

T.C.
GEBZE TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İKİ BOYUTLU ELEKTROMANYETİK SAÇILMA
PROBLEMLERİ İÇİN ÖZYİNELEMELİ T-MATRİSİ YÖNTEMİ VE
REGÜLERLEŞTİRİLMESİ

MURAT ENES HATİPOĞLU
YÜKSEK LİSANS TEZİ
ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

GEBZE
2020

T.C.
GEBZE TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İKİ BOYUTLU ELEKTROMANYETİK
SAÇILMA PROBLEMLERİ İÇİN
ÖZYİNELEMELİ T-MATRİSİ YÖNTEMİ VE
REGÜLERLEŞTİRMESİ

MURAT ENES HATİPOĞLU
YÜKSEK LİSANS TEZİ
ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

DANIŞMANI
DOÇ. DR. FATİH DİKMEN

GEBZE
2020

T.R.
GEBZE TECHNICAL UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

**RECURSIVE T-MATRIX METHOD AND ITS
REGULARIZATION FOR TWO
DIMENSIONAL ELECTROMAGNETIC
SCATTERING PROBLEMS**

MURAT ENES HATİPOĞLU
**A THESIS SUBMITTED FOR THE DEGREE OF
MASTER OF SCIENCE**
DEPARTMENT OF ELECTRONIC ENGINEERING

THESIS SUPERVISOR
ASSOC. PROF. DR. FATİH DİKMEN

GEBZE
2020

GTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 26/06/2020 tarih ve 2020/31 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından 03/07/2020 tarihinde tez savunma sınavı yapılan Murat Enes HATİPOĞLU'nun tez çalışması Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

JÜRİ

ÜYE

(TEZ DANIŞMANI)

:Doç. Dr. Fatih DİKMEN

ÜYE

:Dr. Öğr. Üyesi Yücel ENGİNER

ÜYE

:Doç. Dr. Fatih ERDEN

ONAY

Gebze Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun

...../...../..... tarih ve/..... sayılı kararı.

ÖZET

Bu çalışmada yarım yüzyılı aşkın sürede çokça çalışılan, genişletilmiş sınır koşulları yöntemini (sıfır alan yaklaşımını) temel alan özyinelemeli T matrisi yöntemi ile iki boyutta çok saçıcı ve çok katmanlı elektromanyetik saçılma veya nüfuz problemlerinde bilinmeyen alanlara dair çözümlerin nümerik olarak aranması tartışılacaktır. Yokoluş teoremi uyarınca elde edilen integral gösterimlerde Green fonksiyonunun ve alanların silindirik harmoniklere açılması ile ortaya çıkan, gelen alanın bilinen genlik vektörünü saçılan ve içeri nüfuz eden alanın bilinmeyen genlik vektörüne bağlayan bir matris gösterimi T matrisi bakış açısıyla incelenecektir. Bu bakış açısı çok saçıcı ve çok katmanlı senaryolar için özyinelemeli bir algoritma ile genişletilecek ve özyinelemeli T matrisi ilişkilerindeki tersi alınan T matrislerin kötü koşullu doğası tartışılacaktır. Ardından çözümlerin nümerik olarak güvenli olabilmeleri adına bu kötü koşulluluğun düzeltilmesi için regülerleştirme operatörleri kullanılarak regülerleştirilmiş bir özyinelemeli T matrisi yöntemi ortaya konulacak ve bu yöntemin çözüme olan düzeltici etkisi tartışılacaktır.

Anahtar Kelimeler: Özyinelemeli T Matrisi Yöntemi, Regülerleştirilmiş Özyinelemeli T Matrisi Yöntemi, Çok Saıcı ve Katmanlı Problemler, Sıfır Alan Yaklaşımı, Genişletilmiş Sınır Koşulları Yöntemi, Rayleigh Hipotezi

SUMMARY

In this work, searching solutions numerically for unknown electromagnetic fields in 2D multiple scatterer or multiple layered electromagnetic scattering or transition problems using Recursive T Matrix Method which has been studied extensively for more than half a century and based on the Extended Boundary Conditions Method (null field approach) will be discussed. In integral representations obtained in accordance with extinction theorem, Green function and fields can be expanded as the cylindrical harmonics. As a result of this expansion, a matrix representation connects the known amplitude vector of incident field to the unknown amplitude vector of scattered or transmitted fields is obtained. This matrix representation will be examined with T-matrix perspective. For multiple scatterer and multiple layered scenarios, the perspective will be expanded with a recursive algorithm and ill-conditioned nature of matrix inverse in recursive T matrix relationships will be discussed. Afterwards, Regularized Recursive T Matrix Method will be introduced by using regularization operators to correct the ill-conditioned nature so that the solutions can be numerically accurate and the corrective effect of this method on the solution will be also discussed.

Key Words: Recursive T Matrix Method, Regularized Recursive T Matrix Method, Multiple Scatterer and Layer Problems, Null Field Approach, Extended Boundary Conditions Method, Rayleigh Hypothesis

TEŞEKKÜR

Lisans eğitimimin ortalarından itibaren akademik bilgisi, tecrübesi ve emeğiyle beni yetiştiren, yüksek lisans eğitimimde ve akademik hayatımda da desteğini ve yardımlarını esirgemeyip bu çalışmanın oluşmasının yolunu açan kıymetli danışman hocam Doç. Dr. Fatih DİKMEN'e

Bilgi ve tecrübelerini benimle paylaşarak yol gösteren, eğitim ve akademik hayatımda yardımlarından istifade etmiş olduğum ve manevi desteklerini de esirgemeyen kıymetli hocam Dr. Emrah SEVER'e,

Hayat boyu her anımda maddi ve manevi vermiş oldukları desteklerinden ötürü hakları hiçbir zaman ödenemeyecek olan saygıdeğer babam Ali HATİPOĞLU'na, annem Ümit HATİPOĞLU'na, kardeşim Merve Hande HATİPOĞLU'na,

Bu süreçte hep yanımda olan, neşesi ile renk katan, entelektüel bilgi düzeyi ile ufkumu açan ve manevi desteklerini her zaman yanımda hissettiğim kıymetli Gökçe Nur İRHAN'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	v
SUMMARY	vi
TEŞEKKÜR	vii
İÇİNDEKİLER	viii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	x
ŞEKİLLER DİZİNİ	xi
TABLOLAR DİZİNİ	xiii
1. GİRİŞ	1
1.1 Tezin Amacı, Katkısı ve İçeriği	2
2. YÜZEY İNTEGRAL DENKLEMLERİ	4
2.1 Skaler Dalga Denklemi	4
2.2 İntegral Gösterimlerin İki Boyutta İncelenmesi	10
2.3 Genişletilmiş Sınır Koşulları Yöntemi	19
2.4 Rayleigh Hipotezi Yöntemi	29
3. İKİ BOYUTTA ÖZYİNELEMELİ T MATRİSİ YÖNTEMİ	34
3.1 Çoklu Saçıcılardan Saçılma	35
3.1.1 Tek Saçıcılı Durum	35
3.1.2 İki Saçıcılı Durum	42
3.1.3 N Saçıcılı Durum	50
3.2 Çok Katmanlı Saçıcılardan Saçılma	61
3.2.1 Tek Katmanlı Durum	61
3.2.2 İki Katmanlı Durum	66
3.2.3 N Katmanlı Durum	72
4. İKİ BOYUTTA REGÜLERLEŞTİRİLMİŞ ÖZYİNELEMELİ T MATRİSİ YÖNTEMİ	78
4.1 Tek Saçıcılı/Katmanlı Durum	78
4.2 Çok Saçıcılı Durum	85
4.3 Çok Katmanlı Durum	90
5. NÜMERİK SONUÇLAR	97

5.1 Çok Saçıcı Durum	97
5.2 Çok Katmanlı Durum	105
6. SONUÇ VE GELECEKTE İŞLENECEKLER	108
KAYNAKLAR	109
ÖZGEÇMİŞ	112
EKLER	113



SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

<u>Simgeler ve</u> <u>Kisaltmalar</u>	<u>Açıklamalar</u>
∇	: Nabla operatörü
∇^2	: Laplasyen operatörü
k	: Dalga sayısı
ϵ	: Dielektrik sabiti
μ	: Manyetik geçirgenlik
$\mathbf{r}$	: 3B gözlem noktaları
$\mathbf{r}'$	: 3B kaynak noktaları
ρ	: 2B gözlem noktaları
ρ'	: 2B kaynak noktaları
$\hat{\mathbf{n}}$	: Normal vektör
G	: Green fonksiyonu
ψ_n	: Giden dalga fonksiyonu
$\Re g \psi_n$	: Duran dalga fonksiyonu
$\Re g$	: Regüler kısım
$\bar{\beta}_{ij}$	: Dönüşüm matrisi (duran-duran veya giden-giden)
$\bar{\alpha}_{ij}$	: Dönüşüm matrisi (giden-duran)
$\bar{\mathbf{T}}_{i(1)}$	: İzole-saçıcı T matrisi
$\bar{\mathbf{T}}_{i(N)}$	: N-saçıcı T matrisi
$\mathbf{f}$	: Saçılan alanın genlik vektörü
$\mathbf{a}$	: Gelen alanın genlik vektörü
TM	: Teğet Manyetik
TE	: Teğet Elektrik
YİD	: Yüzey İntegral Denklemleri
GSK	: Genişletilmiş Sınır Koşulları
ÖTMY	: Özyinelemeli T Matrisi Yöntemi
R-ÖTMY	: Regülerleştirilmiş – Özyinelemeli T Matrisi Yöntemi

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Sekil No:</u>	<u>Sayfa</u>
2.1 : Yüzey integral denklemleri ile incelenen kaynakların saçıcının dışında bulunduğu iki bölgeli problem.	4
2.2 : Yüzey integral denklemleri ile incelenen, kaynakların saçıcının içinde bulunduğu iki bölgeli problem.	8
2.3 : Boş uzayda bir silindirik saçıcı.	10
2.4 : Alanların z eksenine dik geldiği durumda yüzey integral denklemlerinin iki boyuta indirgenmesi ile incelenen iki bölgeli problem.	11
2.5 : Gelen alan kaynağının C_∞ eğrisinin ötesinde olduğu durumda iki boyutta ele alınan iki bölgeli problem.	13
2.6 : Gelen alan kaynağının C eğrisinin içinde olduğu durumda iki boyutta ele alınan iki bölgeli problem.	18
2.7 : Dışarıdan uyarma durumunda genişletilmiş sınır koşulları yöntemi için saçının içinde ve dışındaki yüzeyler ve bölgeler.	19
2.8 : İçeriden uyarma durumunda genişletilmiş sınır koşulları yöntemi için saçının içinde ve dışındaki yüzeyler ve bölgeler.	25
3.1 : k_0 dalga sayılı ortamda bulunan bir silindirik saçıcıdan saçılma problemi.	35
3.2 : k_0 dalga sayılı ortamda iki silindirik saçıcıdan saçılma problemi.	41
3.3 : k_0 dalga sayılı ortamda N tane silindirik saçıcı.	50
3.4 : Dışarıdan gelen dalganın duran dalgalar olduğu durumda k_0 dalga sayılı ortamda bulunan bir silindirik saçıcı için tek arayüz problemi.	60
3.5 : Saıcının içerisinden gelen dalganın dışarıdan dalgalar olduğu durumda k_0 dalga sayılı ortamda bulunan bir silindirik saçıcı için tek arayüz problemi.	62
3.6 : k_0 dalga sayılı ortamda bulunan iki katmanlı bir silindirik saçıcıdan saçılma problemi.	66
3.7 : k_0 dalga sayılı ortamda bulunan N katmanlı bir silindirik saçıcıdan saçılma problemi.	72
5.1 : 9 silindirik saçıcılı problem.	98
5.2 : $M = 10$, $P = 160$ için saçılan alanın genliğinin gözlem noktalarına göre değişiminin LCDS, ÖTMY ve R-ÖTMY ile ele alınması.	99

5.3 : $M = 70, P = 160$ için saçılan alanın genliğinin gözlem noktalarına göre değişiminin LCDS ve R-ÖTMY ile ele alınması.	100
5.4 : $M = 70, P = 160$ için saçılan alanın genliğinin gözlem noktalarına göre değişiminin ÖTMY ile ele alınması.	101
5.5 : $P = 160$ için $\mathbf{Y}_{N+1}^{\text{REG}}$ matrislerinin koşullanma sayıları grafiği.	103
5.6 : $P = 160$ için $\mathbf{Y}_{N+1}$ ve $\mathbf{Y}_{N+1}^{\text{REG}}$ matrislerinin koşullanma sayıları grafiği.	104
5.7 : 3 silindirik katmanlı problem.	105
5.8 : $M = 10, P = 160$ için katmanlardan içeri geçen alanların katsayıları.	106
5.9 : $M = 10, P = 160$ için katmanlardan saçılan alanların katsayıları.	106
5.10 : $P = 160$ için $\mathbf{M}_{i+1-}$ ve $\mathbf{M}_{i+1-}^{\text{REG}}$ matrislerinin koşullanma sayıları grafiği.	107



TABLÖLAR DİZİNİ

<u>Tablo No:</u>	<u>Sayfa</u>
5.1: $M = 10, P = 160$ için $\mathbf{Y}_{N+1}$ ve $\mathbf{Y}_{N+1}^{\text{REG}}$ matrisleri için koşullanma sayıları.	100
5.2: $M = 70, P = 160$ için $\mathbf{Y}_{N+1}$ ve $\mathbf{Y}_{N+1}^{\text{REG}}$ matrisleri için koşullanma sayıları.	103



1. GİRİŞ

Monokromatik elektromanyetik saçılma problemleri için modern çözümlerin başında, Maxwell denklemlerini ve ilgili Helmholtz denklemini sağlayan elektromanyetik alanların, saçıcı yüzeylerinin ayırdığı uzayda yüzey eşdeğerlik ilkesi uyarınca kurulan yüzey integral denklemleri (YİD) aracılığıyla bulunmasına yönelik çabalar yer almaktadır. Bu yaklaşım ile kurulan, yüksek frekanslardaki ve elektriksel olarak büyük boyutlu cisimlerin konu olduğu saçılma problemlerinin dahi hızlı çözümlerini mümkün kılan çok seviyeli hızlı çok-kutup yöntemi (ÇSHÇY) en çok başvuru alan ve üzerinde çalışılan yöntem olma özelliğini sürdürmektedir.[1] Yine de çoklu cisimlerin saçtığı alanlar söz konusu olduğunda yarım yüzyılı aşkın bir geçmişe sahip başka bir yöntem günümüzde ilgi ve araştırma konusu olmaya devam etmektedir. İlk olarak Waterman tarafından [2] ve [3]'de temelleri ortaya konulan T Matrisi yöntemi tek, çoklu veya bileşik parçacıklardan elektromanyetik dalga saçılma problemlerinin çözümünde etkin ve güçlü bir yöntem haline gelmiştir.

Saçılma özelliklerinin modellenmesi [4],[5] uzaktan algılama, radar metrolojisi gibi alanlarda parçacık veya yüzeylerden saçılma problemleri önem arz etmekte olup dolayısı ile bu saçılma problemlerine ilişkin isabetli çözümlerin elde edilmesi için problemin analitik olarak iyi bir şekilde ele alınması ve nümerik olarak güçlü bir yaklaşım kullanılması gerekmektedir.

1965'den sonra yapılan bu güçlü teknik üzerindeki çalışmaların ve pratik uygulamaların içerildiği kapsamlı bir literatür derlemesi 1988 yılına kadar uzanmaktadır [6]. Bu derleme 151 referans içermektedir. Ardından bu yöntemle ilgili çalışmaların yer aldığı, 2004 yılında yapılan önemli bir literatür derlemesi [7] T Matris yönteminin bir çok kullanım alanını ve çoklu saçılma problemlerinde güçlü bir yöntem olduğunu gözler önüne sermektedir. 2004 yılında yapılan bu literatür derlemesine 2012 yılında yeni çalışmalar [8]'de ve 2017 yılında [9]'de eklenmiştir. Son yıllarda yapılan T Matris yöntemi ile ilgili çalışmalarda plazmonik uygulamalarının [10] yanı sıra T Matrisi yönteminin nümerik kararlılığı [11], [12], çoklu saçılma problemleri için özyinelemeli T Matrisi yöntemi algoritmalarının modifikasyonu [13], [14], yöntemin optik saçılma problemleri için Geometrik Optik gibi optik saçılma yöntemleri ile kıyaslanması [15] ele alınmıştır.

1.1. Tezin Amacı, Katkısı ve İçeriği

Önceki bölümde değinilen literatür bakımından T Matris yönteminin ne denli vazgeçilemez vasıfta olduğu anlaşılmaktadır. Bir sınır integral denkleminin çözümü için kullanılan bir yöntem gözüyle T matrisi yönteminin aşağıda değinilecek olan çok belirgin iki problemine rağmen 2004 yılında alınan bir inisiyatifle başlamış en güncel literatür gözden geçirmesi geleneğinin sekizinci güncellemesi, içinde bulunduğumuz senenin başında literatürde kendine yer bulmuştur[16]. Gözden geçirmelere göre güncel T matrisi uygulamalarının neredeyse hepsi üç boyuttaki makroskopik elektromanyetik saçılma problemlerine yönelik olup, buradan benzer ölçekteki iki boyutlu (silindirik) problemlerin güncelliğini yitirdiği sonucu çıkarılabilir. Ancak iki boyutta T matrisi yönteminin kullanımı [17]'deki gibi fotonik kristal yapılarının ve metamateryallerin analizi gibi güncel uygulamalarda güncel bir yöntem olan hızlı çok-kutup yöntemi (HÇY) ile hızlandırılmasıyla kendini göstermektedir. [18]'de ise içerisinde birden çok silindirik yapı olan bir kapsayıcı silindirik saçıcıdan saçılım ele alınmış ve T matrisi yöntemiyle çözüm aranan bu türden yapıların analizinin pratik uygulamalarına değinilmiştir. Bu tezde, iki boyuttaki Helmholtz denklemini ve ilgili sınır koşulunu sağlayan saçılan alanların aranmasında kullanılan ve yukarıda bahsedilen uygulamalarda gerek avantajlarından gerek pratikliğinden ötürü tercih edilen T matrisi yöntemine dair iki boyutta yapılabilecek ve bunların üç boyuta yönelik genelleştirilmelerine işaret edebilecek kavramsal iyileştirmeler bakımından yararlı sonuçlar çıkarılması amaçlanmaktadır.

T Matrisi yönteminde elektromanyetik saçılma problemleri için aranan çözümler, Helmholtz denkleminin iki boyutta dairesel silindirik, üç boyutta küresel harmoniklerden oluşan ve ilkesel olarak belirli bir koordinat sisteminin gerektirdiği harmoniklerden ibaret de olabilecek öz çözümleri türündendir. Yukarıda anılan, Helmholtz denkleminin ilişkili YİD, ilgili yüzeyin ayırdığı uzayda toplam alanın sıfır olduğu hacimde yazılan sıfır alan (null field), genişletilmiş sınır koşulları yöntemi (Extended Boundary Condition Method - EBCM) veya yokoluş teoremi (extinction theorem) yaklaşımı temeline dayanır. Keyfi bir yüzeyden oluşan cisim sınırının kapsadığı sıfır alanlı hacimde uygun koordinata oturan kanonik yüzeyin ötesinde YİD aracılığıyla aranan yüzey akımı yoğunluklarının yukarıda değinilen harmonikler cinsinden bir sonsuz seri ile ifade edilebileceği varsayılmaktadır. Bu keyfi yüzey

anılan kanonik yüzeyden ibaret olduğunda (iki boyutta daire, üç boyutta küre) dahi T matrisi yönteminin kötü koşullu bir lineer denklem sistemi üretmesi ve bunun regülerleştirilmesi gereksinimi [19] söz konusudur. Bu regülerleştirme sayesinde söz konusu matris ile ikinci türden iyi koşullu bir lineer denklem sistemine varılmaktadır.

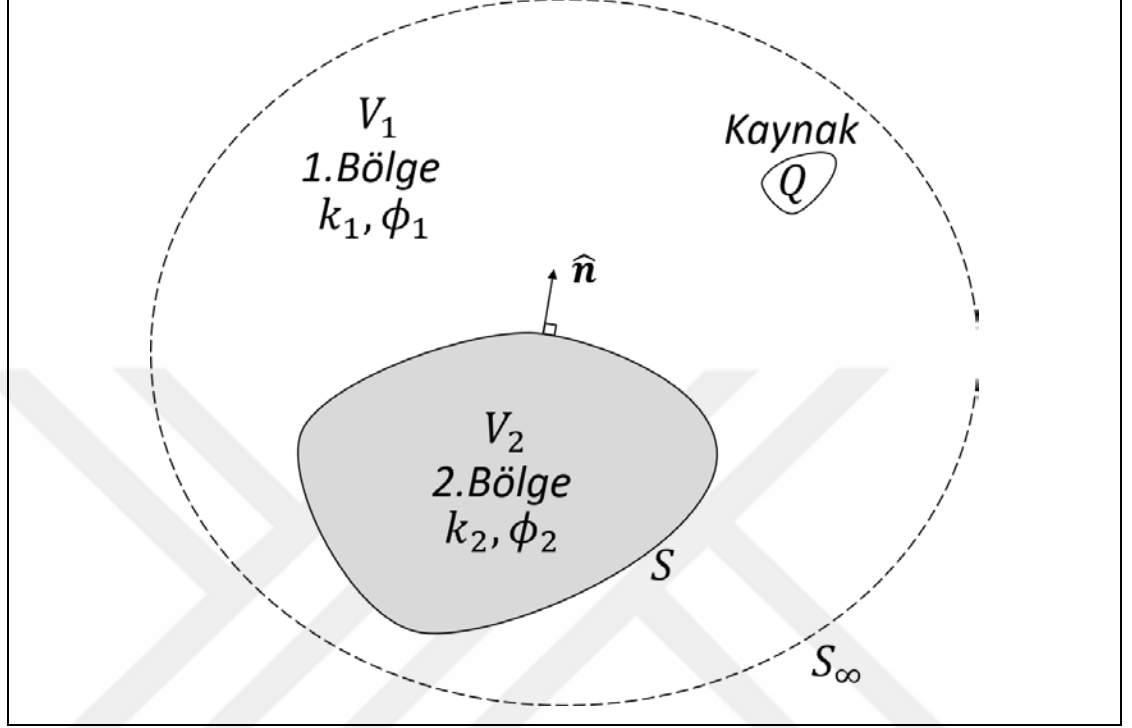
YİD'in, ilgili sınırdaki momentler yöntemi (MY) gibi yöntemlerle gerçekleştirilen çözümlerinin, eşdeğerlik ilkesine göre sıfır alanda yazılan T Matrisi yöntemi ile ilişkisinin çalışılması bu konuda yapılacak iyileştirmelerin anahtarıdır [20]. Yukarıda anılan regülerleştirmenin de özü benzer bir bakış açısını gerektirmiştir [19]. T Matrisi ile ilgili literatürde bu sistemin regülerleştirme öncesinde kötü koşullu olmasının sebeplerinden birinin kullanılan YİD'in Fredholm birinci türden integral denklemleri olması olduğuna işaret edilmiştir [21]. Bu sebeplerden bir diğeri de kanonik yüzey için yapılmış açılımın bu yüzeyden farklı olan bir yüzeyin üzerindeki bilinmeyen belirlenmesinde kullanılıyor olması olarak geçmektedir [22]. Bu da regülerleştirme öncesinde T Matrisi yöntemi için ne sınırlı tersi olan bir operatör ile çalışıldığına ne de yüzey için baz ve test fonksiyonları bakımından en uygun seçimlerin yapıldığına işaret eder. Yukarıda anılan regülerleştirme, denklem sisteminin kötü koşulluluğunu ortadan kaldırabilir ve sınırlı tersi olan bir operatör ile çalışma imkanı sunabilir, ancak cismin yüzeyinin kanonik yüzeyden olan sapmasına ilişkin bir düzeltme getiremez.

Bu tezde kanonik yüzeylerden saçılma için geçerli olan regülerleştirmeyi, keyfi cisimlerden saçılma analizi için bilinmeyenlerin biçimi bakımından aynı yaklaşımı kullanan T Matrisi yöntemine uygulamak amacına yönelik bir adım atılmaktadır. Bu sayede iki boyuttaki Helmholtz denkleminin çözümleri için özyinelemeli T Matrisi yönteminin dönüştürülmesi ve bunun sonuçlarının yukarıda anılan kötü koşulluluğa ilişkin sebepler ve kazanılan iyileştirmeler bakımından tartışılması hedeflenmektedir.

Yokoluş teoremi uyarınca çoklu cisimlerden saçılma incelenirken sıfır alan bu cismin yüzeyinin kapsadığı hacimde oluşur. Çoklu saçıcı (veya çok katmanlı) bir yapı bakımından cismin sınırladığı bölge ile ilgilenilir ve bu durumda sıfır alan cismin içinde bulunduğu uzay olur. Kanonik yüzeyler için yan yana (veya iç içe) iki dairesel silindirin oluşturduğu saçıcı mekanizması için geliştirilen regülerleştirme [19], çoklu (veya katmanlı) yapılardan yani yan yana (veya iç içe) keyfi biçimde sınırlardan saçılma problemleri için ilgili sıfır alan kurallarına uygun biçimde uyarlanabilir. Bu durum için de özyinelemeli T Matrisi algoritmasının iyi koşullu hale getirilmesi yukarıdaki anılan kapsamda ele alınacaktır.

2. YÜZEY İNTEGRAL DENKLEMLERİ

2.1. Skaler Dalga Denklemi



Şekil 2.1: Yüzey integral denklemleri ile incelenen kaynakların saçıcının dışında bulunduğu iki bölgeli problem.

Şekil 2.1'deki gibi iki bölgeli bir saçılma problemi için skaler Helmholtz denklemini ele alalım. 1.bölgede toplam alan için geçerli denklem,

$$(\nabla^2 + k_1^2)\phi_1(\mathbf{r}) = Q(\mathbf{r}) \quad (2.1)$$

olup, 2.bölge için de,

$$(\nabla^2 + k_2^2)\phi_2(\mathbf{r}) = 0 \quad (2.2)$$

denklemini yazılır. Böylece 1. ve 2. bölgeler için Green fonksiyonları aşağıdaki denklemleri sağlar:

$$(\nabla^2 + k_1^2)G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (2.3)$$

$$(\nabla^2 + k_2^2)G_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (2.4)$$

(2.1) denkleminin $G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ ile, (2.3) denkleminin $\phi_1(\mathbf{r})$ ile çarpılmasıyla elde edilen ifadeler birbirinden çıkarılır ve 1.bölge üzerinden hacim integrali alınırsa,

$$\int_{V_1} \{G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla^2 \phi_1 - \phi_1 \nabla^2 G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\} dV \quad (2.5)$$

$$= \int_{V_1} G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') Q(\mathbf{r}) dV + \phi_1(\mathbf{r}'), \quad \mathbf{r}' \in V_1$$

denklemini elde edilir. Ayrıca (2.5)'in sol yanındaki integralin içerisindeki terim $\nabla \cdot$ parantezine alınırsa,

$$G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla^2 \phi_1 - \phi_1 \nabla^2 G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (2.6)$$

$$= \nabla \cdot [G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla \phi_1 - \phi_1 \nabla G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')]]$$

elde edilir. (2.6) denkleminin sağ tarafındaki ifadeyi (2.5) denkleminde yerine yazıp diverjans teoremi uygulandığında (2.5) denklemini,

$$\int_{S+S_\infty} \{G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla \phi_1 - \phi_1 \nabla G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \quad (2.7)$$

$$= \int_{V_1} G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') Q(\mathbf{r}) dV + \phi_1(\mathbf{r}'), \quad \mathbf{r}' \in V_1$$

denklemine dönüşür. (2.7) denkleminin sağ yanındaki integral terimi $Q(\mathbf{r})$ 'den kaynaklanan “gelen alan” dır ve,

$$\phi_g(\mathbf{r}') = - \int_{V_1} G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') Q(\mathbf{r}) dV \quad (2.8)$$

olarak tanımlanır. İlgili bölgede (2.3) denklemini ve radyasyon koşulunu sağlayan bir Green fonksiyonu seçimiyle S_∞ üzerinden alınan integral, radyasyon koşulunun marifetiyle kaybolur. Ayrıca, böyle bir Green fonksiyonu için karşılıklılık teoremi uyarınca,

$$G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G_1(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \quad (2.9)$$

yazılabilir. (2.8), (2.9) denklemleri kullanılarak ve (2.7) denklemindeki $\mathbf{r}$ ve $\mathbf{r}'$ 'nin yerleri değiş-tokuş edilerek,

$$\begin{aligned} \phi_g(\mathbf{r}) - \int_S \{G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla' \phi_1(\mathbf{r}') - \phi_1(\mathbf{r}') \nabla' G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\} \cdot \hat{\mathbf{n}}' dS' \\ = \phi_1(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in V_1 \end{aligned} \quad (2.10)$$

elde edilir. Eğer (2.5) denkleminde $\mathbf{r}' \notin V_1$ ise, yani $\mathbf{r}'$ integralin alınmadığı V_2 bölgesinin bir elemanıysa (2.5) denkleminin sağ yanında bulunan toplam alan terimi 0 olur. Bu nedenle (2.10) denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir,

$$\begin{aligned} \phi_g(\mathbf{r}) - \int_S \{G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla' \phi_1(\mathbf{r}') - \phi_1(\mathbf{r}') \nabla' G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\} \cdot \hat{\mathbf{n}}' dS' \\ = \begin{cases} \phi_1(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in V_1 \\ 0, & \mathbf{r} \in V_2 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Yukarıdaki denklem Huygens ilkesini akla getirmekte olup, gözlem noktası $\mathbf{r} \in V_1$ 'de iken toplam alan $\phi_1(\mathbf{r})$, gelen alan ϕ_g ve S yüzeyi üzerindeki yüzey kaynaklarından ileri gelen alan katkılarından ibarettir. Lakin gözlem noktası V_2 'de ise, S yüzeyi üzerindeki yüzey kaynakları, gelen alanı tamamen etkisiz hale getiren ve 2 bölgesindeki toplam alanı 0 yapan bir alan oluştururlar. Bu durum yokoluş

teoreminin temelini oluşturur. (2.11) denklemindeki $\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \phi_1$ ve ϕ_1 yüzey kaynakları gibi davranırlar.

(2.11) denklemi çıkarılırken uygulanan yaklaşım 2.bölge için de uygulanırsa aşağıdaki denklem elde edilir,

$$\int_S \{G_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla' \phi_2(\mathbf{r}') - \phi_2(\mathbf{r}') \nabla' G_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\} \cdot \hat{\mathbf{n}}' dS' = \begin{cases} \phi_2(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in V_2 \\ 0, & \mathbf{r} \in V_1 \end{cases} \quad (2.12)$$

Yukarıdaki denklem 2. bölgedeki toplam alanın yüzey üzerinde etki eden yüzey kaynaklarından ileri geldiğini belirtir. Bu yüzey kaynakları V_2 bölgesinde $\phi_2(\mathbf{r})$ alanını, V_1 bölgesinde 0 alan oluştururlar. Bu durum Huygens ilkesini ve yokoluş teoremini gözler önüne sermektedir.

Yokoluş teoremi uyarınca (2.11) ve (2.12) denklemlerinden toplam alanın 0 olduğu denklemler kullanılarak aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$\int_S \{G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla' \phi_1(\mathbf{r}') - \phi_1(\mathbf{r}') \nabla' G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\} \cdot \hat{\mathbf{n}}' dS' = \phi_g(\mathbf{r}) \quad (2.13)$$

$\mathbf{r} \in V_2$

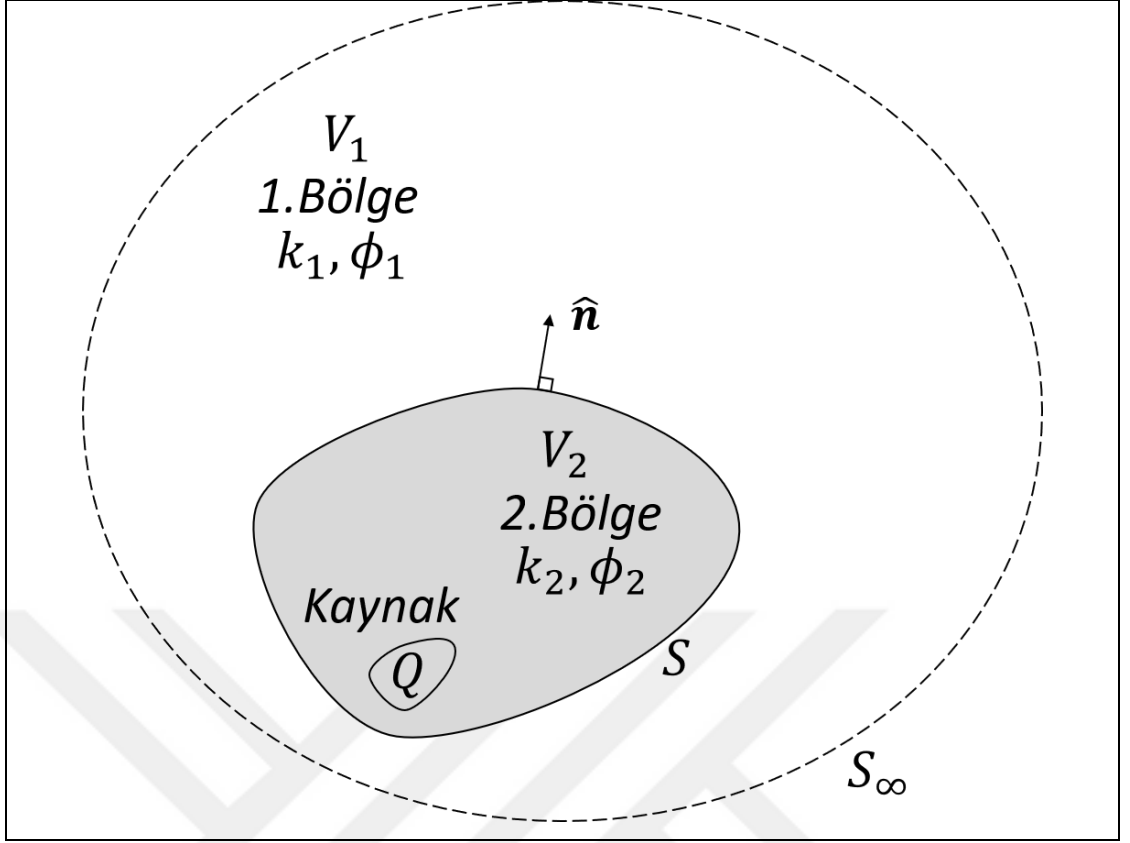
$$\int_S \{G_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla' \phi_2(\mathbf{r}') - \phi_2(\mathbf{r}') \nabla' G_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\} \cdot \hat{\mathbf{n}}' dS' = 0 \quad (2.14)$$

$\mathbf{r} \in V_1$

Eğer söz konusu iki bölgeli problemde gelen alanın kaynağı Şekil 2.2'deki gibi 2 bölgesindeyse bu durumda toplam alanların sağladığı Helmholtz denklemleri 1 ve 2 bölgeleri için,

$$(\nabla^2 + k_1^2)\phi_1(\mathbf{r}) = 0 \quad (2.15)$$

$$(\nabla^2 + k_2^2)\phi_2(\mathbf{r}) = Q(\mathbf{r}) \quad (2.16)$$



Şekil 2.2: Yüzey integral denklemleri ile incelenen, kaynakların saçıcının içinde bulunduğu iki bölgeli problem.

olur. Böylece 2 bölgesinden gelen bir alan için de yukarıda anlatılan yordam izlenerek integral gösterimler aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$\int_S \{G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla' \phi_1(\mathbf{r}') - \phi_1(\mathbf{r}') \nabla' G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\} \cdot \hat{\mathbf{n}}' dS' = \begin{cases} \phi_1(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in V_1 \\ 0, & \mathbf{r} \in V_2 \end{cases} \quad (2.17)$$

$$\phi_g(\mathbf{r}) - \int_S \{G_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla' \phi_2(\mathbf{r}') - \phi_2(\mathbf{r}') \nabla' G_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\} \cdot \hat{\mathbf{n}}' dS' = \begin{cases} \phi_2(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in V_2 \\ 0, & \mathbf{r} \in V_1 \end{cases} \quad (2.18)$$

Bu durumda yokoluş teoremi uyarınca toplam alanın 0 olduğu gösterim çifti aşağıdaki gibi olur:

$$\int_S \{G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla' \phi_1(\mathbf{r}') - \phi_1(\mathbf{r}') \nabla' G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\} \cdot \hat{\mathbf{n}}' dS' = 0 \quad (2.19)$$

$$\mathbf{r} \in V_2$$

$$\int_S \{G_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla' \phi_2(\mathbf{r}') - \phi_2(\mathbf{r}') \nabla' G_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\} \cdot \hat{\mathbf{n}}' dS' = \phi_g(\mathbf{r}) \quad (2.20)$$

$$\mathbf{r} \in V_1$$

Burada ilgili bölgede (2.3) veya (2.4) denklemini ve

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + jku \right) = 0 \quad (2.21)$$

ile verilen Sommerfeld radyasyon koşulunu sağlayan Green fonksiyonu seçimlerinden biri,

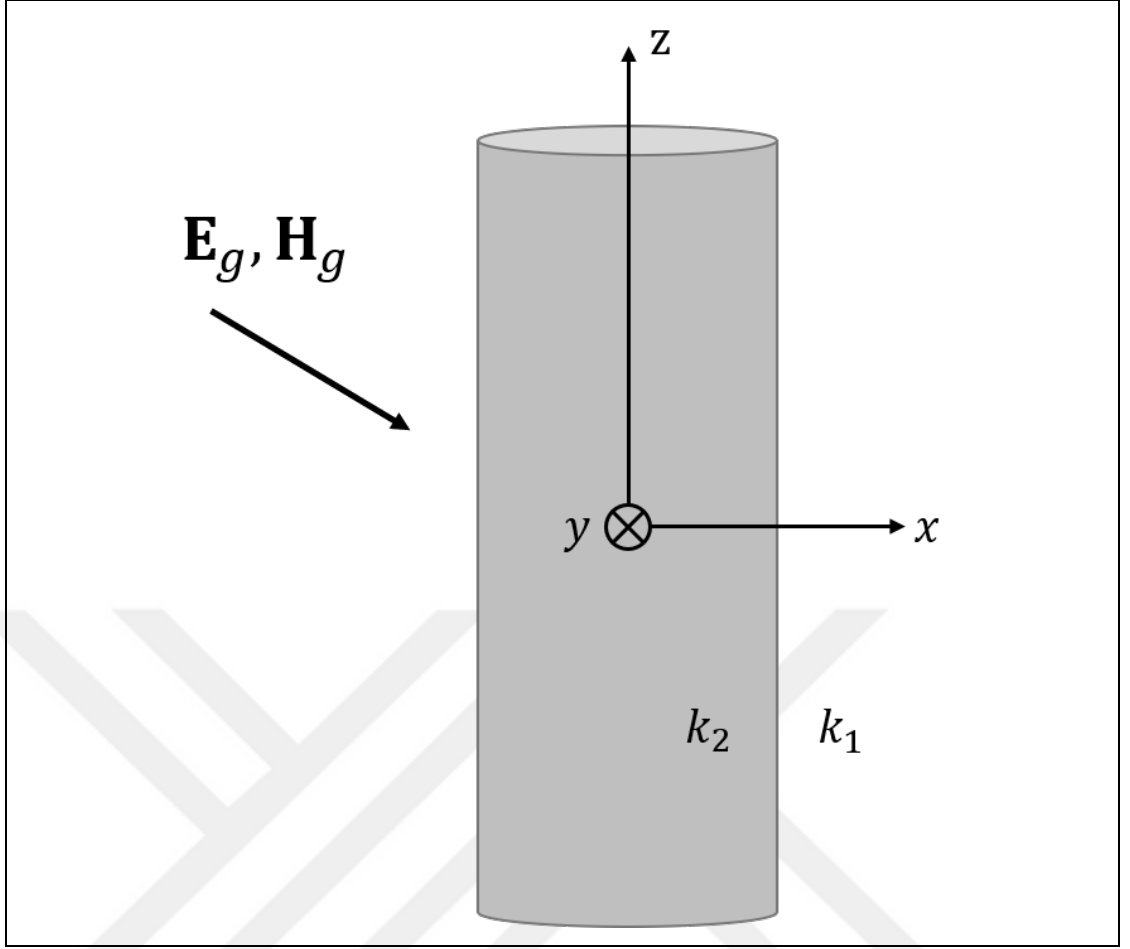
$$G_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{-jk_i|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \quad (2.22)$$

sınırlanmamış, homojen ortamın Green fonksiyonu olabilir. Yukarıdaki integral denklemlerde dört bağımsız bilinmeyen alan ifadesi bulunmakla birlikte aşağıdaki sınır koşulları yardımıyla bu dört bilinmeyen iki bilinmeyene indirgenerek çözümler aranır.

$$\phi_1(\mathbf{r}) = \phi_2(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in S, \quad (2.23)$$

$$p_1 \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \phi_1(\mathbf{r}) = p_2 \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \phi_2(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in S \quad (2.24)$$

Bu sınır koşulları uygulanmasıyla ve yukarıdaki integrallerin doğrusal bir operatör olarak değerlendirilip çeşitli nümerik yöntemlerle doğru bir biçimde ayrıklaştırılmasıyla integral denklemlere ilişkin çözümler bulunabilir.

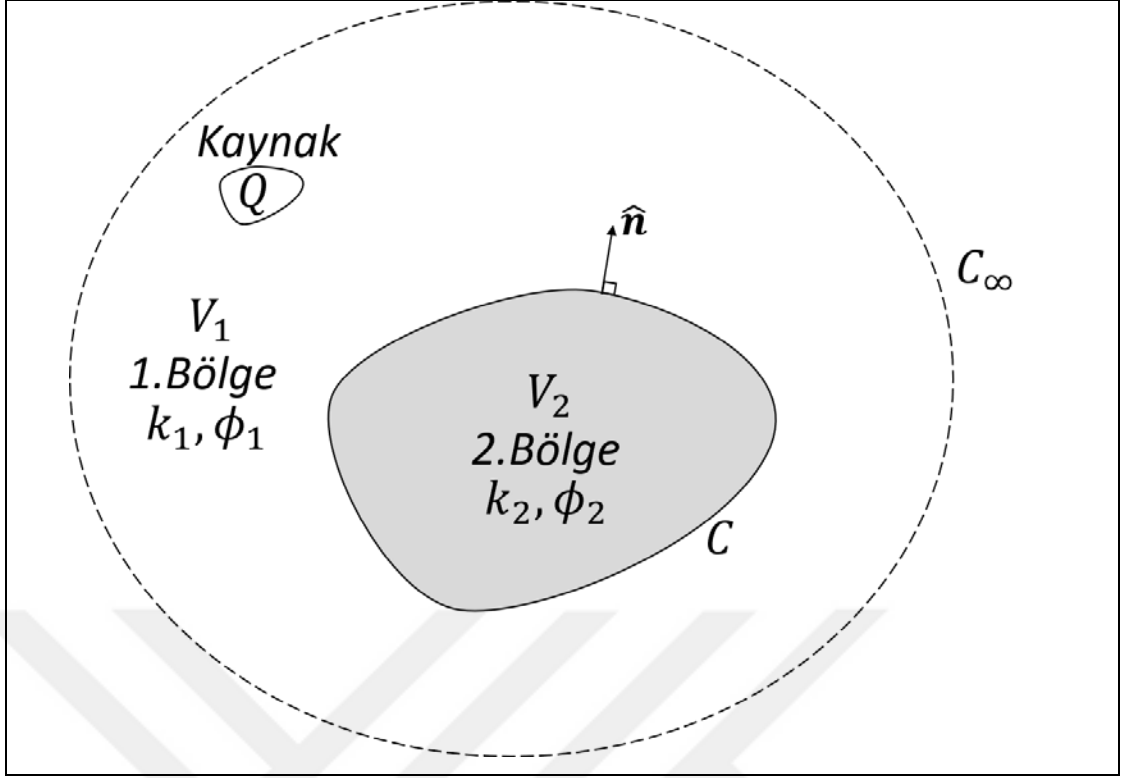


Şekil 2.3: Boş uzayda bir silindirik saçıcı.

