

CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SMARANDACHE YARIHALKALARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ayşe ÇÜRÜK

Anabilim Dalı: Matematik

Programı: Cebir ve Sayılar Teorisi

MANİSA 2007

İÇİNDEKİLER

Semboller	i
Teşekkür.....	ii
Özet.....	iii
Abstract.....	iv
Giriş.....	v
1.Bölüm	
Bazı Temel Kavramlar	
1.1.Latisler.....	1
1.2.Yarıgrup,Grup,S-yarıgrubu	10
1.3.Halka ve Cisimler.....	13
1.4.Grup Halkaları.....	16
2.Bölüm	
Yarıhalkalar ve Özellikleri	
2.1.Yarıhalkalar.....	18
2.2.Yarıhalkaların Özellikleri.....	22
2.3.Dağılmalı Latislerde Yarıhalkalar.....	26
2.4.Polinom Yarıhalkaları.....	31
2.5.Grup Yarıhalkaları ve Yarıgrup Yarıhalkaları.....	32
3.Bölüm	
Smarandache Yarıhalkaları	
3.1.Smarandache Yarıhalkaları.....	35
3.2.Smarandache Yarıhalkalarındaki Altyapılar.....	37
3.3.Smarandache Yarıhalkalarındaki Özel Elemanlar.....	47
3.4.Özel Smarandache Yarıhalkaları.....	54
3.5.İkinci Seviye Smarandache Yarıhalkaları.....	59
3.6.Smarandache Anti Yarıhalkaları.....	62
Referanslar.....	67
Özgeçmiş	

Semboller

\mathbb{Z} :Tamsayılar kümesi

\mathbb{Q} :Rasyonel sayılar kümesi

\mathbb{R} :Reel sayılar kümesi

\mathbb{Z}^+ :Pozitif tamsayılar kümesi

\mathbb{Q}^+ :Pozitif rasyonel sayılar kümesi

\mathbb{R}^+ :Pozitif reel sayılar kümesi

$$\mathbb{Z}^0 = \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$$

$$\mathbb{Q}^0 = \mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$$

$$\mathbb{R}^0 = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

Teşekkür

Tez çalışması boyunca gösterdiğimiz çabada, beni yüreklendiren, destekleyen ve boş zaman sağlayan tez hocam sayın Yrd. Doç. Dr. Mustafa Kazaz 'a desteklerinden dolayı teşekkür ederim.

Ayrıca yüksek lisansım süresince bilgilerinden faydalandığım hocalarım Yrd.Doç. Dr.Ali Özdemir, öğretim görevlileri Osman Kılıç ve Hüseyin Kocayiğit'e ve Yrd. Doç. Dr. Ali Mutlu'ya, fikirlerinden yararlandığım, benimle birlikte yüksek lisans yapan arkadaşım Umut Kuran'a da teşekkür ederim.

Faydalı bir çalışma olması dileğiyle...

Ayşe Çürük

Özet

Bu tez çalışmasının amacı Smarandache Yarıhalkaları ile ilgili kavramları inceleyip bu yarıhalkalarla ilgili özellikleri analiz etmek ve konuyla ilgili yapılmış çalışmalara ilavelerde bulunmaktır.

Yarıhalkalar, üzerlerindeki iki ikili işleme göre tanımlanan ve bir çok özelliklere sahip olan cebirsel yapılardır. Smarandache yarıhalkaları, yarıhalkalara göre daha kuvvetli cebirsel yapılara sahiptir. Her Smarandache yarıhalkası bir yarıhalkadır fakat her yarıhalka bir Smarandache yarıhalkası değildir. Bu çalışmada özellikle Smarandache sıfır bölen konusunda ilginç sonuçlar elde ettik. Bir yarıhalkada her sıfır bölenin bir Smarandache sıfır bölen olmadığını ve $S = \mathbb{Z}^0 \times \mathbb{Z}^0 \times \dots \times \mathbb{Z}^0$ (n defa, $n \geq 3$) yarıhalkasında her sıfır bölenin bir Smarandache sıfır bölen olduğunu ispatladık.

Çeşitli örneklerle konunun içeriğinin daha akıcı olmasını sağladık.

Abstract

The aim of the study is to examine the notions related with Smarandache semirings and to analyse the properties of these semirings and to make additions to the studies about this project.

Semirings are algebraic structures with two binary operations which have several properties. Smarandache semirings have stronger algebraic structures than semirings. Every Smarandache semiring is a semiring but not every semiring is a Smarandache semiring. In this work we study about especially Smarandache zero divisor. We prove that in a semiring every zero divisor is not a Smarandache zero divisor and in the semiring $S = \mathbb{Z}^0 \times \mathbb{Z}^0 \times \dots \times \mathbb{Z}^0$ (n times, $n \geq 3$), every zero divisor is a Smarandache zero divisor.

We give several examples to make the concept lucid.

Giriş

Sayılar teorisi ile ilgili önemli çalışmalar yapan Florentin Smarandache'ın Smarandache yarıhalkaları ile ilgili özellikleri Padilla Raul tarafından 1998 yılında "Smarandache Algebraic Structures" (Smarandache Cebirsel Yapıları) adlı kitapta ele alınmıştır.

Bu tez çalışmasında bu konuyla ilgili yapılan çalışmalardan faydalanılarak konuyla ilgili araştırma problemleri ve problemlerden bazıları çözülmüş ve ilgili bölümlere örnek veya teorem olarak sunulmuştur.

Çalışma üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde yarıgrup, grup, Smarandache yarıgrubu gibi kavramlardan bahsedilerek bunların hatırlanması sağlanacaktır. Yine bu bölümde Smarandache yarıhalkalarının inşasında oldukça sık kullanılan latislerle ilgili kavram ve örneklere yer verilecektir.

İkinci bölümde yarıhalkalar ve özellikleri ele alınacaktır. Yarıhalkaların inşasında latisler kullanılacak, polinom yarıhalkaları, grup yarıhalkaları, yarıgrup yarıhalkaları gibi kavramlar tanıtılacaktır .

Üçüncü bölümde Smarandache yarıhalkaları tanıtılarak her yarıhalkanın bir Smarandache yarıhalkası olmadığı gösterilecektir. Ayrıca bu bölümde S-sıfır bölen, S-idempotent eleman, S-ideal gibi kavramlar sunulacaktır. Yine bu bölümde birincilere nazaran daha zengin yapıya sahip olan II.seviye S-yarıhalkaları ele alındıktan sonra S-anti yarıhalkalarıyla da çalışma sona erecektir.

Her bölümde örnek problemler çözümlenerek kavramların ve teoremlerin daha iyi anlaşılabilmesi amaçlanmıştır.

BÖLÜM 1

BAZI TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde bu çalışmada kullanacağımız bazı temel tanımlara yer verip bunları birkaç örnekle açıklamaya çalışacağız.

1.1. Latisler

“Latis” ibaresi bazı kaynaklarda “örgü” bazı kaynaklarda ise “kafes” adı altında kullanılmıştır. Biz burada latis olarak kullanacağız.

Tanım 1.1.1 : A ve B boştan farklı iki küme olsun. A 'dan B 'ye bir R bağıntısı $A \times B$ 'nin bir alt kümesidir. Bir R bağıntısında $(a, b) \in R$ ise bu kısaca aRb olarak gösterilir.

A 'dan A 'ya bir R bağıntısına kısaca A üzerinde bir bağıntı denir. A üzerinde bir R bağıntısı aşağıdaki gibi bazı özelliklere sahip olabilir.

$\forall a \in A$ için aRa ise R yansıyandır.

$\forall a, b \in A$ için aRb olması bRa olmasını gerektiriyorsa R simetriktir.

$\forall a, b \in A$ için $aRb = bRa$ olması $a = b$ olmasını gerektiriyorsa R antisimetriktir.

$\forall a, b, c \in A$ için aRb ve bRc olması aRc olmasını gerektiriyorsa R geçişmelidir.

Eğer A 'daki R bağıntısı yansıma, simetri, geçişme özelliklerine sahipse R 'ye denklik bağıntısı denir. Bu durumda herhangi bir $a \in A$ 'nın denklik sınıfı, $[a] = \{b \in A \mid aRb\}$ kümesidir.

Tanım 1.1.2 : Boş olmayan bir A kümesi üzerinde yansıma, antisimetri ve geçişme özellikleri olan bir bağıntıya kısmi sıralama bağıntısı veya kısaca sıralama bağıntısı denir. Sıralama bağıntıları (özel bir sembol kullanılmadığında) “ \leq ” sembolüyle gösterilir. (A, \leq) ikilisi A kümesinin “ \leq ” bağıntısıyla kısmi sıralandığını gösterir. Bu durumda A 'ya kısmi sıralanmış küme veya poset denir. (Poset kelimesi “Partial Ordered Set” kelimelerin baş harfleriyle oluşturulmuştur.)

Bir (A, \leq) posetinde $x \leq y$ ve $x \neq y$ ise bu “ $x < y$ ” ile gösterilir.

Tanım 1.1.3 : (A, \leq) bir poset ve $(a, b) \in A \times A$ olmak üzere, $a \leq b$ veya $b \leq a$ ise a ve b elemanlarına “ \leq ” bağıntısına göre kıyaslanabilir elemanlar denir.

Eğer (A, \leq) posetindeki A 'nın bütün elemanları ikişer ikişer kıyaslanabilirse \leq bağıntısına total (tam) sıralama bağıntısı ve (A, \leq) sistemine de bir zincir denir.

Örnek 1.1.1 : $A = \{1, 2, 3, 4, 7\}$ olsun. Küçük yada eşit olma bağıntısını " \leq " olarak gösterirsek bu durumda (A, \leq) bir zincirdir.

Örnek 1.1.2 : $X = \{1, 2, 3\}$ kümesini alalım. X 'in kuvvet kümesi,

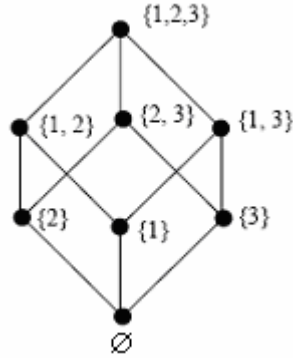
$P(X) = \{\emptyset, X, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$ şeklindedir. $P(X)$, " \subseteq " kapsama bağıntısına göre bir kısmi sıralama bağıntısıdır.

Sonlu elemanlı kısmi sıralı kümeler Hasse diyagramıyla gösterilir. Buna göre Örnek 1.1.1 deki A 'nın poseti aşağıdaki şekilde gösterilir, (Şekil 1.1.1).



Şekil 1.1.1

Örnek 1.1.2 deki $P(X)$ 'in poseti aşağıdaki gibidir, (Şekil 1.1.2).



Şekil 1.1.2

Tanım 1.1.4 : (A, \leq) bir poset ve $B \subseteq A$ olmak üzere A içinde B 'nin her elemanından büyük bir eleman varsa, buna B 'nin bir üst sınırı denir. Benzer şekilde A içinde B 'nin her elemanından küçük bir elemanı varsa buna da B 'nin bir alt sınırı denir. B 'nin en büyük alt

sınırına B 'nin infimumu denir ve $\inf B$ ile gösterilir. B 'nin en küçük üst sınırına B 'nin supremumu denir ve $\sup B$ ile gösterilir.

Tanım 1.1.5 : (L, \leq) bir poset olsun. Eğer her $(x, y) \in L$ için $\sup(x, y) \in L$ veya $\inf(x, y) \in L$ ise (L, \leq) 'ye bir yarı latis sıralama denir.

Tanım 1.1.6 : (L, \leq) bir poset olsun. Her $(x, y) \in L$ için hem $\sup(x, y) \in L$ ve hem de $\inf(x, y) \in L$ ise (L, \leq) 'ye bir latis sıralama denir.

Tanımlardan aşağıdaki sonuçları verebiliriz.

Sonuç : 1) Her sıralı küme latis sıralıdır.

2) (L, \leq) latis sıralı kümesinde her x için aşağıdaki ifadeler denktir.

a) $x \leq y$

b) $\sup(x, y) = y$

c) $\inf(x, y) = x$.

Latisler üzerinde kullanılan cebirsel işlemleri aşağıdaki gibi tanımlayacağız.

Tanım 1.1.7 : Boştan farklı bir L kümesi üzerindeki iki ikili işlem " \cup " (birleşim) ve " \cap " (kesişim) olsun. Eğer her $x, y, z \in L$ için aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa (L, \cap, \cup) 'ye bir "cebirsel latis" adı verilir.

$$L_1 : x \cap y = y \cap x, \quad x \cup y = y \cup x$$

$$L_2 : x \cap (y \cap z) = (x \cap y) \cap z, \quad x \cup (y \cup z) = (x \cup y) \cup z$$

$$L_3 : x \cap (x \cup y) = x, \quad x \cup (x \cap y) = x$$

L_3 'ü kullanarak yani $x \cap x = x \cap (x \cup (x \cap x)) = x$ olmasıyla yeni bir özelliğe yani L_4 'e ulaşılır:

$$L_4 : x \cap x = x, \quad x \cup x = x \text{ olur.}$$

Burada L_1 değişme, L_2 birleşme, L_3 yutma ve L_4 idempotent özelliği olarak adlandırılır.

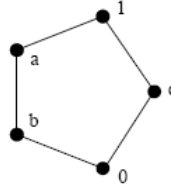
Latis sıralı kümelerle cebirsel latisler arasındaki bağlantılardan aşağıdaki sonuçları verebiliriz:

Sonuç : 1) (L, \leq) bir latis sıralı küme olsun. $x \cap y = \inf(x, y) = x$ ve $x \cup y = \sup(x, y) = y$ olarak tanımlanırsa (L, \cap, \cup) bir cebirsel latis olur.

2) (L, \cap, \cup) cebirsel latis olsun. Eğer, " $x \leq y \Leftrightarrow x \cap y = x$ " (veya " $x \leq y \Leftrightarrow x \cup y = y$ ") şeklinde tanımlarsak bu durumda (L, \leq) bir latis sıralı küme olur.

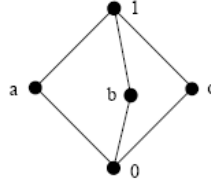
Yukarıdaki sonuçlara göre latis sıralı kümelerle cebirsel latisler arasında birebir bağıntı kurulabileceğini gördük. Şimdi latislerle ilgili örnekler verelim:

Örnek 1.1.3 : L_4^5 aşağıdaki Hasse diyagramında verilen latis olsun. Buna "beşgen latis" adı verilir.



Şekil 1.1.3: L_4^5 beşgen latis.

Örnek 1.1.4 : L_3^5 aşağıdaki Hasse diyagramında verilen latis olsun. Buna "elmas latis" adı verilir.



Şekil 1.1.4: L_3^5 elmas latis.

Tanım 1.1.8 : (L, \leq) bir latis olsun. Eğer " \leq " kısmi sıralama bağıntısı ve L bir latis sıralı ise L 'ye bir zincir latis adı verilir. Yani bir zincir latisde her $a, b \in L$ için $a \leq b$ veya $b \leq a$ şeklindedir.

Örnek 1.1.5 : L kümesi $[a, b]$ kapalı aralığı olsun. $[a, b]$ kısmi sıralama bağıntısına göre bir zincir latisdir.

Örnek 1.1.6 : $[0, \infty)$ sonsuz mertebeli bir zincir latisdir.

Örnek 1.1.7 : $(-\infty, 1]$ sonsuz mertebeli bir zincir latisdir.

Örnek 1.1.8 : $L = \{0, 1\}$ iki elemanlı kümesini alalım. L zincir latisini aşağıdaki Hasse diyagramında gösteririz ve $L_2 (C_2)$ olarak adlandırırız.



Şekil 1.1.5: $L_2 (C_2)$ latis.

Tanım 1.1.9 : L bir latis ve S , L 'nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. Eğer S , L 'deki işleme göre bir latis oluyorsa S 'ye alt latis adı verilir.

Tanım 1.1.10 : L ve M herhangi iki latis olsun. $f : L \rightarrow M$ dönüşümüne ,

1. $x \cup y = z \Rightarrow f(x) \cup f(y) = f(z)$ ise birleşim homomorfizması,
2. $x \cap y = z \Rightarrow f(x) \cap f(y) = f(z)$ ise kesişim homomorfizması,
3. $x \leq y$ ise $f(x) \leq f(y)$ ($\forall x, y \in L$) ise sıralama homomorfizması

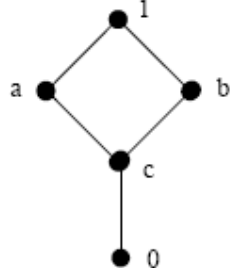
adı verilir.

Eğer f , hem birleşim hem kesişim homomorfizması ise f 'e latis homomorfizması denir.

Tanım 1.1.11 : L bir latis olsun. Eğer $\forall x, y, z \in L$ için, $x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z)$ veya $x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z)$ özelliklerinden herhangi biri sağlanıyorsa L 'ye dağılmalı latis denir.

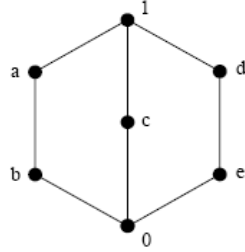
Tanım 1.1.12 : L bir latis olsun. Eğer $\forall x, y, z \in L$ için $x \leq y \Rightarrow x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$ oluyorsa L 'ye modüler latis denir.

Örnek 1.1.9 : Aşağıdaki Hasse diyagramıyla verilen L latisi dağılmalıdır.



Şekil 1.1.6

Örnek 1.1.10 :



Şekil 1.1.7

Yukarıdaki Hasse diyagramıyla verilen L latisini göz önüne alalım.

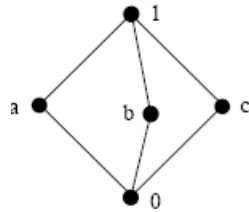
$$a \wedge (b \vee c) = a \wedge 1 = a \text{ ve}$$

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = b \vee 0 = b$$

olduğundan $a \wedge (b \vee c) \neq (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ dir.

Dolayısıyla L dağılmalı değildir.

Örnek 1.1.11 :



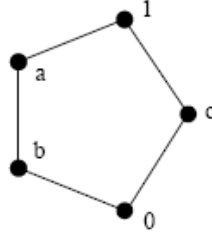
Şekil 1.1.8. Elmas latis

Yukarıdaki Hasse diyagramıyla verilen elmas latisini gözönüne alalım. Burada $a, b, c \in L$ için $a \wedge (b \vee c) \neq (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ olduğundan bu latis dağılmalı değildir.

Ayrıca $0, a, b \in L$ için $0 \leq b \Rightarrow 0 \vee (b \wedge a) = (0 \vee b) \wedge a$ ve

$a, b, 1 \in L$ için $a \leq b \Rightarrow a \vee (b \wedge 1) = (a \vee b) \wedge 1$ olduğundan bu latis latisi modülerdir.

Örnek 1.1.12 :



Şekil 1.1.9

Yukarıdaki Hasse diyagramıyla verilen beşgen latisini alalım. Burada $a, b, c \in L$ için $b \vee (a \wedge c) \neq (b \vee a) \wedge (b \vee c)$ olduğundan bu latis dağılmalı değildir.

Benzer şekilde $a, b, c \in L$ için $b \leq a \Rightarrow b \vee (a \wedge c) \neq (b \vee a) \wedge c$ olduğundan bu latis modüler değildir.

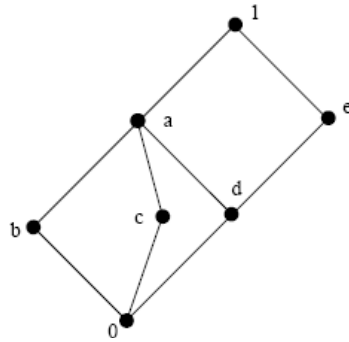
Örnek 1.1.13: Aşağıdaki L latisini göz önüne alalım. Burada $b, c, d \in L$ için

$$b \wedge (c \vee d) = b \wedge a = b \text{ ve}$$

$$(b \wedge c) \vee (b \wedge d) = 0 \vee 0 = 0$$

olduğundan $b \wedge (c \vee d) \neq (b \wedge c) \vee (b \wedge d)$ dir.

