

**T.C.
MUĞLA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

STEENROD CEBİRİNDE (MOD-p) TARAK YAPISI VE UYGULAMALARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

TARKAN ÖNER

**HAZİRAN 2007
MUĞLA**

**T.C.
MUĞLA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

STEENROD CEBİRİNDE (MOD-p) TARAK YAPISI VE UYGULAMALARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

TARKAN ÖNER

MUĞLA 2007

ONAY SAYFASI

**T.C.
MUĞLA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

BEKİR TANAY danışmanlığında TARKAN ÖNER tarafından hazırlanan STEENROD CEBİRİNDE (MOD-p) TARAK YAPISI VE UYGULAMALARI adlı çalışma, 27/08/2007 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans tezi olarak oybirliği/oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Başkan : Prof.Dr.Zekeriya GÜNEY

İmza :

Üye : Yrd.Doç.Dr.Bekir TANAY

İmza :

Üye : Yrd.Doç.Dr.Sibel PAŞALI ATMACA

İmza :

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın ortaya çıkmasını sağlayan gerek ders aşamasında, gerekse tez aşamasında bilgisini, desteğini, ilgisini hiç esirgemeyen, anlayışı ve çalışma azmiyle hepimize örnek olan Yrd. Doç. Dr. Bekir TANAY'a, yardımlarından dolayı Osman RAŞİT IŞIK'a, Matematik bölümünün tüm değerli hocalarına ve araştırma görevlisi arkadaşlarıma, hayatımın her döneminde benden desteklerini, sevgilerini ve ilgilerini hiç esirgemeyen anne babama ve sevgili eşim Nursemin KESKİN ÖNER'e teşekkür ederim.

Tarkan Öner

Muğla 2007

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ	i
İÇİNDEKİLER	ii
ÖZET	iii
ABSTRACT	iv
SEMBOLLER ve KISALTMALAR DİZİNİ	v
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK ÖZETLERİ	2
2.1. Kategori ve Funtor Kavramları	2
2.2. Graded Cebir	4
3. MATERYAL ve YÖNTEM	6
3.1. Singüler Homoloji	6
3.2. Singüler Kohomoloji	20
3.3. Cup Çarpım	26
4. ARAŞTIRMA BULGULARI	27
4.1. Steenrod Cebiri	27
4.2. Tarak Yapıları	32
5. SONUÇLAR VE TARTIŞMA	38
5.1. Milnor Çarpımının Tarak Yapıları ile İlişkisi	38
KAYNAKLAR	48
ÖZGEÇMİŞ	50

STEENROD CEBİRİNDE (MOD-p) TARAK YAPISI VE UYGULAMALARI**(Yüksek Lisans Tezi)****TARKAN ÖNER****MUĞLA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ****2007****ÖZET**

Steenrod Cebirinde verilen bir $P(T)$ Milnor elemanının diğer $P(R)$ ve $P(S)$ gibi iki (veya daha fazla) Milnor elemanlarının çarpımında bulunup bulunmadığıyla ilgili Demetlenmiş ve Parçalanmış Taraklar metodu, J.Silverman [12] tarafından mod 2 Steenrod Cebirinde verilmiş ve daha sonra Karaca-Tanay [16] tarafından mod p Steenrod Cebirine genişletilmiştir. Bu çalışmada, $t_i = 0$ veya $t_i = p^{n_i}$ olmak üzere $T = (t_1, t_2, \dots, t_s)$ dizisi için $P(T)$ tipindeki Milnor elemanının $P(R).P(S)$ çarpımının bir terimi olması için gerek ve yeter şartın $a(T)$, demetlenmiş tarağı üzerinde 1. kısmı $C(S)$ ve 2. kısmı da $C_b(R)$ olan parçalanışların sayısı olmak üzere $a(T) \neq 0 \pmod{p}$ olduğu verilmiştir.

Anahtar Kelimeler :Steenrod cebiri,Milnor çarpım,Parçalanmış ve demetlenmiş tarak
Sayfa adedi :50
Tez yöneticisi :Yrd.Doç.Dr.Bekir TANAY

**THE STRUCTURE OF THE COMBS ON THE STEENROD ALGEBRA
(MOD-p) AND APPLICATIONS**

(M. Sc.Thesis)

**MUĞLA UNIVERSITY
INSTITUTE of SCIENCE and TECHNOLOGY**

2007

ABSTRACT

The method, named bundled and partitioned comb, introduced by Judith H.Silverman [12] in mod 2 Steenrod Algebra then generalized to mod p Steenrod Algebra by Karaca-Tanay [16]. This method gives whether a given Milnor element $P(T)$ is a summand in product of the Milnor elements $P(R)$ and $P(S)$. Let $a(T)$ denote the number of partitions of canonical bundled comb $C_b(T)$ whose first parts are $C(S)$ and whose second parts are $C_b(R)$. In this study, it is given that The Milnor element in the form $P(t_1, t_2, \dots, t_s)$ which $t_i = 0$ or $t_i = p^{n_i}$ is a summand in the product if and only if $a(T) \neq 0 \pmod{p}$.

