

**PARANORMALU UZAYLARDA İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Emine ÖZÇELİK**  
**161121106**

**Ana Bilim Dalı : Matematik**  
**Programı: Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi**

**Danışman: Prof. Dr. Çiğdem BEKTAŞ**

**HAZİRAN – 2018**

T.C.  
FIRAT ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

PARANORMAL UZAYLARDA İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Emine ÖZÇELİK

161121106

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 27.06.2018

Tezin Savunulduğu Tarih: 18.07.2018

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Çiğdem BEKTAŞ (F.Ü.)

Diğer Jüri Üyeleri: Prof. Dr. Yavuz ALTIN (F.Ü.)

Dr. Öğr. Üyesi Gülcan ATICI (Muş A.Ü.)

HAZİRAN-2018

## ÖNSÖZ

Bu çalışmanın hazırlanmasında ve düzenli bir şekilde yürütülmesinde bana yardımcı olan, her zaman yakın ilgi ve imkânlarını esirgemeyen değerli hocam Prof. Dr. Çiğdem BEKTAŞ'a teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

**Emine ÖZÇELİK**  
**ELAZIĞ - 2018**

## İÇİNDEKİLER

### Sayfa No

ÖNSÖZ .....	II
İÇİNDEKİLER .....	III
ÖZET.....	IV
SUMMARY .....	V
SİMGELER LİSTESİ .....	VI
1. TEMEL TANIM VE TEOREMLER .....	1
2. PARANORMLU UZAYLAR.....	7
3. İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK VE $\Delta^m$ - İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK.....	11
3.1 İstatistiksel Yakınsaklık .....	11
3.2 Genelleştirilmiş Fark Dizi Uzayları .....	17
3.3 $\Delta^m$ -İstatistiksel Yakınsaklık .....	19
4. PARANORMLU UZAYLARDA $\Delta^m$ - İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK VE KUVVETLİ CESÀRO TOPLANABİLME .....	24
4.1. $\Delta^m$ -İstatistiksel Yakınsaklık ve $\Delta^m$ -İstatistiksel Cauchy .....	24
4.2. Kuvvetli Toplanabilme ve İstatistiksel Yakınsaklık Arasındaki İlişki .....	30
5. TARTIŞMA VE SONUÇ.....	33
KAYNAKLAR .....	34
ÖZGEÇMİŞ .....	36

## ÖZET

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde; temel tanım ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde;  $c(p)$ ,  $c_0(p)$ ,  $\ell_\infty(p)$  ve  $\ell(p)$  uzayları tanımlanmış olup bu uzayların özellikleri gösterilmiştir.

Üçüncü bölümde; İstatistiksel yakınsaklık ve  $\Delta^m$ -İstatistiksel yakınsaklık kavramları incelenmiş ve genelleştirilmiş fark dizi uzaylarından bahsedilmiştir.

Dördüncü bölümde; Paranormlu uzaylarda  $\Delta^m$ -istatistiksel yakınsaklık ve  $\Delta^m$ -istatistiksel Cauchy arasındaki ilişki incelenmiş ve bu kavramlarla ilgili temel tanım ve teoremler verilmiştir. Son olarak da  $\Delta^m$ -kuvvetli p-Cesàro toplanabilme ile ilgili teoremler ifade ve ispat edilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Yoğunluk, istatistiksel yakınsaklık, istatistiksel Cauchy, paranormlu uzay,  $\Delta^m$ -istatistiksel yakınsaklık,  $\Delta^m$ -istatistiksel Cauchy,  $\Delta^m$ -kuvvetli p-Cesàro toplanabilme.

**SUMMARY**  
**STATISTICAL CONVERGENCE IN PARANORMED SPACES**

This study consists of four chapters.

In the first chapter; basic definitions and theorems are given.

In the second chapter,  $c(p)$ ,  $c_0(p)$ ,  $\ell_\infty(p)$  and  $\ell(p)$  spaces are defined in and properties of these spaces are introduced.

In the third chapter; the notions of statistical convergence and  $\Delta^m$ -statistical convergence are examined and generalized difference sequence spaces are introduced.

In the fourth chapter; the relationship between  $\Delta^m$ -statistical convergence and  $\Delta^m$ -statistical Cauchy in paranormed spaces was examined and the basic definitions and theorems are given. Finally, the theorems related to  $\Delta^m$ -strongly p-Cesàro summability are given and they are proved.

**KEYWORDS:** Density, statistical convergence, statistical Cauchy, paranormed space,  $\Delta^m$ -statistically convergence,  $\Delta^m$ -statistically Cauchy,  $\Delta^m$ -strongly p-Cesàro summability.

## SİMGELER LİSTESİ

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar cümlesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar cümlesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar cümlesi
$w$	: Reel ya da kompleks terimli tüm diziler uzayı
$c$	: Kompleks terimli yakınsak diziler uzayı
$c_0$	: Kompleks terimli sıfıra yakınsak diziler uzayı
$\ell_\infty$	: Kompleks terimli sınırlı diziler uzayı
$\delta(K)$	: K cümlesinin doğal yoğunluğu
h.h.k	: Hemen her k için
S	: İstatistiksel yakınsak dizilerin uzayı
$S_0$	: İstatistiksel sıfır dizilerin uzayı
$w_p$	: Kuvvetli p-Cesàro toplanabilir diziler uzayı
$S(\Delta^m)$	: $\Delta^m$ -istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı
$w_p(\Delta^m)$	: Kuvvetli $\Delta_p^m$ - Cesàro yakınsak dizilerin uzayı

## 1. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

**Tanım 1.1.**  $X$  boş olmayan bir küme ve  $K$  reel veya kompleks sayılar cismi olsun.

$$+ : X \times X \rightarrow X \quad \text{ve} \quad \cdot : K \times X \rightarrow X$$

fonksiyonları aşağıdaki özellikleri sağlarsa  $X$  kümesine  $K$  cismi üzerinde bir vektör (lineer) uzayı adı verilir.  $\forall x, y, z \in X$  ve  $\forall a, b \in K$  için

$$L1) \quad x + y = y + x$$

$$L2) \quad (x + y) + z = x + (y + z)$$

$$L3) \quad \forall x \in X \quad \text{için} \quad x + \theta = x \text{ eşitliğini sağlayan bir tek } \theta \in X \text{ vardır.}$$

$$L4) \quad \forall x \in X \quad \text{için} \quad x + (-x) = \theta \text{ eşitliğini sağlayan bir tek } -x \in X \text{ vardır.}$$

$$L5) \quad 1 \cdot x = x$$

$$L6) \quad a(x + y) = ax + ay$$

$$L7) \quad (a + b)x = ax + bx$$

$$L8) \quad a(bx) = (ab)x$$

dir [1].

Bu uzayın elemanlarına da vektör veya nokta adı verilir.  $K = \mathbb{R}$  alınırsa  $X$  ' e bir reel vektör uzayı  $K = \mathbb{C}$  alınırsa  $X$  ' e bir kompleks vektör uzayı adı verilir [1].

**Tanım 1.2.**  $X$  bir  $K$  cismi üzerinde bir vektör uzayı ve  $M \subset X$  olmak üzere;

$\forall x, y \in M$  ve  $\forall c \in K$  için;  $x + y \in M$ ,  $c \cdot x \in M$  oluyorsa  $X$  'in bir  $M$  alt kümesine alt vektör uzayı denir [1].

**Tanım 1.3.**  $X$  boş olmayan bir cümle olsun. Her  $x, y, z \in X$  için

$$\text{M1)} \quad d(x, x) = 0$$

$$\text{M2)} \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$\text{M3)} \quad d(x, y) = d(y, x)$$

$$\text{M4)} \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

özelliklerine sahip  $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonuna metrik ve  $(X, d)$  ikilisine de metrik uzay denir. M1, M3, M4 şartlarını sağlayan  $d$  fonksiyonuna bir yarı metrik,  $(X, d)$  ikilisine de yarı metrik uzay denir [1].

**Tanım 1.4.**  $X, K$  cismi üzerinde bir lineer uzay olsun.

$$\| \cdot \|: X \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlarsa  $\| \cdot \|$  fonksiyonuna  $X$  üzerinde bir norm ve  $(X, \| \cdot \|)$  ikilisine de bir normlu uzay denir.  $\forall x, y \in X$  ve  $\forall \alpha \in K$  için;

$$\text{N1)} \quad \|x\| \geq 0$$

$$\text{N2)} \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$$

$$\text{N3)} \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$$

$$\text{N4)} \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

dir.

Eğer N2) yerine N2\*)  $x = \theta \Rightarrow \|x\| = 0$  şartı alınırsa yarınorm elde edilir [2].

**Tanım 1.5.** Tanım cümlesi  $\mathbb{N}$  doğal sayılar cümlesi olan fonksiyona dizi denir. Diziler değer cümlelerine göre çeşitli isimler alırlar. Eğer dizinin değer cümlesi  $\mathbb{R}$  reel sayılar

cümlesi ise diziye reel terimli dizi,  $\mathbb{Q}$  rasyonel sayılar cümlesi ise diziye rasyonel terimli dizi adı verilir [3].