Dolayısıyla L dağılmalı değildir.



Şekil 1.1.10

Teorem 1.1.1 : Bütün zincir latisler dağılmalıdır.

İspat :



Şekil 1.1.11

Yukarıdaki latisde herhangi $0, a_2, a_3 \in L$ için $0 \vee (a_2 \wedge a_3) = (0 \vee a_2) \wedge (0 \vee a_3)$ dir.

Yine $a_2, a_3, 1 \in L$ için $a_2 \vee (a_3 \wedge 1) = (a_2 \vee a_3) \wedge (a_2 \vee 1)$ ve

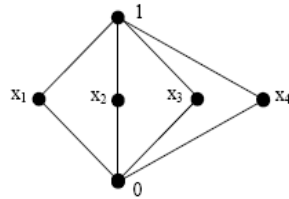
$a_{n-2}, a_{n-1}, 1 \in L$ için $a_{n-2} \vee (a_{n-1} \wedge 1) = (a_{n-2} \vee a_{n-1}) \wedge (a_{n-2} \vee 1)$

dir. Bu şekilde hangi 3 elemanı alırsak alalım “ \vee ” ve “ \wedge ” işlemlerine göre dağılma özelliği daima sağlanır. Dolayısıyla zincir latisler dağılmalı olur.

Tanım 1.1.13 : L bir latis olsun. Eğer her $x \in L$ için $x \cap y = 0$ ve $x \cup y = 1$ olacak şekilde en az bir $y \in L$ varsa y 'ye x 'in komplementi denir.

Eğer L 'deki bütün elemanların komplementi varsa L 'ye komplementli latis adı verilir.

Örnek 1.1.14:



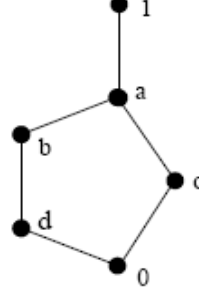
Şekil 1.1.12

Yukarıdaki Hasse diyagramıyla verilen L latisi için $x_i \cap x_j = 0$ ($i \neq j$) ve $x_i \cup x_j = 1$ ($i \neq j$)

dir. Yani her x_i elemanının komplementi $i \neq j$ iken x_j 'dir.

Sonuç : L dağılmalı bir latis olsun. Bu durumda her $x \in L$ 'nin en çok bir komplementi vardır. Bu x' şeklinde gösterilir.

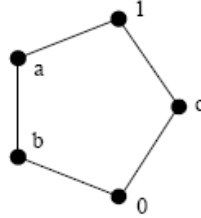
Örnek 1.1.15:



Şekil 1.1.13

Yukarıdaki Hasse diyagramıyla verilen latis komplementli değildir. Çünkü $d \in L$ için $d \wedge c = 0$ fakat $d \vee c = a$ dır. Oysa $d \vee c = 1$ olması gerekirdi. Bu durumda d 'nin komplementi yoktur. Üstelik L 'de 0 ve 1 hariç hiçbir elemanın komplementi yoktur. Dolayısıyla L komplementli değildir.

Örnek 1.1.16 : Aşağıdaki beşgen latisini alalım.



Şekil 1.1.14

$b \in L$ için $b \wedge c = 0$ ve $b \vee c = 1$ olduğundan b 'nin bir komplementi c 'dir.

Aynı şekilde $b \wedge a = 0$ ve $b \vee a = 1$ olduğundan b 'nin diğer bir komplementi a 'dır.

Tanım 1.1.14: Eğer bir L latis komplementli bir dağılmalı latis ise bu latis " Boolean cebiri " veya Boolean latisi denir. Boolean cebirindeki dağılma özelliği komplementlerin tekliğini garantiler. Yani Boolean latisinde de bir elemanın tek bir komplementi vardır.

Tanım 1.1.15: B_1 ve B_2 iki Boolean cebiri olsun. $\phi: B_1 \rightarrow B_2$ dönüşümü latis homomorfizmi olsun. Eğer bu dönüşüm $\forall x \in B_1$ için $\phi(x') = (\phi(x))'$ özelliğini sağlıyorsa $\phi: B_1 \rightarrow B_2$ dönüşümüne “Boolean cebiri homomorfizması” denir.

Örnek 1.1.17: $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ olsun. X 'in kuvvet kümesi $P(X)$ 16 elemanlı bir Boolean cebiridir.

1.2. Yarıgrup, Grup ve S-Yarıgrubu

Tanım 1.2.1: S boş kümeden farklı bir küme olsun. S üzerinde tanımlanan bir “*” işlemi

- 1) $\forall a, b \in S$ için $a * b \in S$ (kapalılık)
- 2) $\forall a, b, c \in S$ için $(a * b) * c = a * (b * c) \in S$ (birleşme)

özelliklerine sahipse $(S, *)$ 'ye bir yarı grup denir.

Tanım 1.2.2: Eğer $(S, *)$ yarıgrubunda $\forall a, b \in S$ için $a * b = b * a$ oluyorsa $(S, *)$ yarıgrubuna değişmeli yarı grup denir.

Eğer S yarıgrubundaki elemanlar sonlu sayıda ise S 'ye sonlu mertebeli aksi taktirde sonsuz mertebeli yarıgrup denir.

Eğer S yarıgrubu bir e elemanını $\forall a \in S$ için $a * e = e * a = a$ olacak şekilde içeriyorsa bu durumda S 'ye birimli yarıgrup veya monoid denir.

Eğer S monoidinde bir $x \in S$ için $xy = yx = e$ olacak şekilde bir $y \in S$ varsa y 'ye x 'nin tersi veya inversi denir.

Tanım 1.2.3: $(S, *)$ yarıgrup olsun. Boştan farklı bir $H \subset S$ alt kümesi S 'deki işleme göre bir yarıgrup oluyorsa H 'ye bir alt yarıgrup denir.

Tanım 1.2.4: $(S, *)$ bir yarıgrup ve S 'nin boştan farklı bir altkümesi I olsun. Eğer her $s \in S$ ve $i \in I$ için $is \in I$ ($si \in I$) oluyorsa I 'ya bir sağ (sol) ideal denir.

Eğer I hem sağ hem sol ideal oluyorsa I 'ya bir ideal denir.

Tanım 1.2.5 : $(S, *)$ ve (S_1, \circ) iki yarıgrup olsun. Eğer bir $\phi: (S, *) \rightarrow (S_1, \circ)$ dönüşümü $\phi(s_1 * s_2) = \phi(s_1) \circ \phi(s_2)$ ($\forall s_1, s_2 \in S$) özelliğini sağlıyorsa ϕ 'ye bir yarıgrup homomorfizmi denir.

Örnek 1.2.1 : $\mathbb{Z}_9 = \{0, 1, \dots, 8\}$ kümesi mod 9'a göre verilen çarpma işlemi ile mertebesi 9 olan birimli ve değişmeli bir yarıgruptur.

Örnek 1.2.2 : $S = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ kümesi mod 12'ye göre verilen çarpma işlemi ile değişmeli bir yarıgruptur. Bu yarıgrup birimli değildir.

Örnek 1.2.3 : \mathbb{Z} tam sayılar kümesi alışılmış çarpma işlemine göre mertebesi sonsuz olan değişmeli ve birimli bir yarıgruptur.

Örnek 1.2.4 : $2\mathbb{Z} = \{0, \mp 2, \mp 4, \dots, \mp 2n, \dots\}$ kümesi çarpma işlemine göre mertebesi sonsuz olan değişmeli bir yarıgruptur. Bu yarıgrup birimli değildir.

Örnek 1.2.5 : $S_{2 \times 2} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}_4 \right\}$ kümesini alalım. Bu küme mod 4'e göre matris çarpımı işlemine göre değişmeli olmayan, sonlu mertebeli bir yarıgruptur. Bu yarıgrupun birimi $I_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dir.

Örnek 1.2.6 : $M_{2 \times 2} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Q} \text{ (rasyonel sayılar cismi)} \right\}$ kümesini alalım. $M_{2 \times 2}$, matris çarpımı işlemine göre değişmeli olmayan, sonsuz mertebeli ve birimi $I_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ olan bir yarıgruptur.

Örnek 1.2.7 : (\mathbb{Z}, \bullet) yarıgrupunu alalım. $p\mathbb{Z} = \{0, \mp p, \mp 2p, \dots\}$ kümesi \mathbb{Z} 'nin bir idealidir.

Örnek 1.2.8 : $\mathbb{Z}_{14} = \{0, 1, \dots, 13\}$ kümesi mod 14'e göre çarpma işlemine göre bir yarıgruptur.

$I = \{0, 7\}$ ve $J = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ kümeleri \mathbb{Z}_{14} 'ün idealleridir.

Örnek 1.2.9 : $X = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ (n sonlu bir tamsayı) olmak üzere X 'in kendi üzerine olan bütün dönüşümlerinin kümesini $S(n)$ ile gösterelim. $S(n)$ bu dönüşümlerin bileşkesi işlemine göre bir monoiddir.

Tanım 1.2.6 : Boştan farklı bir G kümesi üzerinde bir " \bullet " ikili işlemini alalım. Eğer bu ikili işlem aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa (G, \bullet) 'ye bir grup denir.

- 1) $\forall a, b \in G$ için $a \bullet b \in G$ (kapalılık),
- 2) $\forall a, b, c \in G$ için $a \bullet (b \bullet c) = (a \bullet b) \bullet c$ (birleşme),
- 3) $\forall a \in G$ için $a \bullet e = e \bullet a = a$ olacak şekilde bir $e \in G$ vardır (birim eleman).
- 4) $\forall a \in G$ için $a \bullet a^{-1} = a^{-1} \bullet a = e$ olacak şekilde bir a^{-1} vardır (ters eleman).

Eğer bir G grubunda $\forall a, b \in G$ için $a \bullet b = b \bullet a$ oluyorsa G 'ye değişmeli grup denir. G 'deki farklı elemanların sayısına da G 'nin mertebesi denir.

Örnek 1.2.10: $S = \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$ (p asal) mod p 'ye göre verilen çarpma işlemi ile mertebesi $p-1$ olan değişmeli bir gruptur.

Tanım 1.2.7 : (G, \bullet) ve $(G_1, *)$ iki grup olsun. Bir $\phi = G \rightarrow G_1$ dönüşümü $\phi(a \bullet b) = \phi(a) * \phi(b)$ ($\forall a, b \in G$) özelliğini sağlıyorsa bu dönüşüme bir grup homomorfizmi denir.

Tanım 1.2.8 : (G, \bullet) bir grup ve $\emptyset \neq H \subset G$ olsun. Eğer H , G 'deki işleme göre bir grup oluyorsa H 'ye G 'nin bir alt grubu denir.

$X = \{x_1, \dots, x_n\}$ olsun. X 'in kendi üzerine bütün birebir dönüşümlerinin kümesini S_n ile gösterelim. S_n dönüşümlerin bileşke işlemine göre değişmeli olmayan bir gruptur. Bu gruba n elemanın simetrik grubu veya n elemanın permütasyon grubu denir. Bu grubun mertebesi n sonlu ise sonludur ve $n!$ dir. S_n 'nin mertebesi $\frac{n!}{2}$ olan bir $A_n \subset S_n$ alt grubu vardır. Bu gruba alterne grup denir.

Tanım 1.2.9 : Eğer bir S yarıgrubunun bir özalt kümesi bu yarıgruptaki işleme göre bir grup oluyorsa bu yarıgruba Smarandache yarıgrubu denir ve S-yarıgrubu olarak yazılır.

Tanım 1.2.10 : S bir S-yarıgrubu olsun. Eğer S 'nin bir A özalt kümesi değişmeli bir grup ise S 'ye değişmeli Smarandache yarıgrubu denir.

Örnek 1.2.11 : $\mathbb{Z}_{12} = \{0,1,\dots,11\}$ kümesi mod 12 'ye göre verilen çarpma işlemi ile bir S-yarıgrubudur. Çünkü $A_1 = \{1,5\}$, $A_2 = \{9,3\}$, $A_3 = \{4,8\}$, $A_4 = \{1,5,7,11\}$ kümeleri bu işleme göre grup özelliğini taşırlar.

Örnek 1.2.12 : $S(5)$ yarıgrubunu alalım. $S_5 \subset S(5)$ bir gruptur. Dolayısıyla $S(5)$ bir S- yarıgrubudur.

Örnek 1.2.13 : $M_{n \times n} = \left\{ \begin{pmatrix} a_{ij} \end{pmatrix} \mid a_{ij} \in \mathbb{Z}^0 \right\}$ kümesi elemanları \mathbb{Z}^0 'dan alınan $n \times n$ tipindeki matrislerin kümesi olsun. Bu küme matrislerin çarpımı işlemine göre bir yarıgruptur. $P_{n \times n} \subset M_{n \times n}$ tekil olmayan (yani determinantı sıfırdan farklı olan) matrislerin kümesi matris çarpımı işlemine göre bir grup olduğundan $M_{n \times n}$ bir S-yarıgrubudur.

Örnek 1.2.14 : p asal olmak üzere $\mathbb{Z}_p = \{0,1,2,\dots,p-1\}$ kümesi, mod p 'ye göre verilen çarpma işlemi ile bir yarıgruptur. $A = \{1,p-1\} \subset \mathbb{Z}_p$ bir gruptur. Dolayısıyla \mathbb{Z}_p bir S- yarıgrubudur.

1.3. Halkalar ve Cisimler

Cisim ve yarıcisim karşılaştırmak ve grup halkaları ve yarı grup halkaları gibi kavramları çalışmak amacıyla bu bölüme yer verilmiştir.

Tanım 1.3.1: Bir R kümesi üzerinde iki ikili işlem "+" ve "•" olsun. Eğer

- 1) $(R, +)$ değişmeli bir grup
- 2) $\forall r,s,t \in R$ için $r \cdot s \in R$ (kapalılık) ve $r \cdot (s \cdot t) = (r \cdot s) \cdot t$ (birleşme özelliği)
- 3) $\forall r,s,t \in R$ için $r \cdot (s+t) = r \cdot s + r \cdot t$ ve $(r+t) \cdot s = r \cdot s + s \cdot t$ (dağılma özelliği)

özellikleri sağlanıyorsa $(R, +, \cdot)$ ' ya bir halka denir.

$(R, +)$ 'daki etkisiz eleman 0 'dır. Herhangi bir $r \in R$ 'nin toplamaya göre tersi ise $-r$ olarak gösterilir. Ayrıca $r \cdot s$ yerine ise rs yazılır.

Eğer R halkasında her $a, b \in R$ için $a \cdot b = b \cdot a$ oluyorsa bu halkaya değişmeli halka denir.

Eğer $1 \in R$ için, $1 \cdot r = r \cdot 1 = r$ ($\forall r \in R$) ise $1 \in R$ 'ye halkanın birimi denir.

Eğer $rs = 0$ olması $r = 0$ veya $s = 0$ ($\forall r, s \in R$) olmasını gerektiriyorsa bu durumda R 'ye tamlık denir. Değişmeli ve birimli bir tamlığa ise "tamlık bölgesi" adı verilir.

$(R, +, \cdot)$ bir halka olsun. Eğer $(R \setminus \{0\}, \cdot)$ bir grup ise bu durumda R 'ye bölme halkası (veya çarpık cisim) denir. Ayrıca yukarıdaki duruma ilave olarak R değişmeli ise bu durumda R 'ye bir cisim denir.

R 'nin karakteristiği, $\forall r \in \mathbb{R}$ için $kr = r + r + \dots + r = 0$ (k tane) eşitliğini sağlayan en küçük k doğal sayısıdır. Eğer böyle bir k yoksa R 'nin karakteristiği 0 olarak tanımlanır.

Örnek 1.3.1 : \mathbb{Q} rasyonel sayılar kümesini alalım. $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ bir cisimdir ve karakteristiği 0 'dır.

Örnek 1.3.2 : \mathbb{R} karakteristiği 0 olan bir cisimdir.

Örnek 1.3.3 : $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ tamlık bölgesidir, fakat bir cisim değildir.

Örnek 1.3.4 : $M_{n \times n}$ elemanları \mathbb{Q} 'dan alınan bütün $n \times n$ tipindeki matrislerin kümesi olsun. Matris toplama ve çarpım işlemine göre $M_{n \times n}$ bir halkadır ve bu halka değişmeli değildir. Aynı zamanda bu halkanın sıfır bölenleri vardır ve $M_{n \times n}$ bir bölme halkası değildir.

Örnek 1.3.5 : $M'_{n \times n}$ elemanları \mathbb{Q} dan alınan tekil olmayan $n \times n$ 'lik matrislerin kümesi olmak üzere, $M'_{n \times n}$ bir bölme halkasıdır.

Örnek 1.3.6 : \mathbb{Z}_{28} , mod 28'e göre verilen çarpma ve toplama işlemine göre değişmeli bir halkadır. Bu halkada $7 \cdot 4 \equiv 0 \pmod{28}$ olduğundan 7 ve 4 sıfır bölenlerdir.

Örnek 1.3.7 : \mathbb{Z}_{23} , mod 23'e göre verilen çarpma ve toplama işlemine göre bir cisimdir ve bu cismin karakteristiği 23 'tür.

Tanım 1.3.2 : F bir cisim olmak üzere eğer F 'nin cisim olan bir özalt kümesi yoksa F 'ye bir asal cisim denir.

Örnek 1.3.8 : \mathbb{Z}_p (p asal) karakteristiği p olan bir asal cisimdir.

Örnek 1.3.9 : \mathbb{Q} karakteristiği 0 olan bir asal cisimdir. Karakteristiği 0 olan bütün asal cisimler \mathbb{Q} 'ya izomorftur.

Tanım 1.3.3 : R ve S herhangi iki halka olsun. Eğer $\phi : R \rightarrow S$ dönüşümü $\forall a, b \in R$ için

$$\phi(a+b) = \phi(a) + \phi(b)$$

$$\phi(a \cdot b) = \phi(a) \cdot \phi(b)$$

özelliklerini sağlıyorsa ϕ 'ye bir halka homomorfizmi denir.

Tanım 1.3.4 : R bir halka ve $I \subset R$, R 'nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. Eğer

- 1) I bir alt halka,
- 2) $\forall r \in R$ ve $i \in I$ için $ir \in I$ ($ri \in I$)

özellikleri sağlanıyorsa I 'ya R 'nin sağ (sol) ideali denir.

Eğer I hem sağ hem sol ideal oluyorsa bu durumda I 'ya ideal denir.

Örnek 1.3.10 : \mathbb{Z} tamsayıların halkası olmak üzere, $p\mathbb{Z} = \{0, \pm p, \pm 2p, \dots\}$ ($p \in \mathbb{Z}$) kümesi \mathbb{Z} 'nin bir idealidir.

Örnek 1.3.11 : $\mathbb{Z}_{12} = \{0, 1, \dots, 11\}$, mod 12 'ye göre verilen çarpım ve toplama işlemine göre bir halkadır. $I = \{0, 6\} \subset \mathbb{Z}_{12}$ kümesi, \mathbb{Z}_{12} 'nin bir idealidir. Aynı şekilde $P = \{0, 3, 6, 9\}$ ve $I_2 = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ kümeleri de \mathbb{Z}_{12} 'nin idealleridir.

Örnek 1.3.12 : $\mathbb{R}[x]$ bir polinom halkası ve $p(x) = p_0 + p_1x + \dots + p_nx^n \in \mathbb{R}[x]$ ($p_0, p_1, \dots, p_n \in \mathbb{R}$) mertebesi n olan bir polinom olsun. Bu durumda $p(x)$ 'in ürettiği $(p(x))$ bir idealdir.