2.2. İntegral Gösterimlerin İki Boyutta İncelenmesi

Şekil 2.3’deki gibi boş uzayda bulunan ve z yönünde tekdüze olan silindirik bir saçıcıdan elektromanyetik saçılma problemini ele alalım. Böyle bir üç boyutlu problemde alanlar $e^{jk_z z}$ bağımlı iki boyutlu alanların süperpozisyonu olarak ifade edilerek problem iki boyuta indirgenir. Eğer gelen dalganın yayılım vektörü z eksenine dik ise bu problem sadece elektrik veya manyetik alanın z bileşeninin varlığına bağlı olarak ilerleme yönüne dik düzleme teğet manyetik (TM) veya teğet elektrik (TE) olan problemlere dönüşür. Buradaki t alt indisi teğetsel bileşenleri ifade etmektedir. Bu durumda iki boyutta $\phi_1(\rho)$ ve $\phi_2(\rho)$ alanları (2.1)’e benzer biçimde

Şekil 2.4’deki gibi iki bölgeli bir saçılma problemi için aşağıdaki iki boyutlu skaler Helmholtz denklemini sağlarlar,



Şekil 2.4: Alanların z eksenine dik geldiği durumda yüzey integral denklemlerinin iki boyuta indirgenmesi ile incelenen iki bölgeli problem.

$$(\nabla_t^2 + k_1^2)\phi_1(\boldsymbol{\rho}) = Q(\boldsymbol{\rho}) \quad (2.25)$$

$$(\nabla_t^2 + k_2^2)\phi_2(\boldsymbol{\rho}) = 0 \quad (2.26)$$

Radyasyon koşulunu sağlayan iki boyutlu Green fonksiyonu $e^{j\omega t}$ zaman bağımlılığı altında,

$$G_i(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') = -\frac{j}{4} H_0^{(2)}(k_i |\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'|) \quad (2.27)$$

olarak tanımlanır ve 1 ve 2. bölgeleri için,

$$(\nabla_t^2 + k_1^2)G_1(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') = -\delta(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}') \quad (2.28)$$

$$(\nabla_t^2 + k_2^2)G_2(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') = -\delta(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}') \quad (2.29)$$

denklemlerini sağlarlar. Problem iki boyutlu olduğu için (2.5)'deki hacim integralleri yüzey integrallerine indirgenirler. Buna ek olarak (2.5) ve (2.6)'da $\mathbf{r}$ yerine $\boldsymbol{\rho}$, ∇ yerine ∇_t yazılarak ve iki boyutlu diverjans teoremi kullanılarak gelen alanın problemin tümünü çevreleyen C_∞ eğrisinin içinde, ilgilenilen C eğrisinin dışında olduğu durumda 1 bölgesi üzerinde iki boyutlu integral denklemlerin elde edilebileceği açıktır. Önceki paragrafta tanıtılan gösterilimi koruyarak ve elde edilen integral denklemlerde karşılıklılık teoremi uyarınca $\boldsymbol{\rho}$ ve $\boldsymbol{\rho}'$ yer değiştirilerek,

$$\begin{aligned} \phi_g(\boldsymbol{\rho}) - \int_C \{G_1(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') \nabla_t' \phi_1(\boldsymbol{\rho}') - \phi_1(\boldsymbol{\rho}') \nabla_t' G_1(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}')\} \cdot \hat{\mathbf{n}}' dl' \\ = \begin{cases} \phi_1(\boldsymbol{\rho}), & \boldsymbol{\rho} \in V_1 \\ 0, & \boldsymbol{\rho} \in V_2 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.30)$$

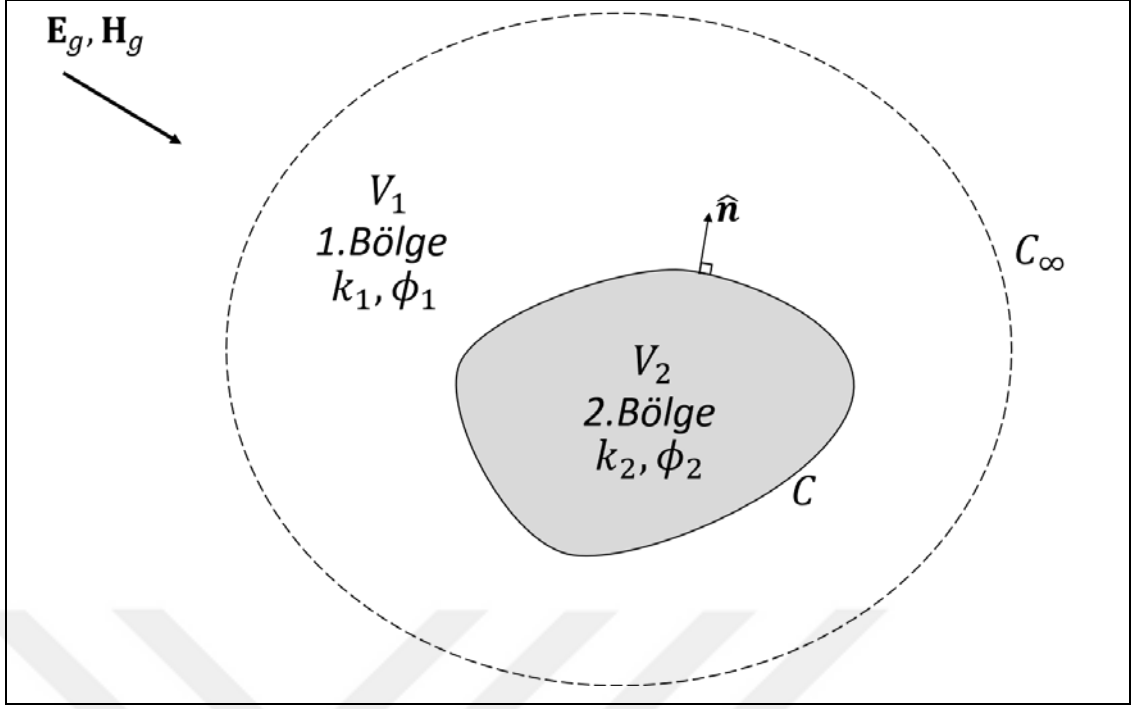
denklemini elde edilir. (2.27)'de verilen iki boyutlu Green fonksiyonu iki boyutta aşağıdaki Sommerfeld radyasyon koşulunu sağlar:

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \sqrt{\rho} \left(\frac{\partial u}{\partial \rho} + jku \right) = 0 \quad (2.31)$$

Bu sayede C_∞ üzerinden integral kaybolur ve (2.30) denkleminde varılır. Benzer biçimde 2 bölgesi için iki boyutlu integral denklemler yazılırsa,

$$\begin{aligned} \int_C \{G_2(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') \nabla_t' \phi_2(\boldsymbol{\rho}') - \phi_2(\boldsymbol{\rho}') \nabla_t' G_2(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}')\} \cdot \hat{\mathbf{n}}' dl' \\ = \begin{cases} \phi_2(\boldsymbol{\rho}), & \boldsymbol{\rho} \in V_2 \\ 0, & \boldsymbol{\rho} \in V_1 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.32)$$

elde edilir. Yukarıdaki integral denklemler Şekil 2.4'de görülebildiği üzere gelen alanın C_∞ ile belirtilen eğrinin içinde olduğu durumda da elde edilmişti. Benzer biçimde bu integral denklemler Şekil 2.5'de olduğu gibi gelen alanın kaynağının C_∞ 'un ötesinde olduğu durumda da elde edilebilir. Bu varsayımla (2.25)'deki $Q(\boldsymbol{\rho})$ sifıra eşit olur ve



Şekil 2.5 : Gelen alan kaynağının C_∞ eğrisinin ötesinde olduğu durumda iki boyutta ele alınan iki bölgeli problem.

iki boyutta $\phi_1(\rho)$ ve $\phi_2(\rho)$ alanları böylece kaynaktan bağımsız Helmholtz denklemini sağlarlar. (2.26) denkleminin $G_2(\rho, \rho')$ ile, (2.29) denkleminin $\phi_2(\rho)$ ile çarpılmasıyla elde edilen ifadeler birbirinden çıkarılarak 2.bölge üzerinden yüzey integrali alınır, iki boyutlu diverjans teoremi ve ardından karşılıklılık teoremi uygulanırsa (2.32) denklemi elde edilir. (2.32) denklemi, C sınırındaki çizgi kaynaklarının, dalga sayısı k_2 olan ortamın varlığıyla V_2 bölgesinde $\phi_2(\rho)$ alanını, V_1 bölgesinde 0 alanını üretmek için yayıldığını belirtir. (2.32) denkleminin çıkarımına benzer biçimde 1.bölge üzerinden yüzey integrali alınırsa,

$$\begin{aligned}
 & - \int_{C+C_\infty} \{G_1(\rho, \rho') \nabla_t' \phi_1(\rho') - \phi_1(\rho') \nabla_t' G_1(\rho, \rho')\} \cdot \hat{n}' dl' \\
 & = \begin{cases} \phi_1(\rho), & \rho \in V_1 \\ 0, & \rho \in V_2 \end{cases}
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

elde edilir. Burada ϕ_1 ve $\hat{n}' \cdot \nabla_t' \phi_1$ dalga sayısı k_1 olan ortamın varlığıyla V_1 bölgesinde ϕ_1 alanını, V_2 bölgesinde 0 alanını üretmek için yayılan çizgi kaynaklarıdır. Açıkça görüldüğü üzere (2.33)'deki integralin önündeki işaret

(2.32)'dekinin ters işaretlisidir. Çünkü (2.33)'deki normal vektör, C_∞ 'dan V_1 bölgesine doğru yönelen, (2.32)'deki normal vektörün ters işaretlisi olan normal vektördür. Ayrıca ϕ_1 alanı, V_1 bölgesinde gelen alan ϕ_g ve saçılan alan ϕ_s toplamına ayrılabilir. Yani,

$$\phi_1 = \phi_g + \phi_s \quad (2.34)$$

yazılabilir. Eğer saçıcı yok ise bu durumda,

$$\phi_1 = \phi_2 = \phi_g \quad (2.35)$$

olur. Yukarıdaki alan ilişkilerinin (2.32) ve (2.33) denklemlerinde kullanılması ile aşağıda konu edilecek integral gösterimlere ulaşılır.

Eğer bir saçıcı olmasaydı V_2 bölgesinin de k_1 dalga sayılı ortamla dolu olduğu düşünülürdü. Bu durumda (2.32)'de gözlem noktasının V_2 'de olduğu birinci denklemde Green fonksiyonu k_2 yerine k_1 ile ilişkili olanı ile değiştirilir ve (2.35) kullanılırsa aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\int_C \{G_1(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') \nabla_t' \phi_g(\boldsymbol{\rho}') - \phi_g(\boldsymbol{\rho}') \nabla_t' G_1(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}')\} \cdot \hat{\mathbf{n}}' dl' = \phi_g(\boldsymbol{\rho}), \quad (2.36)$$

$$\boldsymbol{\rho} \in V_2$$

(2.36) integrali C eğrisi yerine C_∞ 'da alındığında,

$$- \int_{C_\infty} \{G_1(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') \nabla_t' \phi_g(\boldsymbol{\rho}') - \phi_g(\boldsymbol{\rho}') \nabla_t' G_1(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}')\} \cdot \hat{\mathbf{n}}' dl' \quad (2.37)$$

$$= \phi_g(\boldsymbol{\rho})$$

olur. Buradaki normal vektör C_∞ 'dan içeri doğru olan vektördür. Eğer (2.37), (2.33)'deki ikinci denklemde yerine yazılır ve denklem düzenlenirse (2.36) denklemini

sağlanır. Aynı şekilde (2.37), (2.33)'deki birinci denklemde yerine yazılır ve $\phi_1 = \phi_g$ olursa aşağıdaki gösterime varılır:

$$-\int_C \{G_1(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') \nabla_t' \phi_g(\boldsymbol{\rho}') - \phi_g(\boldsymbol{\rho}') \nabla_t' G_1(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}')\} \cdot \hat{\mathbf{n}}' dl' = 0 \quad (2.38)$$

$$\boldsymbol{\rho} \in V_1$$

(2.36) ve (2.38) denklemleri, ϕ_g ve $\hat{\mathbf{n}}' \cdot \nabla_t' \phi_g$ kaynaklarının dalga sayısı k_1 olan ortamın varlığıyla V_1 bölgesinde 0 alanını, V_2 bölgesinde ϕ_g alanını oluşturduklarını ifade etmektedir.

Saçıcının varlığında (2.34) ifadesi (2.33)'deki birinci denklemde yerine yazılırsa (2.37) ve (2.38) ifadeleri kullanılarak,

$$-\int_{C+C_\infty} \{G_1(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') \nabla_t' \phi_s(\boldsymbol{\rho}') - \phi_s(\boldsymbol{\rho}') \nabla_t' G_1(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}')\} \cdot \hat{\mathbf{n}}' dl' \quad (2.39)$$

$$= \phi_s(\boldsymbol{\rho}), \quad \boldsymbol{\rho} \in V_1$$

elde edilir. (2.39) denkleminde C_∞ üzerinden alınan integral, ϕ_s ve $G_1(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}')$ 'nin radyasyon koşulunu sağlamasından ötürü kaybolur. Böylece bu integral,

$$-\int_C \{G_1(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') \nabla_t' \phi_s(\boldsymbol{\rho}') - \phi_s(\boldsymbol{\rho}') \nabla_t' G_1(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}')\} \cdot \hat{\mathbf{n}}' dl' \quad (2.40)$$

$$= \phi_s(\boldsymbol{\rho}), \quad \boldsymbol{\rho} \in V_1$$

halini alır. Öte yandan (2.34)'nın (2.33)'deki ikinci denklemde yerine yazılmasıyla ortaya çıkan ifadede (2.36)-(2.37) denklemleri kullanılırsa ve radyasyon koşulu kullanılarak C_∞ üzerinden alınan integral (2.39)'deki gibi ele alınırsa aşağıdaki integral elde edilir,

$$\int_C \{G_1(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') \nabla_t' \phi_s(\boldsymbol{\rho}') - \phi_s(\boldsymbol{\rho}') \nabla_t' G_1(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}')\} \cdot \hat{\mathbf{n}}' dl' \quad (2.41)$$

$$= 0, \quad \boldsymbol{\rho} \in V_2$$

(2.36) ve (2.38) gelen alana, (2.40) ve (2.41) ise saçılan alana ilişkin integral gösterimlerdir. Bu gösterimler geçerli oldukları bölgelere göre eşlenecek olursa (2.36) ve (2.40) denklemleri V_1 bölgesinde geçerli denklem çiftini, (2.38) ve (2.41) ise V_2 bölgesinde geçerli denklem çiftini oluşturur. Her bir denklem çifti kendi içinde toplanır ve (2.34) kullanılırsa,

$$\phi_g(\boldsymbol{\rho}) - \int_C \{G_1(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') \nabla_t' \phi_1(\boldsymbol{\rho}') - \phi_1(\boldsymbol{\rho}') \nabla_t' G_1(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}')\} \cdot \hat{\mathbf{n}}' dl' \quad (2.42)$$

$$= \begin{cases} \phi_1(\boldsymbol{\rho}), & \boldsymbol{\rho} \in V_1 \\ 0, & \boldsymbol{\rho} \in V_2 \end{cases}$$

elde edilir. Bu denklem (2.30) denkleminin aynısıdır ve (2.38) integralinin sıfır olmasından dolayı (2.42)'de gözlem noktası V_1 bölgesinde olan denklemde integralin içerisindeki ϕ_1 'in yerine ϕ_s yazılabileceği kolaylıkla gösterilebilir. Aynı şekilde (2.40)'de integralin içerisindeki ϕ_s 'in yerine de ϕ_1 yazılabilir. Buradan hareketle saçılan alan ifadesi düzenlenirse aşağıdaki hali alır:

$$- \int_C \{G_1(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') \nabla_t' \phi_1(\boldsymbol{\rho}') - \phi_1(\boldsymbol{\rho}') \nabla_t' G_1(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}')\} \cdot \hat{\mathbf{n}}' dl' \quad (2.43)$$

$$= \phi_s(\boldsymbol{\rho}), \quad \boldsymbol{\rho} \in V_1$$

Bir doğrultuda tekdüze olan keyfî kesitli silindirik geometrilerden saçılma problemi yüzey integral denklemlerinden indirgenen (2.30) ve (2.32) eğri integralleri ele alınarak çözülür. Bu denklemlerde ilgili bölgeye ilişkin bilinmeyen ϕ_i alanı, saçıcının TM veya TE dalga uyarımı altında olmasına göre elektrik veya manyetik alanın z bileşenine tekabül eder. Yokoluş teoremi uyarınca problemin çözümü alanların sıfır olduğu bölgelerde aranacak olursa ilgilenecek integral denklem çifti,

$$\int_C \{G_1(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') \nabla_t' \phi_1(\boldsymbol{\rho}') - \phi_1(\boldsymbol{\rho}') \nabla_t' G_1(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}')\} \cdot \hat{\mathbf{n}}' dl' \quad (2.44)$$

$$= \phi_g(\boldsymbol{\rho}), \quad \boldsymbol{\rho} \in V_2$$

$$\int_C \{G_2(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') \nabla_t' \phi_2(\boldsymbol{\rho}') - \phi_2(\boldsymbol{\rho}') \nabla_t' G_2(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}')\} \cdot \hat{\mathbf{n}}' dl' \quad (2.45)$$

$$= 0, \quad \boldsymbol{\rho} \in V_1$$

denklemleridir. Eğer gelen alan Şekil 2.6'daki gibi C eğrisinin içinde ise (2.34)'de ϕ_1 yerine ϕ_2 yazılmasıyla ve (2.44)-(2.45) gösterimlerinin çıkarılmasında izlenen yordamla,

$$\int_C \{G_1(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') \nabla' \phi_1(\boldsymbol{\rho}') - \phi_1(\boldsymbol{\rho}') \nabla' G_1(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}')\} \cdot \hat{\mathbf{n}}' dl' \quad (2.46)$$

$$= \begin{cases} \phi_1(\boldsymbol{\rho}), & \boldsymbol{\rho} \in V_1 \\ 0, & \boldsymbol{\rho} \in V_2 \end{cases}$$

$$\phi_g(\boldsymbol{\rho}) - \int_C \{G_2(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') \nabla' \phi_2(\boldsymbol{\rho}') - \phi_2(\boldsymbol{\rho}') \nabla' G_2(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}')\} \cdot \hat{\mathbf{n}}' dl' \quad (2.47)$$

$$= \begin{cases} \phi_2(\boldsymbol{\rho}), & \boldsymbol{\rho} \in V_2 \\ 0, & \boldsymbol{\rho} \in V_1 \end{cases}$$

gösterilimleri elde edilir. Yokoluş teoremi uyarınca toplam alanın 0 olduğu bölgelerde ise,

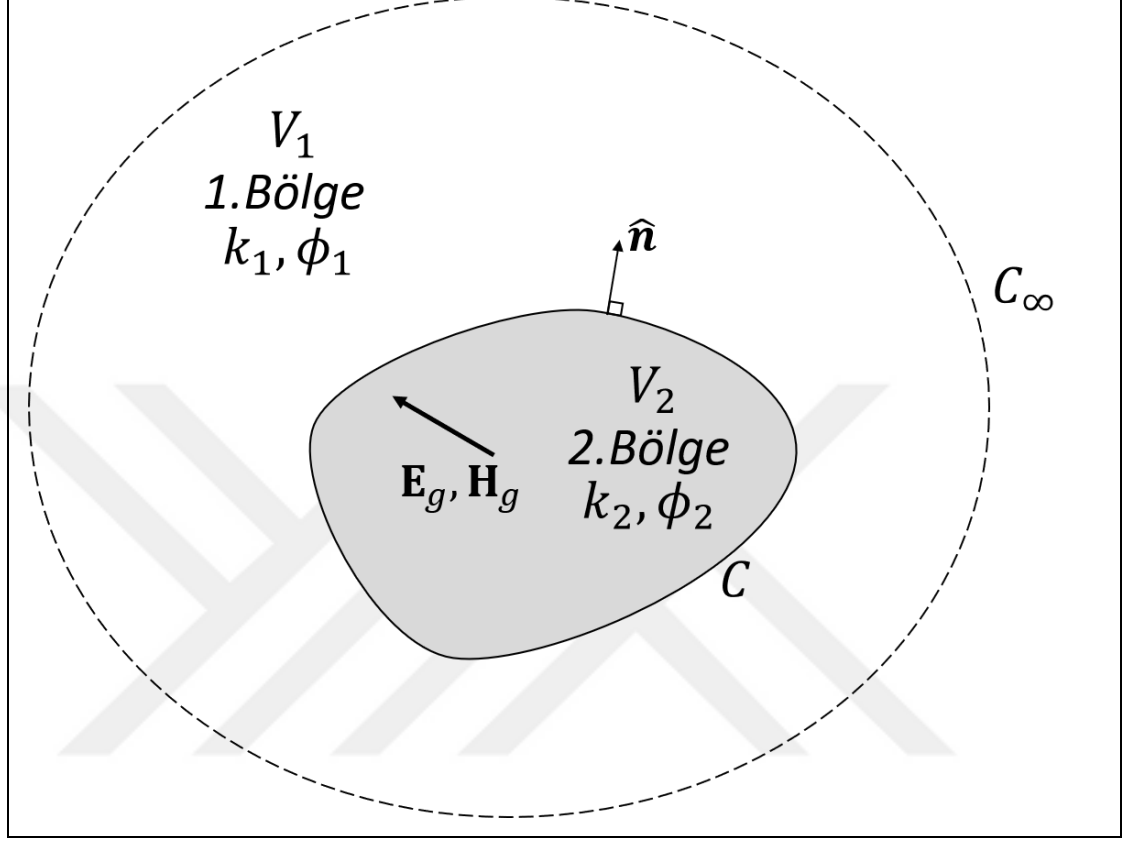
$$\int_C \{G_1(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') \nabla_t' \phi_1(\boldsymbol{\rho}') - \phi_1(\boldsymbol{\rho}') \nabla_t' G_1(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}')\} \cdot \hat{\mathbf{n}}' dl' \quad (2.48)$$

$$= 0, \quad \boldsymbol{\rho} \in V_2$$

$$\int_C \{G_2(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') \nabla_t' \phi_2(\boldsymbol{\rho}') - \phi_2(\boldsymbol{\rho}') \nabla_t' G_2(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}')\} \cdot \hat{\mathbf{n}}' dl' \quad (2.49)$$

$$= \phi_g(\boldsymbol{\rho}), \quad \boldsymbol{\rho} \in V_1$$

integral gösterilim çifti ile ilgilenilir. Yukarıdaki gösterimlerde yer alan dört bağımsız bilinmeyen alan ifadesi aşağıdaki sınır koşulları yardımıyla iki bilinmeyene indirgenebilir:

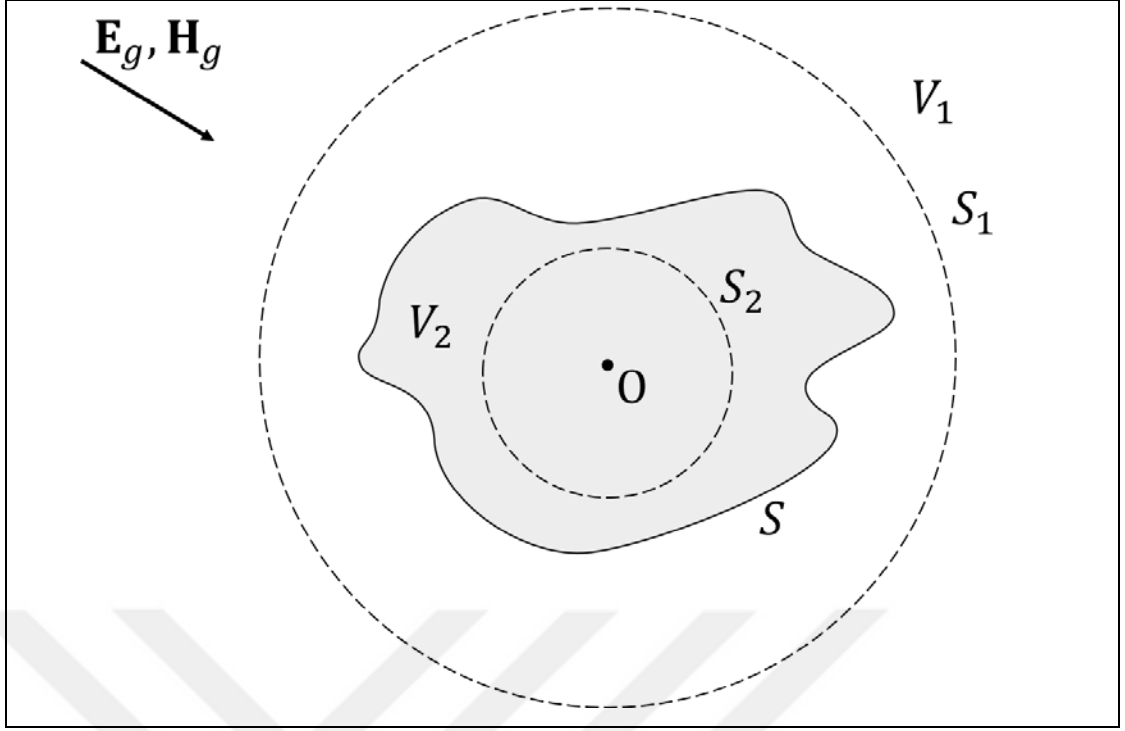


Şekil 2.6: Gelen alan kaynağının C eğrisinin içinde olduğu durumda iki boyutta ele alınan iki bölgeli problem.

$$\phi_1(\boldsymbol{\rho}) = \phi_2(\boldsymbol{\rho}), \quad \boldsymbol{\rho} \in C, \quad (2.50)$$

$$p_1 \hat{n} \cdot \nabla_t \phi_1(\boldsymbol{\rho}) = p_2 \hat{n} \cdot \nabla_t \phi_2(\boldsymbol{\rho}), \quad \boldsymbol{\rho} \in C. \quad (2.51)$$

Bu sınır koşullarının uygulanmasıyla ortaya çıkan iki bilinmeyenli integral denklemler, integrallerin doğrusal bir operatör olarak incelenerek çeşitli nümerik yöntemlerle doğru bir biçimde ayrıklaştırılmasıyla çözülebilirler.



Şekil 2.7: Dışarıdan uyarma durumunda genişletilmiş sınır koşulları yöntemi için saçının içinde ve dışındaki yüzeyler ve bölgeler.

2.3. Genişletilmiş Sınır Koşulları Yöntemi

Sıfır alan yaklaşımı olarak da bilinen genişletilmiş sınır koşulu yöntemi (GSK) yöntemi, çözümleri saçıcının tam yüzeyi üzerinde aramak yerine Şekil 2.7'deki gibi bir S yüzeyinden uzakta seçilen iç ve dış yüzeylerde toplam alanların sıfır olduğu yerlerde aramak temeline dayanır. Böylece (2.11) ve (2.12)'deki toplam alanların sıfırdan farklı olduğu birinci integral gösterilimlerin tam saçıcı yüzeyi üzerinde incelenmesi ile ortaya çıkan integral denklemlerdeki tekillik probleminden kaçınılır. Yokoluş teoremi uyarınca 1 ve 2 bölgelerinde yazılan, (2.13) ve (2.14)'de verilen sıfır alan integral gösterilimleri aşağıdaki gibidir:

$$\int_S \{G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla' \phi_1(\mathbf{r}') - \phi_1(\mathbf{r}') \nabla' G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\} \cdot \hat{\mathbf{n}}' dS' = \phi_g(\mathbf{r}), \quad (2.52)$$

$$\mathbf{r} \in V_2$$

$$\int_S \{G_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla' \phi_2(\mathbf{r}') - \phi_2(\mathbf{r}') \nabla' G_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\} \cdot \hat{\mathbf{n}}' dS' = 0, \quad \mathbf{r} \in V_1 \quad (2.53)$$

Burada (2.52) gösterilimi S yüzeyi ile sınırlandırılmış V_2 bölgesinde herhangi bir yerdeki $\mathbf{r}$ gözlem noktası için geçerlidir. Benzer biçimde (2.53) gösterilimi ise S yüzeyinin dışında V_1 bölgesinde herhangi bir yerdeki $\mathbf{r}$ gözlem noktası için geçerlidir. Bu nedenle (2.52) gösterilimi V_2 bölgesindeki küresel S_2 yüzeyinde, (2.53) gösterilimi ise V_1 bölgesindeki küresel S_1 yüzeyinde uygulamaya elverişlidir. Bu yöntemde integral denklemler bu gösterimler aracılığıyla cismin esas yüzeyinin uzağındaki yüzeyler üzerinde (cismin yüzeyi bakımından kapsayan-kapsanan yüzeylerde) kurulduğundan yöntem genişletilmiş sınır koşulları yöntemi adını almıştır.

Küresel yüzeyler üzerinde yazılmış integral denklemler, alanların ve denklem çekirdeğinin küresel harmonikler kullanılarak bir seri açılımıyla ifade edilmesiyle basitleşirler. Örneğin toplamsallık teoremi ile homojen ortam Green fonksiyonu şu şekilde seriye açılabilir:

$$G_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -jk_i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \psi_n(k_i, \mathbf{r}') \Re g \psi_n(k_i, \mathbf{r}), \quad \mathbf{r} < \mathbf{r}' \quad (2.54)$$

$$G_i(r, r') = -jk_i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \psi_n(k_i, \mathbf{r}) \Re g \psi_n(k_i, \mathbf{r}'), \quad \mathbf{r} > \mathbf{r}' \quad (2.55)$$

Burada $\psi_n(k_i, \mathbf{r})$ giden, $\Re g \psi_n(k_i, \mathbf{r})$ ise duran dalgaların küresel harmonikleri olup, $\Re g \psi_n(k_i, \mathbf{r})$, $\psi_n(k_i, \mathbf{r})$ 'nin regüler kısmıdır. Ayrıca $\mathbf{r}$ ve $\mathbf{r}'$ noktaları sırasıyla gözlem ve kaynak noktalarını ifade etmektedir. Bunun yanı sıra, gelen alan orijin etrafında regüler olduğundan (tekillik durumu söz konusu olmadığından) regüler küresel harmoniklere açılabilir:

$$\phi_g(\mathbf{r}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \Re g \psi_n(k_1, \mathbf{r}) \quad (2.56)$$

Böylece Green fonksiyonuna ait seri açılımları olan (2.54) ve (2.55) ile gelen alanın seri ifadesi (2.56), (2.52) ve (2.53) denklemlerinde yerlerine yazıldığında,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \Re g \psi_n(k_1, \mathbf{r})$$

$$= -jk_1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Re g \psi_n(k_1, \mathbf{r}) \int_S \{ \psi_n(k_1, \mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}}' \cdot \nabla' \phi_1(\mathbf{r}') - \phi_1(\mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}}' \cdot \nabla' \psi_n(k_1, \mathbf{r}') \} dS', \quad \mathbf{r} \in S_2 \quad (2.57)$$

$$0 = -jk_2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \psi_n(k_2, \mathbf{r}) \int_S \{ \Re g \psi_n(k_2, \mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}}' \cdot \nabla' \phi_2(\mathbf{r}') - \phi_2(\mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}}' \cdot \nabla' \Re g \psi_n(k_2, \mathbf{r}') \} dS', \quad \mathbf{r} \in S_1 \quad (2.58)$$

elde edilir. (2.57) denklemi S_2 ile sınırlanan hacimde, (2.58) ise S_1 dışındaki hacimde herhangi bir $\mathbf{r}$ noktası için geçerlidir. Sonuç olarak küresel harmoniklerin ortogonalliğinden,

$$a_n = -jk_1 \int_S \{ \psi_n(k_1, \mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}}' \cdot \nabla' \phi_1(\mathbf{r}') - \phi_1(\mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}}' \cdot \nabla' \psi_n(k_1, \mathbf{r}') \} dS', \quad \forall n \quad (2.59)$$

$$0 = -jk_2 \int_S \{ \Re g \psi_n(k_2, \mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}}' \cdot \nabla' \phi_2(\mathbf{r}') - \phi_2(\mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}}' \cdot \nabla' \Re g \psi_n(k_2, \mathbf{r}') \} dS', \quad \forall n \quad (2.60)$$

denklemleri elde edilir. Bu yordamla (2.52) ve (2.53) integral denklemleri (2.59) ve (2.60) denklemlerine indirgenerek basitleşirler ve gözlem noktası $\mathbf{r}'$ 'ye bağımlık içermezler. Ortaya çıkan bu yeni integral denklemleri çözebilmek için yüzey bilinmeyenleri olan $\phi_i(\mathbf{r}')$ ve $\hat{\mathbf{n}}' \cdot \nabla' \phi_i(\mathbf{r}')$ alanlarına, (2.59) ve (2.60)'i matris denklemlerine dönüştürmek amacıyla bir baz fonksiyonu cinsinden açılım yapılır. Yüzey bilinmeyenlerinin açılımı için akıllı bir seçim [22] (2.56)'e benzer biçimde,

$$\phi_2(r') = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_m \Re g \psi_m(k_2, r') \quad (2.61)$$

$$\hat{\mathbf{n}}' \cdot \nabla' \phi_2(r') = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \beta_m \hat{\mathbf{n}}' \cdot \nabla' \Re g \psi_m(k_2, r') \quad (2.62)$$

ile verilir. Fakat yukarıdaki açılımlar sadece $\Re g\psi_m(k_2, \mathbf{r}')$ ve $\hat{\mathbf{n}}' \cdot \nabla' \Re g\psi_m(k_2, \mathbf{r}')$ fonksiyonları S yüzeyi üzerinde tam ise kesinlikle geçerlidir. Esasen bu fonksiyonlar V_2 hacminin oluşturduğu k_2 dalga sayılı bölgedeki iç rezonanslar haricinde tamdır. Buna ek olarak $\alpha_m = \beta_m$ olduğu açıkça görülebilmekle birlikte bu durum (2.60) denklemi ile tutarsız görünebilir. Tutarlılığı sağlamak adına (2.61) ve (2.62) denklemi, (2.60)'de yerine yazılırsa,

$$0 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \beta_m \int_S \{\Re g\psi_n(k_2, \mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}}' \cdot \nabla' \Re g\psi_m(k_2, \mathbf{r}')\} dS' - \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_m \int_S \{\Re g\psi_m(k_2, \mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}}' \cdot \nabla' \Re g\psi_n(k_2, \mathbf{r}')\} dS' \quad (2.63)$$

elde edilir. Bu noktada $\alpha_m = \beta_m$ olması gerektiği açık değildir. Ancak aşağıdaki,

$$\nabla' \cdot \{\Re g\psi_n(k_2, \mathbf{r}') \nabla' \Re g\psi_m(k_2, \mathbf{r}') - \Re g\psi_m(k_2, \mathbf{r}') \nabla' \Re g\psi_n(k_2, \mathbf{r}')\} \quad (2.64)$$

ifadesini S ve S_2 yüzeyleri ile sınırlandırılmış V hacmi üzerinden integrali alınırsa ve diverjans teoremi uygulanırsa ortaya çıkan S_2 üzerinden integral, bir küresel yüzey üzerindeki küresel harmoniklerin ortogonalliğinden ötürü sıfırdır. Ayrıca (2.64) ifadesi de sıfıra eşittir. Bu bilgilerin ışığında şu sonuca varılır,

$$\int_S \{\Re g\psi_n(k_2, \mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}}' \cdot \nabla' \Re g\psi_m(k_2, \mathbf{r}')\} dS' = \int_S \{\Re g\psi_m(k_2, \mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}}' \cdot \nabla' \Re g\psi_n(k_2, \mathbf{r}')\} dS' \quad (2.65)$$

(2.65) eşitliği (2.63)'de kullanıldığında gerçekten de $\alpha_m = \beta_m$ olduğuna işaret eder. Dolayısıyla, (2.61) ve (2.62)'deki açılımlarda baz fonksiyonunun akıllıca seçilmesinin doğal olarak ödülü (2.60)'yi direkt olarak çözmesidir. Sonuç olarak, (2.61) ve (2.62) ifadeleri ile (2.23) ve (2.24)'de verilen sınır koşulları kullanılarak (2.59) denklemi,

$$a_n = -jk_1 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_m \int_S \{ \psi_n(k_1, \mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}}' \cdot \nabla' \Re g \psi_m(k_2, \mathbf{r}') \frac{p_2}{p_1} - \Re g \psi_m(k_2, \mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}}' \cdot \nabla' \psi_n(k_1, \mathbf{r}') \} dS' \quad (2.66)$$

halini alır. Ardından (2.66) denklemi şu formda yazılabilir,

$$a_n = -jk_1 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_m Q_{nm}, \quad (2.67)$$

Burada,

$$Q_{nm} = \int_S \{ \psi_n(k_1, \mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}}' \cdot \nabla' \Re g \psi_m(k_2, \mathbf{r}') \frac{p_2}{p_1} - \Re g \psi_m(k_2, \mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}}' \cdot \nabla' \psi_n(k_1, \mathbf{r}') \} dS' \quad (2.68)$$

(2.67) denklemi teorik olarak sonsuz boyutlu bir matris denklemdir. Fakat uygulamada bilinmeyen α_m genlik katsayıları, sonsuz boyutlu matris denklemini bir kesme sayısında kesilip gelen alanın genlik katsayıları vektörünün çarpımıyla belirlenir. Ardından elde edilen α_m katsayıları (2.61) ve (2.62)'de yerine yazılarak yüzey alanları bulunur. Saçılan alanları bulmak için ise yüzey alanları (2.23) ve (2.24)'deki sınır koşulları kullanılarak (2.10)'da yerine yazılır. Böylece (2.10) denklemindeki saçılan alan integrali,

$$\begin{aligned} \phi_s(\mathbf{r}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \psi_n(k_1, \mathbf{r}) \\ &= \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} jk_1 \alpha_m \psi_n(k_1, \mathbf{r}) \int_S \{ \Re g \psi_n(k_1, \mathbf{r}) \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \Re g \psi_m(k_2, \mathbf{r}) \frac{p_2}{p_1} - \Re g \psi_m(k_2, \mathbf{r}) \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \Re g \psi_n(k_1, \mathbf{r}) \} dS \end{aligned} \quad (2.69)$$

halini alır. (2.69)'den kolayca çıkarılabileceği üzere,

$$f_n = jk_1 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_m \Re g Q_{nm} \quad (2.70)$$

Burada Q_{nm} (2.68)'da verildiği gibidir ve “ $\Re g$ ” önüne geldiği terimin “regüler kısmı” anlamına gelmektedir. Bir başka deyişle, $\Re g Q_{nm}$, Q_{nm} içerisindeki bütün Hankel fonksiyonlarını Bessel fonksiyonlarına çevirir. (2.67) ve (2.70) matris çarpımları olarak ifade edilmek istenirse,

$$\mathbf{a} = -jk_1 \bar{\mathbf{Q}} \cdot \boldsymbol{\alpha} \quad (2.71)$$

$$\mathbf{f} = jk_1 (\Re g \bar{\mathbf{Q}}) \cdot \boldsymbol{\alpha} \quad (2.72)$$

elde edilir. Burada $\mathbf{a}$, $\boldsymbol{\alpha}$ ve $\mathbf{f}$ vektörleri sırasıyla a_n , α_m ve f_n katsayılarını içeren vektörlerdir. İlaveten, $\bar{\mathbf{Q}}$, elemanları Q_{nm} olan bir matristir. (2.71) denkleminde $\boldsymbol{\alpha}$ yalnız bırakılarak ortaya çıkan ifade (2.72)'da yerine yazılırsa ve böylece $\boldsymbol{\alpha}$ yok edilirse,

$$\mathbf{f} = -(\Re g \bar{\mathbf{Q}}) \cdot \bar{\mathbf{Q}}^{-1} \cdot \mathbf{a} \quad (2.73)$$

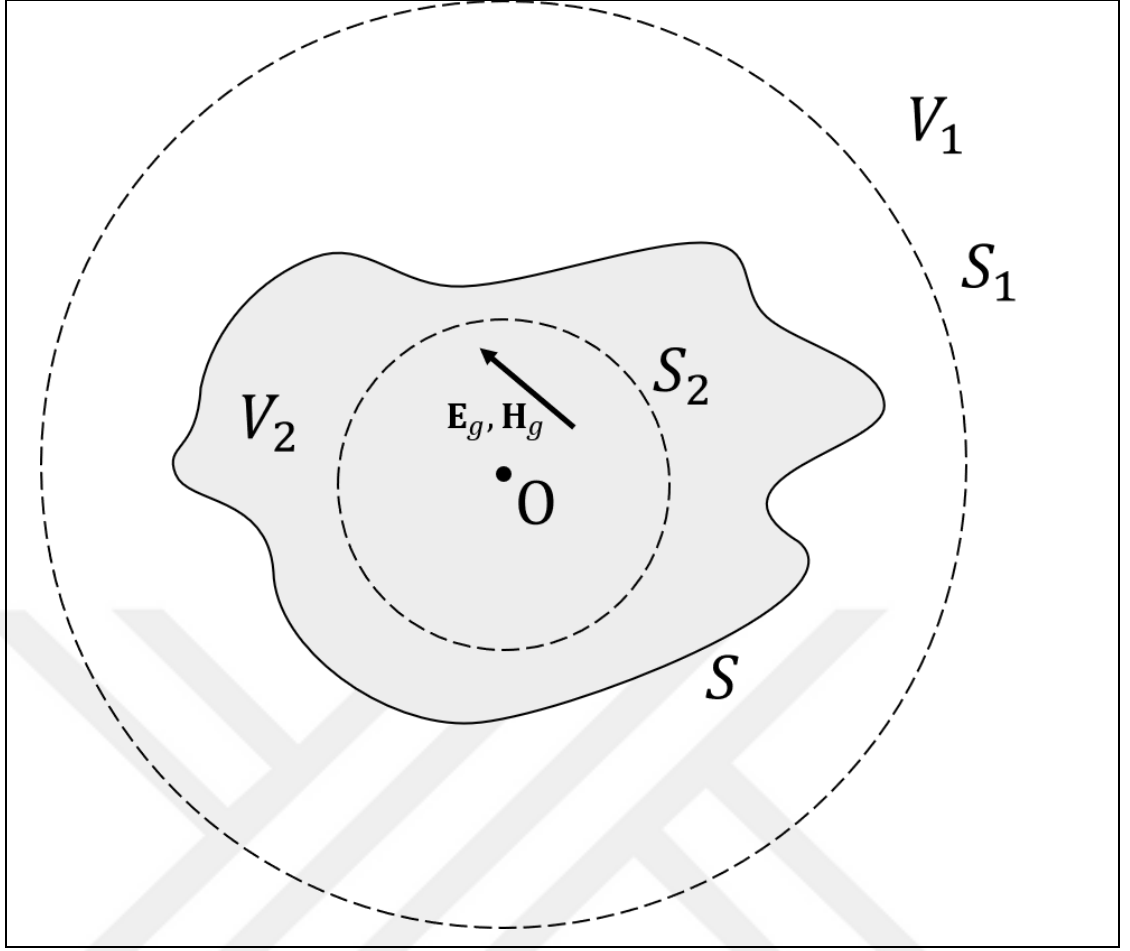
elde edilir. $\mathbf{f}$ ile $\mathbf{a}$ vektörlerini ilişkilendiren bir $\bar{\mathbf{T}}$ matrisi tanımlırsa,

$$\mathbf{f} = \bar{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{a} \quad (2.74)$$

elde edilir. Burada,

$$\bar{\mathbf{T}} = -(\Re g \bar{\mathbf{Q}}) \cdot \bar{\mathbf{Q}}^{-1} \quad (2.75)$$

olarak tanımlanır. Böylece gelen alanın genlik vektörü cinsinden saçılan alanın bilinmeyen genlik vektörü ifade edilmiş olur.



Şekil 2.8: İçeriden uyarma durumunda genişletilmiş sınır koşulları yöntemi için saçının içinde ve dışındaki yüzeyler ve bölgeler.

Eğer gelen alan, Şekil 2.8'deki gibi söz konusu saçıcının iç bölgesinde ise yokoluş teoremi uyarınca 1 ve 2 bölgelerinde yazılan, (2.19) ve (2.20)'de verilen sıfır alan integral gösterilimleri aşağıdaki gibidir:

$$\int_S \{G_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla' \phi_2(\mathbf{r}') - \phi_2(\mathbf{r}') \nabla' G_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\} \cdot \hat{\mathbf{n}}' dS' = \phi_g(\mathbf{r}) \quad (2.76)$$

$$\mathbf{r} \in V_1$$

$$\int_S \{G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla' \phi_1(\mathbf{r}') - \phi_1(\mathbf{r}') \nabla' G_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\} \cdot \hat{\mathbf{n}}' dS' = 0 \quad (2.77)$$

$$\mathbf{r} \in V_2$$

Bu durumda gelen alan dışarıdan küresel harmoniklere aşağıdaki gibi açılabilir:

$$\phi_g(\mathbf{r}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \psi_n(k_1, \mathbf{r}) \quad (2.78)$$

Böylece Green fonksiyonuna ait seri açılımları olan (2.55) ve (2.54) ile gelen alanın seri ifadesi (2.78), (2.76) ve (2.77) denklemlerinde yerlerine yazıldığında,

$$\begin{aligned} & \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \psi_n(k_2, \mathbf{r}) \\ &= -jk_2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \psi_n(k_2, \mathbf{r}) \int_S \{ \Re g \psi_n(k_2, \mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}}' \cdot \nabla' \phi_2(\mathbf{r}') \\ & \quad - \phi_2(\mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}}' \cdot \nabla' \Re g \psi_n(k_2, \mathbf{r}') \} dS', \quad \mathbf{r} \in S_1 \end{aligned} \quad (2.79)$$

$$\begin{aligned} 0 &= -jk_1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \psi_n(k_1, \mathbf{r}) \int_S \{ \psi_n(k_1, \mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}}' \cdot \nabla' \phi_1(\mathbf{r}') \\ & \quad - \phi_1(\mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}}' \cdot \nabla' \Re g(k_1, \mathbf{r}') \} dS', \quad \mathbf{r} \in S_2 \end{aligned} \quad (2.80)$$

elde edilir. (2.80) denklemi S_2 ile sınırlanan hacimde, (2.79) ise S_1 dışındaki hacimde herhangi bir $\mathbf{r}$ noktası için geçerlidir. Sonuç olarak küresel harmoniklerin ortogonalliğinden,

$$\begin{aligned} a_n &= -jk_2 \int_S \{ \Re g \psi_n(k_2, \mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}}' \cdot \nabla' \phi_2(\mathbf{r}') \\ & \quad - \phi_2(\mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}}' \cdot \nabla' \Re g \psi_n(k_2, \mathbf{r}') \} dS', \quad \forall n \end{aligned} \quad (2.81)$$

$$\begin{aligned} 0 &= -jk_1 \int_S \{ \psi_n(k_1, \mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}}' \cdot \nabla' \phi_1(\mathbf{r}') \\ & \quad - \phi_1(\mathbf{r}') \hat{\mathbf{n}}' \cdot \nabla' \psi_n(k_1, \mathbf{r}') \} dS', \quad \forall n \end{aligned} \quad (2.82)$$

denklemleri elde edilir. Elde edilen (2.81) ve (2.82) integral denklemlerini çözebilmenin yolu yüzey bilinmeyenleri olan $\phi_1(\mathbf{r}')$ ve $\hat{\mathbf{n}}' \cdot \nabla' \phi_1(\mathbf{r}')$ alanlarına (2.83) ve (2.84)'e benzer biçimde aşağıdaki seri açılımlarını karşı getirmekten geçer:

$$\phi_1(r') = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_m \psi_m(k_1, r') \quad (2.83)$$

$$\hat{n}' \cdot \nabla' \phi_1(r') = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_m \hat{n}' \cdot \nabla' \psi_m(k_1, r') \quad (2.84)$$

(2.83) ve (2.84) seri açılımlarındaki katsayıların eşitliğinin (2.65)'dekine benzer biçimde açılım yapılan harmoniklerin ortogonallığıyla sağlandıkları unutulmamalıdır. (2.83) ve (2.84) ifadeleri ile (2.23) ve (2.24)'de verilen sınır koşulları kullanılarak (2.81) denklemi,

$$a_n = -jk_2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_m \int_S \left\{ \Re g \psi_n(k_2, \mathbf{r}') \hat{n}' \cdot \nabla' \psi_m(k_1, \mathbf{r}') \frac{p_1}{p_2} - \psi_m(k_1, \mathbf{r}') \hat{n}' \cdot \nabla' \Re g \psi_n(k_2, \mathbf{r}') \right\} dS' \quad (2.85)$$

halini alır. Ardından (2.85) denklemi şu formda yazılabilir,

$$a_n = -jk_2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_m P_{nm}, \quad (2.86)$$

Burada P_{nm} ,

$$P_{nm} = \int_S \left\{ \Re g \psi_n(k_2, \mathbf{r}') \hat{n}' \cdot \nabla' \psi_m(k_1, \mathbf{r}') \frac{p_1}{p_2} - \psi_m(k_1, \mathbf{r}') \hat{n}' \cdot \nabla' \Re g \psi_n(k_2, \mathbf{r}') \right\} dS' \quad (2.87)$$

ile verilir. Saçılan alanları bulmak için ise yüzey alanları (2.23) ve (2.24)'deki sınır koşulları kullanılarak (2.18)'de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\phi_s(\mathbf{r}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \Re g \psi_n(k_2, \mathbf{r}) \\
&= \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} j k_2 \alpha_m \Re g \psi_n(k_2, \mathbf{r}) \int_S \{ \psi_n(k_2, \mathbf{r}) \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \psi_m(k_1, \mathbf{r}) \frac{p_1}{p_2} \\
&\quad - \psi_m(k_1, \mathbf{r}) \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \psi_n(k_2, \mathbf{r}) \} dS
\end{aligned} \tag{2.88}$$

elde edilir.(2.88)'den kolayca çıkarılabileceği üzere,

$$f_n = j k_2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_m \Re g^{-1} P_{nm} \tag{2.89}$$

Burada P_{nm} (2.87)'de verildiği gibidir ve “ $\Re g^{-1}$ ” daha önce tanımlanan regüler kısım operatörünün ters operatörü olup, yalnızca $\Re g$ operatörü uygulanan fonksiyonları eski hallerine dönüştürür. Bir başka deyişle, $\Re g^{-1} P_{nm}$, P_{nm} içerisindeki bütün Bessel fonksiyonlarını Hankel fonksiyonlarına çevirir. (2.86) ve (2.89) matris çarpımları olarak ifade edilmek istenirse,

$$\mathbf{a} = -j k_2 \bar{\mathbf{P}} \cdot \boldsymbol{\alpha} \tag{2.90}$$

$$\mathbf{f} = j k_2 (\Re g^{-1} \bar{\mathbf{P}}) \cdot \boldsymbol{\alpha} \tag{2.91}$$

(2.90) denkleminde $\boldsymbol{\alpha}$ yalnız bırakılarak ortaya çıkan ifade (2.91)'de yerine yazılırsa ve böylece $\boldsymbol{\alpha}$ yok edilirse,

$$\mathbf{f} = -(\Re g^{-1} \bar{\mathbf{P}}) \cdot \bar{\mathbf{P}}^{-1} \cdot \mathbf{a} \tag{2.92}$$

elde edilir. $\mathbf{f}$ ile $\mathbf{a}$ vektörlerini ilişkilendiren bir $\bar{\mathbf{T}}$ matrisi tanımı yapılırsa,

$$\mathbf{f} = \bar{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{a} \tag{2.93}$$

elde edilir. Burada,

$$\bar{\mathbf{T}} = -(\Re g^{-1} \bar{\mathbf{P}}) \cdot \bar{\mathbf{P}}^{-1} \quad (2.94)$$

olarak tanımlanır. Böylece saçılan alanın bilinmeyen genlik vektörü (2.75)'e benzer biçimde gelen alanın genlik vektörü cinsinden ifade edilmiş olur.

