G-SÜREKLİ FONKSİYONLAR VE ÖZELLİKLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MERVE ÇETİNKAYA

MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK
ANABİLİM DALI

MERSİN
TEMMUZ- 2020

G-SÜREKLİ FONKSİYONLAR VE ÖZELLİKLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MERVE ÇETİNKAYA

MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK
ANABİLİM DALI

Danışman
Prof. Dr. Mehmet KÜÇÜKASLAN

MERSİN
TEMMUZ - 2020

ETİK BEYAN

Mersin Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim Yönetmeliğinde belirtilen kurallara uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında,

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlâk kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak kullandığımı,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Bu tezin herhangi bir bölümünü Mersin Üniversitesi veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı,
- Tezin tüm telif haklarını Mersin Üniversitesi'ne devrettiğimi

beyan ederim.

ETHICAL DECLERATION

This thesis is prepared in accordance with the rules specified in Mersin University Graduate Education Regulation and I declare to comply with the following conditions:

- I have obtained all the information and the documents of the thesis in accordance with the academic rules.
- I presented all the visual, auditory and written informations and results in accordance with scientific ethics.
- I refer in accordance with the norms of scientific works about the case of exploitation of others' works.
- I used all of the referred works as the references.
- I did not do any tampering in the used data.
- I did not present any part of this thesis as an another thesis at Mersin University or another university.
- I transfer all copyrights of this thesis to the Mersin University.

20/07/ 2020

İmza / Signature

Merve ÇETİNKAYA

ÖZET

G -SÜREKLİ FONKSİYONLAR VE ÖZELLİKLERİ

Bu tez çalışmasında, G toplanabilme metodu göz önüne alınarak Heine anlamında sürekliliğin bir genellemesi olan G sürekli fonksiyonlar ve onların temel özellikleri incelenmiştir.

Genel olarak sürekli bir fonksiyonun G sürekli olması gerekmediğinden G sürekli fonksiyonlar kümesinin sürekli ve lineer fonksiyonlar kümesine eşit olması için gerek ve yeter koşullar araştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Süreklilik, Dizisel süreklilik, G-süreklilik, G-dizisel süreklilik

Danışman: Prof. Dr. Mehmet KÜÇÜKASLAN, Mersin Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı, Mersin.

ABSTRACT

G- CONTINUOUS FUNCTIONS AND ITS PROPERTIES

In this thesis, G continuous functions and their basic properties, which is a generalization of the continuity in the sense of Heine, is analyzed by considering the summation method of G.

In general, since a continuous function does not have to be G-continuous, the necessary and sufficient conditions have been explored so that the set of G continuous functions is equal to the set of continuous and linear functions.

Keywords: Continuity, Sequential Continuity, G-continuity, G- Sequential Continuity

Advisor: Prof. Dr. Mehmet KÜÇÜKASLAN, Departments of Mathematics, Mersin University, Mersin.

TEŞEKKÜRLER

Mersin Üniversitesi Lisansüstü eğitimine başladığım günden bugüne kadar her konuda yardımını ve desteğini esirgemeyen bana farklı bakış açıları kazandıran saygıdeğer hocam sayın Prof. Dr. Mehmet KÜÇÜKASLAN'a teşekkür ediyorum.

Ayrıca, sevgililerini ve desteklerini her zaman yanımda hissettiğim aileme sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum.

İÇİNDEKİLER

KISITLAMALAR VE SİMGELER

Kısaltma / Simge	**Tanım**
s	$:= \{x = (x_k) \colon \forall k \in N$ için $x_k \in R\}$
c_0	$:= \{x = (x_k) \colon \lim_{k\to\infty} x_k = 0\}$
c	$:= \{x = (x_k) \colon \exists l \in R,\ \lim_{k\to\infty} x_k = l < \infty\}$
$\mathcal{L} = \mathcal{L}(R)$	$:= f \colon I \to R$ lineer fonksiyon
$\mathcal{G} = \mathcal{G}(R)$	$:= G$ −sürekli fonksiyonlar
$\mathcal{C} = \mathcal{C}(R)$	$:= f \colon I \to R$ sürekli fonksiyonlar
l_∞	$:= \{x = (x_k) \colon \sup_k \lvert x_k \rvert < \infty\}$
c_G	$:= \{ f \colon f \colon X \to R,\quad G$ −sürekli$\}$
K_n	$:= \{k \colon k \in K, k \leq n\}$
$\delta(K)$	$:= \lim_n \frac{1}{n} \lvert K_n \rvert$
c_{st}	$:= \{x = (x_n) \colon \exists l \in R \ni st - \lim_n x = l\}$
C_{nk}	$:= \begin{cases} \frac{1}{n}, & 1 \leq k \leq n \\ 0, & k > n \end{cases}$
$\overline{U}^G$	$:= \{ l \in R : x = (x_n) \subset U$ dizisi var ve $G(x) = l \}$

1. GİRİŞ

G bir toplanabilme metodu olmak üzere klasik sürekliliğin bir genellemesi olarak G-süreklilik kavramı uzun zamandır çalışılan bir konudur.

American Mathematical Montly dergisinde H. Robbins tarafından yayımlanan ve bu konuda bir problem içeren makale ile başlamıştır:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k = u$ koşulunu sağlayan her reel terimli dizi için

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) = f(u)$$

sağlanırsa ($u = u_0$ tek noktada sağlansa bile) f bir lineer fonksiyon olmalıdır. Yani, a ve b tespit edilmiş iki reel sayı olmak üzere $f(u) = au + b$ formundadır.

Dizisel süreklilik J. Connor tarafından [1] çalışmasında aşağıdaki biçimde genelleştirilmiştir:

f fonksiyonuna x_0 noktasında $\mathrm{G}-$süreklidir denir: Eğer,

$$\text{“}\forall \mathrm{x_n} \xrightarrow{G} \mathrm{x_0} (\mathrm{n} \to \infty) \text{ için } f(\mathrm{x_n}) \xrightarrow{G} f(\mathrm{x_0})\text{”}$$

sağlanıyor ise.

$G-$Sürekli fonksiyonların genel özellikleri Bölüm 4.1’de ve genel anlamda hangi özelliklere sahip fonksiyonların $G-$sürekli olacağı Bölüm 4.2’de ve sonraki bölümlerde verilmiştir. Ayrıca, G regüler Toeplitz metodu için $G-$sürekli fonksiyonların sınıfı tespit edilmiş ve sürekli fonksiyonlar içerisinde yoğun olup olmadıkları incelenmiştir.

2. KAYNAK ARAŞTIRMALARI

$X, Y \subset \mathbb{R}$ ve $\rho(x,y) = d(x,y) = |x-y|$ olmak üzere $f: (X,d) \longrightarrow (Y,\rho)$ bir fonksiyon ve $x_0 \in X$ keyfi noktası verilsin.

f fonksiyonunun x_0 noktasındaki (Cauchy anlamında) sürekliliği aşağıdaki

biçimde tanımlanır:

Eğer, "$\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ bulunabilir öyle ki $|x - x_0| < \delta$ koşulunu sağlayan $x \in X$ 'ler için $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$" ise f fonksiyonuna Cauchy anlamında süreklidir denir.

Ayrıca, f nin x_0 noktasındaki (Heine anlamında) sürekliliği aşağıdaki biçimde verilmiştir: Eğer, "$\forall (x_n) \subset X$ dizisi için $f(x_n) \longrightarrow f(x_0)$" ise f fonksiyonuna x_0 noktasında Heine anlamında süreklidir denir. Heine anlamında süreklilik dizisel süreklilik olarak da bilinir.

Genel olarak metrik uzaylarda süreklilik ve dizisel süreklilik denktir. Fakat topolojik uzaylar için süreklilik dizisel sürekliliği vermesine rağmen tersi doğru değildir.

G bir toplanabilme metodu olmak üzere dizisel süreklilik J.Connor tarafından [1] de aşağıdaki biçimde genelleştirilmiştir:

f fonksiyonuna x_0 noktasında $G-$süreklidir denir: Eğer,

$$\text{“}\forall x_n \to x_0 \left(n \overset{G}{\to} \infty\right) \text{ için } f(x_n) \overset{G}{\to} f(x_0)\text{”}$$

Sağlanıyor ise.

Yukarıdaki durum; $f\big(G(x_n)\big) = G\big(f(x_n)\big)$ biçiminde de ifade edilebilir.

G bir regüler Toeplitz metodu G-sürekli fonksiyonlar ile ilgili bazı önemli çalışmalar Mucuk [2], Hejduk [3], Hazarika [4], Iwinski [5], Buck [6] ve diğerleri tarafından yapılmıştır.

Eğer, G bir regüler Toeplitz metodu ise her $G-$sürekli fonksiyon süreklidir [5]. Fakat bu ifadenin tersi her zaman doğru değildir. O halde, $G = A = (a_{nk})$ regüler Toeplitz metodu olmak üzere sürekli olan fonksiyonların G-sürekli olması için gerek ve yeter koşullar araştırılmıştır.

Connor [1], Iwinski [5] ve Buck [6] çalışmalarında her lineer fonksiyonun keyfi G-Toeplitz metodu için G-sürekli olduğu gösterilmiştir. Dolayısıyla:

$C_G(x) := \{ f : f: X \to \mathbb{R}, \ G-\text{sürekli}\}$ kümesi en azından $X \to \mathbb{R}$ lineer tüm fonksiyonları içerir, yani $C_G(x) \neq \emptyset$ dır.

Iwinski, [5] çalışmasında $A = (a_{nk})$ bir Toeplitz metodu olmak üzere $A-$sürekli fonksiyonlarının oluşturduğu kümenin tüm lineer fonksiyonları kapsadığını ve bileşke işlemine göre kapalı olduğunu göstermiştir.

Ayrıca, aynı çalışmada f fonksiyonunun sürekli olması için gerek ve yeter koşulun I (birim matris) metoduna göre sürekli olması üzerinden vermiştir.

Son yıllarda özellikle Çakallı [7] [8], H.Çakallı-O.Mucuk [9] [10], S.Akduman, C.Özel ve A. Kılıçman [11], H.Çakallı ve M.Albayrak [12], çalışmalarında asimptotik yoğunluğun farklı versiyonları kullanarak bazı süreklilik tanımları verilmiş ve klasik süreklilikten daha genel süreklilik kavram elde edilmeye çalışılmıştır.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu bölümde, daha sonraki bölümlerde kullanılacak bazı temel tanım ve teoremler verilecektir.

Reel Terimli Diziler ve Yakınsaklık

Bu bölümde reel değerli diziler için yakınsaklık, sınırlılık, süreklilik, yoğunluk ve istatistiksel yakınsaklık kavramları verilecektir.

Tanım 3.1. $\mathrm{x} = (\mathrm{x_n})$ reel değerli bir dizi ve $l \in \mathbb{R}$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için en az bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ bulunabilir öyle ki $\forall n \geq n_0$ için $|x_n - l| < \varepsilon$ sağlanır ise (x_n) dizisi l sayısına yakınsaktır denir [13].

Tanım 3.2. $\mathrm{x} = (\mathrm{x_n})$ reel değerli bir dizi olsun. $\exists M > 0$ sayısı vardır öyle ki $|x_n| \leq M$ ise $(\mathrm{x_n})$ dizisine sınırlı dizi denir [13].