Tanım 1.3.5 : $\phi: R \rightarrow R'$ bir halka homomorfizmi olmak üzere ϕ 'nin çekirdeği $\text{Çek}\phi = \{x \in R \mid \phi(x) = 0\}$ olarak tanımlanır. $\text{Çek}\phi$ 'nin R 'nin bir ideali olduğu açıktır.

Tanım 1.3.6 : R bir halka ve I, R 'nin bir ideali olsun. $R/I = \{a+I \mid a \in R\}$ kümesini tanımlayalım. Bu küme üzerinde

$$(a+I) \oplus (b+I) = (a+b)+I \text{ ve}$$

$$(a+I) \odot (b+I) = ab+I$$

ile \oplus ve \odot işlemleri tanımlansın. Bu taktirde R/I bir halka olur. Bu halkaya bölüm halkası denir. Açık olarak bu halkanın birimi I dir.

Örnek 1.3.13 : $\mathbb{Z}_{12} = \{0,1,\dots,11\}$ halkasında $I = \{0,2,4,6,8,10\}$ idealini alalım.

$\mathbb{Z}_{12}/I = \{a+I \mid a \in \mathbb{Z}_{12}\}$ bölüm halkasını oluşturalım.

$I = \langle 2 \rangle = \{x \in \mathbb{Z}_{12} \mid x = 2k, k \in \mathbb{N}\}$ ve $I+1 = \{1,3,5,7,9,11\}$ olmak üzere

$\mathbb{Z}_{12}/I = \{I, I+1\}$ dir.

Açık olarak $(\mathbb{Z}_{12}/I, +, \cdot)$ bir halkadır. Bu halka değişmeli ve birimli bir halkadır. $I+1$ bu halkanın birimidir.

Ayrıca $I \subset M$ olacak şekilde \mathbb{Z}_{12} 'den farklı bir M ideali bulunamacağından I maximal idealdir. Dolayısıyla \mathbb{Z}_{12}/I bir cisim olur.

1.4. Grup Halkaları

Bu bölümde grup halkaları ve yarıgrup halkaları ile ilgili çeşitli özellikler verilecektir.

Çalışmalarımızda R 'yi bir cisim veya değişmeli bir halka (birimi 1) olarak alacağız.

G , herhangi bir grup olacak ve bu grup üzerindeki işlemi çarpma olarak alacağız.

S ise yine çarpma işlemine göre bir yarıgrup olarak alınacaktır.

Tanım 1.4.1 : R birimli ve değişmeli bir halka ve $G = \{g_i \mid i \in I\}$ bir çarpımlı grup olsun. RG kümesi $a_i \in R$ ve $g_i \in G$ olmak üzere bütün sonlu $\sum_i \alpha_i g_i$ formal toplamların kümesi olsun.

Burada sonlu sayıda hariç bütün α_i 'ler sıfırdır. RG 'nin iki elemanının toplamını

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i g_i \right) + \left(\sum_{i=1}^n b_i g_i \right) = \sum_{i=1}^n (a_i + b_i) g_i$$

ve çarpımını

$$\left(\sum_{i \in I} a_i b_i \right) \left(\sum_{i \in I} b_i g_i \right) = \sum_{i \in I} \left(\sum_{g_j g_k = g_i} a_j b_k \right)$$

olarak tanımlarsak, RG bir halka olur. Bu halkaya R üzerinde G 'nin grup halkası denir.

RG etkisiz elemanı 0 olan birleşmeli bir halkadır. $1 \in R$ olduğundan $G = 1 \cdot G \subseteq RG$ ve $R \cdot e = R \subseteq RG$ 'dir (burada e , G 'nin birimidir).

Eğer G grubu yerine S yarigrubu alırsak RS yarigrup halkasını elde ederiz.

Örnek 1.4.1 : \mathbb{Q} rasyonel cismini ve $G = \langle g \mid g^2 = 1 \rangle$ devirli grubunu alalım. $\mathbb{Q}G$ grup halkası $\mathbb{Q}G = \{a + bg \mid a, b \in \mathbb{Q}, g \in G\}$ şeklindedir. Bu halka değişmelidir ve karakteristiği 0 'dır.

Örnek 1.4.2 : $\mathbb{Z}_8 = \{0, \dots, 7\}$ halkasını ve 3 elemanın S_3 simetrik grubunu alalım. $\mathbb{Z}_8 S_3$, S_3 'ün \mathbb{Z}_8 üzerindeki grup halkasıdır. Bu halka değişmeli değildir ve karakteristiği 8 dir.

Örnek 1.4.3 : S_n n elemanın simetrik grubu olsun. $\mathbb{R}S_n$ grup halkası karakteristiği 0 olan ve değişmeli olmayan bir halkadır.

Örnek 1.4.4 : $\mathbb{Z}_5 = \{0, 1, \dots, 4\}$ karakteristiği 5 olan asal cisim ve $G = \langle g \mid g^{12} = 1 \rangle$ mertebesi 12 olan devirli grubunu alalım. $\mathbb{Z}_5 G$ grup halkası karakteristiği 0 olan değişmeli bir halkadır ve bu halkanın sıfır böleneri vardır. Örneğin $1 + g^6$ ve $4 + 6g^6$ birer sıfır bölendir.

BÖLÜM 2

YARIHALKALAR VE ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde Smarandache yarıhalkalarının daha iyi analiz edilebilmesi için öncelikle klasik cebirden bilinen yarıhalka kavramı verilip onunla ilgili bazı özelliklerden bahsedilecektir..

2.1. Yarıhalkalar

Tanım 2.1.1 : S boştan farklı bir küme olmak üzere bu küme üzerinde “+” ve “•” işlemleri aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa $(S, +, \cdot)$ 'ye bir yarıhalka denir.

1) $(S, +)$ değişmeli bir monoiddir (Yani $(S, +)$ yarıgrup ve $a + e = e + a = a$ olacak şekilde bir $e \in S$ vardır),

2) (S, \cdot) bir yarıgruptur,

3) $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ ve $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ ($\forall a, b, c \in S$)

Eğer $(S, +, \cdot)$ yarıhalkasında (S, \cdot) da monoidse yani $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ ($\forall a \in S$) olacak şekilde bir $1 \in S$ varsa $(S, +, \cdot)$ yarıhalkasına birimli bir yarıhalkadır denir.

Eğer $x + y = 0$ olması $x = y = 0$ olmasını gerektiriyorsa bu yarıhalkaya “strict (tam) yarıhalka” adı verilir.

(S, \cdot) değişmeli ise S 'ye “değişmeli yarıhalka” adı verilir. Eğer (S, \cdot) birim elemana sahip, değişmeli bir yarıhalka ve $x \cdot y = 0$ olması $x = y = 0$ olmasını gerektiriyorsa bu değişmeli yarıhalkaya bir “yarıcisim” adı verilir.

Burada kullanacağımız ifadelerde $\mathbb{Z}^0 = \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ ve benzer olarak $\mathbb{Q}^0 = \mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$ olarak anlaşılacaktır.

Tanım 2.1.2 : $(S, +, \cdot)$ bir yarıhalka olsun. Bu yarıhalkanın karakteristiği $ms = s + s + \dots + s = 0$ ($\forall s \in S$) eşitliğini sağlayan en küçük m doğal sayısıdır. Eğer böyle bir m sayısı bulunamıyorsa S yarıhalkasının karakteristiği 0'dır denir.

Burada yarıhalkaların halkalardan farklı olarak karakteristiklerinin belirtilemediği durumların varolduğuna dikkat çekmek gerekir. Çünkü latislerde bir yarıhalkanın karakteristiği belirtilemez.

Eğer S yarıhalkasının sonlu sayıda elemanı varsa S 'ye sonlu mertebeli denir ve mertebesi $|S|$ veya $\circ(S)$ şeklinde gösterilir.

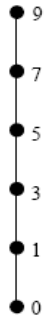
Örnek 2.1.1 : $(\mathbb{Z}^0, +, \cdot)$ sonsuz elemanlı bir yarıhalkadır ve karakteristiği 0 dır. Ayrıca \mathbb{Z}^0 birimli ve değişmeli bir yarıhalkadır.

Örnek 2.1.2: $M_{2 \times 2} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}^0 \right\}$ elemanları \mathbb{Z}^0 'dan alınan $n \times n$ 'lik matrislerin

kümesi olsun. $M_{2 \times 2}$ değişmeli olmayan ve birimi $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ olan bir yarıhalkadır. Ayrıca $M_{2 \times 2}$ 'nin

karakteristiği 0 dır ve sonsuz elemanlıdır.

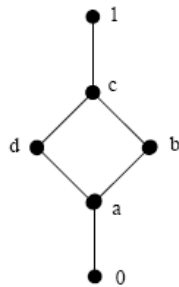
Örnek 2.1.3: S aşağıdaki Hasse diyagramında verilen zincir latis olsun.



Şekil 2.1.1

Bu durumda S üzerindeki inf ve sup ikili işlemlerine göre bir yarıhalkadır. Bu yarıhalka sonlu mertebeli değişmeli bir yarıhalkadır ve karakteristiği belirtilemez.

Örnek 2.1.4 : Aşağıdaki hasse diyagramıyla verilen L latisini alalım.



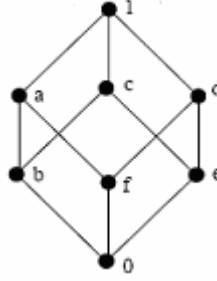
Şekil 2.1.2

$M_{3 \times 3} = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \mid a_{ij} \in L \right\}$ kümesi değişmeli olmayan, sonlu mertebeli bir yarıhalkadır. Bu

yarıhalkada $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ elemanı birim elemandır.

Örnek 2.1.5 : $M_{n \times n} = \left\{ \begin{pmatrix} a_{ij} \end{pmatrix} \mid a_{ij} \in \mathbb{Z}^0 \right\}$ mertebesi sonsuz olan ve karakteristiği 0 olan bir yarıhalkadır.

Örnek 2.1. 6:



Şekil 2.1.3

Yukarıdaki Hasse diyagramıyla verilen latis değişmeli bir yarıhalkadır. Bu yarıhalka sonlu mertebelidir ve karakteristiği belirtilemez.

Tanım 2.1.3 : S_1 ve S_2 iki yarıhalka olsun. $S_1 \times S_2$ direkt çarpımı,

$S_1 \times S_2 = \left\{ (s_1, s_2) \mid s_1 \in S_1, s_2 \in S_2 \right\}$ şeklinde tanımlanır.

$S_1 \times S_2$ bileşen tarzında verilen toplama ve çarpma işlemine göre (yani, her

$(s_1, s_2), (t_1, t_2) \in S_1 \times S_2$ için $(s_1, s_2) + (t_1, t_2) = (s_1 + t_1, s_2 + t_2)$ ve

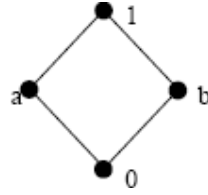
$(s_1, s_2) \cdot (t_1, t_2) = (s_1 \cdot t_1, s_2 \cdot t_2)$ işlemlerine göre) bir yarıhalkadır.

Benzer bir düşünceyle S_1, S_2, \dots, S_n , n tane yarıhalka olmak üzere,

$S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n = \left\{ (s_1, s_2, \dots, s_n) \mid s_i \in S_i, i = 1, 2, \dots, n \right\}$ şeklinde yazılabilir.

Örnek 2.1.7 : \mathbb{Z}^0 yarıhalkasını alalım. $\mathbb{Z}^0 \times \mathbb{Z}^0 \times \mathbb{Z}^0 = \left\{ (a, b, c) \mid a, b, c \in \mathbb{Z}^0 \right\}$ bir yarıhalkadır.

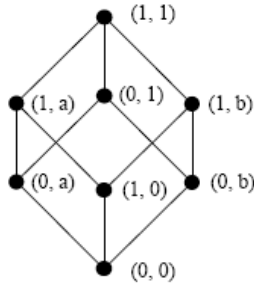
Örnek 2.1.8 : S_1 iki elemanlı bir zincir latis ve S_2 aşağıdaki Hasse diyagramıyla verilen latis olmak üzere,



Şekil 2.1.4

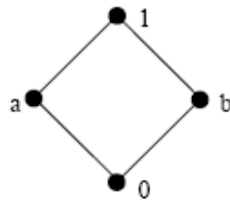
$S_1 \times S_2 = \{(0,0), (0,1), (0,a), (0,b), (1,0), (1,1), (1,a), (1,b)\}$ kümesi bir yarıhalkadır.

$S_1 \times S_2$ 'yi aşağıdaki Hasse diyagramıyla gösterebiliriz.



Şekil 2.1.5

Örnek 2.1.9 : S aşağıdaki Hasse diyagramıyla verilen latis olsun.



Şekil 2.1.6

Bu durumda S birimli ve değişmeli bir yarıhalkadır. Bu yarıhalka sonlu mertebelidir.

$S_{2 \times 2} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in S \right\}$ kümesi, elemanları S 'den alınan bütün 2×2 'lik matrislerin

kümesi olsun. $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$ ve $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$ elemanları için $S_{2 \times 2}$ üzerindeki "+" işlemi

$A + B = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \cup b_1 & a_2 \cup b_2 \\ a_3 \cup b_3 & a_4 \cup b_4 \end{pmatrix}$ olarak tanımlansın. Buna göre $(S_{2 \times 2}, +)$

değişmeli monoiddir.

" \cdot " işlemi de $A \cdot B = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_1 \cap b_1) \cup (a_2 \cap b_3) & (a_1 \cap b_2) \cup (a_2 \cap b_4) \\ (a_3 \cap b_1) \cup (a_4 \cup b_3) & (a_3 \cap b_2) \cup (a_4 \cup b_4) \end{pmatrix}$ olarak

tanımlanırsa $(S_{2 \times 2}, \cdot)$ bir yarıgrup olur.

Çarpmanın toplama üzerine dağılıma özelliği bulunduğundan yarıhalka olma şartları sağlanır.

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & b \end{pmatrix}$ için $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ b & b \end{pmatrix}$ ve $B \cdot A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ olduğundan $A \cdot B \neq B \cdot A$ olur.

Dolayısıyla $(S_{2 \times 2}, +, \cdot)$ bir yarıhalkadır ve bu yarıhalka değişmeli değildir.

2.2. Yarıhalkaların Özellikleri

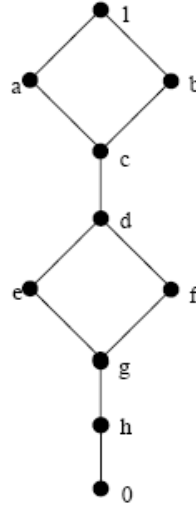
Bu bölümde bir yarıhalkadaki altarıhalka, ideal, idempotent, sıfır bölen gibi kavramlar açıklanarak bunlarla ilgili örnekler verilecektir.

Tanım 2.2.1 : S bir yarıhalka ve $P \subset S$ olsun. Eğer P , S 'deki işleme göre bir yarıhalka oluyorsa bu durumda P 'ye bir altarıhalka denir.

Örnek 2.2.1 : \mathbb{Z}^0 yarıhalkasını alalım. $2\mathbb{Z}^0 = \{0, 2, 4, \dots\}$ kümesi, \mathbb{Z}^0 'ın bir altarıhalkasıdır.

Örnek 2.2.2 : $\mathbb{Z}^0[x]$ polinom yarıhalkasını alalım. \mathbb{Z}^0 , $\mathbb{Z}^0[x]$ 'in bir altarıhalkasıdır.

Örnek 2.2.3 :



Şekil 2.1.7

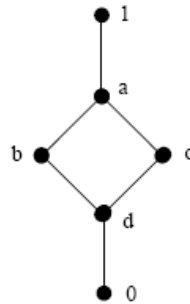
Yukarıdaki Hasse diyagramıyla verilen S latisi dağılmalıdır. Bu latis bir yarıhalkadır. $L = \{1, a, c, d, e, g, h, 0\} \subset S$ zincir latis olduğundan yarıhalkadır. Dolayısıyla L , S 'nin bir altarıhalkasıdır.

Tanım 2.2.2 : S bir yarıhalka ve S 'nin boştan farklı bir alt kümesi I olsun. Eğer I yarıhalka ve $\forall i \in I$ ve $s \in S$ için $is \in I$ ($si \in I$) oluyorsa I 'ya bir sağ (sol) ideal denir.

Eğer I hem sağ hem sol idealse bu durumda I , S 'nin bir idealidir denir.

Örnek 2.2.4 : \mathbb{Z}^0 yarıhalkasını alalım. n herhangi bir tamsayı olmak üzere $n\mathbb{Z}^0$, \mathbb{Z}^0 'ın bir idealidir.

Örnek 2.2.5 : S aşağıdaki Hasse diyagramıyla verilen latis olsun.



Şekil 2.1.8

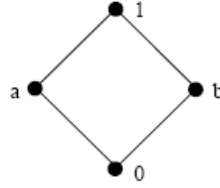
Bu taktirde S bir yarıhalkadır. $I = \{0, d, c, a, b\}$ bir zincir latis olduğundan altyarıhalkadır. Ayrıca I 'dan alınan her eleman ile S 'den alınan her elemanın çarpımı I 'nin bir elemanı olduğundan I , S 'nin bir ideali olur.

Tanım 2.2.4 : S bir yarıhalka olsun. Eğer bir $x \in S \setminus \{0\}$ için $x \cdot y = 0$ olacak şekilde bir $y \neq 0 \in S$ bulunabiliyorsa x 'e S 'nin bir sıfır böleni denir.

Tanım 2.2.5 : S birimli ve değişmeli olmayan bir yarıhalka olsun. Eğer bir $x \in S$ için $x \cdot y = 1$ (veya $y \cdot x = 1$) olacak şekilde bir $y \in S$ bulunabiliyorsa $x \in S$ 'ye S 'nin bir sağ (veya sol) birimsel elemanı denir.

Tanım 2.2.6: S bir yarıhalka olsun. Eğer bir $x \in S$ için $x \cdot x = x^2 = x$ oluyorsa $x \in S$ 'ye bir idempotent eleman denir.

Örnek 2.2. 6: S aşağıdaki Hasse diyagramıyla verilen yarıhalka olsun.



Şekil 2.1.9

$a, b \in S$ için $a \cdot b = 0$ olduğundan a bir sıfır bölendir. Ayrıca $a^2 = a$ ve $b^2 = b$ olduğundan a ve b idempotent elemanlar olur.

Örnek 2.2.7 : $S = \mathbb{Z}^0 \times \mathbb{Z}^0 \times \mathbb{Z}^0$ olsun. Bu durumda S bir yarıhalkadır. $a = (8, 0, 2)$ ve $b = (0, 6, 0)$ için $a \cdot b = (0, 0, 0)$ olduğundan a ve b , S 'nin sıfır böleneridir.

Bundan başka sıfır bölener de bulunabilir.

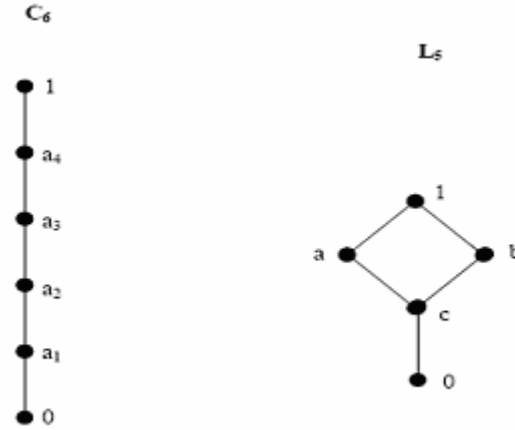
Örnek 2.2.8 : $S = \mathbb{Q}^0 \times \mathbb{Q}^0 \times \mathbb{Q}^0 \times \mathbb{Q}^0$ yarıhalkasını alalım. $(1, 1, 1, 1)$ bu yarıhalkanın birimidir.

$a = \left(3, \frac{1}{4}, \frac{5}{3}, \frac{7}{2}\right) \in S$ alırsak $b = \left(\frac{1}{3}, 4, \frac{3}{5}, \frac{2}{7}\right) \in S$ için $a \cdot b = (1, 1, 1, 1)$ olduğundan a 'nın inversi (tersi) $b \in S$ olur. Böylece S 'nin birimsel elemanları vardır.

