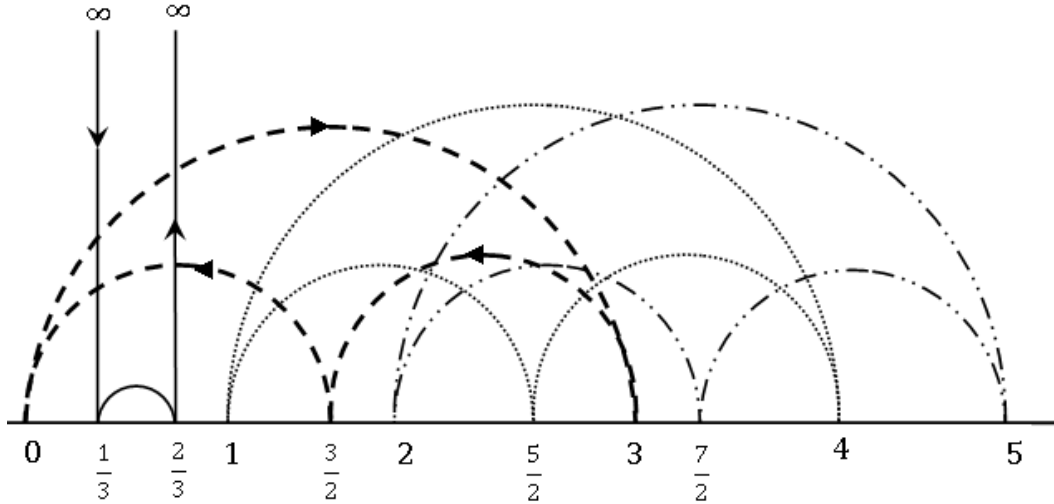
$$[2] = \left\{ \frac{x}{y} \mid x \equiv 2y \pmod{3} \right\} = \left\{ 2, \frac{7}{2}, 5, \frac{13}{2}, 8, \dots \right\} = \left\{ \frac{3k+1}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$[\infty] = \left\{ \frac{x}{y} \mid y \equiv 0 \pmod{3} \right\} = \frac{*}{3} \text{--kesirli sayıları şeklindedir.}$$

Alt graflar üçgenler içerdiğinden, $G_{1,3}$ bir orman değildir. $[0], [1], [2], [\infty]$ bloklarına karşılık gelen alt grafları sırasıyla $C_{1,3}$, $D_{1,3}$, $E_{1,3}$, $F_{1,3}$ ile gösterecek olursak bu graflardaki temel üçgenler şekildeki gibidir:

$$\frac{0}{1} \rightarrow \frac{3}{1} \rightarrow \frac{3}{2} \rightarrow \frac{0}{1} \in C_{1,3} \quad ; \quad \frac{1}{1} \rightarrow \frac{4}{1} \rightarrow \frac{5}{2} \rightarrow \frac{1}{1} \in D_{1,3}$$

$$\frac{2}{1} \rightarrow \frac{5}{1} \rightarrow \frac{7}{2} \rightarrow \frac{2}{1} \in E_{1,3} \quad ; \quad \frac{1}{0} \rightarrow \frac{1}{3} \rightarrow \frac{2}{3} \rightarrow \frac{1}{0} \in F_{1,3}$$



Şekil 12. $G_{1,3}$ Grafi

2.4. Modüler Grubun Picard Grubundaki Normalliyeni

$\mathbb{P}$ picard grubu;

$$\mathbb{P} := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{Z}[i] \text{ ve } ad - bc = 1 \right\}$$

şeklinde idi. Ayrıca

$$x = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad r = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

olmak üzere $\mathbb{P} = \langle x, u, y, r \rangle$ dir. Γ modüler grubu ise;

$$\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{Z} \text{ ve } ad - bc = 1 \right\}$$

şeklinde idi. Dolayısıyla $\Gamma = \langle u, y \rangle$ şeklindedir. $\mathbb{P}$ nin grup yapısı Γ nin grup yapısına oldukça benzerdir. Aynı zamanda $\mathbb{P}$ nin esas kongrüans alt gruplarının yapısı da Γ nin esas kongrüans alt gruplarının yapısına benzerlik gösterir. Burada Γ , $\mathbb{P}$ de normal değildir. O halde Γ nin $\mathbb{P}$ deki normalliyenini araştıralım. Γ nin $\mathbb{P}$ deki normalliyeninin

$$N_{\mathbb{P}}(\Gamma) = \{g \in \mathbb{P} : g\Gamma g^{-1} = \Gamma\}$$

şeklinde olduğunu hatırlayarak Γ nin $\mathbb{P}$ deki normalliyeninin $N_{\mathbb{P}}(\Gamma)$ olduğunu gösterelim.

Teorem 2.4.1. Γ nin $\mathbb{P}$ deki normalliyeni $N_{\mathbb{P}}(\Gamma)$ dır.

$$N = \langle u, y, r; u^2 = y^3 = r^2 = (ry)^2 = (ru)^2 = 1 \rangle$$

$$= \langle u, r; u^2 = r^2 = (ru)^2 = 1 \rangle * \langle y, r; y^3 = r^2 = (ry)^2 = 1 \rangle$$

$$N_{\mathbb{P}}(\Gamma) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} a'i & b'i \\ c'i & d'i \end{pmatrix} : a, b, c, d, a', b', c', d' \in \mathbb{Z} \text{ ve } ad - bc = 1, -a'd' + b'c' = 1 \right\}$$

şeklindedir.

$\widehat{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ genişletilmiş rasyonel sayılar kümesinin her bir elemanı, $x, y \in \mathbb{Z}$ ve $(x, y) = 1$ olmak üzere, $\frac{x}{y}$ indirgenmiş kesri olarak yazılabilir. $\frac{x}{y} = \frac{-x}{-y}$ olduğundan bu gösterim tek değildir. ∞ u, $\frac{1}{0} = \frac{-1}{0}$ ile temsil edeceğiz. $N_{\mathbb{P}}(\Gamma)$ nin $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketi;

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \frac{x}{y} \rightarrow \frac{ax+by}{cx+dy} \text{ ve } \begin{pmatrix} ai & bi \\ ci & di \end{pmatrix} : \frac{x}{y} \rightarrow \frac{aix+biy}{cix+diy} = \frac{i(ax+by)}{i(cx+dy)} = \frac{ax+by}{cx+dy} \text{ şeklindedir.}$$

Teorem 2.4.2. (Yazıcı, 2013) $N_{\mathbb{P}}(\Gamma)$ nin $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerindeki hareketi transitiftir.

Biliyoruz ki $\Gamma_0(n) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma : c \equiv 0 \pmod{n} \right\}$ kongrüans alt grubu alındığında $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\Gamma_{\infty} < \Gamma_0(n) \leq \Gamma$ ve $n > 1$ ise $\Gamma_{\infty} < \Gamma_0(n) < \Gamma$ dir. Dolayısıyla $\Gamma_{\infty} < \Gamma_0(n) < N_{\mathbb{P}}(\Gamma)$ dir. Böylece $N_{\mathbb{P}}(\Gamma)$, $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerinde impirimitif olarak hareket eder. $v = \frac{r}{s}$, $w = \frac{x}{y} \in \widehat{\mathbb{Q}}$

olmak üzere, $v = g(\infty)$ ve $w = g'(\infty)$ olan $g, g' \in N_{\mathbb{P}}(\Gamma)$ vardır. Burada iki durum söz konusudur:

1.Durum: Burada $g = \begin{pmatrix} r & * \\ s & * \end{pmatrix}$ ve $g' = \begin{pmatrix} x & * \\ y & * \end{pmatrix}$ formundadır. $v \approx w \Leftrightarrow g^{-1}g' \in \Gamma_0(n)$
 $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} * & * \\ -s & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & * \\ y & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ ry - sx & * \end{pmatrix} \in \Gamma_0(n) \Leftrightarrow ry - sx \equiv 0 \pmod{n}$ dir. Böylece, $\frac{r}{s} \approx \frac{x}{y}$
 $\Leftrightarrow ry - sx \equiv 0 \pmod{n}$ dir.

2.Durum: Burada $g = \begin{pmatrix} ri & * \\ si & * \end{pmatrix}$ ve $g' = \begin{pmatrix} xi & * \\ yi & * \end{pmatrix}$ formundadır. $v \approx w \Leftrightarrow g^{-1}g' \in \Gamma_0(n)$
 $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} * & * \\ -si & ri \end{pmatrix} \begin{pmatrix} xi & * \\ yi & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ sx - ry & * \end{pmatrix} \in \Gamma_0(n) \Leftrightarrow sx - ry \equiv 0 \pmod{n}$ dir. Böylece,
 $\frac{r}{s} \approx \frac{x}{y} \Leftrightarrow sx - ry \equiv 0 \pmod{n}$ dir.