Tanım 3.3. Bir $\mathrm{x} = (\mathrm{x_n})$ dizisi verilsin. (n_k) doğal sayıların monoton artan bir dizisi olmak üzere $\mathrm{x} = \left(\mathrm{x}_{n_k}\right)$ dizisine $\mathrm{x} = (\mathrm{x_n})$ dizisinin bir alt dizisi denir [13].

Tanım 3.4 (Cauchy anlamında Süreklilik). A ve B kümeleri $\mathbb{R}$ kümesinin boştan farklı alt kümeleri olmak üzere $f: A \to B$ bir fonksiyon ve $a \in A$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için

$\exists \delta \equiv \delta(\varepsilon, a) > 0$ bulunabilir öyle ki $|x - a| < \delta$ eşitsizliğini sağlayan her $x \in A$ için

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

ise, f fonksiyonuna a noktasında sürekli denir [13].

Tanım 3.5 (Heine anlamında Süreklilik). A ve B kümeleri $\mathbb{R}$ kümesinin boştan farklı alt kümeleri olmak üzere $f: A \to B$ bir fonksiyon ve $a \in A$ olsun. $x_n \to a$ koşulunu sağlayan $\forall (x_n) \subset A$ dizisi için olduğunda $f(x_n) \to f(a)$ ise f fonksiyonuna a noktasında süreklidir denir [13].

Heine anlamında süreklilik aynı zamanda dizisel süreklilik olarak da bilinir.

Tanım 3.6. $f: \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ bir fonksiyon, $A \subset X$, $g: \mathrm{A} \to \mathrm{Y}$ bir fonksiyon ve $\forall x \in A$, $g(x) = f(x)$ koşulu sağlanıyorsa, g fonksiyonuna f fonksiyonunun A kümesine kısıtlanışı ya da daraltılması; f fonksiyonuna da g fonksiyonunun X kümesine bir genişlemesi denir [13].

Tanım 3.7. $K \subset \mathbb{N}$ ve $K_n \coloneqq \{k \leq n : k \in K\}$ olmak üzere

$$\delta(K) \coloneqq \lim_{n} \frac{1}{n} |K_n|$$

limiti var ve sonlu ise bu limite K kümesinin yoğunluğu(veya doğal yoğunluğu) denir. Burada $|K_n|$ ile K_n kümesinin eleman sayısı gösterilmektedir [14].

Tanımı 3.8. $x = (x_k)$ reel değerli dizisi verilsin. ∀ε > 0 için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n: |x_k - l| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise $x = (x_k)$ dizisi l sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve $st - \lim x = l$ biçiminde gösterilir (Fast, [15]).

Uyarı 3.1. Cauchy anlamda yakınsak bir dizi için $\{\, k\colon\ k \leq n, |x_k - l| \geq \varepsilon \,\}$ kümesi $\mathbb{N}$ kümesinin sonlu bir alt kümesidir. Sonlu alt kümelerin asimptotik yoğunluğu sıfır olduğundan $x = (x_k)$ dizisi l sayısına istatistiksel yakınsak olacaktır. Bunun karşıtı doğru değildir. Bunu göstermek için aşağıdaki örneği dikkate alabiliriz.

Örnek 3.1. $x = (x_k)$ dizisi

$$x_k := \begin{cases} k, & k = n^2 \\ 0, & k \neq n^2 \end{cases}, n \in \mathbb{N}$$

şeklinde tanımlansın. Herhangi bir $0 < \varepsilon < 1$ için $\{k \in \mathbb{N}: |x_k - 0| \geq \varepsilon\} = \{1,4,9,16, \dots\}$ olur buradan $\{1, 4, 9, 16, \dots\}$ kümesinin doğal yoğunluğu sıfırdır. Ancak bu dizi yakınsak değildir.

Herhangi bir dizinin istatistiksel yakınsak olmasını karakterize eden bir teorem Fridy tarafından aşağıdaki biçimde verilmiştir:

Teorem 3.1. $x = (x_k)$ dizisinin bir l sayısına istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter koşul $\delta(\{n_k : k \in \mathbb{N}\}) = 1$ ve $\lim_{k} x_{n_k} = l$ olacak şekilde bir (n_k) monoton artan indis dizisinin mevcut olmasıdır [16].

Sonuç olarak Cauchy anlamda yakınsaklık yerine istatistiksel yakınsaklık kavramının kullanılması yakınsak dizilerin kümesini genişletmektedir. Yani $c = \{x = (x_n): \exists l \in \mathbb{R} \ni \lim_{n} x = l\}$ olmak üzere $c \subset c_{st}$ içermesi sağlanır.

Tanım 3.9. $x = (x_k)$ reel değerli bir dizi olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists n = n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı vardır öyle ki $\forall k \geq n$ için $\{ k \in \mathbb{N}, |x_k - x_n| \geq \varepsilon\}$ kümesi sıfır yoğunluğa sahip ise $x = (x_k)$ dizisine istatistiksel Cauchy dizisidir denir

Klasik yakınsaklıkta olduğu gibi istatistiksel yakınsaklık ve istatistiksel Cauchy dizileri arasında aşağıdaki biçimde bir ilişki vardır.

Teorem 3.2. $x = (x_k)$ reel değerli bir dizi olsun. Aşağıda verilen ifadeler denktir:

$i)$ $x = (x_k)$ istatistiksel yakınsaktır.

$ii)$ $x = (x_k)$ istatistiksel Cauchy dizisidir.

$iii)$ $x = (x_k)$ dizisi için $\delta(\{ k: x_k \neq y_k \}) = 0$ olacak şekilde yakınsak bir $y = (y_k)$ dizisi vardır.

Sonuç 3.1. $x = (x_k)$ dizisi l sayısına istatistiksel yakınsak ise $x = (x_k)$ dizisinin l sayısına klasik anlamda yakınsayan bir alt dizisi vardır [16].

Bundan böyle c_{st} ile istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi gösterilecektir.

Tanım 3.10. Bir $x = (x_k)$ dizisinin bir L sayısına μ-istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter koşul $\forall \varepsilon > 0$ için $\mu(\{k: |x_k - L| \geq \varepsilon\}) = 0$ olmasıdır ve kısaca $st_\mu - \lim_k x_k = L$ biçiminde gösterilir [17].

Tanım 3.11. $A = (a_{nk})$ sonsuz matrisi ve $x = (x_k)$ dizisi verilsin. Eğer $\lim_{n\to\infty} x_n = l$ olduğunda $\lim_{n\to\infty} (Ax)_n = l$ ise, $A = (a_{nk})$ matrisine regüler matris denir.

Keyfi bir $A = (a_{nk})$ matrisinin regüler olması, Silverman-Toeplitz koşulları olarak bilinen aşağıdaki teorem ile Maddox tarafından karakterize edilmiştir.

Teorem 3.3 (Silverman-Toeplitz): Bir $A = (a_{nk})$ matrisinin regüler olması için gerek ve yeter koşul

$i)$ $\exists M > 0$ sayısı vardır öyle ki; her $n = 1,2,3, \ldots$ için $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| \leq M$,

$ii)$ $\lim_{n\to\infty} a_{nk} = 0, \forall k = 1,2,3, \ldots$,

$iii)$ $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = 1$

koşullarının sağlanmasıdır [18].

Tanım 3.12. $C_1 = (c_{nk})$ matrisi

$$c_{nk} = \begin{cases} \frac{1}{n}, & 1 \leq k < n \\ 0, & k \geq n \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır ve Cesàro Matrisi olarak adlandırılır.

$C_1 = (c_{nk})$ matrisinin Teorem 3.3 ile verilen Silverman-Toeplitz koşullarını sağladığı kolayca gösterilebilir.

Tanım 3.13. $x = (x_k)$ dizisi verilsin. Eğer,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (x_k - l) = 0$$

ise $x = (x_k)$ dizisine l sayısına Cesàro yakınsaktır denir. Cesàro yakınsak olan dizilerin kümesi c_1 sembolü ile gösterilir. Yani $c_1 := \{ (x_k) : \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - l) \to 0, \ n \to \infty \}$ dir.

Tanım 3.14. (X,T) bir topolojik uzay, I bir indis kümesi, $A \subset X$ ve $\forall i \in I$ için $A_i \subset X$ açık küme olsun. Eğer $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ ise $(A_i)_{i\in I}$ ailesine A kümesinin bir açık örtüsü denir.

Sonlu bir aile, A için bir açık örtü ise, yani $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n \subset X$ açık alt kümeleri için, $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ ise $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ ailesine A kümesi için bir sonlu açık örtüsü denir.

Bir örtünün herhangi bir alt ailesi de bir örtü ise buna çoğunlukla alt örtü adı verilir [13].

Tanım 3.15. (X,T) bir topolojik uzay, $A \subset X$ olsun. A kümesinin her açık örtüsü sonlu bir alt örtüye sahip ise A kümesine kompakt küme denir [13].

Tanım 3.16. (X,T) bir topolojik uzay ve $x \neq y$ olacak şekilde $\forall\, x, y \in X$ için biri x noktasını diğeri y noktasını içeren ayrık iki açık küme bulunabiliyorsa bu topolojik uzaya Hausdorff Uzayı denir [13].

Lemma 3.1. $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ kapalı aralığında tanımlanmış her sürekli fonksiyona polinom fonksiyonlarla düzgün yaklaşılabilir. Yani eğer $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyonsa ve $\varepsilon > 0$ verilsin. Bu durumda öyle bir P polinomu vardır ki $\|f - P\|_\infty < \varepsilon$ sağlanır [16].

1937 yılında, Stone-Weierstrass Teoremi, $[a,b]$ aralığı yerine herhangi bir kompakt ve Hausdorff topolojik uzayı, polinomlardan oluşan altcebir yerinede bazı özel altcebirler alınarak genelleştirmiştir.

Teorem 3.4 (Stone-Weierstrass Teoremi). K kompakt bir Hausdorff uzay olsun. $A \leq C(K)$ noktaları ayıran ve X' in hiçbir noktasında sıfırlanmayan bir altcebirse, o zaman A, $C(K)$'da (düzgün metrik için) yoğundur [18].

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1. G-Sürekli Fonksiyonlar

Bu çalışmada Heine anlamda dizisel süreklilik göz önüne alınarak dizilerin yakınsaklık tanımının değişiminin sürekli fonksiyonlar üzerinde oluşturduğu yapısal etki araştırılmıştır. Bu tip araştırmalar 1946 yılında American Mathematisel Montly dergisinde H. Robbins tarafından yayımlanan bir soru ile başlamıştır [19]. H. Robbins tarafından sorulan soru aşağıdaki biçimdedir:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $u \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k = u$ koşulunu sağlayan her reel değerli $x = (x_n)$ dizi için

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) = f(u) \qquad (1)$$

sağlayan ($u = u_0$ tek noktada sağlansa bile) f fonksiyonu lineer midir? Yani her u için $f(u) = au + b$ formunda mıdır? Burada a ve b tespit edilmiş reel sayılardır.

Bir fonksiyonun klasik anlamda (Cauchy) sürekli olması için gerek ve yeter koşul fonksiyonun dizisel sürekli olmasıdır. Yani, bir fonksiyonun sürekliliği diziler yardımıyla karakterize edilebilir.

Robbins, klasik yakınsaklık yerine dizilerin Cesaro yakınsaklığı alınırsa sadece sürekli fonksiyonların lineer fonksiyonlar olacağını öngörmüştür. Daha sonra Robbins tarafından de ifade edilen süreklik "Cesaro süreklilik" olarak tanımlamıştır [19].