Örnek 2.2.9 : $M_{2 \times 2} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Q}^0 \right\}$ matris toplam ve çarpım işlemine göre bir yarıhalkadır. $M_{2 \times 2}$ değişmeli değildir ve aşıkardan farklı birimleri vardır.

Tanım 2.2.7: S ve S' iki yarıhalka olsun. Eğer $\phi : S \rightarrow S'$ dönüşümü $\forall a, b \in S$ için $\phi(a + b) = \phi(a) + \phi(b)$ ve $\phi(a \cdot b) = \phi(a) \cdot \phi(b)$ özelliklerini sağlıyorsa ϕ 'ye bir yarıhalka homomorfizmi denir. Eğer ϕ birebir ve örtense bu durumda ϕ 'ye bir yarıhalka izomorfizmi denir.

Örnek 2.2.10 :



Şekil 2.1.10

Yukarıdaki Hasse diyagramıyla verilen C_6 ve L_5 latisleri arasındaki bir homomorfizm

$\beta = \{(0, 0), (a_1, c), (a_2, c), (a_3, a), (a_4, a), (1, 1)\}$ şeklindedir. Gerçekten de

$$\phi(a_2 \vee a_3) = \phi(a_2) \vee \phi(a_3) \text{ ve } \phi(a_2 \wedge a_3) = \phi(a_2) \wedge \phi(a_3),$$

$$\phi(a_3 \vee a_4) = \phi(a_3) \vee \phi(a_4) \text{ ve } \phi(a_3 \wedge a_4) = \phi(a_3) \wedge \phi(a_4)$$

olduğu kolayca görülebilir.

Tanım 2.2.8 : S bir yarıhalka olsun. Eğer $a+b=0$ olması $a=0$ ve $b=0$ olmasını gerektiriyorsa S 'ye bir tam (strict) yarıhalka denir.

Örnek 2.2.11 : \mathbb{Z}^0 ve \mathbb{Q}^0 yarıhalkaları tam (strict) yarıhalkalardır.

Örnek 2.2.12 : Aşağıdaki Hasse diyagramıyla verilen zincir latis bir yarıhalkadır. Bu yarıhalkada $a \vee b = 0$ olmasını sağlayan $a \neq 0$ ve $b \neq 0$ olacak şekilde hiçbir eleman yoktur. Dolayısıyla bu yarıhalka bir tam (strict) yarıhalkadır.



Şekil 2.1.11

Tanım 2.2.9 : S birimi 1 olan bir yarıhalka olsun. Eğer bir $x \in S$ için $xy = yx = 1$ olacak şekilde bir $y \in S$ varsa x 'e "terslenebilirdir" veya " x nin tersi vardır" denir.

Örnek 2.2.13 : \mathbb{Q}^0 yarıhalkasını alalım. $\mathbb{Q}^0 \setminus \{0\}$ 'daki her eleman terslenebilirdir.

2.3. Dağılmalı Latislerde Yarıhalkalar

Bu bölümde yarıhalka olan dağılmalı latisler ve bunların özelliklerinden bahsedilecektir. Burada C_n , n elemanlı bir zincir latis olarak aşağıdaki Hasse diyagramındaki gibi alınacaktır. Burada en küçük eleman 0, en büyük eleman 1'dir.



Şekil 2.3.1

“ \cup ” (veya max) ve “ \cap ” (veya min) ikili işlemlerini alalım. C_n zincir latisi bu işlemlere göre dağılmalı bir latis olur ve C_n bir yarıhalkadır.

Teorem 2.3.1 : (L, \cup, \cap) dağılmalı latis olsun. Bu durumda L bir yarıhalkadır.

İspat : L , “ \cup ” işlemine göre değişmeli bir yarıgruptur ve “0” birim elemandır. L , “ \cap ” işlemine göre değişmeli bir gruptur ve \cup ve \cap diğeri üzerine dağılmalıdır. Dolayısıyla (L, \cup, \cap) bir yarıhalkadır.

Sonuç : 1) Bütün zincir latisler yarıhalkadır.

2) Bir kümenin kuvvet kümesi birleşim ve kesişim işlemlerine göre dağılmalı bir yarıhalkadır.

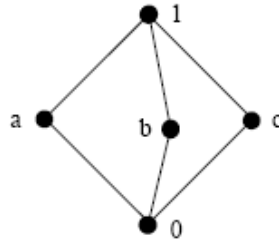
Uyarı : Bütün latisler yarıhalka değildir. Örneğin aşağıdaki Hasse diyagramıyla verilen elmas latisde

$$a \wedge (b \vee c) = a \wedge 1 = a \quad \text{ve}$$

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = 0 \vee 0 = 0$$

olduğundan $a \wedge (b \vee c) \neq (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ dir.

Dolayısıyla bu latis bir yarıhalka değildir.



Şekil 2.3.2

Örnek 2.3.1 : $M_{5 \times 5} = \{(a_{ij}) \mid a_{ij} \in C_2 = (0,1)\}$ olmak üzere

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e \end{pmatrix} \mid a, b, c, d, e \in C_2 \right\} \text{ kümesi için } A \cdot A = A \text{ olduğundan } A \text{ bir idempotent}$$

matristir. $M_{5 \times 5}$ 'ten alınan herhangi iki A ve B elemanı için $A \cdot B \neq B \cdot A$ olduğundan $M_{5 \times 5}$ değişmeli değildir. Matrisin elemanları C_2 latisinden alındığından ve latislerin karakteristiği belirtilemediğinden $M_{5 \times 5}$ nin karakteristiği de belli değildir.

Teorem 2.3.2 : B bir Boolean cebiri olsun. Bu durumda B bir yarıhalkadır.

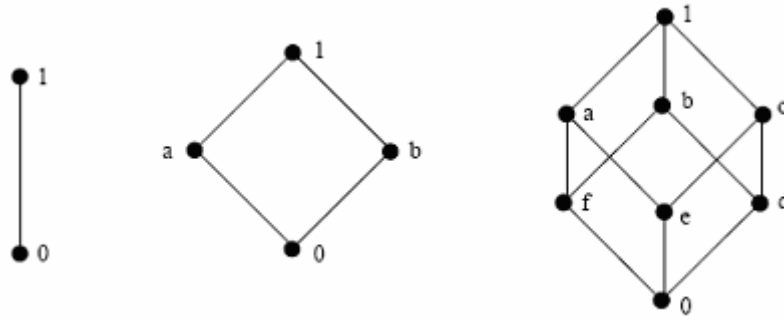
İspat : B dağılmalı bir latis olduğundan Teorem 2.3.1'den B bir yarıhalka olur.

Teorem 2.3.3 : Dağılmalı latislerin direkt çarpımı bir yarıhalkadır.

İspat : Dağılmalı latislerin direkt çarpımı yine dağılmalıdır ve dağılmalı latisler yarıhalka olduğundan bunların direkt çarpımı bir yarıhalka olur.

Örnek 2.3.2 : L_1, L_2, L_3 , aşağıdaki Hasse diyagramıyla verilen latis olmak üzere,

$S = L_1 \times L_2 \times L_3$ olsun. Bu durumda S bir yarıhalkadır.



Şekil 2.3.3

Dağılmalı latisleri kullanarak sonlu ve değişmeli olmayan yarıhalkalar inşa edilebilir. Örneğin

L , 0 ve 1'i içeren dağılmalı latis olsun. Bu durumda $L = \{0, x_1, x_2, \dots, x_n, 1\}$ şeklindedir.

$M_{n \times n} = \{(a_{ij}) \mid a_{ij} \in L\}$ olsun.

Toplama “+” ve çarpım “•” işlemlerini aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$a = (a_{ij}), b = (b_{ij})$ olmak üzere,

$$a + b = (a_{ij} \cup b_{ij}) \text{ ve}$$

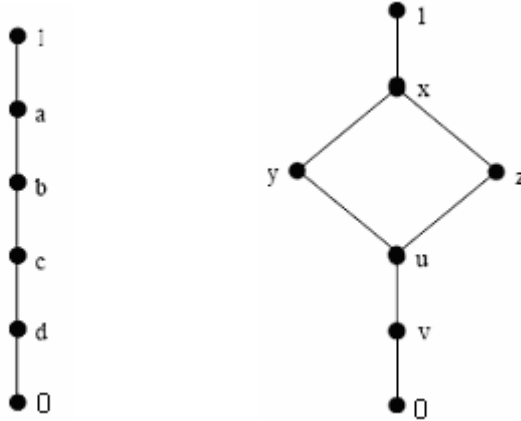
$$a \cdot b = \begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ a_{21} \dots a_{2n} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{n1} \dots a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} \dots b_{1n} \\ b_{21} \dots b_{2n} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{n1} \dots b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} \dots c_{1n} \\ c_{21} \dots c_{2n} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_{n1} \dots c_{nn} \end{pmatrix},$$

burada $c_{11} = [(a_{11} \cap b_{11}) \cup (a_{12} \cap b_{21}) \cup \dots \cup (a_{1n} \cap b_{n1})]$ dir.

“ \cup ” ve “ \cap ” işlemlerinin birbiri üzerine dağılma özelliği olduğundan (çünkü L dağılımaldır) $(M_{n \times n}, +, \cdot)$ sonlu ve değişmeli olmayan bir yarıhalka olur. Bu yarıhalkada sıfır matrisi toplamsal birimdir ve köşegen elemanları 1 ve diğer elemanları 0 olan $I_{n \times n}$ matrisi birim elemandır.

Yukarıda da görüldüğü üzere bu inşa yöntemiyle sonlu ve değişmeli olmayan yarıhalkalar elde edebilir. Ayrıca bu yarıhalkaların sıfır böleneri de olabilir.

Örnek 2.3.3 :



Şekil 2.3.4

B_1 ve B_2 yukarıdaki Hasse diyagramlarıyla verilen latişler olmak üzere, $B_1 \times B_2$ bir yarıhalkadır.

$$(0, y) \cdot (1, 0) = (0, 0),$$

Bu yarıhalkada örneğin $(0, z) \cdot (d, 0) = (0, 0)$,

$$(c, 0) \cdot (0, 1) = (0, 0)$$

olduğundan $(0, y), (1, 0), (0, z), (d, 0), (c, 0), (0, 1), \dots$ gibi elemanlar sıfır bölendirdir.

Ayrıca $B_1 \times B_2$ deki hangi elemanı alırsak alalım

(örneğin $(d, y) \cdot (d, y) = (d, y)$, $(0, v) \cdot (0, v) = (0, v)$, ...) bu elemanın kendisiyle çarpımını yine kendisine eşittir. Dolayısıyla her eleman idempotent elemandır.

Yine her eleman için (örneğin $(d, x), (c, z) \in B_1 \times B_2$ için $(d, x) \cdot (c, z) = (c, z) \cdot (d, x)$) çarpma işlemine göre değişme özelliği mevcut olduğundan $B_1 \times B_2$ değişmeli olur.

Örnek 2.3.4 :



Şekil 2.3.5

Şekildeki Hasse diyagramıyla verilen L latisini alalım. $M_{3 \times 3} = \{(a_{ij}) \mid a_{ij} \in L\}$ elemanları L alınan bütün 3×3 'lük matrislerin kümesi olmak üzere, $M_{3 \times 3}$ örnek 2.3.2 'deki tanımlanan işlemlere göre değişmeli olmayan sonlu bir yarıhalkadır.

Teorem 2.3.4 : A sonlu elemanlı bir kümesi ve $P(A)$, A 'nın kuvvet kümesi olsun. $P(A)$ 'da

- i) \emptyset ve A hariç her eleman bir sıfır bölendir.
- ii) Her eleman bir idempotent elemandır.

İspat: i) $P(A)$ 'daki tek elemanlı alt kümeler birer sıfır bölendir. İki elemanlı bir alt kümenin sıfır bölünmesi için $P(A)$ 'da bu iki elemanlı kümede içerilmeyen bir eleman seçilerek

kesişimlerinin boş küme olması sağlanır. Örneğin

$$\{x_1\}, \{x_2\} \in P(A) \text{ için } \{x_1\} \cap \{x_2\} = \emptyset,$$

$$\{x_1, x_2\}, \{x_3, x_4\} \in P(A) \text{ için } \{x_1, x_2\} \cap \{x_3, x_4\} = \emptyset$$

olur. Bu yolla $P(A)$ 'daki bütün elemanlar için kesişim boş küme olacak şekilde elemanlar seçilebilir. Tanım gereği \emptyset sıfır bölen olamaz. Ayrıca kesişim boş olacak şekilde eleman bulunamadığından kümenin kendisi de sıfır bölen olamaz. Dolayısıyla $P(A)$ 'daki \emptyset ve A hariç her eleman bir sıfır bölendir.

ii) $\forall x \in P(A)$ için x 'ler birer küme olduğundan ve bir kümenin kendisiyle kesişimi (çarpımı) yine kendisine eşittir. Yani $x \cap x = x$ dir. Dolayısıyla $\forall x \in P(A)$ bir idempotent elemandır.

2.4 Polinom Yarıhalkaları

Polinom yarıhalkaları daha ziyade Smarandache yarıvektör uzaylarının inşasında kullanılır. Biz burada sadece tanımını ve birkaç örnek vereceğiz.

Tanım 2.4.1 : S birimli ve değişmeli bir yarıhalka olsun. $s_0 + s_1x + \dots + s_nx^n$ (n doğalsayı, $s_0, \dots, s_n \in S$) formundaki elemanlardan oluşan küme polinomların bilinen toplama ve çarpma işlemine göre bir yarıhalkadır. Bu yarıhalkaya polinom yarıhalkası denir ve $S[x]$ şeklinde gösterilir.

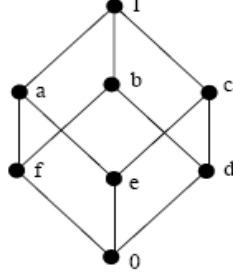
Örnek 2.4.1 : \mathbb{Z}^0 yarıhalkasını alalım. $\mathbb{Z}^0[x]$ bir polinom yarıhalkasıdır ve bu yarıhalkanın sıfır bölenleri yoktur.

Örnek 2.4.2 : S aşağıdaki Hasse diyagramıyla verilen dağılımlı latis olsun. Bu durumda $S[x]$ bir polinom yarıhalkasıdır. Bu yarıhalka sıfır bölensiz ve değişmeli bir yarıhalkadır.



Şekil 2.4.1

Örnek 2.4.3 : S aşağıdaki Hasse diyagramıyla verilen dağılmalı latis olsun. $S[x]$ değişmeli ve sıfır bölenli bir polinom yarıhalkasıdır.



Şekil 2.4.2

2.5 Grup Yarıhalkaları ve Yarıgrup Yarıhalkaları

Grup yarıhalkaları ve yarıgrup yarıhalkaları önce sonlu ve değişmeli olmayan yarıhalkalar için verilecektir. Daha sonra bu metod sonsuz ve değişmeli olmayan yarıhalkalara genişletilebilir.

Tanım 2.5.1 : S birimli ve değişmeli bir yarıhalka ve $G = \{g_i \mid i \in I\}$ bir çarpımlı grup olsun.

SG kümesi $a_i \in S$ ve $g_i \in G$ olmak üzere bütün sonlu $\sum_i a_i g_i$ formal toplamların kümesi

olsun. Burada sonlu sayıda hariç bütün a_i 'ler sıfırdır. SG 'nin iki elemanının toplamını

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i g_i \right) + \left(\sum_{i=1}^n b_i g_i \right) = \sum_{i=1}^n (a_i + b_i) g_i$$

ve çarpımını

$$\left(\sum_{i \in I} a_i b_i \right) \left(\sum_{i \in I} b_i g_i \right) = \sum_{i \in I} \left(\sum_{g_j g_k = g_i} a_j b_k \right)$$

olarak tanımlarsak, SG bir yarıhalka olur. Bu yarıhalkaya S üzerinde G 'nin grup yarıhalkası denir.

$1 \in G$ ve $1 \in S$ için $1 \cdot G = G \subseteq SG$ ve $S \cdot 1 = S \subseteq SG$ dir.

SG grup yarıhalkası G 'nin değişmeli olması durumunda değişmeli grup yarıhalkası adını alır.

Eğer S karakteristiği 0 olan sonsuz mertebeli yarıhalka ise SG de karakteristiği 0 olan sonsuz mertebeli grup yarıhalkasıdır.

Eğer S sonlu yarıhalkası sonlu bir dağılmalı latis ise SG de sonlu bir grup yarıhalkası olur.

Ama karakteristiği belirsizdir. Çünkü dağılmalı latislerde karakteristik belirsizdir.

Tanım 2.5.2 : S değişmeli ve birimli bir yarıhalka ve L çarpma işlemine göre birimli bir yarıgrup olsun. LS yarıgrup yarıhalkası da grup yarıhalkasına benzer olarak tanımlanır. Burada tek değişen G grubu yerine L yarıgrubunun alınmasıdır.

Yarıhalkaların karakteristikleri için aşığıdaki durumlar vardır :

1) Yarıhalkaların karakteristikleri 0 olabilir. $\mathbb{Q}^0, \mathbb{Z}^0, \mathbb{R}^0$ gibi ...

2) Yarıhalkaların (sonlu yada sonsuz) bir karakteristiği olmayabilir. Bütün dağılmalı latisler gibi...

3) Yarıhalkaların karakteristiği n gibi pozitif bir tamsayı olabilir.

3. duruma sahip olan yarıhalkaların varlığı bir açık problemdir.

Örnek 2.5.1 : \mathbb{Z}^0 yarıhalkasını ve S_3 simetrik grubunu alalım. $\mathbb{Z}^0 S_3$ grup yarıhalkası sonsuz mertebeli, değişmeli olmayan bir grup yarıhalkasıdır. Bu grup yarıhalkasının karakteristiği 0 dir.

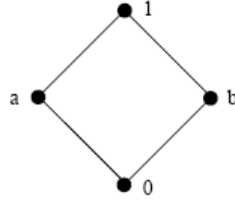
Örnek 2.5.2 : \mathbb{Q}^0 yarıhalkasını ve $G = \langle g \mid g^n = 1 \rangle$ devirli grubunu alalım. $\mathbb{Q}^0 G$ bir grup yarıhalkasıdır. Bu grup yarıhalkası sonsuz mertebeli, değişmeli ve karakteristiği 0 olan bir grup yarıhalkasıdır.

Örnek 2.5.3 : S bir zincir latis olsun. 4 elemanın S_4 simetrik grubunu alalım. $\mathbb{Z}^0 S_4$ grup yarıhalkası değişmeli olmayan ve sonlu mertebeli bir grup yarıhalkasıdır. Bu grup yarıhalkasının karakteristiği belirsizdir.

Örnek 2.5.4 : \mathbb{Z}^0 yarıhalkasını ve 5 elemanlı bir kümenin kendi üzerine olan bütün dönüşümlerin kümesi olan $S(5)$ 'i alalım. $S(5)$ bir yarıgruptur. $\mathbb{Z}^0 S(5)$ yarıgrup yarıhalkası değişmeli olmayan ve karakteristiği 0 olan bir yarıgrup yarıhalkasıdır.

Örnek 2.5.5 : X sonlu bir küme ve $P(X), X$ 'in kuvvet kümesi olsun. $L = P(X)$ kümesi , " \cup " işlemine göre bir yarıgruptur. \mathbb{Q}^0 bir yarıhalkasını alalım. Bu durumda $\mathbb{Q}^0 L$ yarıgrup yarıhalkası değişmeli ve karakteristiği 0 olan bir yarıgrup yarıhalkası olur.

