

TRANSNORMAL MANİFOLDLAR

Meltem GÖLGELİ MATUR

Zonguldak Karaelmas Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalında

Bilim Uzmanlığı Tezi

Olarak Hazırlanmıştır

ZONGULDAK

Haziran, 2007

KABUL:

Meltem GÖLGELİ MATUR tarafından hazırlanan "TRANSNORMAL MANİFOLDLAR" başlıklı bu çalışma jürimiz tarafından değerlendirilerek Zonguldak Karaelmas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Bilim Uzmanlığı Tezi olarak oybirliğiyle kabul edilmiştir. 22/06/2007

Başkan: Prof. Dr. Arif AMİROV(ZKÜ)

Üye : Yrd. Doç. Dr. Levent KULA (Ankara Üniv.)

Üye : Yrd. Doç. Dr. Yusuf KAYA(ZKÜ)



ONAY:

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım. 13/7/2007



Doç. Dr. Mustafa SÖZEN
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

“Bu tezdeki tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu; ayrıca bu kuralların ve ilkelerin gerektirdiği şekilde, bu çalışmadan kaynaklanmayan bütün atıfları yaptığımı beyan ederim.”

Meltem GÖLGELİ MATUR

ÖZET

Bilim Uzmanlığı Tezi

TRANSNORMAL MANİFOLDLAR

Meltem GÖLGELİ MATUR

Zonguldak Karaelmas Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Yusuf KAYA

Haziran, 2007, 52 sayfa

Bu tezde, $(m+k)$ -boyutlu bir Öklid uzayına transnormal embedingi yapılabilen m -boyutlu düzgün manifoldlar üzerine çalışılmıştır. Bu çalışma için temel kaynaklarımız Milnor (1963), Robertson (1964), Robertson (1967), Wegner (1981) ve Robertson (1984) dür. İlk bölümde, Öklid uzayında türevlenebilme ve türevlenebilir manifoldlarla ilgili temel tanımlara ve kavramlara yer verilmiştir. İkinci bölümde, m -boyutlu düzgün manifoldlar üzerinde tanımlı türevlenebilir fonksiyonların kritik noktaları ve özellikle uzaklık fonksiyonu ve Morse indeks teoremine yer verilmiştir. Üçüncü bölümde, manifoldlar için sabit genişlik kavramı ve bazı örnekleri çalışılmıştır. Dördüncü bölümde, $(m+k)$ -boyutlu bir Öklid uzayına gömülebilen m -boyutlu transnormal manifoldlar ve bu manifoldlarla ilgili sonuçlar incelenmiştir.

Anahtar Sözcükler: Manifold, Uzaklık fonksiyonu, Odak nokta, Sabit genişlik, Transnormal embedding.

Bilim Kodu: 403.04.01.

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

TRANSNORMAL MANIFOLDS

Meltem GÖLGELİ MATUR

**Zonguldak Karaelmas University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics**

Thesis Advisor: Asst. Prof. Dr. Yusuf KAYA

June, 2007, 52 pages

In this thesis, the concept of transnormal embeddings of m -dimensional smooth manifolds into an $(m+k)$ -dimensional Euclidean space is studied. Our main references for this study are Milnor (1963), Robertson (1964), Robertson (1967), Wegner (1970) and Robertson (1984). In the first section, the basic definitions and concepts are stated on differentiability in Euclidean spaces and differentiable manifolds. In the second section, the critical points of the smooth functions defined on manifolds is studied and in particular, the distance functions and the Morse index theorem are given. In the third section, constant width for manifolds and some examples are studied. In the fourth section, the concept of transnormal embeddings of manifolds into an $(m+k)$ -dimensional Euclidean space and some known related results examined.

Key Words: Manifold, Distance function, Focal point, Constant Width, Transnormal embedding.

Science Code: 403.04.01.

TEŞEKKÜRLER

Tez çalışmamın her aşamasında benden hiç bir yardımı esirgemeyen değerli hocam sayın Yrd. Doç. Dr. Yusuf KAYA'ya, yoğun çalışma koşullarıma gösterdikleri sabır için eşime ve aileme teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
KABUL	ii
ÖZET	iii
ABSTRACT	iv
TEŞEKKÜR	v
İÇİNDEKİLER	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	viii
SİMGELER DİZİNİ	ix
BÖLÜM 1 ÖN BİLGİLER VE TANIMLAR	1
1.1 TOPOLOJİK UZAYLARDA TEMEL KAVRAMLAR	1
1.2 $\mathbb{R}^m$ DE TÜREVLENE BİLME	4
1.3 MANİFOLDLAR	5
1.4 $\mathbb{R}^m$ DE ÖLÇÜM	7
1.5 İMMERSİYONLAR VE EMBEDİNGLER	8
BÖLÜM 2 MANİFOLDLARIN ODAK NOKTALARI	10
2.1 KRİTİK NOKTALAR	10
2.2 BİR MANİFOLDUN ODAK NOKTALARI	16
2.3 ÖRNEKLER	24
BÖLÜM 3 TRANSNORMAL MANİFOLDLAR	32
3.1 SABİT GENİŞLİKLİ (CONSTANT WIDHT) MANİFOLDLAR	32

İÇİNDEKİLER (devam ediyor)

	<u>Sayfa</u>
BÖLÜM 4 MANİFOLDLARIN TRANSNORMAL EMBEDİNGLERİ.....	44
4.1 ÖRTÜ UZAYLARI VE TRANSNORMALLİK.....	44
4.2 KOMPAKTLIK VE TRANSNORMALLİK.....	48
 KAYNAKLAR.....	 51
ÖZGEÇMİŞ.....	52

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>No</u>	<u>Sayfa</u>
2.1 $\mathbb{R}^3$ de bir Tor	13
2.2 Parabol ve odak noktaları.....	25
2.3 Elips ve odak noktaları.....	26
3.1 Çember.....	33
3.2 Reuleaux Üçgeninin oluşumu	33
3.3 Reuleaux Üçgeninin alanının hesaplanması	34
3.4 Döndürülmüş kareler ve Reuleaux Üçgeni.	34
3.5 Bir ovalin karşılıklı noktaları	36
3.6 3 tane köşeye sahip sabit genişlikli bir eğri.	38
3.7 Düzgünleştirilmiş Reuleaux Üçgeni	40

SİMGELER DİZİNİ

$\mathfrak{T}$	: topolojik yapı
A°	: A nın içi
$\bar{A}$	: A nın kapanışı
df_x	: f nin x noktasındaki diferensiyeli
$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$	: f nin x_i değişkenine göre kısmi türevi
$Df(x)$	: f nin x noktasındaki Jakobiyeni
M^m	: m -boyutlu bir manifold
$\mathcal{A}$	: tam atlas
$\mathbb{R}^{m+1}$	: $(m+1)$ -boyutlu Öklid uzayı
S^m	: m -boyutlu birim küre yüzeyi
$T_p M$	: M manifoldunun p noktasındaki teğet uzayı
ξ	: normal vektör alanı
$N(f)$	: M nin normal demeti
E	: uç nokta dönüşümü
L_x	: x sabit noktasından tanımlanan uzaklık fonksiyonu
$F_p(f)$	: f nin p tabanlı fokal noktalarının kümesi
$\zeta(p)$	: f nin p tabanlı transnormal çatısı
C_i	: L_x uzaklık fonksiyonunun i indeksli kritik noktalarının sayısı
$\chi(M)$	: M manifoldunun Euler Sayısı
$G_{k,n}(\mathbb{R})$	: $k.(n-k)$ boyutlu Reel Grassmann Manifoldu

BÖLÜM 1

ÖN BİLGİLER VE TEMEL TANIMLAR

Bu bölümde, tez çalışmasındaki diğer bölümleri izleyebilmek için gerekli temel tanım ve kavramlar bulunmaktadır.

1.1 TOPOLOJİK UZAYLARDA TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 1.1.1 X boş olmayan bir küme olmak üzere $\mathfrak{T}$, X in kuvvet kümesi olan $\mathcal{P}(X)$ in bir alt kümesi olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan $\mathfrak{T}$ ailesine X *üzerinde bir topoloji* veya *topolojik yapı* denir.

(i) $X, \emptyset \in \mathfrak{T}$,

(ii) $G_1, G_2, \dots, G_n \in \mathfrak{T} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n G_i \in \mathfrak{T}$, $n \in \mathbb{N}$,

(iii) Λ bir indis kümesi olmak üzere $\forall \lambda \in \Lambda$ için $G_\lambda \in \mathfrak{T} \Rightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda \in \mathfrak{T}$.

$\mathfrak{T}$, X üzerinde bir topoloji ise $(X, \mathfrak{T})$ ikilisine *topolojik uzay* denir. $\mathfrak{T}$ nun elemanlarına da bu topolojik uzayın *açık kümeleri* adı verilir. Bir $F \subset X$ için $X \setminus F$ açık ise F ye *kapalı küme* denir.

Tanım 1.1.2 $(X, \mathfrak{T})$ bir topolojik uzay olsun. Eğer her $x, y \in X$ ($x \neq y$) için $x \in G$, $y \in H$ ve $G \cap H = \emptyset$ sağlanacak şekilde G ve $H \subset X$ açık alt kümeleri bulunabilirse $(X, \mathfrak{T})$ topolojik uzayına bir *Hausdorff uzayı* veya T_2 -uzayı denir.

Tanım 1.1.3 $(X, \mathfrak{T})$ bir topolojik uzay, $U \subset X$ ve $x_0 \in X$ olsun. Eğer bir $G \in \mathfrak{T}$ açık kümesi için $x_0 \in G \subset U$ sağlanıyorsa bu $U \subset X$ kümesine $x_0 \in X$ noktasının bir komşuluğu denir. Bir $x_0 \in X$ noktasının tüm komşuluklarından oluşan aile $\mathcal{U}_{\mathfrak{T}}(x)$ ile gösterilir.

$(X, \mathfrak{T})$ bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun.

$$A^\circ = \{x \in X : \exists U \in \mathcal{U}_{\mathfrak{T}}(x) \text{ için } x \in U \subset A\}, \quad \bar{A} = \{x \in X : \forall U \in \mathcal{U}_{\mathfrak{T}}(x) \text{ için } U \cap A \neq \emptyset\}$$

kümelerine sırasıyla A nın *içi* ve *kapanışı* denir. A° açık, $\bar{A}$ kapalı bir kümedir.

Tanım 1.1.4 $(X, \mathfrak{T})$ bir topolojik uzay olsun. Eğer X boş olmayan ayrık, açık iki kümenin birleşimi olarak yazılamıyor ise bu $(X, \mathfrak{T})$ topolojik uzayına *bağlantılıdır* denir.

Tanım 1.1.5 Bir A kümesi doğal sayılar kümesinin bir alt kümesine denk ise A ya *sayılabilir bir küme* denir. Başka bir deyişle, $f: A \rightarrow \mathbb{N}$ bire bir fonksiyonu tanımlanabiliyorsa, A kümesine *sayılabilir* denir.

Tanım 1.1.6 $(X, \mathfrak{T})$ bir topolojik uzay ve $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{T}$ olsun. Eğer, her $G \in \mathfrak{T}$ için $\exists \mathfrak{B}' \subset \mathfrak{B}$ öyle ki $G = \bigcup_{B \in \mathfrak{B}'} B$ şeklinde yazılabiliyorsa bu $\mathfrak{B}$ ailesine $\mathfrak{T}$ topolojisi için bir *taban* adı verilir..

Teorem 1.1.1 X bir küme ve $\mathfrak{B} \subset \mathcal{P}(X)$ olsun. $\mathfrak{B}$ nin X üzerindeki bir topolojinin tabanı olabilmesi için gerek ve yeter koşul,

a) $X = \bigcup_{B \in \mathfrak{B}} B$ ve

b) Her $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}$ ve her $x \in B_1 \cap B_2$ için $\exists B_x \in \mathfrak{B}$ öyle ki $x \in B_x \subset B_1 \cap B_2$ sağlanmasıdır (Bülbül, 2004).

Tanım 1.1.7 $(X, \mathfrak{T})$ bir topolojik uzay olsun. Eğer bu topolojik uzayın sayılabilir bir tabanı mevcut ise bu uzaya *ikinci sayılabilir topolojik uzay* denir.

Tanım 1.1.8 $(X, \mathfrak{T})$ ve $(Y, \mathfrak{T}^*)$ iki topolojik uzay, $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon ve $x_0 \in X$ olsun. Eğer $f(x_0)$ noktasının her açık V komşuluğu için $f(U) \subset V$ olacak şekilde x_0 noktasının en az bir U açık komşuluğu mevcut ise f fonksiyonuna x_0 **noktasında süreklidir** denir.

Eğer f fonksiyonu her $x \in X$ noktasında sürekli ise bu f fonksiyonuna X **kümesi üzerinde süreklidir** veya kısaca **süreklidir** denir.

Tanım 1.1.9 $(X, \mathfrak{T})$ ve $(Y, \mathfrak{T}^*)$ iki topolojik uzay, $f : X \rightarrow Y$ bire-bir ve örten bir fonksiyon olsun. Eğer f ve f^{-1} fonksiyonları sürekli iseler f fonksiyonuna bu topolojik uzaylar arasında bir **homeomorfizma** denir.

Eğer iki topolojik uzay arasında en az bir homeomorfizma mevcut ise bu iki uzaya **homeomorfik** veya **topolojik eş yapılı uzaylar** denir.

Tanım 1.1.10 $(X, \mathfrak{T})$ topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. I , indis kümesi olmak üzere, $(U_\lambda)_{\lambda \in I}$, A nın bir örtümü, yani $A \subset \bigcup_{\lambda \in I} U_\lambda$ olsun. Eğer her $\lambda \in I$ için U_λ açık, yani $U_\lambda \in \mathfrak{T}$ ise $(U_\lambda)_{\lambda \in I}$ ailesine A kümesinin bir **açık örtüsü** denir.

Tanım 1.1.11 X bir küme $A \subset X$ ve $\mathcal{U} = (U_\lambda)_{\lambda \in I}$, A nın bir örtümü olsun. Eğer bir $I' \subset I$ için $\mathcal{U}' = (U_\lambda)_{\lambda \in I'}$ ailesi A nın yine bir örtümü oluyorsa $\mathcal{U}'$ ne $\mathcal{U}$ nun bir **alt örtüsü** denir.

Tanım 1.1.12 $(X, \mathfrak{T})$ bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer A kümesinin $(X, \mathfrak{T})$ topolojik uzayındaki her açık örtümünün sonlu bir alt örtümü bulunabilirse A kümesine **kompakttır** denir.

Teorem 1.1.2(Heine-Borel Teoremi) $M \subset \mathbb{R}^n$ kümesi kompakttır ancak ve ancak M kapalı ve sınırlıdır.

Tanım 1.1.13 $(X, \mathfrak{T})$ bir topolojik uzay ve $M \subset X$ bir alt küme olsun. Eğer $\bar{M} = X$ ise M alt kümesine $(X, \mathfrak{T})$ topolojik uzayında **yoğundur** denir.

1.2 $\mathbb{R}^m$ DE TÜREVLENEBİLME

Tanım 1.2.1 $U \subset \mathbb{R}^m$ açık küme, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ bir fonksiyon ve $x \in U$ olsun. Eğer

$$\lim_{h \rightarrow \vec{0}} \frac{f(x+h) - f(x) - L(h)}{\|h\|} = \vec{0} \text{ şartını sağlayan bir } L : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ lineer dönüşümü mevcut}$$

ise; f fonksiyonuna, x **noktasında türevlenebilirdir** denir. Bu tanımlı sağlayan L lineer dönüşümü tektir. Bu L dönüşümü Df_x ile gösterilir.

Tanım 1.2.2 Eğer $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ şeklinde tanımlanan fonksiyonda $1 \leq j \leq m$ olmak üzere

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + he_j) - f(x)}{h} \text{ limiti mevcut ise bu limite } f \text{ fonksiyonunun } x_j \text{ değişkenine göre}$$

kısmi türevi denir ve $\frac{\partial f(x)}{\partial x_j}$ ile gösterilir.

