

EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
(YÜKSEK LİSANS TEZİ)

ZAMAN SKALASINDA YÜKSEK MERTEBELİ
SINIR DEĞER PROBLEMLERİ

Erbil ÇETİN

Matematik Anabilim Dalı

Bilim Dalı Kodu: 403. 03. 01

Tezin Sunulduğu Tarih : 09. 01. 2007

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Serap Gülşan TOPAL

Bornova-İZMİR

III

Erbil ÇETİN tarafından YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak sunulan “**Zaman Skalasında Yüksek Mertebeli Sınır Değer Problemleri**” başlıklı bu çalışma E.Ü. Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği ile E.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim ve Öğretim Yönergesi'nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş ve 09/01/2007 tarihinde yapılan tez savunma sınavında aday oybirliği/oyçokluğu ile başarılı bulunmuştur.

Jüri Üyeleri:

İmza

Jüri Başkan :Yrd. Doç. Dr. Serap Gülşan TOPAL

Raportör Üye: Prof. Dr. Harun TUNCAY

Üye : Doç. Dr. Ünal UFUKTEPE

ÖZET

ZAMAN SKALASINDA YÜKSEK MERTEBELİ SINIR DEĞER PROBLEMLERİ

ÇETİN, Erbil

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Bölümü

Tez Yöneticisi: Yrd. Doç. Dr. Serap Gülşan TOPAL

Ocak 2007, 68 sayfa

Giriş bölümü dışında bu tez esas olarak iki bölümden oluşmaktadır.

İkinci bölümde, zaman skalası ile ilgili temel kavramlar ve bazı teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, zaman skalası üzerinde tanımlı yüksek mertebeden Lidstone sınır değer problemi (LSDP) ele alınmıştır. İlk olarak, Green's fonksiyonunun özellikleri incelenerek, Schauder sabit nokta teoremi yardımıyla çözümlerin varlığı ispatlanmıştır. İkinci olarak, bu problemin çözümünün varlığı ile ilgili sonuçlar monoton metod ile verilmiştir. Son olarak, Krasnosel'skii sabit nokta teoremi yardımıyla pozitif çözümlerin varlığı ispatlanmıştır.

Anahtar sözcükler: Zaman skalası, Lidstone sınır değer problemi, pozitif çözümler, alt ve üst çözümler.

ABSTRACT

**HIGHER ORDER BOUNDARY VALUE PROBLEMS
ON TIME SCALES**

ÇETİN, Erbil

MSc. Thesis, Department of Mathematics

Supervisor: Yrd. Doç. Dr. Serap Gülşan TOPAL

January 2007, 68 pages

Except the introduction, this thesis consists of two main sections.

In the second section, some basic rules and theorems of calculus have been given on time scales.

In the third section, higher order Lidstone boundary value problems have been considered on time scale. Firstly, examining the properties of the Green's function, by using Schauder fixed point theorem, we have obtained the existence of solutions to a Lidstone boundary value problems (LBVP). Secondly, existence result for this problem is also given by the monotone method. Finally, by using Krasnosel'skii fixed point theorem, it is proved that the LBVP has a positive solution.

Keywords: Time scale; Lidstone boundary value problem; positive solutions; upper and lower solutions.

TEŐEKKÖR

İki yıldır, bu tezi meydana getirebilmek için özveriyle benimle ilgilenen, anlayışını, emeğini, zamanını esirgemeyen, bu günüme ve geleceğime hem bilimsel yönüyle hem de kişiliğıyle çok şeyler katan hocam Yrd. Doç. Dr. Serap Gülşan TOPAL' a ve tüm hocalarıma yürekten teşekkür ederim. Ayrıca, iki yıldır bana burs veren TÜBİTAK' a teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖZET	V
ABSTRACT	VII
TEŞEKKÜR	IX
1. GİRİŞ	1
2. ZAMAN SKALASI İLE İLGİLİ	
TEMEL BİLGİLER	3
2.1 Zaman Skalasında Türev	6
2.2 Zaman Skalasında Yüksek Mertebeden Türev	15
2.3 Zaman Skalasında İntegral	18
3. ZAMAN SKALASINDA YÜKSEK MERTEBEDEN	
SINIR DEĞER PROBLEMİ	24
3.1 Green's Fonksiyonu ve Özellikleri.....	24
3.2 Varlık Prensibi	39
3.3 Alt ve Üst Çözümler	46
3.4 Pozitif Çözümlerin Varlığı	52
4. SONUÇ	64
YARARLANILAN KAYNAKLAR	65
ÖZGEÇMİŞ	68

1. GİRİŞ

Son yıllarda pek çok matematikçi için ilgi odağı olan zaman skalası teorisi, sürekli analiz ve diskret analizi birleştiren ve genelleyen bir teori olarak, 1988 yılında Stefan Hilger'in doktora tezinde [14] tanıtılmıştır. Diferansiyel denklemler ile ilgili birçok sonuç, fark denklemleri için benzer sonuçlara kolayca taşınır. Bu sonuçların, doğal olarak diferansiyel denklemler için verilen sonuçlarla tamamen aynı olmadığı kolayca görülür. Zaman skalası üzerinde dinamik denklemler çalışması, bu tür farklılıkları açıklamakta ve sonuçları hem diferansiyel hemde fark denklemleri için ayrı ayrı ispatlamaktan kurtarmaktadır. Bu teorinin tanıtımı ve son yıllardaki gelişimi ilk olarak Kaymakçalan, Laksmikatham ve Svasundaram tarafından yazılan kitapta [17] yapılmış ardından da zaman skalası analizinde birçok temel tanım ve teoremin bulunduğu M.Bohner, A. Peterson yazarlı iki kitap [3, 4] literatüre geçmiştir.

Temel amaç, bilinmeyen fonksiyonu zaman skalası olarak adlandırılan reel sayıların kapalı bir alt kümesi üzerinde tanımlı, bir dinamik denklem için sonuç ispatlamaktır. Bu elde edilen sonuç, zaman skalasını reel sayılar kümesi seçerek, adi diferansiyel denklem ile ilgili bir sonucu; zaman skalasını tam sayılar kümesi seçerek, fark denklemi için bir sonucu ortaya koyar. Bununla birlikte, reel sayılar ve tam sayılar kümelerinden başka bir çok zaman skalası olduğundan elde edilen sonuç, sürekli ve diskret hali genellememize yardımcı olur. Kısaca bu söylediklerimizi özetleyebilir ve zaman skalası analizinin iki temel vasfının

“Birleştirme ve Genişletme”

olduğunu ifade edebiliriz.

[M. Bohner and A. Peterson “ Dynamic Equations on Time Scales, An Introduction with Application” Birkhauser (Preface), 2001]

İki noktalı ve üç noktalı sınır değer probleminin ve Lidstone sınır değer probleminin pozitif çözümlerinin incelendiği, birçok diferensiyel ve dinamik denklem için koni teorisi tekniğini kullanılmaktadır [1, 2, 5, 7, 22]. Lidstone sınır değer problemleri, sürekli ve diskret halde, birçok matematikçi tarafından ele alınmış ve özellikle son yıllarda Henderson ve Prasad tarafından yapılan çalışmalarda elde edilen sonuçlar genellenmeye çalışılmıştır [8, 10-13]. Bu tezde bizim amacımız, Lidstone sınır değer probleminin Green's fonksiyonunun özelliklerini de kullanarak, daha iyi sonuçlar elde etmeye çalışmaktır.

Üç bölümden oluşan tezin ikinci bölümünde, zaman skalasında analiz, bu tezin diğer bölümüne ışık tutacak şekilde Δ -türev operatörü için tanıtılmış ve Δ -integral kavramı verilmiştir.

Üçüncü bölümde, yüksek mertebeden Lidstone sınır değer probleminin çözümleri için varlık teoremleri incelenmektedir. Elde edilen sonuçlar alt ve üst çözüm kavramlarına dayandırılmaktadır.

Bu tezde ele alınan,

$$\begin{aligned} (-1)^n y^{\Delta^{2n}}(t) &= f(t, y^\sigma(t)), & t \in [0,1] \\ y^{\Delta^{2i}}(0) &= y^{\Delta^{2i}}(\sigma(1)) = 0, & 0 \leq i \leq n-1 \end{aligned}$$

problemi zaman skalasında tanımlı yüksek mertebeden Lidstone sınır değer problemi (LSDP) olarak bilinir. Bu çalışmada, ilk olarak Schauder sabit nokta teoremi ile çözümün varlığı ispatlanmıştır. Daha sonra da, monoton metod olarak bilinen, alt ve üst çözümler yardımı ile bu çözümler arasında kalacak şekilde çözümün varlığı garantilenmiştir. Son olarak, Kransnosel'skii sabit nokta teoremi kullanılarak, Lidstone sınır değer problemi için $f_0 = 0$, $f_\infty = \infty$ veya $f_0 = \infty$, $f_\infty = 0$ şartlarından birinin sağlandığı durumda pozitif çözümlerin varlığı incelenmiştir.

2. ZAMAN SKALASI İLE İLGİLİ TEMEL BİLGİLER

Bu bölümde Stefan Hilger tarafından [16]' de geliştirilen Zaman Skalası üzerinde analiz tanıtılmıştır. Zaman skalası üzerinde, Δ türev kavramı tanıtılarak bu türev ile ilgili bazı temel özellikler ve örnekler incelenmiştir. $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için Δ integral kavramı ve Δ integralin özellikleri yine bu bölümde yer verdiğimiz temel kavramlardır [15,19].

Tanım 2.1 Reel sayıların boştan farklı kapalı bir alt kümesine zaman skalası denir ve \mathbb{T} ile gösterilir. Örneğin, reel sayılar, tam sayılar, doğal sayılar ve kantör kümesi birer zaman skalasıdır. Fakat, rasyonel sayılar, irrasyonel sayılar, complex sayılar ve (0,1) aralığı birer zaman skalası değildir.

Tanım 2.2 \mathbb{T} bir zaman skalası olsun. Her $t \in \mathbb{T}$, $t < \max \mathbb{T}$ için $\sigma(t) = \inf \{s: s \in \mathbb{T}, s > t\}$ ile tanımlanan $\sigma: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ operatörüne ileriye atlama (forward jump) operatörü adı verilir.

Her $t \in \mathbb{T}$, $t > \min \mathbb{T}$ için $\rho(t) = \sup \{s: s \in \mathbb{T}, s < t\}$ ile tanımlanan $\rho: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ operatörüne geriye atlama (backward jump) operatörü adı verilir.

Ayrıca, $\sigma(\max \mathbb{T}) = \max \mathbb{T}$ ve $\rho(\min \mathbb{T}) = \min \mathbb{T}$ olarak tanımlanır. \mathbb{T} kapalı olduğundan her $t \in \mathbb{T}$ için $\sigma(t) \in \mathbb{T}$ ve $\rho(t) \in \mathbb{T}$ olur.

$\sigma(t) = t$ ise $t \in \mathbb{T}$ ye sağ yoğun (right dense) nokta ve $\sigma(t) > t$ ise sağ yayılmış (right scattered) nokta adı verilir.

$\rho(t)=t$ ise $t \in \mathbb{T}$ ye sol yoğun (left dense) nokta ve $\rho(t) < t$ ise sol yayılmış (left scattered) nokta adı verilir.

$\rho(t) = t = \sigma(t)$ ise $t \in \mathbb{T}$ ye sol yoğun (dense) ve $\rho(t) < t < \sigma(t)$ ise $t \in \mathbb{T}$ ye ayırık (isoleted) nokta adı verilir.

Örnek 2.1 Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise herbir $t \in \mathbb{T}$ için

$$\sigma(t) = \inf \{s : s \in \mathbb{T}, s > t\} = \inf(t, \infty) = t$$

ve benzer şekilde $\rho(t)=t$ elde edilir. Öyleyse, her $t \in \mathbb{R}$ noktası yoğun noktadır.

Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise herbir $t \in \mathbb{Z}$ için

$$\sigma(t) = \inf \{s : s \in \mathbb{T}, s > t\} = \inf\{t+1, t+2, \dots\} = t+1$$

ve benzer şekilde $\rho(t)=t-1$ elde edilir. Öyleyse, her $t \in \mathbb{Z}$ noktası ayırık noktadır.

Örnek 2.2 \mathbb{T} zaman skalasını

$$\mathbb{T} = \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbf{N} \right\} \cup \{x \in \mathbb{R}, 2 \leq x \leq 3\} \cup \{4,5\}$$

olarak alalım. Bu durumda

- Her $t \in (2,3)$ noktası sağ yoğun ve sol yoğun noktadır.
- 2, 5 noktası sağ yoğun ve sol yayılmış noktadır.
- 3 noktaları sağ yayılmış ve sol yoğun noktalarıdır.
- 4 noktası sağ yayılmış ve sol yayılmış, yani ayırık noktadır.
- $n \in \mathbf{N}$ için tüm $\frac{1}{n}$ noktaları sağ yayılmış ve sol yayılmış noktalarıdır.

Bir \mathbb{T} zaman skalasına ait $[a, b]$ aralığı, $a, b \in \mathbb{T}$ olmak üzere

$$[a, b] = \{t \in \mathbb{T} : a \leq t \leq b\}$$

olarak tanımlanır.

Zaman skalasında süreklilik ve türev kavramlarını verebilmek için, öncelikle zaman skalasında komşuluk kavramına ihtiyacımız olacaktır.

Tanım 2.3 $U \subset \mathbb{T}$ olsun. Her $\delta > 0$ için

$$U_\delta(t) = \{s \in \mathbb{T} : |s - t| < \delta\}$$

kümesine t nin δ komşuluğu denir. t nin sağ sol komşulukları sırasıyla

$$U_\delta^-(t) = \{s \in \mathbb{T} : t - \delta < s < t\} \text{ ve } U_\delta^+(t) = \{s \in \mathbb{T} : t < s < t + \delta\}$$

ile tanımlanır.

Eğer her $\delta > 0$ için $U_\delta^- \neq \emptyset$ ise, bu halde t ye U için sol limit noktası ve $U_\delta^+ \neq \emptyset$ ise, t ye U için sağ limit noktası denir.

Eğer her $\delta > 0$ için $U_\delta^- = \emptyset$ ise, t ye U için soldan ayrılmış nokta ve $U_\delta^+ = \emptyset$ ise, t ye U için sağdan ayrılmış nokta denir.

Tanım 2.4 $t_0 \in \mathbb{T}$ olsun. Verilen her $\varepsilon > 0$ ve her $t \in U(t_0)$ için,

$$|f(t) - f(t_0)| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $U(t_0)$ komşuluğu bulunabiliyorsa, $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna $t = t_0$ noktasında süreklidir denir.