2.5.2.5. $N_{\mathbb{P}}(\Gamma)$ nin $\widehat{\mathbb{Q}}$ Üzerindeki Alt Yörüngesel Grafları

$N_{\mathbb{P}}(\Gamma)$, $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerinde transitif olarak hareket ettiğinden $v \in \widehat{\mathbb{Q}}$ olmak üzere her bir alt yörüngesi bir (∞, v) çifti içerir. $v \in \widehat{\mathbb{Q}}$ olduğundan $v = \frac{u}{n}$, $n \geq 0$, $(u, n) = 1$ biçimindedir. Bu alt yörüngeyi $\bar{O}(u, n)$ ile ve buna karşılık gelen alt yörüngesel grafi da $\bar{G}(u, n)$ ile göstereceğiz. $v = \infty = \frac{1}{0} = \frac{-1}{0}$ olduğu durumda $\bar{G}_{1,0} = \bar{G}_{-1,0}$ trivial alt yörüngesel grafi elde edilir. Biz trivial olmayan alt yörüngesel grafları incelemek istediğimiz için $v \in \mathbb{Q}$ varsayalım.

Teorem 2.5.1. $\frac{r}{s} \rightarrow \frac{x}{y}$ $\bar{G}_{u,n}$ de bir kenardır $\Leftrightarrow$

- (i) $x \equiv ur \pmod{n}$, $y \equiv us \pmod{n}$, $ry - sx = n$ veya
- (ii) $x \equiv -ur \pmod{n}$, $y \equiv -us \pmod{n}$ ve $ry - sx = -n$ veya
- (iii) $x \equiv ur \pmod{n}$, $y \equiv us \pmod{n}$, $ry - sx = -n$ veya
- (iv) $x \equiv -ur \pmod{n}$, $y \equiv -us \pmod{n}$ ve $ry - sx = n$ olmasıdır.

2.5.1. $\bar{G}_{u,n}$ ve $\bar{F}_{u,n}$ Grafları

Bu bölümde $\bar{F} = \bar{G}_{1,1}$ Farey grafinın özelliklerini diğer $\bar{G}_{u,n}$ alt yörüngesel graflarına nasıl genişletebileceğimizi göreceğiz. $N_{\mathbb{P}}(\Gamma)$, $\widehat{\mathbb{Q}}$ üzerinde transitif olarak hareket ettiğinden

blokları transitif olarak permüte eder. Dolayısıyla alt grafların hepsi izomorftur. $\bar{G}_{u,n}$ nin, köşeleri ∞ u içeren $[\infty] = \{\frac{x}{y} \in \mathbb{Q} : y \equiv 0 \pmod{n}\}$ bloğunda olan alt grafını $\bar{F}_{u,n}$ ile gösterelim. Buna göre Teorem 2.5.1. dan aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 2.5.1.1. $\frac{r}{s} \rightarrow \frac{x}{y}$ $\bar{F}_{u,n}$ de bir kenardır $\Leftrightarrow$

- (i) $x \equiv ur \pmod{n}$, $ry - sx = n$ veya
 - (ii) $x \equiv -ur \pmod{n}$, $ry - sx = -n$ veya
 - (iii) $x \equiv ur \pmod{n}$, $ry - sx = -n$ veya
 - (iv) $x \equiv -ur \pmod{n}$, $ry - sx = n$
- olmasıdır.

Buna göre ilk iki madde modüler grubun alt yörüngesel graflarındaki $F_{u,n}$ için verilen kenar şartlarıdır (Teorem 2.3.1.1). Üçüncü ve dördüncü maddedekiler $F_{-u,n}$ 'nin kenar şartlarıdır. Böylece $\bar{F}_{u,n} = F_{u,n} \cup F_{-u,n}$ olduğu görülür. Bu yüzden aşağıdaki iki sonuç Lemma 2.3.1.2'nin doğrudan bir genişlemesi olarak yukarıdaki teoremden elde edilir:

Sonuç 2.5.1.2. $u \equiv \bar{u} \pmod{n}$ ise $\bar{F}_{u,n} = \bar{F}_{\bar{u},n}$.

Sonuç 2.5.1.3. (i) $\bar{F}_{u,n}$ nin tüm v köşeleri için, $\bar{F}_{u,n} \rightarrow \bar{F}_{-u,n}$ ye $M(v) = -v$ ile verilen fonksiyon bir izomorfizmadır.

(ii) Eğer $m \mid n$ ise $\bar{F}_{u,n}$ nin tüm v köşeleri için, $\bar{F}_{u,n}$ den $\bar{F}_{u,m}$ nin bir alt grafına $M(v) = nv/m$ ile verilen fonksiyon bir izomorfizmadır.

Bu sonucun ikinci maddesi yardımıyla Farey grafi ile kurulan özdeşim sayesinde ve Farey grafının kenarları birbiriyle kesişmemesi nedeniyle aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 2.5.1.4. $\bar{F}_{u,n}$ 'nin kenarları $\mathbb{U}$ -üst yarı düzlemde kesişmezler.

Teorem 2.5.1.5. $\bar{F}_{u,n}$ bir üçgen içerir $\Leftrightarrow u^2 \mp u + 1 \equiv 0 \pmod{n}$ dir.

Lemma 2.5.1.6. $u \not\equiv \pm 1 \pmod{n}$ ise $\bar{F}_{u,n}$ 'nin $v < \frac{1}{2} < w$ biçiminde komşu iki v ve w köşesi yoktur.

İspat: Sonuç 2.5.1.2.'ten önce yaptığımız irdilemeyle (yani $\bar{F}_{u,n} = F_{u,n} \cup F_{-u,n}$ yorumu) $\bar{F}_{u,n}$ yerine $F_{u,n}$ ile çalışabiliriz. Aksini varsayalım: $v, w \in F_{u,n}$ öyle ki $v < \frac{1}{2} < w$ olsun. Lemma 2.3.1.2 ($F_{u,n}$ -izomorfizması) ile nv ve nm $\mathcal{F}$ 'de komşu köşeler olur. n çift ise ($v < \frac{1}{2} < w \Rightarrow \infty \rightarrow \frac{n}{2} \in \mathcal{F}$ olur.) Bu durumda $\infty \rightarrow \frac{n}{2}$ ile $nv \rightarrow nw$ kenarları kesişir. (Çelişki, çünkü $\mathcal{F}$ 'nin kenarları $\mathbb{H}$ 'da kesişmez.) n tek ise (Jones et al., 1991)'deki Lemma

4.1 (Farey grafinın özellikleri)'ten nv ve nw bir $\mathcal{F}_{m_-}$ farey dizisinin ardışık terimleridir. $nv < \frac{n}{2} < nw$ olduğundan $m = 1$. Buradan $nv = \frac{n-1}{2}$ ve $nw = \frac{n+1}{2}$ sonucu çıkar.

$\frac{n}{2}$ ve n_- tek olduğundan $\frac{n}{2} \in \mathbb{Q}$.

Böylece $v = \frac{\frac{n-1}{2}}{n}$ ve $w = \frac{\frac{n+1}{2}}{n}$ $v \rightarrow w \in F_{u,n}$ olduğundan Teorem 2.3.1.1'den $\frac{n+1}{2} \equiv -u \frac{n-1}{2} \pmod{n}$. Buradan $u \equiv 1 \pmod{n}$ olur.

(Akbaş, 2001) Teorem 10'da $G_{u,n}$ için orman koşullarının kanıtının bir parçasında aşağıdaki lemmayı kullanacağız. Bu lemmadaki fonksiyona bir sonraki teoremin kanıtında ulaşacağız. Burada biz kendi ispatımızı vereceğiz:

Lemma 2.5.1.7. $u, n, k \in \mathbb{R}$ ve $n \neq 0$ olsun. $\varphi: \mathbb{R} - \left\{\frac{u+k}{n}\right\} \rightarrow \mathbb{R}$ $z \mapsto \frac{uz - (u^2 + ku + 1)/n}{nz - (u+k)}$ fonksiyonu $\left(-\infty, \frac{u+k}{n}\right)$ ve $\left(\frac{u+k}{n}, \infty\right)$ aralığında artandır. Üstelik $1 < k - x$ olduğundan $\varphi\left(\frac{u+x}{n}\right) < \frac{u+1}{n}$

İspat. φ 'nin türevini ele alalım; $\forall z \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{u+k}{n}\right\}$ için $\frac{d\varphi}{dz} = \frac{1}{(nz - u - k)^2} > 0$.

Böylece φ , ilgili aralıklarla artandır. Farzedelim ki $1 < k - x$ $\varphi\left(\frac{u+x}{n}\right) = \frac{u + \frac{1}{k-x}}{n}$ olduğundan $\varphi\left(\frac{u+x}{n}\right) < \frac{u+1}{n}$.