Key Words :Steenrod algebra,Milnor product,Bundled and partitioned comb
Page number :50
Adviser :Yrd.Doç.Dr.Bekir TANAY

SEMBOLLER ve KISALTMALAR DİZİNİ

\mathbb{Z}	Tam sayılar kümesi
\mathbb{Z}_p	$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$
\mathbb{R}	Reel sayılar kümesi
\oplus	Direkt toplam
σ_p	Standart p -simpleks
∂_i	i . yüz operatörü
∂	Sınır homomorfizması
$S_n(X)$	X uzayının n -boyutlu singüler zincir grubu
$Z_n(X)$	n -devirlerin grubu
$B_n(X)$	n -sınırların grubu
$H_n(X)$	X uzayının singüler n .homoloji grubu
$H_n(X, A)$	X uzayının A alt uzayına göre relative singüler n .homoloji grubu
f_*	Homoloji için f nin ürettiği homomorfizma
$A \otimes B$	A ile B grubunun tensör çarpımı
$f \otimes g$	f ile g fonksiyonlarının tensör çarpımı
$Tor(A, B)$	A ile B grubunun torsion çarpımı
$H_n(X; G)$	X uzayının G katsayılı singüler n .homoloji grubu
$Hom(A, G)$	A 'dan B 'ye homomorfizmaların kümesi
δ	Kosınır homomorfizması
$S^n(X)$	X uzayının n -boyutlu singüler kozincir grubu
$Z^n(X)$	n -kodevirlerin grubu
$B^n(X)$	n -kosınırların grubu
$H^n(X; G)$	X uzayının G katsayılı singüler n .kohomoloji grubu
$H^n(X, A; G)$	(X, A) ikilisinin G katsayılı singüler n .kohomoloji grubu
f^*	Kohomoloji için f nin ürettiği homomorfizma
$Ext(A, B)$	A ile B grubunun exterior çarpımı
$a \cup b$	a ile b 'nin cup çarpımı
Sq^i	$H^q(X; \mathbb{Z}_2)$ 'den $H^{q+1}(X; \mathbb{Z}_2)$ 'ye giden homomorfizma
P^i	$H^q(X; \mathbb{Z}_p)$ 'den $H^{q+2i(p-1)}(X; \mathbb{Z}_p)$ 'ye giden homomorfizma
$\deg(P(R))$	$P(R)$ Milnor elemanın derecesi

SEMBOLLER ve KISALTMALAR DİZİNİ

$ex(P(R))$	$P(R)$ Milnor elemanın excess i
$l(P(R))$	$P(R)$ Milnor elemanın uzunluğu
$C(T)$	T dizisinin tarağı
$W(C(T))$	$C(T)$ tarağının ağırlığı
$ex(C(T))$	$C(T)$ tarağının excess i
$C_b(T)$	T dizisinin demetlenmiş tarağı
$PC_b(T)$	T dizisinin parçalanmış tarak demeti

1.GİRİŞ

Cebirsel topoloji, topolojik uzaylardaki problemlerin cebirsel yapılara çeşitli fonktörlerle aktararak çözülmesini sağlayan bir çalışma alanıdır. Steenrod cebiri, bu fonktörlerden kohomoloji fonktörü üzerinden tanımlanan özel kohomoloji operasyonları tarafından üretilir. Bu cebirin dual cebirine cebir yapısı veren çarpım, Milnor çarpımı olarak adlandırılır. Bu çarpımın hesaplanması karmaşıktır. Biz bu çalışmada karmaşık olan bu çarpımın daha kolay hesaplanabilmesi için J.Silverman [12] tarafından mod 2 Steenrod Cebirinde verilmiş ve daha sonra Karaca-Tanay [16] tarafından mod p Steenrod Cebirine genişletilmiş Demetlenmiş ve Parçalanmış Taraklar metodunu inceleyip bazı özel tipteki elemanlar için çarpımın sonucunu veren teoremler ifade ettik.

Cebirsel Topolojide önemli yeri olan Kategori , Funtör, Graded Cebir, Singüler Homoloji, Singüler Kohomoloji ve Cup Çarpım konularına bu çalışmada çeşitli bölümlerde yer vererek bu konuda çalışacaklar için özet bir kaynak niteliği taşıması düşünülmüştür.