Tanım 1.2.3 $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ ve $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ şeklinde bir fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonunun her bir değişkene göre r -inci dereceden tüm kısmi türevleri mevcut ve sürekli ise f fonksiyonuna C^r - **sınıfındadır** denir. Ayrıca eğer f fonksiyonunun her bir değişkene göre her dereceden tüm kısmi türevleri mevcut ve sürekli ise f fonksiyonuna C^∞ - **sınıfındadır** denir.

Tanım 1.2.4 $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ fonksiyonu C^1 - sınıfından olsun. $1 \leq i \leq n$ ve $1 \leq j \leq m$ olmak

üzere $\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right]_{n \times m}$ matrisine f fonksiyonunun x noktasındaki **jakobiyen matrisi** denir ve

$Df(x)$ şeklinde gösterilir.

Eğer $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ şeklinde bir fonksiyon ise $1 \leq j \leq m$ olmak üzere f fonksiyonunun x noktasındaki jakobiyen matrisi $\left[\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \right]_{1 \times m}$ şeklinde satır matrisidir. Bu matrise f **fonksiyonunun x noktasındaki gradiyenti** denir ve $\text{grad } f(x)$ şeklinde gösterilir.

Tanım 1.2.5 $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ fonksiyonu C^1 - sınıfından olsun. $1 \leq i \leq n$ ve $1 \leq j \leq m$ olmak üzere $Df(x) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right]_{n \times m}$ olsun. Eğer $Df(x)$ maksimum ranka sahip değil ise x noktasına f **fonksiyonunun kritik noktası** denir.

Tanım 1.2.6 $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ fonksiyonu $r \geq 2$ olmak üzere C^r - sınıfından olsun. $1 \leq i \leq m$ ve $1 \leq j \leq m$ olmak üzere $\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right]_{m \times m}$ simetrik matrisine f fonksiyonunun x noktasındaki **Hesiye (Hessian) matrisi** denir ve $\text{Hess } f(x)$ ile gösterilir.

Tanım 1.2.7 U ve V , $\mathbb{R}^m$ nin açık alt kümeleri ve $f : U \rightarrow V$ bir fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonu bir homeomorfizma ve f , f^{-1} fonksiyonları C^r -sınıfından ise f fonksiyonuna C^r - **difeomorfizma** denir. C^∞ - difeomorfizma yerine kısaca **difeomorfizma** denir.

1.3 MANİFOLDLAR

Tanım 1.3.1 M bir topolojik uzay olsun. U , M topolojik uzayının ve U' , $\mathbb{R}^m$ uzayının açık alt kümeleri olmak üzere $\psi : U \rightarrow U'$ biçiminde bir ψ homeomorfizmasına, M topolojik uzayı üzerinde **m -boyutlu bir koordinat sistemi** denir. Elemanları M içinde m -boyutlu koordinat sistemleri olan bir $\mathcal{A}$ kümesi aşağıdaki iki önermeyi sağlarsa $\mathcal{A}$ kümesine M topolojik uzayı üzerinde **m -boyutlu bir atlas** veya C^∞ - atlas adı verilir.

- (i) M nin her bir noktası, $\mathcal{A}$ kümesinin en az bir elemanının tanım bölgesinde bulunur.
- (ii) $\mathcal{A}$ kümesi içindeki her iki koordinat sistemi düzgün olarak örtüşür. Diğer bir ifade ile $\forall \psi, \varphi \in \mathcal{A}$ koordinat sistemi için $\psi^{-1} \circ \varphi$ ve $\varphi^{-1} \circ \psi$ birer difeomorfizmadır.

$\mathcal{A}$, M topolojik uzayı üzerinde bir atlas olsun. $\mathcal{A}$ kümesinin elemanları ile düzgün örtüşen her koordinat sistemi yine $\mathcal{A}$ nin elemanı oluyorsa, $\mathcal{A}$ kümesine M üzerinde bir ***tam atlas*** denir.

M Hausdorff uzayı üzerinde m - boyutlu bir tam atlas mevcut ise, bu tam atlas ile birlikte M ye ***düzgün (smooth)*** veya ***türevlenebilir (differentiable) manifold*** denir. m - boyutlu bir M manifoldu kısaca M^m ile gösterilebilir. Bir manifoldun A_2 -uzayı olduğu yani ikinci sayılabilir uzay olduğu kabul edilir.

Tanım 1.3.2 $\mathbb{R}^m$ de üst yarı uzay olarak adlandırılan $\mathbb{H} \subset \mathbb{R}^m$ kümesi $\mathbb{H} = \{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m : x_m \geq 0\}$ ile tanımlanır.

Bu durumda $\partial\mathbb{H} = \{(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, 0) : \forall 1 \leq i \leq m-1 \text{ için } x_i \in \mathbb{R}\}$ olacaktır.

Eğer düzgün manifold tanımındaki $\psi : U \rightarrow U'$ koordinat sistemlerinde $U' \subset \mathbb{R}^m$ açık kümesi yerine $U' \subset \mathbb{H}^m$ açık kümesi olarak alınırsa sınırlı manifold kavramına ulaşılır. M sınırlı manifoldunun sınırı ∂M ile gösterilir ve M manifoldunun atlasına ait koordinat sistemleri altında görüntüsü $\partial\mathbb{H}^m$ de olan M nin tüm noktalarından oluşur. Açıkça $\partial M \subset M$ dir. Eğer $\partial M = \emptyset$ ise M ye ***sınırı olmayan manifold*** denir. Bu çalışmada, aksi söylenmedikçe, sınırı olmayan manifoldlarla ilgilenilecektir.

Tanım 1.3.3 M ve N sırası ile m ve n -boyutlu iki manifold ve $f : M \rightarrow N$ bir fonksiyon, $p \in M$ ve $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ sırası ile M ve N üzerinde C^∞ - atlaslar, ayrıca $p \in U \subset M$, $f(p) \in V \subset N$ ve (U, ψ) ve (V, φ) sırası ile p ve $f(p)$ noktalarında koordinat sistemleri olsunlar. Eğer $\varphi \circ f \circ \psi^{-1} : \psi(U) \rightarrow \varphi(V)$ fonksiyonu $\psi(p) \in \mathbb{R}^m$ noktasında türevlenebilir ise f fonksiyonuna $p \in M$ noktasında ***türevlenebilir fonksiyon*** denir.

Bu tanım $p \in M$ ve $f(p) \in N$ noktalarında seçilen koordinat sistemlerinden bağımsızdır.

Tanım 1.3.4 M bir manifold ve $p \in M$ olsun. M manifoldundan $\mathbb{R}$ ye giden düzgün fonksiyonların kümesi $\tau(M)$ ile gösterilmek üzere aşağıdaki iki önermeyi doğrulayan bir $u_p : \tau(M) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna p *noktasında bir teğet vektör* denir.

- (i) $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ve $\forall f, g \in \tau(M)$ için $u_p(af + bg) = au_p(f) + bu_p(g)$,
- (ii) $\forall f, g \in \tau(M)$ için $u_p(f \cdot g) = u_p(f) \cdot g(p) + f(p) \cdot u_p(g)$, (Leibniz Kriteri)

p noktasındaki tüm teğet vektörlerin kümesi $T_p M$ ile gösterilecektir. $T_p M$ kümesinde toplama ve skaler ile çarpma işlemleri $f \in T_p M$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$(u_p + w_p)(f) = u_p(f) + w_p(f)$$

$$(\lambda u_p)(f) = \lambda u_p(f)$$

şeklinde tanımlanır. Bu işlemler ile $T_p M$ bir reel vektör uzayıdır ve boyutunun da m olduğu bilinmektedir.

M bir manifold ve $p \in M$ olmak üzere $T_p M$ vektör uzayına M manifoldunun p *noktasındaki teğet uzayı* denir.

1.4 $\mathbb{R}^m$ DE ÖLÇÜM

Tanım 1.4.1 Her $i = 1, 2, \dots, m$ için $a_i \in \mathbb{R}$ ve $b_i \in \mathbb{R}$ olsun.

$$[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_m, b_m] \subset \mathbb{R}^m$$

kümesine $\mathbb{R}^m$ de bir *kapalı dikdörtgen* veya *dikdörtgen*,

$$(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \dots \times (a_m, b_m) \subset \mathbb{R}^m$$

kümesine $\mathbb{R}^m$ de bir *açık dikdörtgen* denir.

Tanım 1.4.2 $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_m, b_m] \subset \mathbb{R}^m$ kapalı dikdörtgenin *m-boyutlu ölçümü* $(b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \cdot \dots \cdot (b_m - a_m) \in \mathbb{R}^m$ şeklinde tanımlanır ve $\lambda^m(D)$ ile gösterilir. Bu tanım açık dikdörtgenler için de geçerlidir.

Tanım 1.4.3 $B \subset \mathbb{R}^m$ bir küme olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için B kümesini örtecek şekilde en az bir $\{D_1, D_2, \dots\}$ kapalı dikdörtgenler dizisi bulunabiliyor öyle ki $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda^m(D_i) < \varepsilon$ sağlanıyorsa B kümesinin *m-boyutlu ölçümü sıfırdır* denir.

Bu tanımın bir sonucu olarak; $B \subset \mathbb{R}^m$ ve $\lambda^m(B) = 0$ ise $\mathbb{R}^m \setminus B$ kümesi $\mathbb{R}^m$ de yoğundur.

1.5 İMMERSİYONLAR VE EMBEDDİNGLER

Burada iki manifold arasındaki immersiyonların genel tanımları verilip Öklid uzayındaki immersiyonlarla, başka bir ifade ile $f : M^m \rightarrow \mathbb{R}^{m+k}$ şeklindeki düzgün immersiyon veya embedinglerle çalışılacaktır.

Tanım 1.5.1 M, N sırası ile m, n - boyutlu ve $m \leq n$ şartını sağlayan manifoldlar ve $f : M \rightarrow N$ düzgün bir fonksiyon olsun. Eğer her $p \in M$ için $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ bire-bir ise f fonksiyonuna *immersiyon (immersion)* denir. Eğer f bire-bir bir immersiyon ve $f : M \rightarrow f(M) \subset N$ homeomorfizma ise f dönüşümüne bir *embedding (embedding)* denir.

Burada, eğer M kompakt ve f bire-bir immersiyon ise f nin bir embeding olduğu kolayca gösterilebilir.

Tanım 1.5.2 $(M^m, \mathcal{A})$ ve $(N^n, \mathcal{B})$, C^r -manifold ve $M \subset N$ olsun. Eğer $\forall p \in M$ için $\exists (U, \varphi) \in \mathcal{B}$ öyle ki U, p nin N de komşuluğu, $\varphi^{-1}(\mathbb{R}^m) = U \cap M$ ve $(U \cap M, \varphi|_{U \cap M}) \in \mathcal{A}$ sağlanıyorsa M ye N nin bir *alt manifoldu* denir.

Buna göre, $f : M^m \rightarrow N^n$ bir embedding ise $f(M)$, N manifoldunun bir alt manifoldudur ve $f(M)$ nin topolojisi N den gelen alt uzay topolojisinin aynıdır.

Tanım 1.5.3 $T_p M$ teğet uzayı kısaca şu şekilde belirlenebilir. (U, φ) $p \in M$ noktası komşuluğunda bir koordinat sistemi olsun. f bir embedding (veya immersiyon) olduğu için $T_p M$, $\left\{ \frac{\partial f}{\partial p_1}, \frac{\partial f}{\partial p_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial p_m} \right\}$ lineer bağımsız kümesi tarafından gerilen uzaydır. Burada φ , p noktası komşuluğunda bir koordinat sistemi olmak üzere $1 \leq i \leq m$ için

$$\frac{\partial f}{\partial p_i}(p) = \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(p))$$

olarak tanımlanır. Bu durumda $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)}(\mathbb{R}^{m+k}) = \{f(p)\} \times \mathbb{R}^{m+k} \cong \mathbb{R}^{m+k}$ bire-bir dir.

Burada $\mathbb{R}^{m+k}$ üzerinde standart $\langle, \rangle$ iç çarpım vardır. Böylece p noktasındaki normal uzayı, $Im df_p$ nin normal tümleyeni olarak tanımlanır. $\nu_p(f)$, $f(M)$ ye $f(p)$ noktasında dik olan k -boyutlu düzlem olsun. f nin **normal demeti**

$$N(f) = \{(p, v) \in M \times \mathbb{R}^{m+k} : f(p) + v \in \nu_p(f)\}$$

şeklinde tanımlanır. Buradan

$$N(f) = \{(p, v) \in M \times \mathbb{R}^{m+k} : f(p) + v \in \nu_p(f)\} = \{(p, v) \in M \times \mathbb{R}^{m+k} : v \in (T_p M)^\perp\}$$

şeklindedir. Bu $N(f)$ kümesinin $(m+k)$ -boyutlu düzgün manifold olduğu 2. Bölüm de gösterilecektir.

BÖLÜM 2

MANİFOLDLARIN ODAK NOKTALARI

2.1 REEL DEĞERLİ FONKSİYONLARIN KRİTİK NOKTALARI

Bu bölümde manifoldlar üzerinde tanımlı reel değerli düzgün fonksiyonların kritik noktaları ile ilgili temel bilgiler ve manifoldların odak noktalarına ilişkin sonuçlar ve örnekler incelenecektir.

Tanım 2.1.1 M^m , m -boyutlu düzgün manifold ve $f : M^m \rightarrow \mathbb{R}$ düzgün bir fonksiyon ve $p \in M^m$ olsun. Eğer $df_p = 0$, yani p noktası komşuluğunda alınan bir (U, φ) koordinat

sistemi için $\varphi(p)$ noktasında $\left(\frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_1}, \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_m} \right) = (0, 0, \dots, 0)$ ise p

noktasına f fonksiyonunun bir **kritik noktası**, $f(p)$ ye de f nin bir **kritik değeri** denir.

M^m nin diğer noktalarına da f nin **regüler noktaları** denir.

p , f nin bir kritik noktası olmak üzere p noktasındaki Hesiye matrisinin determinanı,

$\det \left(\frac{\partial^2 f(p)}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{m \times m} \neq 0$ ise p noktasına f fonksiyonunun **dejenere olmayan kritik noktası**

denir. Eğer $\det \left(\frac{\partial^2 f(p)}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{m \times m} = 0$ ise p noktasına f fonksiyonunun **dejenere kritik**

noktası denir.

Şimdi kritik noktanın ve kritik noktanın dejenere olup olmamasının seçilen koordinat sisteminden bağımsız olduğunu görelim.

$(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ ve (U_β, φ_β) , p noktasını içeren iki koordinat sistemi olsun. Dolayısıyla $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ fonksiyonu difeomorfizma olup $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ fonksiyonunun Jakobiyen determinanı sıfırdan farklıdır.

$\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\beta = I$ olacağından $f \circ \varphi_\alpha^{-1} = f \circ (\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\beta) \circ \varphi_\alpha^{-1} = (f \circ \varphi_\beta^{-1}) \circ (\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})$ dir. Her iki tarafın Jakobiyen matrisi bulunursa,

$$\left(\frac{\partial (f \circ \varphi_\alpha^{-1})}{\partial x_i} \right) = \left(\frac{\partial (f \circ \varphi_\beta^{-1})}{\partial y_i} \right) \cdot \left(\frac{\partial (\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})}{\partial x_i} \right) \text{ ve } \left(\frac{\partial (\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})}{\partial x_i} \right) m \times m \text{ tipindeki matrisi}$$

regüler olduğundan $\left(\frac{\partial (f \circ \varphi_\alpha^{-1})}{\partial x_i} \right) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\partial (f \circ \varphi_\beta^{-1})}{\partial y_i} \right) = 0$ dir. Yani kritik nokta seçilen koordinat sisteminden bağımsızdır.