Bir önceki teoremden önce eşleşmiş ve kendisiyle eşleşen grafların tanımını hatırlayalım. $G, X \neq \emptyset$ kümesi üzerinde transitif hareket eden bir grup olsun. $\mathcal{G}(v, w)$ ve $\mathcal{G}(w, v)$ G -grubunun $G(v, w)$ ve $G(w, v) \in XxX$ yörüngelerinin alt yörüngesel grafları olsun. $\mathcal{G}(w, v)$ aslında $\mathcal{G}(v, w)$ 'nin okları ters yönlendirilmiş halidir. Böylece bunlara eşleşmiş graflar denir. $G(v, w) = G(w, v)$ ise (yörüngeler aynıysa) $\mathcal{G}(w, v) = \mathcal{G}(v, w)$ 'dir. Bu durumda graf ters_düz yönlü kenar çiftlerinden mürekkeptir. Bu durumda $\mathcal{G}(v, w)$ 'ya kendisiyle eşleşmiş alt yörüngesel graf denir.

(Yazıcı-Güler, 2018) Sonuç 2'den $\bar{G}_{u,n}$ alt yörüngesel grafi kendisiyle eşleşmiş $\Leftrightarrow u^2 \equiv \pm 1 \pmod{n}$. Bu gerçek $\bar{F}_{u,n}$ 'da uygulanabilir. Şimdi $\bar{F}_{u,n}$ 'nin orman şartını kanıtlmaya hazırız.

Teorem 2.5.1.8. $\bar{F}_{u,n}$ ormandır. $\Leftrightarrow$ üçgen içermiyorsa yani $u^2 \pm u + 1 \equiv 0 \pmod{n}$

İspat. $n \leq 2$ için $F_{u,n} = F_{-u,n}$, dolayısıyla $\bar{F}_{u,n} = F_{u,n}$. Böylece (Akbaş, 2001) Teorem 10 ($F_{u,n}$ orman şartı) ile sonuç tamam. $n > 2$ olsun. " $\Rightarrow$ " yönü apaçık. Tersine bakalım: yani $u^2 \pm u + 1 \equiv 0 \pmod{n}$ olsun. $\bar{F}_{u,n}$ nin devre içermediğini göstermemiz gerekiyor. Aksini

varsayalım. $\bar{F}_{u,n}$ bir Δ -devresi içersin. $\bar{\Gamma}_0(n), \bar{F}_{u,n}$ 'nin kenarları üzerinde transitif olarak hareket ettiğinden [YG, Teorem7] Δ 'nin $\infty \rightarrow \frac{u}{n}$ ile başlatabiliriz. Üstelik Sonuç 2.5.1.2. 'den $0 < \frac{u}{n} < 1$. Sonuç 2.5.1.3. ile $\mathcal{F}$ 'nin kenarlarının $\mathbb{H}$ 'da kesişmediği gerçeği birlikte $\bar{F}_{u,n}$ 'nin $[0,1]$ -aralığı içindeki her köşesinin ∞ -dışında bu aralığın herhangi bir köşe ile komşu olmadığını görebiliriz. Böylece Δ -devresi $0 \leq Re(z) \leq 1$ şeridinin içindedir.

1.Durum: $\bar{F}_{u,n}$ kendisiyle eşleşmiştir, yani $u^2 \equiv \pm 1(mod n)$ olsun. $u^2 \equiv 1(mod n)$ ise (Jones et al., 1991) Teorem 3.3 ile $F_{u,n}$ ve $F_{-u,n}$ eşleşmiş graflardır. Yani aynı graflar ancak oklar ters yönlü. Böylece $\bar{F}_{u,n}$ orman $\Leftrightarrow F_{u,n}$ orman. Bu yüzden Lemma 5 $\bar{F}_{u,n}$ 'nin devre içermediğini söyler.

$u^2 \equiv -1(mod n)$ olsun. Teorem 2.5.1.1 ($\bar{F}'_{u,n}$ 'nin devre şartları)'ten $\frac{u}{n}$ ve $\frac{n-u}{n}, Re(z) = \frac{1}{2}$ doğrusunun sağ ve sol yanındadır. $u \not\equiv \pm 1(mod n)$ Lemma 2.5.1.4 bu durumun olamayacağını söyler. $\frac{1}{2}, n > 2$ olduğundan $\bar{F}_{u,n}$ 'nin bir köşesi de değildir. Bütün bunlar böyle bir $\Lambda_{\{\infty\}}$ yolunun olamayacağını söyler. Yani $\bar{F}_{u,n}$ devre içermiyor.

1. Durum $\bar{F}_{u,n}$ kendisiyle eşleşmemiş yani $u^2 \equiv \pm 1(mod n)$ dolayısıyla Lemma 2.5.1.6 uygulayabiliriz. Üstelik $\bar{F}_{u,n}$ 'nin $0 \leq Re(z) \leq 1$ şeridinde ∞ 'a bağlı yalnızca 4 kenarı vardır. Bu 4 kenardan $F_{u,n}$ 'ye ait olanlar ikisi $1 \equiv -u.u'(mod n)$ olmak üzere $\infty \rightarrow \frac{u}{n}$ ve $\frac{u'}{n} \rightarrow \infty$ dur. $F_{-u,n}$ 'ye ait olanlar ise $\infty \rightarrow \frac{n-u}{n}$ ve $\frac{n-u'}{n} \rightarrow \infty$ dur. Böylelikle

2. Durumu iki alt duruma böleceğiz. $\frac{u}{n}$ ve $\frac{u'}{n}$ 'nin köşeleri $Re(z) = \frac{1}{2}$ doğrusunun aynı yanında ve ayrı yanında olma durumları. Sonuç 2.5.1.2. ve Sonuç 2.5.1.3. ten $\bar{F}_{n-u,n} = \bar{F}_{-u,n} = \bar{F}_{u,n}$. Buradan $\frac{u}{n} < \frac{u'}{n}$ farzedebiliriz; eğer öyle değilse $\frac{n-u}{n} < \frac{n-u'}{n}$ olduğu kesindir, dolayısıyla $\bar{F}_{n-u,n}$ ile yolumu devam edebiliriz. 1.durumu kanıtlamadan önce $\bar{F}_{u,n}$ de bir yarı_sonsuz yol inşa etmemiz gerekiyor. $(u, n) = 1$ olduğundan $\exists x, y \in \mathbb{Z}$ öyle ki $ux + ny = 1$. Buradan $ux \equiv 1(mod n)$ dolayısıyla

$$u^2 - (ux)(u^2 + 1) + 1 \equiv 0(mod n)$$

Bir $k \in \mathbb{Z}^+$ öyle ki $k < n$ ve $k \equiv -x(u^2 + 1)(mod n)$ seçebiliriz. Böylece $u^2 + ku + 1 \equiv 0(mod n)$. $\bar{F}_{u,n}$ kendisiyle eşleşmiş olmadığından ve üçgen içermediğinden $1 < k < n$ 'dir.

Şimdi $\varphi = \begin{pmatrix} -u & (u^2 + ku + 1)/n \\ -n & u + k \end{pmatrix}$ olsun.

Açıkça $\varphi \in \bar{\Gamma}_0(n)$ öyleki $\varphi(\infty) = \frac{u}{n}$ ve $\varphi\left(\frac{u+k}{n}\right) = \infty$. Buradan $\varphi^{-1}\left(\infty \rightarrow \frac{u}{n}\right) = \frac{u+k}{n} \rightarrow \infty$ kenarı $\in \bar{F}_{u,n}$. Böylece $u' = u + k$. Şimdi $v_1 = \frac{u}{n}$ ve $v_j = \varphi(v_{j-1})$, $j \geq 2$ için tanımlayalım. Lemma 2.5.1.7 ile $\varphi, (-\infty, \frac{u+k}{n})$ aralığı üzerinde artan öyleki $\forall x < 1 < k$ için $\varphi\left(\frac{u+x}{n}\right) < \frac{u+1}{n}$. Bu durumda $\left[\frac{u}{n}, \frac{u+1}{n}\right]$ aralığında $\bar{F}_{u,n}$ 'nin köşelerinin bir artan $\{v_j\}$ dizisini elde etmiş oluruz. $\infty \rightarrow \frac{u}{n} \in \bar{F}_{u,n}$ 'de bir kenar olduğundan $\bar{F}_{u,n}$ 'de $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_3 \rightarrow \dots$ sonsuz yolunu(semi-infinite path) elde etmiş oluruz.

Şu andan itibaren bir kenarın yönü belli değilse $\leftrightarrow$ notasyonunu kullanacağız. Şimdi 2. Durumun kanıtına hazırız.

$\frac{u}{n}$ ve $\frac{u'}{n}$, $Re(z) = \frac{1}{2}$ doğrusunun aynı tarafında ise $\frac{n-u}{n}$ ve $\frac{n-u'}{n}$ köşeleri diğer tarafında olacaklar. Böylece Lemma 18 ile elde ederiz ki Δ devresi $\frac{u'}{n}$ köşesini içerir, $\frac{n-u}{n}$ ve $\frac{n-u'}{n}$ köşelerini içermez. $v_1 = \frac{u}{n} < \frac{u'}{n} = \frac{u+k}{n}$ olduğunu unutmayalım.