Bu tez boyunca, Δ dinamik denklemler ile çalışacağız. Bu yüzden sadece Δ - türev ve Δ - integral tanımlarını vereceğiz. Δ analizinde, σ operatörü yerine ρ operatörü alınarak ∇ analizi elde edilebilir.

2.1 Zaman Skalasında Türev

Zaman skalasında türev kavramını verebilmek için, \mathbb{T}^k diferansiyellenebilirlik bölgesine ihtiyacımız var, şöyleki eğer $\max \mathbb{T} < \infty$ ve $\max \mathbb{T}$ sol yayılmış ise $\mathbb{T}^k = \mathbb{T} - \{\max \mathbb{T}\}$ ile tanımlanır, aksi halde $\mathbb{T}^k = \mathbb{T}$ olur. Özetle,

$$\mathbb{T}^k = \begin{cases} \mathbb{T}/(\rho(\max \mathbb{T}), \max \mathbb{T}], & \max \mathbb{T} < \infty \\ \mathbb{T} & , \max \mathbb{T} = \infty \end{cases}$$

dır. Son olarak $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $f^\sigma : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her $t \in \mathbb{T}$ için

$$f^\sigma(t) = f(\sigma(t)) = f \circ \sigma(t)$$

olarak tanımlanır. Yani $f^\sigma = f \circ \sigma$ dır.

Tanım 2.1.1 $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu ve $t \in \mathbb{T}^k$ noktası verilsin. Eğer sonlu bir $a \in \mathbb{R}$ sayısı için $\varepsilon > 0$ verildiğinde t noktasının

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - a(\sigma(t) - s)| \leq \varepsilon |\sigma(t) - s| \quad , \quad \forall s \in U$$

olacak şekilde bir U komşuluğu varsa, f fonksiyonuna t noktasında Δ -türevlenebilir denir. Bu eşitsizlikteki a reel sayısına da f fonksiyonunun t noktasındaki Δ -türevi denir ve $a = f^\Delta(t)$ yazılarak gösterilir.

Başka bir deyişle,

$$f^\Delta(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s}$$

yazılabilir.

Örnek 2.1.1 \mathbb{T} herhangi bir zaman skalası olsun. $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, her $t \in \mathbb{T}$ için $f(t) = t$ alalım ;

$$f^\Delta(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} = \lim_{s \rightarrow t} \frac{\sigma(t) - s}{\sigma(t) - s} = 1$$

olduğu görülür.

Örnek 2.1.2 \mathbb{T} herhangi bir zaman skalası olsun. $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, her $t \in \mathbb{T}$ için $f(t) = t^2$ alalım ;

$$f^\Delta(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} = \lim_{s \rightarrow t} \frac{\sigma^2(t) - s^2}{\sigma(t) - s} = \lim_{s \rightarrow t} \sigma(t) + s = \sigma(t) + t$$

$$= \begin{cases} 2t, & \mathbb{T} = \mathbb{R} \\ 2t + 1, & \mathbb{T} = \mathbb{Z} \\ 3t, & \mathbb{T} = \{2^n : n \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\} \end{cases}$$

olduğu görülür.

Önerme 2.1.1 Eğer $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu ve $t \in \mathbb{T}^k$ noktasında Δ türevlenebilir ise, bu halde $a = f^\Delta(t)$ değeri tektir.

Bu önerme ile, $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun Δ -türevlenebilirlik kümesinin \mathbb{T}^k olduğu kolayca görülür. Aksini kabul edelim, yani $t = \max \mathbb{T}$ noktası sol yayılmış bir nokta ve $f(t)$ fonksiyonunda bu noktada Δ -türeve sahip olsun. Öyleyse,

$$\left| f(\sigma(t)) - f(s) - f^\Delta(t)(\sigma(t) - s) \right| \leq \varepsilon |\sigma(t) - s|, \quad \forall s \in U_\delta(t)$$

eşitsizliği doğru olur. t noktasının $U_\delta(t)$ komşuluğu sadece t yi içerir. O halde $s = t$ için

$$\left| f(\sigma(t)) - f(t) - f^\Delta(t)(\sigma(t) - t) \right| \leq \varepsilon |\sigma(t) - t|$$

$$\left| f(t) - f(t) - f^\Delta(t)(t - t) \right| \leq \varepsilon |t - t|$$

$$0 \leq 0$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece, Δ -türev tanımı her $f^\Delta(t)$ değeri için sağlanır. Bundan dolayı $f^\Delta(t)$ tek türlü belirlenemez ve önerme ile çelişki elde edilir.

Örnek 2.1.3 $\sigma : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ fonksiyonu her \mathbb{T} zaman skalasında Δ - türevlenemez.

İspat \mathbb{T} herhangi bir zaman skalası ve $t_0 \in \mathbb{T}^k$, $\sigma(t_0) > t_0$ ve $\rho(t_0) = t_0$ olsun. Kabul edelimki $\sigma(t)$ fonksiyonu t_0 da türevlenebilir olsun. O halde

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ vardır ki $\forall s \in U_\delta(t_0)$ için

$$\left| \sigma(\sigma(t_0)) - \sigma(s) - \sigma^\Delta(t_0)(\sigma(t_0) - s) \right| \leq \varepsilon |\sigma(t_0) - s|$$

elde edilir. Özel olarak $s = t_0$ alalım.

$\varepsilon \rightarrow 0$ için $\sigma(\sigma(t_0)) - \sigma(s) - \sigma^\Delta(t_0)(\sigma(t_0) - s) = 0$ elde edilir. O halde

$$\sigma^\Delta(t_0) = \frac{\sigma(\sigma(t_0)) - \sigma(t_0)}{\sigma(t_0) - t_0}$$

bulunur. $s \in (t_0 - \delta, t_0)$ için de

$$\left| \sigma(\sigma(t_0)) - \sigma(s) - \sigma^\Delta(t_0)(\sigma(t_0) - s) \right| \leq \varepsilon |\sigma(t_0) - s|$$

$$\left| \sigma(\sigma(t_0)) - s - \sigma^\Delta(t_0)(\sigma(t_0) - s) \right| \leq \varepsilon |\sigma(t_0) - s|$$

$s \rightarrow t_0$ için

$$\sigma(\sigma(t_0)) - t_0 - \sigma^\Delta(t_0)(\sigma(t_0) - s) = 0$$

$$\sigma^\Delta(t_0) = \frac{\sigma(\sigma(t_0)) - t_0}{\sigma(t_0) - t_0}$$

olur. Bu durumda Önerme 2.1.1 den $\sigma(t_0) = t_0$ olmalıdır. Bu ise bir çelişkidir. Çünkü $\sigma(t_0) > t_0$ kabul etmiştik. O halde $\sigma(t)$ fonksiyonu her \mathbb{T} zaman skalasında Δ -türevlenemez.

Aşağıda ispatsız ifade edeceğimiz teoremler [1, 4, 15, 18, 20, 21] referanslarında bulunabilir.

Teorem 2.1.1 $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu ve $t \in \mathbb{T}^k$ noktası verilsin.

i) f fonksiyonu t de Δ -türevlenebilir ise, f fonksiyonu t de süreklidir.

ii) Eğer f fonksiyonu t de sürekli ve t sağ yayılmış ise, f fonksiyonu t de Δ -türevlenebilirdir ve

$$f^\Delta(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\sigma(t) - t}$$

olur.

iii) Eğer t sağ yoğun nokta ise, bu halde f fonksiyonunun t de Δ -türevlenebilir olması için gerek ve yeter koşul

$$\lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

değerinin sonlu olmasıdır ve bu durumda

$$f^\Delta(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

olur.

iv) f fonksiyonu t de Δ - türevlenebilir ise, bu halde

$$f(\sigma(t)) = f(t) + f^\Delta(t)(\sigma(t) - t)$$

eşitliği doğrudur.

Örnek 2.1.4 $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu olmak üzere $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ve $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ için $f^\Delta(t)$ yi inceleyelim.

i) Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise $\forall t \in \mathbb{R}$ sağ yoğun olduğundan Teorem 2.1.1 (iii) şikkından $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $t \in \mathbb{R}$ de Δ - türevlenebilir olması için gerek ve yeter koşul

$$f'(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

var olmasıdır.

Eğer $f'(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$ var ise f fonksiyonu t de türevlenebilir (alışılmış

türev)dir. O halde Teorem 2.1.1 (iii) den

$$f^\Delta(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} = f'(t)$$

elde edilir.

ii) Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise $\forall t \in \mathbb{Z}$ sağ yoğun olduğundan Teorem 2.1.1 (ii) şikkından $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $t \in \mathbb{Z}$ de Δ - türevlenebilirdir ve

$$f^\Delta(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\sigma(t) - t} = \frac{f(t+1) - f(t)}{1} = f(t+1) - f(t) = \Delta f(t)$$

elde edilir. Buradaki Δ ileri fark operatörüdür.

Teorem 2.1.2 $f, g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları ve $t \in \mathbb{T}^k$ noktasında Δ -türevlenebilir ise,

i) $f + g$ fonksiyonu da $t \in \mathbb{T}^k$ noktasında Δ - türevlenebilirdir ve

$$(f + g)^\Delta(t) = f^\Delta(t) + g^\Delta(t).$$

ii) Her k sabiti için kf fonksiyonu da $t \in \mathbb{T}^k$ noktasında Δ -türevlenebilirdir ve

$$(kf)^\Delta(t) = k f^\Delta(t).$$

iii) $f g$ fonksiyonu da $t \in \mathbb{T}^k$ noktasında Δ - türevlenebilirdir ve

$$(f g)^\Delta(t) = f^\Delta(t) g(t) + f(\sigma(t)) g^\Delta(t) = f(t) g^\Delta(t) + f^\Delta(t) g(\sigma(t)).$$

iv) $g(t)g(\sigma(t)) \neq 0$ ise, bu halde $\frac{f}{g}$ fonksiyonu da $t \in \mathbb{T}^k$ noktasında Δ -türevlenebilirdir ve

$$\left(\frac{f}{g}\right)^\Delta(t) = \frac{f^\Delta(t)g(t) - f(t)g^\Delta(t)}{g(t)g(\sigma(t))}.$$

Önerme 2.1.2 $f(t)$, $[a, b] \subset \mathbb{T}$ de monoton artan bir fonksiyon ise, $\forall t \in [a, b)$ için $f^\Delta(t) \geq 0$ olur.

İspat $t_0 \in [a, b)$ alalım. İspatın yapılabilmesi için iki durum göz önüne alınmalıdır.

Eğer $t_0 \in [a, b)$ sağ yayılmış nokta ise, $\sigma(t_0) > t_0$ ve $f(\sigma(t_0)) \geq f(t_0)$ olduğu için

$$f^\Delta(t_0) = \frac{f(\sigma(t_0)) - f(t_0)}{\sigma(t_0) - t_0} \geq 0$$

doğrudur.

Eğer $t_0 \in [a, b)$ sağ yoğun nokta ise, $s > t_0$ ve $f(s) \geq f(t_0)$ olduğu için

$$f^\Delta(t_0) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t_0) - f(s)}{t_0 - s} \geq 0$$

doğrudur.

Önerme 2.1.3 $f(t)$, $[a, b] \subset \mathbb{T}$ de monoton azalan bir fonksiyon ise, $\forall t \in [a, b)$ için $f^\Delta(t) \leq 0$ olur.

İspat $t_0 \in [a, b)$ alalım. İspatın yapılabilmesi için iki durum göz önüne alınmalıdır.

Eğer $t_0 \in [a, b)$ sağ yayılmış nokta ise, $\sigma(t_0) > t_0$ ve $f(\sigma(t_0)) \leq f(t_0)$ olduğu için

$$f^\Delta(t_0) = \frac{f(\sigma(t_0)) - f(t_0)}{\sigma(t_0) - t_0} \leq 0$$

doğrudur.

Eğer $t_0 \in [a, b)$ sağ yoğun nokta ise, $s > t_0$ ve $f(s) \leq f(t_0)$ olduğu için

$$f^\Delta(t_0) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t_0) - f(s)}{t_0 - s} \leq 0$$

elde edilir.

Teorem 2.1.3 Eğer $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde sürekli ve $[a, b)$ üzerinde Δ -türevlenebilir olsun. $f(a) = f(b)$ ise $\exists \xi, \tau \in [a, b]$ vardır ki

$$f^\Delta(\xi) \leq 0 \leq f^\Delta(\tau)$$

eşitsizliği doğrudur.

İspat $f(a) = f(b)$ olduğundan ve $f(t)$ sürekli bir fonksiyon olduğundan ya $f(t)$ sabit fonksiyondur yada $f(t)$ en az bir noktada ekstremuma sahiptir. O halde $f(t)$ nin $[a, b)$ içinde minimum m ve maksimum M değerine sahip olduğu noktalar vardır. Eğer $f(t)$ sabit ise $\forall t \in [a, b)$ için $f^\Delta(t) = 0$ dır.

Eğer $f(t)$ fonksiyonu bir ξ noktasında maksimum M değerine ve τ noktasında minimum m değerine sahip ise Δ -türev tanımından

$$f^\Delta(\xi) \leq 0 \text{ ve } f^\Delta(\tau) \geq 0$$

elde edilir. O halde $f^\Delta(\xi) \leq 0 \leq f^\Delta(\tau)$ dır.

Teorem 2.1.4 (Ortalama Değer Teoremi) Eğer $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde sürekli ve $[a, b)$ üzerinde Δ -türevlenebilir olsun. $f(a) = f(b)$ ise $\exists \mu, \zeta \in [a, b)$ vardır ki

$$f^\Delta(\mu) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f^\Delta(\zeta)$$

eşitsizliği doğrudur.

İspat $[a, b]$ de

$$h(t) = f(t) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(t - a)$$

fonksiyonunu tanımlayalım.

$h(t)$, $[a, b]$ de sürekli, $[a, b)$ de Δ -türevlenebilir ve $h(a) = 0 = h(b)$ elde edilir.

O halde Teorem 2.1.3 ten dolayı $\exists \mu, \zeta \in [a, b)$ vardır ki

$$h^\Delta(\mu) \leq 0 \leq h^\Delta(\zeta)$$

elde edilir. O halde

$$f^\Delta(\mu) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq 0 \leq f^\Delta(\zeta) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

olur. Buradan da

$$f^\Delta(\mu) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f^\Delta(\zeta)$$

eşitsizliği doğrudur.