2.KAYNAK ÖZETLERİ

2.1.Kategori ve Funtor Kavramları

Tanım 2.1.1 : Bir K kategorisi

- i) $Ob(K)$ nesnelere sınıfından,
- ii) Her sıralı (X, Y) nesnelere çifti için $Hom_K(X, Y)$ ile gösterilen morfizmalar kümesinden,
- iii) Her sıralı (X, Y, Z) nesnelere üçlüsü için, $f : X \rightarrow Y$ ve $g : Y \rightarrow Z$ morfizmalar olmak üzere $g \circ f : X \rightarrow Z$ ile tanımlı aşağıdaki aksiyomları sağlayan fonksiyonlardan oluşur.
 - a) Her X, Y, Z, W nesnelere için $f \in Hom_K(X, Y), g \in Hom_K(Y, Z)$ ve $h \in Hom_K(Z, W)$ ise $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ birleşme aksiyomu sağlanır.
 - b) Her Y nesnesi için $f \in Hom_K(X, Y), g \in Hom_K(Y, Z)$ ise $1_Y \circ f = f$ ve $g \circ 1_Y = g$ olacak şekilde $1_Y \in Hom_K(Y, Y)$ birim morfizması vardır.

Tanım 2.1.2 : K kategorisi verilsin. $f \in Hom_K(X, Y), g \in Hom_K(Y, X)$ morfizimleri $f \circ g = 1_Y$ şartını sağlıyor ise f 'ye g 'nin sol tersi, g 'ye de f 'nin sağ tersi denir. Eğer g, f 'nin hem sağ hem de sol tersi ise g 'ye f 'nin iki yanlı tersi denir.

Teorem 2.1.3 : Eğer $f : X \rightarrow Y$ 'nin hem sağ hem de sol tersi varsa bunlar eşittir.

Tanım 2.1.4 : $f : X \rightarrow Y$ iki yanlı tersi olan bir morfizim ise f 'ye denklik denir ve bu durum $f : X \approx Y$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.1.5 : K 'dan L 'ye bir T kovaryant (veya kontravaryant) funktoru, K 'nın her X nesnesini L 'nin bir $T(X)$ nesnesine, K 'nın her $f : X \rightarrow Y$ morfizmasını L 'nin bir $T(f) : T(X) \rightarrow T(Y)$ (veya $T(f) : T(Y) \rightarrow T(X)$) morfizmasına eşleyen bir fonksiyondur öyleki ;

$$i) T(1_X) = 1_{T(X)}$$

$$ii) T(g \circ f) = T(g) \circ T(f) \text{ (veya } T(g \circ f) = T(f) \circ T(g) \text{)}$$

Teorem 2.1.6 : $T : K_1 \rightarrow K_2$ bir funktor olsun. T funktoru K_1 kategorisindeki denklikleri K_2 kategorisindeki denkliklere götürür.

Tanım 2.1.7 : K_1, K_2 kategoriler, $T_1, T_2 : K_1 \rightarrow K_2$ ikisinde kovaryant veya kontravaryant olan funktorlar olsun. $\varphi : T_1 \rightarrow T_2$ fonksiyonu K_1 kategorisinin bir nesnesini K_2 kategorisinin bir morfizması ile eşliyor ve $\forall f \in Hom_{K_1}(X, Y)$ için T_1, T_2

kovaryant iken

$$\begin{array}{ccc} T_1(X) & \xrightarrow{T_1(\varphi)} & T_1(Y) \\ \varphi(X) \downarrow & & \varphi(Y) \downarrow \\ T_2(X) & \xrightarrow{T_2(\varphi)} & T_2(Y) \end{array}$$

T_1, T_2 kontravaryan iken

$$\begin{array}{ccc} T_1(X) & \xleftarrow{T_1(\varphi)} & T_1(Y) \\ \varphi(X) \downarrow & & \varphi(Y) \downarrow \\ T_2(X) & \xleftarrow{T_2(\varphi)} & T_2(Y) \end{array}$$

diyagramlarını değişmeli kılıyorsa φ 'ye doğal transformasyon denir.

2.2.Graded Cebir

Tanım 2.2.1 : Δ değişmeli monoid ve G değişmeli grup olsun. $\lambda \in \Delta$ için $G_\lambda \leq G$ ve $G = \bigoplus_{\lambda \in \Delta} G_\lambda$ ise $(G_\lambda)_{\lambda \in \Delta}$ ailesine G grubunun Δ tipinde bir graduationu denir. $(G_\lambda)_{\lambda \in \Delta}$ graduationu ile birlikte verilen G grubuna Δ tipinde graded (değişmeli) grup denir.

Burada Δ , G grubunun derece kümesidir. $x \in G$ için $x \in G_\lambda$ ise x 'e λ derecesinde homogeneous denir ve $\deg(x) = \lambda$ şeklinde gösterilir. 0_G her dereceden homogeneousdir. $x \neq 0_G$ ve homogeneous ise x tek bir G_λ 'nın elemanıdır. $y \in G$ ise $y = \sum_{\lambda \in \Delta} y_\lambda$ şeklinde tek bir gösterim vardır.