Δ v_1 'i içeren bir devre olduğundan $\{v_j\}$ dizisinin terimi olup Δ devresinde köşe olan sonlu çoklukta eleman vardır. Böylece i ile onlar içindeki en büyük tamsayı gösterilmek üzere $v_i \Delta$ 'da bir köşedir. Bu durumda Δ 'da bir köşesi v_i olan bir kenar vardır ve diğer $v \in \bar{F}_{u,n}$ köşesi $v > v_i$ biçimindedir. Sonuç 2.5.1.4.'ten $\bar{F}_{u,n}$ 'nin $\mathbb{H}$ 'da kenarları kesişmediğinden $\forall j \in \mathbb{N}$ için $v_j < v \leq \frac{u+k}{n}$. Eğer $v = \frac{u+k}{n}$ ise $\varphi(v) = \infty$. Bu durumda $v_i \leftrightarrow v$ kenarı $\mathbb{H}$ 'da $\varphi(v_i) \leftrightarrow \varphi(v)$ kenarıyla kesişir. Eğer $v < \frac{u+k}{n}$ ise Lemma 2.5.1.7'yi uygulayalım. φ fonksiyonu $(-\infty, \frac{u+k}{n})$ aralığı üzerinde artan olduğundan yine $v_i \leftrightarrow v$ kenarı $\mathbb{H}$ 'da $\varphi(v_i) \leftrightarrow \varphi(v)$ kenarıyla kesişir ki çelişkidir. Bu yüzden böyle bir Δ devresi yoktur.

Son kalan durumu kanıtlayalım. $\frac{u}{n}$ ve $\frac{u'}{n}$ $Re(z) = \frac{1}{2}$ doğrusunun farklı yanlarında olsun. Bu durumda, $\frac{u}{n}, \frac{n-u'}{n} < \frac{1}{2} < \frac{u'}{n}, \frac{n-u}{n}$ [Nazlı B. Sonuç1]'den $u(n-u') \equiv -uu' \equiv 1(mod n)$ olduğundan $\bar{G}_{u,n}$ ve $\bar{G}_{n-u',n}$ eşleşmiş altıyörüngesel graflardır. Böylece $\bar{F}_{u,n}$ ile $\bar{F}_{n-u',n}$ eşleşmiştir. Böylece $\frac{u}{n} < \frac{n-u'}{n}$ farzedebiliriz, eğer öyle değilse $\bar{F}_{n-u',n}$ ve onunla uyumlu bir φ dönüşümüyle istenen sağlanır.

Δ devresinin $\infty \rightarrow \frac{u}{n}$ kenarını içerdiğini biliyoruz. Lemma 2.5.1.6 ile Δ devresi $\frac{n-u'}{n}$ köşesini de içerir. $\bar{F}_{u,n}$ grafi üçgen içermediğinden $\frac{u}{n}$ ve $\frac{n-u'}{n}$ köşeleri komşu olamazlar. Bu

durumda Δ devresinde $\frac{u}{n} < v < \varphi^{-1}$ olacak şekilde bir $\frac{u}{n} \leftrightarrow v$ kenarı vardır. Şimdi Δ devresinde $\frac{n-u'}{n} \rightarrow \infty \rightarrow \frac{u}{n} \leftrightarrow v$ yoluna bakalım. Bu yolun φ^{-1} altındaki resmi $\varphi^{-1}(\Delta)$ devresindeki $\varphi^{-1}(\frac{n-u'}{n}) \rightarrow \frac{u'}{n} \rightarrow \infty \leftrightarrow \varphi^{-1}(v)$ yoludur. $\frac{1}{2} < \frac{u'}{n}$ ve $\frac{1}{2}$ nin $\bar{F}_{u,n}$ de bir köşe olmadığını biliyoruz. Lemma 2.5.1.6 ile $\varphi^{-1}(\Delta)$ devresi $Re(z) = \frac{1}{2}$ doğrusunun sağ tarafında olmak zorundadır. Böylece $\frac{u'}{n} < \varphi^{-1}(\frac{n-u'}{n}) < \varphi^{-1}(v)$. Lemma 2.5.1.7'den $\varphi, (\frac{u'}{n}, +\infty)$ aralığı üzerinde artandır. Bu da $v < \frac{n-u'}{n}$ eşitsizliğinde yani $\frac{n-u'}{n} = \varphi \varphi^{-1}(\frac{n-u'}{n}) < \varphi \varphi^{-1}(v) = v$ bir çelişki ortaya çıkarır. Böylece böyle bir Δ devresi olamaz.

Teorem 2.5.1.9. $u, n \in \mathbb{Z}^+$ ve $(u, n) = 1$ olsun. $\bar{F}_{u,n}$ grafi için

(a) $\frac{u}{n}$ köşesinin gideceği en uzak köşe, $k, 1 < k < n$ ve $u^2 + ku + 1 \equiv 0 \pmod{n}$

koşullarını sağlayan yegane tamsayı olmak üzere $\frac{u+\frac{1}{k}}{n}$ köşesidir. $\frac{u}{n}$ 'nin gittiği bir en yakın köşe yoktur.

(b) $\frac{u+\frac{1}{k}}{n}$ köşesinin gideceği en uzak köşe $k, 1 < k < n$ ve $u^2 + ku + 1 \equiv 0 \pmod{n}$

koşullarını sağlayan yegane tamsayı olmak üzere $\frac{u+\frac{1}{k-\frac{1}{k}}}{n}$ köşesidir. $\frac{u+\frac{1}{k}}{n}$ 'nin gittiği bir en yakın köşe yoktur.

İspat: $(u, n) = 1$ olduğu için Bezout eşitliğinden $\exists x, y \in \mathbb{Z}$ öyle ki $ux + yn = 1$. Böylece $ux \equiv 1 \pmod{n}$. Buradan $ux(-u^2 - 1) \equiv -u^2 - 1 \pmod{n}$. $k := x(-u^2 - 1)$ olmak üzere $u^2 + ku + 1 \equiv 0 \pmod{n}$ dir. Öte yandan $1 < k < n$ alabiliriz. Çünkü $k > n$ ise $k \equiv k_1 \pmod{n}$ olacak şekilde k_1 tanımlanırsa $ku + 1 \equiv k_1u + 1 \pmod{n}$ doğrudur. Buradan

$$u^2 + k_1u + 1 \equiv u^2 + ku + 1 \equiv 0 \pmod{n}.$$

Şimdi de k 'nin tekliğini gösterelim. $m \in \mathbb{Z}, 1 < m < n$ ve $u^2 + mu + 1 \equiv 0 \pmod{n}$ koşullarını sağlayan başka bir tamsayı olsun. Böylece $mu = -u^2 - 1 \equiv ku \pmod{n}$, dolayısıyla $(k - m)u \equiv 0 \pmod{n}$. Böylece $|k - m| < n$ olduğu bilindiğinden $k = m$ bulunur.

Şimdi $\frac{u}{n} \rightarrow \frac{x}{y} \in \bar{F}_{u,n}$ ve $\frac{u}{n} < \frac{x}{y}$ alalım. Açıkça $\frac{x}{y} = \frac{u}{n} + \frac{nx}{ny} - \frac{uy}{ny} = \frac{u + \frac{nx-uy}{y}}{n}$ yazabiliriz. Bu

eşitlik ve $uy < nx$ eşitsizliğinden $\frac{t}{s} \in \mathbb{Q}^+$ olmak üzere $\frac{x}{y}$ yerine $\frac{u+t}{n}$ yazabiliriz. Yani

$\frac{u}{n} \rightarrow \frac{u+t}{n} = \frac{su+t}{n}$. Şimdi de bu kenar üzerinde kenar şartına ait dört maddeyi uygulayacağız:

Durum(i). Buna göre $su + t \equiv u^2 \pmod{n}$ ve $u(sn) - n(su + t) = n$ elde edilir. İkinci eşitlikten $t = -1$. Buradan da $su - 1 \equiv u^2 \pmod{n}$ Öte yandan $u^2 + ku + 1 \equiv 0 \pmod{n}$ olduğundan $su - 1 \equiv -ku - 1 \pmod{n}$ yani $su \equiv -ku \pmod{n}$. $(u, n) = 1$ olduğundan $s \equiv -k \pmod{n}$ Diğer bir ifadeyle $z \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ olmak üzere $s \equiv -k - nz$. Böylece

$\frac{t}{s} = \frac{1}{nz+k}$. Şimdi $\frac{t}{s}$ 'nin alabileceği en büyük değeri, $f: \mathbb{N} \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(z) = \frac{u + \frac{1}{nz+k}}{n}$

fonksiyonu yardımıyla hesaplayalım. f 'nin türevi alındığında $\forall z \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $f'(z) =$

$\frac{-1}{(nz+k)^2} < 0$. Dolayısıyla maksimum değerini $z = 0$ 'da alır, yani $\frac{u + \frac{1}{k}}{n} = \frac{uk+1}{kn}$. Şimdi

$\frac{uk+1}{kn} \in \bar{F}_{u,n}$ olduğunu göstereceğiz. Bunun için indirgenmiş formda olduğunu göstermemiz

gerekıyor. $(ku + 1, k) = (ku + 1 - ku, k) = (1, k) = 1$. (Niven et al., 2001) Teorem 1.9.