Örnek 2.5.6 :



Şekil 2.5.1

Yukarıdaki Hasse diyagramıyla verilen S latisi bir yarıhalkadır. $G = \langle g \mid g^5 = 1 \rangle$ mertebesi 5 olan bir devirli grup olsun. Bu durumda $\alpha = ag + bg^3$ ve $\beta = ag^3 + b$ için, $\alpha, \beta \in SG \setminus G$ dir. Fakat $\alpha \cdot \beta = (ag + bg^3)(ag^3 + b) = ag^4 + bg^4 = (a+b)g^4 = g^4 \in G$ olur. Yani burada $\alpha, \beta \notin G$ olmasına rağmen $\alpha \cdot \beta \in G$ elde edilmiş olur.

Teorem 2.5.1 : $G = \langle g \mid g^n = 1 \rangle$ mertebesi n olan bir devirli grup ve S de mertebesi 2 den büyük bir Boolean cebiri olsun. Bu durumda $\alpha, \beta \in SG \setminus G$ için her $g^i \in G$ elemanı $\alpha \cdot \beta$ şeklinde gösterilebilir.

İspat: $g^i \in G$ olsun. $k+i=r$ olmak üzere $\alpha = (a_i g^k + a_i' g^r)$ ve $\beta = (a_i' g^k + a_i g^r)$

($a_i, a_i' \in S$ için $a_i a_i' = 0$ ve $a_i + a_i' = 1$) alalım. Buradan

$$\alpha \cdot \beta = (a_i g^k + a_i' g^r)(a_i' g^k + a_i g^r) = (a_i + a_i') g^{k+r} = 1 \cdot g^i = g^i \in G \text{ elde edilir.}$$

BÖLÜM 3

SMARANDACHE YARIHALKALARI

Bu bölümde Smarandache yarıhalkaları ile ilgili bilgiler verip onlarla ilgili bazı sonuçlardan bahsedeceğiz. Her yarıhalkanın bir Smarandache yarıhalkası olmadığını göstereceğiz. Çeşitli örneklerle konunun daha kolay anlaşılmasını sağlayacağız.

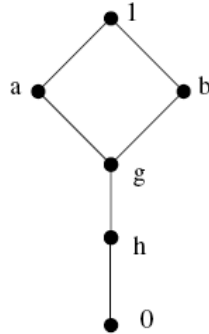
3.1.Smarandache Yarıhalkaları

Tanım 3.1.1(Smarandache,Florentin) : S bir yarıhalka olsun. Eğer S 'nin bir B özalt kümesi S 'deki işleme göre bir yarıcisim ise S 'ye bir Smarandache yarıhalkası denir ve kısaca S-yarıhalkası olarak yazılır.

Örnek 3.1.1: \mathbb{Q}^0 yarıhalkasını alalım. $\mathbb{Z}^0 \subset \mathbb{Q}^0$ özalt kümesi bir yarıcisim olduğundan \mathbb{Q}^0 yarıhalkası bir S-yarıhalkasıdır.

Örnek 3.1.2 : $M_{n \times n} = \left\{ (a_{ij}) \mid a_{ij} \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \right\}$ olsun. $M_{n \times n}$ matris toplama ve çarpım işlemlerine göre bir yarıhalkadır. $A = \left\{ (a_{ij}) \mid a_{ij} = 0, i \neq j \text{ ve } a_{ii} \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \right\}$ kümesi, elemanları $\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ 'dan alınan bütün diagonal (köşegen) matrislerin kümesidir. Bu küme matris toplama ve çarpım işlemlerine göre bir yarıcisimdir. Dolayısıyla $M_{n \times n}$ bir S- yarıhalkası olur.

Örnek 3.1.3 : S , aşağıdaki latis diyagramındaki gibi olsun. Min-max işlemine göre S bir yarıhalkadır. $A = \{1, b, g, h, 0\}$ kümesi bir yarıcisim olduğundan S bir S-yarıhalkası olur.



Şekil 3.1.1

Örnek 3.1.4 : \mathbb{Z}^0 yarıhalkasını alalım. \mathbb{Z}^0 'ın yarıcisim olan bir özalt kümesi olmadığından \mathbb{Z}^0 bir S-yarıhalkası değildir.

Teorem 3.1.1: Her yarıhalka bir S-yarıhalkası değildir.

İspat : Örnek 3.1.4 de verilen yarıhalka bir S-yarıhalkası değildir. Bir başka örnek olarak C_2 zincir latisini alabiliriz. C_2 'nin yarıcisim olan bir özalt kümesi olmadığından C_2 de bir S-yarıhalkası değildir.

Örnek 3.1.5 : $\mathbb{Z}^0[x]$ polinom yarıhalkasını alalım. $\mathbb{Z}^0 \subset \mathbb{Z}^0[x]$ özalt kümesi bir yarıcisim olduğundan $\mathbb{Z}^0[x]$ bir S-yarıhalkası olur.

Örnek 3.1.6: $C_2[x]$ polinom yarıhalkasını alalım. $C_2 \subset C_2[x]$ özalt kümesi bir yarıcisim olduğundan $C_2[x]$ bir S-yarıhalkası olur.

Teorem 3.1.2 : S bir yarıcisim olsun. Bu takdirde $S[x]$ polinom yarıhalkası bir S-yarıhalkasıdır.

İspat : S yarıcisim ve $S[x]$ 'de içerildiğinden $S[x]$ polinom yarıhalkası bir S-yarıhalkası olur .

Teorem 3.1.3 : 0 ve 1'i içeren bütün dağılmalı latisler S-yarıhalkasıdır.

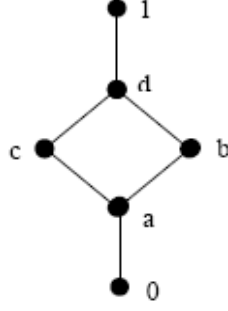
İspat : L latisi 0 ve 1'i içeren dağılmalı bir latis olsun. L , 0 ve 1'i içerdiğinden $A = (0,1) \subset L$ bir yarıcisim olur. Dolayısıyla L bir S-yarıhalkasıdır.

Yukarıdaki örneklerde değişmeli S-yarıhalkalarını ele aldık. Şimdi ise sonlu ve sonsuz değişmeli olmayan S-yarıhalkalarının yapılarını görelim .

Örnek 3.1.7 : $M_{n \times n} = \left\{ (a_{ij}) \mid a_{ij} \in \mathbb{Z}^0 \right\}$ kümesi, elemanları \mathbb{Z}^0 'dan alınan bütün $n \times n$ tipindeki matrislerin kümesi olsun. Bu küme matris toplama ve çarpım işlemine göre bir yarıhalkadır. Bu yarıhalka değişmeli değildir. $A = \left\{ (a_{ij}) \mid a_{ij} = 0, i \neq j \text{ ve } a_{ij} \in \mathbb{Z}^0 \setminus \{0\} \right\} \cup \{\text{sıfır matrisi}\}$ kümesini alırsak $A \subset M_{n \times n}$ bir yarıcisim olur. Dolayısıyla $M_{n \times n}$ bir S-yarıhalkasıdır.

Tanım 3.1.2 : Eğer bir S-yarıhalkası sonlu sayıda elemana sahipse buna sonlu bir S-yarıhalkası aksi halde sonsuz bir S-yarıhalkası denir.

Örnek 3.1.8 : $M_{3 \times 3}$ kümesi, elemanları aşağıdaki dağılımalı latisten alınan 3×3 'lük matrislerin kümesi olsun. Bu küme bir yarıhalkadır.



Şekil 3.1.2

$A = \left\{ (a_{ij}) \mid a_{ij} = 0, i \neq j \text{ ve } a_{ij} \in L \setminus \{0\} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \subset M_{3 \times 3}$ kümesi bir yarıcisim

olduğundan $M_{3 \times 3}$ bir S-yarıhalkası olur.

Örnek 3.1.9: \mathbb{Z}^0 yarıhalkasını alalım. \mathbb{Z}^0 bir S-yarıhalkası olmamasına rağmen $S = \mathbb{Z}^0 \times \mathbb{Z}^0 \times \mathbb{Z}^0 \times \mathbb{Z}^0$ yarıhalkası bir S-yarıhalkasıdır. Çünkü $P = \{(x, 0, 0, 0) \mid x \in \mathbb{Z}^0\} \subset S$ bir yarıcisimdir.

3.2.S-yarıhalkalarındaki Altyapılar

Bu bölümde S-altyarıhalka, S-ideal,... gibi kavramlardan bahsedilecektir.

Tanım 3.2.1: S bir yarıhalka olsun. S 'nin bir A özalt kümesinin P gibi bir özalt kümesi S deki işleme göre bir yarıcisim oluyorsa A 'ya bir S-altyarıhalkası denir.

Örnek 3.2.1 : Örnek 3.1.7 de verilen $M_{n \times n}$ yarıhalkasını alalım. $M_{n \times n}$ bir S-yarıhalkasıdır.

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} & \cdot \end{pmatrix} \mid a_{11} \text{ ve } a_{nn} \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \right\}$$

kümesi bir S-altyarıhalkasıdır.

Teorem 3.2.1 : S bir yarıhalka olsun. Eğer S 'nin bir S-altyarıhalkası varsa bu durumda S bir S-yarıhalkasıdır.

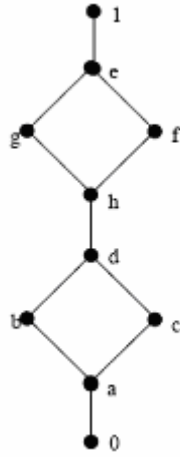
İspat : S yarıhalka ve A , S 'nin bir S-altyarıhalkası olsun. Bu durumda bir $P \subset A$ özalt kümesi yarıcisim olacak şekilde bulunur. $P \subset A \subset S$ olduğundan S bir S-yarıhalkası olur.

Örnek 3.2.2 : $\mathbb{Z}^0[x]$ yarıhalkasını alalım. $A = \{p(x) \in \mathbb{Z}^0[x] \mid \text{der } p(x) = \text{çift}\}$ olsun. Bu durumda A bir S-altyarıhalkasıdır. Çünkü $\mathbb{Z}^0 \subset A$ bir yarıcisimdir.

Örnek 3.2.3 : \mathbb{Z}^0 yarıhalkasını alalım. Her p tamsayısı için $p\mathbb{Z} = \{0, p, 2p, \dots\}$ kümesi \mathbb{Z}^0 'ın altyarıhalkasıdır. Bu altyarıhalka bir S-altyarıhalkası değildir.

Bu örnekten de anlaşılacağı üzere her S-yarıhalkasının bir S-altyarıhalkası bulunmak zorunda değildir. Aynı şekilde her altyarıhalkada da bir S-altyarıhalkası bulunmayabilir.

Örnek 3.2.4 : S aşağıdaki Hasse diyagramına sahip olan bir latis olsun. Bu durumda S bir yarıhalkadır.



Şekil 3.2.1

Bu yarıhalkada $A = (0,1) \subset S$ bir yarıcisim olduğundan S bir S-yarıhalkası olur.

S 'nin altyarıhalkaları mevcuttur. Bunlardan $B = \{d, b, c, a, 0\}$ bir altyarıhalkadır fakat B 'nin yarıcisim olan bir alt kümesi bulunmadığından B bir S-altyarıhalka değildir.

Teorem 3.2.2 : S 'nin her altyarıhalkası bir S-altyarıhalka değildir.

İspat : Örnek 3.2.4 te görüldüğü gibi S bir S-yarıhalkasıdır $A = \{a, 0\} \subset S$ bir altyarıhalkadır fakat S-altyarıhalkası değildir.

Örnek 3.2.5 : $M_{3 \times 3} = \left\{ \begin{pmatrix} a_{ij} \end{pmatrix} \mid a_{ij} \in \mathbb{Z}^0 \right\}$ bir S-yarıhalkasıdır.

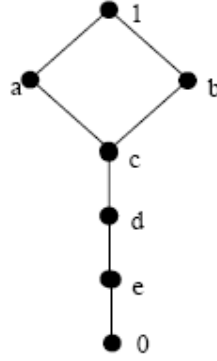
$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a_{11}, a_{22} \in \mathbb{Z}^0 \right\} \subset M_{3 \times 3} \text{ kümesi } M_{3 \times 3} \text{'ün bir altyarıhalkasıdır.}$$

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a_{11} \in \mathbb{Z}^0 \right\} \subset A \text{ bir yarıcisim olduğundan } A \text{ bir S-yarıhalkası olur.}$$

P yarıcisiminin birim elemanı $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ dir ve bu birim eleman $M_{3 \times 3}$ 'ün birim elemanı

değildir.

Örnek 3.2.6 :



Şekil 3.2.2

Yukarıdaki Hasse diyagramıyla verilen latis bir yarıhalkadır. $A = \{0, e, d, c, b, 1\}$ kümesi bir yarıcisim olduğundan bu yarıhalka bir S-yarıhalkasıdır. Bu yarıhalkanın birimi 1 dir. $\forall x \in L$ için $x \cdot y = 1$ olacak şekilde bir $y \neq 1 \in L$ bulunamadığından bu yarıhalkadaki elemanların tersleri yoktur.

Tanım 3.2.2 : S bir S-yarıhalkası olsun. Eğer S 'nin değişmeli bir S-altyarıhalkası varsa S 'ye bir S- değişmeli yarıhalkası denir.

Açıktır ki bir yarıhalka eğer değişmeli ve S-yarıhalkası ise S-yarıhalkası da değişmeli olur. Fakat yarıhalkanın değişmeli olmadığı buna karşılık S-yarıhalkasının değişmeli olduğu durumlar da sözkonusudur. Bunu aşağıdaki örnekte görelim:

Örnek 3.2.7 : $M_{3 \times 3}$ (3.2.5. örnekteki) değişmeli olmayan yarıhalkadır. Bu yarıhalka bir

S-yarıhalkasıdır. $A = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a_{11}, a_{22} \in \mathbb{Z}^0 \right\} \subset M_{3 \times 3}$ alırsak, A değişmeli bir altarıhalka

olur.

Örnek 3.2.8 : Değişmeli bir S-yarıhalkası değişmeli bir yarıhalka olmayabilir. Buna örnek olarak Örnek 3.2.7 gösterilebilir. $M_{3 \times 3}$ değişmeli bir yarıhalka değildir ama değişmeli bir S-yarıhalkasıdır.

Tanım 3.2.3 : S bir yarıhalka olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan bir $P \subset S$ öz alt kümesine S-sağ(sol) ideal denir,

1) P bir S-altyarıhalkasıdır.

2) Her $p \in P$ ve $\forall a \in A$ ($A \subset P$ bir yarıcisim) için ap (pa) $\in P$ dir.

Eğer P hem sağ, hem sol ideal ise bu durumda P 'ye S 'nin bir S-ideali denir.

Örnek 3.2.9 : $S = \mathbb{Z}^0 \times \mathbb{Z}^0 \times \mathbb{Z}^0$ yarıhalkasını alalım. $K = \{(x, 0, y) \mid x, y \in \mathbb{Z}^0\} \subset S$ alalım.

$P = \{(x, 0, 0) \mid x \in \mathbb{Z}^0\} \subset K$ bir yarıcisim ve her $k \in K$ ve $p \in P$ için kp (pk) $\in P$

olduğundan $K = \{(x, 0, y) \mid x, y \in \mathbb{Z}^0\}$ kümesi S 'nin bir S-ideali olur.

Örnek 3.2.10 : $M_{3 \times 3}$ (3.2.5.örnekteki) yarıhalkasını alalım.

$P = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a_{11}, a_{22} \in \mathbb{Z}^0 \right\}$ kümesi $M_{3 \times 3}$ 'ün bir S-idealidir.

Örnek 3.2.11 : $M_{2 \times 2}$ elemanları C_2 zincir latisinden alınan bütün 2×2 'lik matrislerin kümesi olsun.

$$M_{2 \times 2} = \left\{ \begin{array}{l} \left(\begin{array}{cc} 00 & 01 \\ 00 & 00 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} 01 & 10 \\ 00 & 00 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} 10 & 11 \\ 00 & 00 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} 11 & 01 \\ 10 & 11 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} 01 & 00 \\ 10 & 01 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} 00 & 10 \\ 11 & 10 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} 01 & 11 \\ 10 & 11 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} 10 & 01 \\ 11 & 11 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} 11 & 10 \\ 11 & 11 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} 11 & 11 \\ 01 & 11 \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{cc} 01 & 11 \\ 11 & 11 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} 10 & 11 \\ 11 & 11 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} 11 & 11 \\ 01 & 11 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} 11 & 11 \\ 11 & 11 \end{array} \right) \end{array} \right\}$$

şeklindedir. $A = \left\{ \left(\begin{array}{cc} 10 & 00 \\ 01 & 00 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} 00 & 00 \\ 00 & 00 \end{array} \right) \right\} \subset M_{2 \times 2}$ bir yarıcisim olduğundan $M_{2 \times 2}$ bir S-yarıhalkasıdır.

$S = \left\{ \left(\begin{array}{cc} 00 & 10 \\ 00 & 00 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} 10 & 00 \\ 00 & 00 \end{array} \right) \right\} \subset M_{2 \times 2}$ bir altyarıhalkadır fakat bir S-altyarıhalkası değildir. Dolayısıyla

S , $M_{2 \times 2}$ 'nin S-ideali olamaz. $B = \left\{ \left(\begin{array}{cc} 10 & 10 \\ 00 & 01 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} 10 & 00 \\ 00 & 00 \end{array} \right) \right\}$ kümesi de bir S-altyarıhalkası

olmasına rağmen $M_{2 \times 2}$ 'nin bir S-ideali değildir.

Teorem 3.2.3 : S bir S-yarıhalkası olsun. S 'nin her S-ideali bir S-altyarıhalkasıdır ama her S-altyarıhalkası S 'nin bir S-ideali değildir.

İspat : \Rightarrow) Tanımdan açıktır.

\Leftarrow): Örnek 3.2.11de olduğu gibi $A = \left\{ \left(\begin{array}{cc} 10 & 10 \\ 00 & 01 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} 10 & 00 \\ 00 & 00 \end{array} \right) \right\} \subset M_{2 \times 2}$ bir S-altyarıhalkasıdır

fakat bir S-ideali değildir.

Örnek 3.2.12 : $M_{2 \times 2} = \left\{ \left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right) \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}^0 \right\}$ yarıhalkasını alalım.

$A = \left\{ \left(\begin{array}{cc} a & b \\ 0 & c \end{array} \right) \mid a, b, c \in \mathbb{Z}^0 \right\}$ bir S-altyarıhalkasıdır. Çünkü $B = \left\{ \left(\begin{array}{cc} a & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right) \mid a \in \mathbb{Z}^0 \right\} \subset A$ bir

yarıcisimdir.

Fakat $x = \left(\begin{array}{cc} a & b \\ 0 & c \end{array} \right) \in A$ ve $y = \left(\begin{array}{cc} k & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right) \in B$ için $x \cdot y \in A$ olmasına rağmen $y \cdot x \notin A$ olduğundan

A bir S-ideal olmaz (sadece S-sol ideal olur).

Benzer şekilde $P = \left\{ \left(\begin{array}{cc} 10 & 00 \\ 01 & 00 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} 00 & 10 \\ 00 & 00 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} 10 & 00 \\ 00 & 00 \end{array} \right) \right\} \subset M_{2 \times 2}$ de S-altyarıhalkası olmasına rağmen bir

S-ideal değildir.

Teorem 3.2.3 : $M_{4 \times 4} = \left\{ (a_{ij}) \mid a_{ij} \in C_2 = (0,1) \right\}$ kümesini alalım.

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a_{11}, a_{22}, a_{33} \in C_2 \right\}, L = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a_{11}, a_{22} \in C_2 \right\} \text{ kümeleri } M_{4 \times 4} \text{ 'ün}$$

S-idealleridir.

$$\text{Bunu } n \times n \text{ için genişletecek olursak, } K = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & & & a_{n-1n-1} & 0 \\ 0 & & & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a_{11}, a_{22}, \dots, a_{n-1n-1} \in C_2 \right\},$$

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & a_{n-2n-2} & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a_{11}, a_{22}, \dots, a_{n-2n-2} \in C_2 \right\}, N = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a_{11}, a_{22} \in C_2 \right\}$$

formundaki kümeler S-ideal olur.

$$\text{İspat : } M_{4 \times 4} = \left\{ (a_{ij}) \mid a_{ij} \in C_2 = (0,1) \right\} \text{ kümesi için } A = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a_{11} \in C_2 \right\} \subset M_{4 \times 4} \text{ bir}$$

yarıcisimdir. K kümesinden alınan her eleman ile bu yarıcisimden alınan her elemanın çarpımı A 'nın elemanı olduğundan K bir S-idealdir. Benzer şekilde L de bir S-ideal olur.