Sonuç 2.1.1 Eğer $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a, b] \cap \mathbb{T}^k$ üzerinde Δ -türevlenebilir ve $f^\Delta(t) = 0$ ise f fonksiyon sabittir.

İspat $t_1 \in [a, b] \cap \mathbb{T}^k$ seçelim. Teorem 2.1.4 ten dolayı $\exists \mu, \zeta \in [a, t_1)$ vardır ki

$$0 = f^\Delta(\mu) \leq \frac{f(t_1) - f(a)}{t_1 - a} \leq f^\Delta(\zeta) = 0$$

olur. O halde $f(a) = f(t_1)$ elde edilir. Böylece her $t \in [a, b] \cap \mathbb{T}^k$ için $f(a) = f(t)$ olduğundan f fonksiyonu sabittir.

2.2 Zaman Skalasında Yüksek Mertebeden Türev

Tanım 2.2.1 $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için $f^\Delta: \mathbb{T}^k \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbb{T}^{k^2} = (\mathbb{T}^k)^k$ da Δ -türevlenebilir ise f fonksiyonu ikinci mertebeden Δ - türevlenebilirdir denir ve

$$f^{\Delta\Delta} = (f^\Delta)^\Delta: \mathbb{T}^{k^2} \rightarrow \mathbb{R}$$

dir. Benzer şekilde, f nin n . mertebeden Δ - türevleri $f^{\Delta^n}: \mathbb{T}^{k^n} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlanır. Her $t \in \mathbb{T}$ için

$$\sigma^2(t) = \sigma(\sigma(t)) \quad \text{ve} \quad \rho^2(t) = \rho(\rho(t))$$

ve buna göre $n \in \mathbb{N}$ için $\sigma^n(t)$ ve $\rho^n(t)$ tanımlanır. Ayrıca,

$$\rho^0(t) = \sigma^0(t) = t, \quad f^{\Delta^0} = f \quad \text{ve} \quad \mathbb{T}^{k^0} = \mathbb{T}$$

olarak tanımlanır.

Örnek 2.2.1 \mathbb{T} herhangi bir zaman skalası olsun. $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, her $t \in \mathbb{T}$ için $f(t) = t$ alalım ; Örnek 2.1.1 den $\forall t \in \mathbb{T}^k$ için $f^\Delta(t) = 1$ olduğunu biliyoruz. O halde, $\forall t \in \mathbb{T}^{k^2}$

$$f^{\Delta\Delta}(t) = (f^\Delta)^\Delta(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f^\Delta(\sigma(t)) - f^\Delta(s)}{\sigma(t) - s} = \lim_{s \rightarrow t} \frac{1 - 1}{\sigma(t) - s} = 0$$

olduğu görülür.

Örnek 2.2.2 \mathbb{T} herhangi bir zaman skalası olsun. $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, her $t \in \mathbb{T}$ için $f(t) = t^2$ alalım ; Örnek 2.1.2 den $\forall t \in \mathbb{T}^k$ için $f^\Delta(t) = \sigma(t) + t$ olduğunu biliyoruz. O halde, $\forall t \in \mathbb{T}^{k^2}$

$$f^{\Delta\Delta}(t) = (f^\Delta)^\Delta = (\sigma(t) + t)^\Delta = \sigma^\Delta(t) + t^\Delta$$

elde edilir. $\sigma(t)$ fonksiyonunun her zaman skalası için türevlenemez. olduğunu Örnek 2.1.3 te göstermiştik. Öyleyse f nin herhangi bir zaman skalası için türevini bulamayız. Özel zaman skalaları için $f^{\Delta\Delta}(t)$ yi inceleyelim.

Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise $\sigma(t) = t$ olduğundan

$$f^{\Delta\Delta}(t) = t^\Delta + t^\Delta = 2$$

bulunur.

Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise $\sigma(t) = t + 1$ olduğundan

$$f^{\Delta\Delta}(t) = (t + 1)^\Delta + t^\Delta = 2$$

bulunur.

Eğer $\mathbb{T} = \{0\} \cup \{2^n : n \in \mathbb{Z}\}$ ise $\sigma(t) = 2t$ olduğundan

$$f^{\Delta\Delta}(t) = (2t)^\Delta + t^\Delta = 3$$

olduğu görülür.

Örnek 2.2.3 Eğer f ve g ikinci mertebeden Δ - türevlenebilir ve f^σ Δ - türevlenebilir ise $f g$ ikinci mertebeden Δ - türevlenebilir ve

$$(f g)^\Delta = f^\Delta g + f^\sigma g^\Delta$$

olduğuna göre $f^{\Delta\sigma} := f^{\Delta\sigma}$ ve $f^{\sigma\Delta} := f^{\sigma\Delta}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} (f g)^{\Delta\Delta} &= (f^\Delta g + f^\sigma g^\Delta)^\Delta \\ &= f^{\Delta\Delta} g + f^{\Delta\sigma} g^\Delta + f^{\sigma\Delta} g^\Delta + f^{\sigma\sigma} g^{\Delta\Delta} \\ &= f^{\Delta\Delta} g + f^{\Delta\sigma} g^\Delta + f^{\sigma\Delta} g^\Delta + f^{\sigma\sigma} g^{\Delta\Delta} \end{aligned}$$

elde edilir.

Önerme 2.2.1 [4] $f(t)$ fonksiyonu $[a, b]$ de sürekli ve $[a, b]^k$ üzerinde $f^\Delta(t)$ sürekli ve Δ - türevlenebilir olsun. Öyle bir $c \in (a, b)$ vardır ki

$$f(c) = \max\{f(t) : t \in [a, b]\}$$

ve her $t \in (c, b]$ için

$$f(t) < f(c)$$

ve

$$f^\Delta(c) \leq 0 \quad , \quad f^{\Delta\Delta}(\rho(c)) \leq 0$$

dır.

2.3 Zaman Skalasında İntegral

Tanım 2.3.1 $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Eğer $F: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu \mathbb{T}^k üzerinde Δ - türevlenebilir ve her $t \in \mathbb{T}^k$ için $F^\Delta(t) = f(t)$ ise, F fonksiyonuna f nin Δ - anti türevi veya ilkeli denir.

Tanım 2.3.2 Eğer $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun Δ - anti türevi varsa, f ye Δ - integrallenebilir fonksiyon denir. Bu durumda a ve b , \mathbb{T} içinde herhangi noktalar olmak üzere f nin a dan b ye Δ integrali

$$\int_a^b f(t) \Delta t = F(b) - F(a)$$

olarak tanımlanır.

Teorem 2.3.1 $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları Δ - integrallenebilir olsunlar, yani Δ - anti türevi var olsun. Bu durumda her $a, b, c \in \mathbb{T}$ için aşağıdaki formüller doğrudur.

$$\text{i) } \int_a^b [f(t) + g(t)] \Delta t = \int_a^b f(t) \Delta t + \int_a^b g(t) \Delta t$$

$$\text{ii) Her } k \text{ sabiti için } \int_a^b k f(t) \Delta t = k \int_a^b f(t) \Delta t$$

$$\text{iii) } \int_a^a f(t) \Delta t = 0$$

$$\text{iv) } \int_a^b f(t) \Delta t = - \int_b^a f(t) \Delta t$$

$$\text{v)} \quad \int_a^b f(t) \Delta t = \int_a^c f(t) \Delta t + \int_c^b f(t) \Delta t$$

$$\text{vi)} \quad \int_a^b f(\sigma(t))g(t) \Delta t = f(t)g(t) \Big|_a^b - \int_a^b f^\Delta(t)g(t) \Delta t$$

$$\text{vii)} \quad \int_a^b f(t)g^\Delta(t) \Delta t = f(t)g(t) \Big|_a^b - \int_a^b f^\Delta(t)g(\sigma(t)) \Delta t$$

Teoremdeki (vi) ve (vii) formüllerine kısmi integrasyon formülleri denir.

Teorem 2.3.2 $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu Δ - integrallenebilir olsun. Bu durumda $t \in T^k$ için

$$\int_t^{\sigma(t)} f(s) \Delta s = [\sigma(t) - t]f(t)$$

eşitliği doğrudur.

İspat $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu Δ - integrallenebilir ise $f(t) = F^\Delta(t)$ olacak şekilde $\exists F: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ Δ - anti türevi vardır ve

$$\begin{aligned} \int_t^{\sigma(t)} f(s) \Delta s &= F(\sigma(t)) - F(t) \\ &= [\sigma(t) - t]F^\Delta(t) \\ &= [\sigma(t) - t]f(t) \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 2.3.3 Eğer $t \in [a, b]$ için $f^\Delta \geq 0$ ise f artandır.

İspat $t \in [a, b]$ için $f^\Delta(t) \geq 0$ olsun. $a \leq s \leq t \leq b$ olacak şekilde $s, t \in \mathbb{T}$ alalım.

O halde ,

$$f(t) = f(s) + \int_s^t f^\Delta(\tau) \Delta\tau \geq f(s)$$

olduğundan f fonksiyonu artandır.

Teorem 2.3.4 a ve b \mathbb{T} içinde $a < b$ olacak şekilde iki nokta ve $f(t)$ ve $g(t)$ fonksionları \mathbb{T} de Δ - integrallenebilir olsunlar. Her $t \in [a, b]$ için

i) $f(t) \geq 0$ ise $\int_a^b f(t) \Delta t \geq 0$

ii) $f(t) \leq g(t)$ ise $\int_a^b f(t) \Delta t \leq \int_a^b g(t) \Delta t$

iii) $|f(t)| \leq g(t)$ ise $\left| \int_a^b f(t) \Delta t \right| \leq \int_a^b g(t) \Delta t$

iv) $\left| \int_a^b f(t) \Delta t \right| \leq \int_a^b |f(t)| \Delta t \leq \left(\sup_{a \leq t \leq \rho(t)} |f(t)| \right) (b - a)$

eşitlikleri doğrudur.

Teorem 2.3.5 $a, b \in \mathbb{T}$ ve $a < b$ olsun. Eğer $f(t)$ fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde sürekli ise aşağıdaki eşitlikler doğrudur.

$$i) \int_a^b f(t) \Delta t = \int_a^{\rho(b)} f(t) \Delta t + [b - \rho(b)] f(\rho(b))$$

$$ii) \int_a^b f(t) \Delta t = [\sigma(a) - a] f(a) + \int_{\sigma(a)}^b f(t) \Delta t$$

Teorem 2.3.6 [1] Eğer f ve f^Δ fonksiyonları iki değişkenli fonksiyonlar olarak sürekli ise, bu halde aşağıdaki formüller doğrudur. Burada $f^\Delta(t, s)$ ile s değişkeni sabit tutularak $f(t, s)$ fonksiyonunun t ye göre Δ türevi belirtilmiştir.

$$i) \left(\int_a^t f(t, s) \Delta s \right)^\Delta = f(\sigma(t), t) + \int_a^t f^\Delta(t, s) \Delta s$$

$$ii) \left(\int_t^b f(t, s) \Delta s \right)^\Delta = \int_t^b f^\Delta(t, s) \Delta s - f(\sigma(t), t)$$

Örnek 2.3.1 $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu Δ - integrallenebilir olsun. Bu durumda $a, b \in \mathbb{T}$ için

$$i) \text{ Eğer } \mathbb{T} = \mathbb{R} \text{ ise } \int_a^b f(t) \Delta t = \int_a^b f(t) dt$$

ii) Eğer $[a, b]$ aralığı sadece ayrık noktalardan oluşuyor ise

$$\int_a^b f(t) \Delta t = \begin{cases} \sum_{t \in [a,b]} (\sigma(t) - t) f(t), & a < b \\ 0, & a = b \\ - \sum_{t \in [b,a]} (\sigma(t) - t) f(t), & a > b \end{cases}$$

olduğunu görelim.

i) Örnek 2.1.4 ten ve analizin temel teoreminden eşitliğin varlığı görülür.

ii) $a < b$ kabul edelim ve $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$ olmak üzere $[a, b] = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ olsun.

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) \Delta t &= \int_{t_0}^{t_1} f(t) \Delta t + \int_{t_1}^{t_2} f(t) \Delta t + \dots + \int_{t_{n-1}}^{t_n} f(t) \Delta t \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t) \Delta t = \sum_{i=1}^{n-1} \int_{t_i}^{\sigma(t_i)} f(t) \Delta t \\ &= \sum_{t \in [a,b]} (\sigma(t) - t) f(t) \end{aligned}$$

elde edilir.

Eğer $a > b$ ise $\int_a^b f(t) \Delta t = - \int_b^a f(t) \Delta t$ kullanarak

$$\int_a^b f(t) \Delta t = - \sum_{t \in [b,a]} (\sigma(t) - t) f(t)$$

elde edilir.

Teoerm 2.3.1 (iii) den $a = b$ ise $\int_a^b f(t) \Delta t = 0$ dır.

Örnek 2.3.2 $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ için $a \neq 0$ olmak üzere

$$\int a^t \Delta t$$

belirsiz integralini inceleyelim.

$$\left(\frac{a^t}{a-1} \right)^\Delta = \Delta \left(\frac{a^t}{a-1} \right) = \frac{a^{t+1} - a^t}{a-1} = a^t$$

olduğundan

$$\int a^t \Delta t = \frac{a^t}{a-1} + c$$

elde edilir (c =sabit).

Örnek 2.3.3 $\mathbb{T} = [-1, 1] \cup [3, 4]$ olsun. $f(t) = t$ için $\int_{-1}^t f(s) \Delta s$ integralinin değerini bulalım.

$$t \leq 1 \text{ ise } \int_{-1}^t s \Delta s = \int_{-1}^t s ds = \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}$$

$$t = 3 \text{ ise } \int_{-1}^t s \Delta s = \int_{-1}^1 s \Delta s + \int_1^3 s \Delta s = 0 + (\sigma(1) - 1) f(1) = (3 - 1)1 = 2$$

$$t > 3 \text{ ise } \int_{-1}^t s \Delta s = \int_{-1}^3 s \Delta s + \int_3^t s \Delta s = 2 + \int_3^t s ds = 2 + \frac{s^2}{2} \Big|_3^t$$

$$= \frac{t^2}{2} - \frac{9}{2} + 2 = \frac{t^2}{2} - \frac{5}{2}$$

3. ZAMAN SKALASINDA YÜKSEK MERTEBEDEN SINIR DEĞER PROBLEMİ

Bu bölümde, $f : [0, \sigma(1)] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyon ve $n \geq 1$ olmak üzere,

$$(-1)^n y^{\Delta^{2n}}(t) = f(t, y^\sigma(t)), \quad t \in [0, 1] \quad (3.1)$$

$$y^{\Delta^{2i}}(0) = y^{\Delta^{2i}}(\sigma(1)) = 0, \quad 0 \leq i \leq n-1 \quad (3.2)$$

Lidstone sınır değer problemi (LSDP) ele alınacaktır. Öncelikle bu problemin Green's fonksiyonu ile ilgili eşitsizlikler ve Schauder Sabit Nokta Teoremi [9] yardımı ile (3.1)-(3.2) probleminin çözümünün varlığı ispatlanacaktır. Daha sonra alt ve üst çözümler yardımı ile çözümün varlığı ve tekliği için f fonksiyonu üzerindeki koşullar incelenecektir. Bu çalışmada $\sigma(1)$ i sağ yoğun kabul edeceğiz. Bu durumda $j \geq 1$ için $\sigma^j(1) = \sigma(1)$ olacaktır.

