

**T.C.
ERZİNCAN BİNALİ YILDIRIM ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**LEAVİTT YOL CEBİRLERİNİN ENDOMORFİZMA
HALKALARI**

Zehra ÇELİK ÇÖP

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Tufan ÖZDİN

**MATEMATİK
ANABİLİM DALI**

**ERZİNCAN
2020
Her Hakkı Saklıdır.**

Bilimsel Etięe Uygunluk Sayfası

“Leavitt yol cebirlerinin endomorfizma halkaları” isimli “Yüksek Lisans” tezim tarafımca intihal tespit programı ile incelenmiştir. Buna göre tezimde bilimsel etik ihlali ve intihal olarak nitelendirilebilecek herhangi bir durum olmadığını taahhüt ederim.

Bu çalışmadaki tüm bilgilerin, akademik ve etik kurallara uygun bir biçimde elde edildiğini; aynı zamanda bu kural ve davranışların gerektirdiğı gibi, bu çalışmanın özünde olmayan tüm materyal ve sonuçları tam olarak aktardığımı ve referans gösterdiğimi beyan ederim. 22/09/2020



Zehra ÇELİK ÇÖP

ÖZET

Yüksek Lisans

LEAVİTT YOL CEBİRLERİNİN ENDOMORFİZMA HALKALARI

Zehra ÇELİK ÇÖP

Erzincan Binali Yıldırım Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Tufan ÖZDİN

E bir yönlendirilmiş çizge ve K bir cisim olsun. Katsayıları K cisminden alınan E yönlendirilmiş çizgesinin Leavitt yol cebirleri 2005 yılında G. Abrams ve A. Pino tarafından tanımlanmıştır. Bu tezde, ilk olarak, $L := L_K(E)$ ile gösterilen, Leavitt yol cebirlerinin kendisi üstünde modül yapısı oluşturduğu dikkate alınarak, 2015 yılında G. A. Pino, K. M. Rangaswamy and M.S. Molina tarafından verilen Leavitt yol cebirlerinin endomorfizma halkalarının halka ve modül teorisi özellikleri derlenmiştir. Ayrıca Leavitt yol cebirlerinin endomorfizma halkasının bağımlı halka olması durumunda elde edilen sonuçlar verilmiştir.

2020, 34 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Bağımlı halka, Çizgeler, Endomorfizma halkaları, Leavitt yol cebirleri.

ABSTRACT

Master Thesis

ENDOMORPHISM RINGS OF LEAVITT PATH ALGEBRAS

Zehra ÇELİK ÇÖP

Erzincan Binali Yıldırım University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Asist.Prof.Dr. Tufan ÖZDİN

Let E be a directed graph and K be a field. The Leavitt path algebras of E with coefficients in K were introduced by G. Abrams and A. Pino in 2005. In this thesis, firstly, for Leavitt path algebras denoted by $L := L_K(E)$ considered as a right L -module, rings and module theoretical properties of endomorphism ring of Leavitt path algebra obtained by G. A. Pino, K. M. Rangaswamy and M.S. Molina in 2015, have been compiled. In addition, the results obtained when endomorphism ring of Leavitt path algebras is dependent ring are given.

2020, 34 Pages

Keywords: Endomorphism ring, Dependent ring, (Directed) Graph, Leavitt path algebra.

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans öğrenimi süresince bana desteğini hiçbir zaman esirgemeyen, tez çalışmasının belirleme ve hazırlama sürecinde tecrübesinden her zaman yararlandığım danışman hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Tufan ÖZDİN'e, öğrenim hayatım boyunca benden desteklerini hiçbir zaman esirgemeyip yanımda olan aileme ve yaşamdaki her zorlukta bütün desteği ile yanımda olan kıymetli eşim Ahmet ÇÖP'e teşekkür ederim.

Zehra ÇELİK ÇÖP

Eylül, 2020



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	iv
ŞEKİLLER LİSTESİ	v
SİMGELER ve KISALTMALAR	vi
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK ÖZETLERİ	3
3. KURAMSAL TEMELLER	4
3.1. Halka ve Modül Teori	4
3.2. Çizge Kavramı	10
3.2.1. Çizge Örnekleri	13
4. MATERYAL VE YÖNTEM	14
4.1. Leavitt Yol Cebirleri	14
5. ARAŞTIRMA BULGULARI	18
5.1. Leavitt Yol Cebirlerinin Endomorfizma Halkaları	18
6. SONUÇLAR	29
KAYNAKLAR	30
EKLER	33
Ek-1. Tez Çalışması Süresince Yapılan Akademik Çalışmalar	34
ÖZGEÇMİŞ	35

ŞEKİLLER LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 3.1. E_1 çizgesi	10
Şekil 3.2. E_2 çizgesi	11
Şekil 3.3. E_3 çizgesi	11
Şekil 3.4. E_4 çizgesi	12
Şekil 3.2.1. n köşeli sonlu satır çizgesi	13
Şekil 3.2.2. Tek ilmek çizgesi	13
Şekil 3.2.3. n -yapraklı gül çizgesi	13
Şekil 4.1.1. M_n çizgesi	14
Şekil 4.1.2. Tek ilmek çizgesi	15
Şekil 4.1.3. n -yapraklı gül çizgesi	15

SİMGELER ve KISALTMALAR

Simgeler

$CP(v)$	v köşesini baz alan tüm kapalı yolların kümesi
$CSP(v)$	v köşesini baz alan tüm kapalı basit yolların kümesi
E^0	E çizgesinin köşeler kümesi
E^1	E çizgesinin kenarlar kümesi
$End_R(M)$	M modülünün sağ R -modül endomorfizma halkası
IBN	Değişmez taban sayısı
Imf	f homomorfizmasının görüntü kümesi
$J(R)$	R halkasının Jacobson radikali
$Kerf$	f homomorfizmasının çekirdeği
$L_K(E)$	E çizgesi üzerindeki Leavitt yol K -cebiri
M_R	M sağ R - modül
δ_{ij}	Kroneker delta
$\oplus$	Direkt toplam
$\cong$	İzomorf
$\bigoplus_{i \in I} M_i$	M_i modüllerinin direkt toplamı

1. GİRİŞ

Bir K cismi üzerinde tanımlanan sonlu boyutlu V vektör uzay için $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ ve $\mathcal{B}' = \{v'_1, \dots, v'_m\}$ iki taban ise $n = m$ şeklindeki boyut teoremi lineer cebirin temel teoremlerinden biridir. Bu teorem bir K cismi için (her cisim kendi üzerinde bir vektör uzayı olduğundan) $K^n \cong K^m$ ise $n = m$ olacak şekilde tekrardan ifade edilebilir.

Matematikte temel sorulardan biri boyut teoreminin genel halkalar için doğru olup olmadığıdır. Yani R halkası için, bir sol R -modül olarak $R^n \cong R^m$ ise $n = m$ nin doğruluğu her zaman geçerli midir? Aslında bir ${}_R R$ -modül iki farklı tabana sahip ise bu iki tabanın aynı sayıda elemana eşit olup olmadığı sorusunun temelidir. Eğer bir halka bu özelliği taşıyorsa bu özelliğe *IBN* (Değişmez Taban Sayısı) özelliği denir. Tam sayılar halkası, cisimler, polinom halkaları, matris halkaları ve komutatif halkalar bu özelliği sağlar.

Fakat *IBN* (Değişmez Taban Sayısı) özelliği her zaman geçerli değildir. Örneğin; S , sonsuz (sayılabilir) boyutlu $\mathbb{R}$ -vektör uzayı V den V ye lineer dönüşümler halkası olsun. ($S = \{L: V \rightarrow V \mid V, \text{ sonsuz boyutlu } \mathbb{R} - \text{vektör uzayı}\}$) V nin bir tabanı $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n, \dots\}$ ise $\mathcal{B} = \{v_1, v_3, \dots, v_{2n-1}, \dots\} \cup \{v_2, v_4, \dots, v_{2n}, \dots\}$ den ve $V = V \oplus V$ sağlanır. Buradan; $S \cong \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V) \cong \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V \oplus V) \cong \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V) \oplus \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V) \cong S \oplus S = S^2$ olduğunda S , *IBN* (Değişmez Taban Sayısı) özelliğine sahip değildir.

1962 yılında W.G. Leavitt bu *IBN* (Değişmez Taban Sayısı) özelliğine sahip olmayan modülleri inceledi ve her $m < n \in \mathbb{N}$ çifti ve R , K -cebiri olmak üzere; modül izomorfizması olarak $R^n \cong R^m$ olan ve *IBN* (Değişmez Taban Sayısı) özelliğine sahip olmayan K -cebirlerinin varlığını kanıtlamıştır. Bu halkalar $L_K(m, n)$ ile gösterilir. (Leavitt, 1962)

2005'te G. Abrams ve G. A. Pino Leavitt cebirlerinin genellemesi olarak, katsayıları K cisminden olan bir satır sonlu E çizgesinin $L_K(E)$ Leavitt yol cebirini tanımladılar ve 2008'de bunu keyfi çizgeye genişlettiler.

G. Aranda Pino, K.M. Rangaswamy ve M. Siles Molina 2015'te Leavitt yol cebirlerinin kendisi üstünde bir sağ modül olduğunu dikkate alarak Leavitt yol cebirlerinin

endomorfizma halkalarının von Neumann düzenli olması gibi halka ve modül teorideki özellikleri incelemiştirler.

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır. Giriş ve kaynak özetlerinden sonraki bölümde halka ve modül teoride kullandığımız temel tanım ve teoremleri verdik. Dördüncü bölümde katsayıları K cisminden alınan bir E çizgesinin Leavitt yol cebirinin tanımı ile örnekleri verildi. Beşinci bölümde ise Leavitt yol cebirlerinin endomorfizma halkalarının halka ve modül teori özellikleri incelenerek, endomorfizma halkasının bağımlı halka olması durumunda Leavitt yol cebirinin ve E çizgesinin sağladığı şartlar verilmiştir. Tezin son bölümünde ise elde edilen sonuçlara yer verilmiştir.



2. KAYNAK ÖZETLERİ

Leavitt (1962) çalışmasında, “ Her $n > m \in \mathbb{N}$ ve K cismi için $\bigoplus_{i=1}^m R \cong \bigoplus_{i=1}^n R$ olacak şekilde $R = L_K(m, n)$ K -cebiri vardır.” Teoremini kanıtlamış ve her i, j ve bir K cismi için $\{x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n\}$ elemanları tarafından üretilen $x_i y_i = \delta_{ij} 1_R$ ve $\sum_{i=1}^n y_i x_i = 1_R$ şartlarını sağlayan $L(1, n)$ birimli Leavitt K -cebirini tanımlanmıştır.

