T.C.
MUĞLA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

AYRIŞAMAYAN İNTEGRAL POLİTOPLAR VE MUTLAK İNDİRGENEMEZ ÇOK DEĞİŞKENLİ POLİNOMLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

EMİNE ÖZALP

EYLÜL - 2007
MUĞLA

T.C.
MUĞLA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

AYRIŞAMAYAN İNTEGRAL POLİTOPLAR VE MUTLAK İNDİRGENEMEZ ÇOK DEĞİŞKENLİ POLİNOMLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

EMİNE ÖZALP

MUĞLA 2007

ONAY SAYFASI

Yrd. Doç. Dr. Fatih Koyuncu danışmanlığında Emine Özalp tarafından hazırlanan bu çalışma 28.09.2007 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Ana Bilim Dalı'nda yüksek lisans tezi olarak oybirliği/~~oyçokluğu~~ ile kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Zekeriya Güney İMZA :

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Fatih Koyuncu İMZA : F. Koyuncu

Üye : Yrd. Doç. Dr. Bekir Tanay İMZA : B. Tanay

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın hazırlanmasında benden hiç bir zaman yardımlarını ve desteğini esirgemeyen Yrd. Doç. Dr. Fatih KOYUNCU 'ya, şevkim kırıldığında beni motive eden eşime ve aileme teşekkürü borç bilirim. Bu tezi, sürekli benimle beraber kalbi çarpan doğacak bebeğime armağan ediyorum.

Emine Özalp

MUĞLA 2007

İÇİNDEKİLER

Sayfa No:

Yüksek Lisans Tezi

Emine Özalp

AYRIŞAMAYAN İNTEGRAL POLİTOPLAR VE MUTLAK İNDİRGENEMEZ ÇOK DEĞİŞKENLİ POLİNOMLAR

MUĞLA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

2007

ÖZET

Bu tezde, bir F cismi üzerinde verilen çok değişkenli polinomların mutlak indirgenemezliği, bu polinomların Newton politopları yardımıyla, incelenmektedir.

Herhangi bir F cismi için, $F[x_1, x_2, ..., x_n]$ halkasından alınan bir f polinomu bir Newton politopuna eşlenebilir. f polinomu, Minkowski toplamına göre ayrışamayan bir Newton politopuna sahipse, F üzerinde mutlak olarak indirgenemez, yani F nin her cebirsel uzantısında indirgenemez.

Bu çalışmada, integral olarak ayrışamayan bazı Newton politopları ele alınarak, bunlara eşlenen bazı mutlak indirgenemez çok değişkenli polinom aileleri verilmiştir.

Türkçe Anahtar Kelimeler : Çok değişkenli polinomlar, mutlak indirgenemezlik, integral olarak ayrışamayan Newton politopları.

Sayfa Adedi :47

Tez Yöneticisi :Yrd. Doç. Dr. Fatih Koyuncu

M. Sc. Thesis

Emine Özalp

INDECOMPOSABLE INTEGRAL POLYTOPES AND ABSOLUTELY IRREDUCIBLE MULTIVARIATE POLYNOMIALS

MUĞLA UNIVERSITY

INSTITUTE of SCIENCE and TECHNOLOGY

2007

ABSTRACT

In this thesis, absolute irreducibility of multivarite polynomials over any field F, with the help of Newton polytopes of these polynomials, is studied.

For any field F, a polynomial $f \in F[x_1, x_2, ..., x_n]$ can be associated to a Newton polytop. If f has an integrally indecomposable Newton polytope, with respect to minkowski sum, then f is absolutely irreducible over F, i.e. it is irreducible over any algebraic extension of F.

In this study, considering some integrally indecomposable Newton polytopes, some families of absolutely irreducible multivarite polynomials associated to these polytopes are given.

Key Words : Multivarite polynomials, absolute irreducibility, integrally indecomposable Newton polytopes.

Page Number :47

Supervisor :Assoc. Prof. Dr. Fatih Koyuncu

1

Giriş

Bir F cismi için, $F[x_1, x_2, ..., x_n]$ halkasından alınan bir f polinomu bir Newton politopuna eşlenebilir. f polinomu, Minkowski toplamına göre ayrışamayan bir Newton politopuna sahipse, F üzerinde mutlak olarak indirgenemez, yani F nin her cebirsel uzantısında indirgenemez. Ayrıca bazı özel kosullarda Newton polytopları ayrışabilen bazı çok değişkenli polinomlarda bir cisim üzerinde indirgenemez olabilir. Bu tezde, bir F cismi üzerinde verilen çok değişkenli polinomlarda mutlak indirgenemezliği test etmek için Newton politop yöntemi kullanılmıştır

Notasyon: 1) Bu tez boyunca F herhangi bir cismi göstermektedir.

2) $v_1 = (x_1, x_2, ..., x_n),\ v_2 = (y_1, y_2, ..., y_n), ..., v_m = (z_1, z_2, ..., z_n) \in \mathbb{Z}^n$ olsun.

(i) v_1 noktasının bütün bileşenlerinin en büyük ortak böleni

$$ebob(v_1) = ebob(x_1, x_2, ..., x_n)$$

olarak gösterilmektedir.

(ii)

$$ebob(v_1, v_2, ..., v_m) = ebob(x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_n, ..., z_1, ..., z_n)$$

anlamına gelmektedir.

(iii) v_1 den v_2 noktasına olan kapalı doğru parçasını $[v_1, v_2]$ şeklinde göstereceğiz. Yani,

$$[v_1, v_2] = \{x \in \mathbb{R}^n\ :\ x = (1-\lambda)v_1 + \lambda v_2,\quad 0 \leq \lambda \leq 1\}.$$

2

Politop Yöntemiyle İlgili Bazı Temel Özellikler

Bu bölümde politop yöntemiyle ilgili bazı temel tanımları ve özellikleri vereceğiz. Önce politop yönteminin özel bir hali olan Eisenstein, Eisenstein-Dumas ve Stepanov-Schmidt kriterlerini vereceğiz. Sonra da politop metodunu tanıtacağız, *detaylar için bakınız Gao [2].*

Teorem 2.1 ***(Eisenstein Kriteri)***

R bir tek şekilde çarpanlara ayırma bölgesi ve $f = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n \in R[x]$ olsun. Eğer $p \in R$ asalı a_n dışındaki tüm katsayıları bölüyor ve p^2, a_0 katsayısını bölmüyorsa f polinomu $R[x]$ halkası içinde indirgenemez.

Örnek 2.1 $f(x) = 3 + 12x^2 + 18x^3 - 25x^4 \in \mathbb{Q}[z]$ *olsun,* $\mathbb{Q}$ *rasyonel sayılar cismi olmak üzere.* $p = 3$ *aldığımızda,* 3 *asal sayısı polinomumuzun katsayıları olan* $3, 12$ *ve* $18'$ *i böler; fakat* $25'i$ *bölmez ve* $p^2 = 9$ *,* $3'\ddot{u}$ *bölmez. O halde Eisenstein kriterine göre* f *polinomu* $\mathbb{Q}$ *üzerinde indirgenemez.*

Örnek 2.2 $g = 6 + 24x^2 + 32x^3 - 48x^4 \in \mathbb{Q}[x]$ *polinomu için,* $p = 2$ *aldığımızda Eisenstein kriteri çalışmaz. Çünkü* $2|48$.

Teorem 2.1 de verilen f polinomu için $a_oa_n \neq 0$ olsun. Bu polinomu kullanarak $\mathbb{R}^2$ düzleminde aşağıdaki gibi bir çokgen oluşturabiliriz:

Varsayalım ki bir p asalının a_k katsayısını bölen en büyük kuvveti p^{e_i} olsun, $e_i \geq 0$ ve eğer $a_i = 0$ ise e_i tanımlanmamak üzere. Bu durumda $(0, e_o)$, $(1, e_1), ...,$ (n, e_n) noktalarını içeren en küçük konveks bölgeyi oluşturabiliriz. Bu konveks bölgenin alt kenarlarının oluşturduğu çokgen, f nin (p asalına göre) Newton çokgeni olarak adlandırılır. Eğer seçilen bu p asalı Eisenstein kriterine uygunsa, bu durumda $e_0 = 1$ ve $e_n = 0$ olacağından, f nin Newton çokgeni y-ekseninde başlayan ve x-ekseninde sona eren doğru parçalarından oluşur.

Örneğin, $f = 2 + 4x + 41x^3 \in \mathbb{Q}[x]$ polinomunun, $p = 2$ asal sayısına göre oluşturulabilecek Newton çokgeni, köşeleri $(0, 1)$, $(1, 2)$ ve $(3, 0)$ olan üçgensel bölgenin alt sınırı olan ve köşeleri $(0, 1)$ ile $(3, 0)$ noktaları olan doğru parçasıdır.

Teorem 2.2 *(**Eisenstein-Dumas Kriteri**) R bir tek şekilde çarpanlara ayırma bölgesi, $f = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n \in R[x]$ ve $a_0a_n \neq 0$ olsun. Bunun yanında, $a_0, a_1, ..., a_n$ katsayıları R de basit olmayan bir ortak bölene sahip olmasın (yani, bu katsayıların R deki ortak böleni sadece R nin bir tersinir elemanı olabailir). Eğer f nin, bir $p \in R$ asalına göre, Newton çokgeni köşeleri $(0, m)$ ve $(n, 0)$ noktaları olan doğru parçasından oluşuyorsa ve ebob$(n, m) = 1$ (yani, m ve n nin en büyük ortak böleni 1) ise f polinomu $R[x]$ halkasında indirgenemez.*

Örnek 2.3 *$g = 9 + 22x + 21x^2 + 90x3 - 135x^4 \in \mathbb{Q}[x]$ polinomunda $p = 3$ alalım.*

$$\textit{ebob}(9, 22, 21, 90, 135) = 1$$

ve ebob$(2, 1) = 1$ olduğundan f polinomu $\mathbb{Q}$ üzerinde indirgenemez.

y bir yeni değişken olmak üzere, F bir cisim ve $R = F[y]$ olsun. Bu durumda y, R nin bir asal elemanıdır ve y asalı için $R[x] \simeq F[x, y]$ halkasında Eisenstein-Dumas kriteri uygulanabilir. Bu duruma göre Eisenstein-Dumas kriterinin bir özel durumunu verelim.

Teorem 2.3 *(**Eisenstein-Dumas Kriteri (Bir özel durum)**)*

F herhangi bir cisim, $f = a_0(y) + a_1(y)x + ... + a_n(y)x^n \in F[x, y]$, $a_0(y) \neq 0$ ve $0 \neq a_n(y) \in F$ olsun. Eğer f nin y asalına göre Newton çokgeni, köşeleri $(0, m)$ ve

$(n,0)$ noktaları olan doğru parçasından oluşuyorsa ve $ebob(n,m)=1$ ise f polinomu F üzerinde mutlak indirgenemez.

Tanım 2.1 *Bir F cismi üzerindeki bir f polinomu F cisminin her cebirsel uzantısında indirgenemez ise, f polinomu F üzerinde **mutlak indirgenemez** denir.*

Örnek 2.4 *$f=y+x^4\in\mathbb{R}[x,y]$ polinomunun Theorem 2.3'e göre Newton çokgeni köşeleri $(0,1)$ ve $(4,0)$ olan doğru parçasıdır.*

$$ebob(1,4)=1$$

olduğundan f polinomu $\mathbb{R}$ reeel sayılar cismi üzerinde mutlak indirgenemez.

Stepanov ve Schmidt bir F cismi üzerinde mutlak indirgenemeyen iki değişkenli polinomlar oluşturmak için Theorem 2.4 te verilen başka bir yöntem vermişlerdir. Bu yöntem de bir çokgen yöntemi olarak algılanabilir.