Keyfi $x \in \mathbb{Z}$ için $(a, b) = (a, b + ax)$ böylece $(k, ku + 1) = (k, ku + 1 - uk)$ ya da

aksini varsayalım: $(ku + 1, k) = b > 1$ olsun. $b/k \Rightarrow \exists t \in \mathbb{Z}$ öyle ki $k = tb \Rightarrow b/ku + 1$

yani $b/utb + 1 \Rightarrow b/1$ çelişki. Şimdi de $(ku + 1, n) = 1$ olduğunu gösterelim. $u^2 + ku +$

$1 \equiv 0 \pmod{n}$ olduğundan $\Rightarrow \exists t \in \mathbb{Z}$ öyle ki $u^2 + ku + 1 = tn$. Böylece $(ku + 1, n) =$

$(ku + 1 - tn, n) = (-u^2, n) = 1$. Sonuç $(ku + 1, kn) = 1$. Böylece $\frac{u + \frac{1}{k}}{n} \in \bar{F}_{u,n}$ olup $\frac{u}{n}$ 'nin

gidebileceği en uzak köşedir. Ayrıca

$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{u + \frac{1}{nz+k}}{n} = \frac{u}{n}$ olması $\frac{u}{n}$ köşesinin gittiğinden daha küçük sonsuz köşenin varlığına

işaret eder. Dolayısıyla $\frac{u}{n}$ köşesinin gittiği bir en yakın köşe yoktur.

Durum(ii) Bu durumda $su + t \equiv -u^2 \pmod{n}$ ve $u(sn) - n(us + t) = -n$ ki buradan $t = 1$ olur.

Böylece $su + 1 \equiv -u^2 \pmod{n}$ elde edilir. $u^2 + ku + 1 \equiv 0 \pmod{n}$ olduğu dikkate alındığında

$su + 1 \equiv ku + 1 \pmod{n}$ yani $su \equiv ku \pmod{n}$. $(u, n) = 1$ olduğundan $s \equiv k \pmod{n}$.

Bu yüzden $z \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ olmak üzere $s = nz + k$. Böylece $\frac{t}{s} = \frac{1}{nz+k}$. Bu noktadan ilerisi

Durum(i)'nin aynısıdır.

Durum(iii). Bu durumda $su + t \equiv u^2(modn)$ ve $u(sn) - n(us + t) = -n$ ki $t = 1$ olduğunu verir. Buradan $su + t \equiv u^2(modn)$, $u^2 + ku + 1 \equiv 0(modn)$ olduğundan $su + 1 \equiv -ku - 1(modn)$ 'dir. Böylece $su + 1 + ku + 1 = nz$, $z \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Yani, $s = \frac{nz-ku-2}{u}$ yerine yazılırsa $\frac{t}{s} = \frac{u}{nz-ku-2}$ bulunur. $\frac{t}{s}$ 'nin alabileceği en büyük değeri yine

Durum(i)'de olduğu gibi, $f: \mathbb{N} \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(z) = \frac{u + \frac{u}{nz-ku-2}}{n}$ fonksiyonu yardımıyla hesaplayalım. Türev alınırsa,

$$f'(z) = \frac{-u}{(nz-ku-2)^2} < 0 \quad (\forall z \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ için})$$

Dolayısıyla maksimum değerini $z = 0$ 'da alır, yani $\frac{u - \frac{1}{k + \frac{2}{u}}}{n}$. Ancak $\frac{u - \frac{1}{k + \frac{2}{u}}}{n}$ kenarı $\frac{u}{n}$ ye $\frac{u + \frac{1}{k}}{n}$ den daha yakındır. Çünkü $\frac{1}{k} - \frac{u}{uk+2} > 0$. Dolayısıyla $\frac{u}{n}$ nin gidebileceği en uzak köşe $\frac{u + \frac{1}{k}}{n}$ dir. $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{u + \frac{u}{nz-ku-2}}{n} = \frac{u}{n}$ olduğundan $\frac{u}{n}$ köşesinin gittiği en yakın köşe yoktur.

Durum(iv). Bu durumda $su + t \equiv -u^2(modn)$ ve $u(sn) - n(us + t) = n$ ki buradan $t = -1$ olur. Böylece $su - 1 \equiv -u^2(modn)$, $u^2 + ku + 1 \equiv 0(modn)$ olduğundan $su - 1 \equiv ku + 1(modn)$ diğer bir ifadeyle $-su + 1 \equiv -ku - 1(modn)$.

$z \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ olmak üzere $-su + 1 + ku + 1 = nz$ olduğundan $s = \frac{-(nz-ku-2)}{u}$ yerine yazılırsa

$$\frac{t}{s} = \frac{u}{nz-ku-2} \text{ dir.}$$

(b)'nin ispatı. $\frac{t}{s} \in \mathbb{Q}^+$ olmak üzere $\frac{u + \frac{1}{k}}{n} < \frac{u + \frac{t}{s}}{n}$ ve $\frac{ku+1}{kn} = \frac{u + \frac{1}{k}}{n} \rightarrow \frac{u + \frac{t}{s}}{n} = \frac{us+t}{n}$ kenarını ele alalım. Bu kenar üzerinde kenar şartına ait dört maddeyi tek tek irdelleyeceğiz.

Durum(i). Bu durumda $us + t \equiv u^2k + u(modn)$ ve $ns(ku + 1) - kn(su + t) = n$ ki $s = kt + 1$ olduğunu verir. Böylece $u + kut + t \equiv u^2k + u(modn)$ ve $t(ku + 1) \equiv u^2k(modn)$ dir. Buradan $-u^2t \equiv -u^2k(modn)$. $(u, n) = 1$ olduğundan $-t \equiv k(modn)$. $z \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ olmak üzere $t = -nz - k$ eşitliğinden $s = 1 - k(nz + k)$ Böylece $\frac{t}{s} =$

$$\frac{nz+k}{k(nz+k)-1}. \text{ Yine } \frac{t}{s} \text{ nin alabileceği en büyük değeri } f: \mathbb{N} \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(z) = \frac{u + \frac{nz+k}{k(nz+k)-1}}{n}$$

fonksiyonu yardımıyla hesaplayalım. $f'(z) = \frac{-1}{(k(nz+k)-1)^2} < 0$ olduğundan f $z = 0$ 'da bir

maksimuma sahiptir, yani $\frac{u + \frac{k}{k^2-1}}{n} = \frac{(k^2-1)u+k}{(k^2-1)n}$. Şimdi bu ifade için

$((k^2 - 1)u + k, (k^2 - 1)n) = 1$ yani indirgenmiş formda olduğunu göstereceğiz.

$((k^2 - 1)u + k, (k^2 - 1)) = a$ olsun. Açıkça $a/(k^2 - 1)$ olduğundan $a/(k^2 - 1)u$. $a/(k^2 - 1)u + k$ olduğundan a/k . $a/(k^2 - 1)$ olduğundan a/k dikkate alınırsa $a/-1$ yani $a = \pm 1$ elde edilir. Şimdi $((k^2 - 1)u + k, n) = b$ olsun. $b/(k^2 - 1)u + k$ olduğundan $k(ku + 1) - u = (k^2 - 1)u + k \equiv 0(modn)$ olur. $u^2 + ku + 1 \equiv 0(modn)$ ve b/n olduğundan $u^2 + ku + 1 \equiv 0(modb)$. Böylece $k(ku + 1) - u \equiv 0(modb)$ ve $-u^2 \equiv ku + 1(modb)$ kongrüanslarından $k(-u^2) - u \equiv 0(modb)$ elde edilir. $b \nmid u$ farzedelim. $(u, n) = 1$ ve b/n olduğundan $(u, b) = 1$ 'dir. Üstelik $-ku - 1 \equiv 0(modb)$ 'dir. Böylece $u^2 \equiv -ku - 1(modb)$ yani b/u^2 olur ki çelişkidir. O halde b/u 'dur. $(u, n) = 1$ ve b/n olduğundan $b = 1$ 'dir. Bu yüzden

$((k^2 - 1)u + k, (k^2 - 1)n) = 1$ olduğundan $\frac{u + \frac{k}{k^2 - 1}}{n} = \frac{u + \frac{1}{k - \frac{1}{k}}}{n}$ kesri indirgenmiş formdadır, dolayısıyla $\bar{F}_{u,n}$ 'de bir köşedir ve $\frac{u + \frac{1}{k}}{n}$ köşesinin gidebileceği en uzak köşedir.

$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{u + \frac{nz + k}{k(nz + k) - 1}}{n} = \frac{u + \frac{1}{k}}{n}$ olduğundan gidebileceği bir en yakın köşe yoktur.