Ehrilch (1968) çalışmasında, her birimli von Neumann düzenli R halkasının bağımlı halka olduğunu ispatlamıştır.

Henriksen (1973) çalışmasında, bağımlı halkaların düzenli halka olmasını göstermiştir.

Ehrilch (1976) çalışmasında, bir R halkasını birimli von Neumann düzenli halka olması için gerek ve yeter koşulun R halkasının düzenli ve sol morfik halka olması gerektiğini ispatladı.

Cuntz (1977) çalışmasında, n birim olmayan izometrilere tarafından üretilen $\mathcal{O}_n$ ile gösterilen C^* -cebirlerini inşa etti ve araştırdı. Günümüzde bu cebirler Cuntz cebirleri olarak adlandırılır.

Cuntz vd. (1980) çalışmalarında, bir (sonlu) A matrisi ile $\mathcal{O}_n$ cebirlerinin genelleşmesini verdiler.

Kumjian vd. (1998) çalışmalarında bir yönlü E çizgesinin $C^*(E)$ ile gösterilen C^* -cebiri tanımlamıştır.

Abrams vd. (2005) çalışmalarında, Leavitt cebirlerinin bir genellemesi olarak, satır sonlu çizgeler için keyfi bir K cismi üzerindeki evrensel K -cebiri olan $L_K(E)$ Leavitt yol cebirini tanımladılar.

Abrams vd. (2008) çalışmalarında, $L_K(E)$ Leavitt yol cebiri tanımını keyfi E yönlü çizgesi için verdiler.

Pino vd. (2015) çalışmalarında, Leavitt yol cebirlerinin endomorfizma halkalarının halka ve modül özelliklerini incelediler.

3. KURAMSAL TEMELLER

3.1. Halka ve Modül Teori

Tanım 3.1.1. R boştan farklı bir küme ve "+" ve "." R üzerinde tanımlı iki ikili işlem olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa, $(R, +, \cdot)$ cebirsel yapısına halka denir.

- i. $(R, +)$ bir abelyan gruptur.
- ii. R kümesi, ikinci işleme göre birleşme özeliğine sahiptir. Yani, her $a, b, c \in R$ için

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

sağlanır.

- iii. R kümesi üzerinde ikinci işlemin birinci işlem üzerine soldan ve sağdan dağılma özelliği vardır. Yani, $a, b, c \in R$

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) \text{ ve } (a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$$

sağlanır.

Bir R halkası üzerinde "." işlemi değişmeli ise, yani her $a, b \in R$ için $a \cdot b = b \cdot a$ sağlanıyorsa R halkasına değişmeli halka denir. Eğer her $a \in R$ için

$$1_R \cdot a = a \cdot 1_R = a$$

olacak şekilde $1_R \in R$ varsa R halkası birimli halka olarak adlandırılır.

R bir halka ve $H \subseteq R$ alt kümesi, R halkası üzerindeki ikili işlemlere göre bir halka ise H halkası R halkasının alt halkasıdır. (Atiyah ve Macdonald, 1969)

Tanım 3.1.2. R bir halka ve $\emptyset \neq I \subseteq R$ olsun.

- i. Her $a, b \in I$ için, $a - b \in I$ ve
- ii. Her $a \in I$ ve her $r \in R$ için, $ra \in I$ ($ar \in I$)

koşulları sağlanıyorsa I ya R nin sol (sağ) ideali denir. Bir ideal hem sağ hemde sol ideale sahipse iki yanlı ideal olarak adlandırılır. (Atiyah ve Macdonald, 1969)

Tanım 3.1.3. R ve S iki halka, $f: R \rightarrow S$ bir fonksiyon olsun. Her $a, b \in R$ için;

- i. $f(a + b) = f(a) + f(b)$
- ii. $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$

koşullarını sağlanıyorsa f ye bir halka homomorfizması denir. (Anderson ve Fuller, 1992)

Tanım 3.1.4. R ve S iki halka olsun $f: R \rightarrow S$ bir halka homomorfizması olsun. $\text{Ker} f = \{r \in R: f(r) = 0_S\}$ kümesine f nin çekirdeği denir. (Anderson ve Fuller, 1992)

Tanım 3.1.5. R ve S iki halka olsun $f: R \rightarrow S$ bir halka homomorfizması olsun. $\text{Im} f = \{f(r): r \in R\}$ kümesine f nin görüntü kümesi denir. (Anderson ve Fuller, 1992)

Tanım 3.1.6. Değişmeli bir R halkasının $e^2 = e$ olacak şekilde $e \in R$ elemanına idempotent eleman denir. (Anderson ve Fuller, 1992)

Tanım 3.1.7. R bir halka olsun. Eğer her $X = \{x_1 \dots x_n\} \subseteq R$ sonlu alt kümesi için, $X \subseteq eRe$ olacak şekilde bir $e \in R$ idempotent elemanı varsa, R halkası yerel birimlere sahiptir denir. Yani, her $x_i \in X$ için $x_i e = x_i = e x_i$ olacak şekilde bir $e \in R$ idempotenti varsa, e elemanına X alt kümesi için yerel birim adı verilir. (Abrams, 2017)

Tanım 3.1.8. R bir halka ve e_1, e_2 R nin iki idempotenti olsun. Eğer $e_1 e_2 = 0 = e_2 e_1$ ise e_1 ve e_2 ye ortogonal idempotentler denir. (Islam, 2015)

Tanım 3.1.9. R halkası ${}_R R = \bigoplus_{e \in E} Re$ olacak şekilde E sıfırdan farklı ortogonal idempotentlerin kümesini içeriyorsa yeterli idempotentlere sahiptir. (Abrams, 2017)

Tanım 3.1.10. M , R halkasının kendisinden farklı bir ideali olsun. R nin, M yi kapsayan M den başka hiçbir has ideali yoksa M ye bir maksimal ideal denir. (Abrams, 2017)

Tanım 3.1.11. R halkasının sadece bir tane maksimal ideali varsa, R halkasına bir yerel halka denir. (Çallıalp ve Tekir, 2009)

Tanım 3.1.12. $(M, +)$ bir değişmeli grup ve R bir halka olsun. $(m, r) \mapsto mr$ ile tanımlı $M \times R \rightarrow M$ fonksiyonu her $r, r_1, r_2 \in R$ ve $m, m_1, m_2 \in M$ için aşağıdaki şartları sağlarsa, M ye bir sol R -modül denir.

- i. Her $r \in R$, her $m_1, m_2 \in M$ için; $r(m_1 + m_2) = rm_1 + rm_2$

- ii. Her $r_1, r_2 \in R$ ve her $m \in M$ için; $(r_1 + r_2)m = r_1m + r_2m$
- iii. Her $r_1, r_2 \in R$ ve her $m \in M$ için; $(r_1r_2)m = r_1(r_2m)$
- iv. Her $m \in M$ için; $1_R m = m$

Sağ R -modül tanımı da benzer şekilde yapılabilir. (Çallıalp ve Tekir, 2009)

Tanım 3.1.13. R bir halka, M bir R -modül ve N , M nin bir alt grubu olsun. Eğer her $n \in N$ ve $r \in R$ için $nr \in N$ oluyorsa N ye M nin alt modülü denir. $N \leq M$ şeklinde gösterilir. (Anderson ve Fuller, 1992)

Tanım 3.1.14. R bir halka, M ve N de R -modül olsunlar. Bir $f: M \rightarrow N$ fonksiyonu, her $m, m_1 \in M$ için,

$$f(m + m_1) = f(m) + f(m_1),$$

her $r \in R$ ve her $m \in M$ için,

$$f(rm) = rf(m)$$

koşulları sağlanıyorsa, f ye bir modül homomorfizması denir. (Anderson ve Fuller, 1992)

Tanım 3.1.15. M bir R modül olsun. Buna göre M den M ye tüm homomorfizmaların kümesi toplama ve bileşke işlemleriyle bir halka belirtir. Bu halkaya endomorfizma halkası denir. Bu küme $End(M)$ ile gösterilir. (Islam, 2018)

Tanım 3.1.16. M ve N , R - modülleri için $M \oplus N = \{(x, y): x \in M, y \in N\}$ kümesine M ile N nin dik toplamı denir. (Anderson ve Fuller, 1992)

Tanım 3.1.17. R bir halka ve $(R, +)$ toplamsal gurubunun bir $\{R_n: n \in \mathbb{Z}\}$ alt grubu için aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa R halkasına $\mathbb{Z}$ -dereceli halka denir.

- i. Her $m, n \in \mathbb{Z}$ için $R_m R_n \subseteq R_{m+n}$
- ii. Abelyan grup olarak, $R = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} R_n$

dir. (Abrams vd., 2017)

Tanım 3.1.18. Sıfırdan farklı bir modülün, sıfır veya kendinden başka hiçbir alt modülü yoksa, bu modüle basit modül denir. (Islam, 2015)

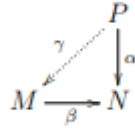
Tanım 3.1.19. M bir R -modül olsun. Eğer M basit modüllerin direkt toplamına izomorf ise M ye yarı-basit modül denir. (Islam, 2015)

Tanım 3.1.20. R bir halka olmak üzere, R halkasının tüm maksimal ideallerinin kesişimine R halkasının Jacobson radikali denir. $J(R)$ ile gösterilir. (Çallıalp ve Tekir, 2009)

Önerme 3.1.1. $x \in J(R)$ ancak ve ancak her $y \in R$ için, $1 - xy$ R halkasının bir tersinir elemanıdır. (Atiyah ve Macdonald, 1969)

Lemma 3.1.1. R birimli halka olsun. R halkasının Jacobson radikali $J(R)$ sıfırdan farklı idempotent eleman içeremez. (Dangerfield, 2011)

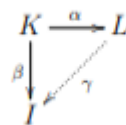
Tanım 3.1.21. R bir halka ve P bir R -modül olsun. Her $\beta: M \rightarrow N$ epimorfizması ve $\alpha: P \rightarrow N$ homomorfizması için $\beta \circ \gamma = \alpha$ olacak biçimde bir $\gamma: P \rightarrow M$ homomorfizması varsa P ye projektif modül denir. Yani,



diyagramı değişmeli (yani $\beta \circ \gamma = \alpha$) olacak şekilde bir γ homomorfizması varsa P ye projektif modül denir. (Anderson ve Fuller, 1992)