Genişletilmiş sınır koşulları yönteminde alanlar yalnızca S_2 'nin içinde ve S_1 'in dışında yok olmuş vaziyettedir. Fakat gerçekte S üzerindeki yüzey kaynakları, S içinde veya dışında olsun ilgili alanı her yerde yok etmek zorundadır. Bu sebeple genişletilmiş sınır koşulları yöntemi bazı problemlerde gerçek çözüme yaklaşık bir çözüm verir, bu yaklaşıklık her zaman avantajlı olmayabilir.

Bu yöntemde S_1 ve S_2 test yüzeyleri saçıcı yüzeyinden uzakta olduğundan, eğer test yüzeyleri ile S yüzeyi arasındaki maksimum uzaklık büyükse, (2.67) denkleminin ifade ettiği matris kötü-köşüllü hale gelir. Bu durumun geçerliliğine örnek olarak uzatılmış veya derin olukları olan cisimler verilebilir. Bu türden cisimlerde S yüzeyi üzerindeki yüzey kaynaklarının S yüzeyi civarında sınırlı bölgelerde yerel bir alan oluşturmaları sebebi ile fiziksel olarak kötü-köşullanma baş gösterir. Buna göre, S yüzeyi üzerindeki alan bilgisi S_1 ve S_2 'de büyük ölçüde kayba uğrar. Bu nedenle S_1 ve S_2 yüzeyleri üzerinde (2.52) ve (2.53) integral denklemlerinin uygulanmasının sonucu olarak kötü köşullanmış bir denklem sistemi elde edilir. Buna rağmen genişletilmiş sınır koşulları yöntemi, daha basit bir denklem kümesi ile işlendiğinden, birçok uygulama için caziptir. Bilhassa etrafındaki alanların küresel harmoniklere, silindirik harmoniklere veya Floquet modlarına açılabilir olduğu saçıcı geometrileri için uygundur.

GSK yöntemi ayrıca geçirgen olmayan cisimler için de kolayca uyarlanabilir. Bu durumda yalnızca (2.59) denkleminin homojen Dirichlet, Neumann veya empedans sınır koşullarından birinin kullanılarak çözülmesi gerekir.

2.4. Rayleigh Hipotezi Yöntemi

Rayleigh Hipotezi yöntemi, integral denklemleri içermemesine rağmen GSK yöntemi ile yakından ilintili olduğundan tartışmaya değer bir yöntemdir. GSK yönteminde de olduğu gibi Şekil 2.7'deki problem geometrisi ele alınsın. S_1

yüzeyinin dışındaki toplam alan, gelen ve saçılan alanlar cinsinden aşağıdaki açılımlarla ifade edilebilir,

$$\phi_g(\mathbf{r}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \Re g \psi_n(k_1, \mathbf{r}) \quad (2.95)$$

$$\phi_s(\mathbf{r}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \psi_n(k_1, \mathbf{r}) \quad (2.96)$$

(2.95)'de gelen alana duran dalgalar cinsinden bir açılım, (2.96)'de ise saçılan alana giden dalgalar cinsinden bir açılım karşılık getirilmiştir. Bunu takiben saçıcı içerisindeki toplam alana da duran dalgalar cinsinden bir açılım karşılık getirilebilir:

$$\phi_2(\mathbf{r}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \Re g \psi_n(k_2, \mathbf{r}) \quad (2.97)$$

(2.97) açılımı gözlem noktası r , S_2 'nin içindeyken geçerlidir. Bunun yanı sıra Rayleigh hipotezinde (2.96) ve (2.97)'daki açılımların S yüzeyi üzerinde geçerli olduğu varsayılır. Fakat bu varsayım, S ve S_1 ile sınırlanmış bölgede saçılan tüm dalgaların (2.96)'de ifade edildiği gibi giden dalgalar olduğu belli olmadığı için berrak değildir. Üstelik, S ve S_2 ile sınırlanmış bölgedeki tüm dalgaların duran dalgalar olup olmadığı da açık değildir. Her ne kadar Rayleigh hipotezi, ortaya çıkan matris denklem sistemi itibarıyla GSK yöntemi ile benzerlik gösterse de dayandığı temeller ve varsayımlar ile GSK yönteminden ayrılır.

Buna rağmen Rayleigh hipotezinin geçerli olduğu varsayılır ve S üzerinde sınır koşulları yazılırsa,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} [a_n \Re g \psi_n(k_1, \mathbf{r}) + f_n \psi_n(k_1, \mathbf{r})] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \Re g \psi_n(k_2, \mathbf{r}) \quad (2.98)$$

$, \mathbf{r} \in S$

süreklilik uyarınca elde edilir. Ayrıca, (2.24) ile verilen normal türevler üzerindeki sınır koşulu aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=-\infty}^{\infty} [a_n p_1 \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \Re g \psi_n(k_1, \mathbf{r}) + f_n p_1 \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \psi_n(k_1, \mathbf{r})] \\
& = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n p_2 \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \Re g \psi_n(k_2, \mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in S
\end{aligned} \tag{2.99}$$

Yukarıdaki ifadeleri matris denklemlerine dönüştürmek için (2.98) denklemi $\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \Re g \psi_m(k_2, \mathbf{r})$ ile test edilir ve S üzerinden integrali alınırsa,

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[a_n \int_S \{ \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \Re g \psi_m(k_2, \mathbf{r}) \Re g \psi_n(k_1, \mathbf{r}) \} dS \right. \\
& \quad \left. + f_n \int_S \{ \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \Re g \psi_m(k_2, \mathbf{r}) \psi_n(k_1, \mathbf{r}) \} dS \right] \\
& = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \int_S \{ \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \Re g \psi_m(k_2, \mathbf{r}) \Re g \psi_n(k_2, \mathbf{r}) \} dS
\end{aligned} \tag{2.100}$$

elde edilir. Benzer biçimde, (2.99) denklemi $\Re g \psi_m(k_2, \mathbf{r})$ ile test edilir ve S üzerinden integrali alınırsa,

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[a_n \frac{p_1}{p_2} \int_S \{ \Re g \psi_m(k_2, \mathbf{r}) \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \Re g \psi_n(k_1, \mathbf{r}) \} dS \right. \\
& \quad \left. + f_n \frac{p_1}{p_2} \int_S \{ \Re g \psi_m(k_2, \mathbf{r}) \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \psi_n(k_1, \mathbf{r}) \} dS \right] \\
& = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \int_S \{ \Re g \psi_m(k_2, \mathbf{r}) \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \Re g \psi_n(k_2, \mathbf{r}) \} dS
\end{aligned} \tag{2.101}$$

elde edilir. (2.100) ve (2.101) denklemlerinin sağ yanı, (2.65)'de gösterildiği gibi birbirine eşittir. Buradan hareketle (2.100) denkleminden (2.101) denklemi taraf tarafa çıkarılırsa ortaya çıkan ifadenin sağ yanı sıfır olur. Bu durumda saçılan alanın katsayılarını içeren terim eşitliğin diğer tarafına atılarak gelen alanın katsayıları ile saçılan alanın katsayıları arasında bir ilişki kurulabilir. Sonuç olarak,

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[a_n \int_S \{ \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \Re g \psi_m(k_2, \mathbf{r}) \Re g \psi_n(k_1, \mathbf{r}) \} dS \right. \\
& \quad \left. - \frac{p_1}{p_2} \int_S \{ \Re g \psi_m(k_2, \mathbf{r}) \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \Re g \psi_n(k_1, \mathbf{r}) \} dS \right] \\
& = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \left[\int_S \{ \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \Re g \psi_m(k_2, \mathbf{r}) \psi_n(k_1, \mathbf{r}) \} dS \right. \\
& \quad \left. - \frac{p_1}{p_2} \int_S \{ \Re g \psi_m(k_2, \mathbf{r}) \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \psi_n(k_1, \mathbf{r}) \} dS \right]
\end{aligned} \tag{2.102}$$

elde edilir ve (2.102) sade bir biçimde aşağıdaki şekilde yazılabilir,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \Re g Q_{nm} = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n Q_{nm} \tag{2.103}$$

(2.103) ifadesinin matris gösterimi aşağıdaki gibi olur:

$$\Re g \bar{\mathbf{Q}}^t \cdot \mathbf{a} = -\bar{\mathbf{Q}}^t \cdot \mathbf{f} \tag{2.104}$$

Saçılan alanın bilinmeyen katsayı vektörü $\mathbf{f}$, (2.104)'de yalnız bırakılırsa,

$$\mathbf{f} = -(\bar{\mathbf{Q}}^t)^{-1} \cdot \Re g \bar{\mathbf{Q}}^t \cdot \mathbf{a} \tag{2.105}$$

elde edilir. $\mathbf{f}$ ile $\mathbf{a}$ vektörlerini ilişkilendiren bir $\bar{\mathbf{T}}$ matrisi tanımı yapılırsa,

$$\mathbf{f} = \bar{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{a} \tag{2.106}$$

elde edilir. Burada,

$$\bar{\mathbf{T}} = -(\bar{\mathbf{Q}}^t)^{-1} \cdot \Re g \bar{\mathbf{Q}}^t \tag{2.107}$$

olarak tanımlanır. Böylece GSK yönteminde de yapıldığı gibi gelen alanın genlik vektörü cinsinden saçılan alanın bilinmeyen genlik vektörü ifade edilmiş olur.

Yukarıdaki (2.107) denklemi, GSK yöntemi ile çıkarılan (2.75) denkleminin transpozudur. Ortaya çıkan ifadeler bakımından GSK yöntemi ile Rayleigh hipotezi yöntemi yukarıda tartışılan varsayımsal farklılıklar da göz önünde bulundurularak birbirinin eşdeğeri sayılabilir. Buna ek olarak, her iki yöntemde de alanlara aynı baz fonksiyonları kullanılarak bir açılım yapıldığından eğer her iki yöntemde de aynı sayıda terim alınırse hataların da aynı mertebeden olması beklenir.

GSK ve Rayleigh yönteminin denkliği geçmişte çok fazla karışıklığa ve tartışmaya yol açmıştır [22]. Özellikle, Rayleigh hipotezi yönteminin genişletilmiş sınır koşulu yöntemine eşdeğerliği, yöntemin geçerliliğini ispat etmek için kullanılmıştır. Bununla birlikte Rayleigh hipotezine yüksek frekans sınırında karşı örnekler bulmak da mümkündür. Bu sınırda dalgaların seken ışınlarla benzemesi, V_1 'deki dalgaların yalnızca giden dalgaların süperpozisyonundan oluşmadığını açıkça göstermektedir [22], [23]. Bu nedenle Rayleigh hipotezi yöntemi bazı durumlarda GSK yöntemi gibi yaklaşık bir yöntemdir.

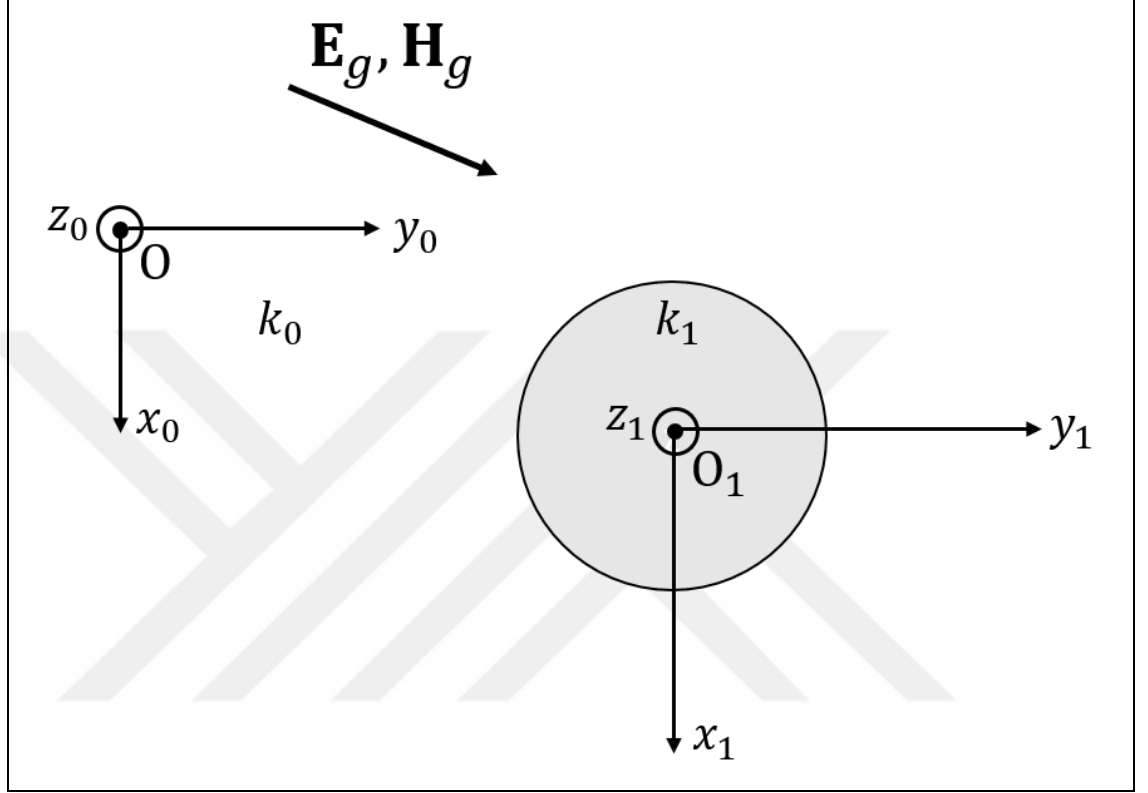
Yokoluş teoreminin S_1 ve S_2 yüzeylerine uygulanmasıyla GSK yöntemi, alanların V_1 ve V_2 bölgelerinde her yerde yok olduklarına işaret etmez. Bununla birlikte yüzey integral denkleminin gerçek çözümü V_1 ve V_2 bölgelerinde her yerde ilgili alanı yok eden yüzey kaynakları verir. Bu durum her iki yöntemin denkliğini ve her iki çözümde karşılaşılabilecek aynı mertebedeki hataları açıklar. İlaveten, derin oluklu veya uzun cisimler için Rayleigh yönteminde ortaya çıkan matrisin kötü koşulluluğu aynı zamanda yöresel ve sönen dalgaların varlığından kaynaklanmaktadır. Bu kusurlarına rağmen Rayleigh hipotezi yöntemi, GSK yöntemine kıyasla türetilmesinin basit olmasından dolayı cazip bir yöntemdir.

3. İKİ BOYUTTA ÖZYİNELEMELİ T MATRİSİ YÖNTEMİ

Bölüm 2.3’de sıfır alan yaklaşımı olarak da bilinen GSK yönteminde çözümlerin, alanların sıfır olduğu bölgelerde, homojen ortam Green fonksiyonu ve bilinmeyen alanların Helmholtz denkleminin öz çözümleri olan harmoniklere (üç boyutta küresel, iki boyutta silindirik) açılarak bulunabileceği gösterilmişti. Bu yöntemde harmonik seri açılımlarında beliren bilinmeyen katsayılar, sağ yanlı bir doğrusal cebrik denklem sisteminin çözülmesi ile aranır. Bu sistemin ortaya çıkışı T matrisi yaklaşımının temelini oluşturur. Genellikle saçılma problemleri için T matrisi (2.73)-(2.75)’deki tanımı gereği dışarı giden dalga fonksiyonu ile ifade edilen saçılan alanın bilinmeyen katsayılarını, duran dalga fonksiyonu ile ifade edilen gelen alanın bilinen katsayılarına bağlayan ve yazıldığı bölgeye alanın geçişini anlatan bir matristir.

Tek bir saçıcı için ortaya konulan T matrisi yaklaşımı birden fazla saçıcının veya katmanların var olduğu durumlar için de genişletilebilir. Örneğin çoklu saçıcı problemi için, ilgilenilen cisimden saçılan alanlara ilişkin katsayıların bulunabilmesinin yolu bu cismin haricindeki cisimlerden saçılan dalgaları duran dalga fonksiyonu cinsinden ifade etmekten geçer. Böylece duran dalga fonksiyonu ile çarpılan katsayılar ile, ilgilenilen cisimden saçılan alanların katsayısı arasında bir T matrisi ilişkisi kurmak mümkün olur. Bunun fiziksel olarak anlamı, bir cisimden saçılan alanın diğer bir cisme göre üzerine gelen alan olarak değerlendirilebilmesidir. Bir başka deyişle, bir cisimden saçılan alanın yerel koordinat sistemine göre yazılmış dışarı giden dalga cinsinden harmonik açılımları, toplamsallık teoremi kullanılarak diğer bir cismin yerel koordinat sistemi üzerinde yazıldığında duran dalgalar cinsinden harmonik açılımlarına dönüşürler. Benzer biçimde çoklu katmanlar için saçılma ve nüfuz probleminde de ilgilenilen bölgede tanımlı yerel koordinat sisteminde tanımlanmış geçen veya saçılan alanlar toplamsallık teoremi marifetiyle başka bir koordinat sistemi cinsinden ifade edilebilir. Böylece çoklu saçıcı veya katman problemlerinde her bir saçıcıya ilişkin aranan bilinmeyen katsayılar dair doğrusal cebrik denklem sistemleri elde edilir. Bu sistemler iteratif veya doğrudan matris tersi alan yöntemler ile çözülebileceği gibi uygun biçimde birbirleri içerisinde yerlerine yazılarak özyinelemeli ilişkiler elde edilerek de çözülebilirler.

Bu bölümde GSK yöntemi bahsinde tek bir saçıcı için yazılan T matrisi, iki boyutlu saçılma problemleri için tekrar edilecek, ardından çoklu saçıcılı veya katmanlı (iç içe saçıcılı) senaryolarda iki veya daha fazla saçıcının var olduğu durumlara özyinelemeli bir algoritma yardımıyla genişletilecektir [22].



Şekil 3.1: k_0 dalga sayılı ortamda bulunan bir silindirik saçıcıdan saçılma problemi.

3.1. Çoklu Saçıcılardan Saçılma

3.1.1. Tek Saçıcı Durum

Şekildeki gibi k_0 dalga sayılı ortamda bulunan k_1 dalga sayılı silindirik saçıcıya gelen alanın ifadesi (2.56) veya (2.95)'den hareketle aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\phi_g(\boldsymbol{\rho}) = \Re g \psi^t(k_0, \boldsymbol{\rho}_0) \cdot \mathbf{a} \quad (3.1)$$

Saçılan alan ifadesi ise (2.69) ve (2.96)'den hareketle,

$$\phi_s(\rho) = \psi^t(k_0, \rho_1) \cdot f_1 \quad (3.2)$$

şeklinde yazılabilir. Burada “t” üst indisi vektörün devriğini ifade etmekte olup, $\psi^t(k, \rho)$, dışarı giden silindirik harmonikler cinsinden açılan saçılan alanları ifade eden satır vektörüdür. a ve f_1 ise sırasıyla gelen alanın ve saçılan alanın katsayılarını içeren sütun vektörleridir. n bir tam sayı ve $H_n^{(2)}(x)$ ikinci tür n . mertebeden Hankel fonksiyonu olmak üzere,

$$[\psi(k_0, \rho_1)]_n = H_n^{(2)}(k_0 \rho_1) e^{jn\phi_1}, \quad n \in [-M, M] \quad (3.3)$$

ile verilir. ρ_1 ve ϕ_1 , saçıcının merkezini orijin kabul eden birinci saçıcıya ait yerel koordinat sistemine göre yazılmış kutupsal koordinatlardır. Benzer biçimde $J_n(x)$ n . mertebeden Bessel fonksiyonu olmak üzere,

$$[\Re g \psi(k_0, \rho_0)]_n = J_n(k_0 \rho_0) e^{jn\phi_0}, \quad n \in [-M, M] \quad (3.4)$$

olur. “ $\Re g$ ” önüne gelen fonksiyonun regüler kısmı anlamına gelmekte olup, iki boyutlu durumda $\rho_i = 0$ 'da tekil olan Hankel fonksiyonunu bu noktada regüler olan Bessel fonksiyonuna dönüştürür. Ayrıca (3.1)'deki ρ_0 ve ϕ_0 , global koordinat sistemine göre yazılmış kutupsal koordinatlardır.

Saçıcının dışındaki k_0 dalga sayılı ortamda bölgede toplam alan ifadesi (3.1) ve (3.2)'den,

$$\phi(\rho) = \Re g \psi^t(k_0, \rho_0) \cdot a + \psi^t(k_0, \rho_1) \cdot f_1 \quad (3.5)$$

olarak yazılır. (3.5)'de gelen alan global koordinat sistemine göre, saçılan alan ise saçıcının yerel koordinat sisteminde yazılmıştır. Gelen alanın da saçıcının yerel koordinatı üzerinde ifade edilmesi Graf toplamsallık teoremi [ek] ile mümkündür. Bu teorem uyarınca,

$$\Re g\psi^t(k_0, \rho_0) = \Re g\psi^t(k_0, \rho_1) \cdot \bar{\beta}_{10} \quad (3.6)$$

olarak yazılabilir. Burada $\bar{\beta}_{10}$, 1. koordinat sistemi ile 0. koordinat sistemi arasındaki geçişi sağlayan, duran dalga fonksiyonunu yine duran dalga fonksiyonuna dönüştüren “dönüşüm matrisi”dir ve,

$$[\bar{\beta}_{10}]_{np} = J_{p-n}(k_0 d_{10}) e^{-j(p-n)\phi_{10}} \quad (3.7)$$

olarak verilir. Burada d_{10} , 0.ve 1. koordinat sistemlerinin orijinleri arasındaki mesafe ve ϕ_{10} ise d_{10} uzunluğundaki bu doğru parçasının x_1 eksenine ile yaptığı açıdır. (3.6), (3.5)’de kullanılarak toplam alan ifadesi saçıcının yerel koordinatında yazıldığında,

$$\phi(\rho) = \Re g\psi^t(k_0, \rho_1) \cdot \bar{\beta}_{10} \cdot \mathbf{a} + \psi^t(k_0, \rho_1) \cdot \mathbf{f}_1 \quad (3.8)$$

elde edilir. Yukarıdaki denklemin ilk terimi saçıcının üzerine gelen alan, ikinci terim ise saçılan alandır. Böylece $\mathbf{a}$ ile $\mathbf{f}_1$ arasında (2.74) ve (2.106)’ya benzer biçimde bir ilişki kurulabilir,

$$\mathbf{f}_1 = \bar{\mathbf{T}}_{1(1)} \cdot \bar{\beta}_{10} \cdot \mathbf{a} \quad (3.9)$$

Burada $\bar{\mathbf{T}}_{1(1)}$ bir saçıcının var olduğu durum için saçıcıya ait T matrisi olup tek-saçıcılı T matrisi veya izole-saçıcı T matrisi olarak adlandırılır. (1) alt indisi T matrisinin izole-saçıcı T matrisi olduğunu, parantezin önündeki sayı ise kaçınıcı saçıcıya ait olduğunu ifade etmektedir. Birden fazla saçıcının var olduğu durumda i. saçıcı için de izole-saçıcı T matrisleri yazılabilir, bu vakaya sonraki başlıklarda değinilecektir. Yukarıdaki (3.9) denkleminde $\bar{\mathbf{T}}_{1(1)}$ için GSK veya Rayleigh Hipotezi yönteminin izlenilmesine göre iki seçim mümkündür. Bu seçimlerden biri GSK yöntemi için (2.75)’deki gibi,

$$\bar{\mathbf{T}}_{1(1)} = -(\Re g \bar{\mathbf{Q}}_{10}) \cdot \bar{\mathbf{Q}}_{10}^{-1} \quad (3.10)$$

veya Rayleigh Hipotezi yöntemi için (2.107)'daki gibi,

$$\bar{\mathbf{T}}_{1(1)} = -(\bar{\mathbf{Q}}_{10}^t)^{-1} \cdot \Re g \bar{\mathbf{Q}}_{10}^t \quad (3.11)$$

olabilir. (3.10) ve (3.11)'de verilen T matrisleri birbirinin devriğidir. 2.bölümde anlatıldığı gibi GSK ve Rayleigh Hipotezi yöntemleri, varsayımsal olarak birbirlerinden farklı olmalarına rağmen ortaya çıkan ifadeler bakımından birbirlerine denk yöntemlerdir. Bu sebeple (3.10) ve (3.11)'den birinin seçilmesi problemin çözümünü değiştirmez. Eğer $\bar{\mathbf{T}}_{1(1)}$ için (3.10) seçimi yapılırsa (2.67) ve (2.68) göz önünde bulundurularak,

$$Q_{nm}^{10} = \int_C \{ \psi_n(k_0, \rho'_1) \hat{n}' \cdot \nabla' \Re g \psi_m(k_1, \rho'_1) \frac{p_1}{p_0} - \Re g \psi_m(k_1, \rho'_1) \hat{n}' \cdot \nabla' \psi_n(k_0, \rho'_1) \} dl' \quad (3.12)$$

geçerli olur. Burada p_1 ve p_0 TM dalga uyarımı altında sırasıyla ilgili ortamın manyetik geçirgenliğinin çarpmaya göre tersi $\frac{1}{\mu_1}$ ve $\frac{1}{\mu_0}$ 'a, TE dalga uyarımı durumunda ise ilgili ortamın dielektrik sabitinin çarpmaya göre tersi $\frac{1}{\epsilon_1}$ ve $\frac{1}{\epsilon_0}$ 'a tekabül eder.

(3.12) yazılabilmesi en genel halde homojen ortam Green fonksiyonuna ait aşağıdaki seri açılımıyla mümkündür. Bu açılım (2.54)'den hareketle,

$$G_1(\rho_1, \rho'_1) = -jk_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \psi_n(k_0, \rho'_1) \Re g \psi_n(k_0, \rho_1), \quad \rho_1 < \rho'_1 \quad (3.13)$$

ile verilir. Öte yandan iki boyutta homojen ortam Green fonksiyonu,

$$G_1(\rho_1, \rho'_1) = -\frac{j}{4} H_0^{(2)}(k_0 |\rho_1 - \rho'_1|) \quad (3.14)$$

olup, bu Green fonksiyonuna ait seri açılımı ise,

$$-\frac{j}{4} H_0^{(2)}(k_0 |\rho_1 - \rho'_1|) = -\frac{j}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_n^{(2)}(k_0 \rho'_1) J_n(k_0 \rho_1) e^{jn(\phi_1 - \phi'_1)}, \quad \rho_1 < \rho'_1 \quad (3.15)$$

olur. Bu yüzden, eğer en genel halde yazılmış (3.12) ve (3.13) ifadeleri kullanılacaksa (3.13) göz önünde bulundurularak $\psi_n(k_0, \rho'_1)$ ve $\Re g \psi_n(k_0, \rho_1)$,

$$\psi_n(k_0, \rho'_1) = \frac{1}{2\sqrt{k_0}} H_n^{(2)}(k_0 \rho'_1) e^{-jn\phi'_1}, \quad \rho_1 < \rho'_1 \quad (3.16)$$

$$\Re g \psi_n(k_0, \rho_1) = \frac{1}{2\sqrt{k_0}} J_n(k_0 \rho_1) e^{jn\phi_1}, \quad \rho_1 < \rho'_1 \quad (3.17)$$

olmalıdır. Buna uygun olan $\Re g \psi_m(k_1, \rho'_1)$ ise,

$$\Re g \psi_m(k_1, \rho'_1) = \frac{1}{2\sqrt{k_0}} J_m(k_1 \rho'_1) e^{jm\phi'_1}, \quad \rho_1 < \rho'_1 \quad (3.18)$$

olur. En genel halde yazılmış seri ifadelerini doğrudan iki boyutta yazmak için, homojen ortam Green fonksiyonu seçiminin (3.14) gibi olmasından ötürü (3.13)'deki Green fonksiyonunun seri açılımında k_0 yerine $\frac{1}{4}$ yazılabilir. Bu durumda $G_1(\rho_1, \rho'_1)$,

$$G_1(\rho_1, \rho'_1) = -\frac{j}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \psi_n(k_0, \rho'_1) \Re g \psi_n(k_0, \rho_1), \quad \rho_1 < \rho'_1 \quad (3.19)$$

olur ve bu durumda (3.12) geçerliliğini korur. Ancak (3.16), (3.17) ve (3.18)'deki $\frac{1}{2\sqrt{k_0}}$ çarpanının da kaldırılması gerekir, böylece ortaya çıkan ifadeler (3.19) ve (3.12) ile uyumlu olur. (3.19) ve (3.12) için,

$$\psi_n(k_0, \rho'_1) = H_n^{(2)}(k_0 \rho'_1) e^{-jn\phi'_1}, \quad \rho_1 < \rho'_1 \quad (3.20)$$

$$\Re g \psi_n(k_0, \rho_1) = J_n(k_0 \rho_1) e^{jn\phi_1}, \quad \rho_1 < \rho'_1 \quad (3.21)$$

$$\Re g \psi_m(k_1, \rho'_1) = J_m(k_1 \rho'_1) e^{jm\phi'_1}, \quad \rho_1 < \rho'_1 \quad (3.22)$$

silindirik harmonikleri kullanılır.

Eğer $\bar{\mathbf{T}}_{1(1)}$ için (3.11) seçimi yapılırsa (2.102) ve (2.103) göz önünde bulundurularak,

$$Q_{nm}^{10} = \int_C \{ \hat{n}' \cdot \nabla' \Re g \psi_m(k_1, \rho_1) \psi_n(k_0, \rho_1) - \frac{p_0}{p_1} \Re g \psi_m(k_1, \rho_1) \hat{n} \cdot \nabla \psi_n(k_0, \rho_1) \} dl \quad (3.23)$$

geçerli olur. Daha önce anıldığı gibi, (3.23)'de de p_1 ve p_0 TM durumu için sırasıyla $\frac{1}{\mu_1}$ ve $\frac{1}{\mu_0}$ 'a, TE durumu için ise ilgili ortamın dielektrik sabiti $\frac{1}{\epsilon_1}$ ve $\frac{1}{\epsilon_0}$ 'a tekabül eder.

Buna ek olarak $\psi_n(k_i, \rho_1)$ ve $\Re g \psi_m(k_j, \rho_1)$,

$$\psi_n(k_0, \rho_1) = H_n^{(2)}(k_0 \rho_1) e^{-jn\phi_1}, \quad \rho_1 \in C_1 \quad (3.24)$$

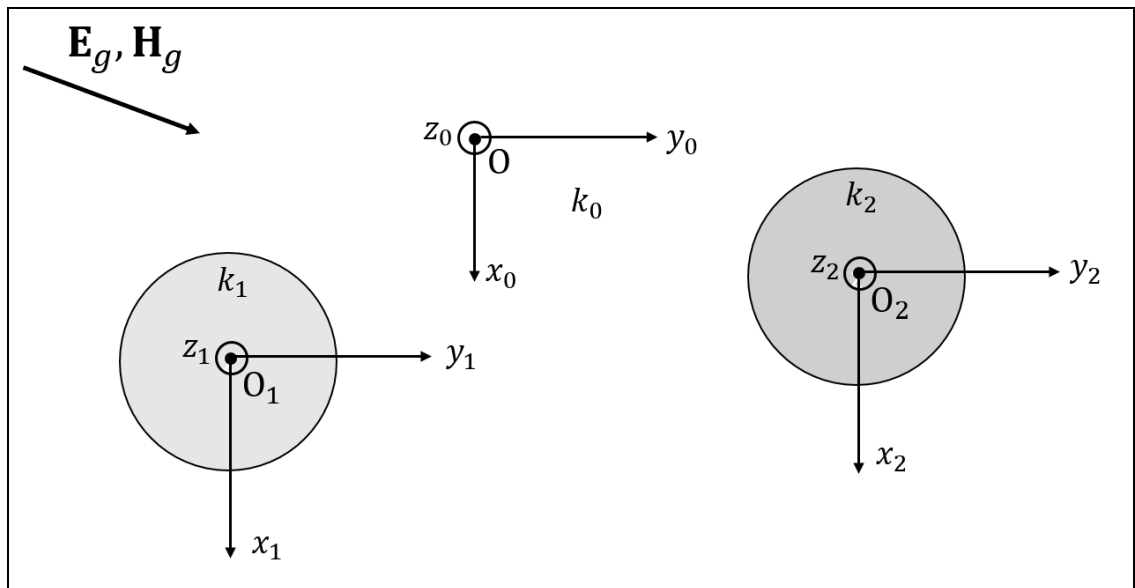
$$\Re g \psi_m(k_1, \rho_1) = J_m(k_1 \rho_1) e^{jm\phi_1}, \quad \rho_1 \in C_1 \quad (3.25)$$

ile verilir. Q_{nm}^{10} , $\bar{\mathbf{Q}}_{10}$ matrisinin elemanları olup, (2.67) gereği burada n satırlara, m ise sütunlara ilişkin indisi ifade eder. $\bar{\mathbf{T}}_{1(1)}$ için (3.11) seçimi yapılırsa, (2.103) gereği Q_{nm}^{10} 'da n sütunlara, m ise satırlara karşı gelen indisler olacaktır. Bu da (3.11)'de $\bar{\mathbf{Q}}_{10}$ matrisinin devriği $\bar{\mathbf{Q}}_{10}^t$ 'nin görünmesini açıklar.

T matrisi yöntemi uygulamasını varsayımsal olarak GSK yöntemine dayandırmak, T matrisi yönteminin doğrudan integral denklem çözümleri ile ilişkisini kurmak bakımından yararlıdır. Ancak bu varsayımı kullanarak T matrisi yöntemini kurmak nümerik hesaplama için (3.10) seçimini yapmaya zorlamaz. Her

ne kadar integral gösterimlere dayanmasa da Rayleigh hipotezi yöntemi, T matrislerinin çıkarımını GSK yöntemine kıyasla basitleştirmesinden ötürü tercih edilebilir. Bu sebeple, tek veya çok saçıcı durumlarda T matrisi yöntemi ile çözümler aranırken gelen alanın bilinen katsayılarını saçılan alanların bilinmeyen katsayılarına bağlayan bağıntıların ve nümerik hesaplamaların (3.11) seçimiyle ele alınmasının yanında fiziksel olayın ve T matrisi yönteminin integral denklemle olan ilişkisinin GSK yöntemi (sıfır alan yaklaşımı) ile ele alınması mümkündür. Sonraki bölümlerde yöntemin regülerleştirilmesi bu yaklaşımla ele alınacaktır.

(3.9) denklemi, tek saçıcı durum için saçılan alanın katsayılarını, gelen alanın katsayıları cinsinden ifade eder. Global koordinat sisteminde orijinden uzakta yer alan bir saçıcıyı aydınlatan gelen alan, bu koordinat sistemi üzerinde tanımlanmış gelen alanın dönüşüm matrisi yardımıyla saçıcının yerel koordinat sistemi üzerinde tanımlanması ile ifade edilir. Esasen tek saçıcı durum için $\bar{\beta}_{10}$ dönüşüm matrisinin kullanılmaması büyük önem arz etmez, alanın doğrudan saçıcı üzerine geldiği varsayılarak gelen alan ifadesi saçıcının yerel koordinatında yazılabilir. Ancak birden fazla saçıcının var olduğu durumda; i saçıcının numarası olmak üzere, gelen alanın i. saçıcının yerel koordinatında ifade edilmesi için $\bar{\beta}_{i0}$ dönüşüm matrisinin bağıntılarda olması önem kazanmaktadır. İlaveeten, çok saçıcı durum için özyinelemeli bir T matrisi algoritmasının çıkarılması yine 0.koordinat (global koordinat) sisteminin referans alınması ve bağıntılarda $\bar{\beta}_{i0}$ 'ın yer almasıyla mümkün olur.



Şekil 3.2: k_0 dalga sayılı ortamda iki silindirik saçıcıdan saçılma problemi.

3.1.2. İki Saçıcı Durum

Şekildeki gibi k_0 dalga sayılı ortamda k_1 ve k_2 dalga sayılı saçıcıların varlığında gelen alan ifadesi (3.1)'de de verildiği üzere aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\phi_g(\boldsymbol{\rho}) = \Re g \psi^t(k_0, \boldsymbol{\rho}_0) \cdot \mathbf{a} \quad (3.26)$$

Bu durumda saçılan alan ifadesi ise

$$\phi_s(\boldsymbol{\rho}) = \psi^t(k_0, \boldsymbol{\rho}_1) \cdot \mathbf{f}_1 + \psi^t(k_0, \boldsymbol{\rho}_2) \cdot \mathbf{f}_2 \quad (3.27)$$

olarak yazılabilir. 3.1'de olduğu gibi, “t” üst indisi vektörün devriğini ifade etmekte olup, $\psi^t(k, \boldsymbol{\rho})$, dışarı giden silindirik harmonikler cinsinden açılan saçılan alanları ifade eden satır vektörüdür. $\mathbf{a}$ ve $\mathbf{f}_i$ ise sırasıyla gelen alanın ve i. saçıcıdan saçılan alanın katsayılarını içeren sütun vektörleridir. n bir tam sayı ve $H_n^{(2)}(x)$ ikinci tür n. mertebeden Hankel fonksiyonu olmak üzere,

$$[\psi(k, \boldsymbol{\rho}_i)]_n = H_n^{(2)}(k\rho_i)e^{in\phi_i}, \quad n \in [-M, M] \quad (3.28)$$

ile verilir. ρ_i ve ϕ_i , ilgili saçıcının merkezini orijin kabul eden i. yerel koordinat sistemine göre yazılmış kutupsal koordinatlardır. Benzer biçimde $J_n(x)$ n. mertebeden Bessel fonksiyonu olmak üzere,

$$[\Re g \psi(k, \boldsymbol{\rho}_i)]_n = J_n(k\rho_i)e^{in\phi_i}, \quad n \in [-M, M] \quad (3.29)$$

olur. “ $\Re g$ ” önüne gelen fonksiyonun regüler kısmı anlamına gelmekte olup, iki boyutlu durumda $\rho_i = 0$ 'da tekil olan Hankel fonksiyonunu bu noktada regüler olan Bessel fonksiyonuna dönüştürür. Ayrıca (3.1)'deki ρ_0 ve ϕ_0 , global koordinat sistemine göre yazılmış kutupsal koordinatlardır.

k_0 dalga sayılı dış ortamda toplam alan ifadesi (3.26) ve (3.27) 'den hareketle,

$$\phi(\boldsymbol{\rho}) = \Re g\psi^t(k_0, \boldsymbol{\rho}_0) \cdot \mathbf{a} + \psi^t(k_0, \boldsymbol{\rho}_1) \cdot \mathbf{f}_1 + \psi^t(k_0, \boldsymbol{\rho}_2) \cdot \mathbf{f}_2 \quad (3.30)$$

olarak yazılır. Yukarıdaki denklemde her bir cisimden saçılan dalgalar, giden dalgalar cinsinden cisimlerin kendi koordinat sistemlerinde ifade edilmiş olup, gelen alan ise global koordinat sisteminde duran dalgalar cinsinden yazılmıştır. İlgilenilen bir cisimden saçılan dalgaların katsayılarını bulmak için toplam alan ifadesi (3.30)'ın o cismin yerel koordinat sisteminde yazılması gerekmektedir. Graf toplamsallık teoremi (E.1)-(E.3) uyarınca,

$$\Re g\psi^t(k_0, \boldsymbol{\rho}_i) = \Re g\psi^t(k_0, \boldsymbol{\rho}_j) \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{ji}, \quad \forall |\boldsymbol{\rho}_j| \quad (3.31)$$

$$\psi^t(k_0, \boldsymbol{\rho}_i) = \psi^t(k_0, \boldsymbol{\rho}_j) \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{ji}, \quad |\boldsymbol{\rho}_j| > d_{ji} \quad (3.32)$$

$$\psi^t(k_0, \boldsymbol{\rho}_i) = \Re g\psi^t(k_0, \boldsymbol{\rho}_j) \cdot \bar{\boldsymbol{\alpha}}_{ji}, \quad |\boldsymbol{\rho}_j| < d_{ji} \quad (3.33)$$

olarak yazılabilir. Burada $\bar{\boldsymbol{\beta}}_{ji}$, j. koordinat sistemi ile i. koordinat sistemi arasındaki geçişi sağlayan “dönüşüm matrisi” olup, çok saçıcıli durumda duran dalgaları duran dalgalara dönüştürürken, çok katmanlı durumda giden dalgaları tekrar giden dalgaları dönüştürür. $\bar{\boldsymbol{\alpha}}_{ji}$ ise benzer biçimde giden dalga fonksiyonunu duran dalga fonksiyonuna dönüştüren “dönüşüm matrisi”dir ve,

$$[\bar{\boldsymbol{\beta}}_{ji}]_{np} = J_{p-n}(k_0 d_{ji}) e^{-j(p-n)\phi_{ji}} \quad (3.34)$$

$$[\bar{\boldsymbol{\alpha}}_{ji}]_{np} = H_{p-n}^{(2)}(k_0 d_{ji}) e^{-j(p-n)\phi_{ji}} \quad (3.35)$$

olarak verilir. Burada d_{ji} , i.ve j. koordinat sistemlerinin orijinleri arasındaki mesafe ve ϕ_{ji} ise d_{ji} uzunluğundaki bu doğru parçasının x_j eksenine yaptığı açıdır. Ayrıca $\bar{\boldsymbol{\beta}}_{ji}$ ve $\bar{\boldsymbol{\alpha}}_{ji}$ arasında,

$$\bar{\boldsymbol{\beta}}_{ji} = \Re g\bar{\boldsymbol{\alpha}}_{ji} \quad (3.36)$$

ilişkisi kurulabilir. Çünkü $\bar{\beta}_{ji}$ Bessel fonksiyonunu içermekte olup, $\Re g$ takısı daha önce de bahsedildiği gibi $\bar{\alpha}_{ji}$ 'deki Hankel fonksiyonunu onun regüler kısmı olan Bessel fonksiyonlarına dönüştürür.