**Tanım 1.6.**  $(X, \|\cdot\|)$  bir normlu uzay ve  $x = (x_n)$ ,  $X$  uzayında bir dizi olsun. Eğer  $\forall \varepsilon > 0$  için  $\forall m, n > n_0$  iken  $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$  olacak şekilde bir  $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  sayısı varsa  $x = (x_n)$  dizisine Cauchy dizisi denir [2].

**Tanım 1.7.**  $(X, \|\cdot\|)$  bir normlu uzay ve  $x = (x_n)$ ,  $X$  uzayında bir dizi olsun. Eğer  $\forall \varepsilon > 0$  için  $\forall n > n_0$  iken  $\|x_n - x\| < \varepsilon$  olacak şekilde bir  $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  sayısı varsa  $x = (x_n)$  dizisi  $x$ 'e yakınsaktır denir.  $\lim_n x_n = x$  veya  $(n \rightarrow \infty) x_n \rightarrow x$  şeklinde yazılır [2].

**Tanım 1.8.**  $(X, \|\cdot\|)$  normlu uzayında her Cauchy dizisi bu uzayın bir noktasına yakınsıyorsa bu normlu uzaya tam normlu uzay veya Banach uzayı denir [2].

**Teorem 1.9.** Bir  $X$  Banach uzayının bir  $Y$  alt uzayının tam olması için gerek ve yeter şart;  $Y$  uzayının  $X$  uzayında kapalı olmasıdır [2].

**Tanım 1.10.**  $w$ , bütün  $x = (x_n)$  dizilerin uzayıdır. Bu uzaydaki metrik

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|}$$

şeklindedir [2].

**Tanım 1.11.**  $\ell_{\infty}$  ile bütün  $x = (x_n)$  sınırlı dizilerin uzayı gösterilir. Yani

$$\ell_{\infty} = \left\{ x = (x_n) : \sup_n |x_n| < \infty \right\}$$

dir. Bu uzaydaki metrik  $d(x, y) = \sup_n |x_n - y_n|$  şeklindedir [1].

**Tanım 1.12.**  $c$  ile bütün  $x = (x_n)$  yakınsak dizilerin uzayı gösterilir. Yani

$$c = \left\{ x = (x_n) : \exists \ell \in \mathbb{C} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - \ell| = 0 \right\}$$

dir.  $c$  dizi uzayı  $d(x, y) = \sup_n |x_n - y_n|$  metriği ile birlikte bir metrik uzaydır [1].

**Tanım 1.13.**  $c_0$  uzayı, sıfır dizilerin uzayıdır. Yani

$$c_0 = \left\{ x = (x_n) : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \right\}$$

dir. Bu uzaydaki metrik  $d(x, y) = \max |x_n - y_n|$  şeklinde alınabilir. Çünkü her sıfır dizisinin bir maksimum elemanı vardır [1].

**Tanım 1.14.**  $p = (p_n)$  pozitif sayıların sınırlı bir dizisi ve  $0 < p_n \leq \sup p_n = H < \infty$  olmak üzere  $\ell(p)$  uzayı

$$\ell(p) = \left\{ x = (x_n) : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^{p_n} < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanır. Bu uzaydaki metrik  $M = \max\{1, H\}$  olmak üzere

$$d(x, y) = \left( \sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^{p_n} \right)^{\frac{1}{M}}$$

şeklinde [1].

**Teorem 1.15.**  $\ell_{\infty}$ ,  $c$  ve  $c_0$  uzayları;  $\|x\|_{\infty} = \sup_n |x_n|$  normu ile ve  $\ell_p$  uzayı  $p \geq 1$  için

$$\|x\|_p = \left( \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p} \text{ normu ile bir Banach uzayıdır [2].}$$

**Tanım 1.16.**  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  bir fonksiyon ve  $a \in A$  olsun.  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$  ise  $f$  fonksiyonu  $a$  noktasında süreklidir [3].

**Tanım 1.17.**  $A, B \subset \mathbb{R}$  ve  $f: A \rightarrow B$  olmak üzere  $\forall x \in A$  için  $|f(x)| \leq K$  olacak şekilde bir  $K$  pozitif reel sayısı varsa  $f$  fonksiyonuna sınırlıdır denir [3].

**Tanım 1.18.**  $X, K$  cisim üzerinde bir vektör uzayı olsun. Eğer  $g: X \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa  $g$ 'ye bir paranorm,  $(X, g)$  ikilisine de paranormlu uzay denir.

$\forall \lambda \in K$  ve  $\forall x, y \in X$  için,

$$\text{P1) } g(\theta) = 0,$$

$$\text{P2) } g(x) = g(-x),$$

$$\text{P3) } g(x+y) \leq g(x) + g(y)$$

**P4)**  $(\lambda_n)$  skalerlerin bir dizisi ve  $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) olsun.  $x_n, \alpha \in X$  için  $x_n \rightarrow \alpha$  ( $n \rightarrow \infty$ ) iken  $g(x_n - \alpha) \rightarrow 0$  ve  $\lambda_n x_n \rightarrow \lambda_0 \alpha$  ( $n \rightarrow \infty$ ),  $g(\lambda_n x_n - \lambda_0 \alpha) \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) [4].

**Tanım 1.19.** Eğer  $g(x) = 0$  iken  $x = \theta$  oluyorsa  $g$ 'ye total paranorm denir [5].

**Teorem 1.20.** Her yarınorm bir paranormdur. Bu teoremin karşıtı doğru değildir [5].

**Tanım 1.21.**  $X$  ve  $Y$  aynı cisim üzerinde iki lineer uzay olsun.  $\forall x, y \in X$  ve  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$  skaları için,

$$T(x+y) = T(x) + T(y)$$

$$T(\alpha x) = \alpha T(x)$$

şartlarını sağlayan  $T: X \rightarrow Y$  operatörüne lineer operatör denir [2].

$X$  uzayından  $Y$  uzayına olan bütün lineer operatörlerin cümlesi  $L(X, Y)$  ile gösterilir.

Özel olarak  $Y = \mathbb{R}$  veya  $\mathbb{C}$  alınrsa,  $T$  lineer operatörüne  $X$  uzayı üzerinde bir lineer fonksiyonel denir [2].

**Tanım 1.22.**  $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa,  $f$ 'ye bir modülüs fonksiyonu denir.

- 1)  $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- 2)  $\forall x, y \geq 0$  için  $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$
- 3)  $f$  artandır.
- 4)  $f$  sıfır noktasında sağdan süreklidir [6].

**Teorem 1.23.**  $f$  modülüs fonksiyonu sınırlı veya sınırsız olabilir [6].

## 2. PARANORMLU UZAYLAR

Bu bölümde,  $c(p), c_0(p), \ell_\infty(p)$  ve  $\ell(p)$  dizi uzaylarının bazı topolojik özellikleri incelenecektir.

$p = (p_n)$  pozitif reel sayıların sınırlı bir dizisi,  $0 < p_n \leq \sup p_n = H < \infty$  ve  $M = \{1, H\}$  olsun. Bu takdirde  $c(p), c_0(p), \ell_\infty(p)$  ve  $\ell(p)$  paranormlu dizi uzayları sırasıyla,

$$c(p) = \left\{ x = (x_n) : \exists \ell \in \mathbb{C} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - \ell|^{p_n} = 0 \right\},$$

$$c_0(p) = \left\{ x = (x_n) : \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n|^{p_n} = 0 \right\},$$

$$\ell_\infty(p) = \left\{ x = (x_n) : \sup_n |x_n|^{p_n} < \infty \right\},$$

$$\ell(p) = \left\{ x = (x_n) : \sum_n |x_n|^{p_n} < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanır [9].

**Teorem 2.1.**  $M = \max \{1, \sup p_n\}$  olmak üzere  $c_0(p)$

$$g(x) = \sup_n |x_n|^{p_n/M}$$

ile paranormlu bir uzaydır [1].

**Teorem 2.2.**  $\ell_\infty(p)$  ve  $c(p)$  uzayları,  $g(x) = \sup_n |x_n|^{p_n/M}$  ile paranormlu olması için gerek ve yeter şart  $\inf p_n > 0$  olmasıdır [1].

**Teorem 2.3.**  $\ell(p)$  ve  $w(p)$  uzayları sırasıyla,

$$g(x) = \left( \sum_n |x_n|^{p_n} \right)^{\frac{1}{M}}, \quad g(x) = \sup_k \left( \frac{1}{k} \sum_{n=1}^k |x_n|^{p_n} \right)^{\frac{1}{M}}$$

ile birer paranormlu uzaydır [1].