Tanım 3.1.22. A bir R -modül $X \leq A$ olsun. Herhangi $\varphi: N \rightarrow A/X$ homomorfizması, $w: N \rightarrow A$ homomorfizmasına genişliyorsa N ye A -projektif modül denir ve her A modülü için A -projektif ise A ya yarı-projektif modül denir. (Anderson ve Fuller, 1992)

Tanım 3.1.23. R bir halka ve I bir R -modül olsun. Her $\alpha: K \rightarrow L$ monomorfizması ve $\beta: K \rightarrow I$ homomorfizması için $\gamma \circ \alpha = \beta$ olacak biçimde bir $\gamma: L \rightarrow I$ homomorfizması varsa I ya injektif modül denir. Diğer bir deyişle,



Diyagramı değişmeli (yani $\gamma \circ \alpha = \beta$) olacak şekilde bir γ homomorfizması varsa I ya injektif modül denir. (Anderson ve Fuller, 1992)

Tanım 3.1.24. A bir R -modül $X \leq A$ olsun. Herhangi $\varphi: X \rightarrow N$ homomorfizması, $\gamma: A \rightarrow N$ homomorfizmasına genişliorsa N ye A -injektif modül denir. (Anderson ve Fuller, 1992)

Tanım 3.1.25. Bir M modülü M -injektif ise M ye quasi-injektif denir. Açıktır ki, M modülü injektif ise yarı-injektiftir. Ancak tersi doğru değildir. (Anderson ve Fuller, 1992)

Tanım 3.1.26. R bir halka olsun. Buna göre R^m ve R^n serbest sol R modüllerinin izomorf olması $m = n$ olmasını gerektiriyorsa R ye IBN (Değişmez Taban Sayısı) özelliğine sahiptir denir. (Abrams vd., 2017)

Tanım 3.1.27. A bir halka, R birimli ve değişmeli bir halka olmak üzere, A birimsel sağ R -modül ve $\forall a, b \in A, \forall r \in R$ için

$$(ab)r = a(br) = (ar)b$$

ise A halkasına bir R -cebiri denir. (Matej, 2014)

Tanım 3.1.28. A ve B iki R -cebiri olmak üzere $f: A \rightarrow B$ dönüşümü hem halka homomorfizması hem de R -modül homomorfizması şartlarını sağlıyorsa f dönüşümü bir R -cebiri homomorfizmasıdır. (Matej, 2014)

Tanım 3.1.29. R bir halka olsun. Her $a \in R$ için $a = aba$ olacak şekilde $b \in R$ varsa R ye von Neumann düzenli halka denir. (Abrams ve Rangaswamy, 2010)

Tanım 3.1.30. M bir R modül ve $m \in M$ olsun. $\{m\}$ nin ürettięi alt modül

$$(m) = Rm = \{rm: r \in R\}$$

ye m ile üretilmiř alt modül denir. Eğer $M = (m)$ olacak şekilde bir $m \in M$ bulunabilirse, M ye devirli modül denir. (Anderson ve Fuller, 1992)

Tanım 3.1.31. M bir R modül olsun. Eğer her $s \in S$ için $R_M(s) = eM$ olacak şekilde $e^2 = e \in S$ varsa M ye Rickart modül denir. (Rizvi vd., 2010)

Tanım 3.1.32. M bir modül olsun. Eğer $f \in S$ için $M / fM \cong \text{Ker} f$ ise f ye morfik denir ve eğer M nin her homomorfizması morfik ise M ye morfik modül adı verilir. (Nicholson ve Campos, 2005)

Tanım 3.1.33. R bir halka olsun. $a, b \in R$ için sıfırdan farklı $s, t \in R$ vardır öyle ki $sa + tb = 0$ ise R bağımlı halka olarak adlandırılır. (Ehrlich, 1968)

Önerme 3.1.2. R bir halka ve $x \in R$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

- i. $e - x \in R(x - x^2)$ olacak şekilde $e^2 = e \in Rx$ vardır.
- ii. $(1 - e) - c(1 - a) \in J(R)$ olacak şekilde $c \in R$ ve $e^2 = e \in Rx$ vardır.
- iii. $R = Re + R(1 - x)$ olacak şekilde $e^2 = e \in Rx$ vardır.
- iv. $1 - e \in R(1 - x)$ olacak şekilde $e^2 = e \in Rx$ vardır. (Nicholson, 1977)

Tanım 3.1.34. R bir halka olsun. Eğer R halkasının her elemanı Önerme 3.1.2. deki denk şartlardan birini sağlarsa R ye takas halkası denir. (Nicholson, 1977)

Tanım 3.1.35. R bir halka olsun. Bir $a \in R$ elemanı bazı $u \in U(R)$ için $a = auu$ ise R nin düzgün birimli olduğu söylenir. $ur(R) = R$ ise R ye düzgün birimli halka denir. (Ehrlich, 1968)

Tanım 3.1.36. R bir halka olsun. R halkasının birim elemanlarının kümesi $U(R)$ ile gösterilir. (Ehrlich, 1968)

Tanım 3.1.37. R bir halka olsun. Herhangi bir $e \in R$ için R de köşe halkası eRe dir. Yani her $a \in eRe$ için; $a \in ur(eRe)$ ise $a \in ur(R)$ dir. (Ehrlich, 1968)

Tanım 3.1.38. $\alpha, \beta \in E$ yolları verisin, bazı γ yolu için $\alpha = \beta\gamma$ ise α 'nın ilk segmentinin β olduğu söylenir. $L_K(E)$ de sıfır olmayan $\alpha\beta^*$ ve $\gamma\delta^*$ yolları verilsin, $(\alpha\beta^*)(\gamma\delta^*) \neq 0$ ancak ve ancak γ 'nin ilk segmenti β dir.

Tanım 3.1.39. R bir halka olsun. Her $a, b \in R$ elemanları için, $Ra = \text{ann}(b)$ ve $Rb = \text{ann}(a)$ ise $a \sim b$ denir.

Tanım 3.1.40. R bir halka ve M bir sol R -modül olsun. Buna göre M nin sıfırlayanı;

$\text{ann}(M) = \{x \in R : xm = 0, \text{ her } m \in M \text{ için}\}$ şeklinde tanımlanır. (Anderson ve Fuller, 1992)

3.2. Çizge Kavramı

Tanım 3.2.1. Bir E çizgesi, boştan farklı E^0 köşeler kümesi, E^1 kenarlar kümesi olmak üzere $E = (E^0, E^1)$ sıralı ikilisi ile gösterilir. (Bondy ve Murty, 1976)

Tanım 3.2.2. Bir çizge sonlu sayıda köşe ve kenara sahipse sonlu çizge olarak adlandırılır. Aksi takdirde sonsuz çizge denir. (Bondy ve Murty, 1976)

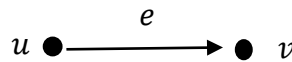
Tanım 3.2.3. Bir E çizgesinin her bir kenarı bir yöne sahipse bu çizgeye yönlendirilmiş çizge denir. (Bondy ve Murty, 1976)

Tanım 3.2.4. $E = (E^0, E^1, r, s)$ yönlü çizge, E^0, E^1 iki küme ve bu kümeler arasındaki $r, s : E^1 \rightarrow E^0$ dönüşümlerinden meydana gelir. E^0 köşeler kümesi ve E^1 kenarlar kümesi olarak adlandırılır. Her $e \in E^1$ için $s(e)$, e kenarının kaynağı ve $r(e)$, e kenarının değişimi olarak tanımlanır. Eğer $s(e) = u$ ve $r(e) = v$ ise u , e kenarını yayıyor ve v , e kenarını alıyor demektir. Her $v \in E^0$ için $s^{-1}(v)$, v tarafından yayılan kenarların kümesi, $r^{-1}(v)$ ise v tarafından alınan kenarların kümesidir. Eğer v köşesi hiç kenar yaymıyorsa, yani $s^{-1}(v) = \emptyset$ ise v köşesine bataklık, hiç kenar almıyorsa, yani $r^{-1}(v) = \emptyset$ ise v köşesine kaynak denir. (Corrales ve Solanilla, 2015)

Tanım 3.2.5. v köşesi sonsuz sayıda kenar yayıyor ise, v köşesine sonsuz yayıcı denir. Eğer v köşesi sonlu sayıda kenar yayıyor ise düzgün köşe olarak adlandırılır. (Abrams vd., 2017)

Tanım 3.2.6. E^0, E^1 kümeleri sonlu ise, E çizgesine sonlu çizge denir. Eğer E çizgesi sonsuz yayıcı içermiyorsa E çizgesi sıra sonlu çizge olarak adlandırılır. (Abrams vd., 2017)

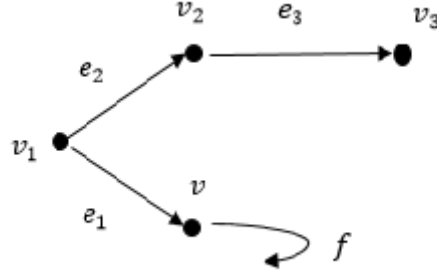
Örnek 3.1. Bir E_1 çizgesi alalım.



Şekil 3.1. E_1 çizgesi

Burada E_1 çizgesi u, v köşeleri ile e kenarından oluşur ve u köşesinden v köşesine gider.

Örnek 3.2. E_2 :

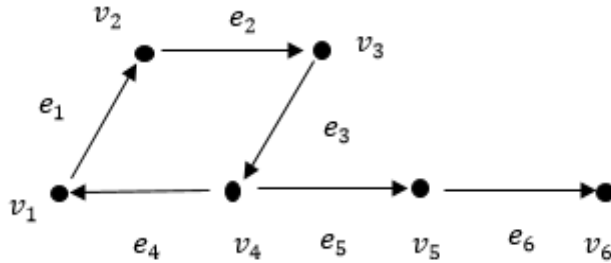


Şekil 3.2. E_2 çizgesi

Şekildeki E_2 çizgesinde köşeler kümesi $E_2^0 = \{v, v_1, v_2, v_3\}$, kenarlar kümesi $E_2^1 = \{f, e_1, e_2, e_3\}$ şeklindedir. Burada v_1 köşesi hiç kenar almadığından yani $r^{-1}(v_1) = \emptyset$ olduğundan v_1 köşesi kaynaktır. Ayrıca v_3 köşesi hiç kenar yaymadığından yani $s^{-1}(v_3) = \emptyset$ olduğundan v_3 köşesi bir bataktır.