Tekrar türev alınıp Hesiyeen matris oluşturulursa,

$$\left(\frac{\partial^2 (f \circ \varphi_\alpha^{-1})}{\partial x_i \partial x_j} \right) = \left(\frac{\partial^2 (f \circ \varphi_\beta^{-1})}{\partial y_i \partial y_j} \right) \cdot \left(\frac{\partial (\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})}{\partial x_i} \right) + \left(\frac{\partial (f \circ \varphi_\alpha^{-1})}{\partial y_i} \right) \cdot \left(\frac{\partial^2 (\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})}{\partial x_i \partial x_j} \right)$$

bulunur. Bir kritik noktada her $1 \leq i \leq m$ için $\frac{\partial (f \circ \varphi_\alpha^{-1})}{\partial y_i} = 0$ olacağından,

$$\left(\frac{\partial^2 (f \circ \varphi_\alpha^{-1})}{\partial x_i \partial x_j} \right) = \left(\frac{\partial^2 (f \circ \varphi_\beta^{-1})}{\partial y_i \partial y_j} \right) \cdot \left(\frac{\partial (\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})}{\partial x_i} \right)$$

olur.

$$\left(\frac{\partial (\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})}{\partial x_i} \right), m \times m \text{ tipindeki matris regüler olduğundan}$$

$$\left| \frac{\partial^2 (f \circ \varphi_\alpha^{-1})}{\partial x_i \partial x_j} \right| \neq 0 \Leftrightarrow \left| \frac{\partial^2 (f \circ \varphi_\beta^{-1})}{\partial y_i \partial y_j} \right| \neq 0 \text{ veya } \left| \frac{\partial^2 (f \circ \varphi_\alpha^{-1})}{\partial x_i \partial x_j} \right| = 0 \Leftrightarrow \left| \frac{\partial^2 (f \circ \varphi_\beta^{-1})}{\partial y_i \partial y_j} \right| = 0 \text{ olur.}$$

Yani kritik noktanın dejenere olup olmaması da seçilen koordinat sisteminden bağımsızdır.

Tanım 2.1.2 $f: M^m \rightarrow \mathbb{R}$ düzgün bir fonksiyon olsun. Eğer p , f ’nin dejenere olmayan kritik noktası ise p noktasındaki Hesiye matrisin negatif özdeğerlerinin sayısına f ’nin p noktasındaki **indeksi** denir ve $\text{ind}f_p$ ile gösterilir. Bu tanımdan anlaşılabacağı gibi $0 \leq \text{indeks} \leq m$ olur.

Eğer p noktası, f ’nin dejenere kritik noktası ise d^2f_p hesiyenin sıfır olan öz değerlerinin sayısına p dejenere kritik noktasının **derecesi** denir. Açık olarak p kritik noktasının derecesi sıfır ise p dejenere olmayan bir noktadır.

Örnek 2.1.1 T , r yarıçaplı çemberinin, çemberin bulunduğu düzlem üzerinde yatan ve çemberi kesmeyen bir doğru etrafında döndürülmesinden üretilen yüzey olsun. Örneğin üç boyutlu $\mathbb{R}^3$ uzayında yz-düzleminde $0 < r < a$ olacak şekilde $(0,a,0)$ merkezli, r yarıçaplı bir çember $(y-a)^2 + z^2 = r^2$ denklemiyle veriliyor. Bu çemberi z-ekseni etrafında döndürerek aşağıda denklemi verilen T^2 tor yüzeyini elde ediyoruz. Bu Tor yüzeyinin kartezyen denklemi

$$x^2 + y^2 = (\sqrt{r^2 - z^2} + a)^2 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} - a = \sqrt{r^2 - z^2} \Rightarrow z^2 = r^2 - (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2$$

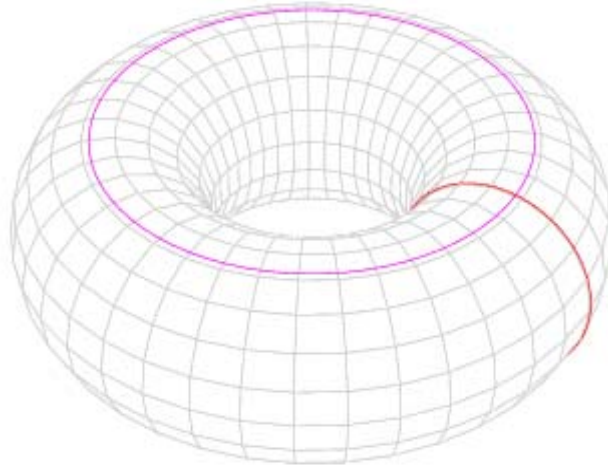
olarak bulunur.

$$\alpha: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \alpha(x, y, z) = (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2$$

olarak tanımlanırsa, α fonksiyonu her $(x, y) \neq (0,0)$ için diferensiyellenebilirdir ve

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{2x(\sqrt{x^2 + y^2} - a)}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial y} = \frac{2y(\sqrt{x^2 + y^2} - a)}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial z} = 2z$$

dir. r^2 , α nın regüler değeri olduğundan tor regüler ve düzgün bir yüzeydir.



Şekil 2.1 $\mathbb{R}^3$ de bir Tor

Tor yüzeyinin parametrik gösterimi aşağıdaki gibi verilebilir. Yukarda verilen ve Şekil 2.1 de görülen torun denklemi $0 \leq u \leq 2\pi$ ve $0 \leq v \leq 2\pi$ olmak üzere,

$$X(u, v) = ((r \cos u + a) \cos v, (r \cos u + a) \sin v, r \sin u) \text{ dir.}$$

Örnek 2.1.2 $f, g: T^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x$ ve $g(x, y, z) = z$ ile tanımlanmış olsun. f ve g nin kritik noktalarını belirleyelim.

$$X: \mathbb{R}^2 \rightarrow T^2, \quad X(u, v) = ((r \cos v + a) \cos u, (r \cos v + a) \sin u, r \sin v)$$

fonksiyonunun görüntü kümesi $\mathbb{R}^3$ de standart toru kaplar. Hatta u ve v yi 2π moduna göre alırsak, bu fonksiyon torun bir embedingidir.

$f \circ X: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunu göz önüne alalım. $(f \circ X)(u, v) = (a + r \cos v) \cos u$ dir ve buradan, $D(f \circ X)(u, v) = (-\sin u(a + r \cos v), -r \sin v \cos u)$ olur.

f nin rankı 1 den küçük ise $X(u, v)$, f nin bir kritik noktasıdır.

Bu durumda $D(f \circ X)(u, v)$ nin her bir elemanı 0 dır. Bu yüzden f nin $X(u, v)$ noktasında rankı 0 dır.

$$-\sin u(a + r \cos v) = 0 \quad (2.1)$$

$$-r \sin v \cos u = 0 \quad (2.2)$$

dir. (2.1) ve (2.2) ortak çözülürse $\sin u = 0$ ve $\sin v = 0$ olacağı anlaşılır. Yani $(u, v) = (k\pi, l\pi)$, $(k, l \in \mathbb{Z})$ bulunur. Buradan f nin kritik noktalarının $(\pm(a+1), 0, 0)$ ve $(\pm r, 0, 0)$ olduğu görülür.

Benzer şekilde,

$$(g \circ X)(u, v) = r \sin v$$

dir. Buradan,

$$D(g \circ X)(u, v) = (0, r \cos v)$$

bulunur ve $\cos v = 0$ olduğu noktalar da g nin kritik noktalarıdır. Bu noktalar $v = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $(k \in \mathbb{Z})$ şeklinde, yani tor üzerindeki $(a \cos u, a \sin u, \pm r)$ tipindeki noktalardır. Bu noktalar $(0, 0, r)$ ve $(0, 0, -r)$ merkezli ve a yarıçaplı iki çemberdir.

Örnek 2.1.3 Örnek 2.1.2 deki $f, g : T^2 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlarının kritik noktalarının dejenere olup olmadıklarını inceleyelim. Bunun için, f ve g nin Hesiyeen matrislerini bulmalıyız.

$$D(f \circ X)(u, v) = (-\sin u(a + r \cos v), -r \sin v \cos u) \text{ olduğundan Hesiyeen matris,}$$

$$H(f \circ X)(u, v) = \begin{pmatrix} -\cos u (a + r \cos v) & r \sin u \sin v \\ r \sin v \sin u & -r \cos v \cos u \end{pmatrix}$$

şeklindedir ve $(u, v) = (k\pi, l\pi)$, $(k, l \in \mathbb{Z})$ olan kritik noktalarda,

$$|H(f \circ X)(u, v)| = r \cos^2 u \cos v (a + r \cos v) \neq 0$$

olacağından f nin kritik noktaları dejenere değildir.

$$D(g \circ X)(u, v) = (0, r \cos v)$$

olduğundan Hesiyeen matris,

$$H(g \circ X)(u, v) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -r \sin v \end{pmatrix}$$

olup $v = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $(k \in \mathbb{Z})$ olan kritik noktalarda,

$$|H(g \circ X)(u, v)| = 0$$

dır. Dolayısıyla g nin tüm kritik noktaları dejenere dir.

Teorem 2.1.1 (Morse Teoremi) p , $f: M^m \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun dejenere olmayan bir kritik noktası olsun. (U, φ) , p nin uygun bir komşuluğunda koordinat sistemi, $0 \leq \lambda \leq m$ bir tam sayı olmak üzere, $\varphi(p) = 0$ ve $x = (x_1, \dots, x_m) \in \varphi(U)$ için;

$$(f \circ \varphi^{-1})(x) = -\sum_{i=1}^{\lambda} x_i^2 + \sum_{i=\lambda+1}^m x_i^2 + f(p) \text{ dir.}$$

Bu teoremdeki λ sayısı f nin p noktasındaki indeksini gösterir. Morse Teoremi nin bir sonucu olarak; $\lambda = 0 \Leftrightarrow p$, yerel minimum, $\lambda = m \Leftrightarrow p$, yerel maksimum noktasıdır.

Örnek 2.1.4 $\lambda = 0$ ise kritik nokta daima bir yerel minimum noktasıdır. $\lambda = m$ ise kritik nokta yerel maksimum noktasıdır. Eğer $m = 2$ ve $\lambda = 1$ ise kritik nokta eyer noktasıdır. Bu yüzden Örnek 2.1.3 deki $f : T^2 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunda $(-(a+1), 0, 0)$ noktası için indeks 0, $(\pm r, 0, 0)$ noktası için indeks 1, ve $((a+1), 0, 0)$ noktası için ise indeks 2 dir. Dolayısıyla $(-(a+1), 0, 0)$ bir yerel minimum noktası, $(-r, 0, 0)$ bir eyer noktası ve $((a+1), 0, 0)$ bir yerel maksimum noktasıdır.

Teorem 2.1.2 M^m , m -boyutlu düzgün bir manifold ve $f : M^m \rightarrow \mathbb{R}$ düzgün bir fonksiyon olsun. f nin dejenere olmayan kritik noktaları *izoledir (ayrıktır)* (Gauld, 2006).

M üzerinde tanımlı reel değerli bir f fonksiyonunun sadece dejenere olmayan kritik noktaları varsa bu f fonksiyonuna *dejenere olmayan fonksiyon* veya *Morse fonksiyonu* denir.

Teorem 2.1.3 Kompakt bir M manifoldu üzerindeki herhangi bir Morse fonksiyonunun sadece sonlu sayıda kritik noktası vardır (Gauld, 2006).

Kritik noktalar arasında en az bir yerel minimum (indeks=0) ve en az bir yerel maksimum (indeks= m) noktaları vardır.

2.2 MANİFOLDLARIN ODAK NOKTALARI

Bölüm 1 de tanımladığımız $N(f) = \{(p, v) \in M \times \mathbb{R}^{m+k} : f(p) + v \in v_p(f)\}$ normal demetinin $(m+k)$ -boyutlu düzgün bir manifold olduğunu gösterelim.

Teorem 2.2.1 $M \subset \mathbb{R}^{m+k}$, m -boyutlu bir manifold olsun. Bu durumda her $p_0 \in M^m \subset \mathbb{R}^{m+k}$ için p_0 in M üzerinde bir W açık komşuluğu vardır ki her $p \in W \subset M$ için $(T_p M)^\perp$ nin $\{\xi_1(p), \xi_2(p), \dots, \xi_k(p)\}$ şeklinde ortonormal bir tabanı vardır.

İspat Bu teoremin ispatını Madsen ve Tornehave (1997) den yararlanarak yapalım. $p_0 \in M$ keyfi olsun. p_0 ın komşuluğunda seçilen bir koordinat sisteminin tanım kümesindeki her p için $T_p M$ nin bir tabanını oluşturan $x_1, x_2, \dots, x_m$ şeklinde düzgün teğet vektör alanı vardır. $(T_{p_0} M)^\perp$ normal uzayının $v_1, v_2, \dots, v_k$ şeklinde herhangi bir tabanını seçelim. x_i ve v_j ler lineer bağımsız olduğu için $(m+k) \times (m+k)$ -boyutlu, $(x_1(p), x_2(p), \dots, x_m(p), v_1, v_2, \dots, v_k)$ matrisinin p_0 noktasındaki determinanı sıfırdan farklıdır. Dolayısıyla p_0 ın bir W açık komşuluğundaki her p için bu matrisin determinanı sıfırdan farklı olacaktır, çünkü determinant fonksiyonu süreklidir. Gram-Schmidt ortonormalleştirme metodu, her $p \in W \subset M$ için,

$$x_1(p), x_2(p), \dots, x_m(p), v_1, v_2, \dots, v_k$$

vektörlerine uygulanırsa,

$$\tilde{x}_1(p), \tilde{x}_2(p), \dots, \tilde{x}_m(p), \xi_1(p), \xi_2(p), \dots, \xi_k(p)$$

vektörleri $\mathbb{R}^{m+k}$ için bir ortonormal taban oluşturur ki buradaki $\tilde{x}_1(p), \tilde{x}_2(p), \dots, \tilde{x}_m(p)$ vektörleri $T_p M$ teğet vektör uzayını gerer. Gram-Schmidt ortonormalleştirme metoduna göre W üzerindeki $\tilde{x}_i$ ve ξ_j ler düzgündür. Böylece $\xi_1(p), \xi_2(p), \dots, \xi_k(p)$ fonksiyonları istenen özelliklere sahip olur. Yani $\forall p \in W$ için $(1 \leq j \leq k)$ olmak üzere $\xi_i(p)$ ler $(T_p M)^\perp$ nin ortonormal tabanıdır.

Şimdi,

$$N(f) = \{(p, v) \in M \times \mathbb{R}^{m+k} : f(p) + v \in v_p(f)\} = \{(p, v) \in M \times \mathbb{R}^{m+k} : v \in (T_p M)^\perp\}$$

ve $(p, v) \in N(f)$ olsun. $p \in M$ olduğunda p nin uygun bir açık komşuluğunda tanımlı $\varphi: U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^m$ koordinat sistemi vardır. $f(U) \subset f(M)$, $f(p) \in f(U)$ ve Teorem

2.2.1 gereğince $f(p)$ nin uygun bir $W \subset f(U)$ açık komşuluğunda tanımlı $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$ düzgün ortonormal vektör alanları vardır. $v \in (T_p M)^\perp$ olduğundan p noktasında,

$$v = t_1 \xi_1(p) + t_2 \xi_2(p) + \dots + t_k \xi_k(p)$$

şeklinde yazılabilir. $\tilde{\varphi}: U \times \mathbb{R}^{m+k} \subset N(f) \rightarrow \mathbb{R}^{m+k}$,

$$\tilde{\varphi}(p, v) = \tilde{\varphi}(p, t_1 \xi_1 + t_2 \xi_2 + \dots + t_k \xi_k) = (\varphi(p), t_1, t_2, \dots, t_k) \in \mathbb{R}^{m+k}$$

şeklinde tanımlanırsa $\tilde{\varphi}, (p, v)$ noktasının bir açık komşuluğunda $N(f)$ için düzgün bir koordinat sistemidir. Böylece $N(f)$ in $(m+k)$ - boyutlu düzgün bir manifold olduğu elde edilir.

Tanım 2.2.1 $\xi: M^m \rightarrow \mathbb{R}^{m+k}$ düzgün bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall p \in M$ için $f(p) + \xi(p) \in v_p(f)$ ise ξ ye f için bir **normal vektör alanı** denir.