3.1 Green's Fonksiyonu ve Özellikleri

Tanım 3.1.1 $y(t)$ fonksiyonunun (3.1)-(3.2) LSDP nin bir çözümü olması için gerek ve yeter koşul $y : [0, \sigma(1)] \rightarrow \mathbb{R}$ ile tanımlanan sürekli y fonksiyonunun $t \in [0, 1]$ için (3.1) denklemini ve (3.2) sınır koşullarını sağlamasıdır.

(3.1)-(3.2) LSDP probleminin bir çözümünün var olduğunu bulmak ve bu çözümünün şeklini tayin edebilmek için bu problemin $G_n(t, s)$ Green's fonksiyonuna ihtiyacımız vardır. $G_n(t, s)$,

$$y^{\Delta^{2n}}(t) = 0, \quad t \in [0, 1]$$

$$y^{\Delta^{2i}}(0) = y^{\Delta^{2i}}(\sigma(1)) = 0, \quad 0 \leq i \leq n-1$$

homojen sınır değer probleminin Green's fonksiyonu olmak üzere $(-1)^n G_n(t, s)$, (3.1)-(3.2) LSDP probleminin Green's fonksiyonudur.

Problemin çözümünün varlığını ve yapısını gösterirken aşağıda vereceğimiz Green's fonksiyonunun özelliklerini kullanacağız.

Özellik 3.1.2 [22] $y^{\Delta\Delta}(t) = 0, \quad t \in [0,1]$ (3.3)

$$y(0) = y(\sigma(1)) = 0 \quad (3.4)$$

probleminin Green's fonksiyonu

$$G(t, s) = \frac{1}{\sigma(1)} \begin{cases} t(\sigma(s) - \sigma(1)), & t \leq s \\ \sigma(s)(t - \sigma(1)), & t \geq \sigma(s) \end{cases} \quad (3.5)$$

ile tanımlanır.

Özellik 3.1.3 $G(t, s)$, (3.3)-(3.4) probleminin Green's fonksiyonu ve $G_1(t, s) := G(t, s)$ olmak üzere $2 \leq j \leq n$ için

$$G_j(t, s) = \int_0^{\sigma(1)} G_{j-1}(t, r) G(r, s) \Delta r \quad (3.6)$$

dir.

İspat $2 \leq j \leq n$ için, $G_j(t, s)$ fonksiyonu

$$y^{\Delta^{2j}}(t) = f(t, y^\sigma(t)), \quad t \in [0,1] \quad (3.7)$$

$$y^{\Delta^{2i}}(0) = y^{\Delta^{2i}}(\sigma(1)) = 0, \quad 0 \leq i \leq n-1 \quad (3.8)$$

probleminin Green's fonksiyonu olsun.

Öyleyse, $y^{\Delta^{2j}}(t) = \left(y^{\Delta^{2(j-1)}} \right)^{\Delta\Delta}(t) = f(t, y^\sigma(t))$ olduğundan ve $i = j-1$ için

$y^{\Delta^{2(j-1)}}(0) = y^{\Delta^{2(j-1)}}(\sigma(1)) = 0$, sınır koşulu sağlandığından

$$y^{\Delta^{2(j-1)}}(t) = \int_0^{\sigma(1)} G(t,s) f(s, y^\sigma(s)) \Delta s$$

dir. Böylece

$$y^{\Delta^{2(j-1)}}(t) = \int_{s=0}^{\sigma(1)} G(t,s) f(s, y^\sigma(s)) \Delta s$$

$$y^{\Delta^{2i}}(0) = y^{\Delta^{2i}}(\sigma(1)) = 0, \quad 0 \leq i \leq j-2$$

probleminin çözümü

$$y(t) = \int_{r=0}^{\sigma(1)} G_{j-1}(t,r) \int_{s=0}^{\sigma(1)} G(r,s) f(s, y^\sigma(s)) \Delta s \Delta r$$

şeklindedir. Başka bir ifadeyle

$$y(t) = \int_{r=0}^{\sigma(1)} \int_{s=0}^{\sigma(1)} G_{j-1}(t,r) G(r,s) f(s, y^\sigma(s)) \Delta s \Delta r$$

iki katlı integrali ile ifade edebiliriz ve integral sınırlarının sabit oluşundan

$$= \int_{s=0}^{\sigma(1)} \int_{r=0}^{\sigma(1)} G_{j-1}(t, r) G(r, s) f(s, y^\sigma(s)) \Delta r \Delta s$$

şeklinde yazabiliriz.

Ayrıca $y(t)$ fonksiyonu (3.7)-(3.8) probleminde bir çözümdür ve

$$y(t) = \int_{s=0}^{\sigma(1)} G_j(t, s) f(s, y^\sigma(s)) \Delta s$$

şeklindedir. Böylece

$$G_j(t, s) = \int_{r=0}^{\sigma(1)} G_{j-1}(t, r) G(r, s) \Delta r$$

elde edilir. □

Özellik 3.1.4 $\forall (t, s) \in [0, \sigma(1)] \times [0, 1]$ için $1 \leq j \leq n$ olmak üzere

$$(-1)^j G_j(t, s) \geq 0 \tag{3.9}$$

dır.

İspat İspatı j üzerinden tümevarım ile yapacağız. $(t, s) \in [0, \sigma(1)] \times [0, 1]$ için

$$G(t, s) = \frac{1}{\sigma(1)} \begin{cases} t(\sigma(s) - \sigma(1)), & t \leq s \\ \sigma(s)(t - \sigma(1)), & t \geq \sigma(s) \end{cases}$$

fonksiyonu $G(t, s) \leq 0$ eşitliğini sağlar. Buradan

$$-G(t, s) \geq 0$$

olduğu görülür. Öyleyse $j = 1$ için (3.9) ifadesi doğrudur.

$j = k - 1$ için $(-1)^{k-1} G_{k-1}(t, s) \geq 0$ doğru olsun. Özellik 3.1.3 ten

dolayı $G_k(t, s) = \int_0^{\sigma(1)} G_{k-1}(t, r) G(r, s) \Delta r$ olduğundan

$$(-1)^k G_k(t, s) = \int_0^{\sigma(1)} (-1)^{k-1} G_{k-1}(t, r) (-1)^k G(r, s) \Delta r$$

olur. $(-1)^{k-1} G_{k-1}(t, r) \geq 0$, $(-1)^k G(r, s) \geq 0$ ve integral özelliklerinden $j = k$ için

$$(-1)^k G_k(t, s) \geq 0$$

dır. Böylece $1 \leq j \leq n$ olmak üzere $(-1)^j G_j(t, s) \geq 0$ dır.

□

Önerme 3.1.1 $\forall (t, s) \in [0, \sigma(1)] \times [0, 1]$ için

$$(-1)^n G_n(t, s) = |G_n(t, s)| \leq \left(\frac{\sigma(1)}{4} \right)^n \quad (3.10)$$

dır.

İspat İspatı n üzerinden tümevarım ile yapacağız. İlk olarak

$\forall (t, s) \in [0, \sigma(1)] \times [0, 1]$ için

$$|G(t, s)| \leq |G(\sigma(s), s)|$$

olduğunu gösterelim. (3.5) ile verilen Green's fonksiyonun tanımından

$$\left| \frac{G(t,s)}{G(\sigma(s),s)} \right| = \begin{cases} \frac{t(\sigma(1) - \sigma(s))}{\sigma(s)(\sigma(1) - \sigma(s))}, & t \leq s \\ \frac{\sigma(s)(\sigma(1) - t)}{\sigma(s)(\sigma(1) - \sigma(s))}, & t \geq \sigma(s) \end{cases}$$

elde edilir. Buradan $G(t,s)$ nin

$$|G(t,s)| \leq |G(\sigma(s),s)|$$

eşitsizliğini sağladığı görülür. $s \in [0, \sigma(1)]$ için

$$|G(\sigma(s),s)| = \frac{\sigma(s)(\sigma(1) - \sigma(s))}{\sigma(1)} := h(\sigma(s))$$

olsun. O halde $x \in [0, \sigma(1)]$ için

$h(x) := \frac{x(\sigma(1) - x)}{\sigma(1)}$ dır. $x_0 \in \mathbb{R}$ $h(x)$ in ekstremum noktası olsun. O halde

$$h'(x_0) = \frac{\sigma(1) - 2x_0}{\sigma(1)} = 0 \text{ ve böylece } x_0 = \frac{\sigma(1)}{2} \text{ bulunur.}$$

$h''(x) = \frac{-2}{\sigma(1)} \leq 0$ olduğundan $x_0 = \frac{\sigma(1)}{2}$, $h(x)$ için maksimum noktadır.

Buradan $h(x_0) = \frac{\sigma(1)}{4}$, $h(x)$ fonksiyonunun maksimum değeridir. Bu nedenle

$$|G(\sigma(s),s)| = \frac{\sigma(s)(\sigma(1) - \sigma(s))}{\sigma(1)} \leq \frac{\sigma(1)}{4} \quad (3.11)$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece $\forall (t,s) \in [0, \sigma(1)] \times [0,1]$ için

$$G(t, s) \leq \frac{\sigma(1)}{4} \quad (3.12)$$

eşitsizliği doğrudur.

$$(-1)^k G_k(t, s) = |G_k(t, s)| \leq \left(\frac{\sigma(1)}{4}\right)^k$$

olduğunu kabul edelim. (3.6), (3.9) ve (3.12) kullanılarak kabulden dolayı

$$\begin{aligned} (-1)^{k+1} G_{k+1}(t, s) &= |G_{k+1}(t, s)| \leq \int_0^{\sigma(1)} |G_k(t, r)| |G(r, s)| \Delta r \\ &\leq \int_0^{\sigma(1)} \frac{\sigma(1)}{4} |G_k(t, s)| \Delta r \\ &= \frac{\sigma(1)}{4} \left(\int_0^1 |G_k(t, r)| \Delta r + \int_1^{\sigma(1)} |G_k(t, r)| \Delta r \right) \\ &\leq \frac{\sigma(1)}{4} \left(\left(\frac{\sigma(1)}{4}\right)^k + |G_k(t, 1)| (\sigma(1) - 1) \right) \\ &\leq \frac{\sigma(1)}{4} \left(\left(\frac{\sigma(1)}{4}\right)^k + (\sigma(1) - 1) \int_0^{\sigma(1)} |G_{k-1}(t, r)| |G(r, 1)| \Delta r \right) \end{aligned}$$

elde edilir. $|G(r, 1)| = 0$ olduğundan dolayı

$$(-1)^{k+1} G_{k+1}(t, s) = |G_{k+1}(t, s)| \leq \left(\frac{\sigma(1)}{4}\right)^{k+1}$$

eşitliği doğrudur.

□

Tezin bundan sonraki bölümünde

$$\xi := \min \left\{ t \in T : t \geq \frac{\sigma(1)}{4} \right\} \quad \text{ve}$$

$$\omega := \max \left\{ t \in T : t \leq \frac{3\sigma(1)}{4} \right\}$$

değerlerinin var olduğunu ve $\frac{\sigma(1)}{4} \leq \xi \leq \omega \leq \frac{3\sigma(1)}{4}$ eşitsizliğinin sağlandığını

kabul edeceğiz. Ayrıca, eğer $\sigma(\omega) = 1$ ise, $\sigma(\omega) < \sigma(1)$ kabul edeceğiz.

Önerme 3.1.2 $\forall (t, s) \in [0, \sigma(1)] \times [0, 1]$ için

$$(-1)^n G_n(t, s) = |G_n(t, s)| \leq \left(\frac{\sigma(1)}{4} \right)^{n-1} \frac{\sigma(s)(\sigma(1) - \sigma(s))}{\sigma(1)} \quad (3.13)$$

dir.

İspat İspatı n üzerinden tümevarım yöntemiyle yapacağız.

$(t, s) \in [0, \sigma(1)] \times [0, 1]$ için (1.5) ten kolayca görülebilirki

$$|G_1(t, s)| = |G(t, s)| \leq \frac{\sigma(s)(\sigma(1) - \sigma(s))}{\sigma(1)} \quad (3.14)$$

olur. Öyleyse (3.13) eşitsizliği $n=1$ için doğrudur. $n=k$ için (3.13) eşitsizliğinin var olduğunu kabul edelim. Böylece $(t, s) \in [0, \sigma(1)] \times [0, 1]$ için

$$\begin{aligned}
|G_{k+1}(t,s)| &\leq \int_{r=0}^{\sigma(1)} |G_k(t,r)| |G(r,s)| \Delta r \\
&\leq \int_{r=0}^{\sigma(1)} \left(\frac{\sigma(1)}{4}\right)^{k-1} \frac{\sigma(r)(\sigma(1)-\sigma(r))}{\sigma(1)} \frac{\sigma(s)(\sigma(1)-\sigma(s))}{\sigma(1)} \Delta r \\
&= \left(\frac{\sigma(1)}{4}\right)^{k-1} \frac{\sigma(s)(\sigma(1)-\sigma(s))}{\sigma(1)} \int_{r=0}^{\sigma(1)} \frac{\sigma(r)(\sigma(1)-\sigma(r))}{\sigma(1)} \Delta r \\
&\leq \left(\frac{\sigma(1)}{4}\right)^{k-1} \frac{\sigma(s)(\sigma(1)-\sigma(s))}{\sigma(1)} \left(\int_{r=0}^1 \frac{\sigma(r)(\sigma(1)-\sigma(r))}{\sigma(1)} \Delta r \right. \\
&\quad \left. + \int_{r=1}^{\sigma(1)} \frac{\sigma(r)(\sigma(1)-\sigma(r))}{\sigma(1)} \Delta r \right) \\
&\leq \left(\frac{\sigma(1)}{4}\right)^{k-1} \frac{\sigma(s)(\sigma(1)-\sigma(s))}{\sigma(1)} \left(\frac{\sigma(1)}{4} + \frac{\sigma(1)(\sigma(1)-\sigma(1))}{\sigma(1)} (\sigma(1)-1) \right) \\
&\leq \left(\frac{\sigma(1)}{4}\right)^k \frac{\sigma(s)(\sigma(1)-\sigma(s))}{\sigma(1)}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bundan dolayı (3.13) eşitsizliği $n = k + 1$ doğrudur.