Tanım 3.2.7. E çizgesinde bir μ yolu, her $i = 1, 2, 3, \dots, n-1$ için $r(e_i) = s(e_{i+1})$ olacak şekilde $e_1, e_2, \dots, e_n$ kenarlarından oluşan $\mu = e_1 e_2 \dots e_n$ şeklinde ki dizisidir. Bu μ yolunun kaynağı ve değişimi $s(\mu) = s(e_1)$ ve $r(\mu) = r(e_n)$ şeklindedir. Ayrıca μ yolunun içerdiği kenar sayısı μ yolunun uzunluğunu belirler ve $|\mu|$ ile gösterilir. Bir çizgedeki tüm yolların kümesi $\text{Path}(E)$ ile gösterilir. (Corrales ve Solanilla, 2015)

Örnek 3.3. E_3 :



Şekil 3.3. E_3 çizgesi

Şekildeki E_3 çizgesi için $\mu_1 = e_1 e_2 e_3 e_4$ ve $\mu_2 = e_1 e_2 e_3 e_5 e_6$ birer yoldur.

Tanım 3.2.8. E çizgesinde bir μ yolunda $s(\mu) = v = r(\mu)$ ise yani başlangıç ve bitiş köşeleri aynı noktalar ise μ yoluna v köşesini baz alan kapalı yol denir. E çizgesinde v köşesini baz alan tüm kapalı yolların kümesi $CP(v)$ ile gösterilir. Bir μ kapalı yolunda her $j > 1$ için $s(e_j) \neq v$ ise yani e_j kenarlarının başlangıç noktaları v değilse μ yoluna v köşesini baz alan kapalı basit yol denir ve bütün kapalı basit yolların kümesi $CSP(v)$ ile gösterilir.

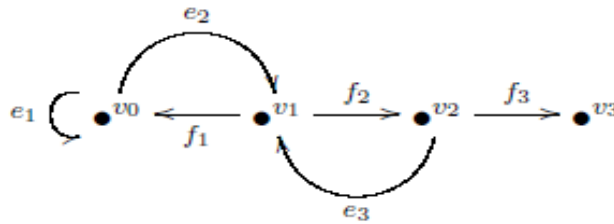
Bir μ kapalı yolunda her $i \neq j$ için $s(e_i) \neq s(e_j)$ ise yani her kenar farklı bir köşe tarafından yayılıyorsa μ yoluna döngü denir. Bir çizge hiç döngü içermiyorsa bu çizge çevrimsiz çizge olarak adlandırılır. (Dangerfield, 2011)

Tanım 3.2.9. Bir $\mu = e_1 e_2 \dots e_n$ yolu ve $s(e) = s(e_i)$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ iken $e \neq e_i$ olacak şekilde $e \in E^1$ kenarı varsa e kenarı μ yolu için bir çıkış olur. (Abrams ve Pino, 2005)

Tanım 3.2.10. E çizgesindeki her kapalı basit yolun bir çıkışı varsa E çizgesi Koşul(L)'yi karşılar denir. (Pino vd., 2015)

Tanım 3.2.11. Bir çizgedeki tüm köşeler ya hiçbir kapalı basit yolun bazı değil ya da birden fazla kapalı basit yolun bazı ise bu çizge Koşul(K)'yi karşılar. (Pino vd., 2015)

Örnek 3.4. E_4 :

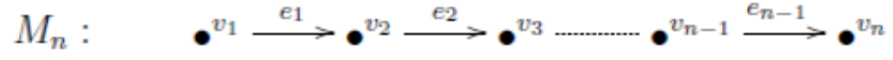


Şekil 3.4. E_4 çizgesi

E_4 çizgesi için bazı döngü örnekleri verilebilir. $\mu = e_1$, $p = e_2 f_1$ ve $q = f_2 e_3$ yolları birer döngüdür. $l = e_3 f_2 f_3$ yolunu incelediğimizde ise E çizgesinde v_2 köşesini baz alan bir döngü ve f_3 kenarı da l yolu için bir çıkıştır.

3.2.1. Çizge Örnekleri

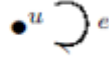
Örnek 3.2.1. M_n çizgesini alalım.



Şekil 3.2.1. n köşeli sonlu satır çizgesi

Burada $M_n^0 = \{v_1, \dots, v_n\}$, $M_n^1 = \{e_1, \dots, e_{n-1}\}$ ve her bir e_i kenarı her $i = 1, \dots, n - 1$ için $s(e_i) = v_i$, $r(e_i) = v_{i+1}$ sahiptir. Ayrıca burada v_n bir bataklık ve v_1 de kaynaktır.

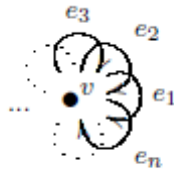
Örnek 3.2.2. Bir çizge alalım.



Şekil 3.2.2. Tek ilmek çizgesi

Burada $E^1 = \{e\}$, $E^0 = \{u\}$ ve $s(e) = r(e) = u$.

Örnek 3.2.3. $n \geq 2$ olsun, tek bir köşesi ve n tane ilmekten oluşan n yapraklı gül R_n çizgesini alalım.



Şekil 3.2.3. n -yapraklı gül çizgesi

Burada $R_n^0 = \{v\}$, $R_n^1 = \{e_1, \dots, e_n\}$ ve her $i = 1, \dots, n$ için $s(e_i) = r(e_i) = v$.

4. MATERYAL VE YÖNTEM

4.1. Leavitt Yol Cebirleri

Tanım 4.1.1. E keyfi bir çizge olsun. $\hat{E} = (E^0, E^1 \cup (E^1)^*, r', s')$ şeklinde tanımlanan çizgeye E çizgesinin genişletilmiş çizgesi denir. Burada $(E^1)^* = \{e_i^* : e_i \in E^1\}$ kümesi ve r', s' dönüşümleri, her $e \in E^1$ için; $r'(e^*) = s(e)$, $s'(e^*) = r(e)$ ve $r'(e) = r(e)$, $s'(e) = s(e)$ şeklinde tanımlanır. E^1 kümesi reel kenarları, $(E^1)^*$ kümesi ise gölge kenarların kümesidir. $\mu = e_1 e_2 \dots e_n$ yolu için μ^* gölge yolu $\mu^* = e_n^* \dots e_1^*$ şeklindedir. (Abrams ve Pino, 2005)

Tanım 4.1.2. E bir çizge ve K bir cisim olsun. Katsayıları K cismi üzerinde olan Leavitt yol cebiri; E^0 , E^1 ve $(E^1)^*$ kümeleri tarafından üretilen ve aşağıdaki şartları sağlayan K -cebiridir ve $L_K(E)$ ile gösterilir.

(A1) Her $v_i, v_j \in E^0$ için; $v_i v_j = \delta_{ij} v_i$

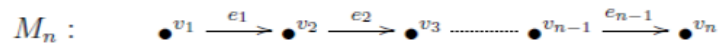
(A2) Her $e \in E^1$ kenarı için; $s(e)e = e = er(e)$ ve $r(e)e^* = e^* = e^*s(e)$

(CK1) Her $e_i, e_j \in E^1$ kenarları için; $e_i^* e_j = \delta_{ij} r(e_j)$

(CK2) Her düzgün $v \in E^0$ köşesi için; $v = \sum_{\{e \in E^1; s(e)=v\}} ee^*$

Burada $\hat{E}$ genişletilmiş çizgesi üzerindeki (CK1) ve (CK2) şartları Cuntz-Kruger bağıntıları olarak adlandırılır. (Abrams ve Pino, 2008)

Örnek 4.1.1. M_n çizgesini alalım.



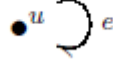
Şekil 4.1.1. M_n çizgesi

Bu durumda $M_n(K)$ katsayılarını K cisminden alan $n \times n$ matris cebiri olmak üzere $M_n(K) \cong L_K(M_n)$ 'dir.

$$\varphi: L_K(M_n) \rightarrow M_n(K)$$

dönüşümü $L_K(M_n)$ nin üreteçleri, $\varphi(v_i) = E_{ii}$, $\varphi(e_i) = E_{i(i+1)}$ ve $\varphi(e_i^*) = E_{(i+1)i}$ şeklindedir.

Örnek 4.1.2. R_1 : Tek ilmek çizgesini alalım.



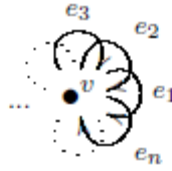
Şekil 4.1.2. Tek ilmek çizgesi

$K[x, x^{-1}]$ Laurent polinom olmak üzere,

$$\varphi: L_K(R_1) \longrightarrow K[x, x^{-1}]$$

dönüşümünden $\varphi(u) = 1$, $\varphi(e) = x$ ve $\varphi(e^*) = x^{-1}$ olup $L_K(R_1) \cong K[x, x^{-1}]$ dir.

Örnek 4.1.3. R_n : n -yapraklı gül çizgesini alalım.



Şekil 4.1.3. n -yapraklı gül çizgesi

R_n , n -yapraklı gül çizgesinin Leavitt yol cebiri $L(1, n)$ Leavitt cebirine izomorftur.

$L(1, n)$ Leavitt cebiri $\{x_i, y_i \mid i = 1, \dots, n\}$ elemanları ile üretilen ve

- i) Her $i, j \in \{1, \dots, n\}$ için, $x_i y_i = \delta_{ij}$
- ii) $\sum_{i=1}^n y_i x_i = 1$

şartlarını sağlayan bir K -cebirdir.

$$\varphi: L_K(R_n) \longrightarrow L(1, n)$$

dönüşümü $\varphi(v) = 1$, $\varphi(e_i) = y_i$ ve $\varphi(e_i^*) = x_i$ şeklinde tanımlanır.