(3.31) ve (3.33), (3.30)'de kullanılarak saçıcıların dışındaki toplam alan ifadesi birinci saçıcının koordinatında yazılabilir. Böylece toplam alan ifadesi,

$$\begin{aligned} \phi(\rho) = \Re g \psi^t(k_0, \rho_1) \cdot \bar{\beta}_{10} \cdot \mathbf{a} + \psi^t(k_0, \rho_1) \cdot \mathbf{f}_1 \\ + \Re g \psi^t(k_0, \rho_1) \cdot \bar{\alpha}_{12} \cdot \mathbf{f}_2 \end{aligned} \quad (3.37)$$

halini alır. (3.37)'deki ikinci terim birinci saçıcıdan saçılan alanı ifade ederken birinci ve üçüncü terim birinci saçıcıya gelen alan olarak düşünülebilir. (3.37) buna göre yeniden düzenlenirse,

$$\phi(\rho) = \Re g \psi^t(k_0, \rho_1) \cdot [\bar{\beta}_{10} \cdot \mathbf{a} + \bar{\alpha}_{12} \cdot \mathbf{f}_2] + \psi^t(k_0, \rho_1) \cdot \mathbf{f}_1 \quad (3.38)$$

olur ve böylece izole-saçıcı T matrisi kullanılarak $\mathbf{f}_1$ için aşağıdaki ilişki kurulabilir:

$$\mathbf{f}_1 = \bar{\mathbf{T}}_{1(1)} \cdot [\bar{\beta}_{10} \cdot \mathbf{a} + \bar{\alpha}_{12} \cdot \mathbf{f}_2] \quad (3.39)$$

Benzer biçimde, (3.31) ve (3.33) kullanılarak toplam alan ifadesi (3.30) ikinci saçıcının koordinatında yazılırsa,

$$\phi(\rho) = \Re g \psi^t(k_0, \rho_2) \cdot [\bar{\beta}_{20} \cdot \mathbf{a} + \bar{\alpha}_{21} \cdot \mathbf{f}_1] + \psi^t(k_0, \rho_2) \cdot \mathbf{f}_2 \quad (3.40)$$

elde edilir ve bu durumda $\mathbf{f}_2$ için aşağıdaki ilişki kurulabilir:

$$\mathbf{f}_2 = \bar{\mathbf{T}}_{2(1)} \cdot [\bar{\beta}_{20} \cdot \mathbf{a} + \bar{\alpha}_{21} \cdot \mathbf{f}_1] \quad (3.41)$$

(3.39) ve (3.41)'deki $\bar{\mathbf{T}}_{i(1)}$, i. saçıcıya ait tek saçıcı T matrisi olup tek-saçıcı T matrisi veya izole-saçıcı T matrisi olarak adlandırılır. i(1) alt indisi T matrisinin i.

saçıcıya ait izole-saçıcı T matrisi olduğunu ifade etmekte olup, $\bar{\mathbf{T}}_{i(1)}$, GSK yönteminin seçimiyle (3.10)'a benzer biçimde,

$$\bar{\mathbf{T}}_{i(1)} = -(\Re g \bar{\mathbf{Q}}_{i0}) \cdot \bar{\mathbf{Q}}_{i0}^{-1} \quad (3.42)$$

olarak tanımlanır. Burada $\bar{\mathbf{Q}}_{i0}$,

$$[\bar{\mathbf{Q}}_{i0}]_{nm} = \int_C \{ \psi_n(k_0, \rho'_i) \hat{n}' \cdot \nabla' \Re g \psi_m(k_i, \rho'_i) \frac{p_i}{p_0} - \Re g \psi_m(k_i, \rho'_i) \hat{n}' \cdot \nabla' \psi_n(k_0, \rho'_i) \} dl' \quad (3.43)$$

olur ve

$$\psi_n(k_0, \rho'_i) = H_n^{(2)}(k_0 \rho'_i) e^{-jn\phi'_i}, \quad \rho_i < \rho'_i \quad (3.44)$$

$$\Re g \psi_m(k_i, \rho'_i) = J_m(k_i \rho'_i) e^{jm\phi'_i}, \quad \rho_i < \rho'_i \quad (3.45)$$

silindirik harmonik tanımları kullanılır. $\bar{\mathbf{T}}_{i(1)}$ 'in Rayleigh hipotezi yöntemiyle gelen tanımı ise (3.11)'e benzer biçimde,

$$\bar{\mathbf{T}}_{i(1)} = -(\bar{\mathbf{Q}}_{i0}^t)^{-1} \cdot \Re g \bar{\mathbf{Q}}_{i0}^t \quad (3.46)$$

olup, $\bar{\mathbf{Q}}_{i0}^t$ için,

$$[\bar{\mathbf{Q}}_{i0}^t]_{mn} = \int_C \{ \hat{n}' \cdot \nabla' \Re g \psi_m(k_i, \rho'_i) \psi_n(k_0, \rho'_i) - \frac{p_0}{p_i} \Re g \psi_m(k_i, \rho_i) \hat{n} \cdot \nabla \psi_n(k_0, \rho_i) \} dl \quad (3.47)$$

geçerli olur. Burada $\psi_n(k_0, \rho_i)$ ve $\Re g \psi_m(k_i, \rho_i)$,

$$\psi_n(k_0, \rho_i) = H_n^{(2)}(k_0 \rho_i) e^{-jn\phi_i}, \quad \rho_i \in C_i \quad (3.48)$$

$$\Re g \psi_m(k_i, \rho_i) = J_m(k_i \rho_i) e^{jm\phi_i}, \quad \rho_i \in C_i \quad (3.49)$$

olarak verilir. İzole-saçıcı T matrisinin (3.42) veya (3.46)'den birinin seçilerek nümerik olarak hesaplanmasıyla (3.39) ve (3.40) ilişkileri kullanarak saçıcılardan saçılan alanlara ait bilinmeyen katsayılar bulunabilir. (3.39) ve (3.41) denklemleri düzenlenirse,

$$\mathbf{f}_1 - \bar{\mathbf{T}}_{1(1)} \cdot \bar{\boldsymbol{\alpha}}_{12} \cdot \mathbf{f}_2 = \bar{\mathbf{T}}_{1(1)} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{10} \cdot \mathbf{a} \quad (3.50)$$

$$\mathbf{f}_2 - \bar{\mathbf{T}}_{2(1)} \cdot \bar{\boldsymbol{\alpha}}_{21} \cdot \mathbf{f}_1 = \bar{\mathbf{T}}_{2(1)} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{20} \cdot \mathbf{a} \quad (3.51)$$

elde edilir. Buradan,

$$A_{ij} = \begin{cases} \bar{\mathbf{I}} & i = j \\ -\bar{\mathbf{T}}_{i(1)} \cdot \bar{\boldsymbol{\alpha}}_{ij} & i \neq j \end{cases} \quad (3.52)$$

$$\mathbf{b}_i = \bar{\mathbf{T}}_{i(1)} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{i0} \cdot \mathbf{a} \quad (3.53)$$

ile verilen A_{ij} , $\bar{\mathbf{A}}$ matrisinin blokları ve $\mathbf{b}_i$, $\mathbf{b}$ vektörünün blokları olmak üzere bir $\bar{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{f} = \mathbf{b}$ sistemi oluşturulup çözüm aranabilir. Çözüm için izlenebilecek bir diğer yol ise $\mathbf{f}_1$ ve $\mathbf{f}_2$ 'yi bilinen nicelikler cinsinden ifade ederek hesaplamaktır. (3.41) , (3.39)'da yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_1 = & \bar{\mathbf{T}}_{1(1)} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{10} \cdot \mathbf{a} + \bar{\mathbf{T}}_{1(1)} \cdot \bar{\boldsymbol{\alpha}}_{12} \cdot \bar{\mathbf{T}}_{2(1)} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{20} \cdot \mathbf{a} \\ & + \bar{\mathbf{T}}_{1(1)} \cdot \bar{\boldsymbol{\alpha}}_{12} \cdot \bar{\mathbf{T}}_{2(1)} \cdot \bar{\boldsymbol{\alpha}}_{21} \cdot \mathbf{f}_1 \end{aligned} \quad (3.54)$$

olur. $\mathbf{f}_1$ 'li ve $\mathbf{a}$ 'lı terimler paranteze alınırsa $\bar{\mathbf{I}}$ birim matris olmak üzere,

$$\begin{aligned}
& [\bar{\mathbf{I}} - \bar{\mathbf{T}}_{1(1)} \cdot \bar{\boldsymbol{\alpha}}_{12} \cdot \bar{\mathbf{T}}_{2(1)} \cdot \bar{\boldsymbol{\alpha}}_{21}] \cdot \mathbf{f}_1 \\
& = \bar{\mathbf{T}}_{1(1)} \cdot [\bar{\boldsymbol{\beta}}_{10} + \bar{\boldsymbol{\alpha}}_{12} \cdot \bar{\mathbf{T}}_{2(1)} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{20}] \cdot \mathbf{a}
\end{aligned} \tag{3.55}$$

elde edilir. Son olarak, sol yanda $\mathbf{f}_1$ 'in yalnız bırakılmasıyla,

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_1 & = [\bar{\mathbf{I}} - \bar{\mathbf{T}}_{1(1)} \cdot \bar{\boldsymbol{\alpha}}_{12} \cdot \bar{\mathbf{T}}_{2(1)} \cdot \bar{\boldsymbol{\alpha}}_{21}]^{-1} \\
& \cdot \bar{\mathbf{T}}_{1(1)} \cdot [\bar{\boldsymbol{\beta}}_{10} + \bar{\boldsymbol{\alpha}}_{12} \cdot \bar{\mathbf{T}}_{2(1)} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{20}] \cdot \mathbf{a}
\end{aligned} \tag{3.56}$$

ifadesine varılır. Benzer şekilde bu defa (3.39), (3.41)'de yerine yazılır ve $\mathbf{f}_2$ yalnız bırakılırsa,

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_2 & = [\bar{\mathbf{I}} - \bar{\mathbf{T}}_{2(1)} \cdot \bar{\boldsymbol{\alpha}}_{21} \cdot \bar{\mathbf{T}}_{1(1)} \cdot \bar{\boldsymbol{\alpha}}_{12}]^{-1} \\
& \cdot \bar{\mathbf{T}}_{2(1)} \cdot [\bar{\boldsymbol{\beta}}_{20} + \bar{\boldsymbol{\alpha}}_{21} \cdot \bar{\mathbf{T}}_{1(1)} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{10}] \cdot \mathbf{a}
\end{aligned} \tag{3.57}$$

ifadesine varılır. Böylece $\bar{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{f} = \mathbf{b}$ gibi bir matris denklem sistemi oluşturmadan bilinmeyen $\mathbf{f}_1$ ve $\mathbf{f}_2$ katsayılarını bulmak mümkün olur. (3.56) ve (3.57)'den hareketle tanımlanan yeni T matrisleri,

$$\mathbf{f}_1 = \bar{\mathbf{T}}_{1(2)} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{10} \cdot \mathbf{a} \tag{3.58}$$

$$\mathbf{f}_2 = \bar{\mathbf{T}}_{2(2)} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{20} \cdot \mathbf{a} \tag{3.59}$$

olur. Burada $\bar{\mathbf{T}}_{i(2)}$, iki saçıcı T matrisi olup, iki saçıcının var olduğu durumda i. saçıcıdan toplam saçılan alanın katsayılarını gelen alanın katsayıları ile ilişkilendirir. Buna ek olarak, (3.58) ve (3.59)'da görünen $\bar{\boldsymbol{\beta}}_{i0}$ ise T matrislerinin ilgili saçıcının yerel koordinat sisteminde tanımlı kalmalarını mümkün kılar.

İlgili saçıcılardan saçılan alanlara ait $\mathbf{f}_1$ ve $\mathbf{f}_2$ katsayılarını özyinelemeli olarak bulmak için önce $\bar{\mathbf{T}}_{2(2)} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{20}$ 'ın hesaplanması gerekir. (3.57) ve (3.59)'dan,

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{T}}_{2(2)} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{20} \cdot \mathbf{a} &= [\bar{\mathbf{I}} - \bar{\mathbf{T}}_{2(1)} \cdot \bar{\boldsymbol{\alpha}}_{21} \cdot \bar{\mathbf{T}}_{1(1)} \cdot \bar{\boldsymbol{\alpha}}_{12}]^{-1} \\ &\cdot \bar{\mathbf{T}}_{2(1)} \cdot [\bar{\boldsymbol{\beta}}_{20} + \bar{\boldsymbol{\alpha}}_{21} \cdot \bar{\mathbf{T}}_{1(1)} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{10}] \cdot \mathbf{a} \end{aligned} \quad (3.60)$$

yazılabilir. Ayrıca (3.58) ve (3.59), (3.39)'da kullanılarak,

$$\bar{\mathbf{T}}_{1(2)} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{10} \cdot \mathbf{a} = \bar{\mathbf{T}}_{1(1)} \cdot [\bar{\boldsymbol{\beta}}_{10} + \bar{\boldsymbol{\alpha}}_{12} \cdot \bar{\mathbf{T}}_{2(2)} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{20}] \cdot \mathbf{a} \quad (3.61)$$

elde edilir. (3.60) ve (3.61), $\bar{\mathbf{T}}_{2(2)} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{20}$ ve $\bar{\mathbf{T}}_{1(2)} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{10}$ matrislerini hesaplamak için yeterli olup özyinelemeli bir algoritma oluşturmak için henüz yeterli değildir. Özyinelemeli algoritmanın altında yatan temel düşünce, saçılan alanların katsayılarıyla ilişkili T matrislerini bir önceki durumda ortaya çıkan T matrislerinden hesaplayabilmektir. Yani, saçıcı sayısı bir saçıcıdan ikiye çıkarıldığında özyinelemeli bir algoritmanın varlığıyla iki saçıcı T matrislerinin bir saçıcı T matrisleri cinsinden hesaplanması gerekmektedir. Benzer biçimde saçıcı sayısı ikiden üçe çıkarıldığında ise üç saçıcı T matrisleri, iki saçıcı T matrisleri cinsinden hesaplanabilmelidir. Her ne kadar (3.60) ve (3.61) iki saçıcı T matrislerini hesaplamak için yeterli olsa da (3.58) ve (3.59)'ın tanımından ötürü genelleştirilmiş bir özyinelemeli ilişkinin kurulabilmesi adına (3.61)'nin $\bar{\mathbf{T}}_{1(1)} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{10}$ parantezine alınması ve (3.60)'in $\bar{\mathbf{T}}_{1(1)} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{10}$ 'a bağlı yazılması gerekmektedir. Bunun için toplam alan ifadesi (3.30), (3.31) ve (3.33) yardımıyla birinci saçıcının yerel koordinatında yazılırken ikinci saçıcıdan saçılan alan ifadesi 0.koordinat sisteminde yazılırsa,

$$\begin{aligned} \phi(\boldsymbol{\rho}) &= \Re g \psi^t(k_0, \boldsymbol{\rho}_1) \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{10} \cdot \mathbf{a} + \psi^t(k_0, \boldsymbol{\rho}_1) \cdot \mathbf{f}_1 \\ &\quad + \Re g \psi^t(k_0, \boldsymbol{\rho}_0) \cdot \bar{\boldsymbol{\alpha}}_{02} \cdot \mathbf{f}_2 \end{aligned} \quad (3.62)$$

elde edilir. (3.62)'deki üçüncü terimin $|\boldsymbol{\rho}_0| < d_{02}$ olduğu durumda geçerli olduğu unutulmamalıdır. Öte yandan (3.62)'deki üçüncü terim (3.31) yardımıyla birinci saçıcının yerel koordinatında yazıldığında (3.62),

$$\begin{aligned} \phi(\boldsymbol{\rho}) &= \Re g \psi^t(k_0, \boldsymbol{\rho}_1) \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{10} \cdot \mathbf{a} + \psi^t(k_0, \boldsymbol{\rho}_1) \cdot \mathbf{f}_1 \\ &\quad + \Re g \psi^t(k_0, \boldsymbol{\rho}_1) \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{10} \cdot \bar{\boldsymbol{\alpha}}_{02} \cdot \mathbf{f}_2 \end{aligned} \quad (3.63)$$

halini alır. (3.31) dönüşümü bütün $|\rho_1|$ için geçerli olduğundan (3.63)'ün geçerliliği, (3.62)'deki gibi $|\rho_0| < d_{02}$ koşulu altında sağlanır. Bu koşulun sağlanması için ikinci saçıcının merkezinin, merkezi $\rho_0 = 0$ 'da olan ve birinci saçıcıyı kapsayan en küçük dairenin dışında olması gerekmektedir. İkinci saçıcının ρ_0 yarıçaplı böyle bir dairenin dışında olması, birinci saçıcıdan daha uzakta olduğu anlamına gelir. Buradan hareketle ve (3.63)'ün (3.37)'e denk olduğu göz önünde bulundurularak,

$$\bar{\alpha}_{12} = \bar{\beta}_{10} \cdot \bar{\alpha}_{02}, \quad \rho_{02} > \rho_{01} \quad (3.64)$$

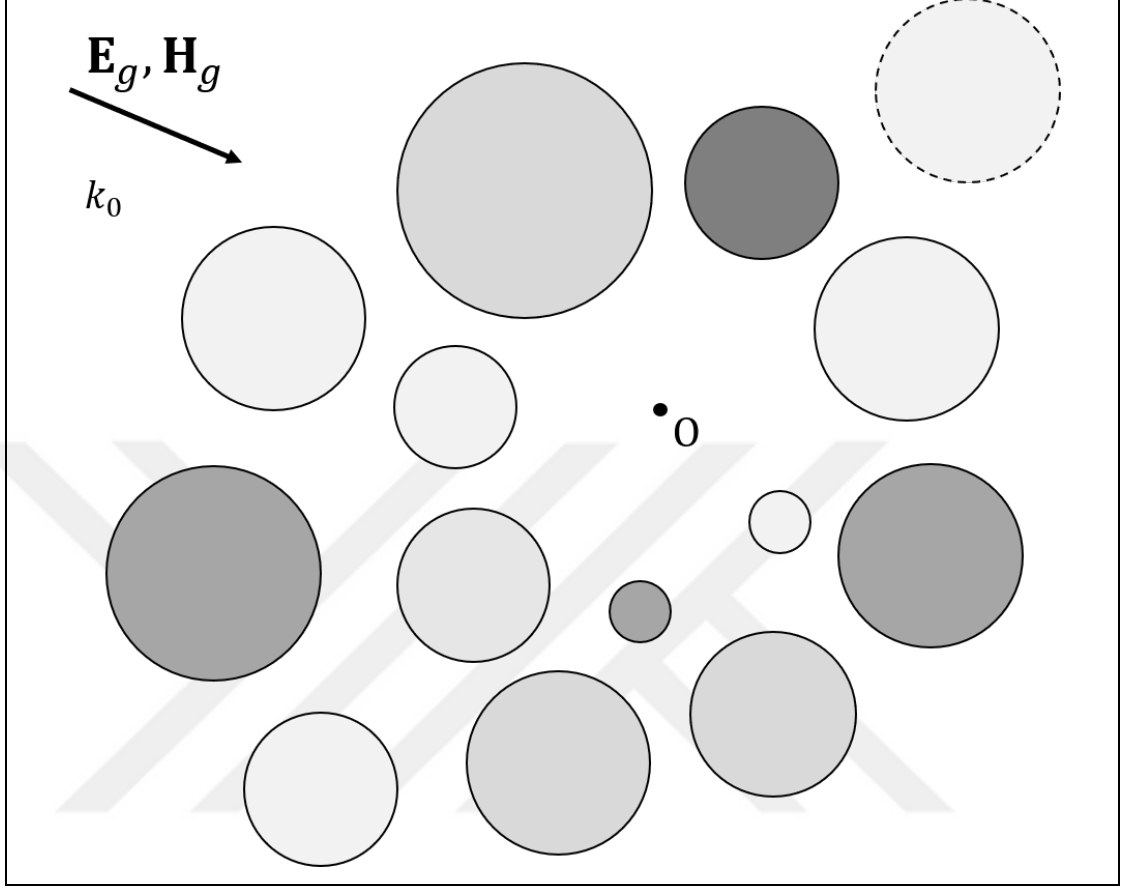
yazılabilir. Burada ρ_{02} ve ρ_{01} , sırasıyla ikinci ve birinci saçıcının merkezinin global koordinat sisteminin orijinine olan mesafedir. (3.64), (3.60) ve (3.61) ifadelerinde yerine yazılır ve denklemin her iki tarafındaki $\mathbf{a}$ vektörü atılırsa,

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{T}}_{2(2)} \cdot \bar{\beta}_{20} &= [\bar{\mathbf{I}} - \bar{\mathbf{T}}_{2(1)} \cdot \bar{\alpha}_{21} \cdot \bar{\mathbf{T}}_{1(1)} \cdot \bar{\beta}_{10} \cdot \bar{\alpha}_{02}]^{-1} \\ &\quad \cdot \bar{\mathbf{T}}_{2(1)} \cdot [\bar{\beta}_{20} + \bar{\alpha}_{21} \cdot \bar{\mathbf{T}}_{1(1)} \cdot \bar{\beta}_{10}] \end{aligned} \quad (3.65)$$

$$\bar{\mathbf{T}}_{1(2)} \cdot \bar{\beta}_{10} = \bar{\mathbf{T}}_{1(1)} \cdot \bar{\beta}_{10} \cdot [\bar{\mathbf{I}} + \bar{\alpha}_{02} \cdot \bar{\mathbf{T}}_{2(2)} \cdot \bar{\beta}_{20}] \quad (3.66)$$

özyineleme ilişkileri elde edilir. Böylece tek saçıcılı durum için (3.9) ile verilen ve nümerik olarak hesaplanan $\bar{\mathbf{T}}_{1(1)} \cdot \bar{\beta}_{10}$ doğrudan (3.65)'de kullanılarak $\bar{\mathbf{T}}_{2(2)} \cdot \bar{\beta}_{20}$ bulunabilir. Elde edilen $\bar{\mathbf{T}}_{2(2)} \cdot \bar{\beta}_{20}$ matrisi ise (3.66)'de kullanılarak $\bar{\mathbf{T}}_{1(2)} \cdot \bar{\beta}_{10}$ matrisi hesaplanabilir. Eğer ortama bu iki saçıcıyı kapsayan $\rho_0 = 0$ merkezli dairenin dışında üçüncü bir saçıcı eklenirse üç saçıcılı T matrislerini özyinelemeli bir algoritmayla nümerik olarak hesaplamak için $\bar{\mathbf{T}}_{1(2)} \cdot \bar{\beta}_{10}$ ve $\bar{\mathbf{T}}_{2(2)} \cdot \bar{\beta}_{20}$ matrislerine ihtiyaç duyulur. Esasen, iki saçıcılı durum için $\bar{\mathbf{T}}_{1(1)} \cdot \bar{\beta}_{10}$ matrisini özyinelemeli bir algoritma için bir bütün olarak ele almak gösterim olarak önemli olsa da nümerik olarak önem arz etmez. Çünkü $\bar{\mathbf{T}}_{1(1)}$ izole-saçıcı T matrisinin ve $\bar{\beta}_{10}$ dönüşüm matrisinin her halükârda ayrı ayrı hesaplanarak çarpılmaları gerekmektedir. Fakat ikiden daha fazla saçıcının var olduğu durumda, sonraki bölümde tanıtılacak olan $\bar{\mathbf{T}}_{i(N)} \cdot \bar{\beta}_{i0}$ matris çarpımı, bu iki matrisin ayrı ayrı hesaplanarak çarpılmasını

gerektirmez, bu bölümde temelleri atılan özyinelemeli algoritma ile otomatikman hesaplanmış olur.



Şekil 3.3: k_0 dalga sayılı ortamda N tane silindirik saçıcı.

3.1.3. N Saçıcı Durum

Bir önceki bölümde iki saçıcı durum için bir saçıcı durumun çözümleri kullanılarak bir çözüm elde etmek için denklemler kurulmuş ve buradan özyinelemeli bir ilişki elde edilmişti. Bu özyinelemeli ilişki, Şekil 3.3'deki gibi N+1 saçıcı durumda çözümlerin N saçıcı durumdan elde edilebilmesi için genişletilebilir. Bu genişletmenin iyi anlaşılması için k_0 dalga sayılı ortamda üç saçıcının olduğu durum ele alınsın. Bu durumda dış bölgedeki toplam alan ifadesi,

$$\begin{aligned} \phi(\rho) = & \Re g \psi^t(k_0, \rho_0) \cdot \mathbf{a} + \psi^t(k_0, \rho_1) \cdot \mathbf{f}_1 \\ & + \psi^t(k_0, \rho_2) \cdot \mathbf{f}_2 + \psi^t(k_0, \rho_3) \cdot \mathbf{f}_3 \end{aligned} \quad (3.67)$$

olur. (3.31) ve (3.33) yardımıyla toplam alan her bir saçıcının yerel koordinatında yazılır ve ifade düzenlenirse,

$$\begin{aligned} \phi(\boldsymbol{\rho}) = \Re g \psi^t(k_0, \boldsymbol{\rho}_1) \cdot [\bar{\boldsymbol{\beta}}_{10} \cdot \mathbf{a} + \bar{\boldsymbol{\alpha}}_{12} \cdot \mathbf{f}_2 + \bar{\boldsymbol{\alpha}}_{13} \cdot \mathbf{f}_3] \\ + \psi^t(k_0, \boldsymbol{\rho}_1) \cdot \mathbf{f}_1 \end{aligned} \quad (3.68)$$

$$\begin{aligned} \phi(\boldsymbol{\rho}) = \Re g \psi^t(k_0, \boldsymbol{\rho}_2) \cdot [\bar{\boldsymbol{\beta}}_{20} \cdot \mathbf{a} + \bar{\boldsymbol{\alpha}}_{21} \cdot \mathbf{f}_1 + \bar{\boldsymbol{\alpha}}_{23} \cdot \mathbf{f}_3] \\ + \psi^t(k_0, \boldsymbol{\rho}_2) \cdot \mathbf{f}_2 \end{aligned} \quad (3.69)$$

$$\begin{aligned} \phi(\boldsymbol{\rho}) = \Re g \psi^t(k_0, \boldsymbol{\rho}_3) \cdot [\bar{\boldsymbol{\beta}}_{30} \cdot \mathbf{a} + \bar{\boldsymbol{\alpha}}_{31} \cdot \mathbf{f}_1 + \bar{\boldsymbol{\alpha}}_{32} \cdot \mathbf{f}_2] \\ + \psi^t(k_0, \boldsymbol{\rho}_3) \cdot \mathbf{f}_3 \end{aligned} \quad (3.70)$$

elde edilir. (3.68) ve (3.69) 'de üçüncü saçıcıdan saçılan alan, doğrudan ilgilenilen saçıcının yerel koordinatında ifade edilebileceği gibi önce 0. koordinat sistemi üzerinde yazılıp ardından ilgili saçıcının yerel koordinatında da yazılabilir. Örneğin, i. saçıcıdan saçılan alan ifadesi, doğrudan j. saçıcının yerel koordinatlarında ifade edilsin. Bu durumda (3.33)'den,

$$\psi^t(k_0, \boldsymbol{\rho}_i) = \Re g \psi^t(k_0, \boldsymbol{\rho}_j) \cdot \bar{\boldsymbol{\alpha}}_{ji}, \quad |\boldsymbol{\rho}_j| < d_{ji} \quad (3.71)$$

olur. Öte yandan i. saçıcıdan saçılan alan 0.koordinatta ifade edilsin. Bu durumda ise,

$$\psi^t(k_0, \boldsymbol{\rho}_i) = \Re g \psi^t(k_0, \boldsymbol{\rho}_0) \cdot \bar{\boldsymbol{\alpha}}_{0i}, \quad |\boldsymbol{\rho}_0| < d_{0i} \quad (3.72)$$

elde edilir. (3.72)'ün sağ yanındaki 0.koordinat sisteminde yazılmış ifade (3.31) kullanılarak j. saçıcının yerel koordinatlarında yazılırsa,

$$\Re g \psi^t(k_0, \boldsymbol{\rho}_0) = \Re g \psi^t(k_0, \boldsymbol{\rho}_j) \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{j0}, \quad \forall |\boldsymbol{\rho}_j| \quad (3.73)$$

$$\psi^t(k_0, \boldsymbol{\rho}_i) = \Re g \psi^t(k_0, \boldsymbol{\rho}_j) \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{j0} \cdot \bar{\boldsymbol{\alpha}}_{0i}, \quad |\boldsymbol{\rho}_0| < d_{0i} \quad (3.74)$$

ifadelerine varılır. (3.71) ve (3.74) birbirlerine denk ifadeler olduğundan $\bar{\boldsymbol{\alpha}}_{ji}$ için,

$$\bar{\alpha}_{ji} = \bar{\beta}_{j0} \cdot \bar{\alpha}_{0i}, \quad \rho_{0i} > \rho_{0j} \quad (3.75)$$

yazılması mümkün olur. Burada ρ_{0i} ve ρ_{0j} , sırasıyla i. ve j. saçıcının merkezinin global koordinat sisteminin orijinine olan mesafedir. Böylece, üçüncü saçıcının birinci ve ikinci saçıcıdan uzakta olması koşuluyla (3.68) ve (3.69)'deki $\bar{\alpha}_{13}$ ve $\bar{\alpha}_{23}$ dönüşüm matrislerini sırasıyla $\bar{\beta}_{10} \cdot \bar{\alpha}_{03}$ ve $\bar{\beta}_{20} \cdot \bar{\alpha}_{03}$ olarak yazmak mümkün olur.

Her bir saçıcıdan saçılan alanların katsayıları için (3.68), (3.69) ve (3.70) yardımıyla aşağıdaki ilişkiler elde edilir:

$$f_1 = \bar{T}_{1(1)} \cdot [\bar{\beta}_{10} \cdot a + \bar{\alpha}_{12} \cdot f_2 + \bar{\alpha}_{13} \cdot f_3] \quad (3.76)$$

$$f_2 = \bar{T}_{2(1)} \cdot [\bar{\beta}_{20} \cdot a + \bar{\alpha}_{21} \cdot f_1 + \bar{\alpha}_{23} \cdot f_3] \quad (3.77)$$

$$f_3 = \bar{T}_{3(1)} \cdot [\bar{\beta}_{30} \cdot a + \bar{\alpha}_{31} \cdot f_1 + \bar{\alpha}_{32} \cdot f_2] \quad (3.78)$$

Burada $\bar{T}_{i(1)}$ daha önce anıldığı gibi i. saçıcının izole-saçıcı T matrisidir. Ayrıca (3.76), (3.77) ve (3.78) denklemleri bir $\bar{A} \cdot f = b$ sistemi kurularak doğrudan çözülebilir. Fakat iki saçıcılı durumda elde edilen (3.60) ve (3.61)'ye benzer bir özyinelemeli ilişki elde edebilmek adına (3.77), (3.76)'de yerine yazılır ve ifade düzenlenirse,

$$\begin{aligned} f_1 = & [\bar{T}_{1(1)} \cdot \bar{\beta}_{10} + \bar{T}_{1(1)} \cdot \bar{\alpha}_{12} \cdot \bar{T}_{2(1)} \cdot \bar{\beta}_{20}] \cdot a \\ & + [\bar{T}_{1(1)} \cdot \bar{\alpha}_{12} \cdot \bar{T}_{2(1)} \cdot \bar{\alpha}_{21}] \cdot f_1 \\ & + [\bar{T}_{1(1)} \cdot \bar{\alpha}_{12} \cdot \bar{T}_{2(1)} \cdot \bar{\alpha}_{23} + \bar{T}_{1(1)} \cdot \bar{\alpha}_{13}] \cdot f_3 \end{aligned} \quad (3.79)$$

elde edilir. (3.75) kullanılarak (3.79)'deki üçüncü terim $\bar{\alpha}_{03}$ parantezine alınarak birinci terime benzetilir ve ikinci terim sol tarafa atılırsa (3.79),

$$\begin{aligned} & [\bar{I} - \bar{T}_{1(1)} \cdot \bar{\alpha}_{12} \cdot \bar{T}_{2(1)} \cdot \bar{\alpha}_{21}] \cdot f_1 \\ & = [\bar{T}_{1(1)} \cdot \bar{\beta}_{10} + \bar{T}_{1(1)} \cdot \bar{\alpha}_{12} \cdot \bar{T}_{2(1)} \cdot \bar{\beta}_{20}] \cdot a \\ & \quad + [\bar{T}_{1(1)} \cdot \bar{\alpha}_{12} \cdot \bar{T}_{2(1)} \cdot \bar{\beta}_{20} + \bar{T}_{1(1)} \cdot \bar{\beta}_{10}] \cdot \bar{\alpha}_{03} \cdot f_3 \end{aligned} \quad (3.80)$$

halini alır. Son olarak, sol yanda f_1 'in yalnız bırakılmasıyla,

$$\begin{aligned}
f_1 = & [\bar{I} - \bar{T}_{1(1)} \cdot \bar{\alpha}_{12} \cdot \bar{T}_{2(1)} \cdot \bar{\alpha}_{21}]^{-1} \\
& \cdot [\bar{T}_{1(1)} \cdot \bar{\beta}_{10} + \bar{T}_{1(1)} \cdot \bar{\alpha}_{12} \cdot \bar{T}_{2(1)} \cdot \bar{\beta}_{20}] \cdot a \\
& + [\bar{I} - \bar{T}_{1(1)} \cdot \bar{\alpha}_{12} \cdot \bar{T}_{2(1)} \cdot \bar{\alpha}_{21}]^{-1} \\
& \cdot [\bar{T}_{1(1)} \cdot \bar{\alpha}_{12} \cdot \bar{T}_{2(1)} \cdot \bar{\beta}_{20} + \bar{T}_{1(1)} \cdot \bar{\beta}_{10}] \cdot \bar{\alpha}_{03} \cdot f_3
\end{aligned} \tag{3.81}$$

ifadesine varılır. (3.56) ve (3.58) göz önünde bulundurularak açıkça görülebileceği üzere, (3.81)'de köşeli parantezli çarpım iki saçıcı için geçerli $\bar{T}_{1(2)} \cdot \bar{\beta}_{10}$ matrisidir. Buradan hareketle (3.81),

$$f_1 = \bar{T}_{1(2)} \cdot \bar{\beta}_{10} \cdot a + \bar{T}_{1(2)} \cdot \bar{\beta}_{10} \cdot \bar{\alpha}_{03} \cdot f_3 \tag{3.82}$$

olur. Benzer biçimde (3.76), (3.77)'de yerine yazılır, ortaya çıkan ifade $\bar{\alpha}_{03}$ parantezine alınır ve düzenlenirse,

$$\begin{aligned}
f_2 = & [\bar{I} - \bar{T}_{2(1)} \cdot \bar{\alpha}_{21} \cdot \bar{T}_{1(1)} \cdot \bar{\alpha}_{12}]^{-1} \\
& \cdot [\bar{T}_{2(1)} \cdot \bar{\beta}_{20} + \bar{T}_{2(1)} \cdot \bar{\alpha}_{21} \cdot \bar{T}_{1(1)} \cdot \bar{\beta}_{10}] \cdot a \\
& + [\bar{I} - \bar{T}_{2(1)} \cdot \bar{\alpha}_{21} \cdot \bar{T}_{1(1)} \cdot \bar{\alpha}_{12}]^{-1} \\
& \cdot [\bar{T}_{2(1)} \cdot \bar{\alpha}_{21} \cdot \bar{T}_{1(1)} \cdot \bar{\beta}_{10} + \bar{T}_{2(1)} \cdot \bar{\beta}_{20}] \cdot \bar{\alpha}_{03} \cdot f_3
\end{aligned} \tag{3.83}$$

elde edilir. Bu durumda (3.57) ve (3.59)'da görülebileceği üzere (3.83)'deki köşeli parantezli çarpımın iki saçıcı için geçerli $\bar{T}_{2(2)} \cdot \bar{\beta}_{20}$ matrisini ifade etmekte olup, buradan hareketle,

$$f_2 = \bar{T}_{2(2)} \cdot \bar{\beta}_{20} \cdot a + \bar{T}_{2(2)} \cdot \bar{\beta}_{20} \cdot \bar{\alpha}_{03} \cdot f_3 \tag{3.84}$$

ifadesine varılır. Üç saçıcılı durum için f_1 ve f_2 katsayılarını (3.82) ve (3.84)'deki gibi iki saçıcılı T matrisleri cinsinden ifade etmek (3.75) özdeşliğinin kullanılarak f_1 ve f_2 için ortaya çıkan ifadelerin $\bar{\alpha}_{03}$ parantezine alınması ile mümkündür. Bu

sebeple (3.82) ve (3.84)'in geçerliliğini korumaları için global koordinat merkezine göre uzaklık baz alınarak üçüncü saçıcının birinci ve ikinci saçıcıdan daha uzakta olması gerekmektedir. Buna ek olarak iki saçıcılı durum bahsinde $\bar{\mathbf{T}}_{1(2)} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{10}$ ve $\bar{\mathbf{T}}_{2(2)} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{20}$ matrislerini özyinelemeli olarak hesaplamak için global koordinat merkezine göre ikinci saçıcının da birinci saçıcıdan daha uzakta olması gerektiğine değinilmişti. Bu yüzden, çok saçıcılı senaryoda saçılan alanların katsayıları özyinelemeli olarak hesaplanmak isteniyorsa saçıcıların $\boldsymbol{\rho}_0 = 0$ noktasına yani 0. koordinat sisteminin merkezine olan uzaklığına göre sıralanması gerekmektedir.

$\mathbf{f}_3$ için de özyinelemeli bir ilişki elde etmek için (3.82) ve (3.84), (3.78)'da yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_3 = & \bar{\mathbf{T}}_{3(1)} \cdot [\bar{\boldsymbol{\beta}}_{30} + \bar{\alpha}_{31} \cdot \bar{\mathbf{T}}_{1(2)} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{10} + \bar{\alpha}_{32} \cdot \bar{\mathbf{T}}_{2(2)} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{20}] \cdot \mathbf{a} \\ & + [\bar{\mathbf{T}}_{3(1)} \cdot \bar{\alpha}_{31} \cdot \bar{\mathbf{T}}_{1(2)} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{10} \cdot \bar{\alpha}_{03} + \bar{\mathbf{T}}_{3(1)} \cdot \bar{\alpha}_{32} \cdot \bar{\mathbf{T}}_{2(2)} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{20} \cdot \bar{\alpha}_{03}] \cdot \mathbf{f}_3 \end{aligned} \quad (3.85)$$

elde edilir. Gösterim kolaylığı açısından yukarıdaki ifadede köşeli parantez içleri toplam sembolüyle ifade edilebilir. Böylece (3.85),

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_3 = & \bar{\mathbf{T}}_{3(1)} \cdot \left[\bar{\boldsymbol{\beta}}_{30} + \sum_{i=1}^2 \bar{\alpha}_{3,i} \cdot \bar{\mathbf{T}}_{i(2)} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{i0} \right] \cdot \mathbf{a} \\ & + \left[\bar{\mathbf{T}}_{3(1)} \cdot \sum_{i=1}^2 \bar{\alpha}_{3,i} \cdot \bar{\mathbf{T}}_{i(2)} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{i0} \cdot \bar{\alpha}_{03} \right] \cdot \mathbf{f}_3 \end{aligned} \quad (3.86)$$

şeklinde gösterilebilir. (3.86)'daki ikinci terim sol tarafa atılır ve ardından $\mathbf{f}_3$ yalnız bırakılırsa,

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_3 = & \left[\bar{\mathbf{I}} - \bar{\mathbf{T}}_{3(1)} \cdot \sum_{i=1}^2 \bar{\alpha}_{3,i} \cdot \bar{\mathbf{T}}_{i(2)} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{i0} \cdot \bar{\alpha}_{03} \right]^{-1} \\ & \cdot \bar{\mathbf{T}}_{3(1)} \cdot \left[\bar{\boldsymbol{\beta}}_{30} + \sum_{i=1}^2 \bar{\alpha}_{3,i} \cdot \bar{\mathbf{T}}_{i(2)} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{i0} \right] \cdot \mathbf{a} \end{aligned} \quad (3.87)$$

elde edilir. Bunun yanı sıra üç saçıcı problem için saçılan alanın katsayıları üç saçıcı T matrisleri cinsinden aşağıdaki gibi tanımlanırlar:

$$f_1 = \bar{T}_{1(3)} \cdot \bar{\beta}_{10} \cdot a \quad (3.88)$$

$$f_2 = \bar{T}_{2(3)} \cdot \bar{\beta}_{20} \cdot a \quad (3.89)$$

$$f_3 = \bar{T}_{3(3)} \cdot \bar{\beta}_{30} \cdot a \quad (3.90)$$

Burada $\bar{T}_{i(3)}$, üç saçıcı T matrisi olup, (3.82),(3.84) ve (3.87) buna tanıma göre yeniden düzenlenirse aşağıdaki özyinelemeli ilişkilere varılır:

$$\bar{T}_{i(3)} \cdot \bar{\beta}_{i0} = \bar{T}_{i(2)} \cdot \bar{\beta}_{i0} \cdot [\bar{I} + \bar{\alpha}_{03} \cdot \bar{T}_{3(3)} \cdot \bar{\beta}_{30}] \quad (3.91)$$

$$\begin{aligned} \bar{T}_{3(3)} \cdot \bar{\beta}_{30} = & \left[\bar{I} - \bar{T}_{3(1)} \cdot \sum_{i=1}^2 \bar{\alpha}_{3,i} \cdot \bar{T}_{i(2)} \cdot \bar{\beta}_{i0} \cdot \bar{\alpha}_{03} \right]^{-1} \\ & \cdot \bar{T}_{3(1)} \cdot \left[\bar{\beta}_{30} + \sum_{i=1}^2 \bar{\alpha}_{3,i} \cdot \bar{T}_{i(2)} \cdot \bar{\beta}_{i0} \right] \cdot a \end{aligned} \quad (3.92)$$

(3.91)'nin (3.76) ve (3.77)'den farkı, denklem kurulurken ilgili saçıcıdan saçılan alan katsayılarının yalnızca gelen alana ve üçüncü saçıcıdan saçılan alan katsayılarına bağlı olarak yazılmış olmasıdır. İzole-saçıcı T matrislerinin kullanıldığı (3.76) ve (3.77)'de ilgilenilen saçıcıyı aydınlatan alanın diğer saçıcılardan saçılan alanlar ve gelen alan olduğu düşünülür. (3.91)'de ise ilgilenilen saçıcıyı aydınlatan alanın yalnızca gelen alan ve ortama yeni eklenen üçüncü saçıcıdan saçılan alan olduğu düşünülür, $\bar{T}_{i(2)} \cdot \bar{\beta}_{i0}$ diğer saçıcılardan saçılan alan bilgisini ihtiva eder. (3.92)'de üçüncü saçıcıdan saçılan alan katsayılarına ilişkin bilgiyi içermekte olup (3.91) ile aynı temel üzerine kurulmuştur. Bu düşünce temeli ile, N+1 saçıcı durum için, her bir saçıcının gelen alan ve N+1. saçıcıdan saçılan alanla aydınlatıldığı ve diğer saçıcılardan saçılan alan bilgisinin $\bar{T}_{i(N)} \cdot \bar{\beta}_{i0}$ ile geldiği bir genelleştirilmiş ifade yazılabilir. Şekil 3.3'deki gibi k_0 dalga sayılı N tane saçıcı ortama N+1. saçıcının eklendiği düşünölsün. Bu durumda N saçıcı durum için saçılan alan katsayıları,

$$f_i = \bar{T}_{i(N)} \cdot \bar{\beta}_{i0} \cdot a \quad (3.93)$$

olur ve dış bölgedeki toplam alan ifadesi,

$$\phi(\rho) = \Re g \psi^t(k_0, \rho_0) \cdot a + \sum_{i=1}^N \psi^t(k_0, \rho_i) \cdot \bar{T}_{i(N)} \cdot \bar{\beta}_{i0} \cdot a \quad (3.94)$$

ile verilir. Benzer biçimde N+1 tane saçıcı için,

$$\phi(\rho) = \Re g \psi^t(k_0, \rho_0) \cdot a + \sum_{i=1}^{N+1} \psi^t(k_0, \rho_i) \cdot \bar{T}_{i(N+1)} \cdot \bar{\beta}_{i0} \cdot a \quad (3.95)$$

şeklinde dış bölgedeki toplam alan ifadesi yazılabilir. Daha anlamlı bir gösterim için ortama yeni eklenen N+1. saçıcı için saçılan alan ifadesi toplam sembolünün dışına alınırsa,

$$\begin{aligned} \phi(\rho) = \Re g \psi^t(k_0, \rho_0) \cdot a + \sum_{i=1}^N \psi^t(k_0, \rho_i) \cdot \bar{T}_{i(N+1)} \cdot \bar{\beta}_{i0} \cdot a \\ + \psi^t(k_0, \rho_{N+1}) \cdot \bar{T}_{N+1(N+1)} \cdot \bar{\beta}_{N+1,0} \cdot a \end{aligned} \quad (3.96)$$

elde edilir. Yukarıdaki (3.96) denkleminin sağ yanındaki ilk ve son terimler, i. saçıcıyı aydınlatan gelen alanlar olarak düşünülebilir. Bu sebeple (3.96)'daki son terim (3.72) yardımıyla 0. koordinat sisteminde yazılırsa,

$$\begin{aligned} \phi(\rho) = \Re g \psi^t(k_0, \rho_0) \cdot a + \sum_{i=1}^N \psi^t(k_0, \rho_i) \cdot \bar{T}_{i(N+1)} \cdot \bar{\beta}_{i0} \cdot a \\ + \Re g \psi^t(k_0, \rho_0) \cdot \bar{\alpha}_{0,N+1} \cdot \bar{T}_{N+1(N+1)} \cdot \bar{\beta}_{N+1,0} \cdot a \end{aligned} \quad (3.97)$$

olur ve (3.97)'den hareketle yeni durumda i. saçıcıya ilişkin,

$$\bar{\mathbf{T}}_{i(N+1)} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{i0} \cdot \mathbf{a} = \bar{\mathbf{T}}_{i(N)} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{i0} \cdot \left[\bar{\mathbf{I}} + \bar{\boldsymbol{\alpha}}_{0,N+1} \cdot \bar{\mathbf{T}}_{N+1(N+1)} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{N+1,0} \right] \cdot \mathbf{a} \quad (3.98)$$

ifadesi elde edilir. Burada $\bar{\mathbf{T}}_{i(N)} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{i0}$, merkezi $\boldsymbol{\rho}_0 = 0$ 'da olan ve N tane saçıcıyı kapsayan en küçük dairenin dışındaki bir kaynaktan gelen alan için tanımlıdır ve bağıntıların geçerli olabilmesi için N+1. saçıcı da bu dairenin dışında kalmalıdır. Dolayısıyla saçıcılar, $\boldsymbol{\rho}_0 = 0$ noktasına olan mesafeye göre sıralanmalıdır.

Öte yandan N+1. saçıcıdan saçılan alanın genliği, gelen alanın diğer N tane saçıcıdan saçılmasına izole-saçıcı T matrisi ile bağlıdır. (3.96) ile verilen toplam alan ifadesinde bütün terimler (3.71) yardımıyla N+1. saçıcının yerel koordinatında yazılırsa (3.96),

$$\begin{aligned} \phi(\boldsymbol{\rho}) = & \Re g \psi^t(k_0, \boldsymbol{\rho}_{N+1}) \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{n+1,0} \cdot \mathbf{a} \\ & + \sum_{i=1}^N \Re g \psi^t(k_0, \boldsymbol{\rho}_{N+1}) \cdot \bar{\boldsymbol{\alpha}}_{N+1,i} \cdot \bar{\mathbf{T}}_{i(N+1)} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{i0} \cdot \mathbf{a} \\ & + \psi^t(k_0, \boldsymbol{\rho}_{N+1}) \cdot \bar{\mathbf{T}}_{N+1(N+1)} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{N+1,0} \cdot \mathbf{a} \end{aligned} \quad (3.99)$$

ifadesine dönüşür ve buradan N+1. saçıcıdan saçılan alanın katsayısı için,

$$\begin{aligned} & \bar{\mathbf{T}}_{N+1(N+1)} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{n+1,0} \cdot \mathbf{a} \\ & = \bar{\mathbf{T}}_{N+1(1)} \cdot \left[\bar{\boldsymbol{\beta}}_{N+1,0} + \sum_{i=1}^N \bar{\boldsymbol{\alpha}}_{N+1,i} \cdot \bar{\mathbf{T}}_{i(N+1)} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{i0} \right] \cdot \mathbf{a} \end{aligned} \quad (3.100)$$

ifadesi elde edilir. (3.98), (3.100)'de yerine yazılarak ve denklemin her iki tarafındaki gelen alanın katsayısı $\mathbf{a}$ atılarak,

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{T}}_{N+1(N+1)} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{n+1,0} = & \bar{\mathbf{T}}_{N+1(1)} \cdot \left[\bar{\boldsymbol{\beta}}_{N+1,0} + \sum_{i=1}^N \bar{\boldsymbol{\alpha}}_{N+1,i} \cdot \bar{\mathbf{T}}_{i(N)} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{i0} \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^N \bar{\boldsymbol{\alpha}}_{N+1,i} \cdot \bar{\mathbf{T}}_{i(N)} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{i0} \cdot \bar{\boldsymbol{\alpha}}_{0,N+1} \cdot \bar{\mathbf{T}}_{N+1(N+1)} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{N+1,0} \right] \end{aligned} \quad (3.101)$$

elde edilir. (3.101) düzenlenir ve $\bar{\mathbf{T}}_{N+1(N+1)} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{N+1,0}$ yalnız bırakılırsa sonuç olarak,

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{T}}_{N+1(N+1)} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{N+1,0} = & \left[\bar{\mathbf{I}} - \bar{\mathbf{T}}_{N+1(1)} \cdot \sum_{i=1}^N \bar{\boldsymbol{\alpha}}_{N+1,i} \cdot \bar{\mathbf{T}}_{i(N)} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{i0} \cdot \bar{\boldsymbol{\alpha}}_{0,N+1} \right]^{-1} \\ & \cdot \bar{\mathbf{T}}_{N+1(1)} \cdot \left[\bar{\boldsymbol{\beta}}_{N+1,0} + \sum_{i=1}^N \bar{\boldsymbol{\alpha}}_{N+1,i} \cdot \bar{\mathbf{T}}_{i(N)} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{i0} \right] \end{aligned} \quad (3.102)$$

ifadesine varılır. (3.98) ifadesinde de eşitliğin iki tarafındaki $\mathbf{a}$ 'lar atıldığında,

$$\bar{\mathbf{T}}_{i(N+1)} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{i0} = \bar{\mathbf{T}}_{i(N)} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{i0} \cdot \left[\bar{\mathbf{I}} + \bar{\boldsymbol{\alpha}}_{0,N+1} \cdot \bar{\mathbf{T}}_{N+1(N+1)} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{N+1,0} \right] \quad (3.103)$$

elde edilir. (3.102) ve (3.103) bağıntıları ikisi birlikte $\bar{\mathbf{T}}_{i(N+1)} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{i0}$ 'i $\bar{\mathbf{T}}_{i(N)} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{i0}$ 'dan nümerik olarak hesaplamayı mümkün kılan özyinelemeli ilişkilerdir. Bu ilişkiler sayesinde bir saçıcıdan başlanarak N saçılı durum için çözümler özyinelemeli olarak bulunabilir. Bu yöntemle her bir özyinelemede boyutları T matrisleri ile belirlenen matrisler ele alınarak bellekte küçük bir yer kullanılır. Bu da sanal makinadaki sayfa ihlallerini (page faults) azaltır [22]. Modern bilgisayarlarda çözüm yapılırken özyinelemeli T matris yönteminin bu faydası bilhassa büyük cisimlerden saçılma problemi çözerken anlaşılır.