F bir cisim ve

$$f=a_0(y)+a_1(y)x+...+a_n(y)x^n\in F[x,y]$$

olsun. f nin y değşikenine göre üst Newton çokgeni $(0,e_o)$, $(1,e_1),...,$ (n,e_n) noktalarını içeren en küçük konveks bölgenin üst kenarlarının olşturduğu üst sınır çokgeni olarak tanımlanır, $e_i=derece(a_i(y))$ (y değişkenine göre $a_i(y)$ polinomunun derecesi) ve $a_i(y)=0$ ise e_i tanımlanmamak üzere. (Bir çokgenin alt veya üst kenarlarının anlamını görmek için bakınız [7, sayfa 39]).

Teorem 2.4 ***(Stepanov-Schmidt Kriteri)*** *F herhangi bir cisim ve $f\in F[x,y]$ polinomunun x değişkenine göre derecesi n olsun. Eğer f polinomunun y asalına göre üst Newton çokgeni yalnızca köşeleri $(0,m)$ ve $(n,0)$ noktaları olan doğru parçasından meydana geliyorsa ve $ebob(m,n)=1$ ise f polinomu F üzerinde mutlak indirgenemez.*

Örnek 2.5

$$f=32y^{15}+4y^2x+12yx^2+14x^{14}\in\mathbb{R}[x,y]\simeq\mathbb{R}[y][x]$$

polinomunun $y \in \mathbb{R}[y]$ *asalına göre üst Newton çokgeni köşeleri* $(0,15)$ *ve* $(14,0)$ *olan doğru parçasıdır.*

$$ebob(15,14) = 1$$

olduğundan f *polinomu* $\mathbb{R}$ *üzerinde mutlak indirgenemez.*

Çok Değişkenli Polinomların Newton Politopları Yardımıyla Mutlak İndirgenemezliği

Bu alt bölümde, yukarıda anlattığımız bütün kriterleri kapsayan ve bunların hepsinden daha kuvvetli olan çok değişkenli polinomların Newton politopları yardımıyla indirgenemzliği yöntemini, kısaca politop yöntemi, vereceğiz.

$\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi, $n \in \mathbb{Z}^+$ ve $S \subset \mathbb{R}^n$ olsun. Her $a, b \in S$ için a dan b ye çizilen $[a,b]$ kapalı doğru parçası S içerisinde kalıyorsa, S kümesi konvekstir denir. Yani

$$a + \lambda(b-a) = (1-\lambda)a + \lambda b \in S, \qquad \forall\ 0 \leq \lambda \leq 1$$

şartı sağlanıyorsa, S bir konveks kümedir.

Her $S \subset \mathbb{R}^n$ altkümesi için $\mathbb{R}^n$ de S yi kapsayan en küçük konveks küme $konv(S)$ olarak gösterilir. Doğrudan hesaplama ile, her $S \subset \mathbb{R}^n$ altkümesi için

$$konv(S) = \left\{ \sum_{i=1}^{s} \lambda_i a_i \mid a_i \in S, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{s} \lambda_i = 1 \right\}$$

olduğu görülebilir, i üzerinde tümevarım kullanabilirsiniz.

Eğer $S = \{a_1, ..., a_k\}$ bir sonlu küme ise

$$konv(S) = konv(a_1, ..., a_k)$$

olarak gösterilir. S kümesinin sonlu olduğu bu durumnda $konv(S)$, S nin *konveks kapsayanı* olarak adlandırılır.

$\mathbb{R}^n$ de sonlu sayıda noktanın konveks kapsayanı bir ***politop*** olarak adlandırılır. Bir politopun herhangi bir düzlemle kesişimi sadece bir nokta ise, politop ile düzlemin kesiştiği bu tek nokta politopun bir *köşesi* olarak adlandırılır. Başka bir deyişle, bir politopun bir noktası bu politopun başka iki noktasını birleştiren bir doğru parçası üzerinde yer almıyorsa, bu nokta politopun bir köşesidir.

n değişkenli polinomları ele alalım. $x_1, x_2, ..., x_n$ değişkenler ve F bir cisim olsun.

$$f(x_1, ..., x_n) = \sum a_{e_1 e_2 ... e_n} x_1^{e_1} x_2^{e_2} ... x_n^{e_n} \in F[x_1, x_2, ..., x_n]$$

polinomunun bir

$$(e_1, e_2, ..., e_n)$$

üs vektörü $\mathbb{Z}^n$ de bir nokta olarak düşünülebilir. f polinomunun ***Newton politopu*** P_f olarak gösterilir ve $a_{e_1 e_2 ... e_n} \neq 0$ şartını sağlayan bütün $(e_1, e_2, ..., e_n)$ noktalarının konveks kapsayanı olarak tanımlanır. Yani, f polinomuna bağlı olarak

$$C = \{(e_1, e_2, ..., e_n) \mid a_{e_1 e_2 ... e_n} \neq 0\}$$

olmak üzere,

$$P_f = konv(C)$$

olarak tanımlanır.

A ve B, $\mathbb{R}^n$ de herhangi iki küme olsun.

$$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$$

toplamına A ve B nin *Minkowski toplamı* denir.

Teorem 2.5 *(Ostrowski [5])*

$0 \neq f,\ g,\ h \in F[x_1, x_2, ..., x_n]$ *ve* $f = gh$ *ise* $P_f = P_g + P_h$ *dir.*

İspat: Bakınız [2, Lemma 2.1].

$\mathbb{Z}^n$ nin bir elemanı bir *integral nokta* olarak adlandırılır. $\mathbb{R}^n$ de bir politopun bütün köşeleri $\mathbb{Z}^n$ nin elemanı ise (yani, politopun bütün köşelerinin bütün koordinatları tamsayı ise), bu politop bir *integral politop* olarak adlandırılır. Eğer en az iki noktaya sahip A ve B integral politopları $C = A + B$ olacak şekilde varsa, C integral politopu *integral olarak ayrışabilir* denir. Aksi halde, C *integral olarak ayrışamaz* denir. Burada, $C = A + B$ integral ayrışmasında A (veya B) politopu C nin bir *integral toplamı* olarak adlandırılır.

Teorem 2.5 in direk sonucu olarak çok değişkenli polinomlar için aşağıdaki ***mutlak indirgenemezlik kriteri*** elde edilir.

Teorem 2.6 *F herhangi bir cisim $f(x_1, ..., x_n) \in F[x_1, x_2, ..., x_n]$ herhangi x_i ye bölünmeyen bir polinom olsun. Eğer f nin Newton politopu integral olarak ayrışamaz ise $f(x_1, ..., x_n)$ polinomu F üzerinde mutlak indirgenemez.*

İspat: Bakınız [2, sayfa 5].

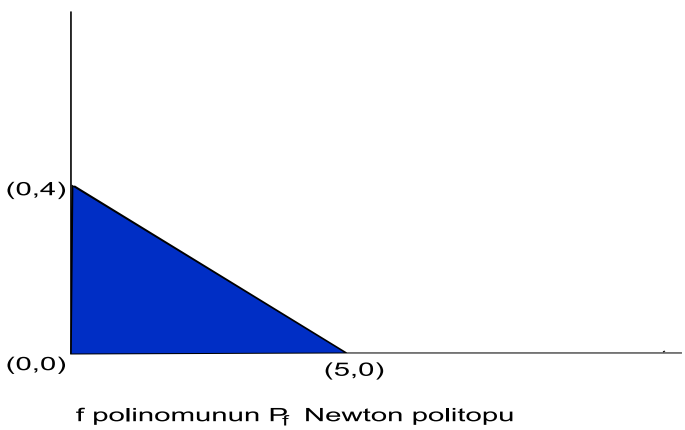
Örnek 2.6

$$f(x, y) = 1 + x + y + xy + x^5 + y^4 \in F[x, y]$$

polinomu için

$$P_f = konv((0, 0), (0, 4), (5, 0))$$

üçgenidir ve bu üçgen, $ebob(4, 5) = 1$ olmasından dolayı, integral olarak ayrışamadığından, f polinomu F üzerinde mutlak indirgenemez. Bakınız Şekil 1.



f polinomunun P_f Newton politopu

Şekil 1

Not 2.1 Bir $f(x_1, ..., x_n) \in F[x_1, x_2, ..., x_n]$ polinomu için eğer P_f integral olarak ayrışamıyor ise, Teorem 2.6 ya göre, f **polinomu politop yöntemine göre** F **üzerinde mutlak indirgenemezdir** denir.

Eğer P_f integral olarak ayrışabiliyorsa, f polinomu, verilen F cismine bağlı olarak, F üzerinde indirgenebilir veya indirgenemeyebilir. Örneğin,

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

polinomu için P_f integral olarak ayrışabilir. Çünkü,

$$P_f = konv((2, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 2))$$

$$= konv((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)) + konv((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)).$$

Fakat, f polinomu $\mathbb{Z}_3$ üzerinde indirgenemediği halde, $\mathbb{Z}_2$ üzerinde

$$f(x, y, z) = (x + y + z)^2$$

olarak çarpanlara ayrılabilir.

Politoplar hakkında daha fazla bilgi için bakınız [1] veya [11].

3

Ayrışamayan Çokgenler ve İndirgenemeyen İki değişkenli Polinomlar

Bu bölümde integral olarak ayrışamayan, çoğunlukla çokgenlerden oluşan, bazı integral politoplar ve bunlara bağlı olarak bir F cismi üzerinde mutlak indirgenemeyen bazı çok değişkenli polinomlar vereceğiz.

İki boyutlu bir politop özel olarak bir *çokgen* olarak adlandırılır.

Şimdi, [2], [3] ve [7] de bulunan bazı teoremleri ve bu teoremlere kendi bulduğumuz bazı örnekleri vereceğiz.

Teorem 3.1 *v_0 ve v_1, $\mathbb{R}^n$ de farklı iki integral nokta ise $[v_0, v_1]$ doğru parçası üzerindeki integral noktaların sayısı (v_0 ve v_1 dahil olmak üzere) $ebob(v_1 - v_0) + 1$ dir. Eğer v_2, $[v_0, v_1]$ üzerinde herhangi bir integral nokta ise*

$$\frac{||v_2 - v_0||}{||v_1 - v_0||} = \frac{ebob(v_2 - v_0)}{ebob(v_1 - v_0)}.$$

Burada $||v||$, v vektörünün Öklit uzunluğunu belirtmektedir.

İspat: Bakınız [2, Lemma 4.1] veya [7, Proposition 3.1.1].

Örnek 3.1

$$f(x, y) = x^3y^3 + x^3y^2 - x^3y^1 \in F[x, y]$$

polinomunu ele alalım. f polinomunun Newton politopu

$$P_f = conv((3,3),(3,2),(3,1)) = \{(3, y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; 1 \leq y \leq 3\}$$

doğru parçasıdır. Bu doğru parçası üzerinde

$$ebob((3,3) - (3,1)) + 1 = ebob(0,2) + 1 = 2 + 1 = 3$$

tane integral nokta bulunur.

Örnek 3.2

$$h(x, y) = x^4y^4 + x^4y^3 + x^4y^2 \in F[x, y]$$

polinomunun Newton politopu

$$P_f = conv((4,4),(4,3),(4,2) = \{(4, y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; 2 \leq y \leq 4\}$$

doğru parçasıdır. Görüldüğü gibi,

$$\frac{||(4,3) - (4,2)||}{||(4,4) - (4,2)||} = \frac{ebob((4,3) - (4,2))}{ebob((4,4) - (4,2))} = \frac{1}{2} \quad .$$

Tanım 3.1 ***(Hiperdüzlem)*** Bir $\alpha \in \mathbb{R}$ reel sayısı ve $\beta \in \mathbb{R}^n$ vektörü için,

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n : \beta \cdot x = \alpha\}$$

kümesi bir *hiperdüzlem* olarak adlandırılır;

$$\beta \cdot x = \beta_1 v_1 + ... + \beta_n v_n$$

$\beta = (\beta_1, ..., \beta_n)$ ve $v = (v_1, ..., v_n)$ vektörlerinin iç çarpımı olmak üzere.