Tanım 2.2.2 : Bir A halkası ve A halkasının Δ tipinde bir $(A_\lambda)_{\lambda \in \Delta}$ graduationu verilsin. Bu graduation aşağıdaki şartları sağlarsa A 'daki halka yapısı ile uyumludur denir.

$$\forall \lambda, \mu \in \Delta \text{ için } A_\lambda A_\mu \subset A_{\lambda+\mu}$$

$(A_\lambda)_{\lambda \in \Delta}$ graduation ile verilen A halkasına, Δ tipinde graded halka denir.

Tanım 2.2.3 : A , graduationu $(A_\lambda)_{\lambda \in \Delta}$ olan Δ tipinde bir graded halka, M bir A modül ve $(M_\lambda)_{\lambda \in \Delta}$, M modülü üzerinde Δ tipinde bir graduation olsun. Bu graduation aşağıdaki şartları sağlar ise M üzerindeki A modül yapısıyla uyumludur denir.

$$\forall \lambda, \mu \in \Delta \text{ için } A_\lambda M_\mu \subset M_{\lambda+\mu}$$

$(M_\lambda)_{\lambda \in \Delta}$ graduation ile verilen M modülüne, A graded halkası üzerinde Δ tipinde bir graded modül denir.

Tanım 2.2.4 : A ve A' , graduationları $(A_\lambda)_{\lambda \in \Delta}$ ve $(A'_\lambda)_{\lambda \in \Delta}$ olan Δ tipinde graded halkalar, $h : A \rightarrow A'$ halka homomorfizması ve $\delta \in \Delta$ olsun. Eğer $\forall \lambda \in \Delta$ için

$$h(A_\lambda) \subset A'_{\lambda+\delta}$$

şartı sağlanır ise h homomorfizmasına δ derecesinden graded halka homomorfizması denir ve $\deg(h) = \delta$ şeklinde gösterilir.

Benzer tanım graded grup homomorfizması içinde yapılabilir.

Tanım 2.2.5 : A , graduationu $(A_\lambda)_{\lambda \in \Delta}$ olan Δ tipinde bir graded halka, E bir A cebir ve $(E_\lambda)_{\lambda \in \Delta}$, E cebiri üzerinde Δ tipinde bir graduation olsun. Bu graduation aşağıdaki şartları sağlar ise E üzerindeki A cebir yapısıyla uyumludur denir.

$$\forall \lambda, \mu \in \Delta \text{ için } A_\lambda E_\mu \subset E_{\lambda+\mu}$$

$$\forall \lambda, \mu \in \Delta \text{ için } E_\lambda E_\mu \subset E_{\lambda+\mu}$$

$(E_\lambda)_{\lambda \in \Delta}$ graduationu ile verilen E cebirine, A graded halkası üzerinde Δ tipinde bir graded cebir denir.

Tanım 2.2.6 : A , graduationu $(A_\lambda)_{\lambda \in \Delta}$ olan Δ tipinde bir graded halka, E ve E' , graduationları $(E_\lambda)_{\lambda \in \Delta}$ ve $(E'_\lambda)_{\lambda \in \Delta}$ olan Δ tipinde graded A cebirler, $h : E \rightarrow E'$ cebir homomorfizması ve $\delta \in \Delta$ olsun. Eğer $\forall \lambda \in \Delta$ için

$$h(E_\lambda) \subset E'_{\lambda+\delta}$$

şartı sağlanır ise h homomorfizmasına δ derecesinden graded cebir homomorfizması denir ve $der(h) = \delta$ şeklinde gösterilir.

Not : Graduationların tipleri belirtilmediği takdirde \mathbb{Z} olarak alınacaktırlar.

3.MATERYAL ve YÖNTEM

3.1.Singüler Homoloji

Tanım 3.1.1 : $x, y \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere x ve y noktalarını birleştiren doğru parçası $\{(1-t)x + yt \mid 0 \leq t \leq 1\}$ şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.1.2 : $C \subset \mathbb{R}^n$ kümesi verilsin. $\forall x, y \in C$ için x ve y noktalarını birleştiren doğru parçası C 'de kalıyorsa C 'ye konveks küme denir.

Tanım 3.1.3 : $A \subset \mathbb{R}^n$ kümesi verilsin. A kümesini kapsayan konveks kümelerin kesişim kümesine A 'nın konveks hull 'u denir.

Tanım 3.1.4 : \mathbb{R}^n 'nin $p+1$ noktası $\{x_0, x_1, \dots, x_p\}$ olsun. Eğer $\{x_1 - x_0, x_2 - x_0, \dots, x_p - x_0\}$ vektörleri lineer bağımsız ise $\{x_0, x_1, \dots, x_p\}$ kümesinin konveks hull'una bir p -simpleks denir.