□

Önerme 3.1.3 $\delta \in (0, \frac{\sigma(1)}{2})$ verilsin. $\forall (t, s) \in [\delta, \sigma(1) - \delta] \times [0, 1]$ için

$$\theta_n(\delta) = \left(\frac{\delta}{\sigma(1)} \right)^n \left(\delta^2 \frac{\sigma(1) - 2\delta}{\sigma(1)} \right)^{n-1}$$

olmak üzere

$$(-1)^n G_n(t, s) = |G_n(t, s)| \geq \theta_n(\delta) \frac{\sigma(s)(\sigma(1) - \sigma(s))}{\sigma(1)} \quad (3.15)$$

eşitsizliği vardır.

İspat İspatı n üzerinden tümevarım ile yapacağız.

$(t, s) \in [\delta, \sigma(1) - \delta] \times [0, 1]$ için (3.5) kullanılarak

$$\frac{\delta}{\sigma(1)} \leq \left| \frac{G(t, s)}{G(\sigma(s), s)} \right| = \begin{cases} \frac{t(\sigma(1) - \sigma(s))}{\sigma(s)(\sigma(1) - \sigma(s))}, & t \leq s \\ \frac{\sigma(s)(\sigma(1) - t)}{\sigma(s)(\sigma(1) - \sigma(s))}, & t \geq \sigma(s) \end{cases}$$

elde edilir. Böylece,

$$|G(t, s)| \geq \frac{\delta}{\sigma(1)} |G(\sigma(s), s)| = \frac{\delta}{\sigma(1)} \frac{\sigma(s)(\sigma(1) - \sigma(s))}{\sigma(1)}$$

olur ve $n = 1$ için (3.15) eşitsizliğinin doğru olduğu görülür.

Kabul edelim ki (3.15) eşitsizliği $n = k$ için doğru olsun. $(t, s) \in [\delta, \sigma(1) - \delta] \times [0, 1]$ için ve $\sigma(r) \geq r \geq \delta$ olduğundan

$$\begin{aligned}
|G_{k+1}(t, s)| &= \int_{r=0}^{\sigma(1)} G_k(t, r) \|G(r, s)\| \Delta r \\
&\geq \int_{r=0}^{\sigma(1)} \theta_k(\delta) \frac{\sigma(r)(\sigma(1) - \sigma(r))}{\sigma(1)} \frac{\delta}{\sigma(1)} \frac{\sigma(s)(\sigma(1) - \sigma(s))}{\sigma(1)} \Delta r \\
&= \theta_k(\delta) \frac{\delta}{\sigma(1)} \frac{\sigma(s)(\sigma(1) - \sigma(s))}{\sigma(1)} \frac{1}{\sigma(1)} \int_{r=0}^{\sigma(1)} \sigma(r)(\sigma(1) - \sigma(r)) \Delta r \\
&\geq \theta_k(\delta) \frac{\delta}{\sigma(1)} \frac{\sigma(s)(\sigma(1) - \sigma(s))}{\sigma(1)} \frac{\delta}{\sigma(1)} \int_{r=\delta}^{\sigma(1)-\delta} (\sigma(1) - \sigma(r)) \Delta r \\
&= \theta_k(\delta) \left(\frac{\delta}{\sigma(1)} \right)^2 \frac{\sigma(s)(\sigma(1) - \sigma(s))}{\sigma(1)} \left(\int_{r=\delta}^{\sigma(1)-\delta} \sigma(1) \Delta r - \int_{r=\delta}^{\sigma(1)-\delta} \sigma(r) \Delta r \right) \\
&= \theta_k(\delta) \left(\frac{\delta}{\sigma(1)} \right)^2 \frac{\sigma(s)(\sigma(1) - \sigma(s))}{\sigma(1)} \left(\sigma(1)(\sigma(1) - 2\delta) - \left(rr \Big|_{\delta}^{\sigma(1)-\delta} - \int_{r=\delta}^{\sigma(1)-\delta} r \Delta r \right) \right) \\
&\geq \theta_k(\delta) \left(\frac{\delta}{\sigma(1)} \right)^2 \frac{\sigma(s)(\sigma(1) - \sigma(s))}{\sigma(1)} \left(\sigma(1)(\sigma(1) - 2\delta) - ((\sigma(1) - \delta)^2 - \delta^2) + \int_{r=\delta}^{\sigma(1)-\delta} \delta \Delta r \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \theta_k(\delta) \left(\frac{\delta}{\sigma(1)} \right)^2 \frac{\sigma(s)(\sigma(1) - \sigma(s))}{\sigma(1)} \left(\sigma^2(1) - 2\sigma(1)\delta + \sigma^2(1) + 2\sigma(1)\delta + \delta(\sigma(1) - 2\delta) \right) \\
&= \theta_k(\delta) \left(\frac{\delta}{\sigma(1)} \right)^2 \frac{\sigma(s)(\sigma(1) - \sigma(s))}{\sigma(1)} \delta(\sigma(1) - 2\delta) \\
&= \left(\frac{\delta}{\sigma(1)} \right)^k \left(\delta^2 \frac{\sigma(1) - 2\delta}{\sigma(1)} \right)^{k-1} \left(\frac{\delta}{\sigma(1)} \right)^2 \frac{\sigma(s)(\sigma(1) - \sigma(s))}{\sigma(1)} \delta(\sigma(1) - 2\delta) \\
&= \left(\frac{\delta}{\sigma(1)} \right)^{k+1} \left(\delta^2 \frac{\sigma(1) - 2\delta}{\sigma(1)} \right)^k \frac{\sigma(s)(\sigma(1) - \sigma(s))}{\sigma(1)} \\
&= \theta_{k+1}(\delta) \frac{\sigma(s)(\sigma(1) - \sigma(s))}{\sigma(1)}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (3.15) eşitsizliği $n = k + 1$ için doğru olur.

□

Ayrıca Önerme 3.1.2 kullanılarak

$$\begin{aligned}
(-1)^n G_n(t, s) &\geq \theta_n(\delta) \frac{\sigma(s)(\sigma(1) - \sigma(s))}{\sigma(1)} \\
&\geq \theta_n(\delta) \left(\frac{4}{\sigma(1)} \right)^{n-1} \max_{t \in [0, \sigma(1)]} |G_n(t, s)|
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. $\delta = \frac{\sigma(1)}{4} \in (0, \frac{\sigma(1)}{2})$ için

$$\theta_n \left(\frac{\sigma(1)}{4} \right) \left(\frac{4}{\sigma(1)} \right)^{n-1} = \frac{(\sigma(1))^{n-1}}{2^{5n-3}} \geq \frac{1}{2^{5n-3}}$$

olduğundan

$$(-1)^n G_n(t, s) \geq \frac{1}{2^{5n-2}} \max_{t \in [0, \sigma(1)]} |G_n(t, s)|$$

eşitsizliği elde edilir, burada $\gamma_n = \frac{1}{2^{5n-3}}$ olmak üzere $0 < \gamma_n < 1$ dır.

Özellik 3.1.4 $\forall (t, s) \in [0, \sigma(1)] \times [0, 1]$ için Green's fonksiyonu $G_n(t, s)$ süreklidir.

İspat $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ vardırki $|t_1 - t_2| < \delta$ iken

$$|G_n(t_1 - s) - G_n(t_2 - s)| < \varepsilon$$

olduğunu göstereceğiz.

$\varepsilon > 0$ verilsin. İspatı n üzerinde tümevarım ile yapacağız.

$$|G_1(t_1 - s) - G_1(t_2 - s)| = |G(t_1 - s) - G(t_2 - s)|$$

$$= \left| \frac{1}{\sigma(1)} \begin{cases} t_1(\sigma(s) - \sigma(1)), & t_1 \leq s \\ \sigma(s)(t_1 - \sigma(1)), & t_1 \geq \sigma(s) \end{cases} - \frac{1}{\sigma(1)} \begin{cases} t_2(\sigma(s) - \sigma(1)), & t_2 \leq s \\ \sigma(s)(t_2 - \sigma(1)), & t_2 \geq \sigma(s) \end{cases} \right|$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sigma(1)} \left\{ \begin{array}{ll} t_1(\sigma(s) - \sigma(1)) - t_2(\sigma(s) - \sigma(1)), & t_{1,2} \leq s \\ t_1(\sigma(s) - \sigma(1)) - \sigma(s)(t_2 - \sigma(1)), & t_1 \leq s \leq \sigma(s) \leq t_2 \\ \sigma(s)(t_1 - \sigma(1)) - t_2(\sigma(s) - \sigma(1)), & t_2 \leq s \leq \sigma(s) \leq t_1 \\ \sigma(s)(t_1 - \sigma(1)) - \sigma(s)(t_2 - \sigma(1)), & t_{1,2} \geq \sigma(s) \end{array} \right. \\
&= \frac{1}{\sigma(1)} \left\{ \begin{array}{ll} (t_1 - t_2)(\sigma(s) - \sigma(1)), & t_{1,2} \leq s \\ t_1\sigma(s) - t_2\sigma(1) - \sigma(s)t_2 - t_2\sigma(1), & t_1 \leq s \leq \sigma(s) \leq t_2 \\ \sigma(s)t_1 - \sigma(s)\sigma(1) - t_2\sigma(s) - t_2\sigma(1), & t_2 \leq s \leq \sigma(s) \leq t_1 \\ \sigma(s)t_1 - \sigma(s)\sigma(1) - \sigma(s)t_2 - \sigma(s)\sigma(1), & t_{1,2} \geq \sigma(s) \end{array} \right. \\
&= \frac{1}{\sigma(1)} \left\{ \begin{array}{ll} |t_1 - t_2|(\sigma(s) - \sigma(1)), & t_{1,2} \leq s \\ \sigma(s)(t_1 - t_2) - \sigma(1)(t_1 - \sigma(s)), & t_1 \leq s \leq \sigma(s) \leq t_2 \\ \sigma(s)(t_1 - t_2) - \sigma(1)(-t_2 + \sigma(s)), & t_2 \leq s \leq \sigma(s) \leq t_1 \\ \sigma(s)(t_1 - t_2), & t_{1,2} \geq \sigma(s) \end{array} \right. \\
&\leq \frac{1}{\sigma(1)} \left\{ \begin{array}{ll} |t_1 - t_2| |\sigma(s) - \sigma(1)|, & t_{1,2} \leq s \\ \sigma(s)|t_1 - t_2| + \sigma(1)|t_1 - \sigma(s)|, & t_1 \leq s \leq \sigma(s) \leq t_2 \\ \sigma(s)|t_1 - t_2| + \sigma(1)|\sigma(s) - t_2|, & t_2 \leq s \leq \sigma(s) \leq t_1 \\ \sigma(s)|t_1 - t_2|, & t_{1,2} \geq \sigma(s) \end{array} \right. \\
&\leq \frac{1}{\sigma(1)} \left\{ \begin{array}{ll} |t_1 - t_2| \sigma(1), & t_{1,2} \leq s \\ \sigma(s)|t_1 - t_2| + \sigma(1)|t_1 - t_2|, & t_1 \leq s \leq \sigma(s) \leq t_2 \\ \sigma(s)|t_1 - t_2| + \sigma(1)|t_1 - t_2|, & t_2 \leq s \leq \sigma(s) \leq t_1 \\ \sigma(1)|t_1 - t_2|, & t_{1,2} \geq \sigma(s) \end{array} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sigma(1)} \begin{cases} \sigma(1)|t_1 - t_2|, & t_{1,2} \leq s \\ 2\sigma(1)|t_1 - t_2|, & t_1 \leq s \leq \sigma(s) \leq t_2 \\ 2\sigma(1)|t_1 - t_2|, & t_2 \leq s \leq \sigma(s) \leq t_1 \\ \sigma(1)|t_1 - t_2|, & t_{1,2} \geq \sigma(s) \end{cases} \\
&\leq \frac{1}{\sigma(1)} 2\sigma(1)|t_1 - t_2| \leq 2\delta = \varepsilon
\end{aligned}$$

olduğundan $G_1(t, s)$ süreklidir.

$n = k$ için $|G_k(t_1, s) - G_k(t_2, s)| \leq \varepsilon$ doğru olsun.

$n = k + 1$ için

$$\begin{aligned}
|G_{k+1}(t_1, s) - G_{k+1}(t_2, s)| &\leq \int_{r=0}^{\sigma(1)} |G_k(t_1, r) - G_k(t_2, r)| |G(r, s)| \Delta r \\
&\leq \varepsilon \int_{r=0}^{\sigma(1)} \frac{\sigma(s)(\sigma(1) - \sigma(s))}{\sigma(1)} \Delta r \\
&\leq \varepsilon \left(\frac{\sigma(1)}{2} \right)^2
\end{aligned}$$

olduğundan $G_{k+1}(t, s)$ süreklidir. \square

Bu bölümde, (3.1)-(3.2) LSDP nin çözümünün varlığını ve tekliğini inceleyeceğiz. Bunun için öncelikle gerekli olan bilgileri vereceğiz.

3.2 Varlık Prensibi

Teorem 3.2.1 (Schauder Sabit Nokta Teoremi) [9] E bir Banach uzay ve $A : E \rightarrow E$ tamamen süreklili bir operatör olsun. $K \subset E$ sınırlı, kapalı ve konveks bir küme olmak üzere A operatörü K kümesini invaryant bırakıyor ($A(K) \subset K$) ise bu durumda A operatörünün K içinde en az bir sabit noktası vardır.

Tanım 3.2.1 Eğer bir dönüşüm süreklili ve kompakt ise bu dönüşüme tamamen süreklili denir.

Tanım 3.2.2 Eğer bir kümenin elemanlarının her dizisinden yakınsak bir alt dizi seçilebiliyorsa bu küme pre kompakt küme denir. Yakınsadığı değer, küme içinde ise bu küme kompakt küme denir.

Tanım 3.2.3 Eğer bir dönüşüm her sınırlı kümeyi pre kompakt bir küme dönüşürüyorsa bu dönüşüme kompakt dönüşüm denir.

Teorem 3.2.2 (Arzela-Ascoli Teoremi)[6] Bir $M \subset C[a, b]$ kümesinin süreklili fonksiyonlar ailesinin pre kompakt olması için gerek ve yeter koşul M ye ait fonksiyonların aynı dereceden sınırlı (equi-bounded) ve aynı dereceden süreklili (equi-continuous) olmasıdır.