Buck tarafından 1948 yılında bu problem kısmen çözülmüştür [6]. Bugüne kadar birçok araştırmacı tarafından bu problem incelenmiştir. Dizisel yakınsaklık, matris toplanabilme metotları yardımı ile ele alınarak Buck tarafından incelenmiştir. Bu araştırmaların hepsinde kullanılan metoda göre sürekli olan fonksiyonlar ya tam olarak lineer ya da tam anlamıyla sürekli fonksiyonlardır.

Tanım 4.1.1. $I \subset \mathbb{R}$ bir aralık ve $f: I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon, a ve b sabit sayılar ve $u \in \mathbb{R}$ olmak üzere f fonksiyonu $f(u) = au + b$ biçiminde yazılabiliyorsa f fonksiyonuna lineer fonksiyon denir.

Tanım 4.1.2. G bir dizisel yakınsaklık metodu ve $f: \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. u noktasına G −yakınsak I-değerli her $x = (x_n)$ dizisi için $f(x) = \big(f(x_n)\big)$ dizisi de $f(u)$ noktasına G −yakınsak ise f fonksiyonuna $u \in I$ noktasında G −süreklidir denir.

$D \subset I$ olsun. Eğer f fonksiyonu her $u \in D$ noktasında G −sürekli ise f fonksiyonu G −sürekli ise I tanım kümesinde G −süreklidir denir.

$f: I \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun I kümesindeki G −sürekliliği kısaca aşağıdaki biçimde ifade edilebilir:

$x = (x_n)$ dizisi I-değerli, G-yakınsak her dizi için

$$G\big(f(x)\big) = f\big(G(x)\big)$$

sağlanırsa f, I kümesinde G −süreklidir denir.

f fonksiyonunun G −sürekliliği ile bir I alt aralığı üzerindeki G −sürekliliğini ayırt etmek önemlidir.

Eğer f fonksiyonu I alt aralığında G −sürekli ise $f|_I$ da G −süreklidir, fakat karşıtı doğru değildir.

Bunu aşağıdaki örnekte gösterelim.

Örnek 4.1.1. G regüler bir metot olsun. Bu durumda $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu vardır öyle ki her $[a, b] \subset \mathbb{R}$ için $f|_{[a,b]}$ fonksiyonu G −sürekli fakat $\mathbb{R}$ üzerinde G −sürekli değildir.

Bunun için $c_G = c + span\{2^n\}$ uzayını tanımlayalım. $G\big(x + \lambda(2^n)\big) = \lim\limits_{n \to n_0} x_n$,

$(\lambda \in \mathbb{R})$ reguler metodu ile $f: \mathrm{u} \to u^2$ fonksiyonu istenen özelliğe sahiptir.

Şimdi literatürde genel olarak incelenen bazı dizisel yakınsaklık yöntemlerini verelim:

Dizilerin yakınsaklık yöntemlerinden en önemlilerinden, biri matris ile tanımlanan yöntemdir. Gerçel sayıların sonsuz matrisi $A = (a_{nk})_{n,k=1}^{\infty}$ olmak üzere $x = (x_n)$ dizisinin Ax matris dönüşüm dizisi genel terimi her $n \in \mathbb{N}$ için yakınsak olmak üzere,

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k\right)$$

dir. Yani $(Ax)_n := (\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}x_k)$ biçiminde yeni bir dizidir.

$x = (x_n)$ reel değerli dizi olmak üzere Ax dönüşüm dizisi göz önünde bulundurulsun Eğer Ax her $n \in N$ için var ve $\lim Ax = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}x_k = l$ ise $x = (x_n)$ dizisine l noktasına $A-$ yakınsak (veya A-toplanabilir) denir.

Burada l sayısına x dizisinin A-limiti denir.

Tanım 4.1.3. $A = (a_{nk})$ matrisi regüler olması için gerek ve yeter şart

$i)$ $\exists M > 0$ sayısı vardır öyle ki; her $n = 1,2,3, \ldots$ için $\sum_{k=1}^{\infty}|a_{nk}| \leq M$,

$ii)$ $\lim_{n\to\infty} a_{nk} = 0, \forall k = 1,2,3, \ldots$,

$iii)$ $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = 1$ koşullarının sağlanmasıdır.

Matris yöntemleri için regülerlik kavramı, klasik regülerlik kavramına denk düşmektedir.

Birçok araştırmacı tarafından regüler $A-$toplanabilir matris ele alınarak $G-$süreklilik kavramını çalışılmıştır. Bu durumda $G-$süreklilik yerine $A-$süreklilik kavramı kullanmaktadır.

Buck özel olarak Cesàro matrisini kullanmıştır.[6] Teorem 4.3 de verilen regulerlik koşullarını sağlar.

Tanım 4.1.4. $A = (a_{nk})$ negatif olmayan sonsuz matrisi her $k \in \mathbb{N}$ için $\lim_{n} a_{nk} = 0$, $\sup_{n} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} < \infty$ ve $\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \nrightarrow 0$, $(n \to \infty)$ koşullarını sağlayacak biçimde verilsin. Eğer, her $n \in \mathbb{N}$ için $\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}|x_k - l| \to 0$ ise $x = (x_n)$ dizisine l sayısına kuvvetli $A-$yakınsaktır denir. Burada l ye x dizisinin kuvvetli A-limiti denir.

Matris üzerine koyulan bir takım koşullar ile bu limit tektir ve kuvvetli $A-$yakınsak regüler metoda kuvvetli matris metodu denir.

I kümesinde tanımlı lineer fonksiyonların uzayını $\mathcal{L}(I)$, $G-$sürekli fonksiyonların uzayını $\mathcal{G}(I)$ ve sürekli fonksiyonlar uzayını da $C(I)$ ile gösterelim.

Şimdi bu üç küme arasındaki ilişkiyi inceleyelim:

4.2. $\mathcal{G} = \mathcal{L}$ olması için bir yeterli şart

Bu bölümde, I aralığında $\mathcal{G} = \mathcal{L}$ olması için bir yeter koşul verilecektir.

Önerme 4.2.1. Eğer, G regüler bir matris metodu ise her lineer $f: I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu G −süreklidir. Yani, $\mathcal{L}(I) \subset \mathcal{G}(I)$ sağlanır.

İspat: G regüler bir metot olmak üzere $\mathcal{L}$ uzayı G −sürekli fonksiyonlar uzayının mümkün olan en küçük alt uzayıdır. Buck her Cesàro-sürekli fonksiyonun lineer olduğunu ispatlamıştır [6].O halde eğer G metodu Cesàro matris metodu ise $\mathcal{G} = \mathcal{L}$ elde edilir.

Diğer durum için $f: I \to \mathbb{R}$ fonksiyon ve $f(x) = ax + b$ olsun. Keyfi bir $x_0 \in I$ için $(x_n) \overset{G}{\to} x_0$ ise $f(x_n) \overset{G}{\to} f(x_0)$, $(n \to \infty)$ olduğunu göstermeliyiz.

$f(x_n) = a.x_n + b$ ve $G\big(f(x_n)\big) = G(a.x_n + b) = a.G(x_n) + b$ buradan

$a.x_0 + b = f\big(G(x_n)\big) = G\big(f(x_n)\big) = f(G(x_n))$ dir.

Antoni Ve Salat bu sonucu herhangi bir regüler metot için ispatlamaya çalışırken, bir matris ile ifade edilemeyen metotlar için doğru olamayacağını aşağıdaki lemma yardımı ile ispatlamışlardır [20].

Lemma 4.2.1. $\alpha \neq 0{,}1$ ve $f: I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve u , $v \in I$ için $\alpha u + (1-\alpha)v \in I$ olmak üzere

$$f(\alpha u + (1-\alpha)v) = \alpha f(u) + (1-\alpha)f(v) \qquad (2)$$

sağlasın. Bu durumda f fonksiyonu I kümesinin yoğun bir alt kümesinde lineerdir.

İspat: Genelliği kaybetmeden $\alpha \in (0{,}1)$ olarak alalım.

Eğer, $\alpha > 1$ ise $\frac{1}{\alpha}$ alınır ve u yerine de $\alpha u + (1-\alpha)v$ seçimi yapılır.

Eğer, $\alpha < 0$ ise $\frac{\alpha}{\alpha-1}$ alınır ve v yerine de $\alpha u + (1-\alpha)v$ seçimi yapılır.

I kümesinde u_0 ve v_0 noktaları seçilsin. $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(u) = au + b$ bir fonksiyon ve $u = u_0$, $u = v_0$ olmak üzere $D = \{u \in I: f(u) = au + b\} \subset I$ kümesi tanımlansın. Bu biçimde seçilen D için iddiamız

$\overline{D}$ kümesi D kümesinin bir aralığıdır. Aksi halde, $u_1, v_1 \in \overline{D}$ olacak şekilde $J = (u_1, v_1)$ aralığı vardır ve bu aralık $\overline{D}$ kümesinin hiçbir noktasını içermez.

Fakat (2) ile verilen eşitlikten $u_1, v_1 \in \overline{D}$ için $\alpha u_1 + (1-\alpha)v_1 \in \overline{D} \cap J$ sağlanır. Bu ise bir çelişkidir. O halde $\overline{D}$ bir aralıktır ve benzer yöntem ile $\overline{D} = I$ olacağı da gösterilir.

Yukarıda verilen Lemma 4.2.1 kullanılarak Antoni ve Salat teoreminin genel yöntemlere genellemesi elde edilir. (2) ile verilen eşitlik ve G-metotları için aşağıdaki özellik göz önünde bulundurulur.

$(\boldsymbol{L_1})$ 0 ile 1 sayılarından oluşan $G-$yakınsak bir $z = (z_n)$ dizisi vardır öyle ki $\alpha \neq 0,1$ olmak üzere $G(z) = \alpha$ dır.

Teorem 4.2.1. G metodu (L_1) özelliğini sağlasın. O halde, her $G-$sürekli $f: I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu lineerdir. Yani, $\mathcal{G}(I) = \mathcal{L}(I)$ dır.

İspat: Teoremin ilk kısmı Antoni ve Salat tarafından verilmiştir [20].

$f: I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, $G-$sürekli ve $u, v \in I$ olsun. G, (L_1) özelliğini sağlayan bir metot olmak üzere terimleri 0 ve 1 sayılarından oluşan $z = (z_n)$ dizisi vardır öyle ki bu dizi yardımıyla her $n \in \mathbb{N}$ için terimleri $x_n := z_n u + (1-z_n)v$ olan (x_n) dizisi tanımlansın. Eğer, $(z_n) = 1$ ise $(x_n) = u$, $(z_n) = 0$ ise $(x_n) = v$ dir.

G metodu regüler ve lineer bir metot olduğundan $x = (x_n) \in c_G$ ve $G(x) = \alpha u + (1-\alpha)v$ sağlanır. Ayrıca $z_n = 1$ ise $f(x_n) = f(u)$, $z_n = 0$ ise $f(x_n) = f(v)$ dir. Buradan

$f(x_n) = z_n f(u) + (1-z_n) f(v)$,

olmak üzere

$G\big(f(x_n)\big) = \alpha f(u) + (1-\alpha) f(v)$ sağlanır. Dolayısıyla f fonksiyonunun $G-$sürekliliğinden her u, v ve $\alpha u + (1-\alpha)v \in I$ olmak üzere

$f(\alpha u + (1-\alpha)v) = f\big(G(x)\big) = G\big(f(x)\big) = \alpha f(u) + (1-\alpha) f(v)$ elde edilir.