Özellik 3.1.5 : $\{x_0, x_1, \dots, x_p\} \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesi verilsin. Aşağıdaki ifadeler denktir.

a) $x_1 - x_0, x_2 - x_0, \dots, x_p - x_0$ lineer bağımsız

b) $\sum s_i x_i = \sum t_i x_i$ ve $\sum s_i = \sum t_i$ ise $i = 0, \dots, p$ için $s_i = t_i$ dir.

Özellik 3.1.6 : s p -simpleksi $\{x_0, x_1, \dots, x_p\}$ kümesinin konveks hull'u ise s 'nin her x noktası , her i için $t_i \geq 0$, $\sum t_i = 1$ olmak üzere $x = \sum t_i x_i$ şeklinde tek türlü gösterime sahiptir.

s 'nin köşeleri özel bir sıra ile verilirse s 'ye sıralanmış simpleks denir.

s köşeleri x_0, x_1, \dots, x_p olan sıralanmış p -simpleks olsun. σ_p kümesini aşağıdaki şekilde tanımlayalım;

$$\sigma_p = \{(t_0, t_1, \dots, t_p) \in \mathbb{R}^{p+1} \mid \sum t_i = 1, t_i \geq 0, i \in \{0, \dots, p\}\}$$

$$f : \sigma_p \rightarrow S$$

$$(t_0, t_1, \dots, t_p) \mapsto \sum t_i x_i$$

fonksiyonu bir homeomorfizmadır. Böylece her sıralanmış p -simpleksi σ_p 'nin homeomorfik görüntüsüdür.

Tanım 3.1.7 : σ_p , köşeleri $x'_0 = (1, 0, \dots, 0), \dots, x'_p = (0, \dots, 0, 1)$ olan bir sıralanmış

p -simplekstir. σ_p 'ye standart p -simpleks denir.

Tanım 3.1.8 : X topolojik uzayı verilsin.

$$\phi : \sigma_p \rightarrow X$$

sürekli fonksiyonuna singüler p -simpleks denir.

Not : Singüler 0-simpleksler X uzayının noktalarıyla, singüler 1-simpleksler X uzayındaki yollarla eşleştirilebilir.

Tanım 3.1.9 : ϕ bir singüler p -simpleks ve $i \in \{0, 1, \dots, p\}$ ise $\partial_i \phi$ singüler $(p - 1)$ -simpleksi

$$\partial_i \phi : \sigma_{p-1} \rightarrow X$$

$$(t_0, \dots, t_p) \mapsto \phi(t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{p-1})$$

şeklinde tanımlanır. $\partial_i \phi$ 'ye ϕ 'nini i . yüzü denir.

$f : X \rightarrow Y$ sürekli bir fonksiyon ve ϕ X 'de singüler p -simpleks olsun. Bu takdirde Y 'de bir $f_#(\phi)$ singüler p -simpleksi

$$f_#(\phi) = f \circ \phi$$

şeklinde tanımlanır. Benzer şekilde $g : Y \rightarrow W$, $1_X : X \rightarrow X$ sürekli fonksiyonları için

$$(g \circ f)_#(\phi) = (g_# \circ f_#)(\phi) \text{ ve } 1_#(\phi) = \phi$$

eşitlikleri vardır.

Tanım 3.1.10 : X topolojik uzayı verilsin. X uzayındaki tüm singüler n -simplekslerin üretmiş olduğu free abelyen grubu $S_n(X)$ ile gösterelim. $S_n(X)$ 'in bir elemanına n -zincir denir ve bir n -zincir

$$\sum_{\phi} n_{\phi} \cdot \phi$$

formundadır. Burada $n_{\phi} \in \mathbb{Z}^+$ ve sonlu sayıda ϕ hariç sıfırdır.

∂_i, i . yüz operatörü singüler n -simplekslerden singüler $(n - 1)$ -simplekslere bir fonksiyon olduğu için tek bir

$$\partial_i : S_n(X) \rightarrow S_{n-1}(X)$$

$$\sum_{\phi} n_{\phi} \cdot \phi \mapsto \sum_{\phi} n_{\phi} \cdot \partial_i \phi$$

homomorfizması vardır. Bu homomorfizmalar yardımı ile sınır operatörü aşağıdaki şekilde tanımlanır ;

$$\partial : S_n(X) \rightarrow S_{n-1}(X)$$

$$\partial = \partial_0 - \partial_1 + \cdots + (-1)^n \partial_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i \partial_i$$

Özellik 3.1.11 : $\partial \circ \partial = 0$

Bu özelliğin geometrik anlamı, bir n -zincirin sınırı, sınırı olmayan bir $(n - 1)$ -zincirdir.