Yukarıda tanımlanan bu uzaylar paranormun doğurduğu topolojilere göre tamdır. Genel olarak  $c(p)$ ,  $c_0(p)$ ,  $\ell_\infty(p)$ ,  $\ell(p)$  ve  $w(p)$  uzayları normlu uzaylar değildirler.

Eğer her  $n$  için  $p_n = p$  ise

$$\ell_\infty(p) = \ell_\infty, \quad c(p) = c, \quad c_0(p) = c_0, \quad \ell(p) = \ell, \quad w(p) = w$$

dir [1].

**Teorem 2.4.**  $\ell(p)$  uzayı,  $M = \max \{1, \sup p_n\}$  olmak üzere

$$g(x) = \left( \sum_n |x_n|^{p_n} \right)^{\frac{1}{M}}$$

şeklinde tanımlı  $g$  ile paranormlu bir tam lineer metrik uzaydır [1].

**İspat.** Herhangi bir  $\lambda$  kompleks sayısı ve  $x, y \in \ell(p)$  için

$$\left( \sum_n |x_n + y_n|^{p_n} \right)^{\frac{1}{M}} \leq \left( \sum_n |x_n|^{p_n} \right)^{\frac{1}{M}} + \left( \sum_n |y_n|^{p_n} \right)^{\frac{1}{M}}$$

ve

$$|\lambda|^{p_n} \leq \max \{1, |\lambda|^M\}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Yukarıdaki eşitsizliklerden  $\ell(p)$  nin noktasal lineer işlemlere göre lineer bir uzay olduğu görülür.  $g(\theta) = 0$  ve her  $x \in \ell(p)$  için  $g(x) = g(-x)$  olduğu

aşıkardır. Aynı zamanda, yukarıdaki iki eşitsizlikten  $g$ 'nin alt toplamsal ve

$$g(\lambda x) \leq \max\{1, |\lambda|\} \cdot g(x)$$

olduğu görülür. Bundan dolayı,  $(\lambda, x) \rightarrow \lambda \cdot x$  fonksiyonu  $\lambda = 0$  da süreklidir.  $x = 0$  ve  $\lambda$  sabit iken  $x \rightarrow \lambda \cdot x$  fonksiyonu  $x = 0$  da süreklidir. Eğer  $x$  sabit ve  $\varepsilon > 0$  ise

$$\sum_{n>N} |x_n|^{p_n} < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde  $N$  sayısı seçebiliriz.  $\delta > 0$  için  $|\lambda| < \delta$  iken

$$\sum_{n \leq N} |\lambda x_n|^{p_n} < \frac{\varepsilon}{2}$$

olur. Buradan  $|\lambda| < \min\{1, \delta\}$  olması  $g(\lambda x) < \varepsilon$  olmasını gerektirir. Böylece fonksiyon  $\lambda = 0$  da süreklidir ve bu nedenle  $\ell(p)$  paranormlu bir uzaydır.

**Teorem 2.5.**  $c_0(p)$  uzayı

$$g(x) = \sup_n |x_n|^{\frac{p_n}{M}}$$

ile paranormlu lineer bir metrik uzaydır. Eğer  $\inf p_n > 0$  ise o zaman  $\ell_\infty(p)$  ve  $c(p)$  uzayları tam paranormlu uzaylardır [1].

**İspat.**  $x = (x_n)$ ,  $c_0(p)$  de keyfi bir dizi ve  $\lambda \in \mathbb{C}$  olsun.

$$|\lambda|^{p_n} \leq \max\{1, |\lambda|^M\}$$

olduğundan eşitsizliğin her iki tarafının  $\frac{1}{M}$  inci kuvveti alınırsa,

$$|\lambda|^{\frac{p_n}{M}} \leq \max\{1, |\lambda|^M\}^{\frac{1}{M}} = \max\{1, |\lambda|\}$$

elde edilir. Buradan

$$g(\lambda x) \leq \max\{1, |\lambda|\} \cdot g(x)$$

yazılabilir.

$\lambda = 0$  ve  $x = 0$  iken  $(\lambda, x) \rightarrow \lambda \cdot x$  süreklidir.

$x = 0$  ve  $\lambda$  sabit iken  $x \rightarrow \lambda \cdot x$  süreklidir.

Şimdi  $x$  sabit iken  $c_0(p)$  uzayı

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^{\frac{p_n}{M}} < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde bir  $\delta > 0$  sayısı vardır.  $|\lambda| < \delta$  iken

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |\lambda x_n|^{\frac{p_n}{M}} < \frac{\varepsilon}{2}$$

olur. Eğer  $|\lambda| < \min\{1, \delta\}$  alırsak

$$g(\lambda x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |\lambda x_n|^{\frac{p_n}{M}} + \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^{\frac{p_n}{M}}$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

elde ederiz. Böylece ispat tamamlanmış olur.

### 3. İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK VE $\Delta^m$ - İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Bu bölümde, istatistiksel yakınsak dizilerin ve  $\Delta^m$  - istatistiksel yakınsak dizilerin bazı temel özellikleri incelenecektir.

#### 3.1 İstatistiksel Yakınsaklık

$\mathbb{N}$  doğal sayılar kümesini göstermek üzere  $K \subseteq \mathbb{N}$  ve  $K(n) = \{k \in K : k \leq n\}$  olsun.  $K(n)$  kümesinin eleman sayısını  $|K(n)|$  ile gösterelim. Bir  $K \subseteq \mathbb{N}$  kümesindeki  $x$ 'e eşit olan ya da  $x$ 'den küçük olan pozitif tam sayıların sayısı  $K(x)$  ile gösterilsin.

Örneğin bir  $K$  kümesi 2, 4, 6, ... çift tamsayılarından oluşuyorsa,

$$K(1) = 0, K(2) = 1, K(6) = 3, K(7) = 3, K\left(\frac{15}{2}\right) = 3, \dots$$

olur. Gerçekten;  $x \geq 0$  ise  $K(x) = \frac{[x]}{2}$  dir.

Reel ya da kompleks terimli dizilerde istatistiksel yakınsaklık kavramı esasen doğal sayıların alt kümelerinin asimptotik yoğunluğuna bağlıdır.

**Tanım 3.1.1.**  $K \subseteq \mathbb{N}$  olmak üzere  $\delta(K) = \lim_n \frac{K(n)}{n}$  limiti mevcut ise bu limite  $K$  kümesinin asimptotik yoğunluğu veya doğal yoğunluğu denir ve  $\delta(K)$  sembolü ile gösterilir.

Ayrıca,  $(\alpha_n)$  pozitif tamsayılarının bir dizisi ve  $K = \{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}$  olsun. Eğer  $\delta(K)$  mevcut ise  $K$ 'nin doğal yoğunluğu;

$$\delta(K) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\alpha_n}$$

şeklinde tanımlanır [7].

**Tanım 3.1.2.** Bir  $K$  cümlesinin asimptotik yoğunluğu,  $\delta_i(K) = \liminf_n \frac{K(n)}{n}$  dir.

$\frac{K(n)}{n}$  dizisi limite sahip ise  $K$ 'nın doğal yoğunluğu  $\delta(K) = \lim_n \frac{K(n)}{n}$  şeklinde tanımlanır [7].

**Tanım 3.1.3.**  $\delta(K) = 0$  ise  $K$  cümlesine sıfır yoğunluklu cümle denir [7].

**Teorem 3.1.4.**  $K = (\alpha_i)$  sonsuz bir dizi ise bu taktirde

$$\delta_i(K) = \liminf_n \frac{n}{\alpha_n}$$

dir. Eğer  $\delta(K)$  mevcut ise  $\delta(K) = \lim_n \frac{n}{\alpha_n}$  dir [7].

**Örnek 3.1.**  $\delta(\mathbb{N}) = 1$ ,

$$\delta(\{n^2 : n \in \mathbb{N}\}) = 0,$$

$$\delta(\{n : n \text{ asal sayı}\}) = 0,$$

$$\delta(\{2n : n \in \mathbb{N}\}) = \delta(\{2n+1 : n \in \mathbb{N}\}) = \frac{1}{2}$$

elde edilir.

**Teorem 3.1.5.**  $B$  cümlesi doğal yoğunluğa sahipse,

$$\delta(N-B) = 1 - \delta(B) \text{ ve } 0 \leq \delta(B) \leq 1$$

dir [7].

**Teorem 3.1.6.** Doğal sayıların sonlu her alt cümlesinin doğal yoğunluğu sıfırdır. Bunun tersi doğru değildir [7].

**Teorem 3.1.7.** Doğal yoğunluğun sıfır olduğu durumlarda,  $\delta(K)=0$  iken, doğal yoğunluğun sıfır olmadığı durumlarda  $K$ 'nin yoğunluğu sıfırdan farklıdır ve  $\delta(K) \neq 0$  ile gösterilir [8].

**Tanım 3.1.8.** Eğer  $x = (x_k)$  dizisinin terimleri sıfır yoğunluklu cümle hariç bütün  $k$ 'lar için bir  $P$  özelliğini sağlıyor ise  $(x_k)$  dizisi hemen hemen her  $k$  için  $P$  özelliğini sağlıyor denir ve 'h.h.k' şeklinde gösterilir [8].