Lemma 4.1.1. E keyfi bir çizge olsun. $k \in K$ ve $p, q \in E^*$ olmak üzere, $L_K(E)$ 'deki her eleman kpq^* formundadır. Ayrıca, her eleman aşağıdaki iki formdan biri şeklinde ifade edilebilir:

i) $kv_i, k \in K$ ve $v_i \in E^0$,

ii) $ke_{i_1} \dots e_{i_m} e_{j_n}^* \dots e_{j_1}^*, k \in K, e_{i_1}, \dots, e_{j_n} \in E^1$ ve $m, n \geq 0, m + n \geq 1$, bu yüzden p ve q , ikisi de 0 boyutlu bir v_i köşesi olur ya da $p = e_{i_1}, \dots, e_{i_m}, q = e_{j_1}, \dots, e_{j_n}$ ve p ve q 'dan en az biri 0'dan büyük uzunluktadır. (Pino, 2005)

Lemma 4.1.2. E bir çizge olsun. E^0 köşeler kümesi sonlu ve n tane köşe içeriyorsa, $L_K(E)$ birimli bir K -cebiri ve birimi $1 = \sum_{i=1}^n v_i$ dir. Ayrıca E^0 köşeler kümesi sonsuz ise $L_K(E)$ yerel birimlere sahiptir. (Dangerfield, 2011)

Lemma 4.1.3. E keyfi bir çizge ve p ve q , E çizgesinde iki yol olsun.

i) Eğer p ve q aynı uzunluğa sahipse $L_K(E)$ de $p^*q = \delta_{p,q}r(p)$,

ii) Eğer p ve q farklı uzunluğa sahipse $L_K(E)$ de ,

$$p^*q = \begin{cases} p_2^*, & \text{eğer } q, p \text{ nin ilk alt yolu ise} \\ q_2, & \text{eğer } p, q \text{ nun ilk alt yolu ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

dir. (Dangerfield, 2011)

Lemma 4.1.4. Keyfi bir E çizgesinin Leavitt yol cebiri $L_K(E)$,

$$\forall v \in E^0 \text{ için } \deg(v) = 0; \forall e \in E^1 \text{ için } \deg(e) = 1; \forall e \in E^1 \text{ için } \deg(e^*) = -1$$

olmak üzere $\mathbb{Z}$ -dereceli bir cebirdir. Yani, her $k_i \in K, p_i, q_i \in E^*$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$L_K(E)_n = \left\{ \sum_i k_i p_i q_i^* \mid l(p_i) - l(q_i) = n \right\}$$

ve

$$L_K(E) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} L_K(E)_n$$

dir. (Dangerfield, 2011)

Lemma 4.1.5. E keyfi bir çizge olsun;

$$L_K(E) = \bigoplus_{v \in E^0} L_K(E)v = \bigoplus_{v \in E^0} vL_K(E)$$

dir. (Tomforde, 2007)



5. ARAŞTIRMA BULGULARI

5.1. Leavitt Yol Cebirlerinin Endomorfizma Halkaları

Leavitt yol cebiri $L = L_K(E)$ nin endomorfizma halkası $A = \text{End}(L)$ hakkında bazı özellikleri vereceğiz. E herhangi bir çizge ve K herhangi bir cisim olsun. $\text{End}(L)$ birimli halkası A şeklinde tanımlansın. O zaman L , A 'nın alt halkası olarak tanımlanabilir, somut olarak aşağıdaki halkalar bir monomorfizmadır :

$$\phi: L \rightarrow \text{End}(L)$$

$$x \mapsto \lambda_x$$

burada $\lambda_x: L \rightarrow L$ x tarafından sol çarpandır, yani her $y \in L$ için bir homomorfizma sağ L -modülünün $\lambda_x(y) = xy$ dir. Ayrıca ϕ bir monomorfizmadır çünkü sıfırdan farklı $x \in L$ verildiğinde $u \in L$ idempotenti vardır öyle ki $xu = x$, dolayısıyla $0 \neq x = \lambda_x(u)$ dir.

Lemma 5.1.1. Herhangi bir $f \in A$ ve $x \in L$ için; $f\lambda_x = \lambda_{f(x)} \in L$ dir.

İspat: Herhangi bir $a \in L$ için; $f\lambda_x(a) = f(xa) = f(x)a = \lambda_{f(x)}(a)$ dir.

Sonuç 5.1.1. L , A nın bir sol idealidir.

Lemma 5.1.2. E bir çizge ve K bir cisim olsun. Aşağıdaki koşullar birbirine denktir;

- i. Leavitt yol cebiri $L_K(E)$ bir devirli sol A -modüldür.
- ii. Leavitt yol cebiri $L_K(E)$ bir devirli sol $L_K(E)$ -modüldür.
- iii. E çizgesi sonlu sayıda köşeye sahiptir.

İspat: (i) $\Leftrightarrow$ (ii) : $L_K(E)$ bir devirli sol A -modül ise buradan bazı $x \in L_K(E)$ için $L_K(E) = Ax$ dir. $L_K(E)$ den bir yerel birim u alalım öyle ki $ux = x$ olsun. O zaman $L_K(E) = Ax = Aux = L_K(E)x$ (çünkü $L_K(E)$, A nın bir sol ideali), böylece $L_K(E)$ bir devirli sol $L_K(E)$ -modül olur. Aynı mantık $L_K(E)$ bir devirli sol $L_K(E)$ -modül ise o zaman $L_K(E)$ bir devirli sol A -modül olduğunu ispatlamak için de kullanılabilir.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii): Bazı $x \in L_K(E)$ için $L_K(E) = L_K(E)x$ olduğunu varsayalım. Daha sonra $E^0 = \{u_1, \dots, u_n\}$ burada u_i köşeleri vardır öyle ki her $i \in \{1, \dots, n\}$ için $xu_i \neq 0$ dir.

Tersine $E^0 = \{u_1, \dots, u_n\}$ ise o zaman Leavitt yol cebiri birimlidir ve birim elemanı $u = \sum_{i=1}^n u_i$ dir bu yüzden $L_K(E) = L_K(E)u$ dur.

(Lozano ve Molina, 2002) çalışmalarında, iki halka $R \subseteq Q$ verildiğini hatırlayalım. Q da p, q elemanları ile $p \neq 0$ verilmişse $r \in R$ vardır öyleki $pr \neq 0$ ve $qr \in R$ olacak şekilde R nin sağ bölüm cebiri olduğunu söyleriz.

Lemma 5.1.3. A, L nin bir sağ bölüm cebiridir. Ayrıca, A nın sıfır olmayan iki yanlı ideali I için $I \cap L \neq 0$ dir.

İspat: $f \neq 0$ ile $f, g \in A$ olduğunu düşünelim. Özellikle, L deki bazı u idempotenti için $f(u) \neq 0$ dir. O zaman $f\lambda_u \neq 0$ olduğundan $f\lambda_u(u) = f(u.u) = f(u) \neq 0$ ve Lemma 5.1.1 den, $f\lambda_u = \lambda_{f(u)} \in L$ ve $g\lambda_u = \lambda_{g(u)} \in L$ dir. $f \neq 0 \in I$ olsun. Önceki argümana göre bir $u \in L$ idempotenti vardır öyle ki $f\lambda_u \in L$ dir. I bir ideal olduğundan, $f\lambda_u \in I$ dir. Yani $I \cap L \neq 0$ dir.

Önerme 5.1.1. A nın Jacobson radikali sıfırdır.

İspat: $J(A) \neq 0$ olduğunu varsayalım. Lemma 5.1.3 den $J(A) \cap L \neq 0$. $0 \neq r \in J(A) \cap L$ olsun. Herhangi bir $s \in L$ alalım. $J(A)$ bir ideal olduğundan, $sr \in J(A)$ dir. Böylece $q \in A$ vardır öyleki $sr + q - qrs = 0$ dir. O zaman L, A nın bir sol ideali ise $q = qsr - sr \in L$ dir. Sonuç olarak, r Jacobson radikali $J(L)$ ye aittir. Fakat bu bir çelişkiye yol açar. O halde $J(L) = 0$ olur.

Lemma 5.1.4. L nin her sol ideali A nın da bir sol idealidir.

İspat: L nin her sol ideali I olsun. $f \in A$ ve $y \in I$ alalım. L yerel birimlere sahip olduğundan, $v \in L$ idempotenti vardır öyleki $vy = y$ dir. Lemma 5.1.1. den $f\lambda_y = f\lambda_{vy} = \lambda_{f(vy)} = \lambda_{f(v)y} = \lambda_{f(v)}\lambda_y \in I$ dir.

Herhangi bir sol R -modül A için doğrudan ayrışma $A = M \oplus N = \bigoplus_{i \in I} A_i$ ise R halkasının bir takas halkası olduğu söylenir, burada $R \cong M$ için sol R -modül ve I bir sonlu küme, A_i de B_i alt modülü her zaman vardır öyle ki $A = M \oplus (\bigoplus_{i \in I} B_i)$ (Warfield, 1972).

(Ara, 1997) de bir takas halkasında birimli olması gerekmeyen R halkasının her $x \in R$ elemanı için $r, s \in R$ ve bir $e \in R$ idempotenti vardır öyle ki $e = rx = s + x - sx$ olduğu gösterildi.

Önerme 5.1.2. Aşağıdaki koşullar denktir:

- i. A bir takas halkasıdır.
- ii. L bir takas halkasıdır.
- iii. E Koşul(K)' yı karşılar.

İspat: (i) $\Rightarrow$ (ii): A bir takas halkası olduğunu varsayalım. L nin bir takas halkası olduğunu göstermek için; $x \in L$ olsun. Hipotezden A da f, g elemanları ile e idempotenti vardır öyle ki $e = f\lambda_x = g + \lambda_x - g\lambda_x$ dır. L , A 'nın bir sol ideali olduğundan $e = f\lambda_x \in L$ ve $g = e\lambda_x + g\lambda_x \in L$. Ayrıca, $u \in L$ de $ux = x = xu$ koşulunu sağlayan bir yerel birimi ise o zaman $f\lambda_x = f\lambda_{ux} = f\lambda_u\lambda_x$ ve böylece f yi $f\lambda_u = \lambda_{f(u)} \in L$ ile değiştirebiliriz. Dolayısıyla L , (ii) yi ispatlayan bir takas halkasıdır.

(ii) $\Rightarrow$ (i): (Warfield, 1972) de bir R -modülün yalnızca endomorfizm halkası bir takas halkası ise değişim özelliğine sahip olduğunu kanıtlamaktadır.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii): Bu denklik (Aranda vd., 2011) de kurulmuştur.

Sonuç 5.1.2. L , bir sol A -modül gibi projektiftir.