Uygulama

Teorem 2.5.1.1 deki 1. ve 2. maddeler $F_{u,n}$ 'deki kenar şartlarıdır. 3. ve 4. maddedekiler $F_{-u,n}$ 'nin kenar şartlarıdır. Dolayısıyla:

$$\bar{F}_{u,n} = F_{u,n} \cup F_{-u,n}$$

Yani $\bar{F}_{u,n}$ 'nin V-köşe ve E-kenar kümeleri $F_{u,n}$ ve $F_{-u,n}$ 'nin köşe ve kenar kümelerinin birleşimidir. Yani

$$\frac{r}{s} \rightarrow \frac{x}{y} \in \bar{F}_{u,n} \Leftrightarrow \frac{r}{s} \rightarrow \frac{x}{y} \in F_{u,n} \text{ veya } \frac{r}{s} \rightarrow \frac{x}{y} \in F_{-u,n}$$

Açıkça $\bar{F}_{1,2} = F_{1,2} \cup F_{-1,2}$. $u = 1, n = 2$ olduğundan $u^2 \equiv -1(modn)$ kongrüansı göz önüne alındığında $1 \equiv -1(mod2)$. $G_{1,2}$ kendisiyle eşleşmiş ve bu yüzden yönlendirilmemiştir. Böylece $F_{1,2}$ 'de yönlendirilmemiştir. Burada $u \equiv v(modn)$ kongrüansı göz önüne alındığında yine $1 \equiv -1(mod2)$ olduğundan $F_{1,2} = F_{-1,2}$. Dolayısıyla $\bar{F}_{1,2} = F_{1,2}$.

Şimdi $\bar{F}_{1,3}$ teki durumu irdelemeden önce $F_{1,3}$ e bakalım. $u^2 \mp u + 1 \equiv 0(modn)$ kongrüansı göz önüne alındığında $1^2 \mp 1 + 1 \equiv 0(mod3)$ olduğundan üçgen devre mevcut olduğunu biliyoruz. $\infty \rightarrow \frac{u}{n} \rightarrow \frac{u+1}{n} \rightarrow \infty$ konfigürasyonunda ilgili değerler yerine yazılırsa

$$\frac{1}{0} \rightarrow \frac{1}{3} \rightarrow \frac{2}{3} \rightarrow \frac{1}{0}$$

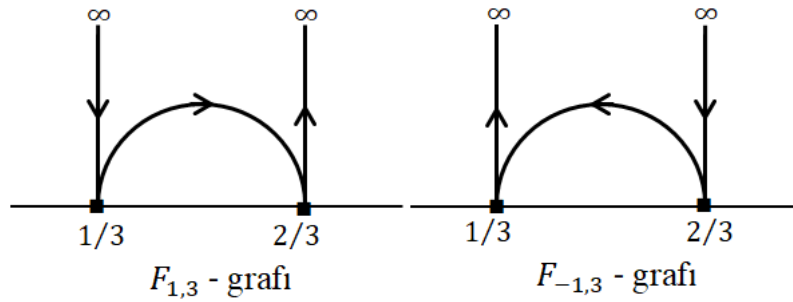
üçgeni elde edilir. $F_{1,3} \sim F_{-1,3} = F_{2,3}$ olduğundan şimdi de $F_{2,3}$ teki üçgenin açık ifadesini elde edelim. $\frac{1}{0} \rightarrow \frac{u}{n} \rightarrow \frac{x}{n} \rightarrow \frac{1}{0}$ konfigürasyonuna kenar şartları uygulandığında $un - xn = \mp n$ ve $u - x = \mp 1$, yani $x = u \pm 1$. Böylece $\infty \rightarrow \frac{u}{n} \rightarrow \frac{u-1}{n} \rightarrow \infty$ konfigürasyonundan

$$\frac{1}{0} \rightarrow \frac{2}{3} \rightarrow \frac{1}{3} \rightarrow \frac{1}{0}$$

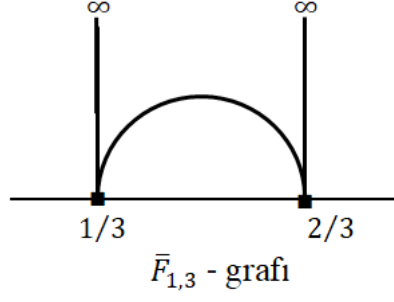
elde edilir. Burada, ters yönlenmiş üçgenler ortaya çıktığından, $F_{1,3}$ ve $F_{2,3}$ graflarının eşleşmiş graflar, yani $G(\beta, \alpha)$ ile $G(\alpha, \beta)$, olup-olmadığı sorusunu sormak doğaldır. Yanıt evettir, çünkü $uv \equiv -1 \pmod{n}$ kongrüansı göz önüne alındığında $1.2 \equiv -1 \pmod{3}$.

Öte yandan $F_{1,3}$ kendiyle eşleşmiş graf değildir. Genel olarak üçgen devre şartı $u^2 \mp u + 1 \equiv 0 \pmod{n}$ kongrüansı ile kendiyle eşleşmiş olma şartı $u^2 \equiv -1 \pmod{n}$ kongrüansı birlikte ele alındığında $u \equiv 0 \pmod{n}$ şartı elde edilir ki $(u, n) = 1$ olduğundan bu mümkün değildir. Sonuç olarak üçgen içeren bir grafın yönsüz olması $F_{u,n}$ graflarında mümkün değildir.

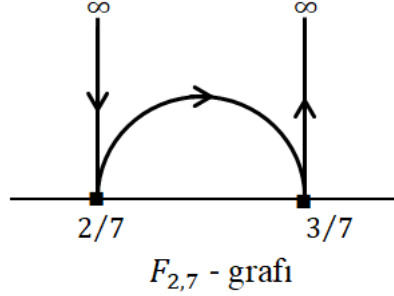
Şimdi göreceğiz ki $F_{1,3}$ ün aksine $\bar{F}_{1,3}$ yönsüzdür. $\bar{F}_{u,n}$ nin kendisiyle eşleşmiş graf olması için gerek ve yeter koşulun $u^2 \equiv \mp 1 \pmod{n}$ kongrüansının sağlanması olduğunu biliyoruz. $1 \equiv 1 \pmod{3}$ olduğundan $F_{1,3}$ kendisiyle eşleşmiştir.

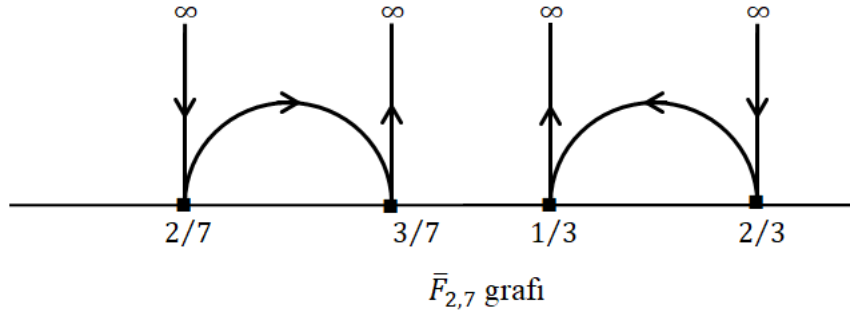


Şekil 13. $F_{1,3}$ ve $F_{-1,3}$ grafları

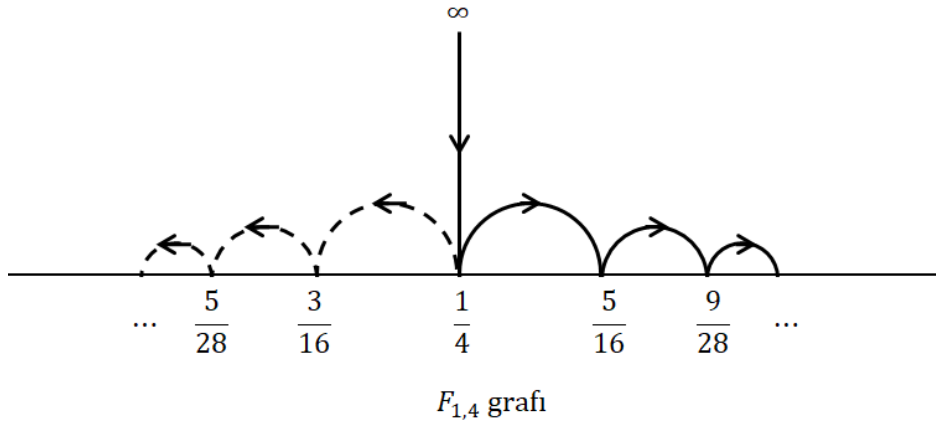
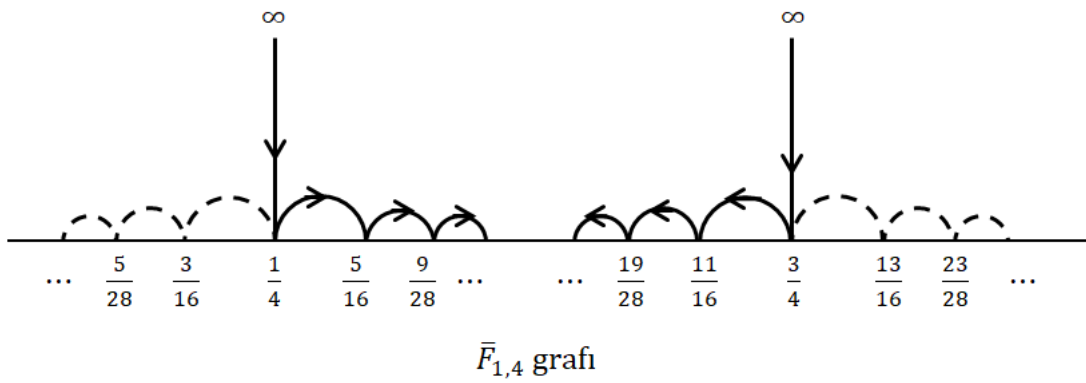
Şekil 14. $\bar{F}_{1,3}$ grafi