Teorem 3.2 *Q, $\mathbb{R}^n$ de H hiperdüzlemi içinde yeralan herhangi bir integral politop ve $v \in \mathbb{R}^n$ H nin dışında yeralan bir integral nokta olsun. Bunların yanında, Q integral politopunun köşeleri $v_0, v_1, ..., v_k$ noktaları olsun, yani $Q = konv(v_0, v_1, ..., v_k)$. Bu durumda,*

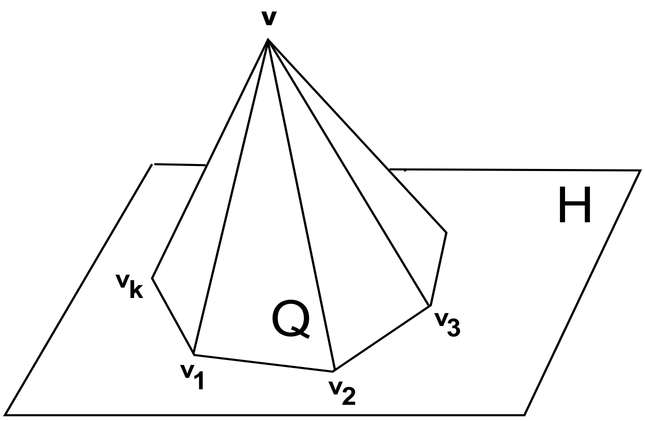
$$P = konv(v, Q)$$

politopu integral olarak ayrışamaz ancak ve ancak

$$ebob(v - v_1, v - v_2, ..., v - v_k) = 1.$$

İspat: Bakınız [2, Theorem 4.2].

Not 3.1 Teorem 3.2 de Q politopunun köşe sayısına bağlı olarak, P politopu bir doğru, üçgen veya piramittir. Q politopunun
i) bir köşesi varsa, P bir doğru parçası
i) iki köşesi varsa, P bir üçgen
iii) üç veya daha fazla köşesi varsa P
bir piramit olur.



Ayrışamayan piramit
Şekil 2

Örnek 3.3

$$f(x, y, z) = 1 + x^2 + y^3 + x^2y^3 + xyz \in F[x, y, z]$$

polinomunun Newton politopu

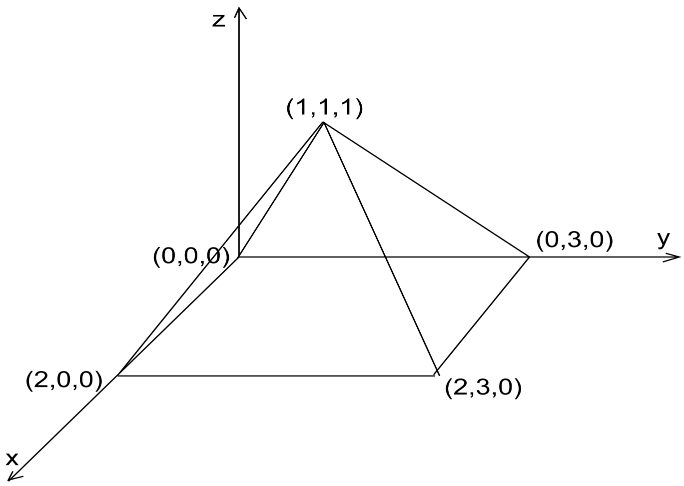
$$P_f = konv((0,0,0),(2,0,0),(0,3,0),(2,3,0)(1,1,1))$$

piramitidir. $v = (1,1,1)$ *olmak üzere,*

$$ebob(v-(0,0,0), v-(2,0,0), v-(0,3,0), v-(2,3,0)) = ebob(1,2) = 1$$

olduğundan, P_f *integral olarak ayrışamaz.*

Sonuç olarak, f *polinomu* F *üzerinde mutlak ndirgenemez. Bakınız Şekil 3.*



Şekil 3

Örnek 3.4

$$g(x,y,z) = x^2y + +xy^2 + xyz + x^2yz^3 + 17 \in F[x,y,z]$$

polinomunun Newton politopu

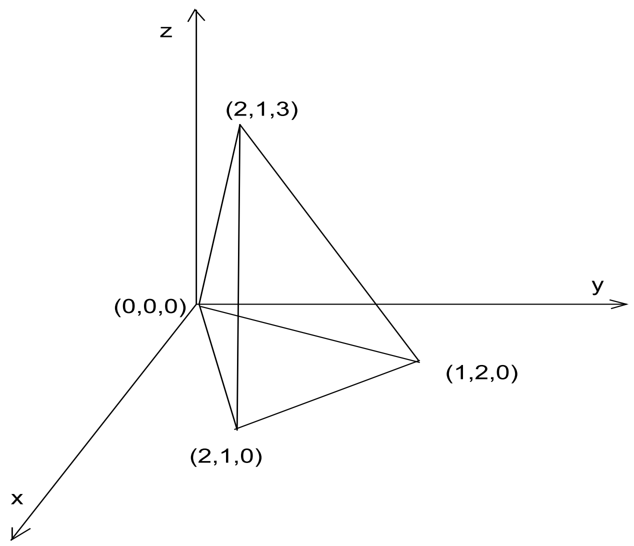
$$P_g = konv((0,0,0),(2,1,3),(1,1,1),(1,2,0),(2,1,0))$$

piramitidir. $v = (0,0,0)$ *olmak üzere,*

$$ebob(v-(2,1,3), v-(1,1,1), v-(1,2,0), v-(2,1,0)) = ebob(2,1,3) = 1$$

olduğundan, P_g *integral olarak ayrışamaz.*

Sonuç olarak, g *polinomu* F *üzerinde mutlak ndirgenemez. Bakınız Şekil 4.*



Şekil 4

Şimdi, Not 3.1 deki açıklamalara bağlı olarak Teorem 3.2 nin [2] de yeralan bazı sonuçlarını (özel durumlarını) verelim. Bu sonuçların bazılarına, [2] de verilmediği halde, ispatlar da vereceğiz.

Sonuç 3.1 v_0, $v_1 \in \mathbb{R}^n$ *herhangi farklı iki integral nokta olsun. Buna göre,* $[v_0, v_1]$ *doğru parçası integral olarak ayrışamaz ancak ve ancak* $ebob(v_0 - v_1) = 1$.

Sonuç 3.2 *İki terimli*

$$f(x_1,...,x_n) = ax_1^{e_1}....x_k^{e_k} + bx_{k+1}^{e_{k+1}}....x_n^{e_n} \in F[x_1,x_2,...x_n], \quad a,b \in F-\{0\}$$

polinomu mutlak indirgenemez $\Longleftrightarrow$ $ebob(e_1, e_2, ..., e_n) = 1$.

İspat: Bakınız [6, Theorem IX].

Örnek olarak, sıfırdan farklı $a, b \in F$ için

$$f(x, y) = x^n + y^m \in F[x, y]$$

polinomu F üzerinde mutlak indirgenemez ancak ve ancak

$$ebob((n, 0) - (0, m)) = ebob(n, m) = 1.$$

Örnek 3.5

$$f(x, y) = x^4 + y^5 \in F[x, y]$$

polinomu için

$$P_f = konv((4, 0), (0, 5))$$

doğru parçasıdır. Burada,

$$ebob((4, 0) - (0, 5)) = 1$$

olduğundan P_f integral olarak ayrışamaz. Sonuç olarak, f polinomu F üzerinde mutlak indirgenemez.

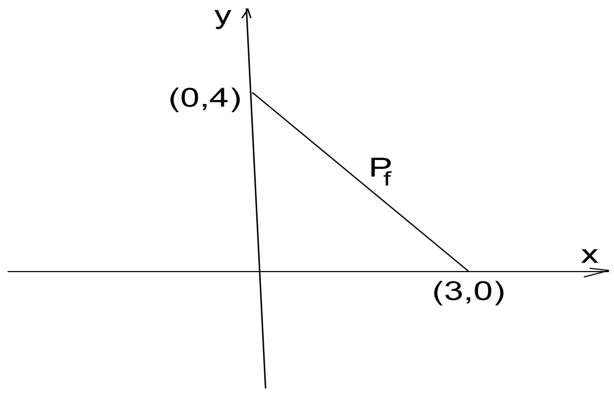
Örnek 3.6

$$f(x, y) = x^3 + y^4 \in F[x, y]$$

polinomu için

$$ebob((3, 0) - (0, 4)) = ebob(3, 4) = 1$$

olduğundan f polinomu F üzerinde mutlak indirgenemez. Bakınız Şekil 5.



Şekil 5

Örnek 3.7

$$f(x,y,z) = x^3 + yz^2 \in F[x,y,z]$$

polinomunun Newton politopu

$$P_f = konv((3,0,0),(0,1,2))$$

doğru parçasıdır. Burada,

$$ebob((3,0,0)-(0,1,2)) = ebob(1,2,3) = 1$$

olduğundan f polinomu F üzerinde mutlak indirgenemez.

Sonuç 3.3 *$v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^n$ aynı doğru üzerinde olmayan herhangi farklı üç integral nokta olsun. Bu durumda, $konv(v_1, v_2, v_3)$ üçgeni integral olarak ayrışamaz ancak ve ancak*

$$ebob(v_1 - v_2, v_1 - v_3) = 1.$$

Örnek 3.8

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + x^2y^3 \in F[x,y]$$

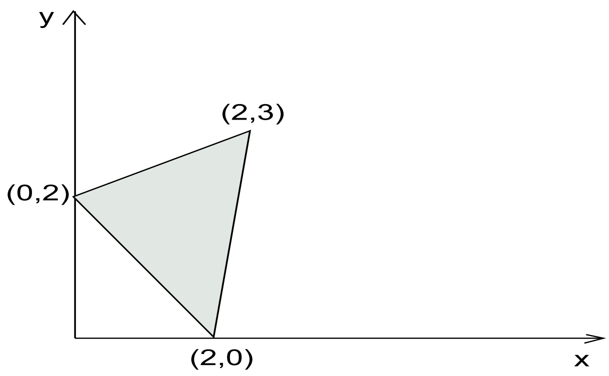
polinomunun Newton politopu

$$P_f = konv((2,0),(0,2),(2,3))$$

üçgenidir.

$$ebob((2,3)-(0,2),(2,3)-(2,0)) = ebob(2,1,0,3) = 1$$

olduğundan P_f integral olarak ayrışamaz. Sonuç olarak, f polinomu F üzerinde mutlak indirgenemez. Bakınız Şekil 6.



Şekil 6

Örnek 3.9

$$f(x,y,z) = 15 + x^2y^2 + y^2z^3 \in F[x,y,z]$$

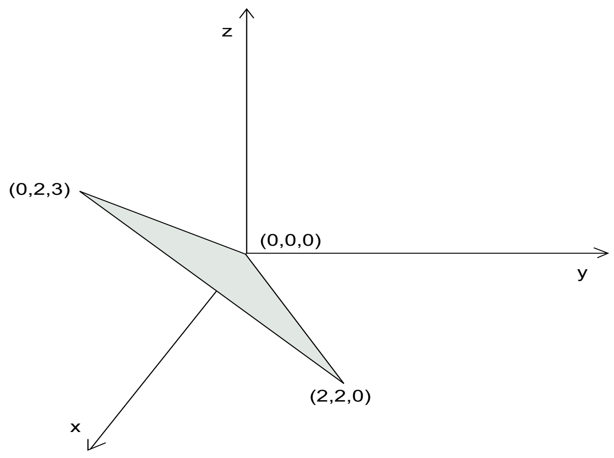
polinomunun Newton politopu

$$P_f = konv((0,0,0),(2,2,0),(0,2,3))$$

üçgenidir. Burada

$$ebob((2,2,0)-(0,0,0),(2,2,0)-(0,2,3)) = 1$$

olduğundan, P_f integral olarak ayrışamaz. Dolayısıyla, f polinomu F üzerinde mutlak indirgenemez. Bakınız Şekil 7.