Tanım 3.2.4 M , $C[a,b]$ içinde bir küme olsun.

- $\forall x \in M$, $\forall t \in [a,b]$ için $|x(t)| \leq c$ olacak şekilde bir c sayısı varsa M kümesine ait fonksiyonlara aynı dereceden sınırlı fonksiyonlar denir.
- $\varepsilon > 0$ verilsin, $\forall t_1, t_2 \in [a,b]$ ve $\forall x \in M$ için $|t_1 - t_2| < \delta$ eşitsizliği sağlandığında $|x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı bulunabiliyorsa M kümesine ait fonksiyonlara aynı dereceden sürekli fonksiyonlar denir.

Teorem 3.2.3 $f(t, y^\sigma(t))$, $[0, \sigma(1)] \times \mathbb{R}$ üzerinde sürekli olsun ve $Q > 0$ sayısı

$$Q \geq \max \left\{ |f(t, y^\sigma(t))| : t \in [0, \sigma(1)], \|y\| \leq M \right\}$$

eşitsizliği sağlasın ; eğer $M > 0$ sayısı

$$\left(\frac{\sigma(1)}{4} \right)^n Q \leq M$$

eşitsizliğini sağlarsa, bu durumda

$$(-1)^n y^{\Delta^{2n}}(t) = f(t, y^\sigma(t)), \quad t \in [0, 1]$$

$$y^{\Delta^{2i}}(0) = y^{\Delta^{2i}}(\sigma(1)) = 0, \quad 0 \leq i \leq n-1$$

Lidstone sınır değer probleminin bir $y(t)$ çözümü vardır.

İspat B uzayını, $\|y\| := \max_{t \in [0, \sigma(1)]} |y(t)|$ ile normlanmış $B = C[0, \sigma(1)]$ Banach uzayı olarak tanımlayalım. $K := \{y \in B : \|y\| \leq M\}$ olsun. K, B nin kapalı, sınırlı ve konveks bir alt kümesidir. (3.1)-(3.2) Lidstone sınır değer problemini çözmek

$$y(t) = \int_{s=0}^{\sigma(1)} (-1)^n G_n(t, s) f(s, y^\sigma(s)) \Delta s$$

integral denklemini çözmeye denktir. Bundan dolayı,

$A : K \rightarrow B, t \in [0, \sigma(1)]$ için

$$Ay(t) := \int_{s=0}^{\sigma(1)} (-1)^n G_n(t, s) f(s, y^\sigma(s)) \Delta s$$

ile tanımlanan operatörü sabit noktasını bulmaya denktir.

$A : K \rightarrow B$ sürekli olduğunu gösterelim.

$\varepsilon > 0$ verilsin. $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ vardır, öyleki $\|y - y_0\| < \delta$ eşitsizliği sağlandığında

$\|Ay - Ay_0\| < \varepsilon$ olur.

$$\begin{aligned} \|Ay(t) - Ay_0(t)\| &= \left| \int_{s=0}^{\sigma(1)} (-1)^n G_n(t, s) [f(s, y^\sigma(s)) - f(s, y_0^\sigma(s))] \Delta s \right| \\ &\leq \int_{s=0}^{\sigma(1)} |G_n(t, s)| |f(s, y^\sigma(s)) - f(s, y_0^\sigma(s))| \Delta s \end{aligned}$$

$f(s, y^\sigma(s))$ fonksiyonu $[0, \sigma(1)] \times \mathbb{R}$ üzerinde sürekli fonksiyon olduğundan

$$\|y - y_0\| < \delta \Leftrightarrow \max_{t \in [0, \sigma(1)]} |y(t) - y_0(t)| < \delta$$

eşitliği doğrudur. O halde $t \in [0, \sigma(1)]$ için

$$|y(t) - y_0(t)| < \delta$$

elde edilir.

$\|y_0\| = \max_{t \in [0, \sigma(1)]} |y_0(t)| \stackrel{def}{=} c_1$ ise her $t \in [0, \sigma(1)]$ için $|y_0(t)| \leq c_1$ yazılır.

$|y - y_0| < \delta$ ise norm özelliğinden dolayı,

$$|\|y\| - \|y_0\|| < \delta$$

yazılır ve bu durumda her $t \in [0, \sigma(1)]$ için

$$-\delta + c_1 < \|y\| < \delta + c_1$$

elde edilir.

Kapalı ve sınırlı

$$E \stackrel{def}{=} \{(t, \tau) : 0 \leq t \leq 1, |\tau| < 1 + c_1\} \subset [0, 1] \times \mathbb{R}$$

kümesini alalım. $f(t, \tau)$ fonksiyonu E bölgesi üzerinde sürekli olduğundan yine bu bölgede sürekli olacaktır. Bu halde başta ele aldığımız ε 'a göre öyle bir $\delta > 0$ ($\delta < 1$) bulabiliriz ki

$$|t_1 - t_2| < \delta, \quad |\tau_1 - \tau_2| < \delta \quad \text{olmak üzere her } (t_1, \tau_1), (t_2, \tau_2) \in B \text{ için}$$

$$|f(t_1, \tau_1) - f(t_2, \tau_2)| < \varepsilon$$

elde edilir. Böylece,

$$\begin{aligned} |Ay(t) - Ay_0(t)| &\leq \varepsilon \int_{s=0}^{\sigma(1)} |G_n(t, s)| \Delta s \\ &\leq \varepsilon \left(\frac{\sigma(1)}{4} \right)^{n-1} \int_{r=0}^{\sigma(1)} \frac{\sigma(s)(\sigma(1) - \sigma(s))}{\sigma(1)} \Delta s \\ &\leq \varepsilon \left(\frac{\sigma(1)}{4} \right)^{n-1} \left(\int_{r=0}^1 \frac{\sigma(s)(\sigma(1) - \sigma(s))}{\sigma(1)} \Delta s + \int_{r=1}^{\sigma(1)} \frac{\sigma(s)(\sigma(1) - \sigma(s))}{\sigma(1)} \Delta s \right) \\ &\leq \varepsilon \left(\frac{\sigma(1)}{4} \right)^n = \varepsilon_1 \end{aligned}$$

Bu eşitsizlikte her iki taraftan maksimuma geçerek

$$\|Ay(t) - Ay_0(t)\| \leq \varepsilon$$

eşitsizliği elde edilir ve bu eşitsizlik bize A operatörünün sürekli olduğunu gösterir.

Şimdi A operatörünün kompakt olduğunu gösterelim. bu amaçla herhangi sınırlı $K \subset [0, \sigma(1)]$ kümesini ele alalım. $A(K)$ kümesinin $C[0, \sigma(1)]$ içinde pre kompakt olduğunu göstermemiz gerekiyor.

Bunu göstermek için Arzela-Ascoli Teoreminden yararlanacağız.

$y \in K$ alalım.

$$\begin{aligned}
|Ay(t)| &= \left| \int_{s=0}^{\sigma(1)} (-1)^n G_n(t,s) f(s, y^\sigma(s)) \Delta s \right| \\
&\leq \int_{s=0}^{\sigma(1)} |G_n(t,s)| |f(s, y^\sigma(s))| \Delta s \\
Q &\geq \max \left\{ |f(t, y^\sigma(t))| : t \in [0, \sigma(1)], \|y\| \leq M \right\}
\end{aligned}$$

olduğu için

$$\begin{aligned}
|Ay(t)| &= Q \int_{s=0}^{\sigma(1)} |G_n(t,s)| \Delta s \\
&\leq Q \left(\frac{\sigma(1)}{4} \right)^{n-1} \int_{r=0}^{\sigma(1)} \frac{\sigma(s)(\sigma(1) - \sigma(s))}{\sigma(1)} \Delta s \\
&\leq Q \left(\frac{\sigma(1)}{4} \right)^n \leq M
\end{aligned}$$

eşitsizliği bulunur. Bu eşitsizlikte her iki taraftan maksimuma geçerse her $y \in K$ için

$$\|Ay(t)\| \leq M$$

elde edilir. Böylece $A(K)$ ya ait fonksiyonlar aynı dereceden sınırlı ve A operatörü K kümesini invaryant bırakır.

$y \in K$ alalım.

Verilen her $\varepsilon > 0$ sayısı için öyle $\delta > 0$ bulunabilir ki $|t_1 - t_2| < \delta$ için

$$|Ay(t_1) - Ay(t_2)| < \varepsilon$$

olduğunu gösterelim.

$$|Ay(t_1) - Ay(t_2)| \leq \int_{s=0}^{\sigma(1)} |G_n(t_1, s) - G_n(t_2, s)| |f(s, y^\sigma(s))| \Delta s$$

$f(s, y^\sigma(s))$ fonksiyonu sürekli olduğundan kapalı bölgede sınırlıdır.

Bu nedenle

$$\max_{\substack{s \in [0, \sigma(1)] \\ |y| \leq M}} |f(s, y^\sigma(s))| \stackrel{def}{=} c_2$$

olarak tanımlarsak,

$$|Ay(t_1) - Ay(t_2)| \leq \varepsilon c_2 \sigma(1)$$

elde edilir. Böylece $A(K)$ ya ait fonksiyonlar aynı dereceden sürekli dir.

Arzelo-Ascoli Teoremi ile $A : K \rightarrow K$ kompakt bir operatördür.

Schauder Sabit Nokta Teoreminden dolayı A operatörü K da bir sabit noktaya sahiptir.

□

Sonuç 3.2.1 $f(t, y^\sigma(t))$, $[0, \sigma(1)] \times \mathbb{R}$ de sınırlı ve sürekli ise (3.1)-(3.2) Lidstone sınır değeri probleminin bir çözümü vardır.

İspat $f(t, y^\sigma(t))$ sınırlı olduğundan sup değeri vardır. Bu nedenle

$$P > \sup \left\{ \left| f(t, y^\sigma(t)) \right| : 0 \leq t \leq 1, y^\sigma \in \mathbf{R} \right\}$$

olacak şekilde bir P ve $P \left(\frac{\sigma(1)}{4} \right)^n < M$ olacak şekilde yeterince büyük M sayısı seçebiliriz. Böylece,

$$Q \geq \max \left\{ \left| f(t, y^\sigma(t)) \right| : t \in [0, \sigma(1)], \|y\| \leq M \right\}$$

olmak üzere $P \geq Q$ olacak şekilde bir Q sayısı vardır ve

$$\left(\frac{\sigma(1)}{4} \right)^n < \frac{M}{P} \leq \frac{M}{Q}$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece Teorem 3.2.3 ten dolayı (3.1)-(3.2) LSDP nin bir çözümü vardır.

□

3.3 Alt ve Üst Çözümler

$$D := \left\{ y : y^{\Delta^{2n}}(t), [0, \sigma(1)] \text{ de sürekli} \right\}$$

kümesini ve $u, v \in D$ için

$$[u, v] := \{ w \in D : u \leq w \leq v \}$$

aralığını tanımlayalım.

Tanım 3.3.1 $u \in D$ fonksiyonu için,

$$\begin{aligned} (-1)^n u^{\Delta^{2n}}(t) &\leq f(t, u^\sigma(t)), & t \in [0, 1] \\ (-1)^i u^{\Delta^{2i}}(0) &\leq 0, \quad (-1)^i u^{\Delta^{2i}}(\sigma(1)) \leq 0, & 0 \leq i \leq n-1 \end{aligned}$$

şartları sağlanıyorsa; $u(t)$, $[0, \sigma(1)]$ üzerinde (3.1)-(3.2) probleminin bir alt çözümdür denir.

Benzer şekilde; $v \in D$ fonksiyonu için

$$\begin{aligned} (-1)^n v^{\Delta^{2n}}(t) &\geq f(t, v^\sigma(t)), & t \in [0, 1] \\ (-1)^i v^{\Delta^{2i}}(0) &\geq 0, \quad (-1)^i v^{\Delta^{2i}}(\sigma(1)) \geq 0, & 0 \leq i \leq n-1 \end{aligned}$$

şartları sağlanıyorsa; $v(t)$, $[0, \sigma(1)]$ üzerinde (3.1)-(3.2) probleminin bir üst çözümdür denir.

Özellik 3.3.1 $u(t) \in C^2[0, \sigma(1)]$ olsun. $u(t)$ fonksiyonu

$$\begin{aligned} -u^{\Delta\Delta} &\geq 0, & t \in [0, 1] \\ u(0) &\geq 0, \quad u(\sigma(1)) \geq 0 \end{aligned}$$

şartlarını sağlıyorsa; $t \in [0, \sigma(1)]$ için $u(t) \geq 0$ dır.

İspat $-u^{\Delta\Delta} \geq 0$ olduğundan $u(t)$ nin $[0,1]$ üzerinde konkav fonksiyon olduğu açıktır. Sınır koşullarından ve $u(t)$ nin konkavlığından $t \in [0, \sigma(1)]$ için $u(t) \geq 0$ dır. \square

Özellik 3.3.2 $u(t) \in C^{2n}[0, \sigma(1)]$ olsun. $u(t)$ fonksiyonu

$$(-1)^n u^{\Delta^{2n}} \geq 0, \quad t \in [0,1] \quad (3.16)$$

$$(-1)^i u^{\Delta^{2i}}(0) \geq 0, \quad (-1)^i u^{\Delta^{2i}}(\sigma(1)) \geq 0, \quad 0 \leq i \leq n-1 \quad (3.17)$$

şartlarını sağlıyorsa; $t \in [0, \sigma(1)]$ için $u(t) \geq 0$ dır.

İspat $v_{n-1}(t) := (-1)^{n-1} u^{\Delta^{2(n-1)}}(t)$ olarak tanımlayalım.

Bu durumda, $t \in [0,1]$ için $-v_{n-1}^{\Delta\Delta} \geq 0$ ve sınır koşulları (3.17) den

$$v_{n-1}(0) = (-1)^{n-1} u^{\Delta^{2(n-1)}}(0) \geq 0, \quad v_{n-1}(\sigma(1)) = (-1)^{n-1} u^{\Delta^{2(n-1)}}(\sigma(1)) \geq 0$$

dır. Böylece, Özellik 3.3.1 den $t \in [0, \sigma(1)]$ için $v_{n-1}(t) \geq 0$ dır.