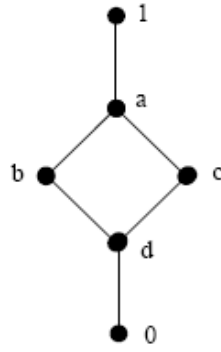
Benzer bir düşünceyle $M_{n \times n} = \left\{ (a_{ij}) \mid a_{ij} \in C_2 \right\}$ kümesi için

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a_{11} \in C_2 \right\} \subset M_{n \times n} \text{ bir yarıcisimdir. Ayrıca } T \text{ 'den alınan her eleman}$$

ile K, L, N kümelerinden alınan her elemanın çarpımı T 'nin bir elemanı olur. Dolayısıyla K, L, N kümeleri birer S-idealdir.

Tanım 3.2.4 : S bir yarıhalka ve $\emptyset \neq A \subset S$ bir öz alt küme olsun. Eğer A kümesi bir P S-altyarıhalkasında içeriliyorsa veya P bir yarıcisim ve A bu yarıcisimde içeriliyorsa A 'ya S-pseudo altyarıhalka denir.

Örnek 3.2.13: S aşağıdaki Hasse diyagramıyla verilen latis olsun.



Şekil 3.2.3

S bir S-yarıhalkasıdır. $B = \{1, a, b, d, 0\}$ için $A = \{0, a, b, d\}$ alırsak $A \subset B$ dir ve bu küme S-pseudo altyarıhalkası olur.

Burada şunu da belirtelim ki bütün alt kümeler S-pseudo altyarıhalkası olmayabilir. Örneğin $K = \{0, a, d, b, c\}$ kümesi bir özalt yarıcisimde içerilmediğinden bir S-pseudo altyarıhalkası değildir.

Teorem 3.2.4 : Bir S yarıhalkasının her özalt kümesi S-pseudo altyarıhalkası değildir.

İspat : Örnek 3.2.13 da verilen $K = \{0, a, d, b, c\}$ bir S-pseudo altyarıhalkası değildir.

Teorem 3.2.5 : S bir yarıhalka olsun. Eğer S bir S-pseudo altyarıhalkası içeriyorsa bu durumda S bir S-yarıhalkasıdır.

İspat : S bir yarıhalka olsun ve bir A S-pseudo yarıhalkasını içersin. Bu durumda A bir P yarıcisiminde içerilir. $P \subset A \subset S$ olduğundan S bir S-yarıhalkası olur.

Tanım 3.2.5: S bir yarıhalka olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan bir $\emptyset \neq A \subset S$ alt kümesine bir S-pseudo sağ (sol) ideal denir:

- i) A bir S-pseudo altyarıhalkadır. (yani A , S 'deki bir P yarıcisminde içerilir.)
- ii) her $p \in P$ ve $a \in A$ için $ap \in A$ ($pa \in A$) dir.

Eğer A hem sağ hem sol S-pseudo ideal ise A 'ya S-pseudo ideali denir.

Örnek 3.2.14 : $M_{2 \times 2} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}^0 \right\}$ kümesini alalım. $P = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{Z}^0 \right\}$

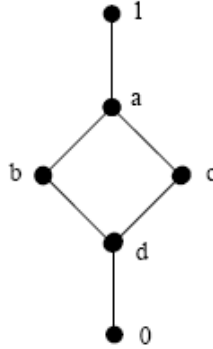
kümesi $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, c \in \mathbb{Z}^0 \right\} \subset M_{2 \times 2}$ yarıcisminin bir özalt kümesidir. $\forall p \in P$ ve $a \in A$

için ap (pa) $\in P$ olduğundan A bir S-pseudo ideal olur.

Tanım 3.2.6: S bir yarıhalka olsun. Eğer bir $\emptyset \neq A \subset S$ kümesi aşağıdaki şartları sağlıyorsa A 'ye S-dual ideal denir.

- i) A bir S-altyarıhalkasıdır.
- ii) $\forall a \in A$ ve $p \in P \setminus \{0\}$ ($P \subset A$) için $a + p \in P$ dir.

Örnek 3.2.15 : S aşağıdaki Hasse diyagramında verilen bir yarıhalka olsun. Bu takdirde



Şekil 3.2.4

S bir S-yarıhalkasıdır. $A = \{0, 1\}$ yarıcismi için $P = \{0, a, b, d, 1\}$ S nin bir S-dual idealidir.

Örnek 3.2.16: $M_{2 \times 2} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in C_2 \right\}$ (C_2 iki elemanlı zincir latis) kümesi bir yarıhalkadır. $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ yarıcisimi için $P = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b \in C_2 \right\}$, $M_{2 \times 2}$ 'nin bir S-dual idealidir.

Örnek 3.2.17 : $\mathbb{Z}^0[x]$ S-yarıhalkasını alalım. $P = \{ \mathbb{Z}_2[x] \text{'deki çift dereceli polinomlar} \}$ kümesi olsun. $\mathbb{Z}^0 \subset P$ bir yarıcisim olduğundan P kümesi $\mathbb{Z}^0[x]$ 'in bir S-altyarıhalkası olur. Fakat $p(x) \in P$ için $p(x)\mathbb{Z}^0 \not\subset \mathbb{Z}^0$ olduğundan P , $\mathbb{Z}^0[x]$ 'in bir S-dual ideali değildir.

Tanım 3.2.7 : S bir yarıhalka olsun. Eğer bir $\emptyset \neq A \subset S$ aşağıdaki şartları sağlıyorsa A 'ya bir S-pseudo dual ideal denir:

i) A bir S-pseudo altyarıhalkadır (yani $A \subset P$ için P , S 'de bir yarıcisimdir veya P bir yarıcisim içerir.)

ii) her $p \in P$ ve $a \in A$ için $p+a \in A$ dır.

Örnek 3.2.18 : $M_{2 \times 2} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in C_2 = (0,1) \right\}$ kümesi için

$P = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ bir yarıcisimdir.

$A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \subset P$ alırsak her $p \in P$ ve $\forall a \in A$ için $a+p \in A$ olduğundan A bir S-pseudo dual idealdir.

Fakat $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in P$ için $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin A$ olduğundan A bir S-pseudo dual ideal olmasına rağmen S-pseudo ideal değildir.

Tanım 3.2.8 : S bir S-yarıhalkası olsun. Eğer aşağıdaki şartları sağlayan bir $A \subset S$ varsa S 'ye bir S-yarıbölme halkası denir.

i) A değişmeli olmayan bir S-altyarıhalkasıdır,

ii) A 'nın bir P altkümesi bir yarıbölme halkasıdır (yani P 'nin sıfır bölenleri yoktur ve P değişmeli olmayan bir yarıhalkadır)

Uyarı : S-yarıbölme halkası sadece yarıhalkanın değişmeli olmadığı durumlarda tanımlanabilir.

Örnek 3.2.19 : $M_{2 \times 2} = \left\{ \begin{pmatrix} a_{ij} \end{pmatrix} \mid a_{ij} \in \mathbb{Z}^0 \right\}$ yarıhalkasını alalım. $A = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{Z}^0 \right\}$ olsun.

Bu durumda $B = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{Z}^0 \right\} \subset A$ yarıcisim olduğundan A bir S-altyarıhalkası olur.

$P = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{Z}^0 \setminus \{0\} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ alırsak bu durumda P bir yarıbölme halkası olur.

Dolayısıyla $M_{2 \times 2}$ bir S-yarıbölme halkasıdır.

Teorem 3.2.8: S bir S-yarıbölme halkası olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler doğrudur.

- 1) S bir S-yarıhalkasıdır.
- 2) S 'nin bir S-altyarıhalkası mevcuttur.

İspat : S- yarıbölme halkası tanımından özelliklerin doğru olduğu görülebilir.

Aklımıza doğal olarak bir S -yarıhalkasına ait bir A S-altyarıhalkasının bir S-yarıbölme halkası olup olmayacağı sorusu gelebilir. Bunun cevabı, bütün S-altyarıhalkalarının bir yarıbölme halkası olamayacağı şeklindedir.

Örneğin, $M_{2 \times 2}$ Örnek 3.2.19 daki küme olsun. $S_{2 \times 2} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}^0 \right\}$ kümesi $M_{2 \times 2}$ 'nin bir

S-altyarıhalkasıdır ama $S_{2 \times 2}$ bir yarıbölme halkası değildir.

3.3. S-Yarıhalkalarındaki Özel Smarandache Elemanlar

Bu bölümde S-idempotent eleman, S- sıfır bölen, S-birimsel ve S-invers eleman gibi kavramlardan bahsedilecektir.

Tanım 3.3.1 : S herhangi bir yarıhalka olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan $a \in S$ ve $b \in S$ elemanlarına S-sıfır bölen denir.

$$ab = 0 \text{ ve } x, y \in S \setminus \{a, b, 0\} \text{ (} x \neq y \text{) için}$$

$$1) ax = 0 \text{ veya } xa = 0$$

$$2) by = 0 \text{ veya } yb = 0$$

3) $xy \neq 0$ veya $yx \neq 0$

Örnek 3.3.1: $S = \mathbb{Z}^0 \times \mathbb{Z}^0 \times \mathbb{Z}^0 \times \mathbb{Z}^0$ yarıhalkasının alalım. $P = \{(x, 0, 0, 0) \mid x \in \mathbb{Z}^0\} \subset S$ bir yarıcisim olduğundan S bir S-yarıhalkasıdır. $a = (0, 0, 4, 2)$ ve $b = (5, 0, 0, 0)$ için $ab = (0, 0, 0, 0)$ olduğundan bunlar sıfır bölenlerdir.

$x = (2, 8, 0, 0)$ ve $y = (0, 1, 0, 0) \in S \setminus \{a, b, (0, 0, 0, 0)\}$ alırsak, $ax = 0$ ve $xa = 0$, $by = 0$ ve $yb = 0$ dir. Ayrıca $xy = (0, 8, 0, 0) \neq (0, 0, 0, 0)$ olduğundan a ve b birer S-sıfır bölen olur.

Örnek 3.3.2 : $M_{2 \times 2} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}^0 \right\}$ elemanları \mathbb{Z}^0 'dan alınan bütün 2×2 'lik

matrislerin kümesi olsun. Bu durumda $M_{2 \times 2}$ bir yarıhalkadır.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ve } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ alınırsa } A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ olur.}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ve } Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ alırsak, } AX = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$XA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$YB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

$$BY = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dir.

$$XY = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0 \text{ ve } YX = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0 \text{ dir. Buradan } A \text{ ve } B$$

elemanları S-sıfır bölen olur.

Benzer olarak $A = B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ alırsak $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ elde edilir. $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ alırsak

$$AX = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$XA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ve}$$

$$X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olur. Dolayısıyla A elemanı da $M_{2 \times 2}$ 'nin bir S-sıfır bölendir.

Teorem 3.3.1 : S bir yarıhalka olmak üzere eğer $x \in S$ bir S-sıfır bölendir ise x aynı zamanda bir sıfır bölendir.

İspat : S-sıfır bölendir tanımından her S-sıfır bölendirin aynı zamanda bir sıfır bölendir olduğu açıktır.

Uyarı: Bu teoremin tersi doğru değildir. Yani bir S yarıhalkasında $x \in S$ sıfır bölense x bir S-sıfır bölendir olmak zorunda değildir. Örneğin $(G = \langle g \mid g^2 = 1 \rangle)$ olmak üzere \mathbb{Z}_4G

yarıhalkasını alalım. $a = 1 + g \in \mathbb{Z}_4G$ ve $b = 3 + g \in \mathbb{Z}_4G$ için $ab = (1 + g)(3 + g) = 0$ dır.

$x = 1 + 3g, y = 2 + 2g \in \mathbb{Z}_4G$ için

$$ax = (1 + g)(2 + 2g) = 0$$

$$by = (3 + g)(2 + g) = 0$$

fakat $xy = (1 + 3g)(2 + 2g) = 0$ olur. Dolayısıyla $a \in S$ sıfır bölendir olmasına rağmen bir S-sıfır bölendir değildir.

Teorem 3.3.2 : A sonlu bir küme ve A 'nın kuvvet kümesi $P(A)$ olsun.

i) $|A| = 2$ ise $(P(A), \cup, \cap)$ yarıhalkasında S-sıfır bölendir yoktur.

ii) $|A| = n \geq 3$ ise $(P(A), \cup, \cap)$ 'nın $n - 1$ elemanlı alt kümeleri hariç diğer alt kümeleri birer S-sıfır bölendir.

İspat: i) $A = \{x_1, x_2\}$ alalım. $P(A) = \{A, \emptyset, \{x_1\}, \{x_2\}\}$ olur. Burada $\{x_1\} \cap \{x_2\} = \emptyset$ dir.

Fakat $\{x_1\} \cap x = \emptyset$ olacak şekilde bir $x \in P(A) \setminus \{\emptyset, \{x_1\}, \{x_2\}\}$ bulunamaz. Dolayısıyla

S-sıfır bölendir de bulunamaz.

ii) $A = \{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\}$, $P(A)$ nin $n-1$ elemanlı alt kümesi olsun. $B = \{x_n\}$ için $A \cap B = \emptyset$ dir. Fakat bu durumda $A \cap X = \emptyset$ olacak şekilde bir $X \in P(A) \setminus \{A, B, \emptyset\}$ bulunamaz. Dolayısıyla $P(A)$ nin $n-1$ elemanlı alt kümesi bir S-sıfır bölen değildir.

$P(A)$ 'nin tek elemanlı alt kümelerinin hepsi ayrık kümeler olduğundan herhangi iki tek elemanlı kümenin kesişimi boştur. Ayrıca bu şekildeki her A, B kümesi için $X, Y \in P(A) \setminus \{A, B, \emptyset\}$ bulunabileceğinden tek elemanlı alt kümeler birer S-sıfır bölendir.

$P(A)$ 'nin $n-m$ ($2 < m < n-1$) elemanlı alt kümelerinden biri $A = \{x_1, x_2, \dots, x_{n-m}\}$ olsun. $B = \{x_{n-m+1}\}$ için $A \cap B = \emptyset$ dir. $X = \{x_n\}$ ve $Y = \{x_1, x_n\}$ alınırsa $A \cap X = \emptyset$ ve $B \cap Y = \emptyset$ ve $X \cap Y \neq \emptyset$ elde edilir. Bu seçim bütün $n-m$ elemanlı alt kümeler için yapılabileceğinden $n-m$ elemanlı kümeler birer S-sfır bölendir.

Teorem 3.3.3: $S = \mathbb{Z}^0 \times \mathbb{Z}^0 \times \dots \times \mathbb{Z}^0$ (n defa, $n \geq 3$) yarıhalkasını alalım. S 'nin en az iki bileşeni ve en çok $n-2$ bileşeni 0 olan her elemanı bir S-sıfır bölendir.

İspat: Eğer $S = \mathbb{Z}^0 \times \mathbb{Z}^0$ ise bu taktirde S 'nin S-sıfır böleneri yoktur.

$n \geq 3$ için $S = \mathbb{Z}^0 \times \mathbb{Z}^0 \times \dots \times \mathbb{Z}^0$ yarıhalkasında $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in S$ 'nin bileşenlerinin hepsi sıfırdan farklı ise a sıfır bölen olamayacağından S-sıfır bölen de olamaz.

$a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in S$ 'nin bir bileşeni 0 olsun. Örneğin $a = (0, a_2, \dots, a_n)$ alırsak bu durumda $b = (b_1, 0, 0, \dots, 0)$ olur. $x, y \in S \setminus \{0, a, b\}$ için $ax = 0$ ise $x = (x_1, 0, 0, \dots, 0)$ formunda olmalıdır.

$by = 0$ ise $y = (0, y_2, \dots, y_n)$ formunda olmalıdır. Buradan $xy = (x_1, 0, \dots, 0)(0, y_2, \dots, y_n) = 0$ elde edilir ki yine bu da a ve b 'nin S-sıfır bölen olamayacağını gösterir.

$a = (0, a_2, 0, a_4, \dots, a_n) \in S$ için $b = (0, 0, b_3, \dots, b_n)$ ($a_2 \neq 0, b_3 \neq 0, a_i b_i = 0, i = 3, 4, \dots, n$) olmak koşuluyla $x = (x_1, 0, x_3, \dots, x_n)$ için $ax = 0$ ve $y = (y_1, y_2, 0, y_4, \dots, y_n)$ için $by = 0$ olur. Buradan da x_1, y_1 bileşenlerini $x_1 y_1 \neq 0$ olacak şekilde seçebileceğimizden $xy = (x_1 y_1, 0, 0, \dots, 0) \neq 0$ elde edilir. Dolayısıyla bileşenlerinden en az ikisi 0 olan her $a \in S$ bir S-sıfır bölen olur.

Not: Burada dikkat edilecek olursa b ile a 'nın karşılıklı bileşenlerinin en az biri 0 olacak şekilde seçilmiştir.

Tanım 3.3.2 : S bir yarıhalka olsun. Bir $x \in S$ için aşağıdaki şartları sağlayacak bir $y \in S$ bulunabiliyorsa $x \in S$ 'e bir S-anti sıfır bölen denir:

$xy \neq 0$ ve $a, b \in S \setminus \{0, x, y\}$ için

- 1) $ax \neq 0$ veya $xa \neq 0$
- 2) $by \neq 0$ veya $yb \neq 0$
- 3) $ab = 0$ veya $ba = 0$

Örnek 3.3.3 : $M_{2 \times 2} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}^0 \right\}$ yarıhalkasını alalım. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}$ için

eğer $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ alınırsa $AB \neq 0$ olur. $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ve $Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ elemanları için $AB \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$AX \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $BY \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ve $XY = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ olduğundan A bir S-anti sıfır

bölen olur.

Teorem 3.3.4 : S bir yarıhalka olsun. $x \in S$ bir S-anti sıfır bölen ise x aynı zamanda bir sıfır bölen olmak zorunda değildir.

İspat : 3.3.3. örnekteki $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ elemanı $M_{2 \times 2}$ 'nin birim elemanıdır. $M_{2 \times 2}$ 'deki sıfırdan farklı

hiçbir eleman için $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ bir sıfır bölen değildir ama bir S-anti sıfır bölendir. Dolayısıyla ispat

tamamlanır.

Örnek 3.3.4: $S = \mathbb{Z}^0 \times \mathbb{Z}^0 \times \mathbb{Z}^0 \times \mathbb{Z}^0 \times \mathbb{Z}^0 \times \mathbb{Z}^0 \times \mathbb{Z}^0$ olsun. S 'nin birim elemanı $(1,1,1,1,1,1,1)$

dir. Bu elemanın bir S-anti sıfır böleni olduğunu görelim :

Herhangi bir $x \in S \setminus \{0\}$ için $x(1,1,1,1,1,1,1) = x$ dir.

$x = (0,0,2,3,1,0,0)$, $a = (2,1,0,0,6,0,0)$ ve $b = (0,0,1,2,0,3,4)$ olsun .

$a(1,1,1,1,1,1,1) \neq 0$, $bx \neq 0$ ve $ab = 0$ dir. Dolayısıyla $(1,1,1,1,1,1,1)$ bir S-anti sıfır bölendir.

Teorem 3.3.5 : Eğer S birim elemanlı bir yarıhalka ve sıfır bölene sahipse bu birim eleman bir S-anti sıfır bölendir.