Sekil 7

Sonuç 3.4 *$f(x,y) = ax^n + by^m + cx^u y^v + \sum c_{ij} x^i y^j \in F[x,y]$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ olsun. Varsayalım ki f nin Newton politopu köşeleri $(n,0), (0,m)$ ve (u,v) olan üçgen olsun. Eğer $ebob(m,n,u,v) = 1$ ise f polinomu F üzerinde mutlak indirgenemez.*

İspat: Kolayca görebiliriz ki;

$$ebob((u,v)-(n,0),(u,v)-(0,m)) = ebob(u-n,v,u,v-m) = 1 \Longleftrightarrow ebob(m,n,u,v) = 1.$$

Buna göre bu sonuç, Teorem 3.2 nin özel bir durumudur, Q politopunun üçgen olması durumu. $\square$

Örnek 3.10

$$f(x,y) = 2x^4 + 3y^2 + 7x^2y^2 + 4x^3y^6 \in F[x,y]$$

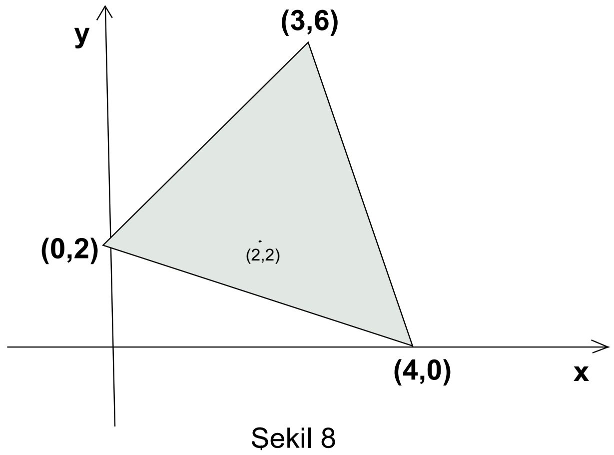
polinomunun Newton politopu

$$P_f = konv((4,0),(0,2),(3,6))$$

üçgenidir.

$$ebob((3,6)-(4,0),(3,6)-(0,2)) = ebob(-1,6,3,4) = 1$$

olduğundan P_f integral olarak ayrışamaz. Sonuç olarak, f polinomu F üzerinde mutlak indirgenemez. Bakınız Şekil 8.



Şekil 8

Sonuç 3.5 *$v_0, v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^n$ hepsi aynı doğru üzerinde olmayan herhangi farklı dört integral nokta olsun. Bu durumda,*

$$konv(v_0, v_1, v_2, v_3)$$

dörtyüzlüsü integral olarak ayrışamaz ancak ve ancak

$$ebob(v_0 - v_1, v_0 - v_2, v_0 - v_3) = 1.$$

Örnek 3.11

$$f(x, y, z) = x^2 + y^3 - z^4 + x^5y^7z^8 \in F[x, y, z]$$

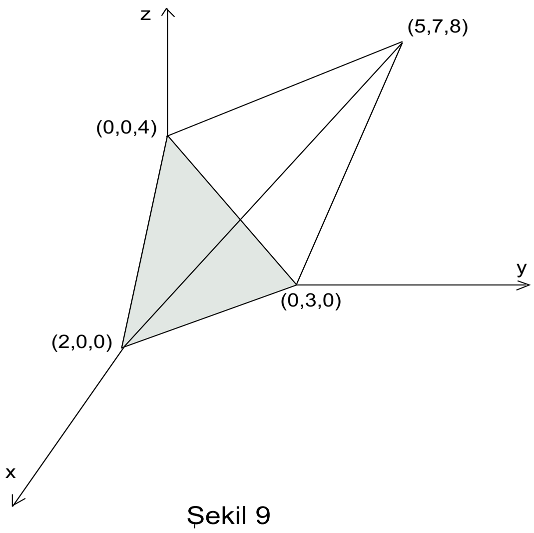
polinomunun Newton politopu

$$P_f = konv((2, 0, 0), (0, 3, 0), (0, 0, 4), (5, 7, 8))$$

piramitidir. Burada

$$ebob((5, 7, 8) - (2, 0, 0), (5, 7, 8) - (0, 3, 0), (5, 7, 8) - (0, 0, 4)) = 1$$

olduğundan P_f integral olarak ayrışamaz. Sonuç olarak, f polinomu F üzerinde mutlak indirgenemez. Bakınız Şekil 9.



Şekil 9

Sonuç 3.6 *Varsayalım ki*

$$f(x,y,z) = ax^n + by^m + cz^l + dx^u y^v z^w + \sum c_{ijk} x^i y^j z^k \in F[x,y,z],$$

$a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0,\ d \neq 0$ *ve* f *nin Newton politopu*

$$P_f = konv((n,0,0),(0,m,0),(0,0,l),(u,v,w))$$

piramiti olsun. Eğer $ebob(n,m,l,u,v,w) = 1$ *ise* f *polinomu* F *üzerinde mutlak indirgenemez.*

İspat:

$$ebob((u,v,w)-(n,0,0),(u,v,w)-(0,m,0),(u,v,w)-(0,0,\imath)) = 1$$

ancak ve ancak

$$ebob(n,m,l,u,v,w) = 1$$

olduğundan, sonuç açıktır. $\square$

Örnek 3.12

$$f(x,y,z) = x^2y + x^2y^3 + x^3y^4z^6 + 12 \in F[x,y,z]$$

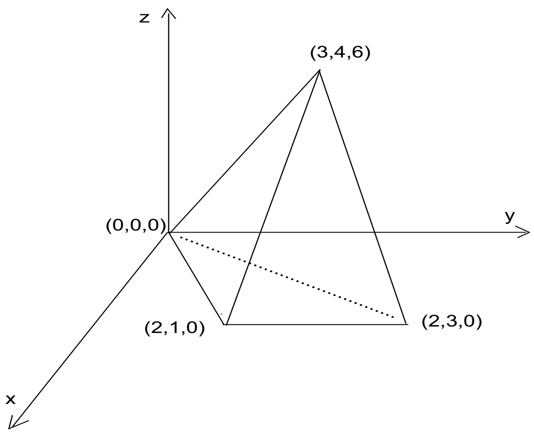
polinomunun Newton politopu

$$P_f = konv((0,0,0),(2,1,0),(2,3,0),(3,4,6))$$

piramitidir. Burada,

$$ebob((3,4,6)-(0,0,0),(3,4,6)-(2,1,0),(3,4,6)-(2,3,0)) = 1$$

olduğundan P_f *integral olarak ayrışamaz. Bundan dolayı,* f *polinomu* F *üzerinde mutlak indirgenemez. Bakınız Şekil 10.*



Şekil 10

Sonuç 3.7 *Q, $\mathbb{R}^n$ de H hiperdüzlemi içinde yeralan herhangi bir integral politop ve $v \in \mathbb{R}^n$ H nin dışında bulunan bir integral nokta olsun. Eğer Q politopunun bir $[v_i, v_{i+1}]$ kenarı için $ebob(v_i - v_{i+1}) = 1$ veya bir v_j köşesi için $ebob(v - v_j) = 1$ ise*

$$P = konv(v, Q)$$

politopu integral olarak ayrışamaz.

İspat: $Q = konv(v_1, v_2, ..., v_m)$ olsun. Q politopunun bir v_j köşesi için

$$ebob(v - v_1, ..., v - v_m) = 1 \Longleftrightarrow ebob(v_j - v, v_j - v_1, ..., v_j - v_{j-1}, v_j - v_{j+1}, v_j - v_m) = 1$$

olduğunu kolayca görebiliriz. Eğer $ebob(v - v_j) = 1$ ise yukarıdaki gerek ve yeter koşulun sol tarafı ve eğer Q politopunun bir $[v_i, v_{i+1}]$ kenarı için $ebob(v_i - v_{i+1}) = 1$ ise bu koşulun sağ tarafı sağlanır. Sonuç olarak, Teorem 3.2 ye göre P politopu integral olarak ayrışamaz. $\square$

Örnek 3.13 *Sonuç 3.7 ye göre, Şekil 11 de gösterilen*

$$P = konv((3,0,0), (6,0,0), (8,2,0), (4,6,0), (0,4,0), (0,2,0), (6,4,10))$$

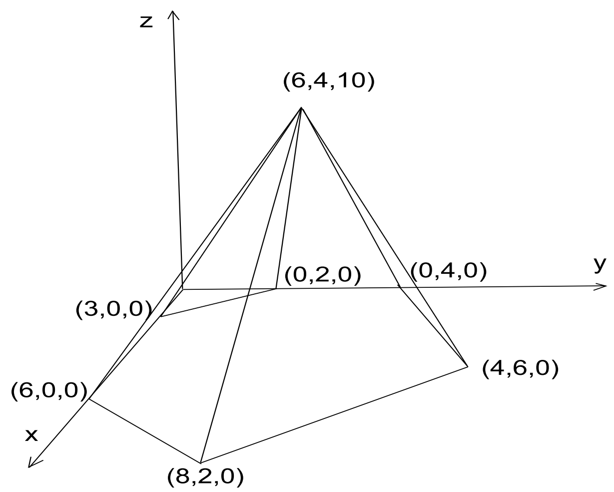
piramiti integral olarak ayrışamaz. Çünkü,

$$ebob((3,0,0) - (0,2,0)) = ebob((6,4,10) - (3,0,0)) = 1.$$

Buna göre, sıfırdan farklı her $a_i \in F$, $1 \leq i \leq 7$, ve her $(i,j,k) \in P$ için

$$f(x,y,z) = a_1x^3 + a_2x^6 + a_3x^8y^2 + a_4x^4y^6 + a_5y^4 + a_6y^2 + a_7x^6y^4z^{10} + \sum a_{ijk}x^iy^jz^k$$

polinomu F üzerinde mutlak indirgenemez.



Şekil 11

Sonuç 3.8 *$g(x) \in F[x]$ polinomunun derecesi r, $h(x_1, ..., x_n) \in F[x_1, ..., x_n]$ polinomunun toplam derecesi m ve $f(x, x_1, ..., x_n) = g(x) + h(x_1, ..., x_n)$ olsun. Eğer $ebob(r, m) = 1$ ise f polinomu F üzerinde mutlak indirgenemez.*

İspat: Bakınız [2, Corollary 4.10].

Örnek 3.14 *Sonuç 3.8'e göre aralarında asal olan her n, m pozitif tamsayısı ve $a, b, c_m \in F - \{0\}$ için*

$$f(x, y, z) = (ax + by)^n + (c_m z^m + c_{m-1} z^{m-1} + ... + c_1 z + c_0) \in F[x, y, z]$$

polinomu F üzerinde mutlak indirgenemez. Çünkü, $h(x, y) = (ax+by)^n$ polinomunun toplam derecesi m ve $ebob(m, n) = 1$.

Aslında, f nin P_f Newton politopu, $0 \leq k \leq m - 1$ olmak üzere, tabanı

$$C = konv((n, 0, 0), (0, n, 0), (0, 0, k))$$

olan bir üçgen veya doğru parçası ve bir köşesi $v = (0, 0, m)$ olan piramittir.

$$ebob(v - (n, 0, 0), v - (0, n, 0), v - (0, 0, k)) = ebob(m, n) = 1$$

olduğundan P_f integral olarak ayrışamaz.