Benzer şekilde, $v_{n-2}(t) := (-1)^{n-2} u^{\Delta^{2(n-2)}}(t)$ olarak tanımlarsak $t \in [0,1]$ için

$-v_{n-2}^{\Delta\Delta} \geq 0$ ve sınır koşulları (3.17) den

$$v_{n-2}(0) = (-1)^{n-2} u^{\Delta^{2(n-2)}}(0) \geq 0, \quad v_{n-2}(\sigma(1)) = (-1)^{n-2} u^{\Delta^{2(n-2)}}(\sigma(1)) \geq 0$$

dır. Böylece, Özellik 3.3.1 den $t \in [0, \sigma(1)]$ için $v_{n-2}(t) \geq 0$ dır.

Bu şekilde devam ederek $t \in [0,1]$ için $-u^{\Delta\Delta} \geq 0$ ve $u(0) \geq 0$, $u(\sigma(1)) \geq 0$ elde ederiz. Buda bize Özellik 3.3.1 den $t \in [0, \sigma(1)]$ için $u(t) \geq 0$ olduğunu gösterir.

□

Teorem 3.3.1 $f(t, y^\sigma)$, $[0, \sigma(1)] \times \mathbb{R}$ de sürekli olsun. (3.1)-(3.2) Lidstone sınır değer probleminin $t \in [0, \sigma(1)]$ için $u(t) \leq v(t)$ olacak şekilde bir $u(t)$ alt çözümü ve bir $v(t)$ üst çözümü var ise bu durumda (3.1)-(3.2) probleminin $[0, \sigma(1)]$ de

$$u(t) \leq y(t) \leq v(t)$$

olacak şekilde bir $y(t)$ çözümü vardır.

İspat $t \in [0,1]$ için

$$F(t, \xi) = \begin{cases} f(t, v^\sigma(t)) - \frac{\xi - v^\sigma(t)}{1 + |\xi|}, & \xi \geq v^\sigma(t) \\ f(t, \xi), & u^\sigma(t) \leq \xi \leq v^\sigma(t) \\ f(t, u^\sigma(t)) - \frac{\xi - u^\sigma(t)}{1 + |\xi|}, & \xi \leq u^\sigma(t) \end{cases}$$

fonksiyonunu tanımlayalım.

$F(t, y^\sigma(t))$, $[0, \sigma(1)] \times \mathbb{R}$ de sürekli ve sınırlıdır, ayrıca $u^\sigma(t) \leq \xi \leq v^\sigma(t)$ ise $F(t, \xi) = f(t, \xi)$ olur.

Sonuçtan dolayı,

$$(-1)^n y^{\Delta^{2n}}(t) = F(t, y^\sigma(t)), \quad t \in [0,1] \quad (3.18)$$

$$y^{\Delta^{2i}}(0) = y^{\Delta^{2i}}(\sigma(1)) = 0, \quad 0 \leq i \leq n-1 \quad (3.19)$$

Lidstone sınır değer probleminin bir $y(t)$ çözümü vardır. İspatı tamamlamak için problemin çözümünün $[0, \sigma(1)]$ aralığında $u(t) \leq y(t) \leq v(t)$ eşitsizliğini sağladığını göstermeliyiz.

Bunun için öncelikle bu aralıkta $y(t) \leq v(t)$ olduğunu göstereceğiz. Bu eşitsizliği ispatlamak için olmayana ergi yöntemi kullanılarak tersinin doğru olduğunu kabul edelim. Bu durumda $t \in [0,1]$ için

$$y^\sigma(t) - v^\sigma(t) \geq 0 \quad \text{ve}$$

$$\begin{aligned} (-1)^n y^{\Delta^{2n}}(t) &= F(t, y^\sigma(t)) \\ &= f(t, v^\sigma(t)) - \frac{y^\sigma(t) - v^\sigma(t)}{1 + |y^\sigma(t)|} \\ &\leq f(t, v^\sigma(t)) \\ &\leq (-1)^n v^{\Delta^{2n}}(t) \end{aligned}$$

elde edilir.

Buradan, $(-1)^n (y-v)^{\Delta^{2n}}(t) \leq 0$ eşitsizliğini ve sınır koşullarından $0 \leq i \leq n-1$ için $(-1)^i (y-v)^{\Delta^{2i}}(0) \leq 0$ ve $(-1)^i (y-v)^{\Delta^{2i}}(\sigma(1)) \leq 0$; eşitsizliklerini elde ederiz. O halde, Özellik 3.3.2 den $t \in [0, \sigma(1)]$ için $y(t) - v(t) \leq 0$ olur ki, buda bizim kabulümüz ile çelişir. Bu nedenle, her $t \in [0, \sigma(1)]$ için $y(t) \leq v(t)$ elde edilir.

Benzer şekilde bu aralıkta $u(t) \leq y(t)$ olduğunu gösterelim. Bu eşitsizliği ispatlamak için olmayana ergi yöntemi kullanılarak tersinin doğru olduğunu kabul edelim. Bu durumda $t \in [0,1]$ için

$$y^\sigma(t) - u^\sigma(t) \leq 0 \quad \text{ve}$$

$$\begin{aligned} (-1)^n y^{\Delta^{2n}}(t) &= F(t, y^\sigma(t)) \\ &= f(t, u^\sigma(t)) - \frac{y^\sigma(t) - u^\sigma(t)}{1 + |y^\sigma(t)|} \\ &\geq f(t, u^\sigma(t)) \\ &\geq (-1)^n u^{\Delta^{2n}}(t) \end{aligned}$$

elde edilir.

Buradan, $(-1)^n (y - u)^{\Delta^{2n}}(t) \geq 0$ eşitsizliğini ve sınır koşullarından $0 \leq i \leq n-1$ için $(-1)^i (y - u)^{\Delta^{2i}}(0) \geq 0$ ve $(-1)^i (y - u)^{\Delta^{2i}}(\sigma(1)) \geq 0$; eşitsizliklerini elde ederiz. O halde, Özellik 3.3.2 den $t \in [0, \sigma(1)]$ için $y(t) - u(t) \geq 0$ olur ki, buda kabulümüz ile çelişir. Bu nedenle, her $t \in [0, \sigma(1)]$ için $u(t) \leq y(t)$ elde edilir. Böylece, $y(t)$ fonksiyonu (3.1)-(3.2) probleminin $u(t) \leq y(t) \leq v(t)$ olacak şekilde bir çözümüdür.

□

Örnek 3.3.1

$$\begin{aligned} (-1)^3 y^{\Delta^6}(t) &= \sin y^\sigma(t) - y^\sigma(t), & t \in [0,1] \\ y^{\Delta^{2i}}(0) &= y^{\Delta^{2i}}(\sigma(1)) = 0, & 0 \leq i \leq 3 \end{aligned}$$

Lidstone sınır değer problemini ele alalım.

$u(t) = 0$ için

$$(-1)^3 u^{\Delta^6}(t) = 0 \leq \sin u^\sigma(t) - u^\sigma(t) = 0, \quad t \in [0,1]$$

$$(-1)^i u^{\Delta^{2i}}(0) \leq 0 \quad \text{ve} \quad (-1)^i u^{\Delta^{2i}}(\sigma(1)) \leq 0, \quad 0 \leq i \leq 3$$

olur. O halde, $u(t) = 0$, $[0, \sigma(1)]$ de bir alt çözümdür.

$v(t) = \frac{\pi}{2}$ için

$$(-1)^3 v^{\Delta^6}(t) = 0 \geq \sin v^\sigma(t) - v^\sigma(t) = 1 - \frac{\pi}{2}, \quad t \in [0,1]$$

$$(-1)^i v^{\Delta^{2i}}(0) \geq 0 \quad \text{ve} \quad (-1)^i v^{\Delta^{2i}}(\sigma(1)) \geq 0, \quad 0 \leq i \leq 3$$

olur. O halde, $v(t) = \frac{\pi}{2}$, $[0, \sigma(1)]$ de bir üst çözümdür. Böylece, Teorem 3.3.1

den problemin $[0, \sigma(1)]$ üzerinde $0 \leq y(t) \leq \frac{\pi}{2}$ çözümü vardır.

3.4 Pozitif Çözümlerin Varlığı

Bu bölümde, $f : [0, \sigma(1)] \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ sürekli olmak üzere

$$(-1)^n y^{\Delta^{2n}}(t) = f(t, y^\sigma(t)), \quad t \in [0,1],$$

$$y^{\Delta^{2i}}(0) = y^{\Delta^{2i}}(\sigma(1)) = 0, \quad 0 \leq i \leq n-1$$

nonlinear Lidstone sınır değer problemini ele alarak, bu problemin Guo-Krasnosel'skii sabit nokta teoremi yardımı ile $f_0 = 0$, $f_\infty = \infty$ ve $f_0 = \infty$, $f_\infty = 0$ durumları altında problemin pozitif çözümünün varlığı incelenecektir.

Bu nedenle bu bölümde,

$$f_0 := \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{f(t, y)}{y}, \quad f_\infty := \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{f(t, y)}{y}$$

olmak üzere genişletilmiş reel sayılarda limitlerin var olduğunu kabul edeceğiz. $f_0 = 0$ ve $f_\infty = \infty$ olma durumuna superlinear durum, $f_0 = \infty$ ve $f_\infty = 0$ olma durumuna da sublinear durum denir.

Teorem 3.4.1 (Guo-Krasnosel'skii sabit nokta teoremi) B bir Banach uzayı ve $P \subseteq B$ bir koni olsun. Ω_1, Ω_2 P 'nin açık alt kümeleri olmak üzere $0 \in \Omega_1$ ve $\overline{\Omega_1} \subset \Omega_2$ olsun. Ayrıca

$$T : P \cap (\overline{\Omega_2} \setminus \Omega_1) \rightarrow P$$

tamamen sürekli bir operatör olmak üzere

- (i) $\|Tu\| \leq \|u\|$, $u \in P \cap \partial\Omega_1$ ve $\|Tu\| \geq \|u\|$, $u \in P \cap \partial\Omega_2$ veya
- (ii) $\|Tu\| \geq \|u\|$, $u \in P \cap \partial\Omega_1$ ve $\|Tu\| \leq \|u\|$, $u \in P \cap \partial\Omega_2$

koşullarından birisi sağlanıyorsa T operatörünün bir sabit noktası vardır.

Teorem 3.4.2 Eğer $f_0 = 0$ ve $f_\infty = \infty$ superlinear veya $f_0 = \infty$ ve $f_\infty = 0$ sublinear durumlardan birisi sağlanıyorsa, (3.1)-(3.2) LSDP nin bir pozitif çözümü vardır.

İspat B uzayını, $\|y\| := \max_{t \in [0, \sigma(1)]} |y(t)|$ ile normlanmış $B = \{y : y \in C[0, \sigma(1)]\}$

Banach uzayı olarak tanımlayalım. γ_n Önerme 3.1.3 te verilen sabit olmak üzere

$$\gamma_n^* := \min \left\{ \gamma_n, \left(\frac{4}{\sigma(1)} \right)^n \min_{s \in [\xi, \omega]} (-1)^n G_n(\sigma(\omega), s) \right\}$$

olsun. B de P konisi olarak

$$P := \left\{ y \in B : \min_{t \in [0, \sigma(1)]} y(t) \geq 0 \quad \text{ve} \quad \min_{t \in [\xi, \sigma(\omega)]} y(t) \geq \gamma_n^* \|y\| \right\}$$

tanımlayalım. P nin $C[0, \sigma(1)]$ uzayına ait negatif olmayan fonksiyonlardan oluşan bir koni olduğu açıktır.

$T : P \rightarrow B$ operatörünü $t \in [0, \sigma(1)]$ için

$$T y(t) := \int_{s=0}^{\sigma(1)} (-1)^n G_n(t, s) f(s, y^\sigma(s)) \Delta s$$

ile tanımlayalım ve bu operatörün tamamen sürekli olduğunu gösterelim. Bunun için T operatörünün sürekli ve kompakt olduğunu göstermeliyiz. T operatörünün sürekli olduğu, Teorem 3.2.3 deki A operatörünün sürekliliğinin gösterildiği gibi kolayca görülebilir.

T operatörünün $T : P \rightarrow P$ olduğunu yani P konisini invaryant bıraktığını gösterelim. Her $y \in P$ ve her $t \in [0, \sigma(1)]$ için $(-1)^n G_n(t, s) \geq 0$

olduğundan $Ty(t) \geq 0$ ve dolayısıyla $\min_{t \in [0, \sigma(1)]} Ty(t) \geq 0$ dir. Önerme 3.1.3

kullanılarak

$$\begin{aligned}
 \min_{t \in [\zeta, \omega]} Ty(t) &= \int_{s=0}^{\sigma(1)} \min_{t \in [\zeta, \omega]} (-1)^n G_n(t, s) f(s, y^\sigma(s)) \Delta s \\
 &\geq \gamma_n \int_{s=0}^{\sigma(1)} \max |G_n(t, s)| f(s, y^\sigma(s)) \Delta s \\
 &\geq \gamma_n \|Ty\| \\
 &\geq \gamma_n^* \|Ty\|
 \end{aligned}$$

eşitsizliği ve Önerme 3.1.2 kullanılarak

$$\begin{aligned}
 Ty(\sigma(\omega)) &= \int_{s=0}^{\sigma(1)} (-1)^n G_n(\sigma(\omega), s) f(s, y^\sigma(s)) \Delta s \\
 &\geq \gamma_n^* \int_{s=0}^{\sigma(1)} \left(\frac{\sigma(1)}{4} \right)^n f(s, y^\sigma(s)) \Delta s \\
 &\geq \gamma_n^* \|Ty\|
 \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece $Ty \in P$ dir.

Ayrıca, $\max_{y \in P} \left\{ \min_{t \in [\zeta, \sigma(\omega)]} Ty(t) \right\} \geq \gamma_n^* \|Ty\|$ olduğundan $T(P)$ ye ait fonksiyonlar aynı

dereceden sınırlıdır.

Şimdide $T(P)$ ye ait fonksiyonların aynı dereceden sürekli olduğunu gösterelim.

$y \in P$ alalım.

Verilen her $\varepsilon > 0$ sayısı için öyle bir $\delta > 0$ bulabiliriz ki $|t_1 - t_2| < \delta$ için

$$|T y(t_1) - T y(t_2)| \leq \int_{s=0}^{\sigma(1)} |G_n(t_1, s) - G_n(t_2, s)| |f(s, y^\sigma(s))| \Delta s$$

yazılır. $G_n(t, s)$ fonksiyonunun sürekli oluşundan $|t_1 - t_2| < \delta$ için

$|G_n(t_1, s) - G_n(t_2, s)| < \varepsilon$ eşitsizliği sağlanacak şekilde öyle bir $\delta > 0$ sayısı

vardır. Böylece,

$$|T y(t_1) - T y(t_2)| \leq \varepsilon \int_{s=0}^{\sigma(1)} |f(s, y^\sigma(s))| \Delta s$$

elde edilir.