Tanım 2.2.2 M , m -boyutlu, bağlantılı, sınırı olmayan düzgün bir manifold ve $f: M^m \rightarrow \mathbb{R}^{m+k}$ bir immersiyon olsun. $E: N(f) \rightarrow \mathbb{R}^{m+k}$, $E(p, v) = f(p) + v$ ile tanımlanan E fonksiyonuna **uç nokta dönüşümü** denir.

E nin düzgün bir fonksiyon olduğu kolayca gösterilebilir.

Tanım 2.2.3 $x \in \mathbb{R}^{m+k}$ ve $p \in M$ olsun. Eğer $(p, x - f(p)) \in N(f)$, E fonksiyonunun bir kritik noktası, yani $\text{rank}(DE(x)) < m+k$ ise $x \in \mathbb{R}^{m+k}$ noktasına $f(M)$ nin p **tabanlı odak noktası** denir. Eğer $(p, x - f(p))$ noktasında $\text{rank}(DE(x)) = m+k - \mu$ ise μ ye x **odak noktasının katlılığı** denir.

E nin kritik noktalarını $\Sigma(f)$ ile gösterelim. $\Sigma(f) \subset N(f)$ dir. $p \in M$ için $N_p(f) = N(f) \cap (\{p\} \times \mathbb{R}^{m+k})$ ve $\Sigma_p(f) = \Sigma(f) \cap N_p(f)$ eşitlikleri kullanılmaktadır. Bu

$N_p(f)$ de cebirsel bir ifadedir, yani k değişkenli m . dereceden bir polinomun köklerinden oluşur. f nin p tabanlı odak noktalarının kümesi $F_p(f) = E(\Sigma_p(f))$ dir. M deki tüm odak noktaların kümesi $\bigcup_{p \in M} F_p(f)$ dir.

Tanım 2.2.4 $(p_1, p_2, \dots, p_m)$, M nin bir p noktasındaki koordinat sistemi olmak üzere f nin p noktasındaki **birinci temel formu** $\left\langle \frac{\partial f}{\partial p_i}, \frac{\partial f}{\partial p_j} \right\rangle$ simetrik matrisidir.

Herhangi bir $p \in M$ noktasındaki $\frac{\partial^2 f}{\partial p_i \partial p_j}$ vektörü $f(p)$ noktasında $f(M)$ ye teğet ve normal olan iki vektörün toplamı olarak yazılabilir. Bu vektörün normal bileşenini l_{ij} ile gösterelim. z , $f(M)$ ye $f(p)$ noktasında dik olan herhangi bir birim vektör olsun.

$\left\langle z, \frac{\partial^2 f}{\partial p_i \partial p_j} \right\rangle = \langle z, l_{ij} \rangle$ matrisine $f(M)$ nin p noktasındaki ve z doğrultusundaki **ikinci temel formu** denir.

Tanım 2.2.5 $p \in M$, $(p, z) \in N(f)$ ve $\|z\| = 1$ olsun.

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial p_i}, \frac{\partial f}{\partial p_j} \right\rangle^{-1} \left\langle z, \frac{\partial^2 f}{\partial p_i \partial p_j} \right\rangle \quad (2.1)$$

matrisinin $K_1(p), K_2(p), \dots, K_m(p)$ özdeğerlerine $f(M)$ nin $f(p)$ noktasındaki ve z doğrultusundaki **asli eğrilikleri** (temel eğrilikleri) denir.

$K_i(p) \neq 0$ olmak üzere $\frac{1}{K_1(p)}, \frac{1}{K_2(p)}, \dots, \frac{1}{K_m(p)}$ sayılarına z doğrultusundaki **eğrilik yarıçapları** denir. Ayrıca $K(p) = K_1(p) \cdot K_2(p) \cdot \dots \cdot K_m(p)$ sayısı da z doğrultusundaki ve p noktasındaki **Gauss eğriliği** olarak tanımlanır.

$p \in M^m$ noktasında uygun bir koordinat dönüşümü ile birinci temel form matrisini birim matrise dönüştürülebiliriz. Bu koordinat değişimi $T_p M^m$ teğet uzayında bir taban değişimine karşılık geleceğinden (2.1) matrisi bir simetrik matrise denktir. Bundan dolayı $f(M^m)$ nin her hangi bir $f(p)$ noktasındaki asli eğrilikleri iyi tanımlıdır, yani p noktası komşuluğunda seçilen koordinat sisteminden bağımsızdırlar. Buradan (2.1) matrisinin belirlediği

$$A_z : T_p M^m \rightarrow T_p M^m, \quad A_z = \left\langle \frac{\partial^2 f(p)}{\partial x_i \partial x_j}, z \right\rangle$$

lineer dönüşümüne f immersiyonu için p noktasındaki ve z doğrultusundaki **şekil operatörü** denir.

$f(M^m)$ nin odak noktaları ile $f(M^m)$ nin temel eğrilikleri arasındaki ilişki aşağıdaki teoremden verilmiştir.

Teorem 2.2.1 M , m -boyutlu manifold, $f : M^m \rightarrow \mathbb{R}^{m+k}$ immersiyon, $p \in M$, $z \in \mathbb{R}^{m+k}$ $f(M)$ ye $f(p)$ noktasında dik olan birim vektör olsun. $f(M)$ nin $f(p)$ noktasındaki ve z birim normal vektörü doğrultusundaki odak noktaları $1 \leq i \leq m$ için $K_i(p) \neq 0$ olmak üzere $f(p) + \frac{1}{K_i(p)} z$ şeklindedir.

İspat Bu teoremin ispatını Milnor (1963) deki ispata benzer şekilde aşağıdaki gibi verebiliriz.

$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k : M \rightarrow \mathbb{R}^{m+k}$, f için p noktasının bir U açık komşuluğunda normal vektör alanları olsun. Bu durumda $\forall p \in U$ için z , $f(p)$ noktasında f için bir birim normal vektör olmak üzere $E(p, z) = f(p) + \sum_{l=1}^k t_l \xi_l(p)$ şeklinde yazılabilir. Buradan,

$$\begin{cases} \frac{\partial E}{\partial p_i} = \frac{\partial f}{\partial p_i} + \sum_{l=1}^k t_l \frac{\partial \xi_l}{\partial p_i} \\ \frac{\partial E}{\partial t_l} = \xi_l(p) \end{cases}$$

dir. Bu vektörlerle, lineer bağımsız $\frac{\partial f}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial p_m}, \xi_1, \dots, \xi_k, (m+k)$ tane vektörün tüm iç çarpımlarından oluşan, $(m+k) \times (m+k)$ tipindeki matrisin rankı, E nin Jakobiyeninin rankı ile aynıdır.

Bu matris, $1 \leq i, j \leq m+k$ ve $1 \leq \ell \leq k$ olmak üzere açıkça aşağıdaki forma sahiptir.

$$\begin{pmatrix} \left(\left\langle \frac{\partial f}{\partial p_i}, \frac{\partial f}{\partial p_j} \right\rangle + \sum_{\ell=1}^k t_\ell \left\langle \frac{\partial \xi_\ell}{\partial p_j}, \frac{\partial f}{\partial p_i} \right\rangle \right)_{m \times m} & \left(\sum_{\ell=1}^k t_\ell \left\langle \frac{\partial \xi_\ell}{\partial p_j}, \xi_\ell \right\rangle \right) \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

Bu yüzden rank, sol üst taraftaki bloğun rankına eşittir. Her $1 \leq i, j \leq m$ ve $1 \leq \ell \leq k$ için

$$\xi_\ell \cdot \frac{\partial f}{\partial p_i} = 0 \text{ olduğundan,}$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial p_j} \left(\left\langle \xi_\ell, \frac{\partial f}{\partial p_i} \right\rangle \right) = \left\langle \frac{\partial \xi_\ell}{\partial p_j}, \frac{\partial f}{\partial p_i} \right\rangle + \left\langle \xi_\ell, \frac{\partial^2 f}{\partial p_i \partial p_j} \right\rangle \Rightarrow \left\langle \frac{\partial \xi_\ell}{\partial p_j}, \frac{\partial f}{\partial p_i} \right\rangle = - \left\langle \xi_\ell, \frac{\partial^2 f}{\partial p_i \partial p_j} \right\rangle$$

ifadesini kullanırsak sol üst köşedeki bloğun, $\left(g_{ij} - \sum_{\ell=1}^k t_\ell \langle \xi_\ell, l_{ij} \rangle \right)$ ile tamamen aynı olduğunu görürüz.

O halde $x = f(p) + tz$, M nin p tabanlı bir odak noktasıdır ancak ve ancak $(g_{ij} - t \langle z, l_{ij} \rangle)$ singülerdir. Şimdi (g_{ij}) nin birim matris olduğunu kabul edebiliriz. Bu durumda $(I - t \langle z, l_{ij} \rangle)$ singülerdir ancak ve ancak $\frac{1}{t}$, $(\langle z, l_{ij} \rangle)$ matrisinin bir özdeğeridir.

Ayrıca $(I - t\langle z, l_{ij} \rangle)$ nin rankı $m + k - \mu$ ise $\frac{1}{t}$ tipindeki özdeğerlerinin sayısı ranka eşittir ve böylece ispat tamamlanır.

Tanım 2.2.6 $f : M \rightarrow \mathbb{R}^{m+k}$ bir immersiyon olsun. Sabit bir $x \in \mathbb{R}^{m+k}$ için $L_x : M \rightarrow \mathbb{R}$, $L_x(p) = \|x - f(p)\|^2$ şeklinde tanımlanan fonksiyona **uzaklık fonksiyonu** denir. Burada, $\|x - f(p)\|^2$ ifadesi standart Öklidyen uzaklığın karesini göstermektedir.

Şimdi sabit bir $x \in \mathbb{R}^{m+k}$ için, $L_x : M \rightarrow \mathbb{R}$, $L_x(p) = \|x - f(p)\|^2$ fonksiyonunu ele alalım. Açıkça,

$$L_x(p) = \|x - f(p)\|^2 = \langle x, x \rangle - 2\langle x, f(p) \rangle + \langle f(p), f(p) \rangle$$

ve buradan $\frac{\partial L_x}{\partial p_i} = -2\langle \frac{\partial f}{\partial p_i}, x - f(p) \rangle$ elde edilir. Buna göre p , L_x in bir kritik noktasıdır ancak ve ancak $x - f(p)$, $f(p)$ de $f(M)$ ye diktir, yani $x - f(p) = tv$ şeklindedir. Bir kritik noktada ikinci mertebeden kısmi türevler,

$$\frac{\partial^2 L_x}{\partial p_i \partial p_j} = 2 \left(\left\langle \frac{\partial f}{\partial p_i}, \frac{\partial f}{\partial p_j} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial p_i \partial p_j}, x - f(p) \right\rangle \right)$$

ile verilir. $x - f(p) = tv$ olduğundan, $\frac{\partial^2 L_x}{\partial p_i \partial p_j} = 2(g_{ij} - t\langle v, l_{ij} \rangle)$ şeklinde olur. Bunun sonucu olarak aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz.

Teorem 2.2.2 Bir $p \in M$ noktasının L_x uzaklık fonksiyonunun kritik bir noktası olması için gerek ve yeter şart, $x \in \nu_p(f)$ olmasıdır. Üstelik p nin L_x fonksiyonunun dejenere olmayan kritik noktası olması için gerek ve yeter şart x in f nin p tabanlı odak noktası olmamasıdır.

Böylece, $F_p(f) = \{x \in \mathbb{R}^{m+k} : p, L_x \text{ in dejenere kritik noktası}\}$ olur. $F_p(f)$ nin bu gösterimi p tabanlı odak noktaların hesaplanmasında kullanılmaktadır.

Teorem 2.2.3 (L_x için İndeks Teoremi) L_x in dejenere olmayan bir $p \in M$ kritik noktasındaki indeksi, $f(p)$ yi x e birleştiren doğru parçası üzerindeki f nin p tabanlı odak noktalarının sayısına eşittir. Buradaki her bir odak nokta katlılığıyla birlikte hesaplanmaktadır.

İspat Dejenere olmayan bir $p \in M$ noktasında indeks, $x - f(p) = tv$, ($t > 0$) olmak üzere,

$\left(\frac{\partial^2 L_p}{\partial p_i \partial p_j} \right) = 2(g_{ij} - t\langle v, l_{ij} \rangle)$ Hesiyan matrisinin negatif özdeğerlerinin sayısına eşittir. Bu

sayı, $(g_{ij} - t\langle v, l_{ij} \rangle)$ matrisinin negatif özdeğerlerinin sayısı ile aynıdır. Yine bu sayı, (g_{ij}) birim matris kabul edilebileceğinden, $(\langle v, l_{ij} \rangle)$ matrisinin $\lambda > t$ tipindeki pozitif özdeğerlerinin sayısına eşittir ve böylece Teorem 2.2.2 gözönüne alınırsa, istenen sonuç elde edilir.

Teorem 2.2.4 (Sard Teoremi) Eğer M , W sayılabilir topoloji tabanına sahip aynı boyutlu iki C^∞ -manifold ve $\theta: M \rightarrow W$ fonksiyonu C^1 -sınıfından ise θ nın kritik noktalarının görüntü kümesinin ölçümü sıfırdır (Milnor, 1963).

Bu teorem, Öklid uzayının alt uzaylarına uygulanabilir. $f: M^m \rightarrow \mathbb{R}^{m+k}$ bir immersiyon olmak üzere, $E: N(f) \rightarrow \mathbb{R}^{m+k}$ uç nokta dönüşümü aynı boyutlu iki manifold arasında türevlenebilir bir fonksiyondur. Dolayısıyla odak nokta tanımından $x \in \mathbb{R}^{m+k}$ nin odak nokta olması için gerek ve yeter şart x noktasının E dönüşümünün bir kritik noktasının görüntüsü, yani bir kritik değeri olmasıdır. Dolayısıyla odak noktaların oluşturduğu kümenin $\mathbb{R}^{m+k}$ daki ölçümü sıfırdır. O halde $\mathbb{R}^{m+k}$ da f nin odak olmayan noktalarının kümesi yoğundur. Bu ise, hemen hemen her $x \in \mathbb{R}^{m+k}$ için $L_x: M^m \rightarrow \mathbb{R}$ uzaklık fonksiyonunun bir Morse fonksiyonu olduğunu gösterir. Yani herhangi bir manifold üzerinde daima Morse fonksiyonları bulunabilir.

2.3 ÖRNEKLER

Örnek 2.3.1 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(\theta) = (\theta, \theta^2)$ eğrisinin odak nokta kümesini uzaklık fonksiyonundan yararlanarak bulalım.

$\frac{df}{d\theta} = (1, 2\theta) \neq (0, 0)$ olduğundan f bir immersiyondur.

$w = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ sabit noktasını alalım.

$L_w: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $L_w(\theta) = \|(x, y) - f(\theta)\|^2$ şeklinde uzaklık fonksiyonunu tanımlayalım.

Buradan,

$$L_w(\theta) = \|(x, y) - (\theta, \theta^2)\|^2 = (x - \theta)^2 + (y - \theta^2)^2$$

bulunur.

$$\frac{dL_w}{d\theta} = -2x + 2\theta - 4\theta y + 4\theta^3 = 0 \quad (2.3)$$

$$\frac{d^2L_w}{d\theta^2} = 2 - 4y + 12\theta^2 = 0 \quad (2.4)$$

$$\det\left(\frac{d^2L_w}{d\theta^2}\right) = \det(2 - 4y + 12\theta^2) = 2 - 4y + 12\theta^2 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2} + 3\theta^2 \quad (2.5)$$

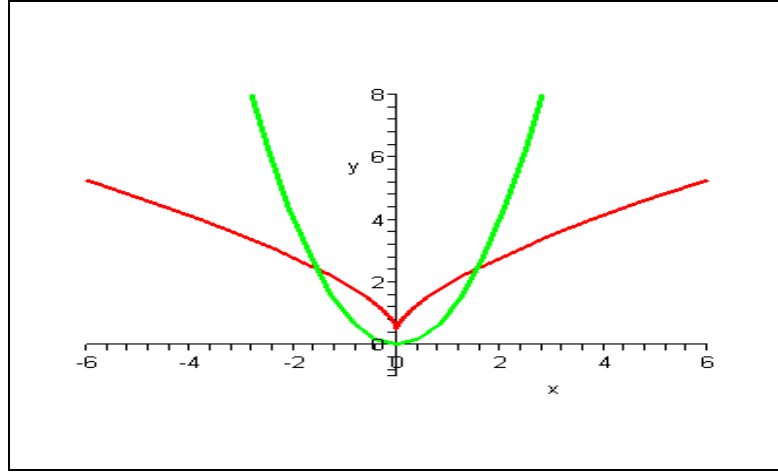
(2.5) eşitliği (2.3) te yerine yazılırsa,

$$\Rightarrow -2x + 2\theta - 4\theta\left(\frac{1}{2} + 3\theta^2\right) + 4\theta^3 = 0 \Rightarrow x = -4\theta^3$$

bulunur. Buradan, odak noktalarının parametrik denklemi

$$(x, y) = \left(-4\theta^3, \frac{1}{2} + 3\theta^2 \right)$$

olarak elde edilir. Parabol ve odak noktaları için Şekil 2.2'ye bakınız.