Tanım 3.1.12 : $c \in S_n(X)$ n -zinciri için $\partial(c) = 0$ ise c 'ye n -devir denir. $d \in S_n(X)$ n -zinciri için $\partial(e) = d$ olacak şekilde bir $e \in S_{n+1}(X)$ $(n + 1)$ -zinciri varsa d 'ye n -sınır denir.

∂ homomorfizma olduğundan n -devirlerden oluşan $\text{Ker} \partial$ kümesi $S_n(X)$ 'in alt grubudur ve $Z_n(X)$ ile gösterilir. Benzer şekilde n -sınırlardan oluşan $\text{Im} \partial$ kümesi $S_n(X)$ 'in alt grubudur ve $B_n(X)$ ile gösterilir.

Özellik 3.1.11 'den $B_n(X) \subset Z_n(X)$ elde edilir.

Tanım 3.1.13 :

$$H_n(X) = Z_n(X)/B_n(X)$$

bölüm grubuna X uzayının n . homoloji grubu denir.

Burada çalışılmak istenen objeler topolojik uzaydaki devirlerdir. Fakat devirlerin sayısının fazla olması nedeniyle bunları denklik sınıflarına ayırıyoruz öyleki $c_1, c_2 \in Z_n$ için

$$c_1 \sim c_2 \Leftrightarrow c_1 - c_2 = d \in B_n$$

Tanım 3.1.14 : C_n 'ler abel gruplar ve ∂_n 'ler homomorfizmalar olmak üzere eğer $\partial_{n+1} \circ \partial_n = 0$ ise

$$C : \cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots$$

dizisine zincir kompleks denir ve $\{C, \partial\}$ ile gösterilir.

$\{C, \partial\}$ ve $\{C', \partial'\}$ zincir kompleksleri verilsin. Eğer

$$\varphi : C \rightarrow C'$$

homomorfizması her n için

$$\partial' \circ \varphi_n = \varphi_{n-1} \circ \partial$$

şartını sağlarsa φ 'ye zincir dönüşümü denir.

Özellik 3.1.15 : φ zincir dönüşümü ise

$$i)\varphi(Z_*(C)) \subset Z_*(C')$$

$$ii)\varphi(B_*(C)) \subset B_*(C')$$

özellikleri sağlanır.

Böylece homoloji grupları arasında

$$\varphi_* : H_*(C) \rightarrow H_*(C')$$

$$z + B_*(C) \mapsto \varphi(z) + B_*(C')$$

homomorfizması elde edilir.

Tanım 3.1.16 : $S_*(X) = \{S_i(X)\}$ graded grubu, ∂ sınır operatörü altında bir zincir komplekstir ve buna X uzayının singüler zincir kompleksi denir. Bu zincir kompleksinin homolojisine X uzayının singüler homoloji grubu denir.

$f : X \rightarrow Y$ sürekli bir fonksiyon ve ϕ , X uzayında bir n -simpleks ise $f_{\#}(\phi) = f \circ \phi$, Y uzayında bir singüler simpleks idi. Bu durumda

$$f_{\#} : S_n(X) \rightarrow S_n(Y)$$

$$c = \sum_{\phi} n_{\phi} \cdot \phi \mapsto f(\sum_{\phi} n_{\phi} \cdot \phi) = \sum_{\phi} n_{\phi} \cdot f(\phi)$$

homomorfizması bir zincir dönüşümdür.

Böylece $f_{\#}$ zincir dönüşümü ile homoloji grupları arasında

$$f_* : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$$

$$z + B_*(X) \mapsto f_{\#}(z) + B_*(Y)$$

homomorfizması elde edilir.

$f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ ve $1_X : X \rightarrow X$ sürekli fonksiyonları için

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_* : H_n(X) \rightarrow H_n(Z)$$

$$(1_X)_* = 1_{S_n(X)} : H_n(X) \rightarrow H_n(X)$$

olur.

Özellik 3.1.17 : $X = \{x\}$ uzayı için

$$H_n(X) = \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

Özellik 3.1.18 : X yol bağlantılı uzay olsun. Bu takdirde $H_0(X) \simeq \mathbb{Z}$.

$\forall \alpha \in A$ için

$$C^\alpha : \dots \xrightarrow{\partial^\alpha} C_p^\alpha \xrightarrow{\partial^\alpha} C_{p-1}^\alpha \xrightarrow{\partial^\alpha} \dots$$

zincir kompleksleri verilsin. $\sum_{\alpha \in A} C^\alpha$ zincir kompleksi

$$\sum C^\alpha : \dots \xrightarrow{\partial} \sum_\alpha C_p^\alpha \xrightarrow{\partial} \sum_\alpha C_{p-1}^\alpha \xrightarrow{\partial} \dots$$

şeklinde tanımlanır öyleki

$$\partial(c_\alpha : \alpha \in A) = (\partial^\alpha c_\alpha : \alpha \in A) .$$

Teorem 3.1.19 : $H_k(\sum C^\alpha) \simeq \sum H_k(C^\alpha)$

Özellik 3.1.20 : X topolojik uzay ve $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ X 'in yol bağlantılı bileşenleri ise

$$H_k(X) \simeq \sum_\alpha H_k(X_\alpha)$$

Teorem 3.1.21 : $f : X \rightarrow Y \rightarrow$ homeomorfizma ise $\forall p$ için

$$f_* : H_p(X) \rightarrow H_p(Y)$$

izomorfizmadır.