$f(t, y^\sigma(t))$ fonksiyonu sürekli olduğundan $[0, \sigma(1)]$ de sınırlıdır. Bu nedenle

$$\max_{s \in [0, \sigma(1)]} |f(s, y^\sigma(s))| \stackrel{def}{=} c_1$$

olarak tanımlarsak

$$|T y(t_1) - T y(t_2)| \leq \varepsilon c_1 \sigma(1)$$

elde edilir. Böylece $T(P)$ ye ait fonksiyonlar aynı dereceden süreklidir. Arzela-Ascoli Teoremi ile $T : P \rightarrow P$ kompakt bir operatördür. Bu nedenle T sürekli ve kompakt olduğundan tamamen süreklidir.

Superlineer durum olan $f_0 = 0$ ve $f_\infty = \infty$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $[0, \sigma(1)]$ üzerin $\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{f(t, y)}{y} = 0$ dır. O halde $\forall \eta > 0$ için $\exists r > 0$

vardır ki $0 \leq y \leq r$ ve $t \in [0, \sigma(1)]$ için $f(t, y) \leq \eta y$ dır. Öyleyse ,

$$\eta := \left(\frac{4}{\sigma(1)} \right)^n$$

için $\exists r > 0$ sayısı vardır ki

$$0 \leq y \leq r \text{ ve } 0 \leq t \leq \sigma(1) \text{ için } f(t, y) \leq \eta y$$

dır.

$\Omega_1 := \{y \in B : \|y\| < r\} \subset B$ açık yuvarını alalım. $y \in P \cap \partial\Omega_1$ için

$$\begin{aligned} T y(t) &= \int_{s=0}^{\sigma(1)} (-1)^n G_n(t, s) f(s, y^\sigma(s)) \Delta s \\ &\leq \int_{s=0}^{\sigma(1)} \left(\frac{\sigma(1)}{4} \right)^{n-1} \frac{\sigma(s)(\sigma(1) - \sigma(s))}{\sigma(1)} f(s, y^\sigma(s)) \Delta s \\ &\leq \eta \left(\frac{\sigma(1)}{4} \right)^{n-1} \int_{s=0}^{\sigma(1)} \frac{\sigma(s)(\sigma(1) - \sigma(s))}{\sigma(1)} y^\sigma(s) \Delta s \\ &\leq \eta r \left(\frac{\sigma(1)}{4} \right)^{n-1} \int_{s=0}^{\sigma(1)} \frac{\sigma(s)(\sigma(1) - \sigma(s))}{\sigma(1)} \Delta s \\ &\leq \eta \left(\frac{\sigma(1)}{4} \right)^n r = r = \|y\| \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece, $\forall y \in P \cap \partial\Omega_1$ için

$$\|T y\| \leq \|y\|$$

dır.

Diğer taraftan $[0, \sigma(1)]$ üzerinde $\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{f(t, y)}{y} = \infty$ dir.

$t_0 \in [\xi, \omega]$ alalım ve

$$\mu := \left(\gamma_n^* \int_{\xi}^{\omega} (-1)^n G_n(t_0, s) \Delta s \right)^{-1} > 0$$

sayısı için limit tanımından $\exists \bar{R} > 0$ vardır ki $y \geq \bar{R}$ için

$$f(t, y) \geq \mu y$$

dir. Eğer $R := \max \left\{ 2r, \frac{\bar{R}}{\gamma_n^*} \right\}$ olarak tanımlarsak ve $\Omega_2 := \{y \in B : \|y\| < R\} \subset B$

alırsak, $y \in P \cap \partial \Omega_2$ için

$$\min_{t \in [\xi, \sigma(\omega)]} y(t) \geq \gamma_n^* \|y\| = \gamma_n^* R \geq \bar{R}$$

olur. Böylece, $\forall t \in [\xi, \sigma(\omega)]$ için

$$f(t, y^\sigma(t)) \geq \mu y^\sigma(t) \geq \mu \gamma_n^* R$$

elde edilir. Bu durumda

$$T y(t_0) = \int_{s=0}^{\sigma(1)} (-1)^n G_n(t_0, s) f(s, y^\sigma(s)) \Delta s$$

$$\begin{aligned}
&\geq \int_{s=\xi}^{\omega} (-1)^n G_n(t_0, s) f(s, y^\sigma(s)) \Delta s \\
&\geq \mu \gamma_n^* \|y\| \int_{s=\xi}^{\omega} (-1)^n G_n(t_0, s) \Delta s \\
&= \|y\| = R
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece $\forall y \in P \cap \partial \Omega_2$ için

$$\|Ty\| \geq \|y\|$$

elde edilir.

Sonuç olarak, Teorem 3.4.1 (i) şikkından T operatörünün $P \cap (\overline{\Omega_2} \setminus \Omega_1)$ de bir sabit noktası vardır ve bu sabit nokta (3.1)-(3.2) LSDP nin bir pozitif çözümüdür.

Sublineer durum olan $f_0 = \infty$ ve $f_\infty = 0$ olduğunu kabul edelim. μ , ispatın ilk kısmındaki sabit sayı olmak üzere $\forall \bar{\eta} \geq \mu$ için $\exists r_1 > 0$ vardır ki

$$0 < y \leq r_1 \text{ ve } 0 \leq t \leq \sigma(1) \text{ için } f(t, y) \geq \bar{\eta} y$$

dır. Böylece, $\forall y \in P$ ve $\|y\| = r_1$ için

$$Ty(t_0) = \int_{s=0}^{\sigma(1)} (-1)^n G_n(t_0, s) f(s, y^\sigma(s)) \Delta s$$

$$\begin{aligned}
&\geq \int_{s=\xi}^{\omega} (-1)^n G_n(t_0, s) f(s, y^\sigma(s)) \Delta s \\
&\geq \bar{\eta} \int_{s=\xi}^{\omega} (-1)^n G_n(t_0, s) y^\sigma(s) \Delta s \\
&\geq \bar{\eta} \gamma_n^* \int_{s=\xi}^{\omega} (-1)^n G_n(t_0, s) \|y\| \Delta s \\
&= \|y\| \bar{\eta} \gamma_n^* \frac{1}{\mu \gamma_n^*} \\
&= \|y\| \frac{\bar{\eta}}{\mu} \geq \|y\| = r_1
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, $\Omega_1 \subset B$, r_1 yarı çaplı orijin merkezli yuvar ise

$\forall y \in P \cap \partial\Omega_1$ için

$$\|Ty\| \geq \|y\|$$

elde edilir. Diğer taraftan,

$$f_\infty = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{f(t, y)}{y} = 0 \text{ ise } \forall \eta > 0 \text{ için } \exists \bar{r}_2 > 0 \text{ vardır ki } y \geq \bar{r}_2 \text{ ve } 0 \leq t \leq \sigma(1)$$

için $f(t, y) \leq \eta y$ dir. Öyleyse,

$$\frac{1}{\eta} \geq \left(\frac{\sigma(1)}{4} \right)^n$$

için de $\exists \bar{r}_2 > 0$ vardır ki $y \geq \bar{r}_2$, $t \in [0, \sigma(1)]$ için

$$f(t, y) \leq \eta y$$

dır.

$f(t, y)$ için iki durum söz konusudur.

1.Durum $f(t, y)$ $[0, \sigma(1)] \times (0, \infty)$ da sınırlı olsun.

Öyleyse $\exists N > 0$ vardır ki $t \in [0, \sigma(1)]$, $y \in (0, \infty)$ için

$$f(t, y) \leq N$$

dir. Bu durumda

$$r_2 = \max\left\{2r_1, \frac{N}{\eta}\right\}$$

olarak seçebiliriz. Böylece $y \in P$, $\|y\| = r_2$ ve $\forall t \in [0, \sigma(1)]$ için

$$T y(t) = \int_{s=0}^{\sigma(1)} (-1)^n G_n(t, s) f(s, y^\sigma(s)) \Delta s$$

$$\leq N \int_{s=0}^{\sigma(1)} (-1)^n G_n(t, s) \Delta s$$

$$\leq N \left(\frac{\sigma(1)}{4} \right)^n$$

$$\leq \frac{N}{\eta} \leq r_2$$

eşitsizliği elde edilir.

O halde $\Omega_2 := \{y \in B : \|y\| < r_2\}$ açık yuvarı olmak üzere $\forall y \in P \cap \partial\Omega_2$ için

$$\|Ty\| \leq \|y\|$$

elde edilir.

2.Durum $f(t, y)$ $[0, \sigma(1)] \times (0, \infty)$ da sınırsız olsun. Bu durumda

$$g(r) := \max\{f(t, y) : t \in [0, \sigma(1)], 0 \leq y \leq r\}$$

olarak tanımlayalım ve $\lim_{r \rightarrow \infty} g(r) = \infty$ olsun.

Böylece $0 \leq r \leq r_2$ için

$$g(r_2) \geq g(r)$$

olacak şekilde $r_2 > \max\{2r, \overline{r_2}\}$ seçebiliriz.

Bu durumda $\forall y \in P$ ve $\|y\| = r_2$ için

$$Ty(t) = \int_{s=0}^{\sigma(1)} (-1)^n G_n(t, s) f(s, y^\sigma(s)) \Delta s$$

$$\leq \int_{s=0}^{\sigma(1)} (-1)^n G_n(t, s) g(r_2) \Delta s$$

$$\leq \eta r_2 \int_{s=0}^{\sigma(1)} (-1)^n G_n(t, s) \Delta s$$

$$\leq \eta r_2 \left(\frac{\sigma(1)}{4} \right)^n \leq r_2 = \|y\|$$

eşitsizliği elde edilir. Dolayısıyla $\Omega_2 := \{y \in B : \|y\| < r_2\}$ açık yuvarı için 2.durumda da $\forall y \in P \cap \partial\Omega_2$ için

$$\|Ty\| \leq \|y\|$$

elde edilir.

Sonuç olarak, Teorem 3.4.1 (ii) şikkından T operatörünün $P \cap (\overline{\Omega_2} \setminus \Omega_1)$ de bir sabit noktası vardır ve bu sabit nokta (3.1)-(3.2) LSDP nin bir pozitif çözümüdür.

□

5. SONUÇ

Bu tez çalışmasında zaman skalasında yüksek mertebeden Lidstone sınır değer probleminin Green's fonksiyonunun özellikleri incelenerek, monoton metod yardımıyla çözümün varlığı ve tekliğini verecek sonuçlar ispatlanmıştır. Son olarak bu problemin pozitif çözümlerinin varlığı ispatlanmıştır.

KAYNAKLAR DİZİNİ

1. Atıcı, F.M. and Guseinov, G.Sh., 2002, “On Green’s functions and positive solutions for boundry value problems on time scales”, J. Comput.Appl. Math., 141(1-2): 75-99 p.
2. Atıcı, F.M. and Topal, S.G., 2004, “Nonlinear three points boundary value problems on time scales”, Dynamic Systems App., 13: 327-337 p.
3. Bohner, M. and Peterson, A., 2001, “Dynamic Equations on Time scales, An Introduction with Applications”, Birkhauser.
4. Bohner, M. and Peterson, A., 2003, “Advances in Dynamic Equations on Time Scales”, Birkhauser Boston.
5. Davis, J. M., Eloe, P.W. and Henderson, J., 1999, “Triple positive solutions and dependence on higher derivatives”, J. Math. Anal. Appl. 237: 710-720 p.
6. Deimling, K., 1985, “Nonlinear Functional Analysis, Springer, Newyork”.
7. Eloe, P.W. and Henderson, J., 1989, “Comparison of eigenvalues for a class of two point boundary value problems”, Appl. Anal. 34: 25-34 p.
8. Henderson, J. and Prasad, K.R., 1999, “Comparison of eigen values for Lidstone boundary value problems on a measure chain”, Comput. Math. Appl. 38: 55-62 p.

9. Krasnosel'skii, M., 1964, "Positive Solutions of Operator Equations", Nordhoff, Groningen.
10. Wong, P. J.Y. and Agarwal, R. P., 1999, "Eigenvalues of Lidstone boundary value problems", Appl. Math. 104: 15-31 p.
11. Yao, Q., 2003, "Monotone iterative technique and positive solutions of Lidstone boundary value problems", Appl. Math. Comput., 138: 1-9 p.
12. Yao, Q., 2003, "On the positive solutions of Lidstone boundary value problems", Appl. Math Comput., 137: 477-485 p.
13. Cetin, E. and Topal, S. G., "Higher order boundary value problems on time scales", J. Math. Anal. Appl. (to appear).
14. Hilger, S., 1988, "Ein Masskettenkalkül mit Anwendug auf zentrumsmanningfaltigkeiten" Phd Thesis, Universitat Würzburg.
15. Agarwal, R. and Bohner, M., 1999, "Basic calculus on time scales and some of its applications", Results Math., 35(1-2):3-22 p.
16. Hilger, S., 1997, "Differential and Difference Calculus - Unified!", Nonlinear Analylsis, Vol:30, No.5 2683-2694 p.
17. Kaymakçalan, B., Laksmikatham, V. and Sivasundaram, S., 1996, "Dynamical Systems on Measure Chains", Math. And its Appl., Vol. 370, Kluwer Acedemic Publishers, Dordrecht.

18. Hilger, S., 1990, "Analysis on measure chains, a unified approach to continues and discrete calculus", Result in Mathematics Vol. 18. 18-56 p.
19. Erbe, L. and Hilger, S., 1993, "Sturmian theory on measure chains", Differential Equations and Dynamic Systems, Volume 1, Number 3, 223-246.
20. Guseinov, G. Sh., 2000-2001, "Zaman Skalasında dinamik sistemler I-II, Ders Notları"
21. Guseinov, G. Sh., and Kaymakçalan, B., 2002, "On the disconjugacy criterion for second order dynamic equtions on time scales", J. Comput. Appl. Math. Vol. 141(1-2):187-196 p.
22. Erbe, L. and Peterson, A., 2000, "Positive solutions for a nonlinear differential equation on a measure chain", Math. Comput . Modelling, Boundary Values Problem and Related Topics 32, 571-585 p.

ÖZGEÇMİŞ

03.06.1982 yılında Manyas'ta doğdu. İlköğrenimini ve orta öğrenimini Manyas'ta lise öğrenimini Gönen'de tamamladı. 2004 yılında Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü, Teorik Matematik Ağırlıklı Matematik Lisans öğretim programından mezun oldu.

2005 yılında Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü, Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Anabilim dalında yüksek lisansa başladı.