Sıfır yoğunluklu cümle tanımından esinlenerek istatistiksel yakınsak dizi tanımı aşağıdaki şekilde verilmiştir.

**Tanım 3.1.9.**  $x = (x_k)$  kompleks sayıların bir dizisi olsun. Eğer her  $\varepsilon > 0$  için

$$\lim_n \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

ise, yani h.h.k için  $|x_k - L| < \varepsilon$  ise  $x = (x_k)$  dizisi  $L$  sayısına istatistiksel yakınsaktır denir.  $S\text{-}\lim x = L$  veya  $x_k \rightarrow L(S)$  yazılır. Burada cümle sembolü dışındaki dikey çizgiler cümlelerin eleman sayısını göstermektedir.

İstatistiksel yakınsak dizilerin uzayı

$$S = \left\{ x = (x_k) : \lim_n \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0 \right\}$$

ile,  $L = 0$  olması halinde bu uzay

$$S_0 = \left\{ x = (x_k) : \lim_n \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : |x_k| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0 \right\}$$

şeklinde gösterilir [8].

**Teorem 3.1.10.** Yakınsak her dizi istatistiksel yakınsaktır. Fakat bunun tersi doğru değildir [8].

**Teorem 3.1.11.** İstatistiksel yakınsaklık tanımından da anlaşılacağı gibi  $x = (x_k)$  dizisi bir  $L$  sayısına istatistiksel yakınsak ise  $L$  sayısının herhangi bir  $\varepsilon$  komşuluğunda dizinin sonsuz çoklukta terimi bulunurken, bu komşuluğun dışında da indis cümlesinin yoğunluğu sıfır olmak şartıyla yine diziye ait sonsuz çoklukta terim bulunabilir [8].

Dolayısıyla, istatistiksel yakınsaklık, bilinen yakınsaklıktan daha genel bir kavramdır. Bunun karşıtının her zaman doğru olamayacağı aşağıdaki örnekte görölmektedir.

**Örnek 3.2.**  $x = (x_k)$  dizisinin genel terimi

$$x_k = \begin{cases} 1, & k = m^2 \\ 0, & k \neq m^2 \end{cases} \quad m=1,2,3,\dots$$

şeklinde tanımlansın.  $(x_k)$  dizisinin terimleri

$(x_k) = (1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, \dots)$  şeklinde olur. Bu taktirde

$$|\{k \leq n : |x_k| \geq \varepsilon\}| \leq |\{k \leq n : x_k \neq 0\}| \leq \sqrt{n}$$

eşitsizliği yazılabilir. Bu eşitsizlik  $n$  ile bölünür ve  $n \rightarrow \infty$  için limiti alınırsa,

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : x_k \neq 0\}| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

elde edilir. Buradan  $S - \lim x_k = 0$  bulunur.

Yukarıdaki örnekte verilen  $x = (x_k)$  dizisi yakınsak değildir. Dolayısıyla yakınsak her dizi sınırlı olduğu halde istatistiksel yakınsak dizilerin sınırlı olması gerekmez. Şimdi bunun için bir örnek daha verelim.

**Örnek 3.3.**  $x = (x_k)$  dizisinin genel terimi;

$$x_k = \begin{cases} \sqrt{k}, & k = m^2 \\ 0, & k \neq m^2 \end{cases} \quad m=1,2,3, \dots$$

şeklinde tanımlansın. Bu taktirde

$$|\{k \leq n : |x_k| \geq \varepsilon\}| \leq |\{k \leq n : x_k \neq 0\}| \leq \sqrt{n}$$

eşitsizliği yazılabilir. Bu eşitsizlik  $n$  ile bölünür ve  $n \rightarrow \infty$  için limiti alınrsa,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : x_k \neq 0\}| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

elde edilir. Buradan  $S\text{-}\lim x_k = 0$  olduğu elde edilir. Buradan da  $x$  dizisi istatistiksel yakınsaktır, fakat üstten sınırsızdır.

**Teorem 3.1.12.**  $x = (x_n)$  dizisinin bir  $\ell \in \mathbb{R}$  sayısına yakınsak olması için gerek ve yeter şart

$$K = \{n_k : k \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N} \text{ için } \delta(K) = 1 \text{ ve } \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \ell$$

olmasıdır [8].

Kısaca sıfır yoğunluklu indis cümlesi dışında (eşdeğer olarak 1 yoğunluklu indis cümlesi üzerinde),  $(x_{n_k})$  dizisi  $\ell$  değerine klasik anlamda yakınsak ise bu durumda  $(x_n)$  dizisi  $\ell$  sayısına istatistiksel yakınsaktır.

Sonuç olarak, istatistiksel yakınsak diziler uzayı Cauchy anlamında yakınsak diziler uzayını kapsar.

**Tanım 3.1.13.**  $x = (x_k)$  dizisine,  $\forall \varepsilon > 0$  ve  $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  sayısı için

$$\{k \in \mathbb{N} : |x_k - x_{n_0}| \geq \varepsilon\}$$

cümlesi sıfır yoğunluğa sahip ise istatistiksel Cauchy dizisi denir [9].

Klasik yakınsaklıkta olduğu gibi istatistiksel yakınsaklık ve istatistiksel Cauchy dizileri arasında da aşağıdaki teoremden verilen ilişki vardır.

**Teorem 3.1.14.** Aşağıdaki ifadeler denktir:

- i)  $x = (x_k)$  istatistiksel yakınsaktır,

- ii)  $x = (x_k)$  istatistiksel Cauchy dizisidir,
- iii)  $x = (x_k)$  dizisi için  $\delta(\{k : x_k \neq y_k\}) = 0$  olacak şekilde yakınsak bir  $y = (y_k)$  dizisi vardır [9].

**Teorem 3.1.15.**  $S\text{-}\lim x = L$  ve  $\forall k \in \mathbb{N}$  için  $|x_k| < M$  ise  $\sigma_1\text{-}\lim x = L$  dir [6]. Bu teoremin tersi doğru değildir. Gerçekten  $(x) = (1, 0, 1, 0, \dots)$  şeklinde tanımlanan dizinin aritmetik ortalaması  $\frac{1}{2}$  ye yakınsaktır. Fakat bu dizi istatistiksel yakınsak değildir.

**Tanım 3.1.16.**  $x = (x_k)$  kompleks terimli bir dizi ve  $0 < p < \infty$  olsun.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \sum_{k=1}^n |x_k - L|^p = 0$$

olacak şekilde kompleks bir  $L$  sayısı varsa  $x = (x_k)$  dizisi  $L'$  ye kuvvetli p-Cesàro toplanabilir denir. Kuvvetli p-Cesàro toplanabilir dizilerin cümlesi  $w_p$  ile gösterilir. O halde  $p > 0$  için,

$$w_p = \left\{ x = (x_k) : \exists L \in \mathbb{C}, \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \sum_{k=1}^n |x_k - L|^p = 0 \right\}$$

dir [6].

**Teorem 3.1.17.**  $p \in \mathbb{R}$  ve  $0 < p < \infty$  olsun. Eğer bir dizi  $L'$  ye kuvvetli p-Cesàro toplanabilirse o zaman bu dizi  $L'$  ye istatistiksel yakınsaktır. Eğer sınırlı bir dizi  $L'$  ye istatistiksel yakınsak ise o zaman bu dizi  $L'$  ye kuvvetli p-Cesàro toplanabilir dir [6].

### 3.2 Genelleştirilmiş Fark Dizi Uzayları

$\ell_\infty$ ,  $c$  ve  $c_0$  sırasıyla  $k \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  pozitif tamsayıların cümlesi olmak üzere,

$$\|x\|_\infty = \sup_k |x_k|$$

ile normlu birer Banach uzayıdır.

Kızmaz [10],  $\Delta x = (\Delta x_k) = (x_k - x_{k+1})$  olmak üzere,

$$\ell_\infty(\Delta) = \{x = (x_k) : \Delta x \in \ell_\infty\}$$

$$c(\Delta) = \{x = (x_k) : \Delta x \in c\}$$

$$c_0(\Delta) = \{x = (x_k) : \Delta x \in c_0\}$$

dizi uzaylarını tanımladı ve bu uzayların

$$\|x\| = |x_1| + \|\Delta x\|_\infty$$

normu ile birer Banach uzayı olduğunu gösterdi.

Daha sonra Sarıgöl [11],

$$\ell_\infty(\Delta_q) = \{x = (x_k) : \Delta_q x = k^q (x_k - x_{k+1}) \in \ell_\infty, q < 1\}$$

$$c(\Delta_q) = \{x = (x_k) : \Delta_q x = k^q (x_k - x_{k+1}) \in c, q < 1\}$$

$$c_0(\Delta_q) = \{x = (x_k) : \Delta_q x = k^q (x_k - x_{k+1}) \in c_0, q < 1\}$$

dizi uzaylarını tanımladı ve bu uzayların

$$\|x\|_{\Delta_q} = |x_1| + \sup_k |k^q (x_k - x_{k+1})|$$

normu ile Banach uzayları olduğunu gösterdi.