Şimdi $u^2 \mp u + 1 \equiv 0 \pmod{n}$ ve $u^2 \equiv 1 \pmod{n}$ kongrüans denklemleri birlikte değerlendirildiğinde $\mp u + 2 \equiv 0 \pmod{n}$, yani $u \equiv 2 \pmod{n}$ elde edilir. Böylece tüm $F_{n-2,n}$ formunda üçgen içeren grafların yönsüz olduğu sonucu çıkar. Ayrıca $F_{u,n}$ deki her üçgen $\bar{F}_{u,n}$ de bir üçgendir. Ancak tersi doğru değildir. Örneğin, $\bar{F}_{2,7} = F_{2,7} \cup F_{-2,7} = F_{2,7} \cup F_{5,7}$ olduğunu biliyoruz. Böylece $\Delta_1: \frac{1}{0} \rightarrow \frac{2}{7} \rightarrow \frac{3}{7} \rightarrow \frac{1}{0}$ ve $\Delta_2: \frac{1}{0} \rightarrow \frac{5}{7} \rightarrow \frac{4}{7} \rightarrow \frac{1}{0}$ temel üçgenleri elde edilir. Açıkça $\Delta_2 \in \bar{F}_{2,7}$ olmasına karşın $\Delta_2 \notin F_{2,7}$ dir.

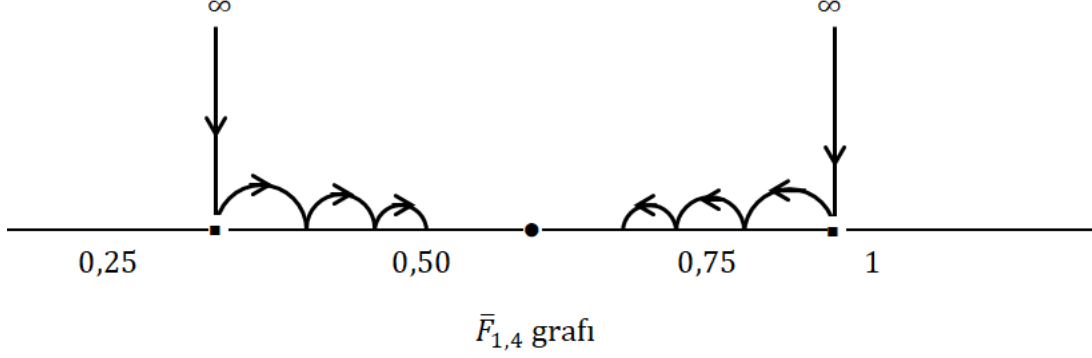
Şekil 15. $F_{2,7}$ grafi

Şekil 16. $\bar{F}_{2,7}$ grafi

Son olarak devre içermeyen grafları, yani ormanları inceleyelim. $\bar{F}_{1,2} = F_{1,2}$ olduğundan $n = 2$ den sonraki en elemanter orman $n = 4$ için meydana gelir. $\bar{F}_{1,4} = F_{1,4} \cup F_{3,4}$ olduğundan ilgili ormanlar ve ormanlardaki temel ağaçlar şekildeki gibidir.

Şekil 17. $F_{1,4}$ grafiŞekil 18. $\bar{F}_{1,4}$ grafi

Burada ortaya çıkan önemli sorulardan biri, sağ ve sol tarafa doğru yönelmiş temel ağaçların birbirleriyle kesişip kesişmediğidir. $(u, n) = 1$ ise $\exists k \in \mathbb{Z}$ öyle ki $u^2 + ku + 1 \equiv 0 \pmod{n}$ olduğunu gösterdik. Yine $(u, n) = 1$ ve $u^2 + ku + 1 \equiv 0 \pmod{n}$ ise $\varphi\left(\frac{u}{n}\right) = \frac{u + \frac{1}{k}}{n}$ ve $\varphi\left(\frac{u + \frac{1}{k}}{n}\right) = \frac{u + \frac{1}{k - \frac{1}{k}}}{n}$ olduğunu biliyoruz.



Şekil 19. $\bar{F}_{1,4}$ grafi

Teorem 5.5'ten de $\frac{1}{k - \frac{1}{k - \frac{1}{k}}} \rightarrow \frac{k - \sqrt{k^2 - 4}}{2}$ olduğu biliniyor. Böylece $F_{1,4}$ için $u^2 + ku + 1 \equiv$

$0 \pmod{n}$ 'den $1 + 2.1 + 1 \equiv 0 \pmod{4}$, yani $k = 2$. Buradan $\frac{k - \sqrt{k^2 - 4}}{2} = 1$ olur. Sonuç

olarak $\frac{1}{0} \rightarrow \frac{1}{4} \rightarrow \dots \rightarrow \frac{1+1}{4} = \frac{1}{2}$. $F_{3,4}$ için $3^2 + 2.1 + 1 \equiv 0 \pmod{4}$, yine $k = 2$. Buradan

limit 1 olur. Sonuç olarak $\frac{1}{0} \rightarrow \frac{3}{4} \rightarrow \dots \rightarrow \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2}$.

3. İRDELEME

Modüler grubun Picard grubundaki normalliyeinin altyörüngesel grafları ilk kez (Gözütok-Guler, 2018)'de çalışılmıştır. (Akbaş, 2001)'de sonlu üretilmiş Modüler grubun eliptik üreteçleri ile altyörüngesel graflarındaki devreler arasındaki ilişki ortaya konduktan sonra bunu diğer sonlu üretilmiş gruplara uygulayan pek çok çalışma yayınlanmıştır. Dolayısıyla (Gözütok-Guler, 2018)'de çalışmanın odağında içerisinde devre olan graflar ele alınmış ve bunların eliptik üreteçlerle olan bağlantısına dair sonuçlar elde edilmiştir.

(Değer vd, 2011)'de Modüler grubun altyörüngesel grafları içerisinde ağaç olanların da oldukça önemli olduğu gösterilmiştir. Bu yaklaşım daha sonra (Sarma et al., 2015) çalışmalarında desteklenmiş ve bu ağaçların yeni bir tür sürekli kesir gösterimi olduğu kanıtlanmıştır. Bu tez çalışmasında bu öneme atfen normalliyeinin devre içermeyen grafları yani ormanları ele alınmış ve bunlara dair sonuçlar elde edilmiştir.

Bu tezdeki sonuçlar ve (Gözütok-Guler, 2018) çalışması ile birlikte Modüler grubun Picard grubundaki normalliyeinin altyörüngesel graf karakterizasyonu tamamlanmıştır. Buna göre, devre şartları nedeniyle normalliyeinin grafları içerdiği devre açısından modüler gruba nazaran daha zengindir. Sonuçlar itibariyle (Kader-Guler, 2013) ile benzerlik göstermektedir. Ancak devre şartlarındaki artış, gidilebilecek en uzak köşe ve minimal uzunluk açısından modüler grup ile karşılaştırıldığında herhangi bir değişikliğe yol açmadığı ispatlanmıştır.

Bu tip çalışmalar literatür açısından önemlidir. Örneğin bir başka normalliye, $\Gamma_0(n)$ 'nin $PSL_2(\mathbb{R})$ 'deki normalliyeinin altyörüngesel graf karakterizasyonu 118F018 kodlu Tübitak projesi olarak desteklenmiş, bu yönde yapılan bir çok çalışma da son yıllarda yayınlanmıştır. Ayrıca sürekli kesirlerin, sırasıyla Pell denklemleri, Möbiüs dönüşümleri ve Genişletilmiş modüler grupla olan ilişkisine dair tezler yazılmıştır (Pekasil, 2006; Çınar, 2008; Sarıca, 2019). Elde ettiğimiz sonuçlar, bu sahadaki araştırmalara da katkı sağlamaktadır.