Şekil 2.2 Parabol ve odak noktaları

Örnek 2.3.2 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(\theta) = (a \cos \theta, b \sin \theta)$ ile verilen

$f(\mathbb{R}) = \left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\} \subset \mathbb{R}^2$ elipsinin odak noktalarını bulalım.

Burada;

$\frac{df}{d\theta} = (-a \sin \theta, b \cos \theta) \neq (0, 0)$ olduğundan f bir immersiyondur.

$w = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ sabit noktasını alalım. $L_w : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $L_w(\theta) = \|(x, y) - f(\theta)\|^2$ olduğundan

$L_w(\theta) = \|(x, y) - (a \cos \theta, b \sin \theta)\|^2 = (x - a \cos \theta)^2 + (y - b \sin \theta)^2$ olmak üzere,

$w = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ sabit noktasını alalım. $L_w : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uzaklık fonksiyonunu,

$$L_w(\theta) = \|(x, y) - f(\theta)\|^2 = (x - a \cos \theta)^2 + (y - b \sin \theta)^2$$

şeklinde tanımlayalım. Buradan,

$$\frac{dL_w}{d\theta} = 2ax \sin \theta - 2by \cos \theta + (2b^2 - 2a^2) \sin \theta \cdot \cos \theta$$

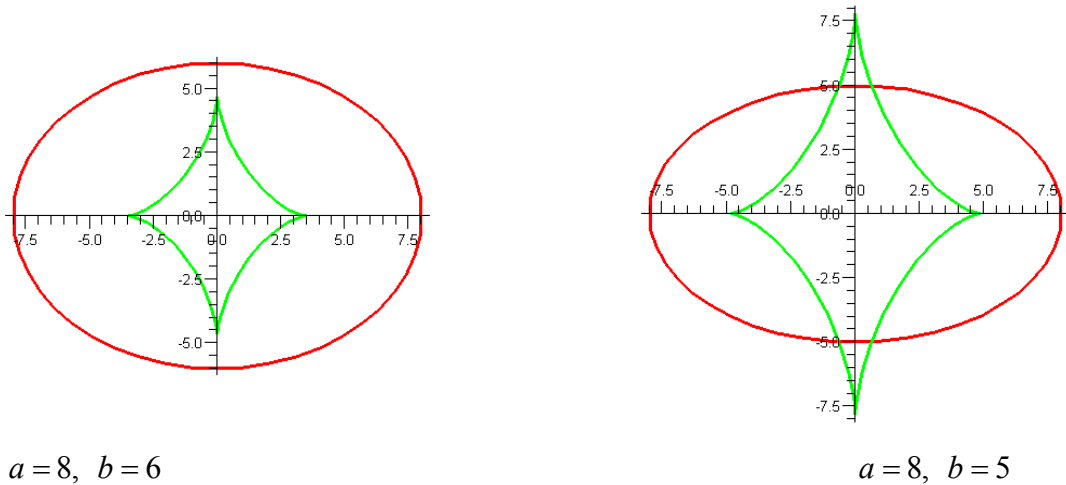
$$\frac{d^2 L_w}{d\theta^2} = 2ax \cos \theta + 2by \sin \theta + (2b^2 - 2a^2)(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

bulunur.

$$\frac{dL_w}{d\theta} = 0 \text{ ve } \frac{d^2 L_w}{d\theta^2} = 0 \text{ denklemlerinin ortak çözümü yapılarak,}$$

$$(x, y) = \left(\frac{a^2 - b^2}{a} \cos^3 \theta, \frac{b^2 - a^2}{b} \sin^3 \theta \right)$$

elde edilir. Bu da odak noktaların denklemdir. $a = 8$ ile $b = 6$ ve $a = 8$ ile $b = 5$ değerleri için Şekil 2.3 de elips eğrisinin görüntüsü ve her iki durum için odak noktalarının geometrik yeri verilmiştir. Odak nokta kümesi elipsle kesişebilir ya da tamamen elipsin sınırladığı bölgenin içinde kalır. Ancak odak nokta kümesi elipsin sınırladığı bölgenin tamamen dışında kalmaz. Bu, elipsin konveks olmasından kolayca elde edilir.



Şekil 2.3 Elips ve odak noktaları

Örnek 2.3.3 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{1+2}$, $f(\theta) = (\theta, \cos \theta, \sin \theta)$ şeklinde verilsin. f nin $\mathbb{R}$ den $f(\mathbb{R})$ ye bir homeomorfizma ve türevlenebilir olduğu açıktır. Ayrıca

$$\frac{df}{d\theta} = (1, -\sin \theta, \cos \theta) \neq (0, 0, 0) \text{ olduğundan } f \text{ bir embedingdir.}$$

θ noktasındaki birim teğet ve normal vektörler ,

$$\frac{df}{d\theta} = (1, -\sin \theta, \cos \theta) \neq (0, 0, 0) \text{ olmak üzere,}$$

$$T(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -\sin \theta, \cos \theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{df}{d\theta}$$

$$\xi_1(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, \sin \theta, -\cos \theta),$$

$$\xi_2(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -\cos \theta, -\sin \theta)$$

dır. ξ_1 ve ξ_2 normal uzayın ortonormal taban vektörleridir.

$w = (x, y, z)$, $\mathbb{R}^3$ de θ noktasında bir odak nokta ise,

$(x, y, z) = f(\theta) + t\xi_1(\theta) + s\xi_2(\theta)$ şeklinde, yani θ noktasındaki normal uzay üzerinde olacaktır.

$$L_w(\theta) = \|w - f(\theta)\|^2 = (x - \theta)^2 + (y - \cos \theta)^2 + (z - \sin \theta)^2 \text{ olur. Buna göre}$$

$$\frac{\partial L_w}{\partial \theta} = -2(x - \theta - y \sin \theta + z \cos \theta) = 0 \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial^2 L_w}{\partial \theta^2} = 2(1 + y \cos \theta + z \sin \theta) = 0 \quad (2.7)$$

bulunur.

Buradan ,

$$(x, y, z) = f(\theta) + t\xi_1(\theta) + s\xi_2(\theta) = (\theta, \cos \theta, \sin \theta) + t \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -\sin \theta, \cos \theta) + s \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -\cos \theta, -\sin \theta)$$

yazılır ve

$$x = (\theta + \frac{1}{\sqrt{2}}t)$$

$$y = (\cos \theta - \frac{1}{\sqrt{2}}(t \sin \theta + s \cos \theta))$$

$$z = (\sin \theta + \frac{1}{\sqrt{2}}(t \cos \theta - s \sin \theta))$$

bulunur. Bu değerler (2.6) denkleminde yerine yazılırsa bir özdeşlik elde edilir ve (2.7) denklemlerinde yerine yazılırsa,

$$1 + \cos^2 \theta - \frac{t}{\sqrt{2}} \sin \theta \cos \theta - \frac{s}{\sqrt{2}} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta + \frac{t}{\sqrt{2}} \sin \theta \cos \theta - \frac{s}{\sqrt{2}} \sin^2 \theta = 0$$

denklemden ise,

$$2 - \frac{s}{\sqrt{2}} = 0 \text{ olup } s = 2\sqrt{2} \text{ bulunur. Böylece odak noktalar, } t \in \mathbb{R} \text{ olmak üzere}$$

$$x = (\theta + \frac{1}{\sqrt{2}}t)$$

$$y = (\cos \theta - \frac{1}{\sqrt{2}}(t \sin \theta + 2\sqrt{2} \cos \theta)) = -\cos \theta - \frac{1}{\sqrt{2}}t \sin \theta$$

$$z = (\sin \theta + \frac{1}{\sqrt{2}}(t \cos \theta - 2\sqrt{2} \sin \theta)) = -\sin \theta + \frac{1}{\sqrt{2}}t \cos \theta$$

şeklinde bulunur.

Örnek 2.3.4 $\tilde{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^{2+2}$, $\tilde{f}(\theta, \phi) = (\cos \theta, \sin \theta, \cos \phi, \sin \phi)$

şeklinde tanımlı bir dönüşüm olsun. Buradaki θ ve ϕ , 2π modülüne göre alınırsa $\tilde{f}$, $f : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^{2+2}$ şeklinde tanımlanan T^2 tor yüzeyinin $\mathbb{R}^4$ e küresel bir embedingini verir.

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta} = (-\sin \theta, \cos \theta, 0, 0),$$

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \phi} = (0, 0, -\sin \phi, \cos \phi) \text{ olduğundan}$$

$$\xi_1(\theta, \phi) = (\cos \theta, \sin \theta, \cos \phi, \sin \phi),$$

$$\xi_2(\theta, \phi) = (-\cos \theta, -\sin \theta, \cos \phi, \sin \phi),$$

$\tilde{f}$ için birim normal vektör alanları ve $\forall (\theta, \phi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ için normal uzayın taban vektörleridir. $\tilde{f}_{(t,s)}$ dönüşümü aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{(t,s)}(\theta, \phi) &= \tilde{f}(\theta, \phi) + t\xi_1(\theta, \phi) + s\xi_2(\theta, \phi) \\ &= ((1+t-s)\cos \theta, (1+t-s)\sin \theta, (1+t+s)\cos \phi, (1+t+s)\sin \phi). \end{aligned}$$

Şimdi odak noktaları belirlemek için $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ olmak üzere,

$$L_x(\theta, \phi) = \|x - \tilde{f}(\theta, \phi)\|^2 = (x_1 - \cos \theta)^2 + (x_2 - \sin \theta)^2 + (x_3 - \cos \phi)^2 + (x_4 - \sin \phi)^2$$

şeklinde tanımlı uzaklık fonksiyonu kullanılırsa,

$$\frac{\partial L_x}{\partial \theta} = (x_1 \sin \theta - x_2 \cos \theta),$$

$$\frac{\partial L_x}{\partial \phi} = (x_3 \sin \phi - x_4 \cos \phi),$$

$$\frac{\partial^2 L_x}{\partial \theta^2} = (x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta),$$

$$\frac{\partial^2 L_x}{\partial \phi^2} = (x_3 \cos \phi + x_4 \sin \phi),$$

$$\frac{\partial^2 L_x}{\partial \phi \partial \theta} = \frac{\partial^2 L_x}{\partial \theta \partial \phi} = 0$$

bulunur. Ayrıca,

$$Hess(L_x) = H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L_x}{\partial \theta^2} & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2 L_x}{\partial \phi^2} \end{pmatrix}$$

dır. O halde $\tilde{f}_{(t,s)}(\theta, \phi)$ noktasının $\tilde{f}$ nin (θ, ϕ) tabanlı odak noktası olması için gerek ve yeter koşul (θ, ϕ) noktasının L_x in dejenere kritik noktası olmasıdır. Böylece

$$\frac{\partial L_x}{\partial \theta} = 0 = \frac{\partial L_x}{\partial \phi} \text{ ve } t, s \in \mathbb{R} \text{ olmak üzere, } \forall (\theta, \phi) \in \mathbb{R}^2 \text{ için } x = \tilde{f}_{(t,s)}(\theta, \phi) \text{ için } \det H = 0$$

olacaktır. Buradan

$$x_1 = (1 + t - s) \cos \theta,$$

$$x_2 = (1 + t - s) \sin \theta,$$

$$x_3 = (1 + t + s) \cos \phi,$$

$$x_4 = (1 + t + s) \sin \phi$$

olmak üzere,

$$\det \begin{pmatrix} (x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta) & 0 \\ 0 & (x_3 \cos \phi + x_4 \sin \phi) \end{pmatrix} = 0$$

olur. Bu eşitlikten

$$\det \begin{pmatrix} (1+t-s) & 0 \\ 0 & (1+t+s) \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1+t-s)(1+t+s) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1+t)^2 - s^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow s = \pm(1+t)$$

bulunur. Buradan ise,

$$x_1 = (1+t \mp (1+t)) \cos \theta ,$$

$$x_2 = (1+t \mp (1+t)) \sin \theta ,$$

$$x_3 = (1+t \pm (1+t)) \cos \phi ,$$

$$x_4 = (1+t \pm (1+t)) \sin \phi$$

olarak elde edilir. Bu ise $t \in \mathbb{R}$ olmak üzere sırasıyla $s = (1+t)$ ve $s = -(1+t)$ alındığında

$$x_1 = 0$$

$$x_1 = 2 \cos \theta (1+t)$$

$$x_2 = 0$$

$$x_2 = 2 \sin \theta (1+t)$$

$$x_3 = 2 \cos \phi (1+t) ,$$

$$x_3 = 0$$

$$x_4 = 2 \sin \phi (1+t)$$

$$x_4 = 0$$

şeklinde başlangıç noktasından geçen bir çift dik doğrudan oluşmaktadır.

BÖLÜM 3

3.1 SABİT GENİŞLİKLİ (CONSTANT WIDTH) MANİFOLDLAR

Bu bölümde, M , m -boyutlu, düzgün, bağlantılı ve sınırı olmayan bir manifold olmak üzere böyle bir manifoldun $(m+1)$ boyutlu bir Öklid uzayına sabit genişlikli embeddingi kavramı Robertson (1984) den yararlanarak tanıtılacak ve bazı örnekler incelenecektir.

Tanım 3.1.1 M , m -boyutlu bir manifold ve $f : M^m \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ kapalı (yani $f(M) \subset \mathbb{R}^{m+1}$ kapalı) bir embedding olsun. Eğer $f(M)$ nin iki noktasını birleştiren kiriş iki uç noktasından birinde normal oluyorsa bu kiriş $f(M)$ ye **normaldir** denir ve eğer bu kiriş her iki uç noktada da normal oluyorsa bu kiriş **binormaldir** denir. M nin her bir normal kirişi binormal ve tüm bu kirişler aynı uzunlukta iseler f ye M manifoldunun **sabit genişlikli (constant width)** bir embeddingi denir.

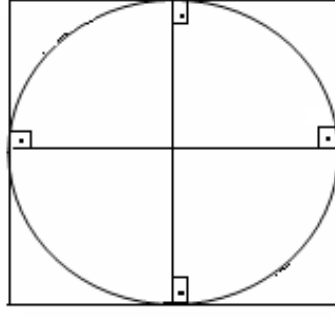
Örnek 3.1.1 1-boyutlu durumda, sabit genişlikli eğriler denince aklımıza ilk olarak çember gelir. Bir çember bir karenin içine, tüm kenarlarına teğet olacak şekilde yerleştirilirse, çemberi karenin içinde döndürdüğümüzde dört kenara da teğet olmayı sürdürecektir. Bunu Şekil 3.1 de görebiliriz. Bu tip eğriler için çember tek örnek değildir ama bu eğrilerden (kenar uzunluğu sabit tutulduğunda) en büyük alana sahip olanıdır. Bunu sonuç 3.1.1 den dolayı Teorem 3.1.1 de verilen izoperimetrik eşitsizlikten görebiliriz.