Lemma 4.2.1 den I kümesinin yoğun bir D alt kümesi vardır öyle ki $a, b \in \mathbb{R}$ ve $u \in D$ olmak üzere $f(u) = au + b$ sağlanır.

Şimdi $u \in I$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \longrightarrow u$ koşulunu sağlayan $x_n \in D$ dizisi göz önüne alınsın.

Böylece, $u = G(x)$ dir ve G metodunun regülerliği ve lineerliğinden

$G\big(f(x)\big) = G((ax_n + b)_n) = au + b$

eşitliği sağlanır. Bu irdeleme f fonksiyonunun G −sürekli olması anlamına gelir ve

$f(u) = G\big(f(x)\big) = au + b$ sağlanır.

Herhangi bir f fonksiyonu sadece tek bir noktada G-sürekli olsa bile Teorem 4.2.1'in doğru kalacağı Antoni ve Salat tarafından ispatlanmıştır [20].

Uyarı 4.2.1. Teorem 4.2.1'in tersi doğru değildir.

(L_1) özelliğine sahip olmayan regüler bir G metodu için de herhangi bir I aralığında $\mathcal{G}(I) = \mathcal{L}(I)$ eşitliği sağlanabilir. Bunu görmek için bir G metodu inşa edelim. $z = (1,0,-1,1,0,-1,\dots)$ biçiminde bir dizi için $c_G = c + span\{z\}$ olmak üzere $x \in c_G$ ve

$G(x) = \lim\limits_{n} x_{3n+2}$ biçiminde tanımlansın.

Açıktır ki G metodu (L_1) özelliğine sahip değildir. Çünkü $G(x) = l$ ise l sayısı x dizisinin altdizisel limiti olmalıdır.

$f: I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu G −sürekli bir fonksiyon ve $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = u_0$ olmak üzere $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$x = y + \lambda z$ dizisi göz önüne alınsın buradan $G(x) = u_0$ dır. f fonksiyonu G −sürekli olduğundan $f(x) = (f(y_1 + \lambda), f(y_2), f(y_3 - \lambda), \dots) \in c_G$,

ve $G\big(f(x)\big) = f(u_0)$ dır. $\kappa \in R$ için

$f(y_{3n+2}) \to f(u_0)$,

$f(y_{3n+1} + \lambda) \to f(u_0) + \kappa$,

$f(y_{3n+3} - \lambda) \to f(u_0) - \kappa$ olsun.

Eğer $\lambda = 0$ ise (y_n) dizisi için $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = u_0$ dır. Bu ise f fonksiyonunun u_0 da sürekli olması anlamına gelir. $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere $u_0 + \lambda$ ve $u_0 - \lambda$ elemanları I kümesine aittir $y_n = u_0$ öyle ki

$$\frac{f(u_0 + \lambda) + f(u_0 - \lambda)}{2} = f(u_0)$$

Lemma 1 den f fonksiyonunun lineerliği devam eder.

4.3. G −sürekliliğin topolojik incelenmesi ve $\mathcal{G} = \mathcal{C}$ olması için gerekli bir koşul

Bu bölümde G metodunun alt dizisel metot olması halinde, $\mathcal{G}$ ile $\mathcal{C}$ arasındaki ilişki incelenecektir.

Tanım 4.3.1. G regüler bi toplanabilme metodu olmak üzere l ye G −yakınsak her $x = (x_n)$ dizisinin $\lim_k x_{n_k} = l$ koşulunu sağlayan (x_{n_k}) alt dizisi varsa, G metoduna altdizisel metot denir.

Belirlenmiş bir (n_k) monoton artan dizisi için $G = I_{(n_k)}$ metodu aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$x = (x_n)$ dizisi için $G(x) := \lim_k x_{n_k}$ varsa, $x = (x_n)$ dizisine $I_{(n_k)}$ −yakınsaktır denir.

Bu biçimde tanımlanan $I_{(n_k)}$ metodu altdizisel metottur. Altdizisel metoda başka bir örnek ise Uyarı 4.2.1' de verilmiştir.

Diğer bir örnek ise istatistiksel yakınsaklıktır [1, sonuç 2.4].

Tanım 4.3.2. $U \subset \mathbb{R}$ ve $l \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer, U kümesinde $G(x) = l$ olacak şekilde bir $x = (x_n)$ dizisi varsa l ye U kümesinin G −hull noktası denir. Eğer, U kümesi tüm G −hull noktalarını içeriyor ise U kümesine G −kapalıdır denir.

U kümesinin G −hull noktalarının kümesi $\overline{U}^G$ sembolü ile gösterilir.

Açıktır ki, G regüler bir metot olmak üzere herhangi $U \subset \mathbb{R}$ için $U \subset \overline{U} \subset \overline{U}^G$ içermeleri sağlanır. Ayrıca eğer $\overline{U}^G = U$ sağlanıyor ise U kümesi G −kapalıdır.

Not edelim ki, G metoduna bağlı olarak ya $\overline{U}^G = U$ ya da $\overline{U} \subset \overline{U}^G$ sağlanır.

Örneğin, G metodu olarak Cesaro toplanabilme metodu göz önüne alınırsa $U = \{0,1\}$ kümesi için $\overline{U}^G = [0,1]$ dir.

Eğer, G metodu olarak istatistiksel yakınsaklık metodu göz önüne alınırsa $\{0,1\}$ kümesinin G −hull noktalarının kümesi $\{0,1\}$ dir. Ayrıca, $U = \{0,1\}$ için $G(x) = \lim_n \frac{x_n + x_{n+1}}{2}$ biçiminde seçilirse $\overline{U}^G = \left\{0, \left(\frac{1}{2}\right), 1\right\}$ ve $\overline{U}^G$ kümesinin G-hull noktalarının kümesi $\left\{0, \left(\frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{2}\right), \left(\frac{3}{4}\right), 1\right\}$ dir.

Önerme 4.3.1. G regüler bir metot ve $U \subset \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda, $\overline{U} = \overline{U}^G$ eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter koşul G metodunun bir altdizisel metot olmasıdır.

İspat: Kabul edelim ki G altdizisel metot ve $l \in \overline{U}^G$ olsun. Böylece U kümesinde bir $x = (x_n)$ dizisi var ve $G(x) = l$ sağlanır. G metodu altdizisel metot olduğundan (x_n) dizisinin $\left(x_{n_k}\right)$ alt dizisi vardır öyle ki $\lim_k x_{nk} = l$ dir. Bu ise $l \in \overline{U}$ demektir. Böylece, G metodu regüler olduğundan $\overline{U} = \overline{U}^G$ eşitliği sağlanır.

Şimdi kabul edelim ki her $U \subset \mathbb{R}$ için $\overline{U} = \overline{U}^G$ sağlanır. $x = (x_n)$ dizisi G −yakınsak ise $G(x) = l$ olacak biçimde $l \in \mathbb{R}$ vardır. O halde G regülerdir.

Her bir $\eta \in \mathbb{N}$ için $l \in \overline{\{x_n : n \geq \eta\}}^G$ dir. Ayrıca, kabulden dolayı,

$\overline{\{x_n : n \geq \eta\}}^G = \overline{\{x_n : n \geq \eta\}}$ dir. Buradan, $l \in \bigcap_\eta \overline{\{x_n : n \geq \eta\}}$ elde edilir. Bu ise $\left(x_{n_k}\right)$ alt dizisinin var ve $\lim_k x_{n_k} = l$ olduğunu gösterir.

Lemma 4.3.1. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu G −sürekli ve U kümesi G −kapalı bir küme olsun. O halde $f^{-1}(U) \subset \mathbb{R}$ kümesi de G −kapalıdır.

İspat: $V := f^{-1}(U)$ olmak üzere $l \in \overline{V}^G$ olsun. Bu durumda V-değerli $x = (x_n)$ dizisi vardır öyle ki $G(x) = l$ sağlanır.

Ayrıca, $G\big(f(x)\big) = f(l)$ olduğunda $f(x)$ fonksiyonu U-değerli ve U kümesi G-kapalıdır. Buradan $f(l) \in U$ elde edilir. Fakat $l \in V$ ve $\overline{V}^G \subset V$ dir.

Lemma 4.3.1 ile aşağıdaki önerme elde edilir.

Önerme 4.3.2. G bir altdizisel metot olmak üzere her G −sürekli her fonksiyon süreklidir. Yani $\mathcal{G} \subset \mathcal{C}$ dir.

İspat: G sürekli bir fonksiyonun sürekli olduğunu göstermek için herhangi bir kapalı kümenin bu fonksiyon altındaki ters görüntüsünün de kapalı olduğunu göstermek yeterlidir.

$U \subset \mathbb{R}$ kümesi kapalı olsun. G bir altdizisel metot olduğundan önerme 4.3.1 den, U kümesi G −kapalıdır. Böylece f fonksiyonu G −sürekli olduğundan Lemma 4.3.1 den ve $f^{-1}(U)$ fonksiyonu da G −kapalıdır ve kapalıdır.

Teorem 4.3.1. G regüler bir metot olsun. Bu durumda, her sürekli fonksiyon G-süreklidir, yani $\mathcal{C} = \mathcal{G}$ ise G altdizisel metottur.

İspat: Kabul edelim ki, G bir altdizisel metot olmasın. Bu durumda $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli fakat G-sürekli olmayan bir fonksiyon olsun. G altdizisel metot olmadığından Önerme 4.3.1' den bir $U \subset \mathbb{R}$ kümesi vardır öyle ki $\overline{U} \subset \overline{U}^G$ sağlanır.

$l \in \overline{U}^G \setminus \overline{U}$ olsun. O zaman bir f sürekli fonksiyonu vardır öyle ki $f(l) = 0$ ve $f|\overline{U} = 1$ sağlanır. f fonksiyonunun G −sürekli olmadığı kabul edilsin.

$l \in \overline{U}^G$ olduğundan $x = (x_n)$ dizisi vardır öyle ki $G(x) = l$ dir. Şimdi $f(x_n) = 1$ her $n \in \mathbb{N}$ için ve $f(l) = 0$,

$G(f(x)) = 1 \neq 0 = f(l)$ olduğundan iddia sağlamış olur.

Regüler altdizisel metotlar için G −sürekli fonksiyonların yalnız lineer fonksiyonlar olduğu gösterildi. Böylece Teorem 4.3.1'in tersinin doğru olmadığı açıktır. Önceki iki sonuçtan kolayca görülür ki

G reguler metotları için, $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}$ olması için gerek ve yeter koşul $\mathcal{G} = \mathcal{C}$ olmasıdır.

Bu ise $\mathcal{G}$ ailesinin hiçbir zaman $\mathcal{C}$ ailesini içermediğini gösterir. Eğer $\mathcal{G}$ nin $\mathcal{C}$ de bulunmayan fonksiyonları içeren bir G metodu varsa o zaman G −sürekli olmayan sürekli fonksiyonların da olması gerekir. Özel metotlar için $\mathcal{G} = \mathcal{C}$ olduğunda karakterize etmek mümkündür. Klasik matris metotları için böyle bir sonuç Iwinski tarafından verilmiştir [5]. Şimdi bu bölümün başında verilen $I_{(n_k)}$ metodunu hatırlatılsın;

Açıkça $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}$ yi sağlayan bir matris yöntemidir, yani $\mathcal{G} = \mathcal{C}$ dir.