4. SONUÇLAR

Bu tez çalışmasında elde edilen temel sonuçlar:

1. Modüler grubun Picard grubundaki normalliyeinin altyörüngesel graflarının orman olma (devre içermemesi) koşulu gerek ve yeter şart olarak elde edilmiştir (Teorem 2.5.1.8). Buna göre $\bar{F}_{u,n}$ ormandır $\Leftrightarrow$ graf üçgen içermiyorsa yani $u^2 \pm u + 1 \equiv 0(modn)$ dir.

2. Normalliyeinin altyörüngesel graflarındaki herhangi bir ağacın gidebileceği en uzak köşe hesaplanmıştır (Teorem 2.5.1.7). Buna göre,

$u, n \in \mathbb{Z}^+$ ve $(u, n) = 1$ olsun. $\bar{F}_{u,n}$ grafi için

(a) $\frac{u}{n}$ köşesinin gideceği en uzak köşe, $k, 1 < k < n$ ve $u^2 + ku + 1 \equiv 0(modn)$

koşullarını sağlayan yegane tamsayı olmak üzere $\frac{u+\frac{1}{k}}{n}$ köşesidir. $\frac{u}{n}$ 'nin gittiği bir en yakın köşe yoktur.

(b) $\frac{u+\frac{1}{k}}{n}$ köşesinin gideceği en uzak köşe $k, 1 < k < n$ ve $u^2 + ku + 1 \equiv 0(modn)$

koşullarını sağlayan yegane tamsayı olmak üzere $\frac{u+\frac{1}{k-\frac{1}{k}}}{n}$ köşesidir. $\frac{u+\frac{1}{k}}{n}$ 'nin gittiği bir en yakın köşe yoktur.

3. Modüler grubun Picard grubundaki normalliyeinin altyörüngesel graf karakterizasyonu bu tez ile birlikte tamamlanmıştır.

5. ÖNERİLER

Bu tez çalışmasının ana objesi Modüler grubun Picard grubundaki normalliyeni idi. Diğer sonlu üretilmiş grupların da alt yörüngesel grafları çalışılabilir, ki literatürde bu yönde çalışmalar vardır (Wilson 2009).

Yine sürekli kesirlerin matris cebiri ve yineleme bağıntıları ile olan ilişkisi kullanılarak buradaki sonuçları yeni gösterimlerle çeşitlendirmek, sayılar teorisi açısından ilgiye değer sonuçlar verebilir (Değer, 2017).

Ayrıca rasyonel sayıların sınıflandırma ve sayılabilirlik algoritmaları üzerine yapılan çalışmalar dikkate alındığında alt yörüngesel graflarla bu hususların ele alınıp alınamayacağı problemi çalışılabilir (Nathanson, 2015).

Çalışmada grup hareketinin cereyan ettiği küme olarak rasyonel sayılar kümesinin seçilme nedeni cusp (parabolik dönüşümlerin sabit noktaları) kümesi olmasıdır. Eliptik ve hiperbolik dönüşümlerin sabit nokta kümelerinin de incelenmesi Möbiüs dönüşümlerinin önemli problemlerinden biri olup, bu tezde çalıştığımız grup, bu açıdan da araştırma konusu olabilir (Schoneberg, 1974; Shimura 1974; Kulkarni, 1991).

6. KAYNAKLAR

- Akbaş, M., 2001. On Suborbital Graphs For The Modular Group, Bull. London Math. Soc., 33, 647-652.
- Akbaş, M., 2013. Kör, T. ve Kesicioğlu, Y. Disconnectedness of the subgraph F^3 for the group Γ^3 . J Inequal Appl, 283.
- Anderson James W., 2000. Hyperbolic Geometry, Springer-Verlay.
- Cangül, İ. N., Çelik, B., 2002. Sayılar Teorisi Problemleri, Bursa: Paradigma Basın Yayın Ltd. Şti., 305-330.
- Cuyt, A., Petersen, V.B., Verdonk, B., Waadeland, H. ve Jones, W.B., 2008. Handbook of Continued Fractions for Special Functions, SpringerScience, Netherlands.
- Çınar, F., 2008. Möbiüs Dönüşümleri ile Sürekli Kesirlerin İlişkisi, Yüksek Lisans Tezi, Sakarya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Sakarya.
- Değer, A. H., 2017. Relationships with the Fibonacci Numbers and the Special Vertices of the Suborbital Graphs. GÜFBED/GUSTIJ, 7,2, 168-180.
- Değer, A. H., 2017. Vertices of Paths of Minimal Lengths on Suborbital Graphs, FILOMAT, 31, 4, 913-923.
- Değer, A. H., Besenk, M. ve Güler, B.Ö., 2011. On Suborbital Graphs And Related Continued Fractions, Applied Mathematics and Computation, 218, 3, 746-750.
- Diamond, H.G. 1982. Elementary Methods in the Study of the Distrubition of Prime Numbers. Bulletin of the American Mathematical Society, 7, 3, 553-589.
- Ford, L.R., 1951. Automorphic Functions, American Mathematical Society, Chelsea Publishing Series 85.
- Jones, G. A. ve Jones, J. M., 2012. Elementary Number Theory, Springer Undergraduate Mathematics Series, Springer-Verlag, London.
- Güler, B.Ö., Kör. T. ve Şanlı, Z., 2016. Solution to Some Congruence Equations via Suborbital Graphs. Springerplus, 5, 1, 1327.
- Jones, G. A., Singerman, D. ve Wicks, K., 1991. The Modular Group and Generalized Farey Graphs, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 160, 316-338.

- Jones, G.A. ve Singerman, D., 1987. Complex Functions: An Algebraic and Geometric Viewpoint, Cambridge University Press, Cambridge.
- Kulkarni, R.S. 1991. An Arithmetic–geometric Method in the Study of the Subgroups of the Modular Group, American J. Math., 113, 6, 1053-1133.
- Khinchin, A.Ya., 1964. Continued Fractions, Chicago.
- Kushwaha, S. ve Sarma, R., 2018. Continued fractions arising from $F_{1,3}$. Ramanujan J 46, 605–631.
- Nathanson, M.B., 2015. A Forest of Linear Fractional Transformations, Int. J. Number Theory 11, 4, 1275–1299
- Niven, I., Zuckerman, H. S. ve Montgomery, H. L., 2001. An Introduction to the Theory of Numbers, Fifth Edition, John Wiley & Sons, Inc.
- Pekasil, M., 2006. Sürekli Kesirler ve Pell Denklemleri, Yüksek Lisans Tezi, Sakarya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Sakarya.
- Potts, J.P., 1996. Computable Reel Arithmetic Using Linear Fractional Transformations, London.
- Sarıca, Ş., 2019. Genişletilmiş Modüler Grup ve Sürekli Kesirler, Doktora Tezi, Balıkesir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Balıkesir.
- Sarma R., Kushwaha S., Krishnan R., 2015. Continued Fractions Arising From $F_{1,2}$, Journal of Number Theory, 154, 179-200.
- Schoeneberg, B., 1974. Elliptic Modular Functions, Springer-Verlag, Berlin- Heidelberg-New York.
- Shimura, G., 1974. Introduction to the Arithmetic Theory of Automorphic Functions, Princeton University Press.
- Sims C.C., 1967. Graphs and Finite Permutation Groups, Math. Zeitschr., 95, 76-86.
- Wilson, R.A., 2009. The Finite Simple Groups, Springer-Verlag, London.
- Yazıcı, N., 2013. Modüler Grubun Picard Grubundaki Normalleyeninin Alt Yörüngesel Grafları, Yüksek Lisans Tezi, K.T.Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.
- Yazıcı Gözütok N., Zengin, I. ve Güler, B.Ö., 2018. Trees of The Normalizer of the Modular Group in The Picard Group, Turk. J. Math. Comput. Sci., 9, 63-70.

- Yazıcı Gözütok, N., Zengin, I. ve Güler, B.Ö., 2018. Fuchsian Groups and Continued Fractions, International Conference on Mathematics and Mathematics Education (ICMME-2018), Ordu, Türkiye, 165-168.
- Yazıcı Gözütok, N. ve Güler B.Ö., 2018. Suborbital Graphs of the Normalizer of the Modular Group in the Picard Group, Iranian Journal of Science and Technology Transaction A-Science, 42, 4, 2167-2174.



ÖZGEÇMİŞ

İlgıt ZENGİN, 1991 yılında Giresun’da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Trabzon 24 Şubat İlköğretim Okulu’nda, lise öğrenimini Trabzon Kanuni Anadolu Lisesi’nde tamamladı. 2015 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Matematik bölümünden mezun oldu ve aynı yıl Karadeniz Teknik Üniversitesi Fatih Eğitim Fakültesi’nde pedagojik formasyonunu tamamladı. 2016 yılında Arhavi Hüseyin Gürkan Anadolu Lisesi’ne matematik öğretmeni olarak atanıp çalışmaya başladı. 2017 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında Yüksek Lisans programında eğitime başladı. Günümüzde Arhavi’deki matematik öğretmenliği görevine devam etmektedir. İyi derecede İngilizce bilmektedir.