Teorem 3.1.1 γ basit kapalı bir eğri, $l(\gamma)$ bu eğrinin uzunluğu ve $A(\text{int}(\gamma))$ eğrinin sınırladığı bölgenin alanı olsun. Bu durumda,

$$A(\text{int}(\gamma)) \leq \frac{1}{4\pi} l(\gamma)^2$$

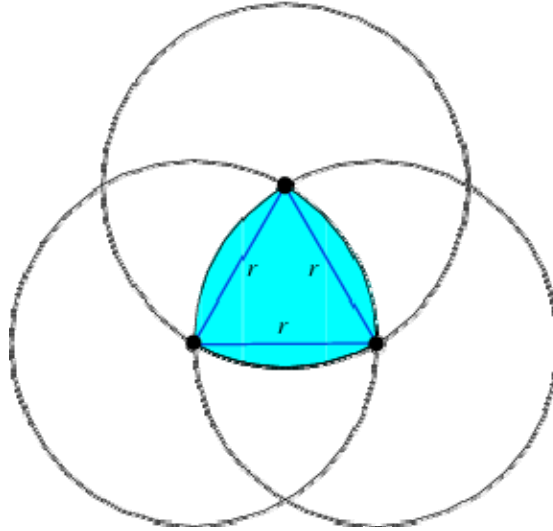
dır. Eşitliğin olması için gerek ve yeter şart γ nin bir çember olmasıdır (Pressley, 2000).

Şekil 3.1 de sabit genişlikli bir eğri örneği olan çember verilmiştir.



Şekil 3.1 Çember

Örnek 3.1.2 Sabit genişlikli (constant width) eğriler için çember dışında en iyi bilinen örnek Reuleaux üçgenidir. Reuleaux üçgeni, bu tip eğriler içinde yani çevre uzunluğu aynı olan sabit genişlikli eğriler içinde, en küçük alana sahiptir. α açısına sahip üç eşit uzunluklu çembersel yayın bir eşkenar üçgenin kenarlarını birleştirmesiyle oluşur. Bu çemberin yarıçapı r olsun.



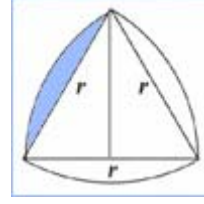
Şekil 3.2 Reuleaux Üçgeninin oluşumu

Üçgenin Alanı



$$A_t = \frac{1}{2}bh = \frac{\sqrt{3}}{4}r^2$$

Taralı Parçanın Alanı



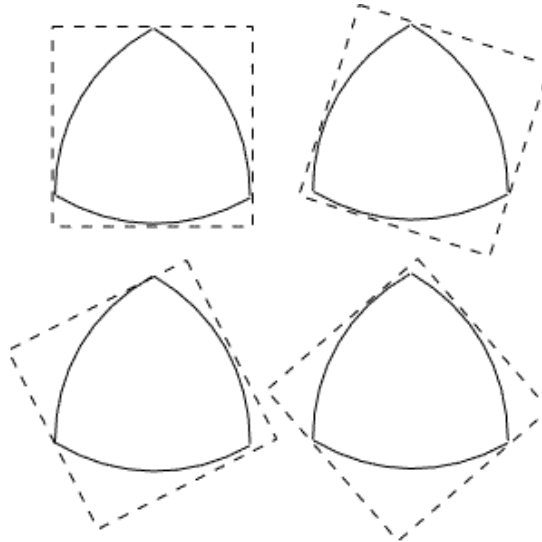
$$A_s = \frac{1}{2}r^2(\theta - \sin \theta)$$

$$= \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) r^2$$

Reuleaux Üçgeninin Alanı: $A_{toplam} = A_t + 3A_s = \frac{1}{2}(\pi - \sqrt{3})r^2$

Şekil 3.3 Reuleaux Üçgeninin alanının hesaplanması

Reuleaux üçgeni sabit genişlikli bir eğridir ve şekil 3.3 de alanını hesapladık. Aşağıda, şekil 3.4 de her karenin karşılıklı kenarları bu eğriye bir noktada değen paralel destek doğrular olmak üzere, karenin döndürülmesi durumunda sınırlar kareye bir noktada değiyorken genişliğin sabit olduğu açıkça görülmektedir. Ancak Reuleaux üçgeni türevlenebilir bir eğri değildir.



Şekil 3.4 Döndürülmüş kareler ve Reuleaux Üçgeni

Şimdi sabit genişlik kavramını daha yakından inceleyelim.

Örnek 3.1.3 $\mathbb{R}^2$ Öklid düzleminde düzgün basit kapalı bir S eğrisi alalım.

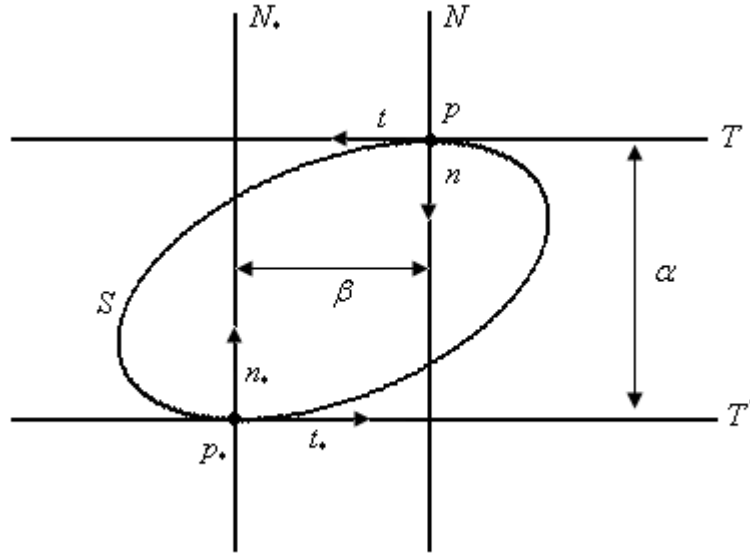
S eğrisini, $t = f'(s)$ yay uzunluğu parametrelili (birim hızlı) olmak üzere $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ biçimindeki C^2 -sınıfından bir embeddingin görüntüsü olarak düşünebiliriz, yani $f(\mathbb{R}) = S$ dir. Elbette burada kabulümüz, S eğrisinin uzunluğu l olmak üzere f nin l periyodlu olduğudur.

f dönüşümünün S eğrisini saat yönünün tersine parametrelendirdiğini yani $\mathbb{R}^2 \setminus S$ nin sınırlı bölgesinin eğrinin solunda kaldığını varsayalım. Her $s \in \mathbb{R}$ için tek bir birim iç normal n vektörü vardır. S nin $f(s)$ deki κ eğriligi için $t' = \kappa n$ ve $n' = -\kappa t$ Serret-Frenet bağıntıları yazılabilir.

Eğriligi pozitif olan kapalı eğrilere **oval** denmektedir. O halde böyle bir S eğrisinin oval olması için gerek ve yeter şart $\kappa > 0$ olmasıdır.

Bu durumda t ile pozitif x -ekseni arasında kalan Ψ açısı s nin sınırlı monoton artan fonksiyonudur. Bu yüzden her bir $s \in \mathbb{R}$ ye $t_* = f'(s_*)$ iken $t + t_* = 0$ olacak şekilde bir tek $s_* \in \mathbb{R}$ yi karşılık getiren ve yönü koruyan bir $\delta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ difeomorfizması vardır. Benzer şekilde $n_* = n(s_*)$ yazarsak $n + n_* = 0$ olduğu görülebilir. Doğal olarak $p_* = f(s_*)$, $p = f(s)$ nin karşı (antipodal) noktasıdır.

Yukarıdaki tanıma bağlı olarak şimdi de S eğrisinin $\mathbb{R}^2$ de p noktasından geçen T teğet ve N normal afin doğrularını çizelim. Aynı işlemi p_* için tekrarlayarak T_* ve N_* teğet ve normal doğrularını çizelim. α , T ile T_* doğruları arasındaki, β da N ile N_* doğruları arasındaki dik uzaklıklar olsun. Şekil 3.5 e bakınız.



Şekil 3.5 Bir ovalin karşılıklı noktaları (Robertson, 1984).

Bu durumda Şekil 3.5 ten de anlaşılacağı üzere $p_* = p + \beta t + \alpha n$ yazılabilir. Her iki tarafın s ye göre türevini alırsak;

$$\frac{\partial p_*}{\partial s} = \frac{\partial p}{\partial s} + \frac{\partial \beta}{\partial s} t + \frac{\partial t}{\partial s} \beta + \frac{\partial \alpha}{\partial s} n + \frac{\partial n}{\partial s} \alpha$$

$$\frac{\partial f(\delta(s))}{\partial s} = f'(s) + f'(s)\beta' + \kappa n\beta + n\alpha' + \alpha n'$$

$$f'(\delta(s)) \cdot \delta'(s) = t + t\beta' - \alpha\kappa t + \kappa n\beta + n\alpha'$$

$$f'(s_*) \cdot \delta'(s) = t(1 + \beta' - \alpha\kappa) + n(\beta\kappa + \alpha')$$

$$t_*\delta'(s) = t(1 + \beta' - \alpha\kappa) + n(\beta\kappa + \alpha')$$

$$-t\delta'(s) = t(1 + \beta' - \alpha\kappa) + n(\beta\kappa + \alpha')$$

$$-t(\delta'(s) + 1 + \beta' - \alpha\kappa) - n(\beta\kappa + \alpha') = 0$$

t ile n lineer bağımsız olduklarından,

$1 + \delta'(s) = -\beta' + \alpha\kappa$ ve $\alpha' + \beta\kappa = 0$ bağıntılarını elde ederiz. Burada $\kappa = \frac{d\Psi}{ds}$ yazarak

bağıntıyı,

$$ds + ds_* = -d\beta + \alpha d\Psi, \quad d\alpha + \beta d\Psi = 0$$

formuna getirebiliriz.

S nin p deki genişliği (width) veya t vektörü yönündeki genişliği α dır. Genel olarak bir ovalin genişliği (width) p değerine bağlıdır. α nın p den bağımsız olduğu bazı özel durumlarda, S eğrisi α **sabit genişlikli (constant width) düzgün bir eğri** olarak adlandırılır.

Yukarıdaki Örnek 3.1.3 deki açıklamaların bir sonucu olarak aşağıdaki teorem verilecektir.

Teorem 3.1.2 (Barbier Teoremi) S ovalinin sabit genişlikli olması için gerek ve yeter şart her s için $d\alpha = 0$ dır. Böylece S nin sabit genişlikli olması için gerek ve yeter şart her s için $\beta = 0$ olmasıdır (Robertson, 1964).

Sonuç 3.1.1 Eğer S , sabit genişlikli ve l uzunluğuna sahip ise bu uzunluk, $\beta = 0$ olduğundan $ds + ds_* = \alpha d\psi$ olup $\alpha = \frac{ds + ds_*}{d\psi}$

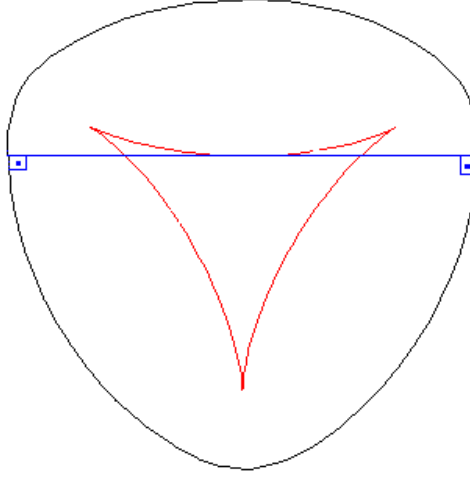
$$l = \int_0^\pi \left(\frac{ds}{d\psi} + \frac{ds_*}{d\psi} \right) d\psi = \alpha \int_0^\pi d\psi = \alpha(\pi - 0) = \alpha\pi$$

dır. Yani α sabit genişlikli bir kapalı eğrinin çevre uzunluğu $\alpha\pi$ dir. r yarıçaplı çember $2r$ genişlikli olup çevresi $(2r)\pi$ dir.

Sonuç 3.1.2 Bu şartlar altında basit kapalı oval eğriler ailesinde sabit genişlikli eğrilerin sınıflandırılması $\beta = 0$ olması özelliğine bağlıdır. Bu kriter şu formda da ifade edilebilir: S ovali sabit genişliklidir ancak ve ancak bu ovalin karşılıklı noktalarındaki normalleri çakışıktır. Başka bir ifadeyle S ovali sabit genişliklidir ancak ve ancak S in her p noktası ile p^* karşı (antipodal) noktasını birleştiren kiriş S ye her iki uçta da normaldir.

Örnek 3.1.4 C , $\mathbb{R}^2$ de tam olarak n ($n \geq 3$) köşeye (cusp) ve $\mathbb{R}^2$ de başlangıç noktasından çıkan her bir doğrultu için bir tek teğet doğrusuna sahip C^2 -sınıfından bir eğri olsun. C nin involütü de C^2 -sınıfından sabit genişlikli (constant width) bir S eğrisidir. Böyle S eğrileri

$2n$ tane tepe noktasına sahiptirler. Burada tepe noktası eğrinin eğrilik fonksiyonunun türevinin sıfır olduğu yerlerdir. $n = 3$ için şekil 3.6 da örnekleme yapılmıştır.



Şekil 3.6 3 tane köşeye sahip sabit genişlikli bir eğri

Şimdi de $\mathbb{R}^3$ de sabit genişlikli kompakt yüzeyleri inceleyelim.

Kabul edelim ki M , $\mathbb{R}^3$ de, kompakt, sınırı olmayan ve K Gaus eğriliği her yerde pozitif olan C^2 -sınıfından yüzey olsun. Bu durumda M nin $\mathbb{S}^2$ küresine difeomorfik olduğunu biliyoruz. $\mathbb{R}^3$ ün her bir düzlemi M ye birden fazla noktada teğet olamaz ve $\mathbb{R}^3$ deki paralel düzlemlerin her bir sınıfında T ve T_* gibi tam olarak iki düzlem M ye p ve p_* şeklinde karşılıklı iki noktada teğettir. Bu noktalardaki N ve N_* normal doğruları birbirlerine paraleldirler. Bu durumda önceden belirttiğimiz gibi T ve T_* arasındaki dik uzaklık α ve N ve N_* arasındaki dik uzaklık da β olarak adlandırılabilir. α sayısı M ovaloidinin N doğrultusundaki ya da p noktasındaki genişliğidir.

M nin, α sabit genişlikli olması için gerek ve yeter şart α nın p den bağımsız olmasıdır. Bunun sağlanması için gerek ve yeter şart her p için $\beta = 0$ olmasıdır.

Sabit genişlikli eğrilere geri dönecek olursak, bu tip eğrilerin bir özelliğini de şöyle açıklayabiliriz.

$\delta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ difeomorfizması için $\delta^2 = \delta \circ \delta$ bileşke dönüşümü birim dönüşüm olup $\pi\alpha$ periyodludur. Buradan, $\delta'(s_*) = \delta'(s)^{-1}$ olduğunu görürüz. $\kappa_* = \kappa(f(s_*))$ yazarak her s için;

$$\frac{1}{\kappa} + \frac{1}{\kappa_*} = \alpha$$

sonucu elde edilir. Bu sonuç ρ ve ρ_* , S nin karşılıklı p ve p_* noktalarındaki eğrilik yarıçapları olmak üzere

$$\rho + \rho_* = \alpha$$

şeklinde daha güzel bir gösterimle ifade edilebilir.

Robertson (1984) e göre bu bağıntının sabit genişlikli (constant width) ovaloidler için Mellish tarafından yapılan ve arkadaşlarının Mellish (1931) de yayınladığı bir genelleştirilmesi vardır. Bu genelleştirme aşağıdaki gibi yapılmaktadır.

M , $\mathbb{R}^3$ de kompakt ve sabit genişlikli (constant width) bir ovaloid olsun. Bu durumda $\forall p \in M$ için T teğet düzleminde p noktasından geçen λ_p doğrusu bir asli yön doğrusu ve ρ da bu doğrultudaki asli eğrilik yarıçapı olsun. M üzerinde p nin tek karşı noktası olan p_* noktasındaki teğet düzlem T_* ve bu düzlem üzerinde p_* noktasından geçen ve λ_p ye paralel olan doğru λ_{p_*} olsun. Bu durumda $\rho + \rho_* = \alpha$ bağıntısı geçerlidir.