Daha sonra Et ve Çolak ([12],[13])  $m \in \mathbb{N}$ ,  $\Delta^0 x = (x_k)$ ,  $\Delta x = (x_k - x_{k+1})$ ,  
 $\Delta^m x = (\Delta^m x_k) = (\Delta^{m-1} x_k - \Delta^{m-1} x_{k+1})$  ve

$$\Delta^m x_k = \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} x_{k+v}$$

olmak üzere

$$\ell_\infty(\Delta^m) = \{x = (x_k) : \Delta^m x \in \ell_\infty\}$$

$$c(\Delta^m) = \{x = (x_k) : \Delta^m x \in c\}$$

$$c_0(\Delta^m) = \{x = (x_k) : \Delta^m x \in c_0\}$$

dizi uzaylarını tanımladılar ve bu dizi uzaylarının

$$\|x\|_\Delta = \sum_{i=1}^m |x_i| + \|\Delta^m x\|_\infty$$

normu ile Banach uzayları olduğunu gösterdiler.

**Teorem 3.2.1.**  $\ell_\infty(\Delta^m)$ ,  $c(\Delta^m)$  ve  $c_0(\Delta^m)$  dizi uzayları aşikâr olarak birer lineer uzaydır [12].

**Teorem 3.2.2.**  $c(\Delta^m)$ ,  $c_0(\Delta^m)$  dizi uzayları,  $\ell_\infty(\Delta^m)$  dizi uzayının kapalı bir alt uzayıdır [12].

**Teorem 3.2.3.**  $X = \ell_\infty, c, c_0$  olmak üzere  $\Delta^m(X)$  dizi uzayı da bir lineer uzaydır [12].

**Teorem 3.2.4.**  $X = \ell_\infty, c, c_0$  olmak üzere  $\Delta^m(X)$  dizi uzayı

$$\|x\|_{\Delta^m} = \sum_{i=1}^m |x_i| + \|\Delta^m x\|$$

normu ile birer normlu uzaydır [12].

**Teorem 3.2.5.**  $X, \|\cdot\|$  normu ile bir Banach uzayı ise  $\Delta^m(X)$  dizi uzayı da

$$\|x\|_{\Delta^m} = \sum_{i=1}^m |x_i| + \|\Delta^m x\|$$

normu ile bir Banach uzayıdır [12].

**Teorem 3.2.6.**  $X \subset Y$  ise  $\Delta^m(X) \subset \Delta^m(Y)$  dir [12].

Şimdi yukarıda tanımladığımız uzaylar arasındaki kapsama bağıntılarını verelim.

1)  $c_0(\Delta^m) \subset c_0(\Delta^{m+1})$  ve  $c_0(\Delta^m) \neq c_0(\Delta^{m+1})$  dir.

2)  $c(\Delta^{m-1}) \subset c(\Delta^m)$  ve  $c(\Delta^{m-1}) \neq c(\Delta^m)$  dir.

3)  $c_0(\Delta^m) \subset c(\Delta^{m+1})$  ve  $c_0(\Delta^m) \neq c(\Delta^{m+1})$  dir.

4)  $\ell_\infty(\Delta^{m-1}) \subset \ell_\infty(\Delta^m)$  ve  $\ell_\infty(\Delta^{m-1}) \neq \ell_\infty(\Delta^m)$  dir.

5)  $c(\Delta^m) \subset \ell_\infty(\Delta^m)$  ve  $c(\Delta^m) \neq \ell_\infty(\Delta^m)$  dir.

### 3.3 $\Delta^m$ -İstatistiksel Yakınsaklık

**Tanım 3.3.1.**  $x = (x_k)$  kompleks sayıların bir dizisi olsun. Eğer  $\forall \varepsilon > 0$  için,

$$\lim_n \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : |\Delta^m x_k - L| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa  $x = (x_k)$  dizisi L sayısına  $\Delta^m$  -istatistiksel yakınsaktır denir

ve  $\Delta^m(S) - \lim x = L$  veya  $x_k \rightarrow L(\Delta^m(S))$  şeklinde gösterilir [14].  $\Delta^m$  -istatistiksel

yakınsak dizilerin uzayı

$$\Delta^m(S) = \left\{ x = (x_k) : \lim_n \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : |\Delta^m x_k - L| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0 \right\}$$

ile gösterilir,

$L=0$  olması halinde  $x=(x_k)$  dizisine sıfıra  $\Delta^m$ -istatistiksel yakınsak dizi denir.  $x=(x_k)$  dizisi sıfıra  $\Delta^m$ -istatistiksel yakınsak ise  $\Delta^m(S)-\lim x=0$  veya  $x_k \rightarrow 0(\Delta^m(S))$  yazılır. Sıfıra istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı

$$\Delta^m(S_0) = \left\{ x = (x_k) : \lim_n \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : |\Delta^m x_k| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0 \right\}$$

ile gösterilir [14].

**Teorem 3.3.2.**  $\Delta^m(S)$  lineer uzaydır [14].

**Tanım 3.3.3.**  $x=(x_k)$  kompleks terimli bir dizi ve  $p > 0$  reel bir sayı olsun. Eğer

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\Delta^m x_k - L|^p = 0$$

olacak şekilde bir  $L$  sayısı varsa  $x=(x_k)$  dizisi  $L$  sayısına kuvvetli  $\Delta_p^m$ - Cesàro yakınsaktır denir ve  $\Delta^m(w_p)-\lim x=L$  veya  $x_k \rightarrow L(\Delta^m(w_p))$  şeklinde gösterilir [14].

Kuvvetli  $\Delta_p^m$ -Cesàro yakınsak dizilerin uzayı

$$\Delta^m(w_p) = \left\{ x = (x_k) : \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\Delta^m x_k - L|^p = 0, \text{ en az bir } L \in \mathbb{C} \text{ vardır.} \right\}$$

ile gösterilir [14].

**Teorem 3.3.4.**  $p \in \mathbb{R}, 0 < p < \infty$  olsun.

- i)  $x_k \rightarrow L(\Delta^m(w_p))$  ise  $x_k \rightarrow L(\Delta^m(S))$  dir.
- ii)  $x \in \ell_\infty(\Delta^m)$  ve  $x_k \rightarrow L(\Delta^m(S))$  ise  $x_k \rightarrow L(\Delta^m(w_p))$  dir [14].

**İspat. i)**  $x=(x_k) \in \Delta^m(w_p)$  ve  $\varepsilon > 0$  olsun. Bu taktirde

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n |\Delta^m x_k - L|^p &= \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ |\Delta^m x_k - L| < \varepsilon}} |\Delta^m x_k - L|^p + \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ |\Delta^m x_k - L| \geq \varepsilon}} |\Delta^m x_k - L|^p \\ &\geq \varepsilon^p \left| \left\{ k \leq n : |\Delta^m x_k - L| \geq \varepsilon \right\} \right|\end{aligned}$$

elde edilir.  $x_k \rightarrow L(\Delta^m(w_p))$  olduğundan  $x_k \rightarrow L(\Delta^m(S))$  elde edilir.

ii)  $x_k \rightarrow L(\Delta^m(S))$  olsun.  $x \in \ell_\infty(\Delta^m)$  olduğundan  $M = \|\Delta^m x\|_\infty + |L|$  yazabiliriz.  $\varepsilon \geq 0$  verilsin.  $N_\varepsilon$  sayısını

$$\frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : |\Delta^m x_k - L| \geq \left( \frac{\varepsilon}{2} \right)^{1/p} \right\} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2M^p}$$

olacak şekilde seçelim ve

$$L_n = \left\{ k \leq n : |\Delta^m x_k - L| \geq \left( \frac{\varepsilon}{2} \right)^{1/p} \right\}$$

diyelim. Bu taktirde  $n > N_\varepsilon$  için

$$\begin{aligned}\frac{1}{n} \left( \sum_{k \in L_n} |\Delta^m x_k - L|^p + \sum_{k \notin L_n} |\Delta^m x_k - L|^p \right) &< \frac{1}{n} \left( \frac{n\varepsilon}{2M^p} M^p + n \frac{\varepsilon}{2} \right) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece  $x_k \rightarrow L(\Delta^m(w_p))$  olur.

**Tanım 3.3.5.**  $x = (x_k) \in w$  olsun. Eğer  $\forall \varepsilon > 0$  için

$$\frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : |\Delta^m x_k - \Delta^m x_N| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

olacak şekilde bir  $N = N(\varepsilon)$  sayısı varsa  $x = (x_k)$  dizisine  $\Delta^m$ -istatistiksel Cauchy dizisi denir [13].