Teorem 4.3.2(Iwinski). G regüler bir metot olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir:

$i)$ $u \to u^2$ fonksiyonu G −süreklidir,

$ii)$ $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}$,

$iii)$ $\mathcal{G} = \mathcal{C}$,

$iv)$ $G = I_{(n_k)}$, $(n_k) \subset \mathbb{N}$

Aslında, $u \to u^2$ fonksiyonunun başka birçok fonksiyon ile değiştirilebileceği [5, teorem 3] çalışmasında göstermiştir.

Teorem 4.3.2 kuvvetli matris metotları için $I_{(n_k)}$ metotdunun uygun bir A matrisi için kuvvetli A −toplanabilme metodu ile eşdeğer olduğunu hatırlatılsın.

Teorem 4.3.3. G kuvvetli matris metodu ise aşağıdaki ifadeler denktir:

$i)$ $u \to u^2$ fonksiyonu G −süreklidir,

$ii)$ $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}$ dir,

$iii)$ $\mathcal{G} = \mathcal{C}$ dir,

$iv)$ $G = I_{(n_k)}$, $(n_k) \subset \mathbb{N}$

İspat: Teorem 4.3.2' den sadece (i) ⇒ (iv) olduğunu göstermek yeterli olacaktır. Şimdi A negatif olmayan bir matris olmak üzere G kuvvetli A toplanabilme metodu olsun.Bu durumda (i) koşulunun sağlandığı açıktır. $B = (b_{nk})$ ile A matrisinin tüm sıfır olan sütunlarının silinmiş halini gösterilsin. A üzerindeki varsayımlara göre B bir sonsuz matristir. O halde kuvvetli B −toplanabilme metodunun klasik yakınsama ile çakıştığını göstermek yeterli olacaktır.

[5, teorem 3] de verilen ispat takip edilirse; $a_k = \sup_n b_{nk}$, $k \in \mathbb{N}$ ve $\alpha = \inf_k \alpha_k$ olsun.

$\alpha = 0$ olduğu kabul edilsin. (k_m) artan bir dizi olmak üzere $\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{k_m} < \infty$ sağlanır. Eğer,

$$x_k = \begin{cases} \alpha_{k_m}^{-2/3}, & k = k_m \\ 0, & k \neq k_m \end{cases}$$

biçiminde seçilirse, (x_k) dizisi 0' a kuvvetli B −yakınsaktır. Diğer yandan, bir (n_m) dizisi seçilebilir öyle ki her m için $b_{n_m} k_m \geq \left(\frac{a_{km}}{2}\right)$ sağlanır. Şimdi bir $y = (y_n)$ dizisi aşağıdaki biçimde tanımlansın:

$$y_k := \begin{cases} \alpha_{k_m}^{-4/3}, & k = k_m \\ 0, & k \neq k_m \end{cases}$$

Buradan kolayca $\sum_{k=1}^{\infty} bn_{mk}|y_k| \longrightarrow \infty$, $(m \to \infty)$ olduğu görülür. Böylece, y dizisi 0 a kuvvetli B −yakınsak değildir. O halde, her k için $y_k = x_k^2$ olduğunda $u \to u^2$ fonksiyonu 0' a G −yakınsak değildir. Bu ise (i) ile çelişir. Dolayısıyla $\alpha > 0$ vardır buradan her $k \in \mathbb{N}$, için (n_k) vardı öyle ki $b_{n_k k} \geq \frac{\alpha}{2}$ var öyle ki $n_k \to \infty, \sum_{k=1}^{\infty} b_{n_k} < \infty$ dir.

Bundan dolayı, eğer x dizisi l ye kuvvetli B −yakınsak ise

$\frac{\alpha}{2}|x_k - l| \leq b_{nk^k}|x_k - l| \leq \sum_{j=1}^{\infty} b_{nk^j}\left|x_j - l\right| \to 0, k \to \infty$

elde edilir.

Bu ise x dizisinin l ye yakınsak olduğunu verir. Buradan B −toplanabilme metodunun klasik yakınsama ile çeliştiği gösterilmiş olur.

4.4. $\mathcal{G} \subset \mathcal{C}$ için yeterli bir koşul

Eğer, G metodu reguler ise $\mathcal{L}$ lineer fonksiyonlar uzayının, G sürekli fonksiyonlar uzayının mümkün olan en küçük alt uzayı olduğu görüldü ve bu durumda en azından $\mathcal{G} = \mathcal{L}$ dir. Bu eşitliğin sağlandığı durumda şu soru sorulabilir; $\mathcal{G}$ kümesi daha ne kadar genişletilebilir? G reguler matris metotları için daima $\mathcal{G} \subset \mathcal{C}$ dir, yani her G −sürekli fonksiyon klasik anlamda süreklidir. Bu gösteriyor ki bir fonksiyon herhangi bir noktada G −sürekli ise o noktada süreklidir.

Bu bölümde Posner tarafından verilen sonucu daha geniş metot sınıflarına uygulanacaktır [21]. Fakat karşı bir örnekle Posner'in sonucunun tüm metotlar için geçerli olmayacağı da gösterilecektir.

G metodu için aşağıdaki özellik tanımlansın:

(S) $\lim x_n = \infty$ olup $\forall(n_k)$ için $\left(x_{n_k}\right)$, G yakınsak olacak şekilde $x = (x_n)$ dizisi yoktur.

Teorem 4.4.1. G regüler metodu S özelliğini sağlasın. Bu durumda, $u_0 \in I$ noktasında G −sürekli her $f: I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $u_0 \in I$ noktasında süreklidir.

İspat: Kabul edilsin ki f fonksiyonu u_0 noktasında G −sürekli fakat sürekli olmasın. Bu durumda, I kümesinde bir (x_n) dizisi vardır öyle ki (x_n) dizisi u_0 noktasına yakınsaktır fakat $f(x_n)$ dizisi $f(u_0)$ noktasında yakınsak değildir. O halde (x_n) dizisinin bir $\left(x_{n_k}\right)$ alt dizisi bulunabilir öyle ki $\delta > 0$ için $|f(y_n) - f(u_0)| \geq \delta$ sağlanır. Yani; $\forall n \in \mathbb{N}$ için $f(y_n) \geq f(u_0) + \delta$ sağladığı kabul edilebilir. Eğer, $f(y)$ dizisi sınırlı bir dizi ise y dizisinin bir w altdizisi vardır öyle ki $f(w_n) \to a \geq f(u_0) + \delta$ dır. Buradan $G(w) = u_0$ ve $G\big(f(w)\big) = a \neq f(u_0)$ sağlanır.

Bu ise f fonksiyonunun u_0 noktasında G −sürekli olmasıyla çelişir. Bu yüzden $f(y)$ dizisi sınırlı değildir ve y dizisinin bir w' altdizisi vardır öyle ki $f(w') \longrightarrow \infty$ dır. w' dizisinin her alt dizisi de u_0 noktasına yakınsaklığından, $f(w')$ dizisinin G −sürekliliğinden tüm altdiziler G −yakınsaktır. Bu ise G metodunun S özelliği ile çelişir.

Sonuç 4.4.1. G regüler bir metot olsun. Eğer,

a) (Posner) G klasik matris metodu, ya da

b) G kuvvetli matris metodu, ya da

c) G bütünüyle reguler, yani , $x = (x_n)$ dizisi yakınsak değil fakat G −yakınsaktır, ya da

d) G altdizisel bir metot ,

olsun. Her $f: I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $u_0 \in I$ noktasında G −sürekli ise f fonksiyonu bu noktada süreklidir.

İspat: a) daki iddia S özelliğine sahip her regüler matris metodu için Buck'ın teoreminde izlenilen yolla ispatlanır. c) Açıktır. d) koşulu c) koşulunun özel bir durumudur. b) ise c) den elde edilir.

Reguler ve kuvvetli matris metotları dışında neredeyse tüm yakınsaklık metotları ve μ −istatistiksel yakınsaklık metotları da S özelliğine sahiptir [22].

Herhangi bir fonksiyonun bir noktada sürekli olması için onun bu noktada istatistiksel sürekli olması gerektiği Schoenberg tarafından ispat edilmiştir [23, Lemma 5].

Önerme 4.4.2. G metodu μ −istatistiksel yakınsaklık metodu olsun. $f: I \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $u_0 \in I$ noktasında G −sürekli olması için gerek ve yeter koşul bu noktada sürekli olmasıdır.

İspat: İlk olarak $f: I \to \mathbb{R}$ fonksiyonun u_0 noktasında sürekli ise bu noktada G −sürekli olduğu gösterilsin. Bunun için , u_0 noktasına μ −istatistiksel yakınsak (x_n) dizisi ve $\varepsilon > 0$ keyfi sayısı göz önünde bulundurulsun.

f fonksiyonu u_0 noktasında sürekli olduğundan en az bir $\eta > 0$ vardır öyle ki $|v - u_0| \le \eta$ koşulunu sağlayan her v için $|f(v) - f(u_0)| \le \varepsilon$ sağlanır. Böylece, μ −istatistiksel yakınsaklık tanımından,

$\mu(\{n: |f(x_n) - f(u_0)| > \varepsilon\}) \leq \mu(\{n: |x_n - u_0| > \eta\}) = 0$

elde edilir. Bu ise

$\mu(\{n: |f(x_n) - f(u_0)| > \varepsilon\}) = 0$

demektir. Yani; buradan $f(x_n)$ dizisi $f(u_0)$ noktasına μ −istatistiksel yakınsaktır ve f fonksiyonu u_0 noktasında G −süreklidir.

Örnek 4.4.1. Öyle G regüler metodu vardır ki $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu 0 noktasında G −sürekli fakat sürekli değildir.

İspat: İlk olarak bir c_G uzayı ve bir G metodu tanımlansın. Y ile tüm $y = (y_n)$ dizilerinin kümesi gösterilsin öyle ki $y_n \in \{0\} \cup \{j^j : j \in \mathbb{N}\}$ olmak üzere her bir n için (y_n) ıraksaktır.

W ile Y kümesinin lineer spanları alınsın. $c_G = c + W$ ve $G: c_G \to \mathbb{R}$ olarak tanımlansın. $z \in c$ ve $w \in W$ olmak üzere $x = z + w$ olan bir dizi ve $G(x)$=lim z olsun.

İyi tanımlanmış bir G metodu kurulmalıdır. İlk olarak her $w \in W$ dizisinin $w \neq 0$ ve ıraksak olacağı gösterilmelidir. Bunu görmek için,

$a_v \in R$ ve $y^v \in Y$ olmak üzere $w = \sum_{v=1}^{N} a_v y^v \neq 0$ olsun. Ayrıca, $M = \max_v |a_v|$ ve $m = \min\{|\sum_{v \in H} a_v| : H \subset \{1,2,3,\ldots,N\}, \sum_{v \in H} a_v \neq 0\}$;

burada $m > 0$ dır.

Y kümesinin tanımından pozitif tamsayılı (J_n) dizisi vardır ve (J_n) yakınsak değildir öyle ki $v = 1,2,\ldots,N$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $y_n^v = 0$ ya da $y_n^v \geq (J_n)^{J_n}$ dir.

Şimdi $n \in \mathbb{N}$ için $w_n = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{y_n^v = j^j} a_v \right) j^j$.

Burada sadece birkaç tane terim sıfırdan farklıdır. Eğer $w_n \neq 0$ ise bazı j ler için $\sum_{y_n^v = j^j} a_v \neq 0$.