α sabit genişlikli küresel olmayan ovaloidi için basit bir örnek verelim. $\mathbb{R}^2$ de bir N normal doğrusunu simetri eksenini kabul eden α sabit genişlikli S ovali olsun. Şimdi $\mathbb{R}^2$ yi $z=0$ düzlemi ile $\mathbb{R}^3$ ün bir alt kümesi olarak alalım ve S yi $\mathbb{R}^3$ de N etrafında döndürelim. Dönme sonucu oluşan M yüzeyi α sabit genişlikli ovaloididir.

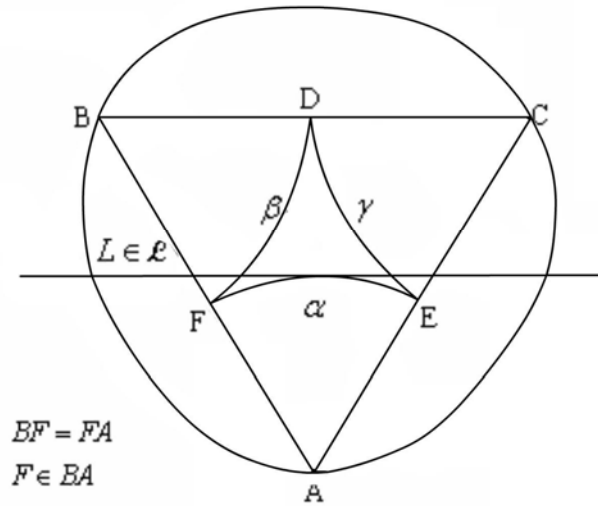
Tanım 3.1.2 M^m bağlantılı, sınırı olmayan, düzgün (C^∞), m – boyutlu manifold, $k > 0$ için $f: M^m \rightarrow \mathbb{R}^{m+k}$ düzgün embedingini ele alalım. Her $p \in M$ için $f(M)$ nin $f(p)$ noktasındaki afin normal k – düzlemi $v_p(f)$ olsun. Herhangi bir $q \in M$ için

$f(q) \in f(M) \cap \nu_p(f)$ olduğunda , $\nu_q(f) = \nu_p(f)$ oluyorsa $f(M)$ altmanifoldu *transnormaldir* ve f ye de M manifoldunun *transnormal embeddingidir* denir.

Eğer bu k – düzlemi $f(M)$ altmanifoldunu r defa normal olarak kesiyorsa $f(M)$ ye de M nin r – *transnormal* embeddingi denir.

Örnek 3.1.5 Reuleaux Üçgeninin yapısını değiştireceğiz. Böylece $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ standart birim küresinin $\mathbb{R}^3$ e C^∞ sınıfından eğriliği sabit olmayan ve küre yüzeyinden farklı bir yüzey olarak 2-transnormal embeddingini elde edeceğiz.

$T, \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ de A, B, C köşeleriyle verilen bir eşkenar üçgen olsun. α, β, γ T içinde T nin kenarlarının D, E, F orta noktalarını ikişer ikişer birleştiren içbükey yaylar olsun. β ve γ D de C^∞ sınıfından ve bunların D deki ortak teğetleri EDF açısını eşit iki parçaya bölsün. Aynı durum E ve F noktalarındaki teğetler için de geçerlidir. γ, α ve α, β çiftleri E ve F de Şekil 3.7 deki şekle sahiptirler ve α, β, γ başka hiçbir yerde kesişmezler.



Şekil 3.7 Düzgünleştirilmiş Reuleaux Üçgeni

$\mathcal{L}$ ile α, β ya da γ nın teğet doğrularının 1 parametrelili C^∞ sınıfından ailesi gösterilsin. Şekil 3.7 de L teğeti için $L \in \mathcal{L}$ dir. $\mathcal{L}$ nin A, B ve C den geçen ortogonal yörüngesi C^∞ sınıfından çembersel olmayan $\mathbb{R}^2$ de sabit genişlikli basit kapalı eğridir. Yani A, B ve C noktalarından geçen ve odak noktalarının kümesi α, β, γ eğrilerinin oluşturduğu geometrik yer olan sabit genişlikli bir eğri vardır.

Bu eğriyi $\mathbb{R}^3$ de A daki açıortay doğrusu etrafında döndürelim. Bu şekilde üretilen S kapalı yüzeyi C^∞ -sınıfından sabit genişlikli fakat sabit olmayan pozitif eğrilikli bir yüzeydir ve standart küreye difeomorfiktir.

Örnek 3.1.5 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(t) = (t, e^t)$ dönüşümü verilsin. $f : \mathbb{R} \rightarrow f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^2$ ye bir homeomorfizmdir. Ayrıca $f'(t) = (1, e^t) \neq (0, 0)$ olup f bir embedingdir. f için bir normal vektör alanı $\xi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\xi(t) = (-e^t, 1)$ alınabilir.

$$\langle \xi(t_0), f'(t) \rangle = \langle (-e^{t_0}, 1), (1, e^t) \rangle = 0 \Leftrightarrow -e^{t_0} + e^t = 0 \Leftrightarrow e^{t_0} = e^t \Leftrightarrow t = t_0$$

olduğundan, her normal doğru eğriyi sadece bir noktada kesmektedir. Bu durumda f ye 1-transnormal diyeceğiz.

Örnek 3.1.6 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)$ ile tanımlanan f fonksiyonu bir immersiyondur. Eğer θ , 2π moduna göre alınırsa f , $\mathbb{S}^1$ standart birim çemberinin bir embedingini verir. $f'(\theta) = (-\sin \theta, \cos \theta)$ olduğundan f için bir birim normal vektör alanı $\xi(\theta) = (-\cos \theta, -\sin \theta)$ dir. $\xi(\theta) = \pm \xi(\theta_0) \Leftrightarrow \theta = \theta_0$ veya $\theta = \theta_0 + \pi$ dir. Buradan, her noktadaki normal doğru $f(\mathbb{S}^1)$ ile tam olarak iki defa kesiştiğinden f embedingi 2-transnormaldır.

Örnek 3.1.7 $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(\theta, \varphi) = (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, \sin \theta)$ ile tanımlanırsa f nin görüntüsü $f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ standart birim küresidir. f nin bire-bir olmadığı açıktır. f nin $\mathbb{S}^2$ standart küre yüzeyinin $\mathbb{R}^3$ e bir transnormal embedingini vereceğini gösterelim.

$$df(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} -\sin \theta \cos \varphi & -\cos \theta \sin \varphi \\ -\sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & 0 \end{pmatrix}$$

olup θ, π moduna göre φ de 2π moduna göre alınır ve $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, $0 < \varphi < 2\pi$ olmak üzere (bu kısıtlama altında birim küre üzerinde sadece bir yay açıktır) $df(\theta, \varphi)$ nin rankı açıkça görüldüğü gibi tanım kümesinin boyutuna eşittir yani 2 dir. Bu nedenle f , $\mathbb{S}^2$ nin bir embeddingini verir.

Şimdi bu embeddingin transnormalliğini inceleyelim. f embeddingi için birim normal vektör alanı $\xi(\theta, \varphi) = -f(\theta, \varphi)$ olarak alınabilir. $\xi(\theta, \varphi + \pi) = -f(\theta, \varphi + \pi) = f(\theta, \varphi)$ olduğundan verilen asıl aralıkta $\xi(\theta, \varphi) = \pm \xi(\theta_0, \varphi_0) \Leftrightarrow (\theta, \varphi) = (\theta_0, \varphi_0)$ veya $(\theta, \varphi) = (\theta_0, \varphi_0 + \pi)$ bulunur ve sonuç olarak f , 2-transnormaldır.

Örnek 3.1.8 Tor yüzeyi için yeni bir dönüşüm aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$f : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^4, \quad f(\theta, \varphi) = (\cos \theta, \sin \theta, \cos \varphi, \sin \varphi)$$

$$df(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} -\sin \theta & 0 \\ \cos \theta & 0 \\ 0 & -\sin \varphi \\ 0 & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

olup $\theta, \varphi, 2\pi$ moduna göre alınır ve $df(\theta, \varphi)$ nin rankı açıkça görüldüğü gibi tanım kümesinin boyutuna eşittir yani 2 dir. Bu nedenle $\theta, \varphi, 2\pi$ moduna göre alınır ve f , $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ in bir embeddingini verir.

Şimdi bu embeddingin transnormalliğini inceleyelim.

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = (-\sin \theta, \cos \theta, 0, 0) \quad \text{ve} \quad \frac{\partial f}{\partial \varphi} = (0, 0, -\sin \varphi, \cos \varphi)$$

olduğundan birim normal vektör alanları

$$\xi_1(\theta, \varphi) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos \theta, \sin \theta, \cos \varphi, \sin \varphi) = -\frac{1}{\sqrt{2}} f \quad \text{ve} \quad \xi_2(\theta, \varphi) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos \varphi, \sin \varphi, -\cos \theta, -\sin \theta)$$

olarak bulunur.

$$\left\langle \xi_1(\theta, \varphi), \frac{\partial f(\theta_0, \varphi_0)}{\partial \theta} \right\rangle = 0 \quad \text{ve} \quad \left\langle \xi_1(\theta, \varphi), \frac{\partial f(\theta_0, \varphi_0)}{\partial \varphi} \right\rangle = 0$$

$$\left\langle \xi_2(\theta, \varphi), \frac{\partial f(\theta_0, \varphi_0)}{\partial \theta} \right\rangle = 0 \quad \text{ve} \quad \left\langle \xi_2(\theta, \varphi), \frac{\partial f(\theta_0, \varphi_0)}{\partial \varphi} \right\rangle = 0$$

denklemleri çözülürse

$$(\theta, \varphi) = (\theta_0, \varphi_0),$$

$$(\theta, \varphi) = (\theta_0, \varphi_0 + \pi)$$

$$(\theta, \varphi) = (\theta_0 + \pi, \varphi_0)$$

$$(\theta, \varphi) = (\theta_0 + \pi, \varphi_0 + \pi)$$

olacağı görülür. O halde bu noktalardan geçen normal düzlemler aynıdır. Gerçekten,

$$\xi_1(\theta, \varphi) = -\xi_1(\theta + \pi, \varphi + \pi) = \xi_1(\theta + \pi, \varphi + \pi) = \xi_1(\theta + \pi, \varphi + \pi),$$

$$\xi_2(\theta, \varphi) = -\xi_2(\theta + \pi, \varphi + \pi) = \xi_2(\theta + \pi, \varphi + \pi) = \xi_2(\theta + \pi, \varphi + \pi)$$

olup f 4-transnormaldır.

BÖLÜM 4

MANİFOLDLARIN TRANSNORMAL EMBEDİNGLERİ

Bu son bölümde manifoldların transnormal embedingleri ve ilgili sonuçlar incelenecektir. Bu amaçla Robertson(1964), Robertson(1967), Robertson(1984), Wegner(1970) makalelerinden bir derleme yapılacaktır. Burada önemli kavramlardan birisi örtü uzayı kavramıdır.

4.1 ÖRTÜ UZAYLARI VE TRANSNORMALLİK

Tanım 4.1.1 X bir yol bağlantılı ve yerel yol bağlantılı topolojik uzay, Y bir topolojik uzay ve $\pi:Y \rightarrow X$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall x \in X$ için $\exists U \in \mathcal{U}_x$ açık ve yol bağlantılı komşuluğu vardır öyle ki $\pi^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} V_i$, $V_i \subset Y$ ayrık, açık ve $\forall i \in I$ için U ile V_i homeomorfik oluyorsa π ye bir *örtü dönüşümü* ve Y ye de X in bir *örtü uzayı* denir.

Teorem 4.1.1 (Y, π) , X in bir örtü uzayı ve $\gamma:[0,1] \rightarrow X$ sürekli bir eğri olsun. $y \in Y$ ve $\pi(y) = \gamma(0)$ ise, bu durumda, $\tilde{\gamma}(0) = y$ ve $\forall t \in [0,1]$ için $\pi \circ \tilde{\gamma}(t) = \gamma(t)$ olacak şekilde bir tek $\tilde{\gamma}:[0,1] \rightarrow Y$ sürekli eğrisi vardır (Massey, 1997).

Teorem 4.1.2 (Y, π) , X in bir örtü uzayı ise $\forall x \in X$ için $\pi^{-1}(x)$ ler aynı eleman sayısına sahiptirler (Massey 1997).

$k \leq n$ olmak üzere $H_{k,n}(\mathbb{R})$ ile $\mathbb{R}^n$ deki k -boyutlu afin düzlemleri ve $G_{k,n}(\mathbb{R})$ ile $\mathbb{R}^n$ deki başlangıç noktasından geçen k -boyutlu alt uzayları gösterelim. $G_{k,n}(\mathbb{R})$ nin Hausdorff ve ikinci sayılabilirlik özelliklerine sahip, sınırı olmayan, kompakt bir düzgün manifold olduğu ve boyutunun $k(n-k)$ olduğu bilinmektedir. Bu $G_{k,n}(\mathbb{R})$ ye kapalı reel Grasmannian manifoldu ve $H_{k,n}(\mathbb{R})$ ye açık reel Grasmannian manifoldu denmektedir. Örneğin $G_{1,3}(\mathbb{R})$

manifoldu reel Projektif uzayı olan $\mathbb{R}P^2$ dir. $G_{k,n}(\mathbb{R})$ manifoldu ile ilgili detaylı bilgiler Munkres (1963) de bulunabilir.

$f : M \rightarrow \mathbb{R}^{m+k}$ transnormal bir embedding olsun. Bu durumda $\pi : M \rightarrow H_{k,m+k}(\mathbb{R})$, $\pi(p) = \nu_p(f)$ şeklinde bir $p \in M$ yi $f(p) \in \mathbb{R}^{m+k}$ noktasında $f(M)$ ye dik olan k -boyutlu düzleme götüren bir dönüşüm tanımlanabilir. $W = \pi(M)$ olsun. Burada transnormalliğin tanımıyla açık bir ilişki vardır ki bu da W nun bir m -boyutlu manifold ve π nin M den W ya C^∞ -sınıfından yerel olarak difeomorfik bir immersiyon olmasıdır. Hatta bunlardan daha güçlü olarak π nin örtü dönüşümü olduğunu belirten aşağıdaki teorem geçerlidir.

Teorem 4.1.3 $\pi : M \rightarrow W \subset G_{k,m+k}(\mathbb{R})$ bir örtü dönüşümüdür (Robertson, 1964, Wegner, 1970).

$W = \pi(M)$ olup W en azından C^2 -sınıfından bir manifolddur ve π sürekli ve M bağlantılı olduğundan W da bağlantılıdır ve M kompakt ise W da kompakt olacaktır.

$f : M \rightarrow \mathbb{R}^{m+k}$ transnormal bir embedding olsun. Teorem 4.1.2 den dolayı $\forall p \in M$ için $\pi^{-1}(\nu_p(f))$ lerin eleman sayıları (kardinaliteleri) aynıdır. Eğer bu sayı sonlu ve r ise f ye r -transnormal denilmektedir. Ayrıca $f(\pi^{-1}(\nu_p(f)))$ kümesine de f nin transnormal çatısı denmektedir. Bu kümeyi $\zeta(p)$ ile gösterelim, yani $\zeta(p) = f(\pi^{-1}(\nu_p(f)))$ dir. Her $p \in M$ için bu transnormal çatıların $\mathbb{R}^{m+k}$ nin izometrik alt kümeleri olduğu bilinmektedir (Robertson, 1964, Wegner, 1970).

Teorem 4.1.4 $f : M \rightarrow \mathbb{R}^{m+k}$ transnormal bir embedding, $p, q \in M$ ve $f(q) \in \nu_p(f) \cap f(M)$ olsun. Bu durumda x , f nin p tabanlı odak noktasıdır $\Leftrightarrow x$, f nin q tabanlı odak noktasıdır (Robertson, 1964, Wegner, 1970).

Bu teoremin bir sonucu olarak transnormal bir manifold ile odak noktaları kesişmezler.