Teorik olarak $\bar{\boldsymbol{\alpha}}$, $\bar{\boldsymbol{\beta}}$ ve $\bar{\mathbf{T}}$ matrisleri sonsuz boyutlu olup, nümerik hesaplamada özyinelemeli çözüm algoritması işletilirken bu matrisler sonlu bir değerde kesilirler. Eğer alanların seri açılımlarında M tane, toplamsallık teoremi uyarınca ortaya çıkan dönüşüm formüllerinde ise P tane silindirik harmonik kullanırsa $\bar{\boldsymbol{\alpha}}$ ve $\bar{\boldsymbol{\beta}}$ matrisleri $M \times P$ veya $P \times M$, $\bar{\mathbf{T}}$ matrisleri ise $M \times M$ boyutlu olur. Saçıcılar ile global koordinat merkezi arasındaki mesafe arttıkça P 'de artırılmalıdır. Benzer biçimde saçıcıların yarıçapı arttıkça da M 'nin artırılması gerekmektedir [24], [25]. Ayrıca dönüşüm matrislerinin isabetli bir şekilde hesaplanabilmesi için P 'nin M 'den yeterince büyük olması gerekmektedir. Bu sebeple M arttıkça doğal olarak P 'nin de artırılması gerekir. Öte yandan, dönüşüm matrislerinin doğru bir şekilde hesaplanabilmesi adına $P > kd$ olması gerekmektedir [25]. Burada d dönüştürülecek

iki koordinat sisteminin merkezleri arasındaki mesafedir. Buna ek olarak, özyinelemeli algoritmanın geçerliliğini sağlamak için (3.75)'de verildiği üzere $\bar{\alpha}_{ji}$ yerine $\bar{\beta}_{j_0} \cdot \bar{\alpha}_{0i}$ çarpımı yazılabilir. $\rho_{0i} = \rho_{0j} + \delta$ olmak üzere δ mesafesi sıfır ise (veya ρ_{0i} ve ρ_{0j} 'ye kıyasla çok küçükse) $\bar{\beta}_{j_0}$ ve $\bar{\alpha}_{0i}$ hesaplamak için toplamsallık teoreminden gelen toplam ifadesi yakınsamaz [24]. Bu sebeple δ küçüldükçe yakınsama için P 'de artırılmalıdır. Büyük bir saçıcının dairesel alt saçıcılara bölünerek saçılan alanın hesaplandığı veya saçıcıların tekdüze bir ızgara üzerine oturduğu düzenli yapıların bulunduğu senaryolarda bazı saçıcıların global koordinat sisteminin merkezinden olan mesafeleri birbirine eşit olabilmektedir. Bu durum toplamsallık teoreminin geçerliliğine zarar verir. TM dalga ile uyarma altında bu ihlal, çözümler için büyük bir problem teşkil etmese de TE dalga ile uyarma durumunda tolerans gösterilemeyecek bir ihlaldir [26]. Bunu gidermek için $\bar{\beta}_{j_0}$ ve $\bar{\alpha}_{0i}$ dönüşüm matrisleri hesaplanırken [27]'deki gibi pencerelenmiş bir toplamsallık teoremi kullanılabilir veya [24]'deki gibi bir saçılım merkezi tanımlanarak ve özyinelemeli ilişkiler buna göre düzenlenerek bu merkez üzerinden dönüşüm matrisleri doldurulabilir.

Yukarıda anlatılanlar ışığında belirlenecek olan M ve P harmonik sayıları ile (3.102) matrislerin boyutları aşağıdaki gibi olur:

$$\overbrace{\bar{\mathbf{T}}_{N+1(N+1)} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{n+1,0}}^{\tilde{M} \times \tilde{P}} = \overbrace{\mathbf{Y}_{N+1}}^{\tilde{M} \times \tilde{M}}^{-1} \cdot \overbrace{\bar{\mathbf{T}}_{N+1(1)}}^{\tilde{M} \times \tilde{M}} \cdot \left[\overbrace{\bar{\boldsymbol{\beta}}_{N+1,0}}^{\tilde{M} \times \tilde{P}} + \sum_{i=1}^N \overbrace{\bar{\boldsymbol{\alpha}}_{N+1,i}}^{\tilde{M} \times \tilde{M}} \cdot \overbrace{\bar{\mathbf{T}}_{i(N)}}^{\tilde{M} \times \tilde{P}} \cdot \overbrace{\bar{\boldsymbol{\beta}}_{i0}}^{\tilde{M} \times \tilde{P}} \right] \quad (3.104)$$

Ve burada $\mathbf{Y}_{N+1}^{-1}$,

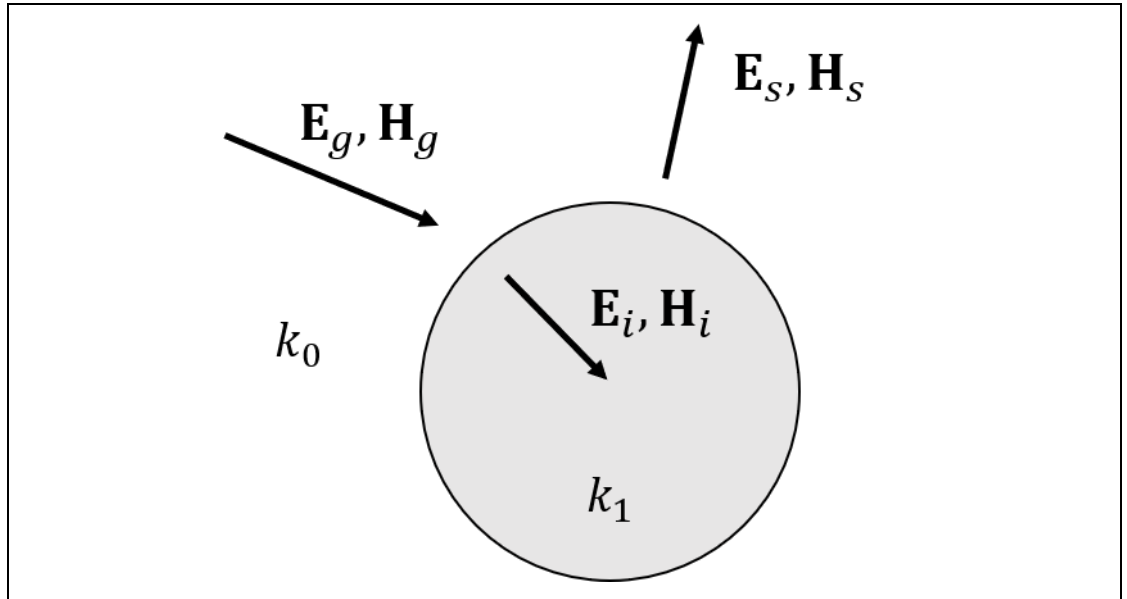
$$\overbrace{\mathbf{Y}_{N+1}}^{\tilde{M} \times \tilde{M}}^{-1} = \left[\bar{\mathbf{I}} - \overbrace{\bar{\mathbf{T}}_{N+1(1)}}^{\tilde{M} \times \tilde{M}} \cdot \sum_{i=1}^N \overbrace{\bar{\boldsymbol{\alpha}}_{N+1,i}}^{\tilde{M} \times \tilde{M}} \cdot \overbrace{\bar{\mathbf{T}}_{i(N)}}^{\tilde{M} \times \tilde{P}} \cdot \overbrace{\bar{\boldsymbol{\beta}}_{i0}}^{\tilde{M} \times \tilde{P}} \cdot \overbrace{\bar{\boldsymbol{\alpha}}_{0,N+1}}^{\tilde{P} \times \tilde{M}} \right]^{-1} \quad (3.105)$$

ile verilir. (3.103)'teki matrislerin boyutları ise aşağıdaki gibidir:

$$\overbrace{\bar{\mathbf{T}}_{i(N+1)} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{i0}}^{\tilde{M} \times \tilde{P}} = \overbrace{\bar{\mathbf{T}}_{i(N)} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{i0}}^{\tilde{M} \times \tilde{P}} + \overbrace{\bar{\mathbf{T}}_{i(N)} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{i0}}^{\tilde{M} \times \tilde{P}} \cdot \overbrace{\bar{\boldsymbol{\alpha}}_{0,N+1}}^{\tilde{P} \times \tilde{M}} \cdot \overbrace{\bar{\mathbf{T}}_{N+1(N+1)} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{N+1,0}}^{\tilde{M} \times \tilde{P}} \quad (3.106)$$

Eğer alan açılımları ve Graf toplamsallık teoremiyle ilgili toplamalar sırasıyla $-M$ 'den M 'ye ve $-P$ 'den P 'ye alınır, burada $\tilde{M} = 2M + 1$ ve $\tilde{P} = 2P + 1$ olur.

Yönteme dair bir diğer kısıtlama ise $\tilde{M} \times \tilde{M}$ boyutlu $\mathbf{Y}_{N+1}$ matrisinin M arttıkça kötü koşullu olmasıdır. Bilhassa büyük cisimlerden saçılma inceleniyorsa çözümlerin doğru bulunabilmesi için M 'in artırılması kaçınılmazdır. Kötü koşullanmış bir $\mathbf{Y}_{N+1}$ matrisinin çoklu saçıcıları durumunda her özyineleme sırasında tersinin alınması, çözümlerin doğruluğunu doğrudan etkiler. Bu sebeple büyük cisimlerden saçılma ele alınırken cismi çözümlerin doğruluğunu garanti edecek kadar küçük alt saçıcılara bölerek alınacak M harmonik sayısı küçültülebilir. Ancak küçük cisimlerden saçılma incelenirken az sayıda harmonik alınması yeterli olsa bile $\mathbf{Y}_{N+1}$ matrisinin M arttıkça kötü koşullanması ve tersinin doğru alınamamasından ötürü istenildiğinde belirli bir değerden daha fazla harmonik almak çözümün doğruluğunu tehlikeye atar. Bu kötü doğayı düzeltmek ve çözümün doğruluğunu garanti altına almak teorik olarak sonsuz boyutlu olan bu matrisin $M \rightarrow \infty$ durumunda asimptotik davranışını düzelten regülerleştirme operatörleri ile sağdan ve soldan çarpılması ve özyinelemeli ilişkilerin bu operatörler ile yeniden kurulmaları ile mümkün olur.



Şekil 3.4: Dışarıdan gelen dalganın duran dalgalar olduğu durumda k_0 dalga sayılı ortamda bulunan bir silindirik saçıcı için tek arayüz problemi.

3.2. Çok Katmanlı Saçıcılardan Saçılma

3.2.1. Tek Katmanlı Durum

Şekil 3.4'deki gibi bir silindirik saçıcının dışındaki k_0 dalga sayılı ortamda toplam alan ifadesi (3.8)'den hareketle,

$$\phi(\rho) = \Re g \psi^t(k_0, \rho_1) \cdot \bar{\beta}_{10} \cdot a_0 + \psi^t(k_0, \rho_1) \cdot b_0 \quad (3.107)$$

ve burada b_0 (3.9)'dan

$$b_0 = \bar{R}_{01} \cdot \bar{\beta}_{10} \cdot a_0 \quad (3.108)$$

şeklinde yazılır. (3.108)'deki $\bar{R}_{01}$ matrisi ve b_0 vektörü, (3.9)'daki $\bar{T}_{1(1)}$ matrisi ve f_1 vektörü ile eşdeğer olup, $\bar{R}_{01}$ matrisi 1 saçıcısından 0.ortama doğru saçılan dışagiden dalgaları anlatan saçılma matrisidir ve (3.10)'da verildiği gibi,

$$\bar{R}_{01} = -(\Re g \bar{Q}_{10}) \cdot \bar{Q}_{10}^{-1} \quad (3.109)$$

olarak tanımlanır. İlaveten, saçıcının iç bölgesine iletilen alan ise

$$\phi_i(\rho) = \Re g \psi^t(k_1, \rho_1) \cdot a_1 \quad (3.110)$$

ile verilir. (3.110)'daki a_1 vektörü 1 saçıcısının içine nüfuz etmiş alanın katsayı vektörü olup, GSK yöntemi bahsinde (2.71) ile verilen α ile eşdeğerdir. Buradan hareketle, iki boyutlu problem için Green fonksiyonunun seri açılımının (3.19)'daki gibi olmasından ötürü (2.71)'deki k yerine $\frac{1}{4}$, α yerine a_1 yazılır ve ifade düzenlenirse,

$$-\frac{j}{4}\overline{\mathbf{Q}}_{10} \cdot \mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_0 \quad (3.111)$$

$$\mathbf{a}_1 = 4j\overline{\mathbf{Q}}_{10}^{-1} \cdot \mathbf{a}_0 \quad (3.112)$$

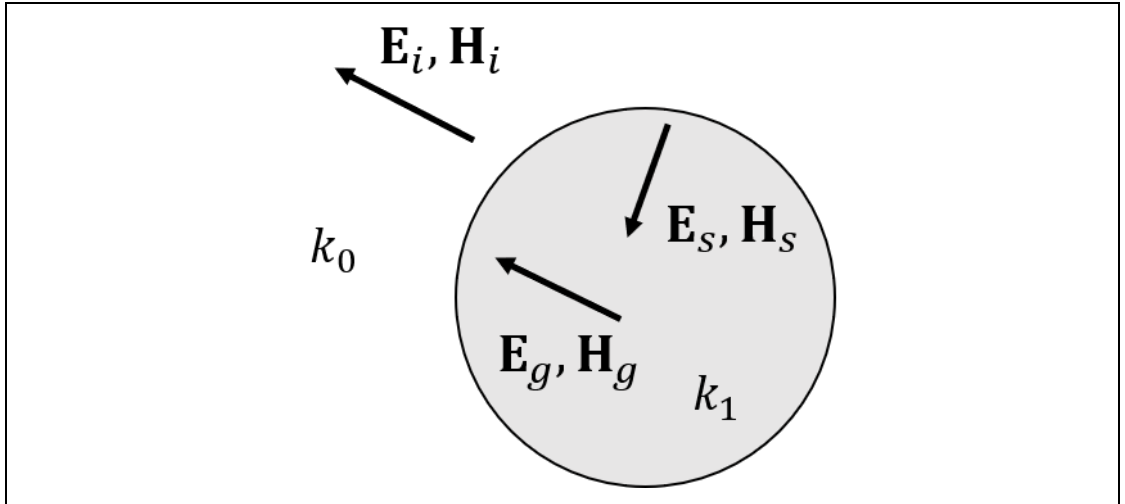
elde edilir. Böylece 0 bölgesinden 1. saçıcının içerisine geçen duran dalga formundaki alanları anlatan $\overline{\mathbf{T}}_{01}$ geçiş matrisi aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\overline{\mathbf{T}}_{01} = 4j\overline{\mathbf{Q}}_{10}^{-1} \quad (3.113)$$

Burada $\overline{\mathbf{Q}}_{10}$ (3.12)'deki gibi olup, hesaplama için gerekli silindirik harmonik tanımları ise (3.20) ve (3.22) ile verilir. Eğer saçıcı kendi iç bölgesinden gelen ve dışarıya dalgalarla ifade edilen bir alanla Şekil 3.5'deki gibi uyarılıyorsa bu durumda k_1 dalga sayılı ortamda gelen alan ifadesi,

$$\phi_g(\boldsymbol{\rho}) = \psi^t(k_1, \boldsymbol{\rho}_1) \cdot \mathbf{b}_1 \quad (3.114)$$

Bu durumda saçılan alan ifadesi ise



Şekil 3.5: Saçıcının içerisinden gelen dalganın dışarıya dalgalar olduğu durumda k_0 dalga sayılı ortamda bulunan bir silindirik saçıcı için tek arayüz problemi.

$$\phi_s(\boldsymbol{\rho}) = \Re g \psi^t(k_1, \boldsymbol{\rho}_1) \cdot \mathbf{a}_1 \quad (3.115)$$

olur. Böylece saçıcının içinde toplam alan ifadesi (3.114) ve (3.115)'den,

$$\phi(\boldsymbol{\rho}) = \psi^t(k_1, \boldsymbol{\rho}_1) \cdot \mathbf{b}_1 + \Re g \psi^t(k_1, \boldsymbol{\rho}_1) \cdot \mathbf{a}_1 \quad (3.116)$$

olur. (3.116) denklemindeki $\mathbf{a}_1$ ve $\mathbf{b}_1$ vektörleri sırasıyla saçılan alanın katsayı vektörü ve gelen alanın katsayı vektörleri olup, (2.93)'deki $\mathbf{f}$ ve $\mathbf{a}$ 'ya karşılık gelirler. Buradan hareketle $\mathbf{a}_1$ ve $\mathbf{b}_1$ vektörleri arasında (2.93) gibi bir ilişki kurulabilir:

$$\mathbf{a}_1 = \bar{\mathbf{R}}_{10} \cdot \mathbf{b}_1 \quad (3.117)$$

(3.117)'deki $\bar{\mathbf{R}}_{10}$ matrisi yönü 0.ortamla olan sınırdan 1.ortama doğru olan, duran dalga formundaki saçılan alanları anlatan saçılma matrisidir ve (2.92)'de verildiği gibi,

$$\bar{\mathbf{R}}_{10} = -(\Re g^{-1} \bar{\mathbf{P}}_{10}) \cdot \bar{\mathbf{P}}_{10}^{-1} \quad (3.118)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\bar{\mathbf{P}}_{10}$ matrisi, matrisin elemanları P_{nm}^{10} olmak üzere (2.87) göz önünde bulundurularak,

$$P_{nm}^{10} = \int_C \{ \Re g \psi_n(k_1, \boldsymbol{\rho}'_1) \hat{\mathbf{n}}' \cdot \nabla' \psi_m(k_0, \boldsymbol{\rho}'_1) \frac{p_0}{p_1} - \psi_m(k_0, \boldsymbol{\rho}'_1) \hat{\mathbf{n}}' \cdot \nabla' \Re g \psi_n(k_1, \boldsymbol{\rho}'_1) \} dl' \quad (3.119)$$

olarak tanımlanır. (3.119)'un iki boyutta elde edilebilmesi için (2.55) ile verilen açılımda toplam sembolünün önündeki k yerine $\frac{1}{4}$ yazılarak doğrudan iki boyutlu Green fonksiyonuna aşağıdaki seri açılımı,

$$G_i(\rho_1, \rho_1') = -\frac{j}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \psi_n(k_1, \rho_1) \Re g \psi_n(k_1, \rho_1'), \quad \rho_1 > \rho_1' \quad (3.120)$$

karşılık getirilmelidir. Öte yandan iki boyutta homojen ortam Green fonksiyonu (3.14)'deki gibi olup, bu Green fonksiyonuna ait seri açılımı ise,

$$\begin{aligned} -\frac{j}{4} H_0^{(2)}(k_1 |\rho_1 - \rho_1'|) = \\ -\frac{j}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_n^{(2)}(k_1 \rho_1) J_n(k_1 \rho_1') e^{jn(\phi_1 - \phi_1')}, \quad \rho_1 > \rho_1' \end{aligned} \quad (3.121)$$

olur. (3.121)'den hareketle $\psi_n(k_1, \rho_1)$ ve $\Re g \psi_n(k_1, \rho_1')$ seçimleri,

$$\psi_n(k_1, \rho_1) = H_n^{(2)}(k_1 \rho_1) e^{jn\phi_1}, \quad \rho_1 > \rho_1' \quad (3.122)$$

$$\Re g \psi_n(k_1, \rho_1') = J_n(k_1 \rho_1') e^{-jn\phi_1'}, \quad \rho_1 > \rho_1' \quad (3.123)$$

olmalıdır. Buna uygun $\psi_m(k_0, \rho_1')$ ise,

$$\psi_m(k_0, \rho_1') = H_m^{(2)}(k_0 \rho_1') e^{jm\phi_1'}, \quad \rho_1 > \rho_1' \quad (3.124)$$

olur. $\mathbf{a}_1$ ile $\mathbf{b}_1$ arasında kurulan ilişkiye benzer biçimde 0.ortama iletilen alanın katsayı vektörü ile $\mathbf{b}_1$ arasında da bir ilişki kurulabilir. 0.ortama iletilen alan,

$$\phi_i(\rho) = \psi^t(k_0, \rho_1) \cdot \mathbf{b}_0 \quad (3.125)$$

olup, burada 0.ortama iletilen alanın katsayı vektörü $\mathbf{b}_0$,

$$\mathbf{b}_0 = \bar{\mathbf{T}}_{10} \cdot \mathbf{b}_1 \quad (3.126)$$

şeklinde ifade edilebilir. (3.126)'daki $\bar{\mathbf{T}}_{10}$ matrisi 1.ortamdan 0.ortama iletilen dışagiden dalga formundaki alanları anlatan geçiş matrisidir. Ayrıca $\mathbf{b}_0$ vektörü ise (2.90)'daki $\boldsymbol{\alpha}$ vektörüne karşılık gelir. Bu sebeple (2.90)'da k yerine $\frac{1}{4}$, $\boldsymbol{\alpha}$ yerine $\mathbf{b}_0$ ve $\mathbf{a}$ yerine $\mathbf{b}_1$ yazılarak,

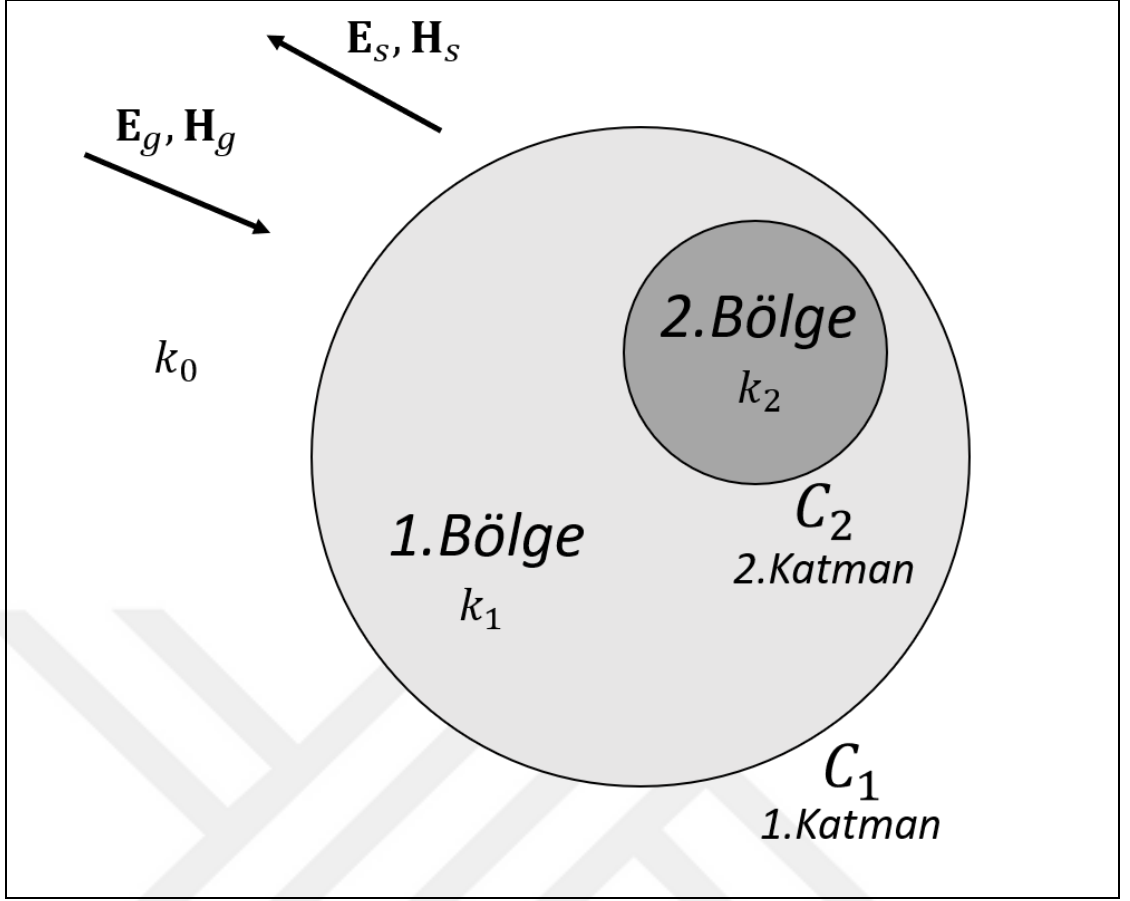
$$-\frac{j}{4}\bar{\mathbf{P}}_{10} \cdot \mathbf{b}_0 = \mathbf{b}_1 \quad (3.127)$$

$$\mathbf{b}_0 = 4j\bar{\mathbf{P}}_{10}^{-1} \cdot \mathbf{b}_1 \quad (3.128)$$

elde edilir ve bu durumda söz konusu iki boyutlu problem için $\bar{\mathbf{T}}_{10}$ matrisi,

$$\bar{\mathbf{T}}_{10} = 4j\bar{\mathbf{P}}_{10}^{-1} \quad (3.129)$$

olur. Böylece elde edilen (3.109), (3.113),(3.118) ve (3.129) matris ifadeleri kullanılarak tek bir arayüzlü problem çözümü çok arayüzlü problemler için genişletilebilir.



Şekil 3.6: k_0 dalga sayılı ortamda bulunan iki katmanlı bir silindirik saçıcıdan saçılma problemi.

3.2.2. İki Katmanlı Durum

Şekil 3.6'daki gibi eş eksenli olmayan iç içe iki katmanın varlığı söz konusu ise burada yazılacak $\bar{\mathbf{T}}$ ve $\bar{\mathbf{R}}$ matrislerinin katmanların yerel koordinat sistemlerinde ifade edilmesi gerekir. Bu da toplamsallık teoremiyle elde edilen, (3.31) ve (3.32)'de verilen dönüşüm matrisleriyle mümkün olur. 0. bölgede toplam alan ifadesi yazılırsa,

$$\phi_0(\boldsymbol{\rho}) = \Re g \psi^t(k_0, \boldsymbol{\rho}_1) \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{10} \cdot \mathbf{a}_0 + \psi^t(k_0, \boldsymbol{\rho}_1) \cdot \mathbf{b}_0 \quad (3.130)$$

Benzer şekilde 1. bölgedeki toplam alan,

$$\phi_1(\boldsymbol{\rho}) = \Re g \psi^t(k_1, \boldsymbol{\rho}_2) \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{21} \cdot \mathbf{a}_1 + \psi^t(k_1, \boldsymbol{\rho}_2) \cdot \mathbf{b}_1 \quad (3.131)$$

ve 2.bölgenin içerisine iletilen alan,

$$\phi_2(\rho) = \Re g\psi^t(k_2, \rho_2) \cdot \mathbf{a}_2 \quad (3.132)$$

olur. Burada ρ_1 ve ρ_2 , sırasıyla C_1 ve C_2 katmanlarının koordinatlarında yazılmışlardır. Böylece (3.130) ve (3.131)'de saçılan alanları ifade eden ikinci terimler alanların saçılmalarına sebebiyet veren saçıcı katmanın koordinatında yazılmışlardır. Benzer biçimde (3.132)'deki geçen alan ise alanın geçişini mümkün kılan ilgili katmanın koordinatında yazılmıştır. Burada $\mathbf{b}_i$ vektörü saçılan alanların katsayı vektörlerini ifade etmekte olup i indisi ise bu alanların bulundukları bölgeyi ifade eder. $\mathbf{a}_i$ vektörü ise i . bölgedeki duran dalgaların katsayı vektörlerini ifade eder. 0 bölgesinde dışagiden dalgalar, 0 bölgesinden gelen alanın etkisiyle 1.katmanın üzerinden saçılan alanlardan ve 2.katmandan saçılıp 1.bölgeden 0.bölgeye doğru geçen alanlardan meydana gelir. Bu bilginin ışığında $\mathbf{b}_0$ için (3.31) ve (3.32) yardımıyla,

$$\mathbf{b}_0 = \bar{\mathbf{R}}_{01} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{10} \cdot \mathbf{a}_0 + \bar{\mathbf{T}}_{10} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{12} \cdot \mathbf{b}_1 \quad (3.133)$$

yazılabilir. $\mathbf{b}_1$ vektörüyle ilişkili saçılan alan dışagiden dalgalarla ifade edilir ve 2.katmandan saçılıp 1.bölgede var olan bu alan 2.katmanın koordinatlarında ifade edilir. Benzer biçimde, $\mathbf{a}_0$ vektörüyle ilişkili gelen alan da duran dalgalarla ifade edilir ve 0 bölgesinin koordinatında tanımlıdır. $\mathbf{b}_0$ vektörü ile ilişkin saçılan alanlar ise 0.bölgede var olsa da 1.katmanın koordinatında tanımlıdır. Dolayısıyla $\mathbf{b}_0$ için bir ifade elde edilirken (3.31) ve (3.32)'den uygun olanları kullanılarak alanların 1.katmanın koordinatına göre ifade edilmesi gerekir.

1 bölgesindeki duran dalgalar, 0 bölgesinden 1 bölgesinin içerisine geçen duran dalgaların ve 2.katmandan saçılıp 1.katmanı içeriden uyararak 1.katmandan geri saçılan dışagiden dalgaların toplamıdır. Böylece (3.31) ve (3.32) yardımıyla,

$$\mathbf{a}_1 = \bar{\mathbf{T}}_{01} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{10} \cdot \mathbf{a}_0 + \bar{\mathbf{R}}_{10} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{12} \cdot \mathbf{b}_1 \quad (3.134)$$

elde edilir. (3.134), yukarıdaki anlatıldığı gibi 1.katmanın koordinatında ifade edilmiştir.

2.katmandan saçılan alan, 1 bölgesinden 2.katmana gelen alan ile ilişkilidir. (3.131)'den hareketle $\mathbf{b}_1$ için,

$$\mathbf{b}_1 = \bar{\mathbf{R}}_{12} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{21} \cdot \mathbf{a}_1 \quad (3.135)$$

yazılabilir. Benzer biçimde 2 bölgesine geçen alan, 2.katmana gelen alan ile ilişkilidir. Böylece (3.131)'deki ilk terim ve (3.132)'den,

$$\mathbf{a}_2 = \bar{\mathbf{T}}_{12} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{21} \cdot \mathbf{a}_1 \quad (3.136)$$

elde edilir. (3.133)'den (3.136)'ya kadar olan denklemlerde verilen $\bar{\mathbf{T}}_{ij}$ ve $\bar{\mathbf{R}}_{ij}$ matrisleri sırasıyla i. bölgeden j. bölgeye alan geçişini anlatan geçiş matrisi ve j. katmandan i. bölgeye saçılmayı anlatan saçılma matrisidir. $\bar{\mathbf{T}}_{ij}$ ve $\bar{\mathbf{R}}_{ij}$ 'ye dair tanımlar ise (3.109), (3.113), (3.118) ve (3.129)'dan hareketle,

$$\bar{\mathbf{R}}_{i,i+1} = -(\Re g \bar{\mathbf{Q}}_{i+1,i}) \cdot \bar{\mathbf{Q}}_{i+1,i}^{-1} \quad (3.137)$$

$$\bar{\mathbf{R}}_{i+1,i} = -(\Re g^{-1} \bar{\mathbf{P}}_{i+1,i}) \cdot \bar{\mathbf{P}}_{i+1,i}^{-1} \quad (3.138)$$

$$\bar{\mathbf{T}}_{i,i+1} = 4j \bar{\mathbf{Q}}_{i+1,i}^{-1} \quad (3.139)$$

$$\bar{\mathbf{T}}_{i+1,i} = 4j \bar{\mathbf{P}}_{i+1,i}^{-1} \quad (3.140)$$

olarak verilir. Burada $\bar{\mathbf{Q}}_{i+1,i}$ ve $\bar{\mathbf{P}}_{i+1,i}$ matrislerinin elemanları aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} [\bar{\mathbf{Q}}_{i+1,i}]_{nm} = & \int_C \{ \psi_n(k_i, \rho'_{i+1}) \hat{n}' \cdot \nabla' \Re g \psi_m(k_{i+1}, \rho'_{i+1}) \frac{p_{i+1}}{p_i} \\ & - \Re g \psi_m(k_{i+1}, \rho'_{i+1}) \hat{n}' \cdot \nabla' \psi_n(k_i, \rho'_{i+1}) \} dl' \end{aligned} \quad (3.141)$$

$$[\bar{\mathbf{P}}_{i+1,i}]_{nm} = \int_C \{ \Re g \psi_n(k_{i+1}, \boldsymbol{\rho}'_{i+1}) \hat{\mathbf{n}}' \cdot \nabla' \psi_m(k_i, \boldsymbol{\rho}'_{i+1}) \frac{p_i}{p_{i+1}} - \psi_m(k_i, \boldsymbol{\rho}'_{i+1}) \hat{\mathbf{n}}' \cdot \nabla' \Re g \psi_n(k_{i+1}, \boldsymbol{\rho}'_{i+1}) \} dl' \quad (3.142)$$

olur ve silindirik harmoniklerin uygun seçimi (3.44), (3.45), (3.122) ve (3.123)'den hareketle,

$$\psi_n(k_i, \boldsymbol{\rho}'_{i+1}) = H_n^{(2)}(k_i \rho'_{i+1}) e^{-jn\phi'_{i+1}}, \quad \rho_{i+1} < \rho'_{i+1} \quad (3.143)$$

$$\Re g \psi_m(k_{i+1}, \boldsymbol{\rho}'_{i+1}) = J_m(k_{i+1} \rho'_{i+1}) e^{jm\phi'_{i+1}}, \quad \rho_{i+1} < \rho'_{i+1} \quad (3.144)$$

$$\Re g \psi_n(k_{i+1}, \boldsymbol{\rho}_{i+1}') = J_n(k_{i+1} \rho_{i+1}') e^{-jn\phi'_{i+1}}, \quad \rho_{i+1} > \rho_{i+1}' \quad (3.145)$$

$$\psi_m(k_i, \boldsymbol{\rho}'_{i+1}) = H_n^{(2)}(k_i \rho'_{i+1}) e^{jm\phi'_{i+1}}, \quad \rho_{i+1} > \rho_{i+1}' \quad (3.146)$$

olarak verilir. (3.133)'den (3.136)'ya kadar olan denklemler düzenlenirse,

$$\mathbf{b}_0 - \bar{\mathbf{T}}_{10} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{12} \cdot \mathbf{b}_1 = \bar{\mathbf{R}}_{01} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{10} \cdot \mathbf{a}_0 \quad (3.147)$$

$$\mathbf{a}_1 - \bar{\mathbf{R}}_{10} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{12} \cdot \mathbf{b}_1 = \bar{\mathbf{T}}_{01} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{10} \cdot \mathbf{a}_0 \quad (3.148)$$

$$\mathbf{b}_1 - \bar{\mathbf{R}}_{12} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{21} \cdot \mathbf{a}_1 = \mathbf{0} \quad (3.149)$$

$$\mathbf{a}_2 - \bar{\mathbf{T}}_{12} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{21} \cdot \mathbf{a}_1 = \mathbf{0} \quad (3.150)$$

elde edilir. Böylece $\bar{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ gibi bir matris denklem sistemi oluşturularak çözümler bulunabilir. Bunun yanı sıra, (3.133)'den (3.136)'ya kadar olan denklemler kullanılarak ilgili bölgedeki saçılan alanlar ile ilişkili $\mathbf{b}_i$ ve ilgili bölgeye geçen alanlar ile ilişkili $\mathbf{a}_{i+1}$ bilinmeyenleri, bir dış katmana ait olan $\mathbf{a}_i$ katsayı vektörüne bağlı olarak bulunabilir. Bunun için eğer (3.135), (3.134)'de yerine yazılırsa,

$$\mathbf{a}_1 = \bar{\mathbf{T}}_{01} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{10} \cdot \mathbf{a}_0 + \bar{\mathbf{R}}_{10} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{12} \cdot \bar{\mathbf{R}}_{12} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{21} \cdot \mathbf{a}_1 \quad (3.151)$$

$$[\bar{\mathbf{I}} - \bar{\mathbf{R}}_{10} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{12} \cdot \bar{\mathbf{R}}_{12} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{21}] \cdot \mathbf{a}_1 = \bar{\mathbf{T}}_{01} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{10} \cdot \mathbf{a}_0 \quad (3.152)$$

elde edilir. (3.152)'de $\mathbf{a}_1$ yalnız bırakılarak denklem düzenlenirse,

$$\mathbf{a}_1 = \bar{\mathbf{M}}_{1-} \cdot \bar{\mathbf{T}}_{01} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{10} \cdot \mathbf{a}_0 \quad (3.153)$$

$$\bar{\mathbf{M}}_{1-} = [\bar{\mathbf{I}} - \bar{\mathbf{R}}_{10} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{12} \cdot \bar{\mathbf{R}}_{12} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{21}]^{-1} \quad (3.154)$$

ifadelerine varılır. Böylece (3.153) ile ortaya çıkan $\mathbf{a}_1$ ifadesi, (3.135)'deki $\mathbf{b}_1$ ifadesinde yerine geri yazılırsa $\mathbf{b}_1$,

$$\mathbf{b}_1 = \bar{\mathbf{R}}_{12} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{21} \cdot \bar{\mathbf{M}}_{1-} \cdot \bar{\mathbf{T}}_{01} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{10} \cdot \mathbf{a}_0 \quad (3.155)$$

halini alır. Son olarak (3.155)'de elde edilen $\mathbf{b}_1$ ifadesi, (3.133)'de yerine yazılır ve ifade düzenlenirse,

$$\mathbf{b}_0 = \tilde{\tilde{\mathbf{R}}}_{01} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{10} \cdot \mathbf{a}_0 \quad (3.156)$$

$$\tilde{\tilde{\mathbf{R}}}_{01} = [\bar{\mathbf{R}}_{01} + \bar{\mathbf{T}}_{10} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{12} \cdot \bar{\mathbf{R}}_{12} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{21} \cdot \bar{\mathbf{M}}_{1-} \cdot \bar{\mathbf{T}}_{01}] \quad (3.157)$$

elde edilir. Burada $\tilde{\tilde{\mathbf{R}}}_{01}$, 0 bölgesinde tanımlı genelleştirilmiş saçılma matrisidir. (3.136) denklemi, son katmanın yani en içte bulunan katmanın içerisine geçen alanın katsayısı vektörü $\mathbf{a}_2$ 'ye ait bir ifade olup, bir dıştaki katmana ait $\mathbf{a}_1$ 'e bağlı olduğundan herhangi bir işleme tabi tutulmayı gerektirmez. (3.135), (3.136), (3.153) ve (3.156) bilinmeyen katsayıları bulmak için özyinelemeli bir ilişkinin temelini oluşturur ancak genelleştirmek için yeterli değildir. Genelleştirilebilir bir özyinelemeli ilişki kurmak için (3.135) denkleminin (3.156)'ya, (3.136)'nın ise (3.153)'e benzemesi gerekir. Eğer (3.135)'deki $\bar{\mathbf{R}}_{12}$ saçılma matrisi yerine $\tilde{\tilde{\mathbf{R}}}_{12}$ genelleştirilmiş saçılma matrisi ve (3.136)'daki $\bar{\mathbf{T}}_{12}$ geçiş matrisinin önüne $\bar{\mathbf{M}}_{2-}$ matrisi çarpım olarak konulursa bütün alan katsayıları için aşağıdaki ilişkiler elde edilir:

$$a_1 = \overline{M}_{1-} \cdot \overline{T}_{01} \cdot \overline{\beta}_{10} \cdot a_0 \quad (3.158)$$

$$a_2 = \overline{M}_{2-} \cdot \overline{T}_{12} \cdot \overline{\beta}_{21} \cdot a_1 \quad (3.159)$$

$$b_0 = \widetilde{\overline{R}}_{01} \cdot \overline{\beta}_{10} \cdot a_0 \quad (3.160)$$

$$b_1 = \widetilde{\overline{R}}_{12} \cdot \overline{\beta}_{21} \cdot a_1 \quad (3.161)$$

Ancak bu ilişkileri yazmak (3.159) ve (3.161)'in geçerliliğini doğrulamaz. Bu ifadelerin geçerliliğini göstermek için (3.154) göz önünde bulundurularak $\overline{M}_{2-}$ ifadesi yazılırsa,

$$\overline{M}_{2-} = [\overline{I} - \overline{R}_{21} \cdot \overline{\beta}_{23} \cdot \overline{R}_{23} \cdot \overline{\beta}_{32}]^{-1} \quad (3.162)$$

Benzer biçimde (3.157) göz önünde bulundurularak $\widetilde{\overline{R}}_{12}$,

$$\widetilde{\overline{R}}_{12} = [\overline{R}_{12} + \overline{T}_{21} \cdot \overline{\beta}_{23} \cdot \overline{R}_{23} \cdot \overline{\beta}_{32} \cdot \overline{M}_{2-} \cdot \overline{T}_{12}] \quad (3.163)$$

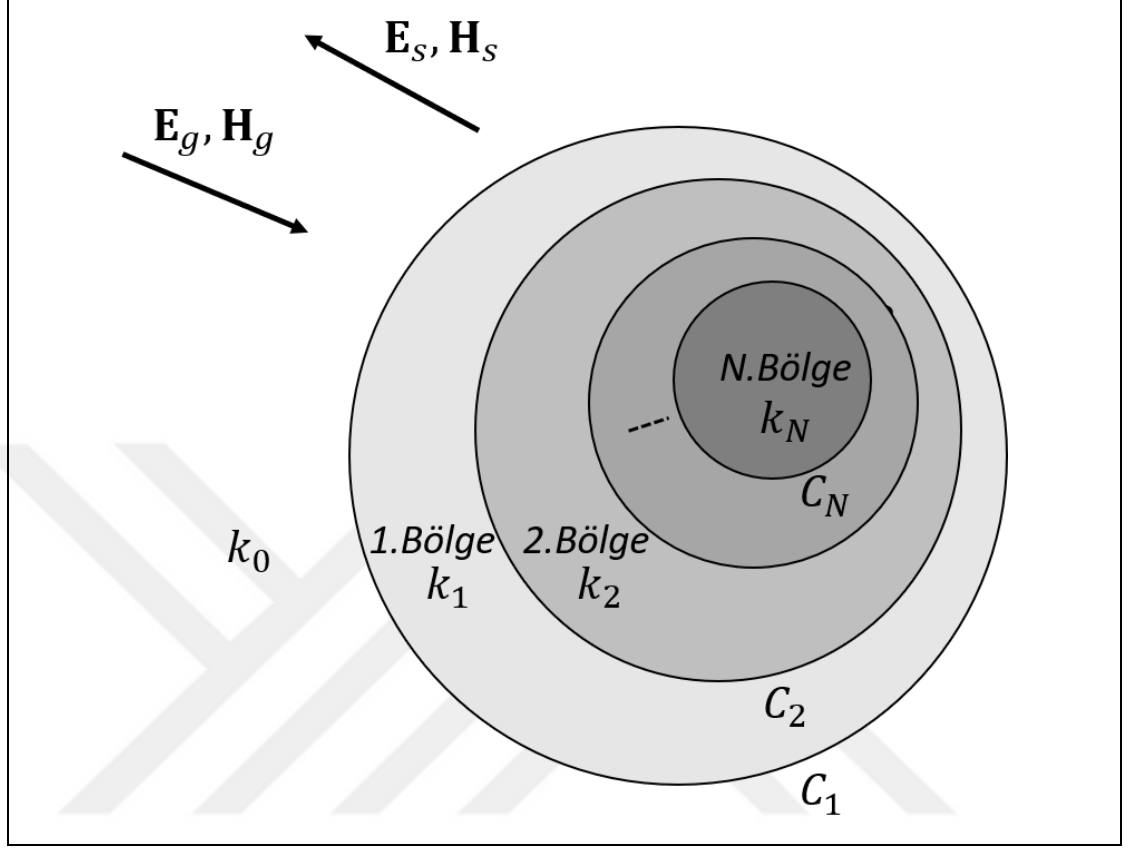
elde edilir. Fakat iki katmanlı problemde üçüncü bir katman var olmadığından, 3 indisini barındıran bütün matrisler sıfır olur. İlâveten, üçüncü katmandan saçılarak ikinci katmanın iç duvarlarına çarpıp saçılan veya katmanın dışına geçen bir alandan da söz edilemeyeceğinden ötürü $\overline{R}_{21}$ ve $\overline{T}_{21}$ matrisi de 0 olur. Buradan hareketle iki katmanlı problem için $\overline{M}_{2-}$ ve $\widetilde{\overline{R}}_{12}$ matrisleri,

$$\overline{M}_{2-} = [\overline{I}]^{-1} = \overline{I} \quad (3.164)$$

$$\widetilde{\overline{R}}_{12} = \overline{R}_{12} \quad (3.165)$$

olarak bulunur. (3.164) ve (3.165)'in, (3.159) ve (3.161) yerine yazılması ile (3.136) ve (3.135) denklemleri elde edilir. Böylece (3.158)'den (3.161)'e kadar olan

geçerliliği ispat edilen genelleştirilebilir özyinelemeli ilişkiler N katmanlı problem için de elde edilebilir.



Şekil 3.7: k_0 dalga sayılı ortamda bulunan N katmanlı bir silindirik saçıcıdan saçılma problemi.