$w_n \neq 0$ için $\sum_{y_n^v = j^j} a_v \neq 0$ dır. En geniş j için $K = K(n)$ olsun. O zaman $K \geq J_n$ ve böylece

$|w_n| = \left| \sum_{y_n^v = K^k} a_v - \sum_{y_n^v < j^j} a_v y_n^v \right| \geq mK^k - MN(K-1)^{K-1}$

$\geq (mK - MN)(K-1)^{K-1} \geq (mJ_n - MN)(J_n - 1)^{J_n - 1}$

Buradan $n \to \infty$ için, w_n dizisinin ıraksak olduğu görülür.

Sonuç olarak $c_G = c + w$ olduğundan G metodunun iyi tanımlanmış olduğu gösterilmiş olur. Açıkça G metodu lineer ve regülerdir.

Şimdi f fonksiyonu tanımlansın $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere

$$f(u) = \begin{cases} J^j & ise \ \ u = \dfrac{1}{j} \\ 0 & ise \ \ u \neq \dfrac{1}{j} \end{cases}$$

biçiminde tanımlansın. Bu durumda f fonksiyonunun 0 noktasında sürekli değildir. G −sürekli olup olmadığı incelenecektir.

Bir $x = z + w \in c_G$ dizisi ve $G(x) = limz = 0$ alınsın. O halde her n için $f(x_n) \in \{0\} \cup \{J^j : j \in \mathbb{N}\}$ ve her n için $w_n = 0$ ve $z_n \in \{(1/j) : j \in \mathbb{N}\}$ olmak üzere $f(x_n) \neq 0$ dır. Sonuç olarak $f(x)$ dizisi ya çok az sayıda sıfırdan farklı terime sahiptir ya da sıfır olmayan terimleri sonsuza gider. İki durumda da $f(x) \in c_G$ ve $G(f(x)) = 0$ sağlanır. Bu da gösterir ki f fonksiyonu 0 noktasında G −süreklidir. Ancak f fonksiyonu hiçbir $u = (1/j)$ noktasında G −sürekli değildir.

4.5. İkilem

Bu bölümde G regüler metotları için iki durum incelenecektir: Ya sadece lineer fonksiyonlar $\mathbb{R}$ kümesi üzerinde G −süreklidir ya da her sürekli fonksiyon $\mathbb{R}$ kümesi üzerinde G −süreklidir. Yani; $\mathcal{G} = \mathcal{L}$ ya da $\mathcal{G} = \mathcal{C}$ olur.

Şu ana kadar her sürekli fonksiyonu G −sürekli yapan ve lineer olmayan regüler bir metot bilinmemektedir.

Aslında, G metodu olarak matris metotları dikkate alındığında bu ikilemi elde etmek Spigel ve Krupnik tarafından ortaya çıkarılmıştır [24, p.147]. Burada regüler matris metotları için bu ikilemin başarısız olduğu gösterilecektir. Spigel ve Krupnik varsayımına karşı örnek verilecektir.

Kuvvetli matris metotları ile tanımlanmış her metot bu ikileme karşı örnekler oluşturur. Bir önceki sonuç ve Teorem 4.3.2'den $G = I_{(nk)}$ metodu için $\mathcal{G} = \mathcal{C}$ sağlanır.

Teorem 4.5.1. G kuvvetli matris metodu olsun. Her (n_k) dizisi için $G \neq I_{(n_k)}$ ise

$$\mathcal{L} \subseteq \mathcal{G} \subseteq \mathcal{C}$$

dir.

İspat: Önerme 4.4.1 ve Teorem 4.4.1' den $\mathcal{L} \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{C}$ daima sağlanır. Negatif olmayan $A = (a_{nk})$ matrisi ve her $u \in \mathbb{R}$ için lineer olmayan $u \to |u|$ fonksiyonu

$\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \left||x_k| - |u|\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k - u|$ G −süreklidir. Böylece $\mathcal{L} \neq \mathcal{G}$ dir.

Sonuç 4.5.1. G reguler matris metodu için

$$\mathcal{L} \subseteq \mathcal{G} \subseteq \mathcal{C}$$

dir. Bu bölümde aşağıdaki özellik göz önünde bulundurulacaktır.

$(\boldsymbol{GC_1})$ Her G −sürekli $f: I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu süreklidir. Yani, $\mathcal{G}(I) \subset \mathcal{C}(I)$ dır.

Önceki bölümün sonunda da belirtildiği gibi bu durumu sağlamayan regüler bir metot bilinmemektedir.

Teorem 4.5.2. G regüler bir metot ve $I = \mathbb{R}$ ya da $I = [a, b]$ olmak üzere (GC_1) özelliğini sağlasın. O halde, ya $\mathcal{G}(I) = \mathcal{L}(I)$ sağlanır ya da $\mathcal{G}(I)$ kümesi $\mathcal{C}(I)$ kümesi üzerinde yoğundur.

İspat: İlk olarak $I = \mathbb{R}$ ve $\mathcal{G} \neq \mathcal{L}$ olduğu kabul edilsin. $\mathcal{C}$ kümesi üzerinde $\mathcal{G}$ kümesinin kapanışı $\mathcal{H}$ ile gösterilecektir. $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathbb{R})$ kümesinin $\mathbb{R}$ kümesi üzerinde düzgün yakınsadığı hatırlatılsın.

$u \to u^2$ fonksiyonunun $\mathcal{H}$ kümesine ait olduğu gösterilsin. Eğer $\mathcal{G} \neq \mathcal{L}$ ise $f \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{L}$ dir. Bir değişkenin ötelenmesiyle $f|[0,1] \notin \mathcal{L}[0,1]$ olur. f fonksiyonu her $n \in \mathbb{N}$ için $f_n(u) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}u\right)$ biçiminde tanımlansın. Açıktır ki, $f_n \in \mathcal{G}$ dir ve metot (GC_1) özeliğini sağladığından f fonksiyonu $\mathbb{R}$ kümesi üzerinde süreklidir. Şimdi

$$g(u) = \begin{cases} \frac{1}{u}\int_0^u f(t)dt & ise \quad u \neq 0 \\ f(0) & ise \quad u = 0 \end{cases}$$

biçiminde tanımlansın. $u \neq 0$ ve $t, \tau \in [0, u]$ ya da $t, \tau \in [u, 0]$ olmak üzere

$$|g(u) - f_n(u)| = \left| \frac{1}{u} \sum_{k=1}^{n} \int_{(k-1)(u/n)}^{k(u/n)} \left(f(t) - f\left(\frac{k}{n}u\right) \right) dt \right|$$
$$\leq \sup \left\{ |f(t) - f(\tau)| : |\mathrm{t} - \tau| \leq \frac{|\mathrm{u}|}{\mathrm{n}} \right\}$$

sağlanır. Bu da gösterir ki $\mathcal{C}$ kümesi üzerinde $f_n \to g$ dir ve $g \in \mathcal{H}$ dir.

Öyleyse $u \to g(\alpha u)$ fonksiyonları da herhangi bir α için $\mathcal{H}$ kümesine aittir. Bu fonksiyonu bulmak için de işlemler tekrarlanabilir ve $h(u) = \begin{cases} \frac{1}{u}\int_0^u g(t)dt & ise \;\; u \neq 0 \\ g(0) & ise \;\; u = 0 \end{cases}$

fonksiyonu $\mathcal{H}$ kümesine aittir. Açıktır ki, h fonksiyonu $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ üzerinde iki kez türevlenebilir. Ek olarak $(0,1)$ kümesi üzerinde $h''(u) \neq 0$ dır. Eğer, 0 olsaydı $[0,1]$ kümesi üzerinde $h(u) = au + b$ olurdu.

Öyleyse $\int_0^u g(t)dt = au^2 + b$ dir ve buradan $g(u) = 2au + b$ elde edilir.

Aynı şekilde $\int_0^u f(t)dt = 2au^2 + bu$ olduğundan $f(u) = 4au + b$ olur. Bu ise $f|[0,1] \notin \mathcal{L}[0,1]$ olması ile çelişir.

$f = h$ olsun. Sonuç olarak $f \in \mathcal{H}$ fonksiyonunun varlığı gösterildi öyle ki $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ üzerinde bazı $u_0 \in (0,1)$ için $f'(u_0) \neq 0$ ve $f''(0) \neq 0$ dır. Öyleyse, $u \in R$ için

$f(u) = f(0) + f'(0)u + \frac{1}{2}f''(0)u^2 + r(u)$ ve $\frac{|r(u)|}{u^2} \to 0$, $u \to 0$ yazılabilir. Eğer,

u yerine $\left(\frac{u}{n}\right)$ yazılır ve denklem n^2 ile çarpılırsa $u \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$\frac{1}{2}f''(0)u^2 - \left(n^2 f\left(\frac{u}{n}\right) - n^2 f(0) - nf'^{(0)}u\right) = -n^2 r\left(\frac{u}{n}\right)$$

elde edilir. Böylece, her bir f_n fonksiyonu $\mathcal{H}$ kümesine aittir

$$f_n(u) = n^2 f\left(\frac{u}{n}\right) - n^2 f(0) - nf'(0)u$$

olması için her $M > 0$ için

$$\sup_{|u| \leq M} \left| -n^2 r\left(\frac{u}{n}\right) \right| = \sup_{0<|u| \leq M} \left| \frac{r(u/n)}{(u/n)^2} \right| |u|^2 \to 0, \qquad n \to \infty \text{ sağlanır.}$$

Buradan görülür ki $\mathcal{C}$ kümesi üzerinde $f_n(u) \to \frac{1}{2} f''(0)u^2$ ve $f''(0) \neq 0$ dır. Bu $u \to u^2$ fonksiyonu $\mathcal{H}$ kümesine ait olması demektir. Şimdi bu sonuç kullanılarak $\mathcal{H} = \mathcal{C}$ olduğu gösterilecektir. Bunun için, $\mathcal{C}[a,b]$ kümesi üzerinde $\mathcal{H}|[a,b] := \{f|[a,b]: \mathrm{f} \in \mathcal{H}\}$ kümesinin yoğun olduğunu göstermek yeterlidir.

Önce $\mathcal{H} \supset \mathcal{L}$ ise $\mathcal{H}|[a,b]$ kümesini $[a,b]$ aralığını noktalara ayırır ve sabit fonksiyonları içerir. Stone-Weierstrass teoremine göre $\mathcal{H}|[a,b]$ kümesi $\mathcal{C}[a,b]$ kümesinin bir alt cebiridir. Bunun için $f, g \in \mathcal{H}$ ise $f.g \in \mathcal{H}$ olduğunu gösterilmelidir.

$f.g = \frac{((f+g)^2 - f^2 - g^2)}{2}$ biçiminde yazılırsa $u \to u^2$ fonksiyonunun da $\mathcal{H}$ kümesine ait olduğu görülür.

İspat için $I = [a,b]$ durumu kolaydır. Aynı zamanda herhangi bir $[c,d]$ aralığı için $\mathcal{H}[c,d]$ aittir. Böylece $f^2 \in \mathcal{H}[a,b]$ yazılabilir. Yani $f \in \mathcal{H}[a,b]$ dir. Teorem 4.4.3'den gerçek bir çelişki elde edilmek için $\mathcal{C}(I)$ kümesinin hangi koşulları sağladığında $\mathcal{G}(I)$ kümesinde kapalı bir küme olacağı söylenmelidir.

Tanım 4.5.1. $\mathbb{R}$ üzerinde $G -$sürekli f fonksiyonu her $[a,b]$ aralığında $f|_{[a,b]} \in G[a,b]$ oluyor ise $G -$sürekliliğin boundedly determinedı denir.