**Teorem 3.3.6.** Eğer  $x = (x_k)$  dizisi  $\Delta^m$ -istatistiksel yakınsak ise  $x = (x_k)$  dizisi  $\Delta^m$ -istatistiksel Cauchy dizisidir [13].

**İspat.** Kabul edelim ki  $x \in \Delta^m(S)$  ve  $\varepsilon > 0$  olsun. Bu taktirde *h.h.k* için

$$|\Delta^m x_k - L| < \frac{\varepsilon}{2}$$

yazabiliriz.  $N$  sayısını *h.h.k* için

$$|\Delta^m x_N - L| < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde seçelim. Bu taktirde *h.h.k* için

$$|\Delta^m x_k - \Delta^m x_N| < |\Delta^m x_k - L| + |\Delta^m x_N - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

olur. Buradan  $x = (x_k)$  dizisi  $\Delta^m$ -istatistiksel Cauchy dizisidir.

**Teorem 3.3.7.**

- i)  $c(\Delta^m) \subset S(\Delta^m)$  ve bu kapsama kesindir.
- ii)  $S(\Delta^m)$  ve  $\ell_\infty(\Delta^m)$  birbirlerini kapsamazlar, ancak ortak elemanları vardır.
- iii)  $S(\Delta^m)$  ve  $\ell_\infty$  birbirlerini kapsamazlar, ancak ortak elemanları vardır.
- iv)  $S$  ve  $c_0(\Delta^m)$  birbirlerini kapsamazlar, ancak ortak elemanları vardır.
- v)  $S$  ve  $\ell_\infty(\Delta^m)$  birbirlerini kapsamazlar, ancak ortak elemanları vardır [13].

**Tanım 3.3.8.**  $(X, g)$  bir paranormlu uzay olsun. Bir  $x = (x_k)$  dizisine,  $\forall \varepsilon > 0$  için  $k \geq k_0$  iken  $g(x_k - \zeta) < \varepsilon$  olacak şekilde pozitif bir  $k_0$  tam sayısı mevcutsa  $\zeta$  sayısına yakınsak veya *g*-yakınsak denir.  $g - \lim x = \zeta$  şeklinde gösterilir [15].

**Tanım 3.3.9.** Bir  $x = (x_k)$  dizisine, eğer her bir  $\varepsilon > 0$  için

$$\lim_n \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : g(x_k - \zeta) > \varepsilon \right\} \right| = 0$$

ise  $(X, g)$  de  $\zeta$  sayısına istatistiksel yakınsaktır veya  $g(st)$ - yakınsaktır denir. Bu durumda  $g(st) - \lim x = \zeta$  şeklinde gösterilir [15].

**Tanım 3.3.10.** Bir  $x = (x_k)$  dizisine, eğer her  $\varepsilon > 0$  için

$$\lim_n \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : g(x_k - x_N) \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

olacak şekilde bir  $N = N(\varepsilon)$  sayısı mevcutsa  $(X, g)$  de istatistiksel Cauchy dizisi veya  $g(st)$ -Cauchy denir [15].

#### 4. PARANORMALU UZAYLARDA $\Delta^m$ - İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK VE KUVVETLİ CESÀRO TOPLANABİLME

Bu bölümde paranormal uzaylarda ,  $\Delta^m$  - istatistiksel yakınsaklık ve  $\Delta^m$  - istatistiksel Cauchy kavramları tanımlanıp bunlar arasındaki ilişki incelenmiştir.

##### 4.1. $\Delta^m$ -İstatistiksel Yakınsaklık ve $\Delta^m$ -İstatistiksel Cauchy

**Tanım 4.1.1.** Bir  $x = (x_k)$  dizisine, eğer her bir  $\varepsilon > 0$  için

$$\lim_n \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : g(x_k - \zeta) > \varepsilon \right\} \right| = 0$$

ise  $(X, g)$  de  $\zeta$  sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve bu limit  $g(st) - \lim x = \zeta$  şeklinde gösterilir. Bu dizilerin uzayı  $S_g$  ile gösterilir.

**Tanım 4.1.2.** Bir  $x = (x_k)$  dizisine, eğer her bir  $\varepsilon > 0$  için

$$\lim_n \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : g(\Delta^m x_k - \zeta) > \varepsilon \right\} \right| = 0$$

ise  $(X, g)$  de  $\zeta$  sayısına  $\Delta^m$  -istatistiksel yakınsaktır denir ve bu limit  $g(st) - \Delta^m \lim x_k = \zeta$  şeklinde gösterilir.

**Tanım 4.1.3.** Bir  $x = (x_k)$  dizisine, eğer her  $\varepsilon > 0$  için

$$\lim_n \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : g(\Delta^m x_k - \Delta^m x_N) \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

olacak şekilde bir  $N = N(\varepsilon)$  sayısı mevcutsa  $(X, g)$  de  $\Delta^m$  - istatistiksel Cauchy denir.

**Teorem 4.1.4.** Eğer bir  $x = (x_k)$  dizisi  $(X, g)$  paranormal uzayında istatistiksel yakınsak ise bu taktirde  $g(st) - \Delta^m$  limiti tektir.

**İspat.** Kabul edelim ki  $g(st) - \Delta^m \lim x = \zeta_1$  ve  $g(st) - \Delta^m \lim x = \zeta_2$  olsun ve  $\varepsilon > 0$  verilsin. Aşağıdaki cümleleri tanımlayalım:

$$K_1(\varepsilon) = \left\{ k \in \mathbb{N} : g(\Delta^m x_k - \zeta_1) \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\},$$

$$K_2(\varepsilon) = \left\{ k \in \mathbb{N} : g(\Delta^m x_k - \zeta_2) \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\},$$

$g(st) - \Delta^m \lim x = \zeta_1$  olduğundan  $\delta(K_1(\varepsilon)) = 0$  elde ederiz. Benzer şekilde  $g(st) - \Delta^m \lim x = \zeta_2$  olması  $\delta(K_2(\varepsilon)) = 0$  olmasını gerektirir. Şimdi  $K(\varepsilon) = K_1(\varepsilon) \cup K_2(\varepsilon)$  olsun. Bu taktirde  $\delta(K(\varepsilon)) = 0$  dir. Burada  $\delta(K^c(\varepsilon)) = 1$  dir. Şimdi eğer  $k \in \mathbb{N}/K(\varepsilon)$  ise bu taktirde

$$\begin{aligned} g(\zeta_1 - \zeta_2) &\leq g(\Delta^m x_n - \zeta_1) + g(\Delta^m x_n - \zeta_2) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

dir.  $\varepsilon > 0$  keyfi olduğundan  $g(\zeta_1 - \zeta_2) = 0$  elde edilir ve buradan  $\zeta_1 = \zeta_2$  olur.

**Teorem 4.1.5.** Eğer  $g - \Delta^m \lim x = \zeta$  ise bu taktirde  $g(st) - \Delta^m \lim x = \zeta$  dir. Fakat tersi genel olarak doğru değildir.

**İspat.**  $g - \Delta^m \lim x = \zeta$  olsun. Bu taktirde her  $\varepsilon > 0$  için ve  $\forall k \geq N$  için

$$g(\Delta^m x_k - \zeta) < \varepsilon$$

olacak şekilde pozitif bir  $N$  tamsayısı vardır.

$$A(\varepsilon) = \left\{ k \in \mathbb{N} : g(\Delta^m x_k - \zeta) \geq \varepsilon \right\} \subset \{1, 2, 3, \dots\}$$

olduğundan  $\delta(A(\varepsilon)) = 0$  dir. Buradan  $g(st) - \lim x = \zeta$  olur.

Aşağıdaki örnek bu teoremin tersinin doğru olması gerekmediğini gösterir.

**Örnek 4.1.**  $\ell(\Delta^m, p) = \left\{ x = (x_k) : \sum_k |\Delta^m x_k|^{p_k} < \infty \right\}$  uzayında  $p = (p_k) = (1/k)$  alınırsa

$$\ell\left(\Delta^m, \frac{1}{k}\right) = \left\{ x = (x_k) : \sum_k |\Delta^m x_k|^{1/k} < \infty \right\}$$

elde edilir. Buradaki paranorm  $g(x) = \left( \sum_k |\Delta^m x_k|^{1/k} \right)$  şeklindedir.  $x = (x_k)$  dizisi

$$\Delta^m x_k = \begin{cases} k, & k = n^2, n \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın ve

$$K(\varepsilon) = \left\{ k \leq n : g(\Delta^m x_k) \geq \varepsilon \right\}, \quad 0 < \varepsilon < 1 \text{ olsun. Buradan}$$

$$g(\Delta^m x_k) = \begin{cases} k^{1/k}, & k = n^2, n \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

olduğu görülür. Buradan

$$\lim_k g(\Delta^m x_k) = \begin{cases} 1, & k = n^2, n \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

elde edilir. Bu nedenle  $g - \Delta^m \lim x$  mevcut değildir. Diğer yandan  $\delta(K(\varepsilon)) = 0$ , yani

$$g(st) - \Delta^m \lim x = 0 \text{ dir.}$$

**Teorem 4.1.6.**  $g(st) - \Delta^m \lim x = \zeta_1$  ve  $g(st) - \Delta^m \lim y = \zeta_2$  olsun. Bu takdirde

$$\text{i) } g(st) - \Delta^m \lim(x \mp y) = \zeta_1 \mp \zeta_2$$

$$\text{ii) } g(st) - \alpha(\Delta^m \lim x) = \alpha \zeta_1 \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

dir.