İspat: İlk önce $L = \bigoplus_{v \in E^0} Lv$ yazalım. Şimdi A nın bir v idempotenti için $Lv = Av$ bir direkt toplamıdır ve dolayısıyla Lv projektiftir. Sonuç olarak L , bir projektif sol A -modüldür.

Önerme 5.1.3. L , A nın saf bir sol alt modülüdür ve sonuç olarak, A/L bir düz A -modülüdür.

İspat: n değişkenli m denklem sistemi $x_1, \dots, x_n$ olduğunu varsayalım

$$\sum_{j=1}^n f_{ij}x_j = a_i \quad (i = 1, \dots, m)$$

burada $f_{ij} \in A, a_i \in L$, tüm $j = 1, \dots, n$ için $x_j = g_j \in A$ çözümüne sahiptir. u, L nin bir yerel birimi olsun her $i = 1, \dots, m$ için $a_i u = a_i$. O zaman her bir $i = 1, \dots, m$ için $\sum_{j=1}^n f_{ij} g_j u = a_i u = a_i$ dır. Lemma 5.1.1. den, $g_j u = g_j \lambda_u = \lambda_{g_j(u)} \in L$ ve böylece her $j = 1, \dots, n$ için $x_j = g_j u, L$ yukarıdaki sistemin bir çözümüdür. Bu L nin A da saf olduğunu gösterir. A -modül de A projektif olduğundan, A / L bir düz A -modülüdür. (Faith, 1976)

Önerme 5.1.4. E bir çizge ve K cisim olsun. Eğer A von Neumann düzenli ise $L_K(E)$ de von Neumann düzenlidir.

İspat: $a \in L$ olsun. Hipotezden, $f \in A$ vardır öyle ki $\lambda_a = \lambda_a f \lambda_a$. Bir $u \in L$ idempotenti seçelim $ua = a = au$ yani $\lambda_a = \lambda_{ua}$ olur. Lemma 5.1.1. den $\lambda_a = \lambda_a f \lambda_{ua} = \lambda_a \lambda_{f(ua)} = \lambda_a \lambda_{f(u)a} = \lambda_a \lambda_{f(u)} \lambda_a$ dır.

Lemma 5.1.5. M, R halkası üzerinde bir sağ modül olsun. M nin endomorfizma halkası von Neumann düzenli ancak ve ancak M nin her endomorfizminin hem çekirdeği hemde görüntüsü ise M nin direkt toplamıdır. (Rangaswamy, 1967)

E bir çizge, $L = L_K(E)$ ve p, E de $p = \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_n \dots$ şeklinde sonsuz bir yol olsun. Burada her $i \geq 1$ için, γ_i yolu ile $s(\gamma_i) = v_i$ ve $r(\gamma_i) = s(\gamma_{i+1})$. $F = (\bigoplus_{i=1}^{\infty} v_i L)$ ve $L = F \oplus Y$ olsun. $\{v_i - v_{i+1} \gamma_i^* \mid i = 1, 2, \dots\}$ kümesi tarafından oluşturulan F nin bir alt modülü $G = \sum_{i=1}^{\infty} (v_i - v_{i+1} \gamma_i^*) L$ olsun. F nin bir direkt toplamının G olduğunu varsayalım, $F = G \oplus H$ diyebiliriz. Her bir $k \geq 1$ için, $v_k = g_k + h_k$ olsun, burada $g_k \in G$ ve $h_k \in H$ dır.

Teorem 5.1.1. E bir satır sonlu çizge ve bir L -modül olarak düşünülen $L = L_K(E)$ nin endomorfizma halkası A olsun. Aşağıdaki eşitlikler eşdeğerdir:

- i. A , von Neumann düzenlidir.
- ii. E bir çevrimsiz çizge ve her sonsuz yol bir bataklıkta biter.
- iii. L hem sağ hemde sol self-injektif ve von Neumann düzenlidir.
- iv. L , yarı basit bir sağ L -modül.

İspat: (i) $\Rightarrow$ (ii): A von Neumann düzenli olsun. O halde $L_K(E)$ de von Neumann düzenlidir ve bu nedenle E bir çevrimsiz çizgedir. Her sonsuz yol bir bataklıkta bittiğini göstermek istiyoruz. p sonsuz yolu $v_1 = s(p)$ ile bir bataklıkta bittiğini varsayalım. E

çevrimsiz çizge olduğundan p sonsuz sayıda çatallanan köşesi olacak ve böylece her $i \geq 2$ için $p = \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_n \dots$ yazabiliriz. $v_i = s(\gamma_i)$ ve e_i bir çatallanan kenarı ile $s(e_i) = v_i$ böylece $e_i^* \gamma_i = 0$ dir. Sağ ideallerin azalan zinciri düşünüldüğünde

$$\gamma_1 L \supseteq \gamma_1 \gamma_2 L \supseteq \dots \supseteq \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_n L \supseteq \dots \quad (I)$$

Buradan her n için;

$\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_n L \supseteq \dots \supseteq \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_n \gamma_{n+1} L$ dir. Aksi takdirde bazı $x \in L$ için; $\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_n = \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_n \gamma_{n+1} x \cdot 0 \neq e_{n+1}^* = e_{n+1}^* \gamma_n^* \dots \gamma_1^* \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_n = e_{n+1}^* \gamma_n^* \dots \gamma_1^* \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_n \gamma_{n+1} x = e_{n+1}^* \gamma_{n+1} x = 0$ bir çelişki elde edilir. Böylece (I) sonsuz idealler için azalan zincirdir. Uygulamak için $a \mapsto a^* L$ üzerinde sol ideallerin sonsuz azalan zincirini alıriz:

$$L_{\gamma_1^*} \supseteq L_{\gamma_2^* \gamma_1^*} \supseteq \dots \supseteq L_{\gamma_n^* \dots \gamma_1^*} \supseteq \dots \quad (II)$$

$$L = \left(\bigoplus_{i=1}^{\infty} v_i L \right) \oplus Y \text{ yazılır. Burada } Y = \bigoplus_{u \in E^0 \setminus \{v_i : i = 1, 2, \dots\}} u L.$$

$G = \sum_{i=1}^{\infty} (v_i - \gamma_i^*) L$ $\{v_i - \gamma_i^* : i = 1, 2, \dots\}$ kümesinin oluşturduğu alt modül olsun. Endomorfizma θ tanımından sağ L -modül $\theta(Y) = 0$ ve her $i = 1, 2, \dots$ için $v_i - \gamma_i^*$ sol çarpımından $\theta(v_i a) = (v_i - \gamma_i^*) v_i a$. A bir von Neumann düzenli olduğundan $G = \text{Im}(\theta)$ L nin direkt çarpımıdır. (II) azalan zincir olduğundan sonlu olmalı bu da bir çelişkidir. Dolayısıyla E de her sonsuz yol bir bataklık içinde biter. Bu da (ii) yi kanıtlar.

Sonuç 5.1.3. E satır sonlu bir çizge ve K bir cisim olsun. O zaman $A = \text{End}(L_K(E)_{L_K(E)})$ von Neumann düzenli ancak ve ancak $\text{End}(L_K(E)_{L_K(E)})$ de von Neumann düzenlidir.

Önerme 5.1.5. E sonlu bir çizge ise o zaman $\sum_{v \in E^0} v = 1_{L_K(E)}$ ile $L_K(E)$ birimli. Ayrıca A da bir birim eleman u ve $L_K(E)$ de bir e idempotent eleman E sonlu bir çizgesinde olduğunu varsayalım. O zaman $\lambda_u(e), L_K(E)$ de birim elemandır.

İspat: u , A 'nın birim elemanı olduğu için A 'nın λ_b elemanı vardır öyle ki $\lambda_b u = u \lambda_b = 1_{L_K(E)}$ ve böylece $eb = b = be$. O halde

$$1_{L_K(E)} = u \lambda_b = u \lambda_{eb} = \lambda_{u(e)b} = \lambda_{u(e)} \lambda_b$$

$$\lambda_b \lambda_{u(e)} = \lambda_b u \lambda_e = u \lambda_b \lambda_e = u \lambda_{be} = u \lambda_{eb} = u \lambda_e \lambda_b = \lambda_{u(e)} \lambda_b \text{ dir.}$$

Önerme 5.1.6. E sonsuz bir çizge ise o zaman $L_K(E)$ yerel birimler kümesi ile bir halkadır. Ayrıca, A' da bir yerel birim eleman u ve $L_K(E)$ de bir e idempotent eleman sonsuz çizgesinde olduğunu varsayalım. O zaman $\lambda_u(e)$, A' nın yerel birim elemanıdır.

İspat: u , A' nın yerel birim elemanı olduğundan A' nın λ_b elemanı vardır öyle ki $\lambda_b u = \lambda_b = u \lambda_b$ ve $eb = b = be$ dir.

$$\lambda_b = u \lambda_b = u \lambda_{eb} = \lambda_{u(e)b} = \lambda_{u(e)} \lambda_b$$

$$\lambda_b \lambda_{u(e)} = \lambda_b u \lambda_e = u \lambda_b \lambda_e = u \lambda_{be} = u \lambda_{eb} = u \lambda_e \lambda_b = \lambda_{u(e)} \lambda_b \text{ dir.}$$

Önerme 5.1.7. E sonsuz bir çizge ise, o halde $L_K(E)$ çizgenin farklı köşelerinin toplamlarından oluşan yerel birimler kümesi ile bir halkadır. Öte yandan, $L_K(E)$ çok miktarda idempotentlere sahiptir ve bu A içinde geçerlidir. E sonsuz çizgesinde A birim düzenli halka ve $a \in L$ olsun. λ_a , L de bir idempotent.

İspat: Herhangi bir $a \in L$ için, hipotezden $u \in A$ bir yerel birim ve $\lambda_a u = \lambda_a = u \lambda_a$ vardır öyle ki $\lambda_a = \lambda_a u \lambda_a$ dir. Böylece $\lambda_a = \lambda_a u \lambda_a = \lambda_a \lambda_a$ bu da λ_a nın L de bir idempotentidir.

Lemma 5.1.6. E herhangi bir çizge, K bir cisim ve A , bir sağ L -modül gibi düşünülerek $L = L_K(E)$ de bir endomorfizma halkası olsun. Eğer A bağımlı ise L de bağımlıdır.