Lemma 4.5.1. G metodu (GC_1) özelliğine sahip regüler bir metot olmak üzere

$c_G \cap l_\infty$ kapalı ve $G: (c_G \cap l_\infty; \|.\|_\infty) \to \mathbb{R}$ sürekli ise aşağıda verilenlerden birisi sağlanır:

$a)$ $I = [a,b]$ ya da

$b)$ $I = \mathbb{R}$ ve $G -$süreklilik boundedly determined ise $\mathcal{G}(I)$ kümesi $\mathcal{C}(I)$ kümesi üzerinde kapalıdır.

İspat: a) $f_n \in \mathcal{G}[a,b]$ olmak üzere $f_n(u) \to f(u)$ düzgün yakınsak olsun. Şimdi $[a,b]$ aralığı üzerinde $G -$yakınsak bir x dizisi alınsın. $G(x) = u \in [a,b]$ ise her bir f_n fonksiyonu $G -$süreklidir ve aynı zamanda bu aralıkta da süreklidir. Buradan her bir n için $f_n \in c_G \cap l_\infty$ sağlanır ve $n \to \infty$ için

$$\sup_k |f_n(x_k) - f(x_k)| \leq \|f_n - f\|_\infty \to 0$$

elde edilir.

Böylece, varsayımdan dolayı $f(x) \in c_G \cap l_\infty$ ve $f_n(x) \to f(x)$ dir.

G metodunun sürekliliğinden ve f_n fonksiyonunun G −sürekliliğinden

$$f_n(u) = f_n\big(G(x)\big) = G\big(f_n(x)\big) \to G\big(f(x)\big)$$

sağlanır. O halde o zaman $f_n(u) \to f(u)$ dir. Buradan $G\big(f(x)\big) = f(u)$ yani $f \in \mathcal{G}[a,b]$ elde edilir.

b) (a) koşulundan dolayı $f|[a,b] \in \mathcal{G}[a,b]$ ise $f \in \mathcal{G}(\mathbb{R})$ dir.

Yukarıda verilen teoremlerin bir sonucu olarak aşağıdaki ikilem elde edilir:

Teorem 4.5.3. G regüler ve (GC_1) özelliğine sahip bir metot olsun. $c_G \cap l_\infty$ kapalı ve $G: (c_G \cap l_\infty; \|.\|_\infty) \to \mathbb{R}$ sürekli ise aşağıda verilenlerden birisi sağlanır:

$a)$ $I = [a,b]$

$b)$ $I = R$ ve G −sürekliliğin boundedly determinedı ya $\mathcal{G}(I) = \mathcal{L}(I)$ ya da $\mathcal{G}(I) = \mathcal{C}(I)$ dır.

İspat: G regüler klasik ya da kuvvetli matris metodu ise $c_G \cap l_\infty$ kapalıdır ve $G: (c_G \cap l_\infty; \|.\|_\infty) \to \mathbb{R}$ süreklidir.

Klasik matris metotları için (a) ifadesinin ispatı Silverman-Toeplitz teoreminden açıktır [18].

A regüler matrisi sürekli lineer uzayda $A: l_\infty \to l_\infty$ ve $c_G \cap l_\infty = A^{-1}(c)$ olarak tanımlansın. O halde $x \in c_G \cap l_\infty$ için $G(x) = \lim Ax$ ve $\lim: c \to \mathbb{R}$ süreklidir. Kuvvetli matris metotları için iddia benzer şekilde ispatlanabilir [17, önerme 4 ve teorem 8].

Sonuç 4.5.2. G regüler klasik ya da kuvvetli matris metodu olmak üzere

$a)$ $I = [a,b]$,

$b)$ $I = \mathbb{R}$ ve G −süreklilik boundedly determined,

ise ya $\mathcal{G}(I) = \mathcal{L}(I)$ ya da $\mathcal{G}(I) = \mathcal{C}(I)$ dır.

Teorem 4.4.2 ve Sonuç 4.5.2 den klasik ya da kuvvetli matris metotları için G metotları regülerdir.

$G-$ süreklilik genel boundedly determined değildir. Matris toplanabilirliği için Örnek 1'de somut bir örnek verilir [25, Bölüm 26].

4.6. G −sürekliliğin tek bir noktadaki global sonuçları

G −süreklilik için ilk bölümde Buck [6] verilen çalışmasında bir fonksiyon tek noktada Cesaro sürekli ise lineer bir fonksiyon olduğunu göstermiştir.

Antoni ve Salat [26, Teorem 1 , 2] Spigel ve Krupnik [24, Teorem 1 ve 2] çalışmalarında matris metotları için bu yönde genel sonuçları ele almışlardır. Antoni'nin çalışmasındaki Teorem 4.2.1 esnetilmiş ve genelleştirilmiştir. G metotları üzerindeki koşullar (L_1) özelliği altında bölüm 4.2' de ele alınmıştır.

İlk başta verilen terimleri 0 ile 1 olan diziler G metotları için aşağıdaki özelliği sağlıyor ise bu dizilere ayrık diziler denir.

$(\boldsymbol{L_2})$: Terimleri 0 ve 1 olan G −yakınsak z ve z' dizileri vardır öyle ki $G(z)=\alpha$ ve $G(z')=\beta$ olmak üzere $\alpha,\beta\neq 0$ ve $\alpha+\beta\neq 1$ dir.

Teorem 4.6.1: G regüler metodu (L_2) özelliğine sahip olmak üzere her $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu bir noktada G −sürekli ise lineerdir.

İspat: Genelliği kaybetmeden f fonksiyonunun 0 noktasında G −sürekli ve $f(0)=0$ olduğu varsayılsın. (L_2) özelliğinden z ve z' iki dizi olmak üzere $z''_n = 1 - z_n + z'_n$ olarak tanımlansın. Buradan görülür ki $z''=(z''_n)$ dizisi G −yakınsaktır.

$\gamma\colon \mathrm{G}(z''_n) = 1-(\alpha+\beta)\neq 0$ olmak üzere z_n dizisi, z'_n dizisi ve z''_n dizisi ikili gruplandırıldığında ayrık dizilerdir. Herhangi iki u ve v reel sayıları alınsın.

$$x_n = -z_n(\gamma/2\alpha)u - z'_n(\gamma/2\beta)v + z''_n((u+v)/2)$$

olmak üzere

$$G(x) = -(\gamma/2)u - (\gamma/2)v + \gamma((u+v)/2) = 0$$

olduğundan x dizisi G −yakınsaktır.

f fonksiyonunun G −sürekliliğinden $G\big(f(x)\big) = f(0)\neq 0$

$$f(x_n) = z_n f(-(\gamma/2\alpha)u) + z'_n f(\gamma/2\beta)v + z''_n f((u+v)/2).$$

Burada gördük ki

$$0 = G(f(x)) = \alpha f\left(-\frac{\gamma}{2}u\right) + \beta f\left(-\frac{\gamma}{2\beta}v\right) + \gamma f\left(\frac{u+v}{2}\right) \tag{3}$$

dir. Eğer $v = 0$ ya da $u = 0$ ise (3) eşitliğinde, $\alpha f\left(-\frac{\gamma}{2\alpha}u\right) = -\gamma f\left(\frac{u}{2}\right)$ ve $\beta f\left(-\frac{\gamma}{2\alpha}v\right) = -\gamma f\left(\frac{v}{2}\right)$ olur. Bulunanlar (3) de yerine koyulup γ yerine yazılır ise her u ve v için $f\left(\frac{u}{2}\right) + f\left(\frac{v}{2}\right) = f\left(\frac{u+v}{2}\right)$ elde edilir. Eğer $u = v$ ise $f\left(\frac{u}{2}\right) = \frac{f(u)}{2}$, yani $\frac{1}{2}(f(u) + f(v)) = f\left(\frac{u+v}{2}\right)$ dir. $\mathbb{R}$ kümesinin yoğun bir alt kümesi olduğu gösterilmelidir ve her $a, b \in \mathbb{R}$ öyle ki her $u \in D$ için $f(u) = au + b$ olmalıdır. Şimdi keyfi bir $u \in R$ sayısı ve bir $x_n \in D$ dizisi seçilsin. x_n dizisi $2u$ noktasına yakınsaktır. O halde $f(u) = \frac{1}{2}(f(x_n) + f(2u - x_n)) = \frac{1}{2}(ax_n + b + f(2u - x_n))$dir.

Buradan $(2u - x_n)_n$ dizisi 0 noktasına G −yakınsaktır. $\left(f(2u - x_n)\right)_n$ dizisi içinde sonuç aynıdır. Dolayısıyla,

$$f(u) = G\left(\left(\frac{1}{2}ax_n + b + f(2u - x_n)\right)_n\right) = \frac{1}{2}(a2u + b + 0) = au + \frac{b}{2}.$$

Buradan f fonksiyonunun lineer olduğu gösterilmiş. Burada $f(0) = 0$ olduğu kabul edildiğinden $b = 0$ olur. Borsik ve Salad [27] çalışmalarında Teorem 9' da verilen sonuçtan aşağıdaki ifade verilebilir. Tek noktada G −sürekli her fonksiyon için G metodu lineer hemen hemen yakınsak bir metot olmalıdır. Daha da genel olarak Spigel ve Krupnik [24] çalışmalarında verdiği sonucun bir uzantısı olarak aşağıdaki sonuç verilebilir.

Hatırlama: Eğer hemen hemen yakınsak bir dizinin G limiti aynı ise G metoduna kuvvetli reguler bir metot denir

Sonuç 4.6.1. G kuvvetli regüler bir metot olmak üzere herhangi bir noktada G −sürekli fonskiyon lineerdir.

İspat: Teorem 4.3.1' da verilen $z = (1,0,0,1,0,0,1,0,0\ldots)$ ve $z' = (0,1,0,0,1,0,0,1,0\ldots)$ dizileri kullanıbilir bu iki dizi de hemen hemen yakınsak, yani G −yakınsaktır değeri $\frac{1}{3}$ olur.

Teorem 4.2.1' e göre yalnızca (L_1) özelliğine sahip G metotları için Teorem 4.3.1' un doğru olup olmadığı sorulabilir. Antoni ve Salat çalışmalarında gösterdiği gibi durum böyle değildir [20]. (L_1) özelliğine sahip regüler matris metodu örneği üretilebilir ve lineer olmayan sürekli $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu tek noktada G −süreklidir.

Lemma 4.6.1. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyon için her u_0 süreksizlik noktasında $\lim_{x\to\infty} |f(x)| = \infty$ olsun. O halde her u_0 noktası ve her $\lambda \neq 0$ için x ve x' dizileri her n için x_n dizisi u_0 noktasına, x'_n dizisi de u_0 noktasına yakınsaktır ve her n için $f(x_n) - f(x'_n) = \lambda$ dır.

İspat: f fonksiyonu u_0 noktasında süreksiz olsun ve $U = \{u < u_0 : f : fonksiyonu\, u\, noktasında\, sürekli\}$ kümesi ele alınsın. Her $u \in U$ noktasının komşuluğunda f fonksiyonu sınırlı ve süreklidir. Öyleyse U kümesi açık bir kümedir. u_0 noktasının her komşuluğu U kümesi ile kesişir çünkü $\varepsilon > 0$ için $M > 0$ vardır öyle ki $\{u \in [u_0 - \varepsilon, u_0] : |f(u)| \leq M\}$ sonsuzdur. Dolayısıyla yığılma noktasına sahiptir. Bu nokta varsayımdan dolayı U kümesine aittir. Bu nedenle maksimum açık aralıklar bulunabilir $n \to \infty$ için b_n dizisi u_0 noktasına yakınsaktır tüm n ler için $b_n = u_0$, $I_n = (a_n, b_n) \subset U$ dır. O halde bir (a_n, b_n) aralığı üzerinde f fonksiyonu süreklidir ve maksimali alındığında $\lim_{x\to b_n} |f(x)| = \infty$ olur. Ortalama değer teoreminden x ve x'_n dizilerini inşa etmek kolaydır. Bununla birlikte Antoni'nin lemmasının genişletilmesi ispatlanabilir.