3.2.3. N Katmanlı Durum

Şekil 3.7'deki gibi N tane katmanlı durum için bilinmeyen alan katsayılarına ilişkin genelleştirilmiş ifadeler ve buradan hareketle özyinelemeli ilişkilere varılırken yordamın iyi anlaşılması adına öncelikle üç katmanlı durum ele alınsın. $N = 3$ iken, 0. bölgede toplam alan ifadesi yazılırsa (3.130)'daki gibi,

$$\phi_0(\rho) = \Re g \psi^t(k_0, \rho_1) \cdot \bar{\beta}_{10} \cdot a_0 + \psi^t(k_0, \rho_1) \cdot b_0 \quad (3.166)$$

olur. Benzer şekilde 1.bölgedeki toplam alan ifadesi de (3.131)'den,

$$\phi_1(\rho) = \Re g\psi^t(k_1, \rho_2) \cdot \bar{\beta}_{21} \cdot a_1 + \psi^t(k_1, \rho_2) \cdot b_1 \quad (3.167)$$

olur ve 2.bölgedeki toplam alan (3.132)'den farklı olarak,

$$\phi_2(\rho) = \Re g\psi^t(k_2, \rho_3) \cdot \bar{\beta}_{32} \cdot a_2 + \psi^t(k_2, \rho_3) \cdot b_2 \quad (3.168)$$

ile verilir ve son olarak 3.bölgedeki toplam alan,

$$\phi_3(\rho) = \Re g\psi^t(k_3, \rho_3) \cdot a_3 \quad (3.169)$$

olarak ifade edilir. Buradan hareketle, iki katmanlı duruma benzer biçimde bilinmeyen alan katsayılarına ilişkin aşağıdaki ifadeler yazılabilir,

$$b_0 = \bar{R}_{01} \cdot \bar{\beta}_{10} \cdot a_0 + \bar{T}_{10} \cdot \bar{\beta}_{12} \cdot b_1 \quad (3.170)$$

$$a_1 = \bar{T}_{01} \cdot \bar{\beta}_{10} \cdot a_0 + \bar{R}_{10} \cdot \bar{\beta}_{12} \cdot b_1 \quad (3.171)$$

$$b_1 = \bar{R}_{12} \cdot \bar{\beta}_{21} \cdot a_1 + \bar{T}_{21} \cdot \bar{\beta}_{23} \cdot b_2 \quad (3.172)$$

$$a_2 = \bar{T}_{12} \cdot \bar{\beta}_{21} \cdot a_1 + \bar{R}_{23} \cdot \bar{\beta}_{23} \cdot b_2 \quad (3.173)$$

$$b_2 = \bar{R}_{23} \cdot \bar{\beta}_{32} \cdot a_2 \quad (3.174)$$

$$a_3 = \bar{T}_{23} \cdot \bar{\beta}_{32} \cdot a_2 \quad (3.175)$$

Burada (3.170) ve (3.171), iki katmanlı durumdaki (3.133) ve (3.134) ile aynı olup, (3.172) ve (3.173) ise (3.135) ve (3.136) ifadelerinin üç katmanlı durum için güncellenmeleriyle elde edilir. (3.174) ve (3.175) ise bu senaryo için yeni ortaya çıkan katsayı ifadeleridir. Yukarıdaki ifadelerden bir matris denklem sistemi kurulmasının yanında daha önce de bahsedildiği üzere alanların katsayı vektörleri arasında genelleştirilmiş bir özyinelemeli ilişki elde edilerek de çözümler bulunabilir. Bunun için ilk olarak (3.174), (3.173)'de yerine yazılırsa,

$$\mathbf{a}_2 = \bar{\mathbf{T}}_{12} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{21} \cdot \mathbf{a}_1 + \bar{\mathbf{R}}_{23} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{23} \cdot \bar{\mathbf{R}}_{23} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{32} \cdot \mathbf{a}_2 \quad (3.176)$$

$$[\bar{\mathbf{I}} - \bar{\mathbf{R}}_{23} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{23} \cdot \bar{\mathbf{R}}_{23} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{32}] \cdot \mathbf{a}_2 = \bar{\mathbf{T}}_{12} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{21} \cdot \mathbf{a}_1 \quad (3.177)$$

elde edilir. (3.177)'de $\mathbf{a}_2$ yalnız bırakılarak denklem düzenlenirse,

$$\mathbf{a}_2 = \bar{\mathbf{M}}_{2-} \cdot \bar{\mathbf{T}}_{12} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{21} \cdot \mathbf{a}_1 \quad (3.178)$$

$$\bar{\mathbf{M}}_{2-} = [\bar{\mathbf{I}} - \bar{\mathbf{R}}_{23} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{23} \cdot \bar{\mathbf{R}}_{23} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{32}]^{-1} \quad (3.179)$$

olur. Böylece (3.178)(3.153) ile ortaya çıkan $\mathbf{a}_2$ ifadesi, (3.174)'deki $\mathbf{b}_2$ ifadesinde yerine geri yazılırsa $\mathbf{b}_2$,

$$\mathbf{b}_2 = \bar{\mathbf{R}}_{23} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{32} \cdot \bar{\mathbf{M}}_{2-} \cdot \bar{\mathbf{T}}_{12} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{21} \cdot \mathbf{a}_1 \quad (3.180)$$

halini alır. Elde edilen $\mathbf{b}_2$ ifadesi, (3.172)'deki $\mathbf{b}_1$ ifadesinde yerine yazılır ve ifade düzenlenirse,

$$\mathbf{b}_1 = \tilde{\tilde{\mathbf{R}}}_{12} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{21} \cdot \mathbf{a}_1 \quad (3.181)$$

$$\tilde{\tilde{\mathbf{R}}}_{12} = [\bar{\mathbf{R}}_{12} + \bar{\mathbf{T}}_{21} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{23} \cdot \bar{\mathbf{R}}_{23} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{32} \cdot \bar{\mathbf{M}}_{2-} \cdot \bar{\mathbf{T}}_{12}] \quad (3.182)$$

ifadelerine ulaşılır. Burada $\tilde{\tilde{\mathbf{R}}}_{12}$, 1 bölgesinde tanımlı genelleştirilmiş saçılma matrisidir. $\bar{\mathbf{M}}_{1-}$ matrisini elde etmek için, $\bar{\mathbf{M}}_{2-}$ 'nin eldesine benzer biçimde (3.181)'de ortaya çıkan $\mathbf{b}_1$ ifadesi (3.171)'de yerine yazılırsa,

$$\mathbf{a}_1 = \bar{\mathbf{T}}_{01} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{10} \cdot \mathbf{a}_0 + \bar{\mathbf{R}}_{10} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{12} \cdot \tilde{\tilde{\mathbf{R}}}_{12} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{21} \cdot \mathbf{a}_1 \quad (3.183)$$

$$[\bar{\mathbf{I}} - \bar{\mathbf{R}}_{10} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{12} \cdot \tilde{\tilde{\mathbf{R}}}_{12} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{21}] \cdot \mathbf{a}_1 = \bar{\mathbf{T}}_{01} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{10} \cdot \mathbf{a}_0 \quad (3.184)$$

elde edilir. (3.184)'de $\mathbf{a}_1$ yalnız bırakılarak denklem düzenlendiğinde,

$$\mathbf{a}_1 = \overline{\mathbf{M}}_{1-} \cdot \overline{\mathbf{T}}_{01} \cdot \overline{\boldsymbol{\beta}}_{10} \cdot \mathbf{a}_0 \quad (3.185)$$

$$\overline{\mathbf{M}}_{1-} = \left[\overline{\mathbf{I}} - \overline{\mathbf{R}}_{10} \cdot \overline{\boldsymbol{\beta}}_{12} \cdot \widetilde{\mathbf{R}}_{12} \cdot \overline{\boldsymbol{\beta}}_{21} \right]^{-1} \quad (3.186)$$

ifadelerine ulaşılır. (3.185)'deki $\mathbf{a}_1$, (3.181)'deki yeni $\mathbf{b}_1$ 'de yerine geri yazıldığında,

$$\mathbf{b}_1 = \widetilde{\mathbf{R}}_{12} \cdot \overline{\boldsymbol{\beta}}_{21} \cdot \overline{\mathbf{M}}_{1-} \cdot \overline{\mathbf{T}}_{01} \cdot \overline{\boldsymbol{\beta}}_{10} \cdot \mathbf{a}_0 \quad (3.187)$$

olur ve son olarak 0 bölgesinde tanımlı genelleştirilmiş saçılma matrisi $\widetilde{\mathbf{R}}_{01}$ 'i elde etmek için (3.187) ifadesi (3.170)'de yerine yazılırsa,

$$\mathbf{b}_0 = \widetilde{\mathbf{R}}_{01} \cdot \overline{\boldsymbol{\beta}}_{10} \cdot \mathbf{a}_0 \quad (3.188)$$

$$\widetilde{\mathbf{R}}_{01} = \left[\overline{\mathbf{R}}_{01} + \overline{\mathbf{T}}_{10} \cdot \overline{\boldsymbol{\beta}}_{12} \cdot \widetilde{\mathbf{R}}_{12} \cdot \overline{\boldsymbol{\beta}}_{21} \cdot \overline{\mathbf{M}}_{1-} \cdot \overline{\mathbf{T}}_{01} \right] \quad (3.189)$$

ifadelerine varılır. Elde edilen tüm bu ifadelerden özyinelemeli çözüm için yararlı olanlar,

$$\mathbf{b}_0 = \widetilde{\mathbf{R}}_{01} \cdot \overline{\boldsymbol{\beta}}_{10} \cdot \mathbf{a}_0 \quad (3.190)$$

$$\mathbf{a}_1 = \overline{\mathbf{M}}_{1-} \cdot \overline{\mathbf{T}}_{01} \cdot \overline{\boldsymbol{\beta}}_{10} \cdot \mathbf{a}_0 \quad (3.191)$$

$$\mathbf{b}_1 = \widetilde{\mathbf{R}}_{12} \cdot \overline{\boldsymbol{\beta}}_{21} \cdot \mathbf{a}_1 \quad (3.192)$$

$$\mathbf{a}_2 = \overline{\mathbf{M}}_{2-} \cdot \overline{\mathbf{T}}_{12} \cdot \overline{\boldsymbol{\beta}}_{21} \cdot \mathbf{a}_1 \quad (3.193)$$

$$\mathbf{b}_2 = \overline{\mathbf{R}}_{23} \cdot \overline{\boldsymbol{\beta}}_{32} \cdot \mathbf{a}_2 \quad (3.194)$$

$$\mathbf{a}_3 = \overline{\mathbf{T}}_{23} \cdot \overline{\boldsymbol{\beta}}_{32} \cdot \mathbf{a}_2 \quad (3.195)$$

şeklinde bir araya toplanabilir. Burada (3.190)'dan (3.193)'e kadar olan denklemler genelleştirmeye elverişlidir. Tutarlılığın sağlanması için iki katmanlı durumda

yapılana benzer biçimde (3.194) denkleminde $\bar{\mathbf{R}}_{23}$ yerine $\tilde{\bar{\mathbf{R}}}_{23}$ yazılarak ve (3.195)'deki $\bar{\mathbf{T}}_{23}$ matrisine soldan $\bar{\mathbf{M}}_{3-}$ matrisi çarpım olarak getirilebilir, böylece özyinelemeli ilişkiler genelleştirmeye elverişli olur. Bu durumda,

$$\bar{\mathbf{M}}_{3-} = [\bar{\mathbf{I}}]^{-1} = \bar{\mathbf{I}} \quad (3.196)$$

$$\tilde{\bar{\mathbf{R}}}_{23} = \bar{\mathbf{R}}_{23} \quad (3.197)$$

olduğu unutulmamalıdır. Ayrıca (3.179)'daki $\bar{\mathbf{R}}_{23} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{32}$ çarpımı da $\tilde{\bar{\mathbf{R}}}_{23} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{32}$ olarak güncellenmelidir. Tüm bu bilgilerin ışığında elde edilen ifadeler N katmanlı yapı için genişletilirse, i. bölgedeki toplam alan ifadesi,

$$\phi_i(\boldsymbol{\rho}) = \Re g \psi^t(k_i, \boldsymbol{\rho}_{i+1}) \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{i+1,i} \cdot \mathbf{a}_i + \psi^t(k_i, \boldsymbol{\rho}_{i+1}) \cdot \mathbf{b}_i \quad (3.198)$$

ve N. bölgedeki toplam alan ifadesi,

$$\phi_N(\boldsymbol{\rho}) = \Re g \psi^t(k_N, \boldsymbol{\rho}_N) \cdot \mathbf{a}_N \quad (3.199)$$

olur. (3.190)'dan (3.197)'ye kadar olan denklemlerden hareketle bilinmeyen alan katsayıları arasındaki ilişkiler aşağıdaki gibi olur,

$$\mathbf{b}_i = \tilde{\bar{\mathbf{R}}}_{i,i+1} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{i+1,i} \cdot \mathbf{a}_i \quad (3.200)$$

$$\mathbf{a}_{i+1} = \bar{\mathbf{M}}_{i+1-} \cdot \bar{\mathbf{T}}_{i,i+1} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{i+1,i} \cdot \mathbf{a}_i \quad (3.201)$$

ve burada,

$$\begin{aligned} \tilde{\bar{\mathbf{R}}}_{i,i+1} = & \\ & \left[\bar{\mathbf{R}}_{i,i+1} + \bar{\mathbf{T}}_{i+1,i} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{i+1,i+2} \cdot \tilde{\bar{\mathbf{R}}}_{i+1,i+2} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{i+2,i+1} \cdot \bar{\mathbf{M}}_{i+1-} \cdot \bar{\mathbf{T}}_{i,i+1} \right] \end{aligned} \quad (3.202)$$

$$\overline{\mathbf{M}}_{i+1-} = \left[\overline{\mathbf{I}} - \overline{\mathbf{R}}_{i+1,i} \cdot \overline{\boldsymbol{\beta}}_{i+1,i+2} \cdot \widetilde{\overline{\mathbf{R}}}_{i+1,i+2} \cdot \overline{\boldsymbol{\beta}}_{i+2,i+1} \right]^{-1} \quad (3.203)$$

$$\overline{\mathbf{M}}_{N-} = [\overline{\mathbf{I}}]^{-1} = \overline{\mathbf{I}} \quad (3.204)$$

$$\widetilde{\overline{\mathbf{R}}}_{N-1,N} = \overline{\mathbf{R}}_{N-1,N} \quad (3.205)$$

olur. Yukarıdaki özyinelemeli ilişkiler kullanılarak katmanlı yapılardan saçılma problemine ilişkin çözümler bulunabilir. Burada dikkat edilmesi gereken önemli bir husus $\overline{\mathbf{M}}_{i+1-}$ matrisinin kesme sayısı arttıkça kötü koşullu olmasıdır. Özellikle büyük yarıçaplı silindirik katmanlar ele alınırken çözümlerin doğruluğu için daha fazla silindirik harmonik alınmalıdır, bu da özyinelemeli ilişkilerdeki matrislerin boyutlarını artırır. Kötü koşullanmış bir $\overline{\mathbf{M}}_{i+1-}$ matrisinin her özyineleme sırasında tersinin alınması, çözümlerin doğruluğunu doğrudan etkileyen bir unsurdur. Dolayısıyla bu matrisin tersinin doğru bir şekilde alınmasına dikkat edilmelidir.

4. İKİ BOYUTTA REGÜLERLEŞTİRİLMİŞ ÖZYİNELEMELİ T MATRİSİ YÖNTEMİ

4.1. Tek Saçıcı/Katmanlı Durum

3. bölümde T matrisi yöntemi GSK yönteminde saçıcıyı kapsayan ve saçıcının kapsadığı test yüzeyleri ile saçıcı yüzeyi arasındaki maksimum uzaklığın büyük olması durumunda $\bar{\mathbf{Q}}$ matrisinin kötü-köşüllü olduğu anlatılmıştı. Rayleigh hipotezi yönteminde de karşılaşılan matrisler, GSK yönteminde elde edilen matrislerin devriği olduğundan aynı kötü-köşüllü doğa ile karşılaşılır. Bir saçıcı durum için saçılan alanın katsayı vektörüne ilişkin ifade (3.9)'dan,

$$\mathbf{f}_1 = \bar{\mathbf{T}}_{1(1)} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{10} \cdot \mathbf{a} \quad (4.1)$$

Ve GSK yöntemi ile elde edilen T matrisi ifadesi (3.10)'daki gibi,

$$\bar{\mathbf{T}}_{1(1)} = -(\Re g \bar{\mathbf{Q}}_{10}) \cdot \bar{\mathbf{Q}}_{10}^{-1} \quad (4.2)$$

verilmişti. Burada $\bar{\mathbf{Q}}_{10}$ matrisinin elemanları (3.12)'de (3.20) ve (3.22) kullanılarak,

$$\begin{aligned} Q_{nm}^{10} = \int_S \left(H_n^{(2)}(k_0 \rho'_1) e^{-jn\phi'_1} \right) \hat{n}' \cdot \nabla' \left(J_m(k_1 \rho'_1) e^{jm\phi'_1} \right) \frac{p_1}{p_0} \\ - \left(J_m(k_1 \rho'_1) e^{jm\phi'_1} \right) \hat{n}' \cdot \nabla' \left(H_n^{(2)}(k_0 \rho'_1) e^{-jn\phi'_1} \right) \} dl' \end{aligned} \quad (4.3)$$

elde edilir. Benzer biçimde $\Re g \bar{\mathbf{Q}}_{10}$ matrisinin elemanları ise,

$$\begin{aligned} \Re g Q_{nm}^{10} = \int_S \left\{ \left(J_n(k_0 \rho'_1) e^{-jn\phi'_1} \right) \hat{n}' \cdot \nabla' \left(J_m(k_1 \rho'_1) e^{jm\phi'_1} \right) \frac{p_1}{p_0} \right. \\ \left. - \left(J_m(k_1 \rho'_1) e^{jm\phi'_1} \right) \hat{n}' \cdot \nabla' \left(J_n(k_0 \rho'_1) e^{-jn\phi'_1} \right) \right\} dl' \end{aligned} \quad (4.4)$$

olur. $n, m \in [-M, M]$ olmak üzere M arttıkça $\bar{\mathbf{Q}}$ ve $\Re g \bar{\mathbf{Q}}$ matrislerinin davranışını incelemek için bu matrislerin içerisindeki Bessel ve Hankel fonksiyonlarının davranışlarını incelemek gerekmektedir. Bunun için bu fonksiyonların $n \rightarrow \infty$ için aşağıdaki asimptotik gösterilimleri [19]'deki gibi incelenirse,

$$|J_n(x)| \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \left| \left(\frac{ex}{2n} \right)^n \right| \quad (4.5)$$

$$|H_n^{(1,2)}(x)| \sim \sqrt{\frac{2}{\pi n}} \left| \left(\frac{2n}{et} \right)^n \right| \quad (4.6)$$

elde edilir. Buna ek olarak, asimptotik Stirling formülü ise,

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e} \right)^n \quad (4.7)$$

ile verilir. (4.7) formülü, (4.5) ve (4.6)'de kullanılırsa aşağıdaki eşitsizliklere varılır,

$$|J_n(x)| \leq \frac{e^{|Im x|}}{n!} \left| \left(\frac{x}{2} \right)^n \right| \quad (4.8)$$

$$|H_n^{(1,2)}(x)| \leq (n-1)! e^{-|Im x|} \left| \left(\frac{2}{t} \right)^n \right| \quad (4.9)$$

(4.8) ve (4.9) eşitsizlikleri $\bar{\mathbf{T}}_{1(1)}$ matrisindeki kötü koşullu doğayı ortaya çıkarır [19]. $H_n^{(1,2)}(x)$ fonksiyonu $(n-1)!$ orantılı bir biçimde hızlıca artan karakterde olup, $J_n(x)$ fonksiyonu ise $n!$ ile orantılı bir biçimde hızlıca azalan karakterdedir. Bu sebeple $\Re g \bar{\mathbf{Q}}$ matrisi hızlıca azalan karakterdeyken $\bar{\mathbf{Q}}$ matrisi ise nispeten dengelidir. Her ne kadar $\bar{\mathbf{Q}}$ matrisi dengeli görünse de dairesel geometrilere dahi kötü koşullu olduğu nümerik olarak gösterilebilir. Teorik olarak sonsuz boyutlu bu matris bir kesme sayısında kesildiğinde, bu matrisin öklid matris normu ve koşullanma sayısı sınırlanmamıştır ve çok hızlı büyür [17], [26]. Bu nedenle 1.türden sistem özelliği gösteren bu denklem sistemi nümerik olarak çözülürken yuvarlama hatalarına açıktır.

(4.1) denklemi, GSK yöntemi uyarınca (2.71) ve (2.72)'deki gibi saçıcının içine geçen alanın katsayılarına bağlı iki denkleme ayrıştırılabilir,

$$-\frac{j}{4}\overline{Q}_{10} \cdot \alpha = a \quad (4.10)$$

$$f_1 = \frac{j}{4}(\Re g \overline{Q}_{10}) \cdot \alpha \quad (4.11)$$

Burada saçılan alanın katsayı vektörü f_1 'in bulunabilmesi için $\overline{Q}_{10}$ matrisinin tersinin alınmasını gerektiren denklem sistemi (4.10) matris denklem sistemidir ve bu sistem 1.türden bir sistemdir. Bu sistemi $\overline{I}$ birim matris ve $\overline{K}$ ise l_2 uzayında tanımlı kompakt operatör[19] olmak üzere nümerik olarak güvenli ve $[\overline{I} + \overline{K}]$ matrisinin koşullanma sayısının sınırlı olduğu $[\overline{I} + \overline{K}]\mathbf{y} = \mathbf{g}$ gibi ikinci türden bir sisteme dönüştürmek regülerleştirme işlemi ile mümkündür. Regülerleştirme için köşegen bir $\overline{R}$ matrisi yardımıyla bilinmeyen α ölçeklenirse yeni bilinmeyen vektör,

$$\mathbf{y} = \overline{R}^{-1} \cdot \alpha \quad (4.12)$$

olur. (4.12) kullanılarak (4.10) yeniden yazılarak ve gösterim kolaylığı açısından $-\frac{j}{4}$ sabitinin $\overline{Q}_{10}$ matrisinin içerisinde yer aldığı düşünülerek,

$$\overline{Q}_{10} \cdot \overline{R} \cdot \overline{R}^{-1} \cdot \alpha = a \quad (4.13)$$

$$\overline{Q}_{10} \cdot \overline{R} \cdot \mathbf{y} = a \quad (4.14)$$

elde edilir. Burada köşegen $\overline{R}$ matrisi sağdan regülerleştirme operatörü olup, bu durumda (4.14) sistemi yalnızca sağdan regülerleştirilmiş olur. Benzer biçimde soldan regülerleştirme operatörü olarak köşegen bir $\overline{L}$ matrisi tanımlanır ve (4.14)'ün her iki yanı soldan bu matris ile çarpılırsa,

$$\overline{L} \cdot \overline{Q}_{10} \cdot \overline{R} \cdot \mathbf{y} = \overline{L} \cdot a \quad (4.15)$$

elde edilir. Böylece 1.türden sistem olan (4.10), $[\overline{I} + \overline{K}]\mathbf{y} = \mathbf{g}$ gibi nümerik olarak güvenli ikinci türden bir sisteme dönüştürülerek regülerleştirilmiş olur. Burada,

$$\bar{\mathcal{L}} \cdot \bar{\mathcal{Q}}_{10} \cdot \bar{\mathcal{R}} = \bar{\mathbf{I}} + \bar{\mathbf{K}} \quad (4.16)$$

$$\mathbf{g} = \bar{\mathcal{L}} \cdot \mathbf{a} \quad (4.17)$$

biçimindedir. (4.10) sistemini regülerleştirirken $\bar{\mathcal{R}}$ ve $\bar{\mathcal{L}}$ için uygun bir seçim,

$$\bar{\mathcal{R}} = \text{diag}\left[H_m^{(1)}(k_0 a_1)\right] \quad (4.18)$$

$$\bar{\mathcal{L}} = \text{diag}\left[H_n^{(1)}(k_0 a_1)\right]^{-1} \quad (4.19)$$

ile verilir. Bu seçim temelde ele alınan fonksiyonların (4.8) ve (4.9) ile verilen asimptotik davranışlarını gözetir ve öz çözümler ile örtüşmesi şart değildir. Zaman bağımlılığı uyarınca ikinci tür Hankel fonksiyonlarının kullanılmasına rağmen burada birinci türden Hankel fonksiyonlarının görünmesi bu yüzdendir. Burada a_1 silindirik saçıcının yarıçapıdır. Ayrıca $\bar{\mathcal{R}}$ ve $\bar{\mathcal{L}}$ köşegen matris olduklarından,

$$\bar{\mathcal{L}} = \bar{\mathcal{R}}^{-1} \quad (4.20)$$

yazılabilir. Bu seçim ile $\bar{\mathcal{Q}}_{10}$ matrisi ile sağdan çarpılan köşegen $\bar{\mathcal{R}}$ matrisi, $\bar{\mathcal{Q}}_{10}$ matrisinde sütun boyunca değişen ve Bessel fonksiyonu içeren terimleri, bu fonksiyona asimptotik olarak karşıt davranışta olan Hankel fonksiyonuyla ölçekleyerek regülerleştirir. Benzer biçimde köşegen $\bar{\mathcal{L}}$ matrisi ise $\bar{\mathcal{Q}}_{10}$ matrisi ile soldan çarpılarak satır boyunca değişen ve Hankel fonksiyonlarını içeren terimleri Hankel fonksiyonunun tersi ile ölçekleyerek regülerleştirir. Böylece $\bar{\mathcal{L}} \cdot \bar{\mathcal{Q}}_{10} \cdot \bar{\mathcal{R}}$ matrisi, birim ve kompakt bir matris toplamı haline dönüşerek tersi alınma noktasında güvenli bir hale gelir. Buradan hareketle (4.15)'de $\mathbf{y}$ vektörü yalnız bırakılarak ve (4.12) kullanılarak,

$$\mathbf{y} = (\bar{\mathcal{L}} \cdot \bar{\mathcal{Q}}_{10} \cdot \bar{\mathcal{R}})^{-1} \cdot \bar{\mathcal{L}} \cdot \mathbf{a} \quad (4.21)$$

$$\mathbf{a} = \bar{\mathcal{R}} \cdot (\bar{\mathcal{L}} \cdot \bar{\mathcal{Q}}_{10} \cdot \bar{\mathcal{R}})^{-1} \cdot \bar{\mathcal{L}} \cdot \mathbf{a} \quad (4.22)$$

elde edilir. Saçılan alanla ilişkili bilinmeyen f_1 vektörünü bulmak için (4.22), (4.11)'de yerine yazılırsa ve gösterim kolaylığı açısından kaldırılan $-\frac{j}{4}$ sabiti ifadeye dahil edilirse,

$$f_1 = -(\Re g \bar{Q}_{10}) \cdot \bar{R} \cdot (\bar{L} \cdot \bar{Q}_{10} \cdot \bar{R})^{-1} \cdot \bar{L} \cdot a \quad (4.23)$$

olur. Ayrıca matematiksel olarak,

$$(\bar{L} \cdot \bar{Q}_{10} \cdot \bar{R})^{-1} = \bar{R}^{-1} \cdot \bar{Q}_{10}^{-1} \cdot \bar{L}^{-1} \quad (4.24)$$

yazılması mümkündür. (4.24), (4.23)'de yerine yazılırsa,

$$f_1 = -(\Re g \bar{Q}_{10}) \cdot (\bar{R} \cdot \bar{R}^{-1}) \cdot \bar{Q}_{10}^{-1} \cdot (\bar{L}^{-1} \cdot \bar{L}) \cdot a \quad (4.25)$$

$$f_1 = -(\Re g \bar{Q}_{10}) \cdot \bar{Q}_{10}^{-1} \cdot a \quad (4.26)$$

ifadesine varılır. Elde edilen (4.26) ifadesi (4.1) ile aynı olup bu eşitlik (4.23)'ün matematiksel olarak doğruluğunu ispat eder. (4.23)'de $(\bar{L} \cdot \bar{Q}_{10} \cdot \bar{R})^{-1}$ matris tersi nümerik olarak güvenli bir biçimde alınırken, (4.2)'de $\bar{Q}_{10}^{-1}$ matris tersini doğrudan almak nümerik hatalara sebep olur.

Eğer (4.1)'deki $\bar{T}_{1(1)}$ matrisi, Rayleigh hipotezi yöntemi ile elde edilecekse bu durumda (3.11)'den hareketle,

$$\bar{T}_{1(1)} = -(\bar{Q}_{10}^t)^{-1} \cdot \Re g \bar{Q}_{10}^t \quad (4.27)$$

olur ve,

$$f_1 = -(\bar{Q}_{10}^t)^{-1} \cdot \Re g \bar{Q}_{10}^t \cdot a \quad (4.28)$$

yazılabilir. Bu durumda $(\bar{\mathbf{Q}}_{10}^t)^{-1}$ matris tersinin güvenli bir şekilde alınabilmesi için sistem doğrudan yukarıda anlatılan yordamla regülerleştirilebilir. Buradan hareketle (4.28) denklemi düzenlenirse,

$$\bar{\mathbf{Q}}_{10}^t \cdot \mathbf{f}_1 = -\Re g \bar{\mathbf{Q}}_{10}^t \cdot \mathbf{a} \quad (4.29)$$

elde edilir ve

$$\mathbf{y} = \bar{\mathbf{R}}^{-1} \cdot \mathbf{f}_1 \quad (4.30)$$

yazılarak $\mathbf{f}_1$ katsayısı ölçeklenirse, yukarıda anlatılan yordam izlenerek,

$$\bar{\mathbf{L}} \cdot \bar{\mathbf{Q}}_{10}^t \cdot \bar{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{y} = -\bar{\mathbf{L}} \cdot \Re g \bar{\mathbf{Q}}_{10}^t \cdot \mathbf{a} \quad (4.31)$$

sistemi elde edilir. Burada,

$$\bar{\mathbf{L}} \cdot \bar{\mathbf{Q}}_{10}^t \cdot \bar{\mathbf{R}} = \bar{\mathbf{I}} + \bar{\mathbf{K}} \quad (4.32)$$

$$\mathbf{g} = -\bar{\mathbf{L}} \cdot \Re g \bar{\mathbf{Q}}_{10}^t \cdot \mathbf{a} \quad (4.33)$$

biçimindedir ve $\bar{\mathbf{R}}$ ve $\bar{\mathbf{L}}$ seçimi,

$$\bar{\mathbf{R}} = \text{diag}\left[H_n^{(1)}(k_0 a_1)\right]^{-1} \quad (4.34)$$

$$\bar{\mathbf{L}} = \text{diag}\left[H_m^{(1)}(k_0 a_1)\right] \quad (4.35)$$

şeklinde olmalıdır (fonksiyon seçimleri ile ilgili (4.18) ve (4.19) sonrası yapılan açıklama geçerlidir). Rayleigh hipotezi yönteminde tersi alınacak olan $\bar{\mathbf{Q}}_{10}^t$ matrisi $\bar{\mathbf{Q}}_{10}$ matrisinin devriği olduğundan GSK yöntemi izlenirken kullanılan $\bar{\mathbf{R}}$ ve $\bar{\mathbf{L}}$

regülerleştirme operatörleri, Rayleigh yöntemi izlenirken kullanılan $\bar{\mathcal{L}}$ ve $\bar{\mathcal{R}}$ operatörlerine denktir.

Regülerleştirilmiş (4.58) denkleminde $\mathbf{y}$ vektörü yalnız bırakılarak ve (4.57) kullanılarak,

$$\mathbf{y} = -\left(\bar{\mathcal{L}} \cdot \bar{\mathcal{Q}}_{10}^t \cdot \bar{\mathcal{R}}\right)^{-1} \cdot \bar{\mathcal{L}} \cdot \Re g \bar{\mathcal{Q}}_{10}^t \cdot \mathbf{a} \quad (4.36)$$

$$\mathbf{f}_1 = -\bar{\mathcal{R}} \cdot \left(\bar{\mathcal{L}} \cdot \bar{\mathcal{Q}}_{10}^t \cdot \bar{\mathcal{R}}\right)^{-1} \cdot \bar{\mathcal{L}} \cdot \Re g \bar{\mathcal{Q}}_{10}^t \cdot \mathbf{a} \quad (4.37)$$

elde edilir ve matematiksel olarak ispat edilebileceği üzere (4.64), (4.55)'e denktir.

Fakat (4.64)'nin (4.55)'den farkı, $\left(\bar{\mathcal{Q}}_{10}^t\right)^{-1}$ matris tersinin regülerleştirme operatörleri yardımıyla güvenli bir biçimde nümerik olarak alınmasına imkan tanımasıdır. Bu yordamla tek saçıcı veya çoklu saçıcı durumlarında karşılaşılabilecek izole-saçıcı T matrisleri güvenli bir biçimde nümerik olarak hesaplanabilir. Yukarıdaki analizde gelen alanın doğrudan saçıcının yerel koordinatında ifade edildiği varsayılmış olup, 0. koordinat üzerine gelen alanın saçıcının yerel koordinatında yazılmasıyla denklemlerde ortaya çıkan $\bar{\beta}_{10}$ dönüşüm matrisi regülerleştirme analizini değiştirmez, regülerleştirmenin geçerliliğini tehlikeye atmaz. Eğer yukarıdaki regülerleştirme yordamı $\bar{\beta}_{10}$ dönüşüm matrisinin varlığında incelenmek isteniyorsa, denklemlerde $\mathbf{a}$ yerine $\mathbf{a}_1$ yazılarak ve

$$\mathbf{a}_1 = \bar{\beta}_{10} \cdot \mathbf{a} \quad (4.38)$$

tanımı yapılarak analiz sürdürülebilir. Regülerleştirme operasyonu nümerik hesaplamada matris terslerinin güvenli bir biçimde alınabilmesini hedef aldığından (4.1) ile tutarlı olan böyle bir yaklaşım analizi etkilemez.

4.2. Çok Saçıcı Durum

İki saçıcı durum için daha önce (3.39) ve (3.41) ile verilen, $\mathbf{f}_i$ katsayılarının izole-saçıcı T matrisi cinsinden ifadeleri,

$$\mathbf{f}_1 = \bar{\mathbf{T}}_{1(1)} \cdot [\bar{\boldsymbol{\beta}}_{10} \cdot \mathbf{a} + \bar{\boldsymbol{\alpha}}_{12} \cdot \mathbf{f}_2] \quad (4.39)$$

$$\mathbf{f}_2 = \bar{\mathbf{T}}_{2(1)} \cdot [\bar{\boldsymbol{\beta}}_{20} \cdot \mathbf{a} + \bar{\boldsymbol{\alpha}}_{21} \cdot \mathbf{f}_1] \quad (4.40)$$

ile verilmişti. (4.39) ve (4.40) denklemleri düzenlenirse (3.50) ve (3.51)'de verildiği gibi,

$$\mathbf{f}_1 - \bar{\mathbf{T}}_{1(1)} \cdot \bar{\boldsymbol{\alpha}}_{12} \cdot \mathbf{f}_2 = \bar{\mathbf{T}}_{1(1)} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{10} \cdot \mathbf{a} \quad (4.41)$$

$$\mathbf{f}_2 - \bar{\mathbf{T}}_{2(1)} \cdot \bar{\boldsymbol{\alpha}}_{21} \cdot \mathbf{f}_1 = \bar{\mathbf{T}}_{2(1)} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{20} \cdot \mathbf{a} \quad (4.42)$$

elde edilir. Buradan hareketle blokları aşağıdaki gibi olan $\bar{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{f} = \mathbf{b}$ matris denklem sistemi kurulabilir:

$$A_{ij} = \begin{cases} \bar{\mathbf{I}} & i = j \\ -\bar{\mathbf{T}}_{i(1)} \cdot \bar{\boldsymbol{\alpha}}_{ij} & i \neq j \end{cases} \quad (4.43)$$

$$b_i = \bar{\mathbf{T}}_{i(1)} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{i0} \cdot \mathbf{a} \quad (4.44)$$

(4.43) ve (4.44) bloklarının oluşturduğu denklem sistemi 1.türden sistemdir ve alınan silindirik harmonik sayısı M arttıkça $\bar{\mathbf{A}}$ matrisi kötü koşullu hale gelir ve tersinin alınması özel bir dikkat gerektirir. Bu sistemi regülerleştirerek iyi koşullu bir $[\bar{\mathbf{I}} + \bar{\mathbf{K}}]\mathbf{y} = \mathbf{g}$ formunda bir 2.türden sisteme dönüştürebilmek bu gerekliliği ortadan kaldırır. Burada daha önce anıldığı gibi $\bar{\mathbf{I}}$ birim matris ve $\bar{\mathbf{K}}$ ise l_2 uzayında tanımlı kompakt operatördür[19]. 2.türden bir sistem elde etmek için,

$$\bar{\mathcal{L}} \cdot \bar{\mathbf{A}} \cdot \bar{\mathcal{R}} = \bar{\mathbf{I}} + \bar{\mathbf{K}} \quad (4.45)$$

$$\mathbf{y} = \bar{\mathcal{R}}^{-1} \cdot \mathbf{f} \quad (4.46)$$

$$\mathbf{g} = \bar{\mathcal{L}} \cdot \mathbf{b} \quad (4.47)$$

olur ve izole-saçıcı T matrislerinin Rayleigh hipotezi yöntemindeki gibi çıkarıldıkları varsayımıyla $\bar{\mathcal{R}}_i$, $\bar{\mathcal{R}}$ köşegen matrisinin blokları olmak üzere,

$$\bar{\mathcal{R}}_i = \text{diag}\left[H_n^{(1)}(k_0 a_i)\right]^{-1} \quad (4.48)$$

ile verilir. Burada a_i , dairesel saçıcının yarıçapını ifade etmektedir. Ayrıca,

$$\bar{\mathcal{L}} = \bar{\mathcal{R}}^{-1} \quad (4.49)$$

ve $\bar{\mathcal{L}}_i$, $\bar{\mathcal{L}}$ köşegen matrisinin blokları olmak üzere,

$$\bar{\mathcal{L}}_i = \text{diag}\left[H_m^{(1)}(k_0 a_i)\right] \quad (4.50)$$

olur. Yukarıdaki $\bar{\mathcal{L}}$ ve $\bar{\mathcal{R}}$ daha önce de anıldığı gibi sırasıyla sağdan ve soldan regülerleştirme operatörü olarak adlandırılır. Eğer bu operatörler, blokları (4.43) ve (4.44)'da verilen sisteme uygulanırsa,

$$[\bar{\mathbf{I}} + \bar{\mathbf{K}}] = \begin{cases} \bar{\mathbf{I}} & i = j \\ -\bar{\mathcal{L}}_i \cdot \bar{\mathbf{T}}_{i(1)} \cdot \bar{\alpha}_{ij} \cdot \bar{\mathcal{R}}_j & i \neq j \end{cases} \quad (4.51)$$

$$\mathbf{g}_i = \bar{\mathcal{L}}_i \cdot \bar{\mathbf{T}}_{i(1)} \cdot \bar{\beta}_{i0} \cdot \mathbf{a} \quad (4.52)$$

elde edilir. Buradan hareketle $\mathbf{f}_1$ ve $\mathbf{f}_2$ 'ye ilişkin $\mathbf{y}_1$ ve $\mathbf{y}_2$ regüler katsayı vektörlerine bağlı regülerleştirilmiş yeni denklemler, yukarıdaki matris gösteriminden yeniden elde edilirse,

$$\mathbf{y}_1 - \bar{\mathcal{L}}_1 \cdot \bar{\mathbf{T}}_{1(1)} \cdot \bar{\alpha}_{12} \cdot \bar{\mathcal{R}}_2 \cdot \mathbf{y}_2 = \bar{\mathcal{L}}_1 \cdot \bar{\mathbf{T}}_{1(1)} \cdot \bar{\beta}_{10} \cdot \mathbf{a} \quad (4.53)$$

$$\mathbf{y}_2 - \bar{\mathcal{L}}_2 \cdot \bar{\mathbf{T}}_{2(1)} \cdot \bar{\alpha}_{21} \cdot \bar{\mathcal{R}}_1 \cdot \mathbf{y}_1 = \bar{\mathcal{L}}_2 \cdot \bar{\mathbf{T}}_{2(1)} \cdot \bar{\beta}_{20} \cdot \mathbf{a} \quad (4.54)$$

olur ve buradan hareketle aşağıdaki,

$$\mathbf{y}_1 = \bar{\mathcal{L}}_1 \cdot \bar{\mathbf{T}}_{1(1)} \cdot [\bar{\beta}_{10} \cdot \mathbf{a} + \bar{\alpha}_{12} \cdot \bar{\mathcal{R}}_2 \cdot \mathbf{y}_2] \quad (4.55)$$

$$\mathbf{y}_2 = \bar{\mathcal{L}}_2 \cdot \bar{\mathbf{T}}_{2(1)} \cdot [\bar{\beta}_{20} \cdot \mathbf{a} + \bar{\alpha}_{21} \cdot \bar{\mathcal{R}}_1 \cdot \mathbf{y}_1] \quad (4.56)$$

denklemleri yazılabilir. (4.55) ve (4.56) denklemleri, (4.39) ve (4.40)'nın regülerleştirilmiş halleridir. 3.bölümde iki saçıcılı durum için ÖTMY'nin çıkarılmasındaki yordam izlenerek (4.55) ve (4.56)'dan regülerleştirilmiş özyinelemeli ilişkiler çıkarılabilir. Bunun için ilk olarak (4.56), (4.55)'de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_1 = & \bar{\mathcal{L}}_1 \cdot \bar{\mathbf{T}}_{1(1)} \cdot \bar{\beta}_{10} \cdot \mathbf{a} + \bar{\mathcal{L}}_1 \cdot \bar{\mathbf{T}}_{1(1)} \cdot \bar{\alpha}_{12} \cdot \bar{\mathcal{R}}_2 \cdot \bar{\mathcal{L}}_2 \cdot \bar{\mathbf{T}}_{2(1)} \cdot \bar{\beta}_{20} \cdot \mathbf{a} \\ & + \bar{\mathcal{L}}_1 \cdot \bar{\mathbf{T}}_{1(1)} \cdot \bar{\alpha}_{12} \cdot \bar{\mathcal{R}}_2 \cdot \bar{\mathcal{L}}_2 \cdot \bar{\mathbf{T}}_{2(1)} \cdot \bar{\alpha}_{21} \cdot \bar{\mathcal{R}}_1 \cdot \mathbf{y}_1 \end{aligned} \quad (4.57)$$

olur. $\mathbf{y}_1$ 'li ve $\mathbf{a}$ 'lı terimler paranteze alınırsa $\bar{\mathbf{I}}$ birim matris olmak üzere,

$$\begin{aligned} & [\bar{\mathbf{I}} - \bar{\mathcal{L}}_1 \cdot \bar{\mathbf{T}}_{1(1)} \cdot \bar{\alpha}_{12} \cdot \bar{\mathcal{R}}_2 \cdot \bar{\mathcal{L}}_2 \cdot \bar{\mathbf{T}}_{2(1)} \cdot \bar{\alpha}_{21} \cdot \bar{\mathcal{R}}_1] \cdot \mathbf{y}_1 \\ & = \bar{\mathcal{L}}_1 \cdot \bar{\mathbf{T}}_{1(1)} \cdot [\bar{\beta}_{10} + \bar{\alpha}_{12} \cdot \bar{\mathcal{R}}_2 \cdot \bar{\mathcal{L}}_2 \cdot \bar{\mathbf{T}}_{2(1)} \cdot \bar{\beta}_{20}] \cdot \mathbf{a} \end{aligned} \quad (4.58)$$

elde edilir. Son olarak, sol yanda $\mathbf{y}_1$ 'in yalnız bırakılmasıyla,

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_1 = & [\bar{\mathbf{I}} - \bar{\mathcal{L}}_1 \cdot \bar{\mathbf{T}}_{1(1)} \cdot \bar{\alpha}_{12} \cdot \bar{\mathcal{R}}_2 \cdot \bar{\mathcal{L}}_2 \cdot \bar{\mathbf{T}}_{2(1)} \cdot \bar{\alpha}_{21} \cdot \bar{\mathcal{R}}_1]^{-1} \\ & \cdot \bar{\mathcal{L}}_1 \cdot \bar{\mathbf{T}}_{1(1)} \cdot [\bar{\beta}_{10} + \bar{\alpha}_{12} \cdot \bar{\mathcal{R}}_2 \cdot \bar{\mathcal{L}}_2 \cdot \bar{\mathbf{T}}_{2(1)} \cdot \bar{\beta}_{20}] \cdot \mathbf{a} \end{aligned} \quad (4.59)$$

ifadesine varılır. Benzer şekilde bu defa (4.55), (4.56)'da yerine yazılır ve $\mathbf{y}_2$ yalnız bırakılırsa,

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_2 = & \left[\bar{\mathbf{I}} - \bar{\mathcal{L}}_2 \cdot \bar{\mathbf{T}}_{2(1)} \cdot \bar{\alpha}_{21} \cdot \bar{\mathcal{R}}_1 \cdot \bar{\mathcal{L}}_1 \cdot \bar{\mathbf{T}}_{1(1)} \cdot \bar{\alpha}_{12} \cdot \bar{\mathcal{R}}_2 \right]^{-1} \\ & \cdot \bar{\mathcal{L}}_2 \cdot \bar{\mathbf{T}}_{2(1)} \cdot \left[\bar{\beta}_{20} + \bar{\alpha}_{21} \cdot \bar{\mathcal{R}}_1 \cdot \bar{\mathcal{L}}_1 \cdot \bar{\mathbf{T}}_{1(1)} \cdot \bar{\beta}_{10} \right] \cdot \mathbf{a} \end{aligned} \quad (4.60)$$

ifadesine varılır. Böylece (4.59) ve (4.60)'tan hareketle tanımlanan yeni regülerleştirilmiş T matrisleri,

$$\mathbf{y}_1 = \bar{\mathbf{T}}_{1(2)}^{\text{REG}} \cdot \bar{\beta}_{10} \cdot \mathbf{a} \quad (4.61)$$

$$\mathbf{y}_2 = \bar{\mathbf{T}}_{2(2)}^{\text{REG}} \cdot \bar{\beta}_{20} \cdot \mathbf{a} \quad (4.62)$$

olur. Burada $\bar{\mathbf{T}}_{i(2)}^{\text{REG}}$, i. saçıcıdan saçılan alanın katsayılarını gelen alanın katsayıları ile ilişkilendiren iki saçıcılu regülerleştirilmiş T matrisidir. İlgili saçıcılardan saçılan alanlara ait $\mathbf{y}_1$ ve $\mathbf{y}_2$ regülerleştirilmiş saçılan alan katsayılarını özyinelemeli olarak bulmak için önce $\bar{\mathbf{T}}_{2(2)}^{\text{REG}} \cdot \bar{\beta}_{20}$ 'ın hesaplanması gerekir. (4.60) ve (4.62)'den,

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{T}}_{2(2)}^{\text{REG}} \cdot \bar{\beta}_{20} \cdot \mathbf{a} = & \left[\bar{\mathbf{I}} - \bar{\mathcal{L}}_2 \cdot \bar{\mathbf{T}}_{2(1)} \cdot \bar{\alpha}_{21} \cdot \bar{\mathcal{R}}_1 \cdot \bar{\mathcal{L}}_1 \cdot \bar{\mathbf{T}}_{1(1)} \cdot \bar{\alpha}_{12} \cdot \bar{\mathcal{R}}_2 \right]^{-1} \\ & \cdot \bar{\mathcal{L}}_2 \cdot \bar{\mathbf{T}}_{2(1)} \cdot \left[\bar{\beta}_{20} + \bar{\alpha}_{21} \cdot \bar{\mathcal{R}}_1 \cdot \bar{\mathcal{L}}_1 \cdot \bar{\mathbf{T}}_{1(1)} \cdot \bar{\beta}_{10} \right] \cdot \mathbf{a} \end{aligned} \quad (4.63)$$

yazılabilir. Ayrıca (4.61) ve (4.62), (4.55)'de kullanılarak,

$$\bar{\mathbf{T}}_{1(2)}^{\text{REG}} \cdot \bar{\beta}_{10} \cdot \mathbf{a} = \bar{\mathcal{L}}_1 \cdot \bar{\mathbf{T}}_{1(1)} \cdot \left[\bar{\beta}_{10} + \bar{\alpha}_{12} \cdot \bar{\mathcal{R}}_2 \cdot \bar{\mathbf{T}}_{2(2)}^{\text{REG}} \cdot \bar{\beta}_{20} \right] \cdot \mathbf{a} \quad (4.64)$$

elde edilir. Ayrıca 3.bölümde ÖTMY elde edilirken (3.64) ile verilen,

$$\bar{\alpha}_{12} = \bar{\beta}_{10} \cdot \bar{\alpha}_{02}, \quad \rho_{02} > \rho_{01} \quad (4.65)$$

ilişkisi, saçıcıların global koordinat sisteminin orijinine olan mesafelere göre sıralanması şartıyla kullanılmıştı. Buradan hareketle (4.65), (4.63) ve (4.64) ifadelerinde yerine yazılır ve denklemin her iki tarafındaki $\mathbf{a}$ vektörü atılırsa,

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{T}}_{2(2)}^{\text{REG}} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{20} &= [\bar{\mathbf{I}} - \bar{\mathcal{L}}_2 \cdot \bar{\mathbf{T}}_{2(1)} \cdot \bar{\alpha}_{21} \cdot \bar{\mathcal{R}}_1 \cdot \bar{\mathcal{L}}_1 \cdot \bar{\mathbf{T}}_{1(1)} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{10} \cdot \bar{\alpha}_{02} \cdot \bar{\mathcal{R}}_2]^{-1} \\ &\quad \cdot \bar{\mathcal{L}}_2 \cdot \bar{\mathbf{T}}_{2(1)} \cdot [\bar{\boldsymbol{\beta}}_{20} + \bar{\alpha}_{21} \cdot \bar{\mathcal{R}}_1 \cdot \bar{\mathcal{L}}_1 \cdot \bar{\mathbf{T}}_{1(1)} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{10}] \end{aligned} \quad (4.66)$$

$$\bar{\mathbf{T}}_{1(2)}^{\text{REG}} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{10} = \bar{\mathcal{L}}_1 \cdot \bar{\mathbf{T}}_{1(1)} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{10} \cdot [\bar{\mathbf{I}} + \bar{\alpha}_{02} \cdot \bar{\mathcal{R}}_2 \cdot \bar{\mathbf{T}}_{2(2)}^{\text{REG}} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{20}] \quad (4.67)$$

regülerleştirilmiş özyineleme ilişkileri elde edilir. Ayrıca (4.46) göz önünde bulundurularak $\mathbf{y}_i$ ve $\mathbf{f}_i$ katsayıları arasında ilişki kurulabildiği gibi regülerleştirilmiş ve orijinal T matrisleri arasında da aşağıdaki gibi bir ilişki kurulabilir:

$$\bar{\mathcal{R}}_i \cdot \bar{\mathbf{T}}_{i(N)}^{\text{REG}} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{i0} = \bar{\mathbf{T}}_{i(N)} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{i0} \quad (4.68)$$

$$\bar{\mathcal{R}}_i^{-1} \cdot \bar{\mathbf{T}}_{i(N)} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{i0} = \bar{\mathcal{L}}_i \cdot \bar{\mathbf{T}}_{i(N)} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{i0} = \bar{\mathbf{T}}_{i(N)}^{\text{REG}} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{i0} \quad (4.69)$$

İlaven, (4.69) kullanılarak (4.67)'deki $\bar{\mathcal{L}}_1 \cdot \bar{\mathbf{T}}_{1(1)} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{10}$ terimi düzenlenir ve regülerleştirilmiş T matrisi cinsinden ifade edilirse (4.67) aşağıdaki gibi olur:

$$\bar{\mathbf{T}}_{1(2)}^{\text{REG}} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{10} = \bar{\mathbf{T}}_{1(1)}^{\text{REG}} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{10} \cdot [\bar{\mathbf{I}} + \bar{\alpha}_{02} \cdot \bar{\mathcal{R}}_2 \cdot \bar{\mathbf{T}}_{2(2)}^{\text{REG}} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{20}] \quad (4.70)$$

Regülerleştirmenin özyineleme ilişkilerine sağladığı yarar (4.63)'teki matris tersinin nümerik olarak düzgün bir biçimde ele alınabilmesidir. Klasik ÖTMY'de (4.63)'e karşılık gelen (3.65) denkleminde kesme sayısı arttıkça tersi alınan matrisin koşullanma sayısı da artar, böylece matris kötü koşullanır. Bu sebeple matris tersi alınırken nümerik hatalardan kaçınmak için izole-saçıcı T matrisleriyle kurulan doğrusal cebrik denklem sisteminin [19]'deki gibi regülerleştirilmesiyle elde edilen sistemden, sistemi oluşturan denklemler ayrıştırılarak bu denklemler üzerine bir özyineleme ilişkisi inşa etmek gerekir.