İspat: A' nın bağımlı olduğunu varsayalım. L' nin bağımlı olduğunu göstermek için $a, b \in L$ olsun. Hipotezden, ikisi de sıfırdan farklı $f, g \in A$ elemanları vardır öyle ki $f \lambda_a + g \lambda_b = 0$. Eğer u_1 ve u_2 L' nin yerel birimleri ise $u_1 a = a = a u_1$ ve $u_2 b = b = b u_2$, böylece

$$f \lambda_a = f \lambda_{u_1 a} = f \lambda_{u_1} \lambda_a = \lambda_{f(u_1)} \lambda_a$$

ve

$$g \lambda_b = g \lambda_{u_2 b} = g \lambda_{u_2} \lambda_b = \lambda_{g(u_2)} \lambda_b.$$

Şimdi

$$0 = f \lambda_a + g \lambda_b$$

$$=f\lambda_{u_1}\lambda_a + g\lambda_{u_2}\lambda_b$$

ve dolayısıyla L bağımlıdır.

Teorem 5.1.2. E bir çizge, K bir cisim ve A , bir sağ L -modül gibi düşünülerek $L = L_K(E)$ de bir endomorfizma halkası olsun. A 'nın bir von Neumann düzenli halka olduğunu varsayalım. O zaman aşağıdaki koşullar denktir.

- i. A bağımlıdır.
- ii. $L_K(E)$ de $\delta\beta^*$ ve $\alpha\gamma^*$ yolları için, $A\delta = A\beta$ ve $A\alpha = A\gamma$ ise α 'nın ilk segmenti β dir.

İspat: (i) $\Rightarrow$ (ii) : A bağımlı olsun. O zaman $\delta\beta^*, \alpha\gamma^* \in L_K(E)$ yolları için ikisi de sıfırdan farklı $u, v \in A$ vardır öyle ki $u(\delta\beta^*) + v(\alpha\gamma^*) = 0$. Varsayımdan, bazı $f, g \in A$ için $\delta = f\beta$ ve $\alpha = g\gamma$ olsun. $(\delta\beta^*)(\alpha\gamma^*) = 0$ olduğunu varsayalım. O zaman

$$\begin{aligned} 0 &= u(\delta\beta^*) + v(\alpha\gamma^*) \\ &= u(\delta\beta^*)\alpha\gamma^* + v(\alpha\gamma^*)\alpha\gamma^* \\ &= v(\alpha\gamma^*) \end{aligned}$$

bu da $v = 0$ anlamına gelir. Benzer şekilde, $u = 0$ da elde ederiz, ki bu çelişkidir. Dolayısıyla $(\delta\beta^*)(\alpha\gamma^*) \neq 0$ ve ayrıca α 'nın ilk segmentinin β dir.

(ii) $\Rightarrow$ (i) : $\alpha, \beta \in A$ olsun. A bir von Neumann düzenli halka olduğundan $\alpha, \beta \in A$ için $f, g \in A$ seçelim öyle ki $\alpha = \alpha f \alpha$ ve $\beta = \beta g \beta$. Bazı $\gamma, \delta \in L_K(E)$ için $f\alpha = \gamma$ ve $g\beta = \delta$ olsun. Sonra (ii)'den $A\alpha = Af\alpha = A\gamma$ ve $A\beta = Ag\beta = A\delta$ eşitliğinden α, β 'nin ilk segmentidir. Yani bir μ yolu vardır öyle ki $\alpha = \beta\mu$, dolayısıyla A bağımlıdır.

Teorem 5.1.3. E herhangi bir çizge, K bir cisim ve $L = L_K(E)$ Leavitt yol cebirinde e bir idempotent olsun. Eğer L bağımlı ise, eLe de bağımlıdır.

İspat: L bağımlı olsun. O halde her $a, b \in L$ için her ikisi de sıfırdan farklı $s, t \in L$ vardır öyle ki $sa + tb = 0$. Şimdi, L de e bir idempotent olsun. O halde

$$\begin{aligned}
0 &= esa + etb \\
&= esae + etbe \\
&= seae + tebe \\
&= esese + etebe \\
&= \underbrace{ese}_{s'} \underbrace{eae}_{a'} + \underbrace{ete}_{t'} \underbrace{ebe}_{b'}
\end{aligned}$$

bazı sıfırdan farklı $a', b' \in eLe$ ve $s', t' \in eLe$. Dolayısıyla eLe bağımlıdır.

Önerme 5.1.8. E bir (sonlu) çizge, K bir cisim ve A , bir sağ L -modül gibi düşünülerek $L = L_K(E)$ de bir endomorfizm halkası olsun.

- i. $L_K(E)$ de her x, y için $x \sim y$ ise o zaman A 'da $\lambda_x \sim \lambda_y$ dir.
- ii. Aşağıdaki koşullar tüm $\alpha, \beta \in A$ için eşdeğerdir.
 - (a) $\alpha \sim \beta$
 - (b) $u\alpha \sim \beta u^{-1}$
 - (c) $\alpha u \sim u^{-1}\beta$

İspat: (i) : E herhangi bir çizge ve $L_K(E)$ de her x, y için $x \sim y$ olsun. $A\lambda_x = ann(\lambda_y)$ ve $A\lambda_y = ann(\lambda_x)$ olduğunu göstermeliyiz. $f \in A$ olsun. L de bazı e idempotenti için $x = \lambda_x(e)$ ve $y = \lambda_y(e)$ yazılabilir. Hipotezden, $x \sim y$, $Lx = ann(y)$ ve $Ly = ann(x)$ o zaman $Lxy = 0$ ve $Lyx = 0$ yani $L\lambda_x(e)\lambda_y(e) = 0$ ve $L\lambda_y(e)\lambda_x(e) = 0$. O zaman Lemma 5.1.1. den, $f\lambda_x\lambda_y = \lambda_{f(x)}\lambda_y = \lambda_{f(e)}\lambda_x\lambda_y = 0$ ve $A\lambda_x \subseteq ann(\lambda_y)$ elde ediyoruz. Tersine, $ann(\lambda_y) \subseteq Lx \Rightarrow ann(\lambda_y) \subseteq L\lambda_x \subseteq A\lambda_x$. Böylece $A\lambda_x = ann(\lambda_y)$. Lemma 5.1.1. den, $f\lambda_y\lambda_x = \lambda_{f(y)}\lambda_x = \lambda_{f(e)}\lambda_y\lambda_x = 0$ ve $A\lambda_y \subseteq ann(x)$ elde ediyoruz. Tersine, $ann(\lambda_x) \subseteq Ly \Rightarrow ann(\lambda_x) \subseteq L\lambda_y \subseteq A\lambda_y$. Böylece $A\lambda_y = ann(\lambda_x)$. Bu da $\lambda_x \sim \lambda_y$ olduğunu gösterir.

(ii) (a) $\Rightarrow$ (b) : $\alpha \sim \beta$ olsun. O zaman $A\alpha = ann(\beta)$ ve $A\beta = ann(\alpha)$ yazabiliriz. A ' da bir u yerel birimi alalım. Açıkça, u^{-1} de A ' da bir yerel birim elemandır. Dolayısıyla

$$A(u\alpha) = A\alpha = ann(\beta) = ann(\beta u^{-1})$$

ve

$$A(\beta u^{-1}) = A\beta = \text{ann}(\alpha) = \text{ann}(u\alpha).$$

(b) $\Rightarrow$ (c) : Bu açıktır.

(c) $\Rightarrow$ (a) : $\alpha u \sim u^{-1}\beta$ olsun. O zaman $A\alpha u = \text{ann}(u^{-1}\beta)$ ve $A(u^{-1}\beta) = \text{ann}(\alpha u)$ yazabiliriz. A'da bir u yerel eleman alalım.

$$A\alpha = A(\alpha u) = \text{ann}(u^{-1}\beta) = \text{ann}(\beta)$$

ve

$$A\beta = A(u^{-1}\beta) = \text{ann}(\alpha u) = \text{ann}(\alpha).$$

(Nicholson ve Campos, 2005)' e göre bir M modülünün α endomorfizması, $M / M\alpha \cong \text{Ker}(\alpha)$ ise morfik olarak adlandırılır. (Nicholson ve Campos, 2005)' den eşdeğer olarak $\beta \in \text{End}(M)$ vardır öyle ki $M\beta = \text{Ker}(\alpha)$ ve $\text{Ker}(\beta) = M\alpha$ dır. Her endomorfizm morfik ise M modülü bir morfik modül olarak adlandırılır. R bir halka ise, R 'deki a elemanı $a: {}_R R \rightarrow {}_R R$ bir morfik endomorfizm $R / Ra \cong \text{ann}(a)$ ise sol morfik denir. Eğer her eleman sol morfik ise halkanın kendisi de bir sol morfik halka olarak adlandırılır, ${}_R R$ ise bir morfik modüldür.

Sonuç 5.1.4. E bir çizge ve K bir cisim olsun. A bağımlı ise $L_K(E)$ morfikdir.

Teorem 5.1.4. E herhangi bir çizge ve A da bir sağ $L_K(E)$ modül olarak $L = L_K(E)$ de endomorfizma halkası olsun. Böylece

- i. L morfik ve von Neumann düzenli ancak ve ancak yarı basit ve her homojen bileşen bir artinian halkadır, somut olarak $L \cong \bigoplus_{i \in \Lambda} \mathbb{M}_{n_i}(K)$, burada her n_i bir tamsayı
- ii. L morfik ve von Neumann düzenli ise A bağımlıdır.

İspat: (i) (Abrams vd .,2010,Teorem2.4) de verilmiştir.

(ii) A 'nın bağımlı olduğunu göstermeliyiz. $\alpha, \beta \in A$ olsun. L 'nin yerel birimleri olduğundan $u, v \in L$ idempotentleri vardır öyle ki

$$\alpha\lambda_u = \lambda_{\alpha(u)} = \lambda_\alpha\lambda_u \in L$$

ve

$$\beta\lambda_v = \lambda_{\beta(v)} = \lambda_\beta\lambda_v \in L$$

L morfik olduğundan, $(\alpha\lambda_u)\alpha \in \text{ann}(\beta)$ ise $\beta(\alpha\lambda_u)\alpha = 0$ ve $(\beta\lambda_v)\beta \in \text{ann}(\alpha)$ ise $\alpha(\beta\lambda_v)\beta = 0$. Böylece, $\beta(\alpha\lambda_u)\alpha + \alpha(\beta\lambda_v)\beta = 0$. Dolayısıyla A bağımlı halkadır.