İspat : S nin $a, b \in S \setminus \{0\}$ elemanları $ab = 0$ olan sıfır bölenleri olsun. 1 de S nin birim elemanı olsun. $1x \neq 0$ olacak şekilde herhangi bir $x \in S$ için $a1 \neq 0$, $bx \neq 0$ dir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Burada akla “acaba sadece birim eleman mı S-anti sıfır bölen olur?” sorusu gelebilir. Böyle olmadığını aşağıdaki örnekte görelim:

Örnek 3.3.5 : $S = \mathbb{Z}^0 \times \mathbb{Z}^0 \times \mathbb{Z}^0 \times \mathbb{Z}^0 \times \mathbb{Z}$ yarıhalkasını alalım.

$x = (1, 1, 1, 1, 0) \in S$ için $y_1 = (0, 0, 0, 0, 4)$ alınırsa $xy_1 = 0$ fakat $y = (0, 0, 6, 7, 0)$ alınırsa $xy = (0, 0, 6, 7, 0)$ olur.

$a = (3, 2, 0, 0, 0)$ ve $b = (0, 0, 0, 9, 2)$ seçelim. Bu durumda $ax = (3, 2, 0, 0, 0)$, $by = (0, 0, 6, 3, 0)$ ve $ab = (0, 0, 0, 0, 0)$ olur. Dolayısıyla $(1, 1, 1, 1, 0)$ bir S-anti sıfır bölendir ve bu S-anti sıfır bölen birim değildir.

Tanım 3.3.3 : S bir yarıhalka olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan bir $0 \neq a \in S$ elemanına S-idempotent elemanı denir.

$$1) a^2 = a$$

$$2) i) b^2 = a \text{ ve ii) } ab = b(ba = b) \text{ veya } ba = a(ab = a) \text{ olacak şekilde bir}$$

$$b \in S \setminus \{a\} \text{ vardır.}$$

Örnek 3.3.6: C_2 zincir latisini alalım. 3 elemanın S_3 simetrik grubu alınırsa C_2, S_3, S_3 grubunun C_2 yarıhalkası üzerindeki bir grup yarıhalkası olur.

$$S_3 \text{ 'ün elemanları } 1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, p_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, p_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$p_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ şeklinde alınırsa, } 1 + p_4 + p_5 \in S_3 \text{ için } (1 + p_4 + p_5)^2 = 1 + p_4 + p_5 \text{ olur.}$$

$$p_1 + p_2 + p_3 \in S_3 \text{ için } (p_1 + p_2 + p_3)^2 = 1 + p_4 + p_5 \text{ ve}$$

$$(1 + p_4 + p_5)(p_1 + p_2 + p_3) = p_1 + p_2 + p_3 \text{ olur. Dolayısıyla } 1 + p_4 + p_5, C_2, S_3 \text{ 'nin bir}$$

S-idempotent elemanıdır.

Örnek 3.3.7 : $S = \mathbb{Z}^0 \times \mathbb{Z}^0 \times \mathbb{Z}^0 \times \mathbb{Z}^0 \times \mathbb{Z}$ yarıhalkasını alalım. $(1,0,0,0,0), (0,1,0,0,0), (0,0,1,0,0), (1,1,1,1,0), (1,1,0,1,1), (0,1,1,1,1), \dots$ elemanları S nin trivial olmayan idempotent elemanlarıdır. Fakat bunların hiçbirisi S-idempotent elemanı değildir .

Teorem 3.3.7: S bir yarıhalka olsun. Her idempotent eleman bir S-idempotent elemanı değildir.

İspat: Örnek 3.3.7 de S 'nin S-idempotentleri yoktur.

Örnek 3.3.8 : $M_{2 \times 2} = \left\{ \begin{pmatrix} a_{ij} \end{pmatrix} \mid a_{ij} \in \mathbb{Z}^0 \right\}$ yarıhalkasını alalım $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

elemanları idempotent elemanlardır. Bunlar S-idempotent değildir.

$a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ alınırsa $a^2 = a, b^2 = a$ ve $ab = b$ şartı gerçekleştiğinden a ve b ,

S-idempotent eleman olur.

Teorem 3.3.8 : $S = \mathbb{Z}^0 \times \mathbb{Z}^0 \times \dots \times \mathbb{Z}^0$ (n defa) yarıhalkasının S-idempotentleri yoktur.

İspat : S 'nin idempotent elemanları

$(0,0,\dots,0,1), (0,0,\dots,0,1,1), (0,0,\dots,0,1,0,0), (0,0,\dots,0,1,0,1), \dots$ dir. Bunları aşağıdaki şemadaki gibi gösterebiliriz.

	2^n	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	1
2	0	0	0	0	1	0
3	0	0	0	0	1	1
4	0	0	0	1	0	0
5	0	0	0	1	0	1
...

Şekil 3.3.1: İkili sayı sisteminde yazılmış doğal sayılar

Bu elemanlardan herhangi birini alalım. Örneğin $(0,0,\dots,1,1)$ için

$(a,b,\dots,k,l)(a,b,\dots,k,l) = (0,0,\dots,1,1)$ olmalıdır. Buradan

$(a^2,b^2,\dots,k^2,l^2) = (0,0,\dots,1,1)$ dır. Böylece $a^2 = 0, b^2 = 0, \dots, k^2 = 1, l^2 = 1$ elde edilir.

$$\begin{aligned} a^2 = 0 \text{ ise } a = 0 \\ a,b,k,l \in \mathbb{Z}^0 \text{ olduğundan } b^2 = 0 \text{ ise } b = 0 \\ k^2 = 1 \text{ ise } k = 1 \\ l^2 = 1 \text{ ise } l = 1 \end{aligned}$$

olmalıdır. Yani bir $x \in S$ elemanının S -idempotent eleman olması için $x^2 = x$ şartı sağlanır.

Fakat $y^2 = x$ şartını sağlayan x 'den farklı bir y elemanı bulunamaz. Dolayısıyla S 'nin S -idempotentleri yoktur.

Tanım 3.3.4: S , birim elemanı 1 olan bir yarıhalka olsun. Bir $x \in S \setminus \{1\}$ elemanı için aşağıdaki şartları sağlayan bir $y \in S$ elemanı varsa x 'e bir S -birimsel eleman denir.

- 1) $xy = 1$
- 2) $a, b \in S \setminus \{x, y, 1\}$ elemanları için
 - i) $xa = y$ veya $ax = y$
 - ii) $yb = x$ veya $by = x$
 - iii) $ab = 1$

Örnek 3.3.8 : $S = \mathbb{R}^0 \times \mathbb{R}^0 \times \mathbb{R}^0$ yarıhalkasını alalım. $x = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}\right)$ ve $y = \left(2, \frac{5}{3}, \frac{3}{2}\right)$

elemanları, $xy = 1$ ve $a = \left(4, \frac{25}{9}, \frac{9}{4}\right), b = \left(\frac{1}{4}, \frac{9}{25}, \frac{4}{9}\right) \in S$ için $ax = y, by = x$ ve $ab = 1$

olduğundan S -birimsel elemanlardır.

Sonuç : $S = \mathbb{R}^0 \times \mathbb{R}^0 \times \dots \times \mathbb{R}^0$ (n defa) yarıhalkasındaki S -birimsel elemanlarını bulabilmek için x, y, a, b elemanları $xy = 1 \Rightarrow y = x^{-1}$, $a = y^2$ ve $b = y^{-2}$ olacak şekilde seçilmelidir.

3.4 Özel S -yarıhalkaları

Bu bölümde S -kongruans bağıntısı, S -c basit yarıhalkası, S -acc, S -dcc, ... gibi kavramlardan bahsedilecektir.

Tanım 3.4.1 : S bir yarıhalkası ve $A \subseteq S$ bir S-altyarıhalkası olsun. “ \sim ” denklik bağıntısı için aşağıdaki şartlar gerçekleşiyorsa S bir S-kongruans bağıntısına sahiptir denir.

$\forall x_1, x_2, c \in P \subset A$ için (P, S 'deki işleme göre yarıcisim)

$$x_1 \sim x_2 \Rightarrow \begin{cases} c + x_1 \sim c + x_2 \\ x_1 + c \sim x_2 + c \\ cx_1 \sim cx_2 \\ x_2c \sim x_1c \end{cases}$$

Eğer S 'nin hiçbir S-altyarıhalkasında S-kongruans bağıntısı tanımlanamıyorsa bu durumda S 'ye bir S-kongruans basit yarıhalkası denir. Ve kısaca S-c basit yarıhalkası olarak yazılır.

Tanım 3.4.2 : S bir S-yarıgrubu olsun. $V(S) = S \cup \{\infty\}$ S olsun. Bu durumda S deki çarpma ve toplama aşağıdaki gibi $V(S)$ 'ye genişletebiliriz:

$\forall x \in V(S)$ için $x\infty = \infty x = \infty$ olarak ve

$\forall x, y \in V(S), x \neq y$ için $x + x = x$ ve $x + y = \infty$

olarak tanımlanır.

Teorem 3.4.1 : S bir sonlu yarıgrup olsun. Eğer S bir S-değişmeli yarıgrubu ise bu takdirde $V(S)$ bir S-c-basit yarıhalkadır.

İspat : S S-değişmeli yarıhalkası olduğunda $V(S)$, bir S-c-basit yarıhalkası olur. Yani S en az bir $G \subset S$ değişmeli alt grubuna sahip bir S-yarıhalkasıdır. Dolayısıyla, G 'nin sonlu bir değişmeli bir grup olması durumunda $V(G)$ bir S-c-basit yarıhalkası olur. Buradan $V(S)$ bir S-c-basit yarıhalkadır.

Örnek 3.4.1 : $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ kümesinin elemanlarının kendi üzerine dönüşümlerinin kümesi olan $S(4)$ 'ü alalım. Bu küme bu dönüşümlerin bileşke işlemine göre bir yarıgruptur.

$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_2 & x_3 & x_4 & x_1 \end{pmatrix}$ tarafından üretilen bir G grubu mertebesi 4 olan devirli bir gruptur. Devirli her

grup değişmeli olduğundan G de değişmelidir. Dolayısıyla $V(S(4))$ bir S-c-yarıhalkası olur.

Örnek 3.4.2 : $S(n)$, n tane elemanın yine kendi üzerine olan dönüşümlerine göre bir yarıgrupdur. $V(S(n))$, $x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n & 1 \end{pmatrix}$ tarafından üretilen bir grubu içerir. Bu grup devirli olduğundan değişmelidir. $V(G) \subset V(S(n))$ olduğundan $V(S(n))$ bir S-c-basit yarıhalkasıdır.

Örnek 3.4.3: $V(\mathbb{Z}_{12})$ sonlu bir S-c-basit yarıhalkasıdır. Çünkü $A = \{3, 9\} \subset \mathbb{Z}_{12}$ mertebesi 2 olan değişmeli bir gruptur.

Benzer şekilde $V(S(3))$ de sonlu bir S-c-basit yarıhalkadır. Çünkü

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 123 \\ 123 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 123 \\ 231 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 123 \\ 312 \end{pmatrix} \right\} \subset S(3) \text{ mertebesi 3 olan devirli bir gruptur.}$$

Örnek 3.4.4 : $V(\mathbb{Z}_6)$, $V(\mathbb{Z}_8)$ yarıhalkaları S-değişmeli c-basit yarıhalkalardır. Çünkü $\{4, 2\}$ ve $\{1, 5\}$ grupları \mathbb{Z}_6 'nin değişmeli altgruplarıdır. Aynı şekilde $\{1, 3\}, \{1, 5\}, \{1, 7\}, \{1, 3, 5, 7\}$ grupları da \mathbb{Z}_8 'nin değişmeli alt gruplarıdır.

Teorem 3.4.2 : Her sonlu pozitif n tamsayısı için $V(S(n))$ bir S-değişmeli kongruans basit yarıhalkasıdır.

İspat : $S(n)$ bir S-yarıgrubu olduğundan $S(n)$ 'nin değişmeli bir özalt grubu vardır. Teorem 3.4.1 den $V(S(n))$ bir S-değişmeli kongruans basit yarıhalkası olur.

Teorem 3.4.3 : $V(S(n))$ 'nin en az $n-1$ tane değişmeli grup olan özalt kümesi vardır. Dolayısıyla $V(S(n))$ bir S-değişmeli kongruans basit sonlu yarıhalkasıdır.

İspat : $1 < m < n$ olan her m için mertebesi m olan ve G_m ile göstereceğimiz bir devirli grup vardır öyle ki $V(G_m)$ bir değişmeli, kongruans basit sonlu yarıhalkadır. Böylece $V(S(n))$ bir S-değişmeli kongruans basit sonlu yarıhalkadır.

Cayley teoremine göre "Her sonlu grup uygun bir n için S_n 'nin bir alt grubuna izomorfiktir. Bu teorem S-yarıgrupları için "Her S-yarıgrubu $S(n)$ 'nin bir S-alt grubuna izomorfiktir." şeklinde ifade edilebilir.

Bunu kullanarak aşağıdaki sonucu verebiliriz:

Teorem 3.4.4 : G sonlu değişmeli grup ve bir S değişmeli kongruans basit sonlu yarıhalkası için $V(G)$ S 'ye izomorfik olsun. Bu taktirde her $V(G)$ uygun bir n için $V(S(n))$

S-c-basit yarıhalkasında izomorfik bir görüntüye sahiptir.

İspat: Cayley teoremine göre G , uygun bir n için S_n 'nin bir alt grubuna izomorfiktir.

$S_n \subset S(n)$ olduğundan $S(n)$ bir S-yarı grubudur. Buradan $V(G) \subset V(S_n) \subset V(S(n))$ elde edilir.

Örnek 3.4.3 : C_n , n elemanlı bir zincir latis olsun. $M_{t \times t}$, elemanları C_n 'den alınan bütün $t \times t$ tipindeki matrislerin kümesi olsun. Bu taktirde $M_{t \times t}$ yarıhalkası bir S-sonlu kongruans basit yarıhalkasıdır. Böylece t 'yi değiştirerek S-sonlu kongruans basit yarıhalkaları elde edilebilir.

Tanım 3.4.3 : S bir yarıhalka olsun. Eğer S 'nin S-sağ idealleri tamsıralı ise S 'ye S-sağ zincir yarıhalkası denir. Benzer şekilde S 'nin S-sol idealleri tam sıralı ise S 'ye S-sol zincir yarıhalkası denir.

Eğer bütün S-idealleri tam sıralı ise S 'ye S-zincir yarıhalkası denir.

Örnek 3.4.4 : C_9 zincir latisini alalım. Bu durumda C_9 mertebesi 9 olan bir yarıhalkadır. Bu yarıhalka bir S-zincir yarıhalkasıdır.

Not: Bütün zincir latisler S-zincir yarıhalkasıdır.

Tanım 3.4.4 : S bir yarıhalka olsun. Eğer $S_1 \subset S_2 \subset \dots \subset S_i$ S-ideallerin bir monoton artan dizisi ve her $s \geq r$ için, $S_r = S_s$ olacak şekilde bir pozitif r tamsayısı varsa bu taktirde S yarıhalkasında S-idealleri için S-monoton artan zincir koşulunu (S-acc) sağlar denir.

Örnek 3.4.5 : Eğer zincir latis olan herhangi bir S-yarıhalkasını alırsak bu durumda S-acc özelliği sağlanır.

Tanım 3.4.5 : S herhangi bir yarıhalka olsun. Eğer S 'deki S-ideallerinin her kesin azalan $N_1 \supset N_2 \supset \dots$ dizisi sonlu uzunlukta ise bu taktirde S 'ye N_i S-idealleri üzerinde Smarandache azalan zincir koşulunu (S-dcc) sağlar denir.

Eğer S 'deki S-ideallerinin verilen herhangi bir P kümesi için P kümesinde diğer herhangi bir ideali öz olarak içermeyen bir ideal varsa bu taktirde S 'de S-idealler için Smarandache minimum koşulu (S-mc) sağlanır denir.

Örnek 3.4.6 : \mathbb{Z}_{24} yarıhalkasını alalım. $I_1 = \{0, 2, 4, \dots, 22\}$, \mathbb{Z}_{24} 'ün bir idealidir.

$A = \{0, 8, 16\} \subset I_1$ bir yarıcisim olduğundan I_1 bir S-altyarıhalkadır ve I_1 'den alınan her eleman ile \mathbb{Z}_{24} 'den alınan her elemanın çarpımı I_1 'de içerildiğinden I_1 bir S-idealidir.

$I_2 = \{0, 4, 8, 12, 16, 20\}$ de bir S-idealidir. ($\{0, 8, 16\} \subset I_2$ bir yarıcisim olduğundan)

$I_2 \subset I_1 \subset \mathbb{Z}_{24}$ olduğundan S-acc özelliği sağlanır.

Tersine alarak $\mathbb{Z}_{24} \supset I_1 \supset I_2$ olduğundan S-dcc özelliği sağlanır.

Sonuç olarak sonlu bir yarıhalkada S-acc özelliği sağlanıyorsa S-dcc de sağlanır.

Tanım 3.4.6 : S bir zincir yarıhalkası olsun ve bu yarıhalkadaki idealler S-acc koşulunu sağlasın. Eğer S 'deki S-ideallerinin boştan farklı her P kümesi P 'deki diğer herhangi bir S-idealinde öz olarak içermeyen bir S-ideal içeriyorsa bu taktirde S 'de S-idealler için S-maximum koşulu (S-MC) sağlanır denir.

Tanım 3.4.7 : S bir yarıhalka olsun. Eğer S 'nin bir A özalt kümesi (S 'nin bir altyarıhalkasıdır) aşağıdaki koşulları sağlıyorsa S 'ye bir S-idempotent yarıhalkası denir:

- 1) A bir S-altyarıhalkasıdır.
- 2) A bir idempotent yarıhalkadır.

Örnek 3.4.7: $C_7[x]$ polinom yarıhalkasını alalım. $C_7[x]$ bir S-idempotent yarıhalkasıdır.

Çünkü $C_7 \subset C_7[x]$ kümesi,

- 1) $C_7[x]$ nin altyarıhalkasıdır.
- 2) C_7 bir S-altyarıhalkasıdır.
- 3) $\forall a \in C_7$ için C_7 de $a + a = a$

Tanım 3.4.8 : S bir yarıhalka ve G bir S-yarıgrubu (yani G yarıgrubunun grup olan bir altkümesi vardır) olsun. SG yarıgrup yarıhalkasına Smarandache grup yarıhalkası (S-grup yarıhalkası) denir.

Örnek 3.4.8 : $\mathbb{Z}^0 S(n)$ yarıgrup yarıhalkasını alalım. $\mathbb{Z}^0 S(n)$ bir S-grup yarıhalkasıdır.

Örnek 3.4.9 : $C_2\mathbb{Z}_6, C_3\mathbb{Z}_{12}$ yarıhalkaları birer S-grup yarıhalkasıdır. Çünkü \mathbb{Z}_6 'nin altgrupları $\{4,2\}$ ve $\{1,5\}$ tir. \mathbb{Z}_{12} 'nin alt grupları ise $\{1,5\}, \{9,3\}, \{4,8\}, \{1,7\}, \{1,11\}, \{1,5,7,11\}$ dir.

Örnek 3.4.10 : $M'_{2 \times 2} = \left\{ (a_{ij}) \mid a_{ij} \in \mathbb{R}^+ \text{ ve } \det(a_{ij}) \neq 0 \right\} \subset M_{2 \times 2} = \left\{ (a_{ij}) \mid a_{ij} \in \mathbb{R}^+ \right\}$ mertebesi sonsuz olan bir gruptur. C_2 zincir latisini alırsak $M_{2 \times 2} C_2$ sonsuz mertebeli bir S-grup yarıhalkası olur.

Tanım 3.4.9 : G bir S-anti grubu (yani G 'nin yarıgrup olan bir özalt kümesi var) ve F bir yarıhalka olsun. FG grup yarıhalkasına bir Smarandache yarıgrup yarıhalkası denir.