(4.66) ve (4.67) ile verilen regülerleştirilmiş özyineleme ilişkisi N saçıcı için genelleştirilirse,

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{T}}_{N+1(N+1)}^{\text{REG}} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{N+1,0} = \\ \mathbf{Y}_{N+1}^{\text{REG}-1} \cdot \bar{\mathcal{L}}_{N+1} \cdot \bar{\mathbf{T}}_{N+1(1)} \cdot \left[\bar{\boldsymbol{\beta}}_{N+1,0} + \sum_{i=1}^N \bar{\alpha}_{N+1,i} \cdot \bar{\mathcal{R}}_i \cdot \bar{\mathcal{L}}_i \cdot \bar{\mathbf{T}}_{i(N)} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{i0} \right] \end{aligned} \quad (4.71)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{N+1}^{\text{REG}-1} = \\ \left[\bar{\mathbf{I}} - \bar{\mathcal{L}}_{N+1} \cdot \bar{\mathbf{T}}_{N+1(1)} \cdot \sum_{i=1}^N \bar{\alpha}_{N+1,i} \cdot \bar{\mathbf{T}}_{i(N)} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{i0} \cdot \bar{\alpha}_{0,N+1} \cdot \bar{\mathcal{R}}_{N+1} \right]^{-1} \end{aligned} \quad (4.72)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{T}}_{i(N+1)}^{\text{REG}} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{i0} = \\ \bar{\mathbf{T}}_{i(N)}^{\text{REG}} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{i0} \cdot \left[\bar{\mathbf{I}} + \bar{\alpha}_{0,N+1} \cdot \bar{\mathcal{R}}_{N+1} \cdot \bar{\mathbf{T}}_{N+1(N+1)}^{\text{REG}} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{N+1,0} \right] \end{aligned} \quad (4.73)$$

ifadeleri elde edilir. (4.71)'den (4.73)'e olan ifadeler çok saçıcıli problemler için regülerleştirilmiş özyinelemeli T matrisi yöntemini (R-ÖTMY) oluşturan ilişkilerdir. Bu yöntemin izlenmesinin ÖTMY'den farkı çok saçıcıli problemler için her bir aşamada $\mathbf{Y}_{N+1}$ matrisinin tersinin nümerik olarak güvenli bir biçimde alınmasını mümkün kılması ve çözümlerdeki yuvarlama hatalarını minimize etmesidir.

4.3. Çok Katmanlı Durum

3.bölümde iki katmanlı durum incelenirken her bir katmandan saçılan ve katmana nüfuz eden alanların katsayılarını birbiriyle ilişkilendiren (3.133)'den (3.136)'ya kadar olan denklemler elde edilmişti. Bu denklemler (3.147)'den (3.150)'ye kadar olan denklemlerde olduğu gibi,

$$b_0 - \bar{\mathbf{T}}_{10} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{12} \cdot b_1 = \bar{\mathbf{R}}_{01} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{10} \cdot a_0 \quad (4.74)$$

$$a_1 - \bar{\mathbf{R}}_{10} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{12} \cdot b_1 = \bar{\mathbf{T}}_{01} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{10} \cdot a_0 \quad (4.75)$$

$$b_1 - \bar{\mathbf{R}}_{12} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{21} \cdot a_1 = 0 \quad (4.76)$$

$$a_2 - \bar{\mathbf{T}}_{12} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{21} \cdot a_1 = 0 \quad (4.77)$$

ile verilir. Yukarıdaki denklemlerden bir düzenlendiği gibi $\bar{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y}$ denklem sistemi oluşturulursa bu sistem aşağıdaki gibi olur,

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{I}} & \mathbf{0} & -\bar{\mathbf{T}}_{10} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{12} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{I}} & \bar{\mathbf{R}}_{10} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{12} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\bar{\mathbf{R}}_{12} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{21} & \bar{\mathbf{I}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\bar{\mathbf{T}}_{12} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{21} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{I}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ a_1 \\ b_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{R}}_{01} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{10} \cdot a_0 \\ \bar{\mathbf{T}}_{01} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{10} \cdot a_0 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.78)$$

(4.78) denklem sistemi, [19]'de aynı senaryo için elde edilmiş (7) sistemine denktir ve bu sistem 1.türden sistemdir. Burada $\bar{\mathbf{R}}_{12}$ hızlı azalan karakterde, $\bar{\mathbf{R}}_{10}$ ise hızlı artan karakterde fonksiyon kombinasyonlarını barındırırken $\bar{\mathbf{T}}_{10}$ ve $\bar{\mathbf{T}}_{12}$ ise dengelenmiş karakterdedir. Bu sistemi regülerleştirerek iyi koşullu bir $[\bar{\mathbf{I}} + \bar{\mathbf{K}}]\mathbf{z} = \mathbf{g}$ 2.türden sistemi elde etmek için önerilen sağdan regülerleştirme operatörü $\bar{\mathcal{R}}$ [19]'de,

$$\bar{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} [H_n^{(1)}(k_0 a_1)]^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & [H_n^{(1)}(k_1 a_1)] & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & [H_n^{(1)}(k_1 a_2)]^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & [H_n^{(1)}(k_2 a_2)] \end{bmatrix} \quad (4.79)$$

olarak verilir. Burada Hankel fonksiyonunun tersi ile gelen regülerleştirme operatörleri saçılan alanın katsayılarını, diğer operatörler ise gelen alanın katsayılarını ölçeklerler. Böylece sağdan regülerleştirme operatörünün blokları için gelen veya saçılan alanın katsayılarını ölçeklemelerine göre tanımı yapılırsa,

$$\bar{\mathcal{R}}_i^R = \text{diag} [H_n^{(1)}(k_{i-1} a_i)]^{-1} \quad (4.80)$$

$$\bar{\mathcal{R}}_i^T = \text{diag} [H_n^{(1)}(k_i a_i)] \quad (4.81)$$

elde edilir (fonksiyon seçimleri ile ilgili (4.18) ve (4.19) sonrası yapılan açıklama geçerlidir). (4.80) ile (4.81) ifadeleri (4.79)'da yerine yazılırsa sağdan regülerleştirme operatörü $\bar{\mathcal{R}}$,

$$\overline{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} \overline{\mathcal{R}}_1^R & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \overline{\mathcal{R}}_1^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \overline{\mathcal{R}}_2^R & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \overline{\mathcal{R}}_2^T \end{bmatrix} \quad (4.82)$$

olur. İlâveten, [19] ile tutarlı olacak biçimde bu sistem için soldan regülerleştirme operatörü $\overline{\mathcal{L}}$,

$$\overline{\mathcal{L}} = \begin{bmatrix} \overline{\mathcal{L}}_1^R & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \overline{\mathcal{L}}_1^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \overline{\mathcal{L}}_2^R & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \overline{\mathcal{L}}_2^T \end{bmatrix} \quad (4.83)$$

şeklinde bir köşegen matris olup, bu matrisin köşegen blokları ise,

$$\overline{\mathcal{L}}_{i+1}^R = \text{diag} \left[H_n^{(1)}(k_i a_{i+1}) \right] \quad (4.84)$$

$$\overline{\mathcal{L}}_{i+1}^T = \text{diag} \left[H_n^{(1)}(k_{i+1} a_{i+1}) \right]^{-1} \quad (4.85)$$

ile verilir. Eğer sağdan ve soldan regülerleştirme operatörleri (4.78) sistemine uygulanırsa,

$$\overline{\mathcal{L}} \cdot \overline{\mathcal{A}} \cdot \overline{\mathcal{R}} = \overline{\mathbf{I}} + \overline{\mathbf{K}} \quad (4.86)$$

$$\mathbf{z} = \overline{\mathcal{R}}^{-1} \cdot \mathbf{x} \quad (4.87)$$

$$\mathbf{g} = \overline{\mathcal{L}} \cdot \mathbf{y} \quad (4.88)$$

olur ve ortaya çıkan ikinci türden sistem,

$$[\bar{\mathbf{I}} + \bar{\mathbf{K}}] = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{I}} & \mathbf{0} & -\bar{\mathcal{L}}_1^R \cdot \bar{\mathbf{T}}_{10} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{12} \cdot \bar{\mathcal{R}}_2^R & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{I}} & \bar{\mathcal{L}}_1^T \cdot \bar{\mathbf{R}}_{10} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{12} \cdot \bar{\mathcal{R}}_2^R & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\bar{\mathcal{L}}_2^R \cdot \bar{\mathbf{R}}_{12} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{21} \cdot \bar{\mathcal{R}}_1^T & \bar{\mathbf{I}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\bar{\mathcal{L}}_2^T \cdot \bar{\mathbf{T}}_{12} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{21} \cdot \bar{\mathcal{R}}_1^T & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{I}} \end{bmatrix} \quad (4.89)$$

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{b}}_0 \\ \tilde{\mathbf{a}}_1 \\ \tilde{\mathbf{b}}_1 \\ \tilde{\mathbf{a}}_2 \end{bmatrix} \quad (4.90)$$

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} \bar{\mathcal{L}}_1^R \cdot \bar{\mathbf{R}}_{01} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{10} \cdot \mathbf{a}_0 \\ \bar{\mathcal{L}}_1^T \cdot \bar{\mathbf{T}}_{01} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{10} \cdot \mathbf{a}_0 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.91)$$

formunda olur. Buradan hareketle $\tilde{\mathbf{b}}_0$, $\tilde{\mathbf{a}}_1$, $\tilde{\mathbf{b}}_1$ ve $\tilde{\mathbf{a}}_2$ regüler katsayı vektörlerine bağlı regülerleştirilmiş yeni denklemler, yukarıdaki matris gösteriminden yeniden elde edilirse,

$$\tilde{\mathbf{b}}_0 - \bar{\mathcal{L}}_1^R \cdot \bar{\mathbf{T}}_{10} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{12} \cdot \bar{\mathcal{R}}_2^R \cdot \tilde{\mathbf{b}}_1 = \bar{\mathcal{L}}_1^R \cdot \bar{\mathbf{R}}_{01} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{10} \cdot \mathbf{a}_0 \quad (4.92)$$

$$\tilde{\mathbf{a}}_1 - \bar{\mathcal{L}}_1^T \cdot \bar{\mathbf{R}}_{10} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{12} \cdot \bar{\mathcal{R}}_2^R \cdot \tilde{\mathbf{b}}_1 = \bar{\mathcal{L}}_1^T \cdot \bar{\mathbf{T}}_{01} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{10} \cdot \mathbf{a}_0 \quad (4.93)$$

$$\tilde{\mathbf{b}}_1 - \bar{\mathcal{L}}_2^R \cdot \bar{\mathbf{R}}_{12} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{21} \cdot \bar{\mathcal{R}}_1^T \cdot \tilde{\mathbf{a}}_1 = \mathbf{0} \quad (4.94)$$

$$\tilde{\mathbf{a}}_2 - \bar{\mathcal{L}}_2^T \cdot \bar{\mathbf{T}}_{12} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{21} \cdot \bar{\mathcal{R}}_1^T \cdot \tilde{\mathbf{a}}_1 = \mathbf{0} \quad (4.95)$$

olur ve bu denklemler düzenlenirse,

$$\tilde{\mathbf{b}}_0 = \bar{\mathcal{L}}_1^R \cdot \bar{\mathbf{R}}_{01} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{10} \cdot \mathbf{a}_0 + \bar{\mathcal{L}}_1^R \cdot \bar{\mathbf{T}}_{10} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{12} \cdot \bar{\mathcal{R}}_2^R \cdot \tilde{\mathbf{b}}_1 \quad (4.96)$$

$$\tilde{\mathbf{a}}_1 = \bar{\mathcal{L}}_1^T \cdot \bar{\mathbf{T}}_{01} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{10} \cdot \mathbf{a}_0 + \bar{\mathcal{L}}_1^T \cdot \bar{\mathbf{R}}_{10} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{12} \cdot \bar{\mathcal{R}}_2^R \cdot \tilde{\mathbf{b}}_1 \quad (4.97)$$

$$\tilde{\mathbf{b}}_1 = \bar{\mathcal{L}}_2^R \cdot \bar{\mathbf{R}}_{12} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{21} \cdot \bar{\mathcal{R}}_1^T \cdot \tilde{\mathbf{a}}_1 \quad (4.98)$$

$$\tilde{\mathbf{a}}_2 = \bar{\mathcal{L}}_2^T \cdot \bar{\mathbf{T}}_{12} \cdot \bar{\boldsymbol{\beta}}_{21} \cdot \bar{\mathcal{R}}_1^T \cdot \tilde{\mathbf{a}}_1 \quad (4.99)$$

elde edilir. (4.96)'dan (4.99)'a kadar olan denklemler, (3.133)'den (3.136)'ya kadar olan denklemlerin regülerleştirilmiş halleridir. 3.bölümde iki katmanlı durum için ÖTMY'nin çıkarılırken izlenen yol regülerleştirilmiş ifadeler için de izlenecek olursa ilk olarak (4.98)'de (4.97) yerine yazılmalıdır. Buradan,

$$\tilde{\mathbf{a}}_1 = \quad (4.100)$$

$$\begin{aligned} & \overline{\mathcal{L}}_1^T \cdot \overline{\mathbf{T}}_{01} \cdot \overline{\boldsymbol{\beta}}_{10} \cdot \mathbf{a}_0 + \overline{\mathcal{L}}_1^T \cdot \overline{\mathbf{R}}_{10} \cdot \overline{\boldsymbol{\beta}}_{12} \cdot \overline{\mathcal{R}}_2^R \cdot \overline{\mathcal{L}}_2^R \cdot \overline{\mathbf{R}}_{12} \cdot \overline{\boldsymbol{\beta}}_{21} \cdot \overline{\mathcal{R}}_1^T \cdot \tilde{\mathbf{a}}_1 \\ & \left[\overline{\mathbf{I}} - \overline{\mathcal{L}}_1^T \cdot \overline{\mathbf{R}}_{10} \cdot \overline{\boldsymbol{\beta}}_{12} \cdot \overline{\mathcal{R}}_2^R \cdot \overline{\mathcal{L}}_2^R \cdot \overline{\mathbf{R}}_{12} \cdot \overline{\boldsymbol{\beta}}_{21} \cdot \overline{\mathcal{R}}_1^T \right] \cdot \mathbf{a}_1 \\ & = \overline{\mathcal{L}}_1^T \cdot \overline{\mathbf{T}}_{01} \cdot \overline{\boldsymbol{\beta}}_{10} \cdot \mathbf{a}_0 \end{aligned} \quad (4.101)$$

elde edilir. (4.101)'de $\tilde{\mathbf{a}}_1$ yalnız bırakılarak denklem düzenlenirse,

$$\tilde{\mathbf{a}}_1 = \overline{\mathbf{M}}_{1-}^{\text{REG}} \cdot \overline{\mathcal{L}}_1^T \cdot \overline{\mathbf{T}}_{01} \cdot \overline{\boldsymbol{\beta}}_{10} \cdot \mathbf{a}_0 \quad (4.102)$$

$$\overline{\mathbf{M}}_{1-}^{\text{REG}} = \left[\overline{\mathbf{I}} - \overline{\mathcal{L}}_1^T \cdot \overline{\mathbf{R}}_{10} \cdot \overline{\boldsymbol{\beta}}_{12} \cdot \overline{\mathcal{R}}_2^R \cdot \overline{\mathcal{L}}_2^R \cdot \overline{\mathbf{R}}_{12} \cdot \overline{\boldsymbol{\beta}}_{21} \cdot \overline{\mathcal{R}}_1^T \right]^{-1} \quad (4.103)$$

ifadelerine varılır. (4.102) ile ortaya çıkan $\tilde{\mathbf{a}}_1$ ifadesi, (4.98)'deki $\tilde{\mathbf{b}}_1$ ifadesinde yerine geri yazılırsa $\tilde{\mathbf{b}}_1$,

$$\tilde{\mathbf{b}}_1 = \overline{\mathcal{L}}_2^R \cdot \overline{\mathbf{R}}_{12} \cdot \overline{\boldsymbol{\beta}}_{21} \cdot \overline{\mathcal{R}}_1^T \cdot \overline{\mathbf{M}}_{1-}^{\text{REG}} \cdot \overline{\mathcal{L}}_1^T \cdot \overline{\mathbf{T}}_{01} \cdot \overline{\boldsymbol{\beta}}_{10} \cdot \mathbf{a}_0 \quad (4.104)$$

halini alır. Son olarak (4.104)'de elde edilen $\tilde{\mathbf{b}}_1$ ifadesi, (4.96)'da yerine yazılır ve ifade düzenlenirse,

$$\mathbf{b}_0 = \widetilde{\overline{\mathbf{R}}}_{01}^{\text{REG}} \cdot \overline{\boldsymbol{\beta}}_{10} \cdot \mathbf{a}_0 \quad (4.105)$$

$$\begin{aligned} \widetilde{\overline{\mathbf{R}}}_{01}^{\text{REG}} &= \overline{\mathcal{L}}_1^R \cdot \widetilde{\overline{\mathbf{R}}}_{01} = \\ & \left[\overline{\mathcal{L}}_1^R \cdot \overline{\mathbf{R}}_{01} + \overline{\mathcal{L}}_1^R \cdot \overline{\mathbf{T}}_{10} \cdot \overline{\boldsymbol{\beta}}_{12} \cdot \overline{\mathcal{R}}_2^R \cdot \overline{\mathcal{L}}_2^R \cdot \overline{\mathbf{R}}_{12} \cdot \overline{\boldsymbol{\beta}}_{21} \cdot \overline{\mathcal{R}}_1^T \cdot \overline{\mathbf{M}}_{1-}^{\text{REG}} \cdot \overline{\mathcal{L}}_1^T \cdot \overline{\mathbf{T}}_{01} \right] \end{aligned} \quad (4.106)$$

elde edilir. Burada $\widetilde{\mathbf{R}}_{01}^{\text{REG}}$, 0 bölgesinde tanımlı genelleştirilmiş regüler saçılma matrisidir. Elde edilen regülerleştirilmiş özyinelemeli ilişkileri N katmanlı problem için de genişletmenin yolu 3. bölümde de anlatılana benzer biçimde (4.98) denkleminin (4.105)'e, (4.99)'un ise (4.102)'ye benzemesi gerekir. Bunun için (4.98)'deki $\overline{\mathcal{L}}_2^R \cdot \overline{\mathbf{R}}_{12}$ regüle saçılma matrisi yerine $\widetilde{\mathbf{R}}_{12}^{\text{REG}}$ genelleştirilmiş regüle saçılma matrisi ve (4.99)'daki $\overline{\mathcal{L}}_2^T$ operatörünün önüne $\overline{\mathbf{M}}_{2-}^{\text{REG}}$ matrisi çarpım olarak konulmalıdır. Ayrıca (4.108) ve (4.110)'da $\mathbf{a}_0$ yerine $\tilde{\mathbf{a}}_0$ yazılır ve $\tilde{\mathbf{a}}_0$ 'ın önüne çarpım olarak $\overline{\mathcal{R}}_0^T$ getirilirse ve,

$$\overline{\mathcal{R}}_0^T = \overline{\mathbf{I}} \quad (4.107)$$

olarak tanımlanırsa sonuç değişmez ancak ifadelerin bütünlüğü korunmuş olur. $\mathbf{a}_0$ 0.bölgesinden gelen alanın katsayısına ilişkin vektör olduğundan regülerleştirme yapılırken ölçeklemeye tabi tutulmaz. Bu sebeple (4.107) özyinelemeli ilişkisinin korunması adına tanımlanmış suni bir regülerleştirme operatörüdür. Tüm bu elde edilenler ışığında aşağıdaki ilişkiler elde edilir:

$$\tilde{\mathbf{a}}_1 = \overline{\mathbf{M}}_{1-}^{\text{REG}} \cdot \overline{\mathcal{L}}_1^T \cdot \overline{\mathbf{T}}_{01} \cdot \overline{\boldsymbol{\beta}}_{10} \cdot \overline{\mathcal{R}}_0^T \cdot \tilde{\mathbf{a}}_0 \quad (4.108)$$

$$\tilde{\mathbf{a}}_2 = \overline{\mathbf{M}}_{2-}^{\text{REG}} \cdot \overline{\mathcal{L}}_2^T \cdot \overline{\mathbf{T}}_{12} \cdot \overline{\boldsymbol{\beta}}_{21} \cdot \overline{\mathcal{R}}_1^T \cdot \tilde{\mathbf{a}}_1 \quad (4.109)$$

$$\tilde{\mathbf{b}}_0 = \widetilde{\mathbf{R}}_{01}^{\text{REG}} \cdot \overline{\boldsymbol{\beta}}_{10} \cdot \overline{\mathcal{R}}_0^T \cdot \tilde{\mathbf{a}}_0 \quad (4.110)$$

$$\tilde{\mathbf{b}}_1 = \widetilde{\mathbf{R}}_{12}^{\text{REG}} \cdot \overline{\boldsymbol{\beta}}_{21} \cdot \overline{\mathcal{R}}_1^T \cdot \tilde{\mathbf{a}}_1 \quad (4.111)$$

Ayrıca iki katmanlı problem için $\overline{\mathbf{M}}_{2-}^{\text{REG}}$ ve $\widetilde{\mathbf{R}}_{12}^{\text{REG}}$ matrisleri,

$$\overline{\mathbf{M}}_{2-} = [\overline{\mathbf{I}}]^{-1} = \overline{\mathbf{I}} \quad (4.112)$$

$$\widetilde{\mathbf{R}}_{12}^{\text{REG}} = \overline{\mathcal{L}}_2^R \cdot \overline{\mathbf{R}}_{12} \quad (4.113)$$

olarak bulunur. İki katman için elde edilen regülerleştirilmiş ifadeler, 3. bölümdeki çok katmanlı durumda olduğu gibi N katmanlı durum için genişletilirse (4.108)'den (4.111)'a kadar olan denklemlerin yardımıyla,

$$\tilde{a}_{i+1} = \overline{\mathbf{M}}_{i+1-}^{\text{REG}} \cdot \overline{\mathcal{L}}_{i+1}^T \cdot \overline{\mathbf{T}}_{i,i+1} \cdot \overline{\boldsymbol{\beta}}_{i+1,i} \cdot \overline{\mathcal{R}}_i^T \cdot \tilde{a}_i \quad (4.114)$$

$$\mathbf{b}_i = \widetilde{\mathbf{R}}_{i,i+1}^{\text{REG}} \cdot \overline{\boldsymbol{\beta}}_{i+1,i} \cdot \overline{\mathcal{R}}_i^T \cdot \tilde{a}_i \quad (4.115)$$

elde edilir. Burada,

$$\overline{\mathbf{M}}_{i+1-}^{\text{REG}} = \left[\overline{\mathbf{I}} - \overline{\mathcal{L}}_{i+1}^T \cdot \overline{\mathbf{R}}_{i+1,i} \cdot \overline{\boldsymbol{\beta}}_{i+1,i+2} \cdot \overline{\mathcal{R}}_{i+2}^R \cdot \widetilde{\mathbf{R}}_{i+1,i+2}^{\text{REG}} \cdot \overline{\boldsymbol{\beta}}_{i+2,i+1} \cdot \overline{\mathcal{R}}_{i+1}^T \right]^{-1} \quad (4.116)$$

$$\widetilde{\mathbf{R}}_{i,i+1}^{\text{REG}} = \left[\overline{\mathcal{L}}_{i+1}^R \cdot \overline{\mathbf{R}}_{i,i+1} + \overline{\mathcal{L}}_{i+1}^R \cdot \overline{\mathbf{T}}_{i+1,i} \cdot \overline{\boldsymbol{\beta}}_{i+1,i+2} \cdot \overline{\mathcal{R}}_{i+2}^R \cdot \widetilde{\mathbf{R}}_{i+1,i+2}^{\text{REG}} \cdot \overline{\boldsymbol{\beta}}_{i+2,i+1} \cdot \overline{\mathcal{R}}_{i+1}^T \cdot \overline{\mathbf{M}}_{i+1-}^{\text{REG}} \cdot \overline{\mathcal{L}}_{i+1}^T \cdot \overline{\mathbf{T}}_{i,i+1} \right] \quad (4.117)$$

$$\overline{\mathbf{M}}_{N-} = [\overline{\mathbf{I}}]^{-1} = \overline{\mathbf{I}} \quad (4.118)$$

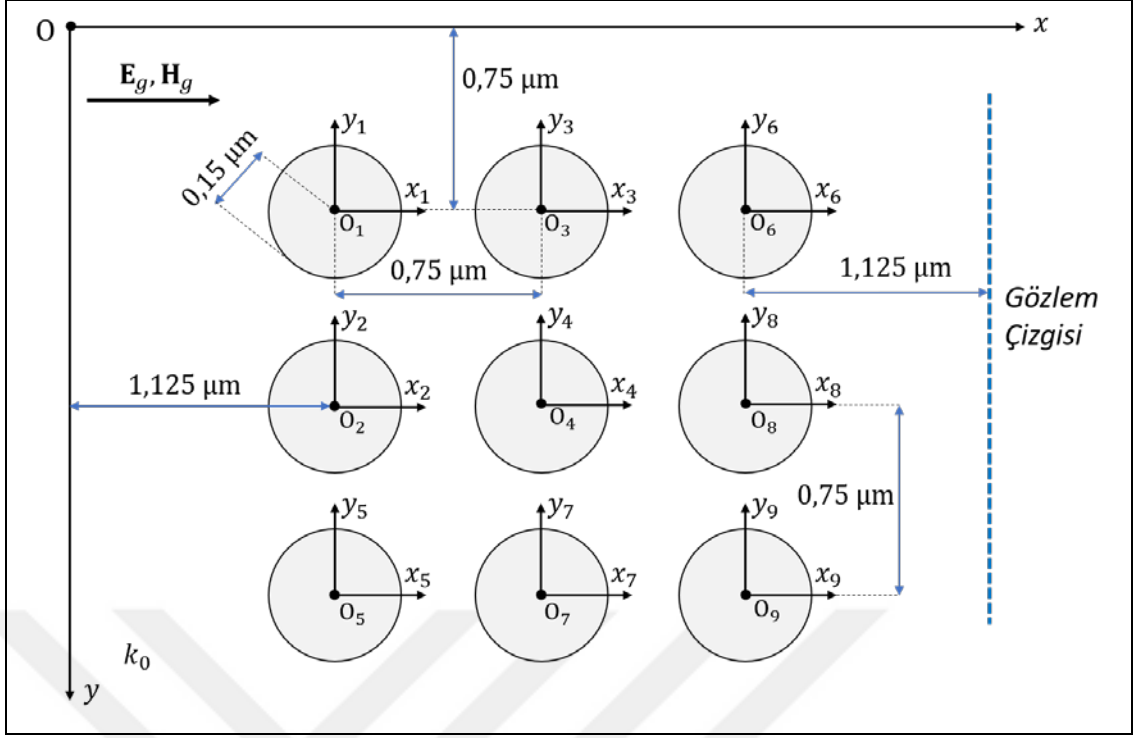
$$\widetilde{\mathbf{R}}_{N-1,N}^{\text{REG}} = \overline{\mathcal{L}}_N^R \cdot \overline{\mathbf{R}}_{N-1,N} \quad (4.119)$$

olduğu unutulmamalıdır.(4.114) ve (4.115) ifadeleri çok katmanlı problemler için regülerleştirilmiş özyinelemeli T matrisi yöntemini (R-ÖTMY) oluştururlar ve bu sayede bu türden problemler için klasik ÖTMY'de karşılaşılabilecek kötü koşullu $\overline{\mathbf{M}}_{i+1-}$ matrisinin tersinin nümerik olarak doğru bir biçimde alınması sağlanmış olur. Her bir katman için tersi hesaplanacak olan $\overline{\mathbf{M}}_{i+1-}$ matrisinin kötü koşulluluğu özyinelemenin her aşamasında nümerik hatalara sebebiyet verecek ve bu hata her aşamada birikerek doğru çözümden sapmalara yol açacaktır. Bu sebeple çözümler aranırken 2.türden sistemi getirdiği avantajlara sahip olan R-ÖTMY'nin kullanılması, artan kesme sayısıyla çözümlerin nümerik güvenli olmasını sağlar.

5. NÜMERİK SONUÇLAR

5.1. Çok Saçıcı Durum

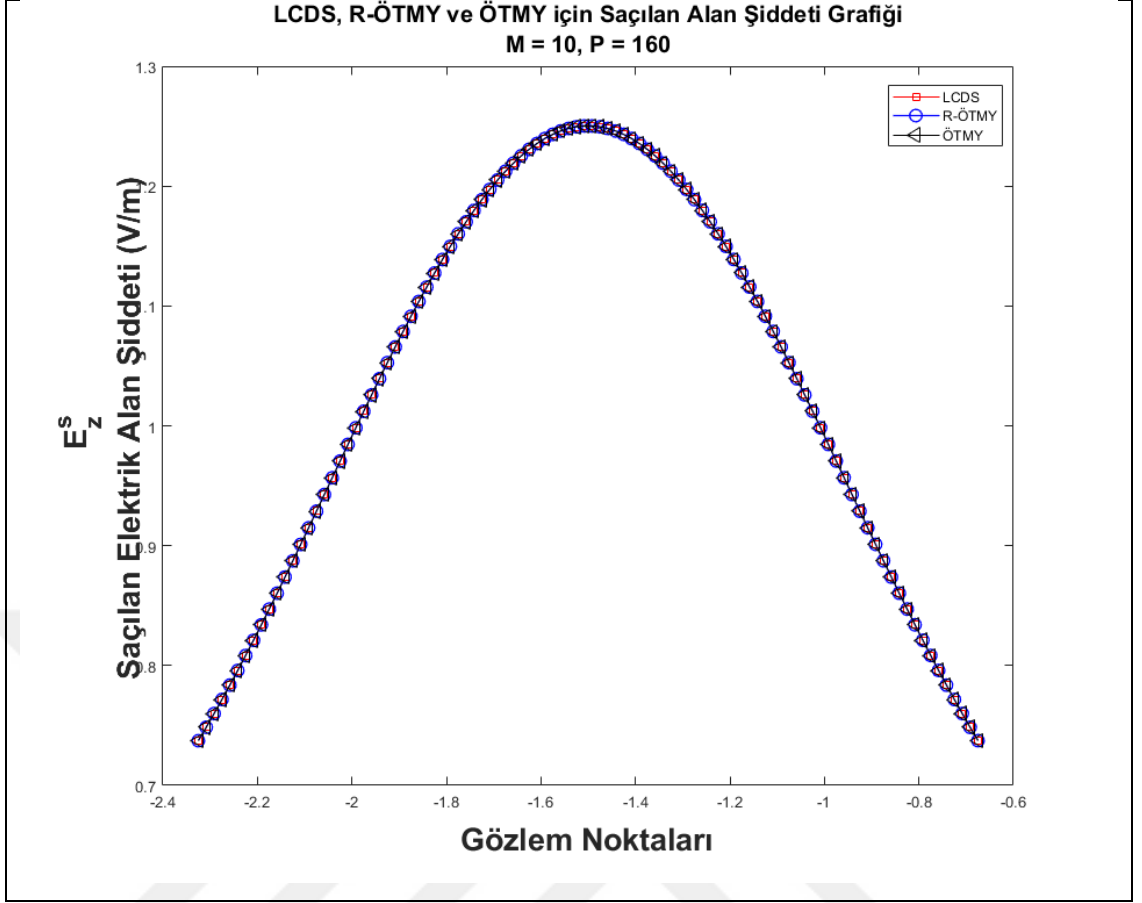
4. bölümde anlatılan Regülerleştirilmiş – Özyinelemeli T Matrisi Yöntemi (R-ÖTMY), birden çok saçıcıdan veya katmandan saçılma probleminin ele alınmasında nümerik olarak güvenli bir yöntemdir. 3. bölümde ele alınan klasik Özyinelemeli T Matrisi Yöntemi (ÖTMY), GSK yöntemi ile sıfır alan integrallerinde Green fonksiyonu ve alanların Helmholtz denkleminin öz çözümleri olan silindirik harmoniklere açılması temeline dayanır. İlgilenilen bu sıfır alan integralleri Fredholm 1.tip integral denklemler olduklarından çeşitli nümerik yöntemlerle integrallerin ayrıklaştırılmasıyla elde matris denklem sistemi de kötü koşullu doğaya sahip olan 1.türden sistem olur. Çözümler klasik ÖTMY ile aranırken bu sebeple T matrislerinin kesme sayısı arttıkça ters almaya duyarlılıkları yani koşullanma sayıları artar. Bu da kesme sayısı arttıkça çözümlere daha iyi yakınsama beklerken çözümlerin nümerik hatalara açık olmasından ötürü gerçek çözümden uzaklaşmasına sebebiyet verir. Öte yandan R-ÖTMY de sıfır alan yaklaşımı temeline dayanmasına rağmen 1.türden sistemi oluşturan denklemlerin regülerleştirilmesiyle 2.türden bir denklem sistemine dayandığı için kesme sayısı arttıkça çözümlerin doğruluğunu güvende tutar. Bu bahiste klasik ÖTMY'nin tüm özelliklerini içinde barındıran ancak nümerik kararlılık bakımından daha iyi sonuçlar veren R-ÖTMY'nin getirdiği iyileştirmeler TM dalga uyarımı altında çoklu saçılı ve katmanlı yapılardan saçılım problemi incelenerek gösterilecektir. Öncelikle bu senaryolar için kurulacak doğrusal cebrik denklem sisteminde direkt matris tersi alınarak elde edilen çözümler, ÖTMY ve R-ÖTMY çözümleri karşılaştırılacak, ardından ÖTMY ve R-ÖTMY kullanılırken karşılaşılan tersi alınan matrislerin orijinal ve regülerleştirilmiş versiyonlarının matris tersi almaya duyarlılıkları karşılaştırılacaktır.



Şekil 5.1 : 9 silindirik saçıcı problem.

Şekil 5.1'deki gibi eşit aralıklarla dizilmiş manyetik olmayan kayıpsız dokuz dairesel silindirik saçıcı diziden 200 THz frekansında TM dalgaların saçılma problemi incelenir ve son saçıcıdan yatayda 1,125 μm uzakdaki gözlem çizgisinden saçılan elektrik alan gözlenir. Burada dış ortamın parametreleri boş uzayın ortam parametreleri olan ϵ_0 ve μ_0 'a eşit olup, 0,15 μm yarıçaplı her bir saçıcının dielektrik sabiti $\epsilon_i = 4\epsilon_0$ ve manyetik geçirgenliği $\mu_i = \mu_0$ 'dır. Ayrıca her bir saçıcı global koordinat sisteminin orijininin olan mesafeye göre 1'den 9'a kadar numaralandırılmıştır.

Şekil 5.2'de $M = 10$, $P = 160$ için saçılan elektrik alanın z bileşeninin gözlem çizgisi üzerindeki değerleri doğrudan matris tersi alınmak suretiyle elde edilen lineer cebrik denklem sistemi (LCDS), ÖTMY ve R-ÖTMY yöntemiyle elde edilmiştir. Burada M ve P değerlerinin yukarıdaki gibi seçilmesinin sebebi her üç yöntemin de ortak çalıştığı bölgede doğru çözümü verdiğini göstermektir. P 'nin yukarıdaki gibi



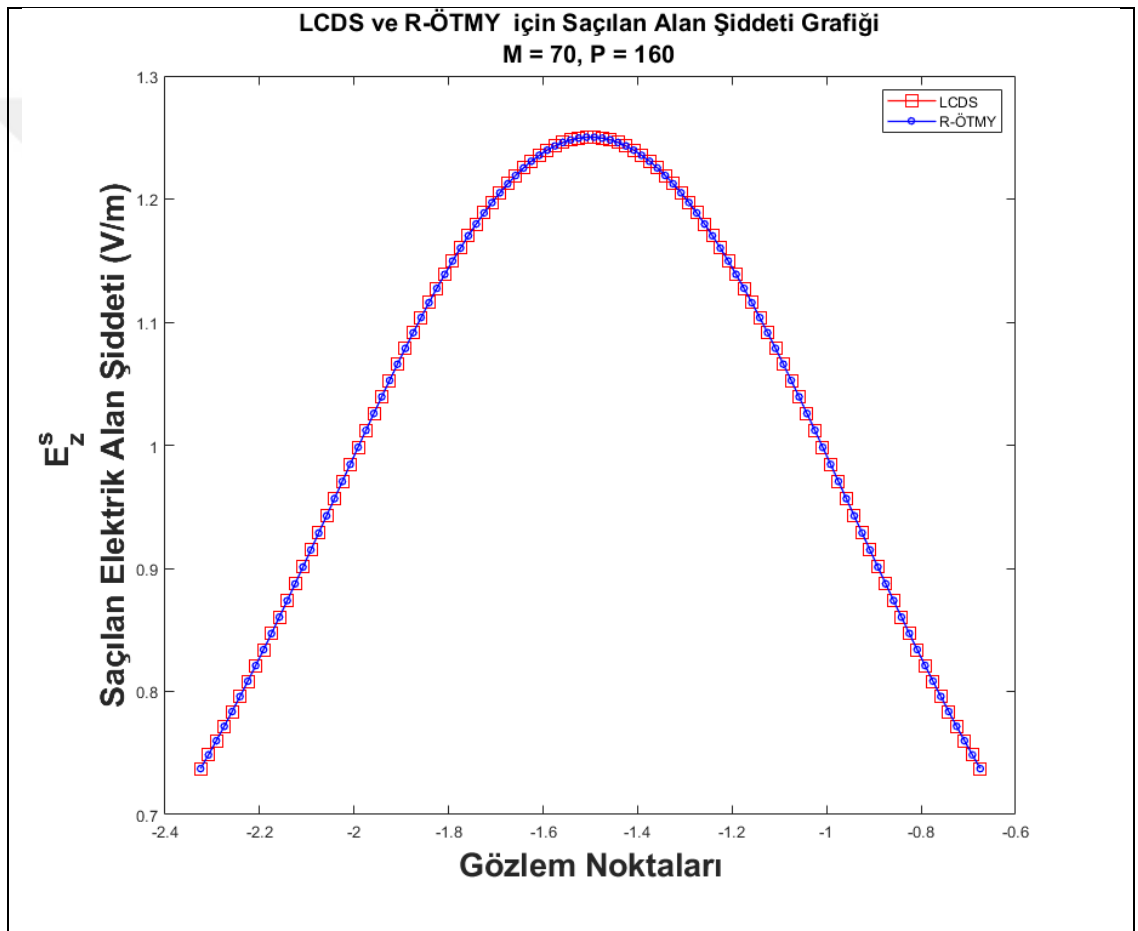
Şekil 5.2 : $M = 10, P = 160$ için saçılan alanın genliğinin gözlem noktalarına göre değişiminin LCDS, ÖTMY ve R-ÖTMY ile ele alınması.

büyük bir değer seçilmesi, M arttıkça toplamsallık teoremi yardımıyla elde edilen dönüşüm matrislerinin doğru bir biçimde hesaplanmasını ve çözümleri etkilememesini garanti altına almaktır. Burada $\mathbf{Y}_{N+1}$ ve $\mathbf{Y}_{N+1}^{\text{REG}}$ matrislerinin koşullanma sayıları Tablo 5.1'deki gibidir.

Tablo 5.1'de açıkça görüldüğü üzere dokuz saçıcı için her aşamada hesaplanan $\mathbf{Y}_{N+1}^{\text{REG}}$ matrisleri $\mathbf{Y}_{N+1}$ matrislerine kıyasla iyi koşulludur. Her ne kadar çözümler her üç algoritmanın da güvenli olduğu kesme sayılarında elde edilse de nümerik hesaplama sırasında matrislerin koşullanma sayılarının küçük olduğu çözüm yöntemi nümerik olarak daha kararlıdır.

Tablo 5.1: $M = 10, P = 160$ için $\mathbf{Y}_{N+1}$ ve $\mathbf{Y}_{N+1}^{\text{REG}}$ matrisleri için koşullanma sayıları.

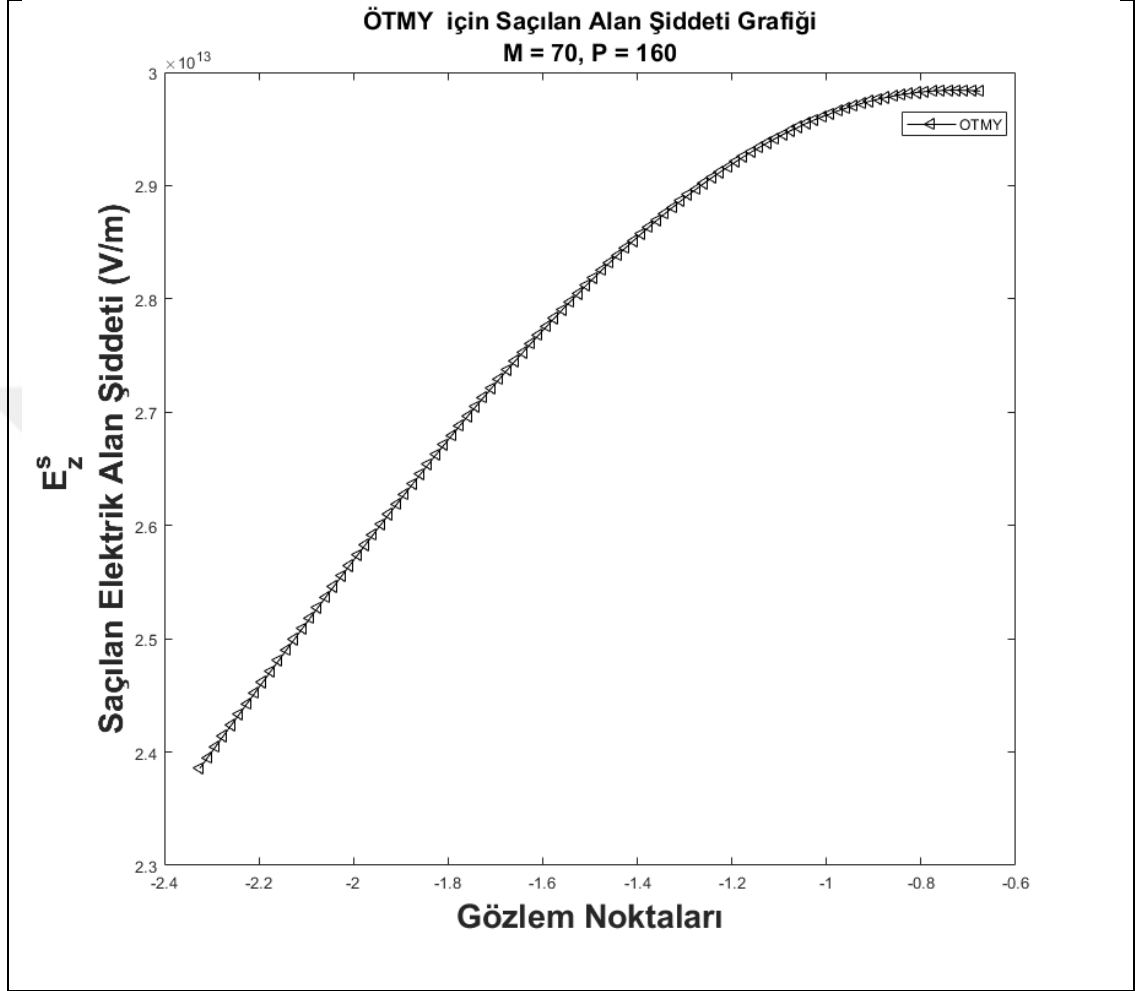
$\mathbf{Y}_{N+1}$	Koşullanma Sayısı	$\mathbf{Y}_{N+1}^{\text{REG}}$	Koşullanma Sayısı
$\mathbf{Y}_2$	$2,6410 \cdot 10^5$	$\mathbf{Y}_2^{\text{REG}}$	1,1917
$\mathbf{Y}_3$	$7,1243 \cdot 10^{16}$	$\mathbf{Y}_3^{\text{REG}}$	1,1904
$\mathbf{Y}_4$	$5,1188 \cdot 10^4$	$\mathbf{Y}_4^{\text{REG}}$	1,4649
$\mathbf{Y}_5$	$4,8434 \cdot 10^{18}$	$\mathbf{Y}_5^{\text{REG}}$	1,4105
$\mathbf{Y}_6$	$1,8230 \cdot 10^{12}$	$\mathbf{Y}_6^{\text{REG}}$	1,2429
$\mathbf{Y}_7$	$3,5788 \cdot 10^{13}$	$\mathbf{Y}_7^{\text{REG}}$	1,5667
$\mathbf{Y}_8$	$1,0230 \cdot 10^{19}$	$\mathbf{Y}_8^{\text{REG}}$	1,9345
$\mathbf{Y}_9$	$1,8130 \cdot 10^5$	$\mathbf{Y}_9^{\text{REG}}$	1,6838



Şekil 5.3 : $M = 70, P = 160$ için saçılan alanın genliğinin gözlem noktalarına göre değişiminin LCDS ve R-ÖTMY ile ele alınması.