Bir M modülü her $\alpha \in \text{End}(M)$ için M de bir direkt toplamsa $\text{Ker}(\alpha)$ çek-direkt olarak adlandırılır ve M de her $\alpha \in \text{End}(M)$ için bir direkt toplam ise $\text{Im}(\alpha)$ gör-direkt olarak adlandırılır (Nicholson ve Campos, 2005). Modüller ile düzenli endomorfizma halkaları her iki özelliğe de sahiptirler. (Nicholson ve Campos, 2005)'ün yazarlarının belirttiği gibi, bir morfik modül çek-direkt ancak ve ancak gör-direktir.

Teorem 5.1.5. E herhangi bir çizge ve A da bir sağ $L_K(E)$ modül olarak $L = L_K(E)$ de endomorfizm halkası olsun.

- i. L morfik ve çek-direkt,
- ii. L morfik ve gör-direkt,
- iii. A bağımlıdır.

O zaman (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) vardır.

İspat : (i) $\Rightarrow$ (ii) : Önerme 5.1.9. ile yapılır.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : $\alpha \in A$ olsun. O zaman $L\alpha$, L 'nin bir direkt toplamıdır çünkü $\text{Ker}(\alpha)$ L de bir direkt toplamıdır. (Ware, 1971, Sonuç 3.2) den, A von Neumann düzenli ve bu nedenle A bağımlıdır.

Bir M modül, M nin her endomorfizma çekirdeği M nin bir direkt toplamı ise Rickart olarak adlandırılır. M nin her endomorfizm görüntüsü M nin direkt toplamı ise M , d-Rickart modül olarak adlandırılır (Rizvi vd.,2011 ,2010).

Teorem 5.1.6. E herhangi bir çizge ve A da bir sağ $L_K(E)$ modül olarak $L = L_K(E)$ de endomorfizma halkası olsun.

- i. L morfik ve A von Neumann düzenli halkadır.
- ii. L morfik ve bir Rickart modüldür.
- iii. L morfik ve bir d-Rickart modüldür.
- iv. A bağımlıdır.

0 zaman (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) vardır.

İspat : (i) $\Rightarrow$ (ii) : L morfik ve A von Neumann düzenli olsun. (Rizvi vd., 2013, Teorem 1.1) den, her $\alpha \in A$ için $\text{Ker}(\alpha)$, L ' de bir direkt toplamdır. Bu yüzden L bir Rickart modüldür.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : (Zhanga ve Leeb, 2016, Önerme 7) den, L bir d-Rickart modüldür.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) : L morfik ve bir d-Rickart modül olsun. O zaman L 'nin her endomorfizm görüntüsü bir L 'nin direkt toplamı. Böylece Teorem 5.1.5.' den A bağımlıdır.

6. SONUÇLAR

Bu tezde keyfi bir K cismi ve herhangi bir yönlü E çizgesi üzerinde tanımlanan $L := L_K(E)$ Leavitt yol cebiri kendi üzerinde sağ modül olduğu dikkate alınarak, endomorfizma halkası ele alındı ve $A = \text{End}(L_L)$ olmak üzere, aşağıdaki sonuçlar elde edildi;

- i. A von Neumann düzenli halka olmak üzere, A nın bağımlı halka olması için gerek yeter koşul L 'de ki herhangi iki yol ilk segmenttir.
- ii. A bağımlı halka ise $L_K(E)$ morfiktir.
- iii. L morfik ve von Neumann düzenli halka olması için gerek ve yeter koşul L yarı basit ve her homojen bileşen bir artinian halka olmasıdır.
- iv. L morfik ve A von Neumann düzenli halka olması için gerek ve yeter koşul A bağımlı halka olmasıdır.

KAYNAKLAR

- Abrams, G. Ara, P. and Molina, M. (2017) Leavitt Path Algebras, **Springer** .
- Abrams, G., Pino, A. and G., Molina, M. (2007) “Finite Dimensional Leavitt Path Algebras”, **Journal of Pure and Applied Algebra**, 209, 753-762.
- Abrams, G. and Pino, A.,G. (2005)“The Leavitt path algebra of a graph”, **J.Algebra**, 293(2), 319-334.
- Abrams, G. and Pino, A. G. (2008) “ The Leavitt path algebras of a arbitrary graphs”, **Hauston J.Math**, 34(2), 423-442.
- Abrams, G. and Rangaswamy, K. (1998) “Regularity Conditions for Arbitrary Leavitt Path Algebras”, **Algebr. Represent. Theory** 13 (3), 319-334.
- Abrams, G. Pino, G. A. and Molina, M. S. (2010) “Chain conditions for Leavitt path algebras”, **Forum Mathematicum**, 22 (1), 95-144.
- Anderson, F. and Fuller, K. (1992) “Rings and Categories of Modules”, **Springer-Verlag**, New York, Inc.
- Ara, P., Moreno, M. A. and Pardo, E. (2007) “Nonstable K-theory for graph algebras, Algebras and Representation Theory”, 10, 157-178.
- Ara, P. (1997) “Extensions of Exchange Rings”, **J. Algebra** 197, 409-423.
- Atiyah, M.F. and Macdonald, I.G. (1969) “Introduction to Commutative Algebra”, Ed: **Lynn H. Loomis**.
- Bondy, J. A. and Murty, U.S.R. (1976) Graph Theory with Applications, **North-Holland**, Newyork.
- Corrales, M. G. and Solanilla, J.H. (2015) “An introduction of a Leavitt Path Algebras”, **Cimpa Research at Cocle**.
- Cuntz, J., (1977) “ Simple C^* -algebras generatal by isometries” **Comm. Math Physics**, 57, 173-185.
- Cuntz, J., and Krieger, W. (1981) “ A class of C^* -algebras and topological markow chains” **Invent Math.**, 63, 25-40.
- Çallıalp, F., and Tekir, Ü. (2009) Değişmeli halkalar ve modüller, **Birsen yayınevi**, İstanbul, 19, 58-59, 111, 120.
- Dangerfield, I. (2011) “Leavitt Path Algebra”, **University of Otago, Dunedin**, 178s. (Master Thesis).
- Ehrlich ,G. (1968) “Unit regular rings”, **Portugaliae Mathematica**, 27, 209-212.

- Ehrlich, G. (1968) “Units and one sided units in regular rings.”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 216, 81-90.
- Faith, C. (1976) “Algebra II-Ring Theory”, Grundlehren math. Wissenschaften 191, **Springer-Verlag**.
- Henriksen, M. (1973) “On a class of regular rings that are elementary divisor rings”, *Archive der Mathematik*, 24 (1), 133-141.
- Islam, R. (2018) “Morita equivalence”, Available: <http://alistairsavage.ca/pubs/Islam-MoritaEquivalence.pdf>.
- Kumjian A., Pask, D. and Reaburn, I. (1998) “Cuntz-Krieger algebras of directed graphs”, *Pacific J. Math.* 184 (1), 161-174.
- Leavitt, W. G. (1956) “Modules over rings of words”, *Proc. Amer. Soc.*, 7, 188-193.
- Leavitt, W. (1962) “The module type of a ring”, *Transactions of the American Mathematical Society*, 103, 113-130.
- Lozano, G., M. and Molina, M., S. (2002) “Quotient rings and Fountain-Gould left orders by the local approach.” *Acta Math. Hungar.* 97 (4), 287-301.
- Matej, B. (2014) “Introduction to Noncommutative Algebra”, **Springer**.
- Nicholson, W. K. and Campos, E. S. (2005) “Morphic modules”, *Communications in Algebra*, 33 (8), 2629-2647.
- Nicholson, W.K. (1977) “Lifting idempotents and exchange rings” *Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol. (229), 269-278.
- Pino, A., G. (2005) “On Maximal Left Quotient Systems and Leavitt Path Algebras”, *University of Malaga, Department of Algebra, Geometry and Topology*, Doctoral Thesis.
- Pino, A., G. Rangaswamy, K. and Molina, M., S. (2011) “Weakly regular and self-injective Leavitt path algebras over arbitrary graphs”, *Algebr. Represent. Theory* 14, 751-777.
- Pino, G. A., Rangaswamy, K. M. and Molina, M. S. (2015) “Endomorphism rings of Leavitt path algebras”, *Journal of Pure and Applied Algebra*, 219 (12), 5330-5343.
- Rangaswamy, K. M. (1967) “Abelian groups with endomorphic images of special types”, *J. Algebra* 6, 271-280.
- Raeburn, I. (2005) “Graph algebras”, CBMS Regional Conferans Series in Mathematics, **Amer Math Soc Providence**, 103.
- Rizvi, S., T., Lee, G. and Roman, C., S. (2011) “Dual Rickart Modules”, *Communications in Algebra*, 39, 4036-4058.

- Rizvi, S.,T., Lee, G. and Roman, C.,S. (2010) “Rickart Modules”, *Communications in Algebra*, 38(11), 4005-4027.
- Rizvi, S.,T., Lee, G. and Roman, C.,S. (2013) “Modules whose endomorphism rings are von Neumann regular”. *Communications in Algebra*, 41(11), 4066-4088.
- Tomforde, M. (2011) “Leavitt Path Algebras with Coefficients in a Commutative Ring”, *Journal of Pure and Applied Algebra*, 215, 471-484.
- Zhanga, X. and Leeb, G. (2016) “Modules whose endomorphism rings are unit regular”, *Communications in Algebra*, 44(2), 697-709.
- Ware, R. (1971) “Endomorphism rings of projective modules”, *Transactions of the American Mathematical Society*, 155 (1), 233-256.
- Warfield, R. B. (1972) “Exchange rings and decomposition of modules”, *Math. Ann.* 199, 31-36.



EKLER

Ek-1. Tez Çalışması Süresince Yapılan Akademik Çalışmalar

Özdin, T., **Çelik, Z.**, (2018) “Leavitt Yol Cebirlerinin Endomorfizma Halkaları Üzerine”, Türk Matematik Derneği, 31. Ulusal Matematik Sempozyumu, ERZİNCAN



ÖZGEÇMİŞ

1992 yılında Ordu’da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Ordu’da tamamladıktan sonra 2010 yılında Erzincan Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü’nde lisans öğrenimine başladı ve 2014 yılında mezun oldu. 2017-2018 eğitim öğretim yılında Erzincan Binali Yıldırım Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisansa başladı.