[2] de verilen aşağıdaki teorem yardımıyla, piramit olmayan fakat, bir piramit içinde kalan integral olarak ayrışamayan sonsuz sayıda integral politoplar elde edilebilir. Bunun sonucunda da, bulunan her yeni integral politopa eşlenebilen sonsuz sayıda çok değişkenli ve herhangi bir F cismi üzerinde mutlak indirgenemeyen polinom aileleri elde edilebilir.

Teorem 3.3 *Q, $\mathbb{R}^n$ de H hiperdüzlemi içinde yeralan ve en az iki noktaya sahip ayrışamayan bir integral politop ve $v \in \mathbb{R}^n$ H nin dışında yeralan (ve integral olmak zorunda olmayan) bir nokta olsun. Eğer S, $konv(v, Q)$ politopu içinde kalan integral noktalardan oluşan herhangi bir küme ise $konv(S, Q)$ politopu integral olarak ayrışamaz.*

İspat: Bakınız [2, Theorem 4.11].

Şimdi, Teorem 3.3'e göre integral olarak ayrışamayan bir integral politop ve bu politopa eşlenebilen sonsuz elemanlı çok değişkenli mutlak indirgenemeyen bir polinom ailesi verelim. Buna benzer şekilde sonsuz sayıda örnek bulunabilir.

Örnek 3.15

$$ebob((0,0,0)-(24,0,0),(0,0,0)-(0,35,0)) = ebob(24,35) = 1$$

olduğundan

$$Q = konv((0,0,0),(24,0,0),(0,35,0)) \subset H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = 0\}$$

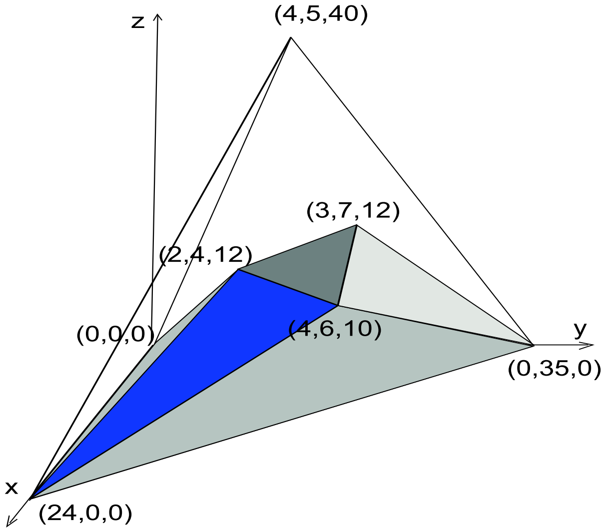
üçgeni integral olarak ayrışamaz. H düzleminin dışında yeralan $v = (4,5,40)$ noktasını alarak oluşturduğumuz

$$P = konv(v,Q)$$

piramitinin $S = \{(2,4,12),(4,6,10),(3,7,12)\}$ altkümesi için, Şekil 12 de gösterilen,

$$R = konv(S,Q)$$

politopu integral olarak ayrışamaz.



Sekil 12

Sonuç olarak, Newton politopu R olan her

$$f(x,y,z) = a_1x^{24} + a_2y^{35} + a_3x^2y^4z^{12} + a_4x^4y^6z^{10} + a_5x^3y^7z^{12} + a_6 + \sum a_{ijk}x^iy^jz^k \in F[x,y,z]$$

polinomu F üzerinde mutlak indirgenemez.

Şu ana kadar gördüğümüze göre, $\mathbb{R}^n$ de yeralan bir integral doğru parçası ve üçgenin integral ayrışması koşulu için, [2] de verilen, bir gerek ve yeter şart vardır. Dörtgenin integral ayrışmazlığı üzerinde [7] de bir teorem verilmiştir. Şimdi, genel olarak bir çokgenin integral ayrışmazlığı konusunda bilgi verelim.

Bir $v = (x,y) \in \mathbb{Z}^2$ vektörü için $ebob(x,y) = 1$ ise v bir *ilkel vektör* olarak adlandırılır.

$\mathbb{R}^2$ düzleminde yeralan ve köşeleri saatin tersi yönünde $v_1 = v_{n+1}, v_2, ..., v_n$ olarak adlandırılan bir integral

$$P = konv(v_1, v_2, ..., v_n)$$

çokgeninin kenarlarına eşlenen bir sonlu kenar dizisi oluşturabiliriz. P nin kanarlarını $1 \leq i \leq n$ için $E_i = v_{i+1} - v_i = (a_i, b_i)$ vektörleriyle gösterebiliriz. Her $1 \leq i \leq n$ için $c_i = ebob(a_i, b_i)$ yazarsak, $e_i = (a_i/c_i, b_i/c_i)$ bir ilkel vektör olur ve $E_i = c_ie_i$ olarak yazılabilir. Her E_i kenarı uç noktalarıyla birlikte c_i tane integral nokta içerir. $\{c_ie_i\}_{1\leq i\leq n}$ vektörler dizisi P nin *kenar dizisi* veya *çokgensel dizisi* olarak adlandırılır. Bu kenar dizisi, v_1 köşesinin ötelenmesiyle farketmekle birlikte, P çokgenini tek bir biçimde gösterir. Herhangi bir kenar dizisine istediğimiz sayıda sıfır vektörü ekleyebileceğimizden, P çokgeninin bir integral toplamının kenar dizisi ile P nin kenar dizisinin aynı sayıda terime sahip olduğunu varsayabiliriz. Bir çokgenin sınırı kapalı bir yol olduğundan, $\sum_{i=1}^{n} c_ie_i = (0,0)$ olur. Aşağıdaki teorem integral bir çokgenin integral olarak nasıl ayrışabileceğini göstermektedir.

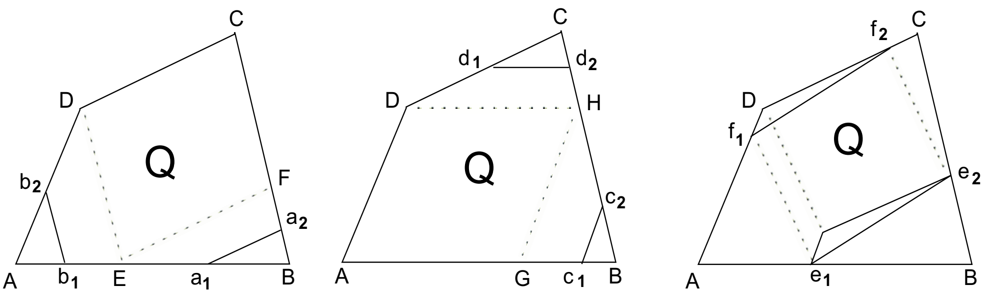
Teorem 3.4 *P herhangi bir integral çokgen ve P nin kenar dizisi $\{c_ie_i\}_{1\leq i\leq n}$ olsun. Bu durumda bir Q çokgeni P nin bir integral toplamıdır ancak ve ancak Q çokgeninin kenar dizisi, $0 \leq d_i \leq c_i$ ve $\sum_{i=1}^{n} d_ie_i = (0,0)$ olmak üzere, $\{d_ie_i\}_{1\leq i\leq n}$ şeklindedir.*

İspat: Bakınız [3, Lemma 13].

Yukarıdaki teoreme göre, parelel iki kenara sahip olan integral bir çokgen integral olarak ayrışamaz. Çünkü, örneğin $i \neq j$ için $e_i = -e_j$ ise $e_i + e_j$ olur. Dolayısıyla, bundan sonra ele alacağımız çokgenlerin paralel kenarlarının olmadığını varsayacağız. Bunun yanında, bir çokgenin nokta veya doğru parçası olan toplamını bir *basit toplam* olarak adlandıracağız.

Şimdi, [7] de verilen, dörtgenlerin integral ayrışmazlığı üzerine gerek ve yeter şartı inceleyelim.

$Q = konv(A, B, C, D)$ integral dörtgeni olsun. Q dörtgeni üzerinde $CDEF$ ve $AGHD$ parelelkenarlarını oluşturalım. E, F, G, H noktalarının integral olması gerekli değildir, bakınız Şekil 13.



Şekil 13

Q çokgeninin basit olmayan integral toplamı üçgen veya dörtgen olabilir. Q dörtgeninin integral üçgensel ve dörtgensel toplamlarını oluşturabilecek koşullar şunlardır:

(K1) $a_1 \in (B, E]$ ve $a_2 \in (B, F]$ şeklinde integral noktalar vardır öyle ki $[a_1, a_2]$ doğru parçası $[D, C]$ ye paraleldir.

(K2) $b_1 \in (A, E]$ ve $b_2 \in (A, D]$ şeklinde integral noktalar vardır öyle ki $[b_1, b_2]$ doğru parçası $[B, C]$ ye paraleldir.

(K3) $c_1 \in (B, G]$ ve $c_2 \in (B, H]$ şeklinde integral noktalar vardır öyle ki $[c_1, c_2]$ doğru parçası $[A, D]$ ye paraleldir.

(K4) $d_1 \in (C, D]$ ve $d_2 \in (C, H]$ şeklinde integral noktalar vardır öyle ki $[d_1, d_2]$ doğru parçası $[A, B]$ ye paraleldir.

(K5) $e_1 \in (A, B)$, $e_2 \in (B, C)$, $f_1 \in (D, A)$ ve $f_2 \in (C, D)$ şeklinde integral noktalar vardır öyle ki $[e_1, e_2]$ doğru parçası $[f_1, f_2]$ ye paraleldir ve $\|e_1, e_2\| = \|f_1, f_2\|$.

Teorem 3.5 *$Q = konv(A, B, C, D)$ integral dörtgeni integral olarak ayrışmaz ancak ve ancak (K1), (K2) ve (K5) koşulları gerçekleşmez.*

İspat: Bakınız [7, Theorem 3.3.1].

Aşağıdaki izleyen üç teorem [7] de verilmiştir ve Teorem 3.5' in özel durumlarıdır.

Teorem 3.6 *$m, n, k \in \mathbb{Z}^+$ ve Q, kenar dizisi $\{me_1, ne_2, ke_3, e_4\}$ şeklinde olan, bir integral dörtgen olsun. Q dörtgeni integral olarak ayrışamaz ancak ve ancak*

$$c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3 \neq 0, \quad 1 \leq c_1 \leq m, \quad 1 \leq c_2 \leq n, \quad 1 \leq c_3 \leq k \quad \textit{için}$$

ve

$$d_1e_1+d_2e_2+d_3e_3+e_4 \neq 0, \quad 0 \leq d_1 \leq m-1, \quad 0 \leq d_2 \leq n-1, \quad 0 \leq d_3 \leq k-1 \quad \textit{için.}$$

Teorem 3.7 *$m, n \in \mathbb{Z}^+$ ve Q integral dörtgeninin kenar dizisi $\{me_1, ne_2, e_3, e_4\}$ şeklinde olsun. $1 \leq i \leq m-1$, $1 \leq j \leq n-1$ koşullarını sağlayan (i, j) integral noktaları için*

$$ie_1 + je_2 + e_3 \neq 0$$

ancak ve ancak Q integral olarak ayrışamaz.

Teorem 3.8 *$m \in \mathbb{Z}^+$ ve Q integral dörtgeninin kenar dizisi $\{me_1, me_2, e_3, e_4\}$ şeklinde olsun. (i, i) şeklindeki noktalar hariç, $1 \leq i,\ j \leq m-1$ koşullarını sağlayan (i, j) integral noktaları için*

$$ie_1 + je_2 + e_3 \neq 0$$

ancak ve ancak Q integral olarak ayrışamaz.