**Teorem 4.1.7.**  $(X, g)$  de bir  $x = (x_k)$  dizisinin  $\Delta^m$  - istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart

$$g(\Delta^m x_{k_n} - \zeta) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

olacak şekilde  $\delta(K) = 1$  olmak üzere bir  $K = \{k_1 < k_2 < k_3 < \dots < k_n < \dots\} \subseteq \mathbb{N}$  cümlesinin var olmasıdır.

**İspat.**  $g(st)\text{-}\lim x = \zeta$  olduğunu kabul edelim. Şimdi  $r = 1, 2, 3, 4, \dots$  için

$$K_r = \left\{ n \in \mathbb{N} : g(\Delta^m x_{k_n} - \zeta) \leq 1 - \frac{1}{r} \right\}$$

ve

$$M_r = \left\{ n \in \mathbb{N} : g(\Delta^m x_{k_n} - \zeta) > \frac{1}{r} \right\}$$

alalım. Bu takdirde  $\delta(K_r) = 0$ ,

$$M_1 \supset M_2 \supset M_3 \supset \dots \supset M_i \supset M_{i+1} \supset \dots \quad (4.1)$$

ve

$$\delta(M_r) = 1, \quad r = 1, 2, 3, \dots \quad (4.2)$$

dir. Şimdi  $n \in M_r$  için  $(\Delta^m x_{k_n})$  nin  $\zeta$  ye  $g$ -yakınsak olduğunu gösterelim. Aksine  $(\Delta^m x_{k_n})$  nin  $\zeta$  ye  $g$ -yakınsak olmadığını kabul edelim. Bu nedenle sonsuz terimler için  $g(\Delta^m x_{k_n} - \zeta)$  olacak şekilde  $\varepsilon > 0$  mevcuttur.

$$M_\varepsilon = \left\{ n \in \mathbb{N} : g(\Delta^m x_{k_n} - \zeta) > \varepsilon \right\} \text{ ve } \varepsilon > \frac{1}{r} \quad (r \in \mathbb{N})$$

olsun. Bu takdirde

$$\delta(M_\varepsilon) = 0$$

ve (4.1) den  $M_r \subset M_\varepsilon$  dir. Buradan  $M_r \subset M_\varepsilon$  elde edilir ki bu (4.2) ile çelişir. O zaman  $(x_{k_n})$ ,  $\zeta$  ye  $(X, g)$  paranormlu uzayında  $\Delta^m$ -istatistiksel yakınsaktır.

Tersine  $g(\Delta^m x_{k_n}) \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) olacak şekilde  $\delta(K) = 1$  olmak üzere bir  $K = \{k_1 < k_2 < k_3 < \dots < k_n < \dots\}$  cümlesinin mevcut olduğunu kabul edelim. Bu taktirde  $n > N$  için  $g(\Delta^m x_{k_n} - \zeta) < \varepsilon$  olacak şekilde pozitif bir  $N$  tamsayısı vardır.

$$K_\varepsilon = \{k \in \mathbb{N} : g(\Delta^m x_k - \zeta) \geq \varepsilon\}$$

$$K' = \{k_{N+1}, k_{N+2}, \dots\}$$

alalım. Bu taktirde  $\delta(K') = 1$  ve  $K_\varepsilon \subseteq \mathbb{N} - K'$  olur ki bu  $\delta(K_\varepsilon) = 0$  olmasını gerektirir. Buradan  $x = (x_k)$  dizisi  $(X, g)$  paranormlu uzayında  $\Delta^m$ -istatistiksel yakınsaktır.

**Teorem 4.1.8.**  $(X, g)$  paranormlu bir tam uzay olsun. Bu durumda  $(X, g)$  deki noktaların bir  $x = (x_k)$  dizisinin  $\Delta^m$ -istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart  $\Delta^m$ -istatistiksel Cauchy olmasıdır.

**İspat.** Kabul edelim ki bir  $(x_k)$  dizisi  $(X, g)$  paranormlu uzayında  $\Delta^m$ -istatistiksel yakınsak olsun. Bu taktirde

$$A(\varepsilon) = \left\{ k \in \mathbb{N} : g(\Delta^m x_k - \zeta) \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\}$$

olmak üzere  $\delta(A(\varepsilon)) = 0$  elde edilir. Buradan

$$\delta(A^c(\varepsilon)) = \delta(\{k \in \mathbb{N} : g(\Delta^m x_k - \zeta) < \frac{\varepsilon}{2}\}) = 1$$

olur.  $n \in A^c(\varepsilon)$  olsun. Bu taktirde  $g(\Delta^m x_n - \zeta) < \frac{\varepsilon}{2}$  dir. Şimdi

$$B(\varepsilon) = \{k \in \mathbb{N} : g(\Delta^m x_k - \Delta^m x_n) \geq \varepsilon\}$$

olsun.  $B(\varepsilon) \subset A(\varepsilon)$  olduğunu göstermeliyiz.  $k \in B(\varepsilon)$  olsun. Bu takdirde

$$g(\Delta^m x_k - \Delta^m x_n) \geq \varepsilon$$

ve buradan

$$g(\Delta^m x_k - \zeta) \geq \frac{\varepsilon}{2}$$

olur ki bu da  $k \in A(\varepsilon)$  olması demektir. Aksi takdirde eğer  $g(\Delta^m x_k - \zeta) < \varepsilon$  olursa

$$\varepsilon \leq g(\Delta^m x_k - \Delta^m x_n) \leq g(\Delta^m x_k - \zeta) + g(\Delta^m x_n - \zeta)$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

olur ki bu imkansızdır. Buradan  $B(\varepsilon) \subset A(\varepsilon)$  olması  $x = (x_k)$  dizisinin  $\Delta^m$ -istatistiksel Cauchy olmasını gerektirir.

Tersine kabul edelim ki  $x = (x_k)$  dizisi  $\Delta^m$ -istatistiksel Cauchy olsun, fakat  $(X, g)$  paranormlu uzayında  $\Delta^m$ -istatistiksel yakınsak olmasın. Bu takdirde

$$G(\varepsilon) = \{k \in \mathbb{N} : g(\Delta^m x_k - \Delta^m x_M) \geq \varepsilon\}$$

olmak üzere  $\delta(G(\varepsilon)) = 0$  ve

$$D(\varepsilon) = \left\{k \in \mathbb{N} : g(\Delta^m x_k - \zeta) < \frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

olmak üzere  $\delta(D(\varepsilon)) = 0$  ve buradan  $\delta(D^c(\varepsilon)) = 1$  olacak şekilde  $M \in \mathbb{N}$  mevcuttur.

Buradan

$g(\Delta^m x_k - \zeta) < \frac{\varepsilon}{2}$  olduğundan

$$g(\Delta^m x_k - \Delta^m x_n) \leq 2g(\Delta^m x_k - \zeta) < \varepsilon$$

elde edilir. Bu nedenle  $\delta(G^c(\varepsilon))=0$ , yani  $\delta(G(\varepsilon))=1$  olur ki bu  $x=(x_k)$  dizisinin  $\Delta^m$ -istatistiksel Cauchy olması ile çelişir. Buna göre  $x=(x_k)$  dizisi  $(X, g)$  uzayında  $\Delta^m$ -istatistiksel yakınsak olmalıdır.

#### 4.2. Kuvvetli Toplanabilme ve İstatistiksel Yakınsaklık Arasındaki İlişki

**Tanım 4.2.1.** Bir  $x=(x_k)$  dizisine eğer  $0 < p < \infty$  için

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left( g(\Delta^m x_k - \zeta) \right)^p = 0$$

ise  $(X, g)$  de  $\zeta$  limitine  $\Delta^m$ - kuvvetli p-Cesàro toplanabilirdir denir ve  $x_k \rightarrow_{\zeta} [c_1, g, \Delta^m]_p$  şeklinde gösterilir.  $\zeta$  ye  $x$  in  $[c_1, g, \Delta^m]_p$ -limiti denir.

**Teorem 4.2.2.** a) Eğer  $0 < p < \infty$  ve  $x_k \rightarrow_{\zeta} [c_1, g, \Delta^m]_p$  ise  $x=(x_k)$  dizisi  $(X, g)$  de  $\zeta$  ye  $\Delta^m$ - istatistiksel yakınsaktır.

b) Eğer  $x=(x_k)$  dizisi sınırlı ve  $\zeta$  ye  $(X, g)$  de  $\Delta^m$ -istatistiksel yakınsak ise bu taktirde  $x_k \rightarrow_{\zeta} [c_1, g, \Delta^m]_p$  dir.