Teorem 4.1.5 $f : M \rightarrow \mathbb{R}^{m+k}$ transnormal bir embedding olsun.
 $F := \{x \in \mathbb{R}^{m+k} \mid x, f(M) \text{ in bir odak noktasıdır}\}$ ise $f(M) \cap F = \emptyset$ dir.

İspat Bir $q \in M$ için $f(q) \in f(M) \cap F$ olduğunu varsayalım. Bu durumda bir $p \in M$ vardır öyle ki $f(q)$, $f(M)$ nin p deki odak noktasıdır ve aynı zamanda $q \in v_p(f) \cap f(M)$ dir. Teorem 4.1.4 den $f(q)$ nun $f(M)$ için q tabanlı bir odak noktası olduğu çelişkisine düşülür.

Sonuç 4.1.1 Böylece bir $p \in M$ için $x = f(p)$ alınırsa L_x uzaklık fonksiyonu dejenere olmayan bir fonksiyon, yani bir Morse fonksiyonudur. Dolayısıyla kompakt manifoldlar sadece sonlu transnormal olabilirler.

Teorem 4.1.6 $f : M \rightarrow \mathbb{R}^{m+k}$ 1-transnormal bir embedding ise M^m , $\mathbb{R}^m$ ye homeomorftir.

İspat Bir $p \in M$ için $x = f(p)$ alınırsa L_x uzaklık fonksiyonu dejenere olmayan bir fonksiyondur ve p dejenere olmayan minimum noktasıdır. 1-transnormallikten dolayı p tek kritik noktadır. Bu durumda M^m bir m -boyutlu açık daireye homeomorftir ve dolayısıyla $\mathbb{R}^m$ ye homeomorftir.

Teorem 4.1.7: $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m+k}$, r -transnormal bir embedding ise $r = 1$ dir.

İspat f , r -transnormal embedding ise $\mathbb{R}^m$, $W = \pi(\mathbb{R}^m)$ nin r -katlı, yani sonlu katlı bir örtü uzayıdır. Buradan $r = 1$ olmalıdır.

Eğer karşıt boyut $k = 1$ ise aşağıdaki sonuç geçerlidir.

Teorem 4.1.8 $f : M^m \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$, r -transnormal bir embedding ise $r = 1$ veya $r = 2$ dir.

İspat f , r -transnormal embedding ve $r \geq 3$ olduğunu kabul edelim. Bir $p_1 \in M$ için $x = f(p_1)$ alınırsa L_x uzaklık fonksiyonu dejenere olmayan bir fonksiyondur ve p_1 dejenere olmayan minimum noktadır. r -transnormallikten dolayı L_x in kritik noktalarının sayısı r dir

ve bunlar $\{p_1, p_2, p_3, \dots, p_r\}$ olsun. Buradan $\zeta(p_1) = \{f(p_1), f(p_2), f(p_3), \dots, f(p_r)\}$ dir. $\forall 1 \leq i \leq r$ için $f(p_i)$ ler $v_{p_1}(f)$ doğrusu üzerinde olduğundan $f(p_1)$ ile $f(p_r)$ nin birbirine en uzak olduğunu kabul edebiliriz.

Şimdi, Robertson (1967) ve Wegner (1970) de olduğu gibi $p_1, p_r \in M^m$ için $\gamma(0) = p_1$ ve $\gamma(1) = p_r$ olacak şekilde parçalı türevlenebilir bir $\gamma: [0,1] \rightarrow M^m$ eğrisi vardır. $\pi \circ \gamma: [0,1] \rightarrow W$ eğrisi $v_{p_1}(f) \in W$ da kapalı bir eğridir. O halde $p_3 \in M^m$ için bir tek $\gamma_{p_3}: [0,1] \rightarrow M^m$ parçalı türevlenebilir eğrisi vardır öyleki $\gamma_{p_3}(0) = p_3$ ve $\forall t \in [0,1]$ için $\pi \circ \gamma_{p_3}(t) = \pi \circ \gamma(t)$ sağlanır. $\gamma_{p_3}(1) = q$ ise $\pi(q) = \pi \circ \gamma_{p_3}(1) = \pi \circ \gamma(1) = \pi(p_r)$ olacağından $q \in \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_r\}$ dir. O halde $\|f(p_1) - f(p_r)\| = \|f(p_3) - f(q)\|$ olur ki bu bir çelişkidir. O halde $r = 1$ veya $r = 2$ olmak zorundadır.

Verilen iki transnormal embeddingin kartezyen çarpımını oluşturarak yeni transnormal embeddingler elde edebiliriz.

Teorem 4.1.9 $f: M^{m_1} \rightarrow \mathbb{R}^{m_1+k_1}$ ve $g: N^{m_2} \rightarrow \mathbb{R}^{m_2+k_2}$, sırasıyla r -transnormal ve s -transnormal iki embedding olsun. Bu durumda

$$f \times g: M^{m_1} \times N^{m_2} \rightarrow \mathbb{R}^{m_1+k_1} \times \mathbb{R}^{m_2+k_2} \equiv \mathbb{R}^{m_1+k_1+m_2+k_2}, \quad (f \times g)(p, q) = (f(p), g(q)),$$

dönüşümü de bir embeddingdir ve (rs) -transnormaldır.

İspat $f \times g$ dönüşümünün bir embedding olduğunu ve transnormal olduğunu göstermek kolaydır. Bu embeddingin rs -transnormal olduğunu gösterelim.

Bir $(p_1, q_1) \in M^{m_1} \times N^{m_2}$ için $(x, y) = (f(p_1), g(q_1))$ alınırsa $L_{(x,y)}$ dejenere olmayan uzaklık fonksiyonunu düşünelim. Buradan $L_{(x,y)}(p, q) = L_x(p) + L_y(q)$ olduğu kolayca görülür. Ayrıca (p, q) , $L_{(x,y)}$ bir kritik noktasıdır ancak ve ancak p , L_x in ve q , L_y nin bir kritik noktasıdır. r -transnormallikten dolayı L_x in kritik noktalarının sayısı r dir ve bunlar

$\{p_1, p_2, p_3, \dots, p_r\}$ ve s -transnormallikten dolayı L_y in kritik noktalarının sayısı s dir ve bunlar $\{q_1, q_2, q_3, \dots, q_s\}$ olsunlar. O halde $1 \leq i \leq r$ ve $1 \leq j \leq s$ için $L_{(x,y)}$ nin tüm kritik noktaları (p_i, q_j) tipindeki noktalardır ve bunların sayısı rs olacaktır. Böylece $f \times g$ embedingi (rs) -transnormaldir.

Bu teoremin bir sonucu olarak Örnek 3.1.8 de verilen Tor yüzeyinin $\mathbb{R}^4$ e embedinginin 4 -transnormal olacağı çıkar.

4.2 KOMPAKTLIK VE TRANSNORMALLİK

Teorem 4.1.8 in bir sonucu olarak kompakt manifoldlar için aşağıdaki sonucu yazabiliriz.

Sonuç 4.2.1: $f : M^m \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$, 2-transnormal bir embeding ve M kompakt ise $f(M)$ sabit genişliktir.

Teorem 4.2.1 $f : M^m \rightarrow \mathbb{R}^{m+k}$, 2-transnormal bir embeding ve M^m kompakt ise M^m , $\mathbb{S}^m$ ye homeomorftir.

İspat Bir $p \in M$ için $x = f(p)$ alınırsa L_x uzaklık fonksiyonu bir Morse fonksiyondur. 2-transnormallikten dolayı L_x in kritik noktalarının sayısı 2 dir ve p minimum noktadır, diğer kritik nokta $q \in M$ ise maksimum nokta olacaktır. Bu durumda Reeb teoremine göre M^m , $\mathbb{S}^m$ ye homeomorftir. (Reeb teoremi; kompakt bir manifold üzerinde iki kritik noktası olan bir Morse fonksiyonu varsa bu manifoldun aynı boyutlu küre ile homeomorfik olduğunu ifade eder, Milnor(1963)).

Daha genel olarak, M nin kompakt olmadığı durumda aşağıdaki Teorem 4.2.2 Robertson (1964) de ispatlanmıştır ve 2-transnormal embedingi bulunabilecek tüm manifoldların bir sınıflandırmasını vermektedir. Bu teoremin ispatında da yine uzaklık fonksiyonun diğer bazı özelliklerinde yararlanılmaktadır.

Teorem 4.2.2 $f : M^m \rightarrow \mathbb{R}^{m+k}$ 2 -transnormal bir embedding olsun. Bu durumda $M^m \cong V_1 \times V_2$ şeklinde bir kartezyen çarpım manifolduna difeomorfiktir ve burada V_1 , S^j ye ve V_2 de $\mathbb{R}^{m-j}$ ye ($0 < j \leq m$) homeomorfiktirler.

Teorem 4.2.1 ve Teorem 4.2.2 sonlu transnormal hiperyüzeyleri (yani karşıt boyut $k = 1$ olma durumunu) sınıflandırır. Özel olarak, küre, silindir ve düzlem $\mathbb{R}^3$ e sonlu transnormal olarak embeddingi yapılabilen yüzeylerdir. Ayrıca $\mathbb{R}^2$ de transnormal kompakt eğrilerin sınıfı sabit genişlikli (constant width) düzgün eğriler sınıfıyla çakışır.

Teorem 4.2.3 $f : M^m \rightarrow \mathbb{R}^{m+k}$ r -transnormal bir embedding ve M kompakt olsun. Bu durumda r çifttir.

İspat r -transnormallikten dolayı herhangi bir $p \in M$ için $v_p(f)$ normal düzlemi $f(M)$ yi tam olarak r tane noktada kesmektedir. M kompakt olduğundan M yi hiç kesmeyen $v_p(f)$ ile aynı boyutlu bir düzlem vardır. Böyle bir düzlemin 2 moduna göre M ile kesişme sayısı 0 dır. Aynı boyutlu iki düzlem biri diğeri üzerine götürülebileceğinden buradan $v_p(f)$ normal düzleminin M ile kesişme sayısı 2 moduna göre 0 olur. Bu ise r nin çift olacağını gösterir.

Teorem 4.2.4 $f : M^m \rightarrow \mathbb{R}^{m+k}$ r -transnormal bir embedding olsun. Bu durumda manifoldun Euler sayısı $\chi(M^m) = 0$ veya $\chi(M^m) = r$ dir.

İspat $p_0 \in M$ ve $x = f(p_0)$ olsun. $L_x : M \rightarrow \mathbb{R}$, $L_x(p) = \|x - f(p)\|^2$ olsun. Burada L_x , C^∞ sınıfından ve dejenere olmayan bir fonksiyondur, yani L_x bir Morse fonksiyonudur.

C_i , L_x in i indeksli kritik noktalarının sayısı olsun.

Bu durumda, r -transnormallikten dolayı, $\sum_{i=0}^m C_i = r$ dir . Ayrıca manifoldun Euler sayısının

$$\chi(M) = \sum_{i=0}^m (-1)^i C_i \text{ olduğu ve bu sayının verilen Morse fonksiyonundan bağımsız olduğu}$$

bilinmektedir, Milnor (1963).

$\pi : M \rightarrow G_{k,m+k}(\mathbb{R})$, $\pi(p) = v_p(f)$ dönüşümü Teorem 4.1.3 den dolayı M den $\pi(M) = W$ ye r -katlı bir örtü dönüşümü olduğundan $\chi(M) = r\chi(W)$ olur. Açıkça $C_0 > 0$ ve $C_m > 0$ dir. O halde $-r < \chi(M) \leq r$ ve $-1 < \chi(W) \leq 1$ elde edilir. Bu yüzden $\chi(W) = 0$ veya $\chi(W) = 1$ dir. Buradan $\chi(M) = 0$ veya $\chi(M) = r$ elde edilir ve ispat biter.

Sonuç 4.2.2 Yukarıdaki ispatta, $\sum_{i=0}^m C_i = r$ ve $\chi(M) = r$ ise bu $0 < i < m$ ve i tek sayı için $C_i = 0$ olduğunu gösterir. Bu ise $0 < i < m$ ve i tek sayısı için $C_i = 0$ olduğunu gösterir.

Teorem 4.2.4 ün sonuçlarını Robertson (1967) den uyarlayarak aşağıdaki gibi özetleyebiliriz:

- 1) Transnormal embedingi yapılabilen herhangi bir kompakt manifoldun Euler sayısı sıfır veya pozitif bir çift sayıdır.
- 2) $\mathbb{R}^{2+k}$ ya transnormal embedingi yapılabilen iki boyutlu bir kompakt yüzey küre, tor ya da Klein şişesi olmak zorundadır. (Projektif düzlemin Euler sayısı 1 dir)
- 3) S^{2m} çift boyutlu küresinin $\mathbb{R}^{2m+k}$ ya verilen herhangi bir transnormal embedingi 2 -transnormaldir. Çünkü S^{2m} nin Euler sayısı 2 dir.
- 4) Sonuç 4.2.2 den dolayı, Euler sayısı sıfırdan büyük olan herhangi bir transnormal manifold üzerindeki herhangi bir uzaklık fonksiyonunun tek indisli kritik noktası yoktur.
- 5) $\mathbb{R}P^{2m}$ çift boyutlu Projektif uzaylarının $\mathbb{R}^{2m+k}$ ya transnormal embedingi yoktur. Çünkü bu uzayların Euler sayısı -1 dir.

Sonuç olarak transnormallik geometrik bir özellik olmakla birlikte manifoldun topolojisi üzerine güçlü kısıtlamalar getirmektedir. Buradan da transnormalliğin tanımlayıcı özelliğinin güçlü bir geometrik özellik olduğunu syeleyebiliriz.

KAYNAKLAR

- Bülbül, A.** (2004) *Genel Topoloji* Hacettepe Üniversitesi, Ankara, p. 312
- Gauld, D.B.** (2006) *Differential Topology*, Dover Publications, Inc, Mineola New York p. 241.
- Madsen, I. ve Tornehave, J.** (1997) *From Calculus to Cohomology*, Cambridge Uni. Press, United Kingdom, p. 286
- Massey, S.W.** (1997) *A Basic Course in Algebraic Topology*, Springer Verlag, New York Inc., p. 428.
- Mellish, A.P.** (1931) *Notes on Differential Geometry*, Ann of Math.,32:181-190
- Milnor, J.** (1963) *Morse Theory* , Princeton University Press, New Jersey, p. 160.
- Munkres, J.R** (1966) *Elementary Differential Topology* , Princeton University Press, New Jersey, p. 112.
- Pressley, A** (2000) *Elementary Differential Geometry*, Springer Verlag, London, p.332
- Robertson, S.A.**(1964) Generalised constant width for manifolds, *Michigan Math. J.*11:97-105
- Robertson, S.A.**(1967) On transnormal manifolds, *Topology*. 6:117-123
- Robertson, S.A.**(1984) Smooth Curves of Constant Width and Transnormality, *Bull. London Math. Soc.* 16: 275-277
- Wegner, B.**(1970) Krümmungseigenschaften Transnormaler Mannigfaltigkeiten, *J. Differential Geom.* 3:375-390

ÖZGEÇMİŞ

Meltem GÖLGELİ MATUR 1978 yılında Ankara’da doğdu; ilk ve orta öğrenimini aynı şehirde tamamladı; Ankara Anadolu Lisesi'nden mezun olduktan sonra 1997-2001 yılları arasında Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü’nde lisans eğitimini tamamladı. 2002 yılında Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde yüksek lisans eğitimine başladı; 2004 yılında Z.K.Ü Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde Topoloji Anabilim Dalı Araştırma Görevlisi olarak göreve atanmasının ardından ZKÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı yüksek lisans programında eğitime yeniden başladı. 2001-2003 yılları arasında özel eğitim kurumlarında, 2003-2004 eğitim ve öğretim yılında MEB Kdz.Ereğli Ticaret Meslek Lisesi’nde matematik öğretmeni olarak çalıştı. Halen Z.K.Ü Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü’nde Topoloji Anabilimdalı Araştırma görevlisi olarak çalışmaktadır.

ADRES BİLGİLERİ

Adres: Z.K.Ü Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
İncivez/ZONGULDAK

E-posta: megolgeli@gmx.com.tr