Teorem 3.1.22 : $X \subset \mathbb{R}^n$ konveks ise $\forall p > 0$ için $H_p(X) = 0$.

$C = \{C, \partial\}$, $C' = \{C', \partial'\}$ zincir kompleksler ve $T : C \rightarrow C'$ derecesi bir olan zincir dönüşümü olması gerekmeyen bir graded grup homomorfizması olsun. Bu durumda

$$\partial' \circ T + T \circ \partial : C \rightarrow C'$$

derecesi sıfır olan 1 homomorfizmadır.

$$\begin{array}{ccccccc} C : & \dots & \xrightarrow{\partial} & C_{p+1} & \xrightarrow{\partial} & C_p & \xrightarrow{\partial} & C_{p-1} & \xrightarrow{\partial} & \dots \\ & & & \swarrow T & & \swarrow T & & \swarrow T & & \\ C' : & \dots & \xrightarrow{\partial'} & C'_{p+1} & \xrightarrow{\partial'} & C'_p & \xrightarrow{\partial'} & C'_{p-1} & \xrightarrow{\partial'} & \dots \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} C : & \dots & \xrightarrow{\partial} & C_{p+1} & \xrightarrow{\partial} & C_p & \xrightarrow{\partial} & C_{p-1} & \xrightarrow{\partial} & \dots \\ & & & \downarrow \partial' \circ T + T \circ \partial & & \downarrow \partial' \circ T + T \circ \partial & & \downarrow \partial' \circ T + T \circ \partial & & \\ C' : & \dots & \xrightarrow{\partial'} & C'_{p+1} & \xrightarrow{\partial'} & C'_p & \xrightarrow{\partial'} & C'_{p-1} & \xrightarrow{\partial'} & \dots \end{array}$$

Bu homomorfizma

$$\partial' \circ (\partial' \circ T + T \circ \partial) = \partial' \circ \partial' \circ T + \partial' \circ T \circ \partial = \partial' \circ T \circ \partial$$

$$= \partial' \circ T \circ \partial + T \circ \partial \circ \partial = (\partial' \circ T + T \circ \partial) \circ \partial$$

şartını sağladığından zincir dönüşümüdür ve homoloji grupları arasında bir homomorfizma üretir.

$$(\partial' \circ T + T \circ \partial)_* : H_p(C) \rightarrow H_p(C')$$

$$z + B_*(C) \mapsto (\partial' \circ T + T \circ \partial)(z) + B_*(C')$$

Burada

$$(\partial' \circ T + T \circ \partial)(z) = (\partial' \circ T)(z) + (T \circ \partial)(z) = (\partial' \circ T)(z) \in B_p(C')$$

olduğundan $(\partial' \circ T + T \circ \partial)_*$ bir sıfır homomorfizmasıdır.

Tanım 3.1.23 : $f, g : C \rightarrow C'$ zincir dönüşümler olsun. Eğer $T : C \rightarrow C'$ derecesi 1 olan ve $\partial' \circ T + T \circ \partial = f - g$ olacak şekilde bir T homomorfizması varsa f ve g zincir homotopidir denir.

Özellik 3.1.24 : $f, g : C \rightarrow C'$ zincir homotopik ise

$$f_*, g_* : H_n(C) \rightarrow H_n(C')$$

homomorfizmaları eşittir.

Teorem 3.1.25 : $f, f' : X \rightarrow Y$ homotopik dönüşümler ise

$$f_*, f'_* : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$$

homomorfizmaları birbirine eşittir.

Özellik 3.1.26 : $f : X \rightarrow Y$ bir homotopi denkliği ise $\forall n$ için

$$f_* : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$$

izomorfizmadır.

Sonuç 3.1.27 : $i : A \rightarrow X$, X uzayının bir A retractının içirme fonksiyonu ise

$$i_* : H_n(A) \rightarrow H_n(X)$$

bir direk toplam terimine monomorftur. Eğer A , X uzayının deformasyon retractı ise i_* bir izomorfizmadır.

Tanım 3.1.28 :

$$C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E$$

abel grupların ve homomorfizmaların üçlüsüne, $im(f) = Ker(g)$ ise D 'de tamdır denir.

Tanım 3.1.29 :

$$\cdots \rightarrow G_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} G_i \xrightarrow{f_i} G_{i-1} \rightarrow \cdots$$

abel grupların dizisinde her üçlü tam ise bu diziye tam dizi denir.