Şimdi, Teorem 3.5 ve Teorem 3.4 için bazı örnekler verelim.

Örnek 3.16

$$f(x, y) = x^4 + x^{14}y^4 + x^4y^{20} + y^3 \in F[x, y]$$

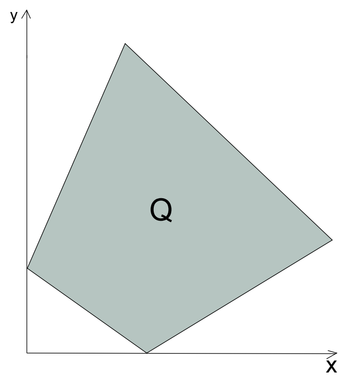
polinomunun Newton politopu

$$Q = konv((4,0),(14,4),(4,20),(0,3))$$

dörtgenidir, bakınız Şekil 14. Q çokgeni

$$\{2(5,2), 2(-5,8), (-4,-17), (4,-3)\}$$

kenar dizisine sahip olduğundan, Teorem 3.8 gereğince, Q politopu integral olarak ayrışamaz. Sonuç olarak, f polinomu F üzerinde mutlak indirgenemez.



Şekil 14

Örnek 3.17

$$f(x,y) = x^8y^6 + y^4 + x^6 + xy^5 + x^2 \in F[x,y]$$

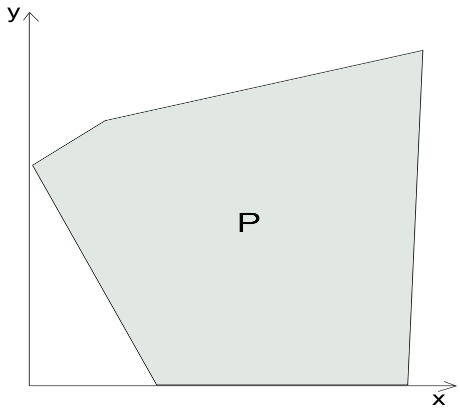
polinomunun Newton politopu

$$P = konv((8,6),(0,4),(6,0),(1,5),(2,0))$$

beşgenidir. P beşgeni

$$\{2(-4,-1), 2(3,-2), 5(-1,1), (2,-5), 6(1,1)\}$$

kenar dizisine sahip ve integral olarak ayrışamaz, bakınız Şekil 15.



Sekil 15

Örnek 3.18

$$f(x,y) = x^{12}y^6 + y^6 + x^2 + x^{10} + y^{12} + x^5y^{13} \in F[x,y]$$

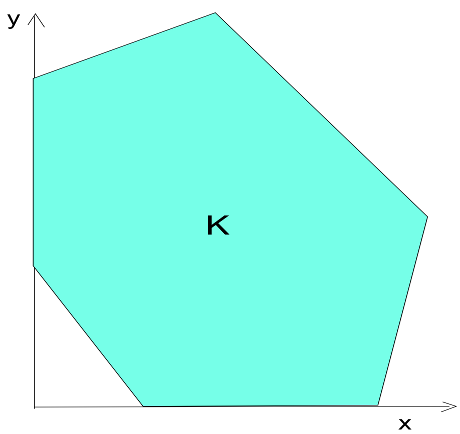
polinomunun Newton politopu

$$K = konv((12,6),(0,6),(2,0),(10,0),(0,12),(5,13))$$

altıgenidir. K altıgeni

$$\{12(-1,0), 2(1,-3), 8(1,0), 2(-5,6), (5,1), 7(1,-1)\}$$

kenar dizisi sahiptir ve integral olarak ayrışamaz, bakınız Şekil 16.



Sekil 16

Örnek 3.19

$$f(x,y) = x^{12}y^{16} + y^6 + x^2 + x^{10} + y^{12} + x^{20}y^{14} + x^{22}y \in F[x,y]$$

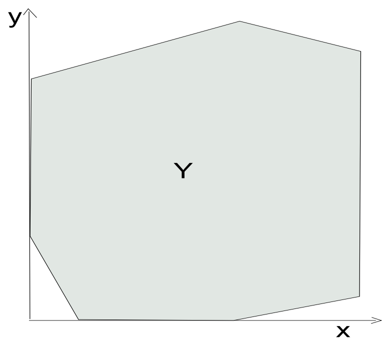
polinomunun Newton politopu

$$Y = konv((12,16),(0,6),(2,0),(10,0),(0,12),(20,14)),(22,1))$$

yedigenidir ve Y*,*

$$\{2(-6,5), 2(1,-3), 8(1,0), 2(-5,6), 2(10,1), (2,-13), 5(-2,3)\}$$

kenar dizisine sahip olduğundan, integral olarak ayrışamaz, bakınız Şekil 17.



Sekil 17

Örnek 3.20

$$f(x,y) = x^{12}y^6 + y^6 + x^2 + x^{10} + y^{12} + x^{20}y^{14} + x^{22}y^2 + x^3y^{16} \in F[x,y]$$

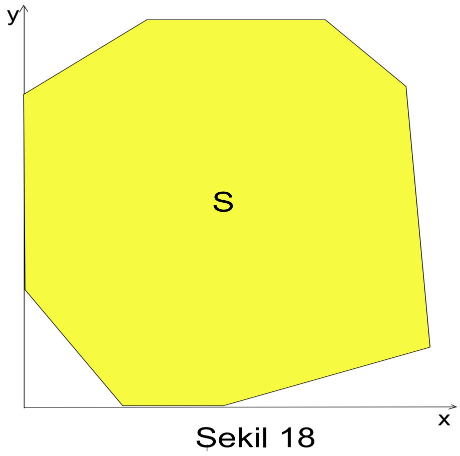
polinomunun Newton politopu

$$S = konv((12,6),(0,6),(2,0),(10,0),(0,12),(20,14)),(22,2),(3,16)$$

sekizgenidir. S *çokgeni*

$$\{12(-1,0), 2(1,-3), 8(1,0), 2(-5,6), 2(10,1), 2(1,-6), (-19,14), (9,-10)\}$$

kenar dizisine sahiptir ve S, integral olarak ayrışamaz. Bakınız Şekil 18.



Şekil 18

Örnek 3.21

$$f(x,y) = x^{12}y^6 + y^6 + x^2 + x^{10} + y^{12} + x^{20}y^{14} + x^{22}y^2 + x^{21}y + x^3y^{16} \in F[x,y]$$

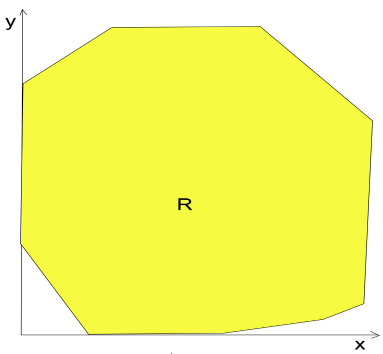
polinomunun Newton politopu

$$R = konv((12,6),(0,6),(2,0),(10,0),(0,12),(20,14)),(22,2),(21,1),(3,16)$$

dokuzgenidir. R nin kenar dizisi

$$\{12(-1,0),2(1,-3),8(1,0),2(-5,6),2(10,1),2(1,-6),1(-1,-1),(-6,5),(9,-10)\}$$

kümesidir ve R integral olarak ayrışamaz. Bakınız Şekil 19.



Sekil 19

Örnek 3.22

$$f(x,y) = x^{12}y^{16} + y^6 + x^2 + x^2y^{15} + y^{10} + x^{20}y^{14} + x^{22}y^2 + x^{21}y + x^3y^{16} \in F[x,y]$$

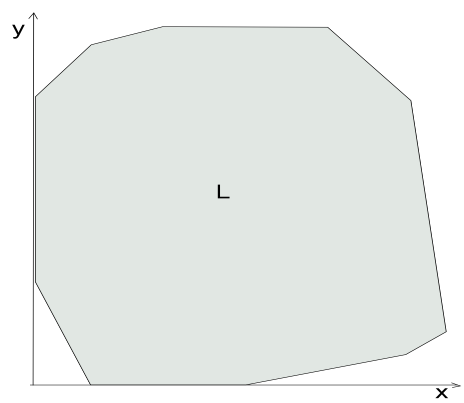
polinomunun Newton politopu

$$L = konv((12,6),(0,6),(2,0),(2,15),(0,10),(0,12),(20,14)),(22,2),(21,1),(3,16)$$

ongenidir. L ongeninin kenar dizisi

$$\{2(-6,-5),2(1,-3),15(0,1),(-2,-5),2(0,1),2(10,1),2(1,-6),1(-1,1),3(-6,5),9(1,0)\}$$

kümesidir ve L integral olarak ayrışamaz. Bakınız Şekil 20.



Şekil 20

4

Ayrışamayan Politoplar ve İndirgenemeyen Çok değişkenli Polinomlar

Bu bölümde, $n \geq 3$ için, $\mathbb{R}^n$ içerisinde yer alan bazı integral olarak ayrışamayan integral politoplar vereceğiz. Sonra da, bu politoplara bağlı olarak, herhangi bir F cismi üzerinde mutlak indirgenemeyen bazı çok değişkenli polinom aileleri vereceğiz.

P ve Q, $\mathbb{R}^n$ de yeralan politoplar olsun. Eğer bir $r \in \mathbb{R}$ noktası ve $v \in \mathbb{R}^n$ vektörü

$$Q = rP + v = \{rs + v \ : \ s \in P\}$$

olacak şekilde varsa, Q politopu P ye hometetiktir denir.

Eğer bir $Q \subset \mathbb{R}^n$ politopunun her $Q = A + B$ olarak ayrışmasında A veya B politopu Q politopuna homotetik ise, Q politopu homotetik olarak ayrışamaz denir. Bur ayrışmada, örneğin A politopu Q politopuna homotetik ise bazı $0 \leq r \leq 1$ ve $v \in \mathbb{R}^n$ için

$$Q = A + B = rQ + v + (1 - r)Q + (-v)$$

olur. Aksi halde, Q homotetik olarak ayrışır denir.

Politopların integral ve homotetik ayrışmazlığı arasında direk bir ilişki yoktur. Bir politop sadece bu iki özellikten birini, veya herikisini sağlayabilir, ya da hiçbirini sağlamayabilir. Örneğin, düzlemde sadece doğru parçaları ve üçgenler homotetik olarak ayrışamaz. Sonsuz sayıda integral olarak ayrışamayan integral doğru parçası, integral üçgen ve dört ya da daha fazla kenara sahip olan sonsuz sayıda integral çokgen vardır. Bir integral dörtgen hem homotetik olarak hem de integral olarak ayrışabilir.

Teorem 4.1 *P, $\mathbb{R}^n$ de köşeleri $v_1, v_2, ..., v_m$ olan integral politop olsun. Eğer P homotetik olarak ayrışamaz ve*

$$ebob(v_1 - v_2, ..., v_1 - v_m) = 1$$

ise, P integral olarak ayrışamaz.

İspat: Bakınız [3, Proposition 12].

Teorem 4.2 *$Q \subset \mathbb{R}^n$ köşeleri v_1, v_2, ..., v_m olan homotetik olarak ayrışamayan bir integral politop olsun. Bu durumda, Q integral olarak ayrışamaz ancak ve ancak*

$$ebob(v_1 - v_2, ..., v_1 - v_m) = 1.$$

İspat: Bakınız [7, Lemma 4.1.2].

P bir politop olsun. P nin bir F_0, F_1, ...,F_m yüzleri dizisi

$$dim(F_i \cap F_{i+1}) \geq 1 \quad \forall\ 0 \leq i \leq m-1$$

özelliğini sağlıyor ise, bu dizi bir *kuvvetli zincir* veya *kuvvetli yüzler zinciri* olarak adlandırılır. P politopunun u ve v köşeleri için $u \in F_0$ ve $v \in F_m$ ise böyle bir kuvvetli zincir bu köşeleri birleştiriyor denir. Burada, $dim(P)$, P politopunun boyutunu göstermektedir.