Örnek 3.4.11 : \mathbb{Q}^+ çarpma işlemine göre bir gruptur. $\mathbb{Z}^+ \subset \mathbb{Q}^+$ bu işleme göre bir yarıgruptur. C_3 zincir latisini alırsak $C_3 \mathbb{Q}^+$ bir S-yarıgrup yarıhalkası olur.

Örnek 3.4.12 : \mathbb{R}^+ çarpmaya göre bir gruptur. $\mathbb{Z}^+ \subset \mathbb{R}^+$ ise bir yarıgruptur. $C_2 \mathbb{R}^+$ bir S-yarıgrup yarıhalkasıdır.

Şu ana kadar görüleceği üzere, sonlu S-yarıgrup yarıhalkaları inşa edemedik. Bu çözüme açık bir problemdir!

3.5. İkinci Seviye S-Yarıhalkaları

Şimdiye kadar anlatılan S-yarıhalkalarını birinci seviyeden yarıhalka olarak adlandıracak olursak daha zengin bir yapıya sahip olan ikinci seviye Smarandache yarıhalkalarını tanımlayabiliriz. Bunun için önce ikinci seviye S-yarıhalkaları için S-karma direkt çarpımı tanımlayalım.

Tanım 3.5.1 : S_1 ve S_2 iki farklı cebirsel yapı olsun. S-karma direkt çarpımı ,

$S_1 \times S_2 = \left\{ (s_1, s_2) \mid s_1 \in S_1, s_2 \in S_2 \right\}$ olarak tanımlanır. $S_1 \times S_2$, S_1 ve S_2 nin cebirsel özelliklerini taşır.

Örnek 3.5.1 : \mathbb{Z}^0 yarıhalkasını ve \mathbb{Z}_7 cismini alalım. $S = \mathbb{Z}^0 \times \mathbb{Z}_7$ bir yarıhalkadır ve bu yarıhalka S-karışık direkt çarpımdır. S yarıhalkası $\{0\} \times \mathbb{Z}_7 \subseteq \mathbb{Z}^0 \times \mathbb{Z}_7$ 'yi cisim olarak içerir .

Tanım 3.5.2 : S bir yarıhalka olsun. Eğer S 'nin cisim olan bir özalt kümesi varsa S 'ye ikinci seviye bir S-yarıhalkası denir ve II.seviye S-yarıhalkası olarak yazılır.

Örnek 3.5.2 : S , C_{10} yarıhalkası ve \mathbb{Q} cisminin S-karma direkt çarpımı olsun. Bu taktirde S II. Seviye bir S-yarıhalkasıdır.

Örnek 3.5.3 : $S = \mathbb{Z}^0 \times \mathbb{Q}$, II.seviye bir S-yarıhalkasıdır. Çünkü $\{0\} \times \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Z}^0 \times \mathbb{Q}$ bir cisimdir.

Yukarıdaki örneklerden de görüleceği üzere eğer bir yarıhalka S-karma direkt çarpımdan oluşmayan bir yarıhalka ise cisim olan bir özalt kümesi bulunamaz.

Örnek 3.5.4 : $S = \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Q}$ olsun. S yarıhalkası II. seviye S-yarıhalkasıdır.

Örnek 3.5.5 : $S = \mathbb{Z}_5 \times C_{10}$, II.seviye S-yarıhalkasıdır. Bu yarıhalkanın S-idealleri ve S-altyarıhalkası vardır ve S aynı zamanda bir S-idempotent yarıhalkasıdır.

Örnek 3.5.6 : $S = C_2 \times \mathbb{R}$, II seviye bir S-yarıhalkasıdır. $S_1 = C_2 \times \mathbb{R}^0$ bir S-altyarıhalkasıdır.

Çünkü $C_2 \times \mathbb{Q}^0 \subseteq C_2 \times \mathbb{R}^0 \subseteq C_2 \times \mathbb{R}$ bir yarıcisimdir.

$S_2 = C_2 \times \mathbb{Q}^0$ da bir S-altyarıhalkasıdır. Çünkü $C_2 \times \mathbb{Z}^0 \subseteq C_2 \times \mathbb{Q}^0 \subseteq C_2 \times \mathbb{R}$ bir yarıcisimdir.

Fakat $S_3 = \{0\} \times \mathbb{Z}^0$ bir S-altyarıhalka değildir.

Teorem 3.5.1 : II. seviye S- yarıhalkası tam olmayan (non-strict) bir yarıhalkadır.

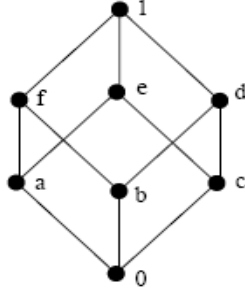
İspat : S II.seviyeden bir S-yarıhalkası olsun. Bu durumda S bir P cismini içerir. P cisim olduğundan $x + y = 0$ 'ı sağlayan $x \neq 0, y \neq 0$ elemanları vardır. Halbuki tam (strict) yarıhalka tanımına göre bu elemanların ikisi de 0 olmalıdır. O halde S non-strict bir yarıhalkadır. Dolayısıyla buradan II.seviye S-yarıhalkalarının tam olmadığı görülür.

Burada şunu da belirtelim ki II.seviye S-yarıhalkaları tam olmamalarına rağmen henüz birinci seviye tam olmayan (non-strict) bir S-yarıhalkası bulunamamıştır.

Bu örneklerden sonra II.seviye S-yarıhalkaları için de S-sıfır bölen, S-birimsel, S-idempotent gibi kavramları verelim.

Tanım 3.5.3 : S II.seviye bir S-yarıhalkası olsun. Eğer S 'nin bir A özalt kümesinin bir P özalt kümesi cisim oluyorsa, A 'ya II.seviye bir S-altyarıhalkası denir.

Örnek 3.5.6 : L aşağıdaki Hasse diyagramıyla verilmiş latis olsun.



Şekil 3.5.1

\mathbb{Z}_{11} karakteristiği 11 olan asal cisim olsun. $S = L \times \mathbb{Z}_{11}$ dersek S , II.seviyeden bir S-yarıhalkası olur. $A = \{1,0\} \times \mathbb{Z}_{11}$ II.seviyeden bir S-altyarıhalkadır.

II.seviye bir S-yarıhalkasında birinci seviyeden S-altyarıhalkaları bulunabilir.

Örnek 3.5.7: $S = C_8 \times \mathbb{Z}$ II.seviye bir S-yarıhalkasıdır. $A = \{1,0\} \times 2\mathbb{Z}$ birinci seviyeden bir S-altyarıhalkasıdır. Çünkü $\{1,0\} \times \{0\}$ yarıcismi A 'da içerilir.

Sonuç: S II.seviyeden bir S-yarıhalkası olsun. S 'nin hem II. seviyeden hem de I.seviyeden altyarıhalkaları olabilir.

Teorem 3.5.3 : S , I.seviyeden bir yarıhalka ise II.seviyeden bir altyarıhalkaya sahip değildir.

İspat : S yarıhalkası II.seviyeden bir altyarıhalkaya sahip olsun. Bu durumda S 'nin bir A özalt kümesi cisim olacak şekilde mevcuttur. Bu da bizi tekrar II.seviye S-yarıhalkasına götürür ki bu bir çelişkidir. Çünkü başta S 'nin I.seviye olduğunu kabul etmiştik. Dolayısıyla S 'nin II.seviye altyarıhalkaları mevcut değildir.

Tanım 3.5.4 : S II.seviyeden bir S-yarıhalkası olsun. S 'nin bir A özalt kümesi aşağıdaki şartları sağlıyorsa A 'ya II.seviyeden bir S-ideal denir:

- i) A II.seviyeden bir S-altyarıhalkadır,
- ii) Her $a \in A$ ve her $p \in P$ ($P \subset A$ bir cisim) için $ap(pa) \in P$ dir.

Örnek 3.5.8 : $S = \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}^0$ II.seviye bir S-yarıhalkasıdır. $P_1 = \{0,5\} \times \{0\}$ bir cisimdir .
 $P_2 = \{0,2,4,6,8\} \times \{0\}$ de bir cisimdir. Buradan $A_1 = \{0,5\} \times 2\mathbb{Z}^0$ II.seviye bir S-ideal ve
 $A_2 = \{0,6\} \times 3\mathbb{Z}^0$ da başka bir II.seviye S-ideal olur.

Örnek 3.5.9: $S = C_5 \times \mathbb{Z}_{15}$ yarıhalkasında $I = \{0\} \times \mathbb{Z}_{15}$ II. seviye bir S-idealidir. Çünkü
 $P = \{0\} \times \{0,5,10\} \subset I$ bir cisimdir. Ayrıca P den alınan her eleman ile I 'dan alınan her elemanın çarpımı P 'nin bir elemanıdır.

Teorem 3.5.4 : $S = C_n \times \mathbb{Z}_p$ (\mathbb{Z}_p , karakteristiği p olan bir asal cisim) II. Seviye bir S-yarıhalkasını alalım. Bu taktirde S , değişmeli kongruans basit sonlu bir Smarandache yarıhalkasıdır.

İspat : $S = C_n \times \mathbb{Z}_p$ 'nin bir S-değişmeli kongruans basit sonlu bir yarıhalkası olan bir S-altyarıhalkası mevcuttur.

Uyarı : Sadece II. seviye bir S-yarıhalkaları S-değişmeli kongruans basit sonlu bir yarıhalkadır.

Tanım 3.5.5 : S II. seviye bir S-yarıhalkası olsun. Eğer $S_1 \subset S_2 \subset \dots$ olacak şekilde monoton artan S_i , S-II. seviye idealleri $S_r = S_s$ ($\forall s \geq r$) olacak şekilde (r pozitif bir tamsayı) mevcutsa, bu taktirde S 'e bu II. seviye S-ideaalleri için S-II. seviye artan zincir formunda Denir ve kısaca S-acc II olarak yazılır.

Burada S-acc II daha önce tanımladığımız S-acc den farklıdır. Açıktır ki I. seviye bir S-yarıhalkası S-acc II' nin şartlarını sağlayamaz.

Bu tanıma benzer olarak S-dcc II de tanımlanabilir.

3.6. Smarandache Anti Yarıhalkaları

Smarandache anti yarıhalkaları Florentin Smarandache tarafından Smarandache anti grubuna benzer bir düşünceyle inşa edilmiştir. Bir grubun yarıgrup olan bir özalt kümesi varsa bu gruba

S-anti grubu denir. S-anti grubu herhangi bir gruba göre daha kuvvetli bir yapıya sahiptir. Benzer olarak S-anti yarıhalkası da normal bir halkaya göre daha kuvvetli bir yapıya sahiptir.

Tanım 3.6.1: R bir halka olsun. Eğer R 'nin yarıhalka olan bir altkümesi varsa R 'ye bir Smarandache anti yarıhalkası denir ve kısaca S-anti yarıhalkası olarak yazılır.

Örnek 3.6.1: \mathbb{Z} bir halkasını alalım. $\mathbb{Z}^+ \subset \mathbb{Z}$ bir yarıhalka olduğundan \mathbb{Z} bir S-anti yarıhalkasıdır.

Örnek 3.6.2: \mathbb{Q} rasyonel sayılar kümesi bir cisimdir. \mathbb{Q}^+ bir yarıhalka olduğundan \mathbb{Q} bir S-anti yarıhalkası olur.

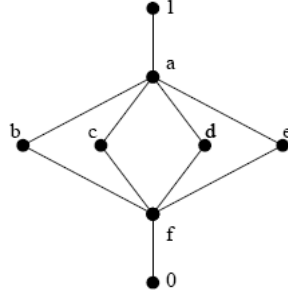
Örnek 3.6.3: \mathbb{R} reel sayılar kümesi bir cisimdir. \mathbb{R}^+ bir yarıhalka olduğundan \mathbb{R} bir S-anti yarıhalkası olur.

Örnek 3.6.4: \mathbb{C} kompleks sayılar kümesi bir cisimdir. \mathbb{Z}^+ , \mathbb{Q}^+ , \mathbb{R}^+ birer yarıhalkadır. Dolayısıyla \mathbb{C} bir S-anti yarıhalkası olur.

Örnek 3.6.5: $M_{3 \times 3} = \{(a_{ij}) \mid a_{ij} \in \mathbb{Z}\}$ kümesi matris toplama ve çarpım işlemine göre karakteristiği 0 olan ve değişmeli olmayan bir halkadır. $M'_{3 \times 3} = \{(a_{ij}) \mid a_{ij} \in \mathbb{Z}^0\}$ bir yarıhalka olarak içerildiğinden $M_{3 \times 3} = \{(a_{ij}) \mid a_{ij} \in \mathbb{Z}\}$ bir S-anti yarıhalkası olur.

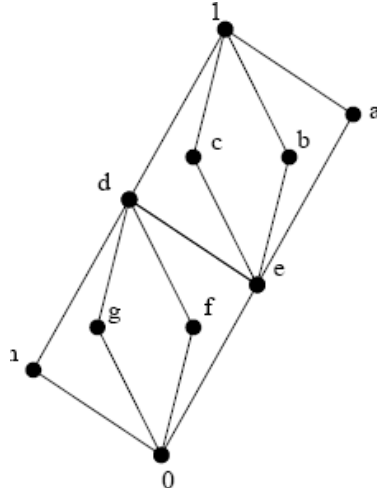
Örnek 3.6.6: $\mathbb{Q}[x]$ polinom halkasını alalım. $\mathbb{Q}^+[x]$ yarıhalkası bu halkada içerildiğinden $\mathbb{Q}[x]$ bir S-anti yarıhalkası olur.

Örnek 3.6.7: M aşağıdaki Hasse diyagramıyla verilen modüler latis olsun. $S = \{1, a, b, f, 0\}$ bir yarıhalkadır. Fakat M bir S-anti yarıhalkası değildir. Çünkü modüler latisler halka özelliği taşımaz. Dolayısıyla M , bir yarıhalkaya sahip olsa bile kendisi bir halka özelliği taşımadığından S-antiyarıhalkası olamaz.



Şekil 3.6.1

Örnek 3.6.8: M aşağıdaki Hasse diyagramıyla verilen latis olmak üzere $P_{3 \times 3} = \left\{ \left(a_{ij} \right) \mid a_{ij} \in M \right\}$ kümesi bir S-anti yarıhalkası değildir. $H = \{1, a, e, 0\}$ dağılmalı latisi M kümesinde içerilmesine rağmen M modüler bir latis olduğunda halka özelliğini taşımaz. Dolayısıyla M bir S-anti yarıhalkası değildir.



Şekil 3.6.2

Bütün halkaların bir S-antiyarıhalkası olması gerekmez. Örneğin $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$ halkasının hiçbir alt kümesi yarıhalka olmadığından \mathbb{Z}_n bir S-anti yarıhalkası değildir.

Örnek 3.6.9: \mathbb{Q} rasyonel sayılar kümesi bir cisimdir. $G = \langle g \mid g^3 = 1 \rangle$ devirli grubunu alırsak $\mathbb{Q}G$ bir grup halkası olur. $\mathbb{Q}^+G = \left\{ \sum \alpha_i g_i \mid \alpha_i \in \mathbb{Q}^+, g_i \in G \right\}$ kümesi $\mathbb{Q}G$ de içerilen bir yarıhalkadır. Dolayısıyla $\mathbb{Q}G$ bir S-anti yarıhalkasıdır.

Örnek 3.6.10: $S = \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{10}$ halkası bir S-anti yarıhalkasıdır. Çünkü

$K = \{0,5\} \times \{0\} \times \{0,5\} \subset S$ kümesi bir yarıhalkadır. Bunu görelim:

+	(0,0,0)	(0,0,5)	(5,0,0)	(5,0,5)
(0,0,0)	(0,0,0)	(0,0,5)	(5,0,0)	(5,0,5)
(0,0,5)	(0,0,5)	(0,0,0)	(5,0,5)	(5,0,0)
(5,0,0)	(5,0,0)	(5,0,5)	(0,0,0)	(0,0,5)
(5,0,5)	(5,0,5)	(5,0,0)	(0,0,5)	(0,0,0)

•	(0,0,0)	(0,0,5)	(5,0,0)	(5,0,5)
(0,0,0)	(0,0,0)	(0,0,0)	(0,0,0)	(0,0,0)
(0,0,5)	(0,0,0)	(0,0,5)	(0,0,0)	(0,0,5)
(5,0,0)	(0,0,0)	(0,0,0)	(0,0,0)	(0,0,0)
(5,0,5)	(0,0,0)	(0,0,5)	(0,0,0)	(0,0,5)

Şekil 3.6.3. $(K, +)$ ve (K, \cdot) tablosu

$(K, +)$ bir değişmeli bir monoid ve (K, \cdot) bir yarıgruptur. Ayrıca çarpmanın toplama üzerine dağılıma özelliği de bulunduğundan $(K, +, \cdot)$ bir yarıhalka olur.

Dolayısıyla $S = \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{10}$ bir S-anti yarıhalkasıdır.

Teorem 3.6.1: F karakteristiği 0 olan bir cisim ve G bir grup olmak üzere FG grup halkası bir S-anti yarıhalkasıdır.

İspat: F nin karakteristiği 0 olduğundan ya $\mathbb{Q} \subset F$ veya $F = \mathbb{Q}$ dir. Her iki durumda da \mathbb{Q}^+ bir yarıhalka olarak içerilir. \mathbb{Q}^+G grup yarıhalkası, FG de içerildiğinden FG bir S-anti yarıhalkası olur.

Sonuç : F karakteristiği 0 olan bir cisim ise $F \times F \times \dots \times F$ bir S-anti yarıhalkasıdır.

İspat : F nin karakteristiği 0 olduğundan $F = \mathbb{Q}$ veya $\mathbb{Q} \subset F$ alabiliriz. Buradan hareketle $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \dots \times \mathbb{Q} = F \times F \times \dots \times F$ veya $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \dots \times \mathbb{Q} \subset F \times F \times \dots \times F$ yazılabilir. Her iki

durumda da $\mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Q}^+ \times \dots \times \mathbb{Q}^+$ bir yarıhalkadır. Dolayısıyla $F \times F \times \dots \times F$ bir S-anti yarıhalkasıdır.

Referanslar

- 1) Kandasamy, W. B. V, "Smarandache Semirings and Semifields", American Research Press, Rehoboth, 2002,
<http://www.gallup.unm.edu/~smarandache/eBooks/otherformats.htm>.
- 2) Rotmon, J. J, "An Introduction to the Theories of Groups", Springer Verlag, Newyork, Berlin 4. th Edition, 1995
- 3) Bayar,E. " Gruplar Teorisi", Karadeniz Üniversitesi, Trabzon, 1986
- 4) Bayraktar,M. "Soyut Cebir ve Sayılar Teorisi", Gazi Üniversitesi, Ankara, 2006
- 5) Dönmez, A. "Soyut Matematik", Seçkin Yayıncılık, Ankara, 2001
- 6) Bayar,E. " Soyut Cebir", Karadeniz Üniversitesi, Trabzon, 1986
- 7) Fraleigh, J. B. "A First Course in Abstract Algebra", Fifth Ed. Addison-Wesley, Reading, Newyork, Paris, 1994
- 8) Jacobson, N. "Basic Algebra I ", W. H. Freeman and Company, San Fransisco, 1974

Özgeçmiş

Adı Soyadı: Ayşe Çürük

Doğum Yeri: Kula

Doğum Tarihi: 29-01-1975

Medeni Hali: Evli, 2 çocuk annesi

Eğitimi: 1) İlkokul: Vali Kazım Paşa İlköğretim Okulu, İzmir

2) Ortaokul: Şehit Fethibey Ortaokulu, İzmir

3) Lise: Çınarlı Anadolu Teknik, Teknik Lisesi (Bilgisayar), İzmir

4) Üniversite: Hacettepe Üniversitesi Matematik Öğretmenliği, Ankara

Çalışma Hayatı: Kütahya, Tavşanlı İmam Hatip Lisesi'nde ilk göreve başladı. Şu anda Manisa Anadolu Teknik Lisesinde matematik öğretmenliği yapıyor...