Teorem 4.6.2. G metodu (L_1) özelliğine sahip regüler bir metot olsun. Her $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde tek noktada G −süreklidir.

İspat: Kabul edilsin ki f fonksiyonu $u_0 \in \mathbb{R}$ olmak üzere u_0 noktasında G −sürekli olsun. İlk olarak her $x = (x_n)$ dizisi (u_0) dizisine yakınsaktır ve $f(x_n)$ dizisi de aynı değere $G-$ yakınsaktır. (L_1) özelliğinden 0 ve 1 elemanlarından oluşan bir z dizisi var ve $G(z) = \alpha \neq 0{,}1$ dir. y ve y' dizileri ile $y_n = z_n s_0 + (1 - z_n) x_n$ ve $y'_n = z_n x_n + (1 - z_n) t_n$ burada $s_0 = ((v_0 - (1-\alpha)u_0)/\alpha)$ ve $t_0 = ((v_0 - \alpha u_0)/(1-\alpha))$ dır.

O zaman $(z_n x_n - z_n u_0)_n$ dizisi null-sequence ve G metodunun lineerliğinden $G(y) = as_0 + (1-\alpha)v_0$ ve $G(y') = v_0$ olur yani buradan y ve y' dizileri G −yakınsaktır. O halde f fonksiyonu u_0 noktasında G −süreklidir buradan w ve w' dizilerinin $w_n = z_n f(s_0) + (1 - z_n) f(x_n)$ ve $w'_n = z_n f(x_n) + (1 - z_n) f(t_0)$ olduğu görülür. Bu diziler $f(v_0)$ dizisine G −yakınsaktır. Teorem 4.2.1' den ispatlanabilir.

O zaman $w_n + w_n' = f(x_n) + z_n(s_0) + (1 - z_n)f(t_0) =: f(x_n) + y_n''$ de $2f(v_0)$ dizisine G −yakınsaktır. Buradan $y'' = (y_n'')$ dizisi $\alpha f(s_0) + (1 - \alpha)f(t_0)$ a G −yakınsaktır. Buradan görülür ki $f(x)$ fonksiyonu G −yakınsaktır.

$$G\big(f(x)\big) = 2f(v_0) - \alpha f(s_0) - (1 - \alpha)f(t_0) \qquad (4)$$

bu değer aynı x dizileri için u_0 noktasına yakınsaktır.

Şimdi Lemma 4.6.1 de belirtilen varsayımların sağlandığı gösterilebilir. Yani her u_0 noktası f fonksiyonunun süreksizlik noktasıdır. Dolayısıyla $\lim_{x \to u_0} |f(x)| = \infty$ vardır. Diğer bir ifade ile x ve x' dizileri u_0 noktasına yakınsaktır ve $f(x_n) - f(x_n') = \lambda \neq 0$ dır. G metodunun lineerliği ve regulerliği (4) eşitliği ile çelişir. Bu nedenle f fonksiyonu herhangi bir süreksizliğe sahip olamaz. Antoni [26, Teorem 1] çalışmasında tek nokta da G −sürekliliğin lineerliği sağladığı başka bir durum için kullanmıştır. Diğer yandan Spigel ve Krupnik [24, Teorem 23] çalışmalarında regüler matris metotları için daha kuvvetli koşullar altında bu sonucu elde etmiştir ve ispat dikkatlice incelendiğinde genel regüler metotlar daha zayıf koşullar altında da geçerlidir. Durum şu şekilde ifade edilebilir;

($\boldsymbol{L_2'}$) 0 ve 1 elemanlarından oluşan G −yakınsak z ve z' dizileri vardır öyle ki $\alpha \in (0,1)$, $\beta \neq 0{,}1$ olmak üzere $G(z) = \alpha$ ve $G(z') = \beta$ $p, q \neq 0$ tamsayılar olacak şekilde $\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^p \neq \left(\frac{\beta}{1-\beta}\right)^q$ dır.

Teorem 4.6.3. (Spigel ve Krupnik) : G metodu (L_2') özelliğine sahip reguler bir metot olsun. Her $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tek noktada G −sürekli fonksiyon lineerdir.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

5.1. Sonuçlar

Bu tez çalışmasında, 4. Bölümün "4.1 G-sürekli fonksiyonlar" alt bölümünde G-sürekli fonksiyonların temel özellikleri verilmiş, ayrıca sürekli olup G-sürekli olmayan bir fonksiyon örneği verilmiştir.

"4.2. $\mathcal{G} = \mathcal{L}$ olması için bir yeterli şart" alt bölümünde bir $I \subset \mathbb{R}$ aralığında tanımlı lineer bir fonksiyonun G-sürekli olması için bir yeter koşullar verilmiştir.

" 4.3. G-sürekliliğin topolojik incelenmesi ve $\mathcal{G} = \mathcal{C}$ olması için gerekli bir koşul" alt bölümünde sürekli bir fonksiyonun G-sürekli olması için bazı topolojik koşullar incelenmiş ve eşitliğin sağlanabilmesi durumunda G-metodunun bir alt dizisel metod olması gerektiği gösterilmiştir.

"4.4. $\mathcal{G} \subset \mathcal{L}$ için yeterli bir koşul" ve "4.5 İkilem" alt bölümlerinde ise $\mathcal{L}$, $\mathcal{G}$ ve $\mathcal{C}$ fonksiyon sınıfları arasındaki ilişki farklı koşullar altında incelenmiştir.

"4.6. G-sürekliliğin tek bir noktadaki global sonuçları" alt bölümünde G-sürekli fonksiyonun yapısı hakkında bir takım bilgiler verilmiştir.

5.2. Öneriler

G bir toplanabilme metodu olmak üzere bir kümenin G-hull tanımı kullanılarak aşağıdaki fonksiyon tanımlanabilir.

$\phi_G \; : \mathrm{P}(\mathbb{R}) \to \mathrm{P}(\mathbb{R}),\;\; \phi_G(A) = \bar{A}^G$ (burada $\bar{A}^G$ ile A nın G-hull kümesi gösterilmektedir.) biçiminde tanımlanan fonksiyonu göz önüne alınsın.

Yukarıda tanımlanan ϕ_G fonksiyonunun iyi tanımlı olduğu açıktır. Dolayısıyla ϕ_G fonksiyonuna bağlı olarak aşağıdaki problemler araştırılabilir:

i) $A \subset \mathbb{R}$ keyfi bir küme olmak üzere $A \subset \bar{A}^G$ midir?

ii) $\phi_G\big(\phi_G(A)\big) = \phi_G(A)$ eşitliği sağlanır mı?

iii) $\phi_G(A \cup B) = \phi_G(A) \cup \phi_G(B)$ eşitliği sağlanır mı?

iv) $\phi_G(\emptyset) = \emptyset$ mi?

Bu sonuçlara bağlı olarak verilen bir f fonksiyonunu G-sürekli yapacak bir topoloji üretilebilir mi?

KAYNAKLAR

[1]. J. Connor, The statistical and strong p-Cesaro convergence of sequences, Analysis 8 (1988), 47-63.

[2]. O. Mucuk, T. Şahan, On G-Sequential Continuity, Filomat, 28:6,(2014),1181-1189

[3]. J.Hejduk, A. Loranty, R. Wiertelak, On J-Continuous Functions, Tatra Mt. Math. Publ.65, (2016), 49-59.

[4]. B. Hazarika, Lacunary Statistically Slowly Oscillating Continuity in Abstract Spaces, Proc. Natl. Acad. Sci., India, Sect. A Phys.Sci., (2017)

[5]. T. B Iwinski, Some remarks on Toeplitz methods and continuity, Comment. Math. Prace Mat. 16 (1972), 37-43.

[6]. R. C. Buck, Solution of problem 4216, Amer. Math. Monthly 55 (1948), 36.

[7]. H. Çakallı, Computers and Mathematics with Applications 61 (2011) 960-965.

[8]. H. Çakallı ve O. Mucuk, Revista De La Union Mathematica Argetina Vol. 54, No.2, (2013), 101-109.

[9]. H. Çakallı ve On G-continuity, Computers and Mathematics with Applications 61 (2011) 313-318.

[10]. H. Çakallı ve O. Mucuk, Lacunary Statistically Upward and Downward Half Quasi-Cauchy Sequences, Journal of Mathematical Analysis, Volume 7 Issue 2 (2016), 12-23.

[11]. S. Akduman, C. Özel ve A. Kılıçman, Some Remarks On I-Ward Continutiy, Dokuz Eylül University, Facuty of Sience Department of Mathematics, 35160

[12]. H. Çakallı ve M. Albayrak, New Type Continuities via Abel Convergence, Hindawi The Scientific Word Journal, Volume, 2014, Article ID 398379, 6.

[13]. Kızmaz, H. (1993) Fonksiyonel Analize Giriş. Trabzon: Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi

[14]. Niven I. And Zuckerman H.S., An Introduction to the Theory of Numbers, John Wiley-Sons, Inc, New York, (1960).

[15]. H. Fast, H., Sur la convergence statistique Collg.Math.2 (1951), 241-244.

[16]. J. A. Fridy, On statistical convergence, Analysis, 5, (1985) 301-313

[17]. J.S Connor, Two valued measures and summability, Analysis 10 (1990), 373-385.

[18]. I. J. Maddox, Elements of functional analysis, Cambridge University Press, Cambridge, 1970.

[19]. H.Robbins, Problem 4216, Amer. Math. Monthly 53 (1946), 470-471.

[20]. J. Antoni and T. Salat, On the A-continuity of real functions, Acta Math. Univ. Comenian. 39 (1980), 159-164.

[21]. E.C. Posner, Summability-preserving functions, Proc. Amer. Math. Soc. 12 (1961), 73-76.

[22]. G.G. Lorentz, A contribution to the theory of divergent sequences, ActaMath. 80 (1948), 167-190.

[23]. I.J. Schoenberg, The integrability of certain functions and related summability methods, Amer. Math. Monthly 66 (1959), 361-375.

[24]. E. Spigel and N. Krupnik, On the A-continuity of real functions, J. Anal. 2 (1994), 145-155.

[25]. K. Zeller and W. Beekmann, (1970), *Theorie der Limitierungsverfahren*, 2nd ed., Springer, Berlin.

[26]. J. Antoni, On the A-continuity of real function II, Math. Slovaca 36 (1986),283-288.

[27]. J. Bors´ik and T. Sal´at, On F-continuity of real functions, Tatra Mt. Math. Publ. 2 (1993), 37-42.

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı **:**Merve ÇETİNKAYA

Doğum Tarihi **:**15/07/1995

E-mail **:**mercetkay@gmail.com

Öğrenim Durumu **:**

Derece	**Bölüm/Program**	**Üniversite**	**Yıl**
Lisans	MATEMATİK	MERSİN ÜNİVERSİTESİ	2017
Yüksek Lisans	MATEMATİK	MERSİN ÜNİVERSİTESİ	2020