Teorem 4.3 *$\mathbb{R}^n$ de herhangi iki köşesi bir homotetik olarak ayrışamayan kuvvetli yüzler zinciri ile birleştirilebilen bir integral*

$$P = konv(v_1, v_2, ..., v_m)$$

politopu integral olarak ayrışamaz ancak ve ancak

$$ebob(v_1 - v_2, ..., v_1 - v_m) = 1.$$

İspat: Bakınız [7, Theorem 4.1.3].

Bir integral üçgen homotetik olarak ayrışamadığından, Teorem 4.3'ün aşağıdaki sonuu elde edilir.

Sonuç 4.1 *Bütün 2 boyutlu yüzleri üçgen olan*

$$P = konv(v_1, v_2, ..., v_m) \subset \mathbb{R}^n$$

politopu integral olarak ayrışamaz ancak ve ancak

$$ebob(v_1 - v_2, ..., v_1 - v_m) = 1.$$

İspat: Bakınız [7, Corollary 4.1.6].

Şimdi, Teorem 4.3 için bazı örnekler verelim.

Örnek 4.1 *$k \geq 3$ herhangi bir tamsayı ve $C = conv(v_1, ..., v_k) \subset \mathbb{R}^n$ integral politopu H hiperdüzlemi içerisinde yer alsın. Bu hiperdüzlemin iki yanında u, v integral noktaları alalım. Meydana gelen*

$$P = konv(C, v)$$

politopu (piramiti) integral olarak ayrışamaz ancak ve ancak

$$ebob(v - v_1, ..., v - v_k) = 1.$$

Bunun yaında, benzer olarak

$$Q = konv(C, u, v)$$

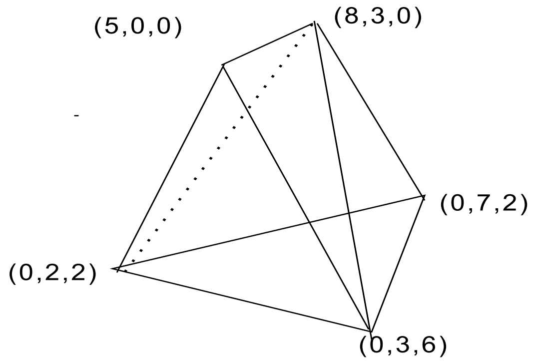
politopu (iki katlı piramiti) integral olarak ayrışamaz ancak ve ancak

$$ebob(v - v_1, ..., v - v_k, v - u) = 1.$$

Örnek 4.2

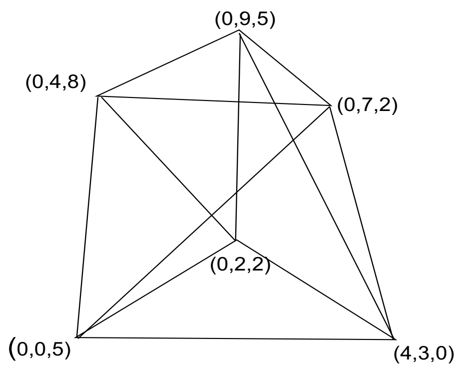
$$f(x,y,z) = y^2z^2 + y^3z^6 + y^7z^2 + x^8y^3 + x^5 \in F[x,y,z]$$

polinomu F cismi üzerinde mutlak olarak indirgenemez. Çünkü, bu polinomun Newton politopu integral olarak ayrışamaz. Bakınız Şekil 21.



Şekil 21

Örnek 4.3 $f(x,y,z) = z^5 + y^4z^8 + y^9z^5 + y^2z^2 + y^7z^2 + x^4y^3 \in F[x,y,z]$ *polinomu F cismi üzerinde mutlak olarak indirgenemez. Çünkü, bu polinomun Newton politopu integral olarak ayrışamaz. Bakınız Şekil 22.*

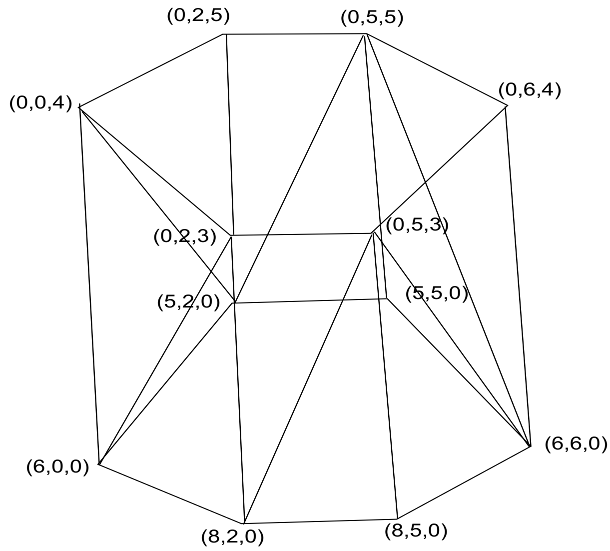


Şekil 22

Örnek 4.4 *$F[x,y,z]$ halkasında verilen*

$$f(x,y,z) = z^4 + y^2z^5 + y^5z^5 + y^6z^4 + y^2z^3 + y^5z^3 + x^5y^2 + x^5y^5 + x^6 + x^8y^2 + x^8y^5 + x^6y^6$$

polinomu F üzerinde mutlak olarak indirgenemez. Çünkü, f nin Newton politopu integral olarak ayrışamaz. Bakınız Şekil 23.

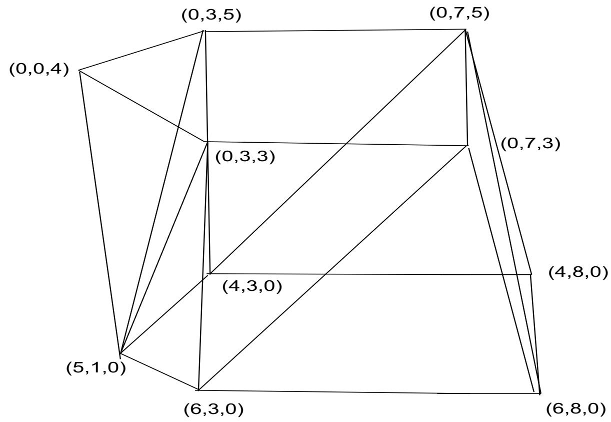


Şekil 23

Örnek 4.5

$$f(x,y,z) = z^4 + y^3z^5 + y^7z^5 + y^3z^3 + y^7z^3 + x^4y^3 + x^4y^8 + x^5y + x^6y^3 + x^6y^8 \in F[x,y,z]$$

polinomu F üzerinde mutlak olarak indirgenemez. Çünkü, bu polinomun Newton politopu integral olarak ayrışamaz. Bakınız Şekil 24.



Şekil 24

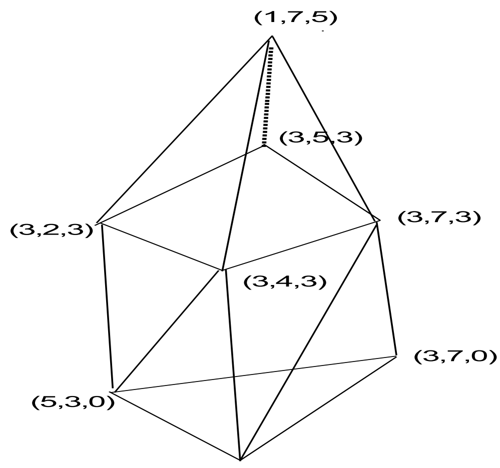
Örnek 4.6

$$f(x,y,z) = xy^7z^5 + x^3y^2z^3 + x^5y^3 + x^6y^5 + x^3y^7 + x^3y^7z^3 + x^3y^4z^3 + x^3y^5z^3 \in F[x,y,z]$$

polinomu F üzerinde mutlak olarak indirgenemez. Çünkü, f polinomunun Şekil 25 te gösterilen P_f Newton politopunun bütün yüzleri üçgen ve

$$ebob((1,7,5) - (3,2,3)) = 1.$$

Sonuç 4.1 gereğince, P politopu integral olarak ayrışamaz.



Şekil 25

Teorem 4.4 *A, B politoplar öyle ki* $C = konv(A \bigcup B) = konv(v_1, ..., v_m)$ *bir integral politop ve* $dim(C) = dim(A) + dim(B) + 1$ *olsun. Bu durumda, C politopu integral olarak ayrışamaz ancak ve ancak*

$$ebob(v_1 - v_2, v_1 - v_3...., v_1 - v_m) = 1.$$

İspat: Bakınız [7, Theorem 4.1.15]

Teorem 4.4 yardımıyla, bir integral piramitin (özel olarak, bir doğru parçası ve üçgenin) integral ayrışmazlığı başka bir açıdan tekrar görülür.

Örnek 4.7

$$f(x, y, z) = x^5y^2 + x^5y^4 + z^3 \in F[x, y, z]$$

polinomu F üzerinde mutlak olarak indirgenemez. Çünkü, bu polinomun Newton politopu

$$C = konv((5, 2, 0), (5, 4, 0), (0, 0, 3))$$

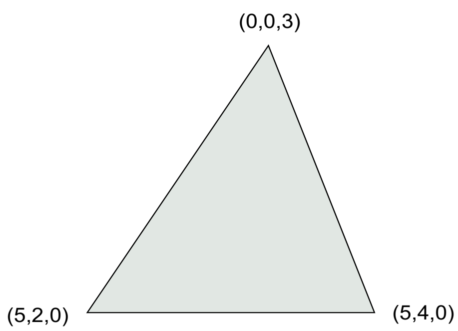
üçgenidir. $A = konv((0, 0, 3), (5, 2, 0))$ *doğru parçası ve* $B = konv((5, 4, 0))$ *noktası olmak üzere,* $C = konv(A \bigcup B)$, $dim(C) = 2$, $dim(A) = 1$ *ve* $dim(B) = 0$ *dır.*

$$2 = dim(C) = dim(A) + dim(B) + 1 = 1 + 0 + 1$$

ve

$$ebob((0, 0, 3) - (5, 4, 0)) = 1$$

olduğundan, P integral olarak ayrışamaz. Bakınız Şekil 26.



Şekil 26

Örnek 4.8

$$f(x,y,z) = x^4y^3 + x^6y^3 + x^6y^7 + x^4y^7 + z^5 \in F[x,y,z]$$

polinomu F üzerinde mutlak olarak indirgenemez. Çünkü, bu polinomun Newton politopu

$$C = konv((4,3,0),(4,7,0),(6,7,0),(6,3,0),(0,0,5))$$

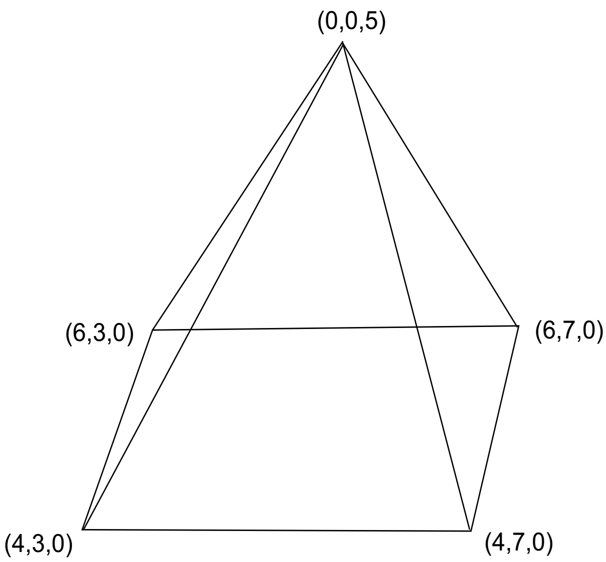
piramitidir. $A = konv((4,3,0),(4,7,0),(6,7,0),(6,3,0))$ dörtgeni ve $B = konv((0,0,5))$ noktası olmak üzere, $C = konv(A\bigcup B)$, $dim(C) = 3$, $dim(A) = 2$ ve $dim(B) = 0$ dır.

$$3 = dim(C) = dim(A) + dim(B) + 1 = 2 + 0 + 1$$

ve

$$ebob((0,0,5) - (6,3,0)) = 1$$

olduğundan, P integral olarak ayrışamaz. Bakınız Şekil 27.