Şekil 5.3 ve Şekil 5.4’de bu defa $M = 70, P = 160$ için saçılan elektrik alanın z bileşeninin gözlem çizgisi üzerindeki değerleri hesaplanmıştır. Kolayca görülebileceği üzere LCDS ile R-ÖTMY çözümleri birbirini ile tutarlıyken, ÖTMY çözümleri yöntemin kötü koşullu doğasından ötürü bu kesme sayısında hatalı elde

edilir. Seçilen P değeri, 3.bölümde ÖTMY için anlatılan kısıtlamalar dikkate alınarak M kesme sayısı belirli bir miktar artırılrsa da dönüşüm matrislerinin doğru bir şekilde ele alınacağı biçimde seçilmiştir.



Şekil 5.4: $M = 70$, $P = 160$ için saçılan alanın genliğinin gözlem noktalarına göre değişiminin ÖTMY ile ele alınması.

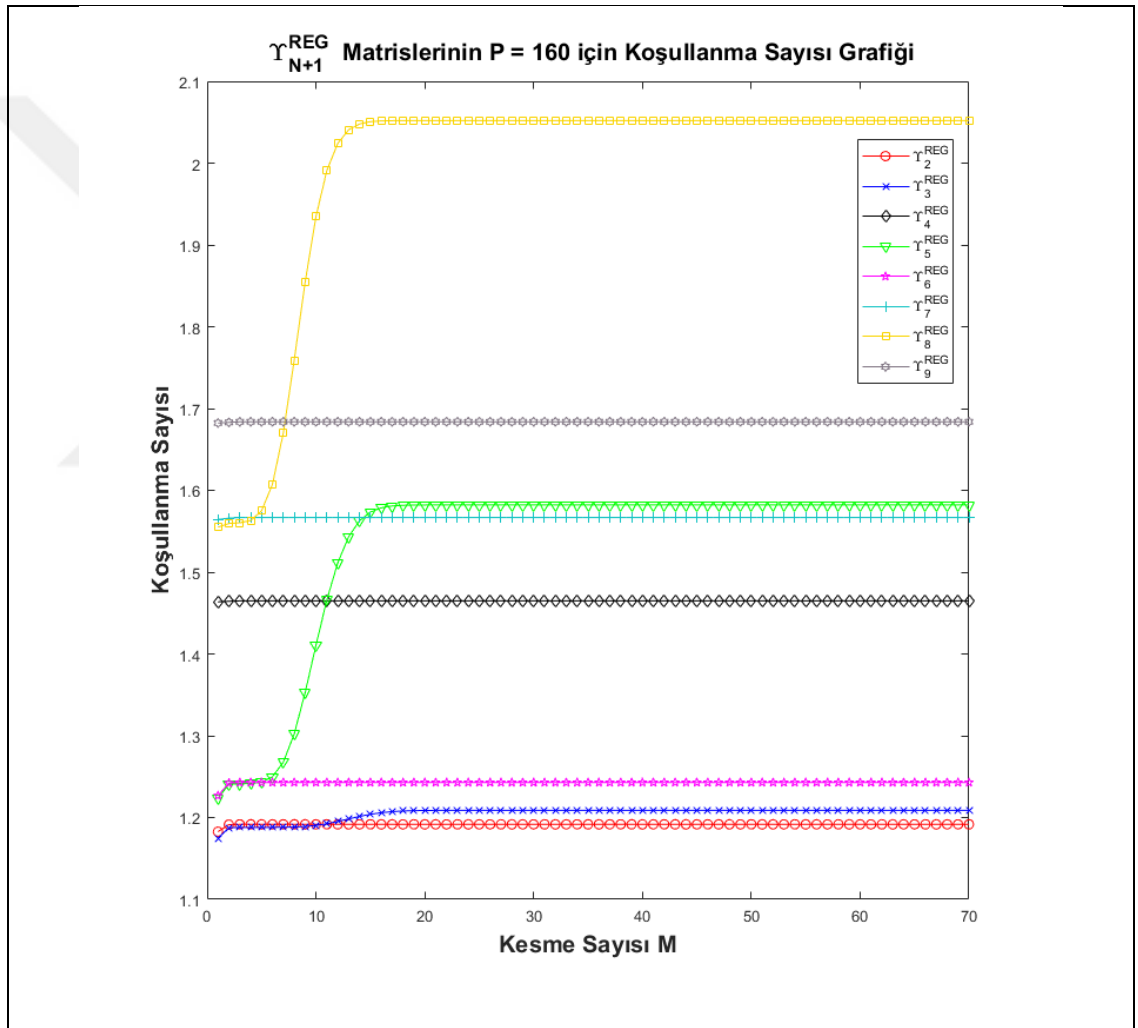
Bu sebeple ÖTMY çözümlerinde bu M kesme sayısı değeri için karşılaşılabilecek nümerik hataların, yöntemin kötü koşullu doğasından kaynaklandığı söylenebilir. Buna ek olarak, $M = 70$, $P = 160$ için $\mathbf{Y}_{N+1}$ ve $\mathbf{Y}_{N+1}^{\text{REG}}$ matrislerinin koşullanma sayıları Tablo 5.2’de verilmiştir. Tablodan hareketle ÖTMY’de ortaya çıkan $\mathbf{Y}_{N+1}$ matrislerinin koşullanma sayılarının bu denli yüksek çıkması yöntemin kötü koşullu doğasını gözler önüne sermektedir. Bu sebeple bu yöntem daha az silindirik harmonik kullanıldığı durumlarda bir başka deyişle düşük M kesme sayıları için uygundur. Daha fazla harmonik alınması gerektiğinde ise yöntemin kötü koşullu doğası kendini göstermekte olup, çözümlerde tolere edilemez bir hataya sebebiyet

verir. Oysa ki R-ÖTMY kesme sayısı az veya fazla tutulsa da 2.türden sistemlerin sahip olduğu iyi koşullu doğasından ötürü nümerik olarak çözümlerin doğruluğunu güvende tutar, çözümler yuvarlama hatalarına açık değildir. R-ÖTMY ile ortaya çıkan $\mathbf{Y}_{N+1}^{\text{REG}}$ matrislerinin koşullanma sayısının 1'e çok yakın, küçük ve sınırlı olması yöntemin iyi koşullu doğasını gözler önüne serer. Bu sebeple R-ÖTMY'nin çözümlerin doğruluğu bakımından nümerik olarak ÖTMY'den daha güvenli olduğu söylenebilir.

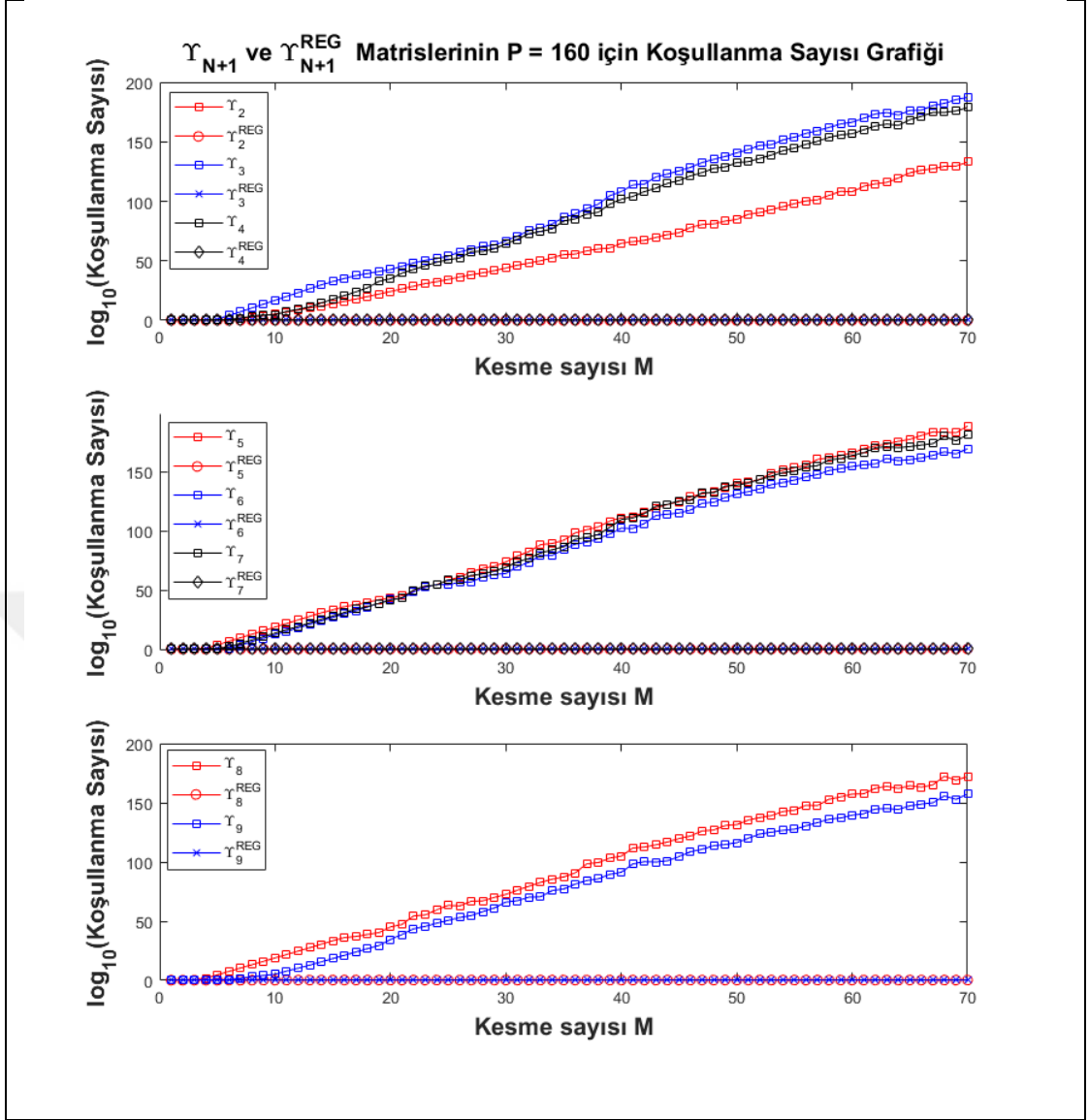
Şekil 5.5'de $P = 160$ için $\mathbf{Y}_{N+1}^{\text{REG}}$ matrislerinin kesme sayısı M 'e göre koşullanma sayısı grafiği her bir özyineleme için verilmiştir. Şekil 5.6'da ise $\mathbf{Y}_{N+1}$ ve $\mathbf{Y}_{N+1}^{\text{REG}}$ matrislerinin koşullanma sayılarının logaritması aynı grafikte verilmiştir. Buna göre, kesme sayısı arttıkça $\mathbf{Y}_{N+1}$ matrisinin koşullanma sayısı logaritmik olarak artarken, $\mathbf{Y}_{N+1}^{\text{REG}}$ ise sınırlı kalır. $\mathbf{Y}_{N+1}^{\text{REG}}$ için özyinelemelerde karşılaşılan en yüksek koşullanma sayısı 8.saçıcı için ortaya çıkmakta olup bu değer de 2 ile 2,1 arasındadır ve R-ÖTMY'nin artan kesme sayısı ile performansının iyi olduğu aşıkardır. R-ÖTMY, daha fazla sayıda harmonik alabilmek için M 'i artırarak ve buna uygun biçimde P dönüşüm harmonik kesme sayısı belirleyerek çözümlerin güvenli bir biçimde elde edilmesini mümkün kılar.

Tablo 5.2: $M = 70, P = 160$ için Υ_{N+1} ve Υ_{N+1}^{REG} matrisleri için koşullanma sayıları.

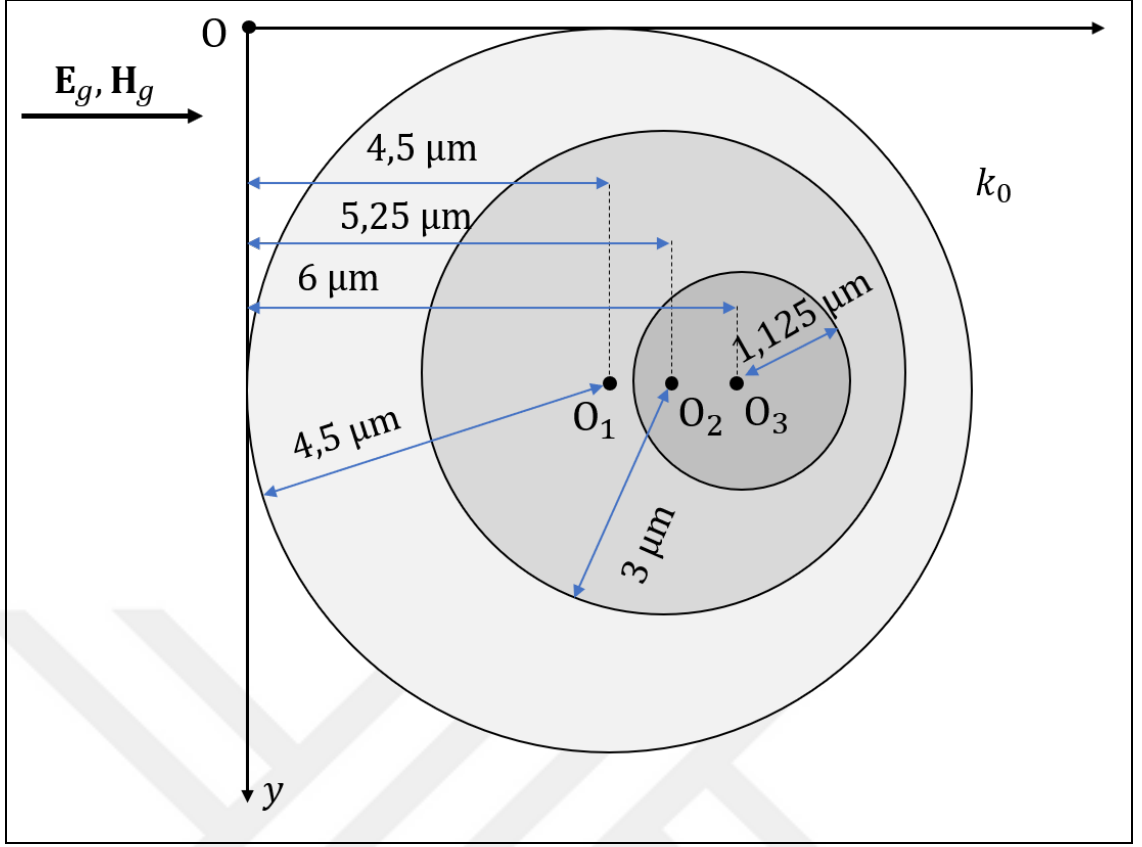
Υ_{N+1}	Koşullanma Sayısı	Υ_{N+1}^{REG}	Koşullanma Sayısı
Υ_2	$1,0006 \cdot 10^{133}$	Υ_2^{REG}	1,1917
Υ_3	$1,8867 \cdot 10^{187}$	Υ_3^{REG}	1,2088
Υ_4	$5,5854 \cdot 10^{178}$	Υ_4^{REG}	1,4649
Υ_5	$2,5768 \cdot 10^{188}$	Υ_5^{REG}	1,5821
Υ_6	$1,5621 \cdot 10^{169}$	Υ_6^{REG}	1,2429
Υ_7	$1,0342 \cdot 10^{181}$	Υ_7^{REG}	1,5667
Υ_8	$1,1324 \cdot 10^{172}$	Υ_8^{REG}	2,0520
Υ_9	$2,9795 \cdot 10^{157}$	Υ_9^{REG}	1,6838



Şekil 5.5 : $P = 160$ için Υ_{N+1}^{REG} matrislerinin koşullanma sayıları grafiği.



Şekil 5.6: $P = 160$ için Υ_{N+1} ve Υ_{N+1}^{REG} matrislerinin koşullanma sayıları grafiği.

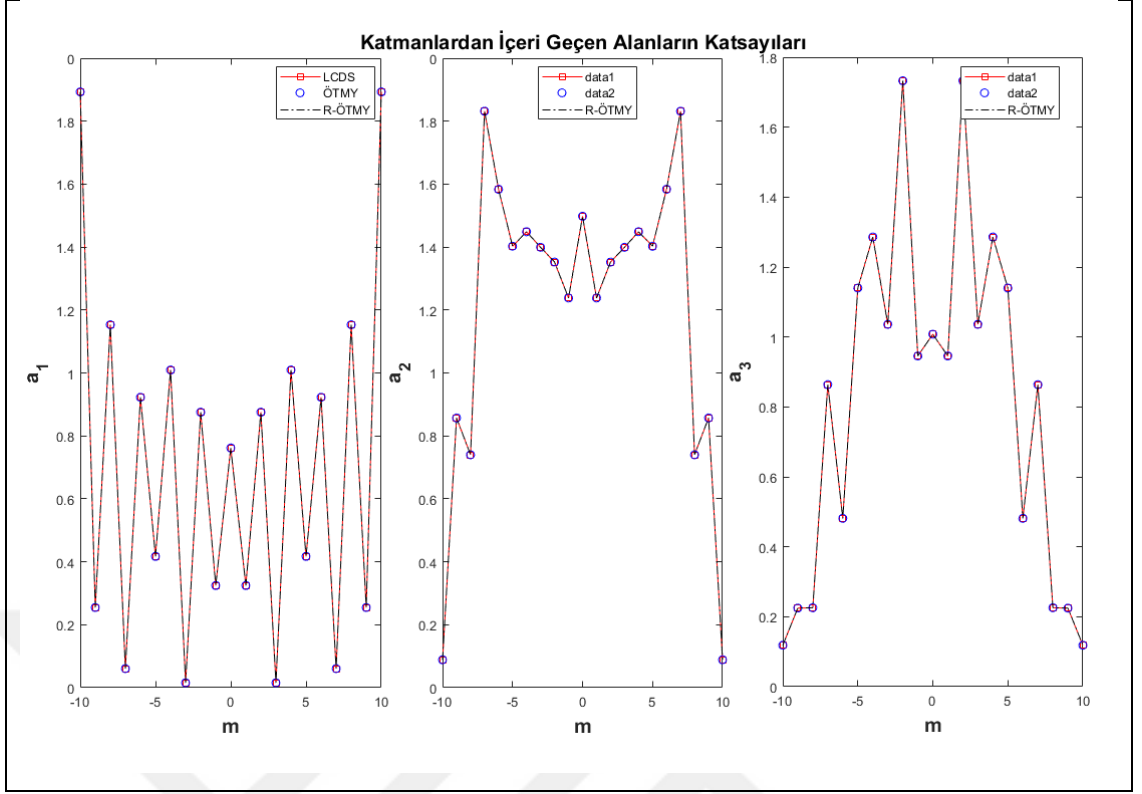


Şekil 5.7: 3 silindirik katmanlı problem.

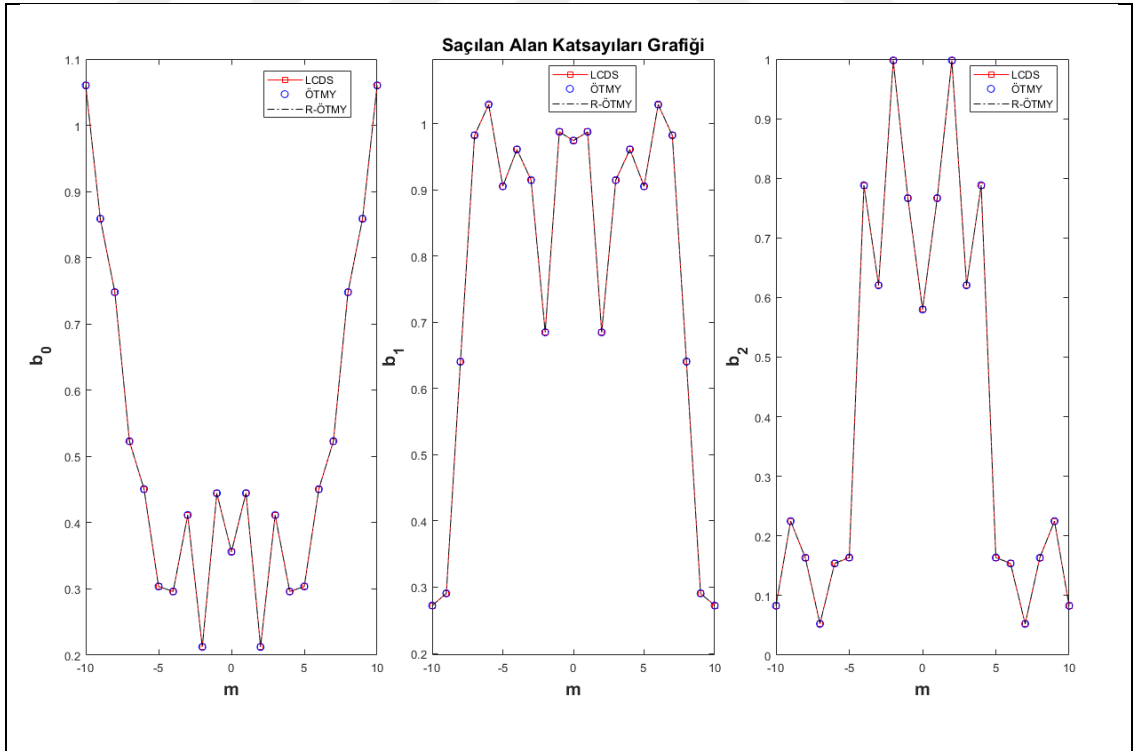
5.2. Çok Katmanlı Durum

Şekil 5.7'deki gibi 3 silindirik katmandan oluşan bir saçıcıdan 200 THz frekanslı TM dalgaların saçılması problemi ele alınsın. Burada dış ortamın parametreleri boş uzayın ortam parametreleri olan ϵ_0 ve μ_0 'a eşit olup, katmanların yarıçapları en büyük katmandan en küçük yarıçaplı katmana doğru sırasıyla 4,5 μm , 3 μm ve 1,125 μm 'dir. Ayrıca katmanların dielektrik sabiti sırasıyla $\epsilon_1 = 2\epsilon_0$, $\epsilon_2 = 4\epsilon_0$ ve $\epsilon_3 = 8\epsilon_0$ 'dir. Katmanların manyetik geçirgenliği $\mu_i = \mu_0$ 'dır. İlaveten, katmanlar en dıştan en içe doğru numaralandırılmıştır.

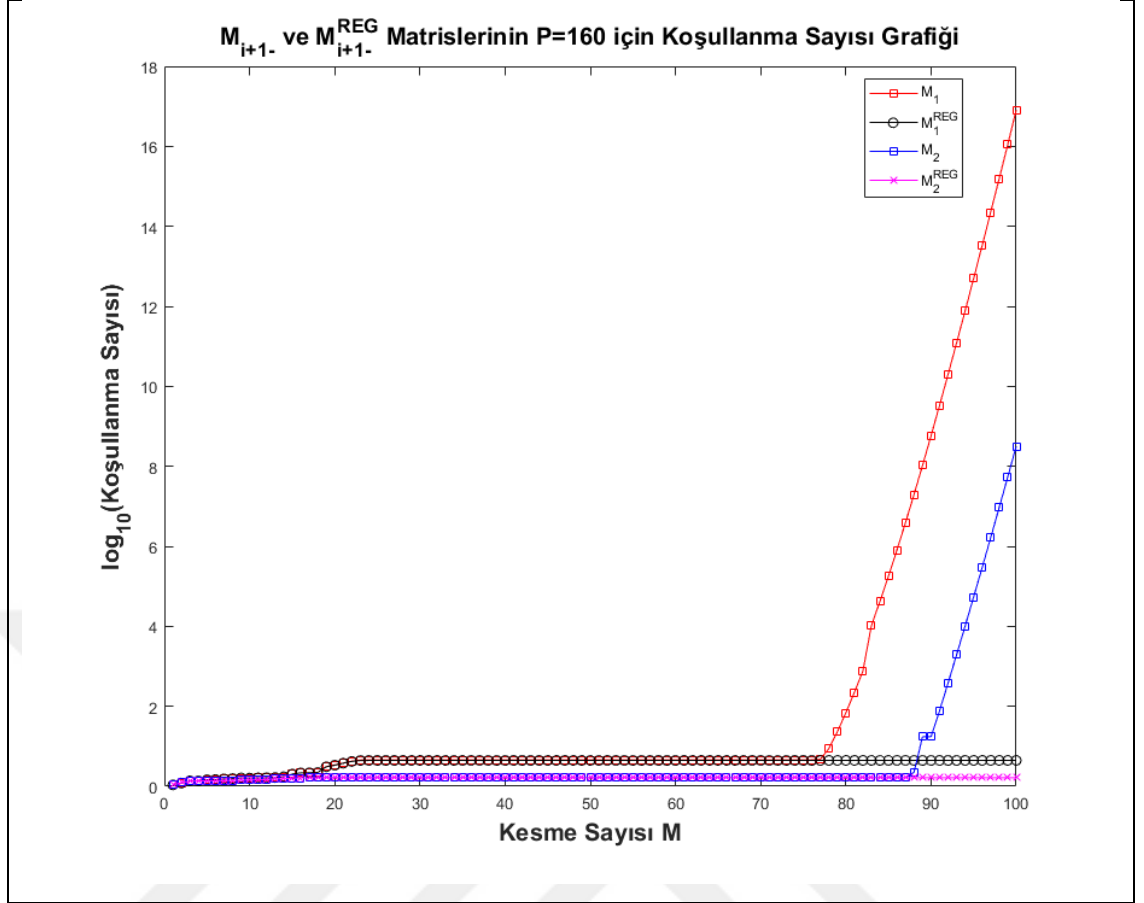
Şekil 5.8 ve Şekil 5.9'da $M = 10$ ve $P = 160$ için saçılan ve içeri nüfuz eden alanların katsayıları bulunmaktadır. Kolayca görülebileceği üzere LCDS, ÖTYM ve R-ÖTYM sonuçları birbiri ile tutarlıdır. Bu senaryo için eğer 0. bölgedeki gelen alanlar 0.koordinat yerine doğrudan en dıştaki saçıcının üzerinde yazılırsa, 0.koordinata dönüşüm matrisleri ifadelerde görünmez, böylelikle çözümler yalnızca M kesme sayısına bağlı olur.



Şekil 5.8: $M = 10, P = 160$ için katmanlardan içeri geçen alanların katsayıları.



Şekil 5.9: $M = 10, P = 160$ için katmanlardan saçılan alanların katsayıları.



Şekil 5.10: $P = 160$ için $\overline{M}_{i+1}$ ve $\overline{M}_{i+1}^{REG}$ matrislerinin koşullanma sayıları grafiği.

Bu senaryoda karşılaşılan $\overline{M}_{i+1}$ matrislerinin kötü koşulluluğu çok saçıcıli durumdaki Y_{N+1} matrisinden daha iyi durumdadır. Çok saçıcıli durumda $M = 10$ için Y_2 matrisinin koşullanma sayısı 10^5 mertebesindeyken, iç içe durumda $\overline{M}_1$ matrisinin koşullanma sayısı 1.6029 olarak elde edilmiştir. Şekil 5.6 ve Şekil 5.10 birlikte incelendiğinde, çok katmanlı yapıda tersi alınan matrislerin koşullanma sayısının, çok saçıcıli durumdaki tersi alınan matrislerinkinden daha hızlı yükseldiği görülür. Bu sebeple çok katmanlı durumda çözümler yaklaşık $M = 80$ 'e kadar güvenli görünmektedir. Eğer bundan daha fazla silindirik harmonik alınacaksa güvenilir çözümlerin elde edilmesinin yolu R-ÖTMY'den geçmektedir. Her halükarda R-ÖTMY, herhangi bir M kesme sayısı için ÖTMY'de tersi alınacak matris o kesme sayısı için iyi koşullu bile olsa o matrisin terse alınabilirliğini daha da iyileştirir.

6. SONUÇ VE GELECEKTE İŞLENECEKLER

Bu çalışmada silindirik dalga saçılması çözümleri için özyinelemeli T-Matrisi yönteminin özyineleme adımları sırasında karşılaşılan matris tersi işlemlerinin daha kararlı olarak gerçekleştirilmesine yönelik regülerleştirme uygulaması ele alınmıştır. Hem çoklu saçıcılar hem de katmanlı saçıcı için sözü edilen uygulamanın çıktıları sergilenmiştir. Anılan matrislerin ters almaya duyarlılıklarının regülerleştirmeler sonunda çarpıcı biçimde geliştiği gösterilmiştir. Örneklemler saçıcıların dairesel kesitlere sahip olduğu durumlarda gerçekleştirilmiştir. Öz çözümlerin dairesel silindirik harmonikler ile verildiği düşünülürse, bu durum için dahi matris tersi almaya dayalı yöntem bakımından regülerleştirmenin önemi [17]'de ele alınmıştı. Bu çalışmada özyinelemeli T-matrisi yöntemi aşamalarında da regülerleştirmenin benzer öneme sahip olduğu gösterilmiştir.

Bu çalışmada ele alınan yöntem dairesel simetriden çok sapmayan keyfi kesitli saçıcılar için de önerilmiştir. Gelecekte, dairesel sınırlar için geçerli olan regülerleştirmenin bu türden saçıcılar için geliştirilmesi muhtemel hedefler arasındadır. Ayrıca 3-boyutta yukarıda ele alınan aşamaların incelenmesi bir başka doğal hedef olarak durmaktadır.

KAYNAKLAR

- [1] Ergül Ö., Gürel L., (2014), “The Multilevel Fast Multipole Algorithm (MLFMA) for Solving Large-Scale Computational Electromagnetics Problems”, Wiley-IEEE Press.
- [2] Waterman P. C., (1969), “New Formulation of Acoustic Scattering,” The Journal of the Acoustical Society of America, 45 (6), 1417–1429.
- [3] Waterman P. C., (1971), “Symmetry, unitarity, and geometry in electromagnetic scattering,” Physical Review D, 3 (4), 825–839.
- [4] Petrov D., Synelnyk E., Shkuratov Y., Videen G., (2006), “The T-matrix technique for calculations of scattering properties of ensembles of randomly oriented particles with different size,” Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer, 102 (1), 85-110.
- [5] Mishchenko M. I., Travis L. D., Mackowski D. W., (2010), “T-matrix method and its applications to electromagnetic scattering by particles: A current perspective,” Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer, 111 (11), 1700-1703.
- [6] Varadan V. V., Lakhtakia A., Varadan V. K., (1988), “Comments on recent criticism of the T-matrix method,” Journal of the Acoustical Society of America, 84 (6), 2280–2284.
- [7] Mishchenko M. I., Videen G., Babenko V. A., Khlebtsov N. G., Wriedt T., (2004), “T-matrix theory of electromagnetic scattering by particles and its applications: A comprehensive reference database,” Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer, 88 (1-3), 357-406.
- [8] Zakharova N. T., Videen G., Khlebtsov N. G., (2012), “Comprehensive T-matrix reference database: A 2009-2011 update,” Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer, 113 (14), 1844-1852.
- [9] Mishchenko M. I., Zakharova N. T., Khlebtsov N. G., Videen G., Wriedt T., (2017), “Comprehensive thematic T-matrix reference database: A 2015–2017 update,” Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer, 202, 240-246.
- [10] Khlebtsov N. G., (2013), “T-matrix method in plasmonics: An overview,” Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer, 123, 184-217.
- [11] Hellmers J., Schmidt V., Wriedt T., (2011), “Improving the numerical stability of T-matrix light scattering calculations for extreme particle shapes using the nullfield method with discrete sources,” Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer, 112, (11), 1679–1686.

- [12] Somerville W. R. C., Auguié B., Le Ru E. C., (2013), "A new numerically stable implementation of the T-matrix method for electromagnetic scattering by spheroidal particles," *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 123, 153–168.
- [13] Auger J. C., Stout B., (2003), "A recursive centered T-matrix algorithm to solve the multiple scattering equation: Numerical validation," *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 79-80, 533-547.
- [14] Spurr R., Wang J., Zeng J., Mishchenko M. I., (2012), "Linearized T-matrix and Mie scattering computations," *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 113 (6), 425-439.
- [15] WIELAARD D. J., MISHCHENKO M. I., MACKE A., CARLSON B. E., (1997), "Improved T-matrix computations for large, nonabsorbing and weakly absorbing nonspherical particles and comparison with geometrical-optics approximation," *Applied optics*, 36 (18), 4305-4313.
- [16] Mishchenko M. I., (2020) "Comprehensive thematic T-matrix reference database: a 2017–2019 update," *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 242, 106692.
- [17] Zhang Y. J., Li E. P., (2007), "Fast multipole accelerated scattering matrix method for multiple scattering of a large number of cylinders," *Progress in Electromagnetics Research*, 72, 105-126.
- [18] Toyama H., Yasumoto K., Iwasaki T., (2003), "Electromagnetic scattering from a dielectric cylinder with multiple eccentric cylindrical inclusions," *Progress in Electromagnetics Research*, 40, 113-129.
- [19] Dikmen F., Sever, E., Vatansever S., Tuchkin Y. A., (2015), "Well-conditioned algorithm for scattering by a few eccentrically multilayered dielectric circular cylinders," *Radio Science*, 50, (2), 99–110.
- [20] Martin P. A., (2003), "On connections between boundary integral equations and T-matrix methods," *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 27 (7), 771-777.
- [21] Doicu A., Wriedt T., Khebbache N., (2019), "An overview of the methods for deriving recurrence relations for T-matrix calculation," *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 224, 289-302.
- [22] Chew W C., (1999), "Waves and Fields in Inhomogenous Media", Wiley-IEEE Press.
- [23] Elfouhaily T., Hahn T., (2006), "Rayleigh's hypothesis and the geometrical optics limit," *Physical Review Letters*, 97 (12), 120404.

- [24] Şahin A., Miller E. L., (1998), "Recursive t-matrix methods for scattering from multiple dielectric and metallic objects," IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 46 (5), 672-678.
- [25] Wang Y. M., Chew W. C., (1990), "An efficient algorithm for solution of a scattering problem," Microwave and Optical Technology Letters, 3 (3), 102-106.
- [26] Chew W. C., Wang Y. M., Otto G., Wagner R. L., Gürel L., Liu Q. H., (1992), "A Generalized Recursive Algorithm for Wave-Scattering Solutions in Two Dimensions," IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, 40 (4), 716-723.
- [27] Chew W. C., Wang Y. M., Gürel L., (1992), "Recursive algorithm for wave-scattering solutions using windowed addition theorem", 6 (7), 1537-1560.
- [28] Ivanov E. A., (1968), "Diffraction of Waves from Two Bodies", Nauka i Tekhnika, Minsk, (in Russian and Translated to English as NASA TT F-597).

ÖZGEÇMİŞ

Murat Enes HATİPOĞLU 1996 yılında İstanbul'da doğdu. 2013 yılında başladığı Gebze Teknik Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Elektronik Mühendisliği Bölümünü 2017 yılında yüksek onur öğrencisi olarak okul üçüncülüğü, fakülte ve bölüm birinciliği dereceleriyle başarıyla tamamlayarak aynı yıl yüksek lisans eğitimine Gebze Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalında başladı. Lisans eğitiminin ortalarından itibaren hesaplamalı elektromanyetik alanında çalışmalar yapmakta olup, Gebze Teknik Üniversitesi Elektronik Mühendisliği bölümünde 2018 yılından bu yana halen araştırma görevlisi olarak çalışmaktadır.

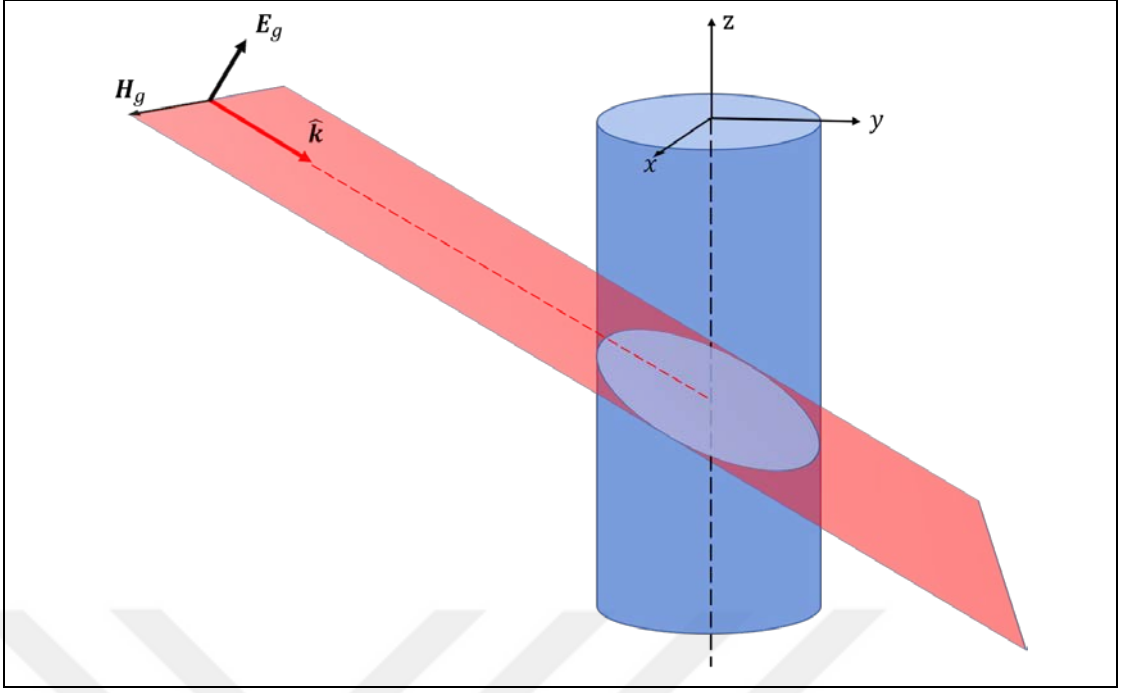
EKLER

Ek A: Teğet Manyetik (TM) ve Teğet Elektrik (TE) Tanımlamaları

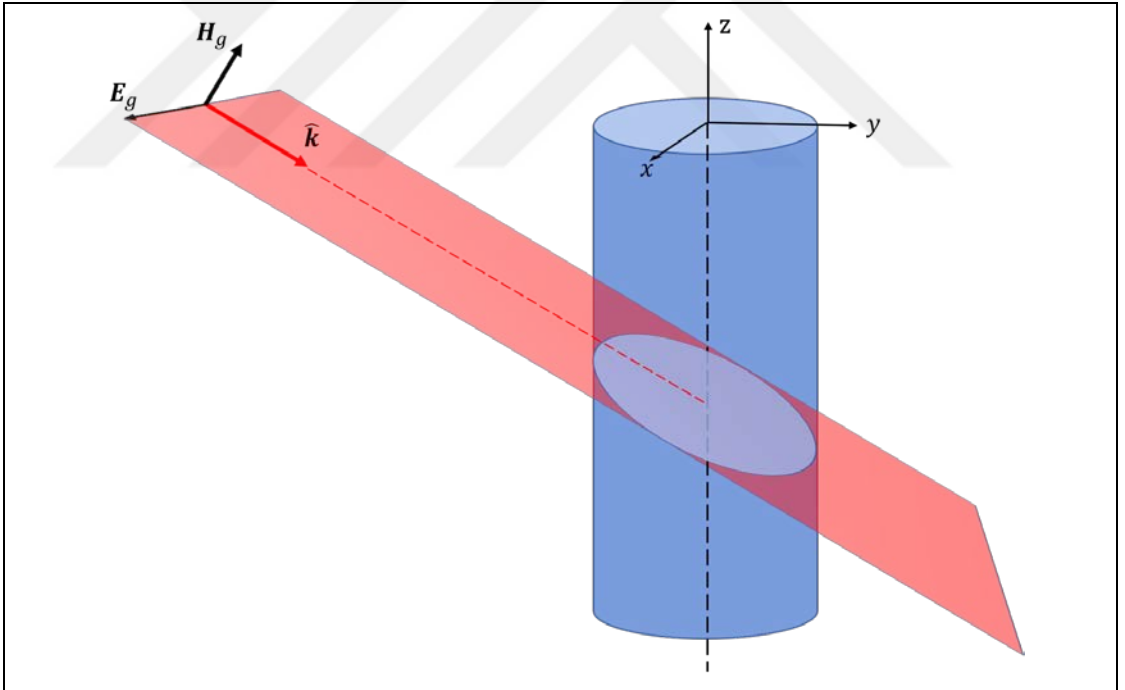
Silindirik bir dalga kılavuzunda kılavuzlanan bir elektromanyetik dalganın ilerleme yönü k (silindir eksenini z) her zaman normal olduğu düzlem (silindirik kesit) ile beraber anılabilir. Bu düzleme teğet elektromanyetik dalga bileşenleri ilerleyen dalgayı karakterize eder. Eğer sadece manyetik/elektrik alan bu düzleme teğet ise dalga Teğet Manyetik(TM)/Teğet Elektrik (TE) olurken, her ikisi birden bu düzleme teğet ise Teğet Elektromanyetik(TEM) olur. (boş uzaydaki düzlemsel dalga TEM sınıfına girer). Bu sınıflama ilerleme yönüne dik (transverse) bileşen terimleri ile yapıldığında ortaya çıkan evrensel tanımlama ile tutarlı olur.

Silindirik dalga saçıcılarına göre teğetlik yorumu kesit düzlemine göre geçerli kılınabilir. Bu düzlem Şekil A1.1 ve Şekil A1.2’de gösterildiği gibi, $\hat{k}$ vektörünün silindir eksenini ile yaptığı açıda oluşan düzlemi kasteder. Bu düzlem aynı zamanda $\hat{k}$ ve saçıcı yüzey normali $\hat{n}$ olmak üzere $\hat{n} \times \hat{k}$ vektörlerinin üzerinde bulundukları düzlemdir. Eğer sadece manyetik/elektrik alan bu düzleme teğet ise saçılma problemi TM/TE olarak sınıflanır. Bu sınıflama $\hat{k}$ ve $\hat{n}$ vektörlerinin üzerinde bulunduğu düzlem olan geliş düzlemine dik (transverse) bileşen terimleri ile yapıldığında ortaya çıkan evrensel tanımlama ile tutarlı olur.

Bu terimlerin evrensel kısaltmalara Türkçe terim karşı getirmek amacıyla ilk kullanımı Doç.Dr. Fatih Dikmen tarafından 2016 URSI Türkiye ulusal kongresinde bildiri sunumlarında kullanılmıştır.

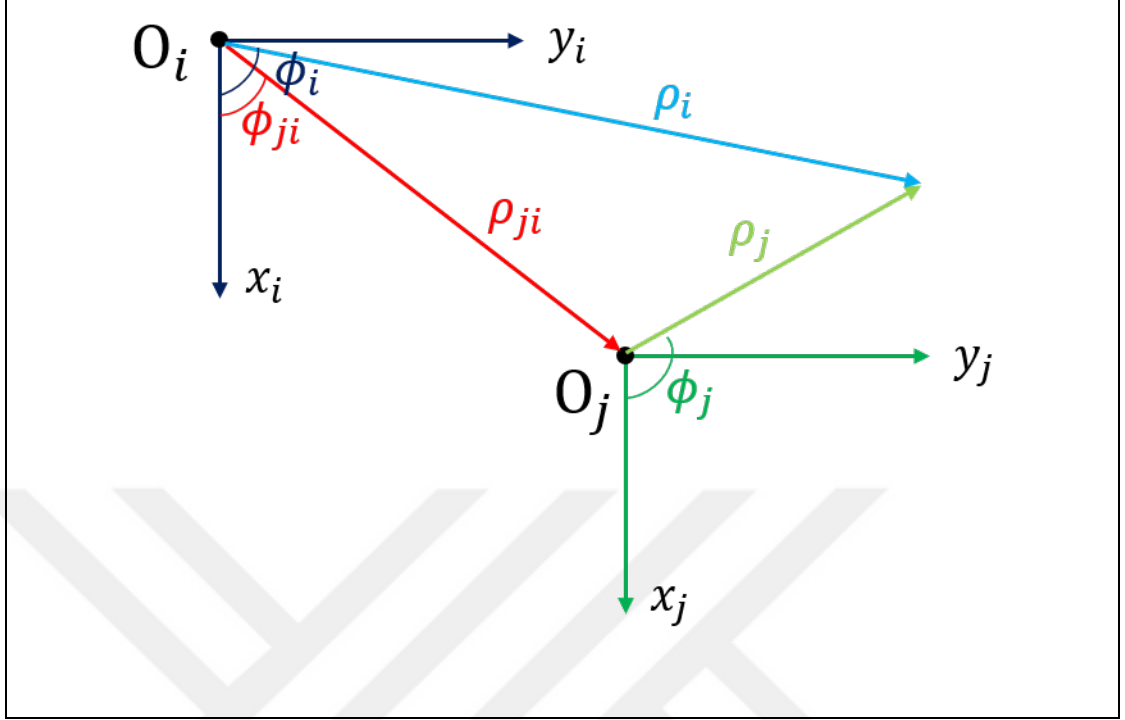


Şekil A1.1: Bir silindiri aydınlatan Teğet Manyetik (TM) dalga.



Şekil A1.2: Bir silindiri aydınlatan Teğet Manyetik (TE) dalga.

Ek B: Graf Toplamsallık Teoremi



Şekil B1.1: Silindirik koordinat sistemleri arası dönüşüm.

$$H_m^{(2)}(k|\rho_j|)e^{jm\phi_j} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_{n-m}(k\rho_{ji})H_n^{(2)}(k\rho_i) e^{jn\phi_i-j(n-m)\phi_{ji}}, \quad \rho_i > \rho_j \quad (\text{E.1})$$

$$H_m^{(2)}(k|\rho_j|)e^{jm\phi_j} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_{n-m}^{(2)}(k\rho_{ji})J_n(k\rho_i) e^{jn\phi_i-j(n-m)\phi_{ji}}, \quad \rho_i < \rho_j \quad (\text{E.2})$$

$$J_m(k|\rho_j|)e^{jm\phi_j} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_{n-m}(k\rho_{ji})J_n(k\rho_i) e^{jn\phi_i-j(n-m)\phi_{ji}}, \quad (\text{E.3})$$