**İspat. a)**  $x_k \rightarrow_{\zeta} [c_1, g, \Delta^m]_p$  olsun. Bu taktirde

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left( g(\Delta^m x_k - \zeta) \right)^p \geq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left( g(\Delta^m x_k - \zeta) \right)^p \geq \frac{\varepsilon^p}{n} |K_{\varepsilon}|$$

$$\left( g(\Delta^m x_k - \zeta) \right)^p \geq \varepsilon$$

ve  $n \rightarrow \infty$  iken  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left( g(\Delta^m x_k - \zeta) \right)^p \rightarrow 0$  olur. Yani  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |K_{\varepsilon}| = 0$  ve böylece  $\delta(K_{\varepsilon}) = 0$

olur. Burada  $K_{\varepsilon} = \left\{ k \leq n : g \left( (\Delta^m x_k - \zeta) \right)^p \geq \varepsilon \right\}$  dir.

b) Kabul edelim ki  $x = (x_k)$  dizisi sınırlı ve  $(X, g)$  de  $\zeta$  ye  $\Delta^m$  - istatistiksel yakınsak olsun. Bu taktirde  $\varepsilon > 0$  için  $\delta(K_\varepsilon) = 0$  elde edilir.  $x \in \ell_\infty$  olduğundan,

$$g(\Delta^m x_k - \zeta) \leq M \quad (k=1, 2, 3, \dots)$$

olacak şekilde  $M > 0$  sayısı mevcuttur.

$$S_1(n) = \frac{1}{n} \sum_{\substack{k=1 \\ k \notin K_\varepsilon}}^n \left( g(\Delta^m x_k - \zeta) \right)^p$$

ve

$$S_2(n) = \frac{1}{n} \sum_{\substack{k=1 \\ k \in K_\varepsilon}}^n \left( g(\Delta^m x_k - \zeta) \right)^p$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left( g(\Delta^m x_k - \zeta) \right)^p &= \frac{1}{n} \sum_{\substack{k=1 \\ k \notin K_\varepsilon}}^n \left( g(\Delta^m x_k - \zeta) \right)^p + \frac{1}{n} \sum_{\substack{k=1 \\ k \in K_\varepsilon}}^n \left( g(\Delta^m x_k - \zeta) \right)^p \\ &= S_1(n) + S_2(n) \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi eğer  $k \notin K$  ise bu taktirde  $S_1(n) < \varepsilon^p$  dir.  $k \in K_\varepsilon$  için  $n \rightarrow \infty$  iken  $\delta(K_\varepsilon) = 0$  olduğundan

$$S_2(n) \leq \sup \left( g(\Delta^m x_k - \zeta) \right) (|K_\varepsilon|/n) \leq M |K_\varepsilon|/n \rightarrow 0$$

elde edilir. Buradan  $x_k \rightarrow \zeta \left[ c_1, g, \Delta^m \right]_p$  olur.

**Tanım 4.2.3.**  $f$  bir modülüs fonksiyonu olsun. Bir  $x = (x_k)$  dizisine eğer

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f \left( \left( g(\Delta^m x_k - \zeta) \right)^p \right) = 0 \quad (0 < p < \infty)$$

ise  $(X, g)$  de  $\zeta$  limitine  $f$  e göre kuvvetli p-Cesàro  $\Delta^m$  - toplanabilirdir denir. Bu durumda  $x_k \rightarrow \zeta(w(f, g, \Delta^m, p))$  yazılır. Bu tür dizilerin uzayı  $w(f, g, \Delta^m, p)$  şeklinde gösterilir.

**Teorem 4.2.4.** a)  $f$  herhangi bir modülüs fonksiyonu ve olsun. Bu takdirde  $x = (x_k)$  dizisi  $(X, g)$  de  $\zeta$  ye  $\Delta^m$  - istatistiksel yakınsaktır.

b)  $S_g = w(f, g, \Delta^m, p) \Leftrightarrow f$  sınırlıdır.

## 5. TARTIŞMA VE SONUÇ

İstatistiksel yakınsaklık yıllardır farklı isimler altında Fourier Analiz teorisinde, ergodic teoride, sayılar teorisinde, ölçüm teorisinde, trigonometrik serilerde ve Banach uzaylarında kullanılmıştır. İstatistiksel yakınsaklık kavramı daha sonraları dizi uzayı bakış açısından araştırıldı ve Fridy [9], Connor [6], Mursaleen [16], Salat [8] ve daha birçok kişi tarafından çalışıldı. Daha sonra Et ve Nuray [14] istatistiksel yakınsaklığı  $m$ . mertebeden  $\Delta$  operatörü yardımıyla inceledi. İlaveten Alotaibi ve Alroqi bir  $(X, g)$  paranormlu uzayında; istatistiksel yakınsaklık, istatistiksel Cauchy ve kuvvetli  $p$ - Cesàro toplanabilirliği tanımlamış ve bunlar arasındaki ilişkileri incelemiştir.

Bu tezde,  $(X, g)$  paranormlu uzayında  $m$ . mertebeden  $\Delta$  operatörü ile oluşturulan dizilerin; istatistiksel yakınsaklığı ve kuvvetli  $p$ - Cesàro toplanabilirliği incelendi.  $\Delta^m$ - istatistiksel yakınsaklık ve  $\Delta^m$ -istatistiksel Cauchy kavramları tanımlandı ve bunlar arasındaki kapsama bağıntıları incelendi. Daha sonra bir  $f$  modülüs fonksiyonu yardımıyla  $(X, g)$  paranormlu uzayında  $\Delta^m$  operatörü ile  $p$ - Cesàro toplanabilirliği tanımlanıp istatistiksel yakınsaklık ile arasındaki kapsama bağıntıları ve teoremler ifade ve ispat edildi.

## KAYNAKLAR

- [1] I.J. Maddox, Elements of Functional Analysis. Cambiridge Üniv. Press. ( 1970).
- [2] E. Kreyszig, Introductory Functional Analysis with Applications. John Willey. New York-London-Sydney, (1978).
- [3] M. Balcı, Matematik Analiz II. Ertem Basın Yayın Dağıtım ltd. Şti. Ankara, ( 1997).
- [4] A. Wilansky, Summability Through Functional Analysis. North Holland, (1984).
- [5] I.J. Maddox, M.A.L. Willey, Continuous operators on paranormed spaces and matrix transformations. Pasific J.Math. 217-228, (1974).
- [6] J.S. Connor, On strong matrix summability with respect to a modulus and statistical convergence. Canad Math. Bull. 32, 194-198, (1989).
- [7] R.C. Buck, Generalized asymptotic density, Amer. J. Math. 75: 335-346, (1953).
- [8] T. Šalát, On statistically convergent sequences of real numbers. Math Slovaca. 30, 139-150, (1980).
- [9] J.A. Fridy, On statistical convergence , Analysis, 5:3 01-313, (1985).
- [10] H. Kızmaz, On certain sequence spaces. Canad. Math. Bull. 24(2): 169-176, (1981).
- [11] M.A. Sarıgöl, On difference sequence spaces. J. Karadeniz Tech. Univ.Fac.Arts Sci. Ser. Math Phys. 10, 63-71,(1987).
- [12] M. Et, R. Çolak, On some generalized difference sequence spaces. Soochow Journal of Mathematics. 21(4): 377-386, (1995).
- [13] R. Çolak, M. Et, On some generalized difference sequence spaces and related matrix transformations. Hokkaido Math.J. 26(3): 483-492, (1997).

- [14] M. Et, F. Nuray,  $\Delta^m$ -statistical convergence. Indian J. Pure Appl. Math 32(6): 961-969, (2001).
- [15] A. Alotaibi, M.A. Alroqi, Statistical convergence in a paranormed space. J. Inequal. Appl., 2012:39, 6 pp. (2012).
- [16] A. Mohammed, M. Mursaleen,  $\lambda$ -statistical convergence in paranormed space. Abstr. Appl. Anal. Art. ID 264520, 5 pp. (2013).

## ÖZGEÇMİŞ

Elazığ 1980 doğumluyum. İlk ve orta öğrenimimi Elazığ'da tamamladım. Ardından lise öğrenimimi' de Balakgazi Süper Lisesinde tamamladım. Üniversiteyi Fırat Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde 2003 yılında tamamladım. Fırat Üniversitesinde 2005 Yılında Fen Bilimleri Enstitüsünde Matematik Tezsiz Yüksek Lisansımı Tamamladım. Farklı eğitim kurumlarında Matematik Öğretmenliği yaptım. 2008-2010 yılları arasında Bankacılık alanında çalışmalarımı sürdürdüm. Çalışma hayatıma çocuklarım için bir müddet ara verdim. Evli ve üç çocuk annesiyim.

Emine ÖZÇELİK