Şekil 27

Örnek 4.9

$$f = x^3y^2 + x^5y + x^6y^2 + x^6y^7 + x^3y^7 + z^5 \in F[x, y, z]$$

polinomunun Newton politopu

$$C = konv((3, 2, 0), (5, 1, 0), (6, 2, 0), (6, 7, 0), (3, 7, 0), (0, 0, 5))$$

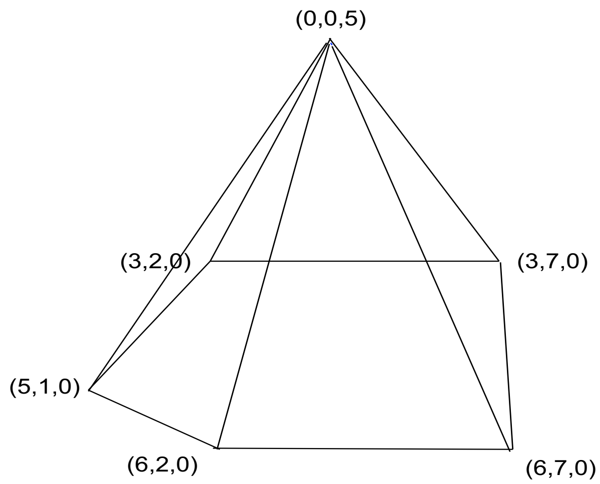
piramitidir. $A = konv((3, 2, 0), (5, 1, 0), (6, 2, 0), (6, 7, 0), (3, 7, 0))$ *beşgeni ve* $B = konv((0, 0, 5))$ *noktası olmak üzere,* $C = konv(A \bigcup B)$, $dim(C) = 3$, $dim(A) = 2$ *ve* $dim(B) = 0$ *dır.*

$$3 = dim(C) = dim(A) + dim(B) + 1 = 2 + 0 + 1$$

ve

$$ebob((3, 2, 0) - (5, 1, 0)) = 1$$

olduğundan, C *integral olarak ayrışamaz. Sonuç olarak,* f *polinomu* F *üzerinde mutlak olarak indirgenemez. Bakınız Şekil 28.*



Şekil 28

Örnek 4.10

$$f(x,y,z) = x^3y^2 + x^5y + x^6y^2 + x^6y^5 + x^5y^7 + x^3y^5 + z^4 \in F[x,y,z]$$

polinomunun Newton politopu

$$C = konv((3,2,0),(5,1,0),(6,2,0),(6,5,0),(5,7,0),(3,5,0),(0,0,4))$$

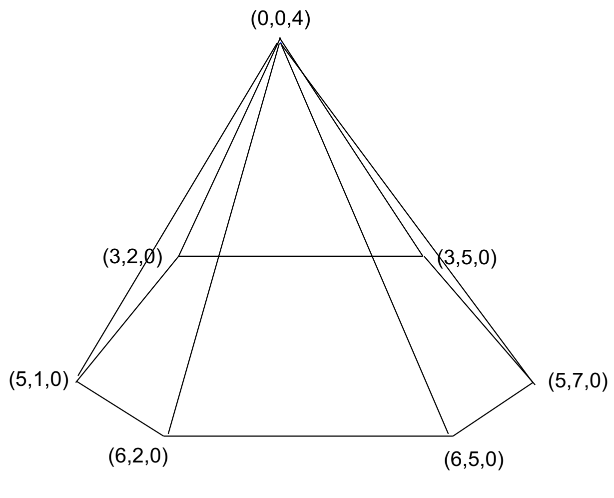
piramitidir. $A = konv((3,2,0),(5,1,0),(6,2,0),(6,5,0),(5,7,0),(3,5,0))$ *altıgeni ve* $B = konv((0,0,4))$ *noktası olmak üzere,* $C = konv(A \bigcup B)$, $dim(C) = 3$, $dim(A) = 2$ *ve* $dim(B) = 0$ *dır.*

$$3 = dim(C) = dim(A) + dim(B) + 1 = 2 + 0 + 1$$

ve

$$ebob((6,5,0) - (5,7,0)) = 1$$

olduğundan, C *integral olarak ayrışamaz. Sonuç olarak,* f *polinomu* F *üzerinde mutlak olarak indirgenemez. Bakınız Şekil 29.*



Şekil 29

5

Ayrışamayan Politopların Ters Görüntüleri

Bu bölümde, integral lineer fonksiyonlar yardımıyla, bilinen bir integral olarak ayrışamayan politop yardımıyla başka bir integral olarak ayrışamayan politopun bulunabilmesi üzerinde duracağız.

$\mathbb{R}^n$ deki integral noktaları $\mathbb{R}^m$ deki integral noktalara eşleyen lineer bir

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

fonksiyonu bir *integral lineer fonksiyon* olarak adlandırılır. Bir politopun bir integral lineer fonksiyon altındaki görüntüsü de bir integral politoptur. Bu gerçek, doğrudan hesaplamayla kolayca görülebilir.

Teorem 5.1 *$P \subset \mathbb{R}^n$ bir integral politop ve $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ bir integral lineer fonksiyon olsun. Eğer $\pi(P)$ politopu integral olarak ayrışamaz ve $\pi(P)$ nin her köşesinin P de tek bir ters görüntüsü var ise, P integral olarak ayrışamaz.*

İspat: Bakınız [3, Lemma 9].

Sonuç 5.1 *$P \subset \mathbb{R}^n$ bir integral politop ve $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, P nin köşeleri kümesi üzerinde $1-1$ olan bir integral lineer fonksiyon olsun. Eğer $\pi(P)$ integral olarak ayrışamaz ise, P integral olarak ayrışamaz.*

İspat: $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonu P nin köşeleri kümesi üzerinde bire-bir ise $\pi(P)$ nin her köşesinin P de tek bir ters görüntüsü vardır. Buna göre, Teorem 5.1'e göre, P integral olarak ayrışamaz. Bakınız [3, Corollary 10]. □

Sonuç 5.2 *Q, $\mathbb{R}^m$ de integral olarak ayrışamayan bir integral politop ve $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ bir integral lineer fonksiyon olsun. Eğer $S \subset \pi^{-1}(Q)$ altkümesi, integral noktalardan oluşan ve Q politopunun her v köşesinin sadece bir tane $\pi^{-1}(v)$ ters görüntüsünü içeren bir küme ise, $konv(S)$ politopu $\mathbb{R}^n$ de integral olarak ayrışamaz.*

İspat: $\pi|_S : S \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonu $konv(S)$ politopunun köşeleri kümesi üzerinde $1-1$ ve $\pi(konv(S)) = Q$ olduğundan, Sonuç 5.1'in direk sonucu olarak, $konv(S)$ integral olarak ayrışamaz. Bakınız [3, Theorem 11]. □

Örnek 5.1

$$T(x, y) = (2x, 3y)$$

şeklinde tanımlanan

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

fonksiyonu integral ve lineerdir. Teorem 5.1'e göre,

$$P = konv((1, 1), (3, 4))$$

politopu integral olarak ayrışamaz. Çünkü,

$$ebob((2, 3) - (6, 12)) = 1$$

olduğundan

$$T(P) = konv((2, 3), (6, 12))$$

politopu integral olarak ayrışamaz ve $(2, 3), (6, 12)$ *noktalarının ters görüntüleri sırasıyla sadece* $(1, 1)$ *ve* $(3, 4)$ *noktalarıdır. P politopu için,*

$$ebob((1, 1) - (3, 4)) = 1$$

olduğuna dikkat ediniz.

Benzer olarak

$$A = konv((1,1),(9,6),(10,10))$$

üçgeni için,

$$T(A) = konv((2,3),(18,18),(20,30))$$

ve

$$ebob((2,3)-(18,18),(2,3)-(20,30)) = 1$$

olduğundan, $T(A)$ integral olarak ayrışamaz. Sonuç olarak, A üçgeni integral olarak ayrışamaz. A politopu için,

$$ebob((1,1)-(9,6),(1,1)-(10,10)) = 1$$

olduğuna dikkat ediniz.

Örnek 5.2

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

integral lineer fonksiyonu

$$T(x,y) = (x,y,x)$$

şeklinde verilsin. $\mathbb{R}^3$ te aldığımız

$$(4,4,4),(6,6,6),(8,10,8),(2,13,2)$$

noktalarının ters görüntüleri, $\mathbb{R}^2$ içerisinde sırasıyla

$$(4,4),(6,6),(8,10),(2,13)$$

noktalarıdır.

$$ebob((4,4,4)-(2,13,2)) = 1$$

olduğundan, Teorem 3.3 gereğince,

$$Q = konv((4,4,4),(6,6,6),(8,10,8),(2,13,2))$$

dörtgeni integral olarak ayrışamaz. Sonuç olarak, Teorem 5.1'e göre,

$$P = T^{-1}(Q) = konv((4,4),(6,6),(8,10),(2,13))$$

dörtgeni de integral olarak ayrışamaz. P *dörtgeni için,*

$$ebob((4,4)-(2,13)) = 1$$

olduğuna dikkat ediniz.

KAYNAKLAR

[1] Ewald G. *Combinatorial Convexity and Algebraic Geometry*, GTM 168, Springer 1996.

[2] Gao S. *Absolute irreducibility of polynomials via Newton polytopes*, Journal of Algebra **237** (2001), no.2, 501-520.

[3] Gao S., Lauder A.G.B. *Decomposition of Polytopes and Polynomials*, Discrete and Computational Geometry **26** (2001), no. 1, 89-104.

[4] Gao S. and Rodrigues V. M. *Irreducibility of polynomials modulo p via Newton polytopes*, Journal of Number Theory, **101** (2003), 32-47.

[5] Ostrowski A.M. *On multiplication and factorization of polynomials I*, Lexicographic orderings and extreme aggregates of terms, Aequationes Math. **13** (1975), 201-228

[6] Ostrowski A. M. *On multiplication and factorization of polynomials II*, Irreducibility discussion, Aequationes Math. **14** (1976), 1-32.

[7] Koyuncu F. A geometric approach to absolute irreducibility of polynomials, PhD thesis, Middle East Technical University, 2004.

[8] Shephard G. C. *Decomposable Convex Polyhedra*, Mathematika, **10** (1963), 89-95.

[9] Schneider R. *Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, **44**, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[10] Stichtenoth H. *Algebraic Function Fields and Codes*, Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[11] Ziegler G. M. *Lectures on Polytopes*, GTM 152, Springer-Verlag, 1995.

ÖZGEÇMİŞ

1981 yılında Muğla'nın Ortaca ilçesinde doğdu. İlk ve orta öğrenimini Muğla'da tamamladı. 1999 yılında Osmangazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde yüksek öğretimine başladı. 2002 yılında Anadolu Üniversitesi Eğitim Bilimleri bölümünde Tezsiz Yüksek Lisansını tamamladı. 2003 yılında Muğla Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümünde Yüksek lisans çalışmalarına başladı. Evli olan Emine ÖZALP İngilizce bilmekte ve Özel Özalp İlköğretim Okulu'nda Matematik Öğretmenliği yapmaktadır.