Tanım 3.1.30 :

$$0 \rightarrow C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \rightarrow 0$$

tam dizisine kısa tam dizi denir.

$C = \{C_n\}, D = \{D_n\}, E = \{E_n\}$ zincir kompleksler ve f, g bunlar arasındaki sıfıncı dereceden zincir dönüşümler olmak üzere

$$0 \rightarrow C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \rightarrow 0$$

kısa dizisi tam olsun. Bu durumda $\forall p$ için

$$H_p(C) \xrightarrow{f_*} H_p(D) \xrightarrow{g_*} H_p(E)$$

homoloji gruplarının üçlüsü vardır.

Tanım 3.1.31 :

$$\Delta : H_n(E) \rightarrow H_{n-1}(C)$$

$$z + B_n(E) \mapsto (g^{-1} \circ \partial \circ f^{-1})(z) + B_{n-1}(C)$$

homomorfizmasına bağlayıcı homomorfizma denir.

Teorem 3.1.32 :

$$0 \rightarrow C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \rightarrow 0$$

zincir komplekslerinin ve sıfıncı dereceden zincir dönüşümlerinin kısa tam dizisi ise

$$\cdots \xrightarrow{f_*} H_n(D) \xrightarrow{g_*} H_n(E) \xrightarrow{\Delta} H_{n-1}(C) \xrightarrow{f_*} H_{n-1}(D) \xrightarrow{g_*} \cdots$$

uzun dizisinde tamdır.

Tanım 3.1.33 : $C = \{C_n, \partial\}$ zincir kompleksi verilsin. Her n için $D_n \subset C_n$ ise $D = \{D_n, \partial'\}$ kompleksine C 'nin alt kompleksi denir. Burada D 'nin sınır operatörü C 'nin sınır operatörünün kısıtlanmış ($\partial' = \partial \mid_D$) halidir. C/D bölüm zincir kompleksi

$$C/D = \{C_n/D_n, \partial''\}$$

şeklinde tanımlanır öyleki

$$\partial'' : C_n/D_n \rightarrow C_{n-1}/D_{n-1}$$

$$[c] \mapsto [\partial(c)]$$

(Uygunluk için bundan sonra tüm sınır operatörlerini ∂ ile göstereceğiz.)

Bu zincir dönüşümleri arasında, i içirme ve π projeksiyon fonksiyonları olmak üzere

$$0 \rightarrow D \xrightarrow{i} C \xrightarrow{\pi} C/D \rightarrow 0$$

doğal kısa tam dizisi vardır. Teorem 3.1.32 'den homoloji gruplarının

$$\dots \rightarrow H_n(D) \xrightarrow{i_*} H_n(C) \xrightarrow{\pi_*} H_n(C/D) \xrightarrow{\Delta} H_{n-1}(D) \xrightarrow{i_*} \dots$$

uzun tam dizisi vardır.

Daha genel olarak $E \subset D \subset C$ zincir kompleksleri için

$$0 \rightarrow D/E \rightarrow C/E \rightarrow C/D \rightarrow 0$$

kısa tam dizisi vardır. Yine Teorem 3.1.32 'den homoloji gruplarının

$$\dots \rightarrow H_n(D/E) \rightarrow H_n(C/E) \rightarrow H_n(C/D) \xrightarrow{\Delta} H_{n-1}(D/E) \rightarrow \dots$$

uzun tam dizisi vardır.

(X, A) ikilisi ile X uzayını ve $A \subset X$ alt kümesini gösteriyoruz. $S_*(A)$, $S_*(X)$ 'in alt zincir kompleksidir.

Tanım 3.1.34 : X uzayının A alt uzayına göre elde edilen zincir kompleksi

$$S_*(X, A) = S_*(X)/S_*(A)$$

şeklinde tanımlanır ve bu zincir kompleksin homolojisine X uzayının A alt uzayına göre relative singüler homolojisi denir. Başka bir ifadeyle

$$H_n(X, A) = H_n(S_*(X, A)) = H_n(S_*(X)/S_*(A))$$

yazılabilir. Böylece (X, A) ikilisi için zincir komplekslerin

$$0 \rightarrow S_*(A) \xrightarrow{i} S_*(X) \xrightarrow{\pi} S_*(X)/S_*(A) = S_*(X, A) \rightarrow 0$$

kısa tam dizisi ve dolayısıyla

$$\dots \rightarrow H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{\pi_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\Delta} H_{n-1}(A) \rightarrow \dots$$

uzun tam dizisi vardır. Burada $H_*(X, A)$, $i_* : H_*(A) \rightarrow H_*(X)$ homomorfizmasının izomorfizmadan uzaklığını ölçer. Yani i_* graded grup izomorfizmasıdır ancak ve ancak $H_*(X, A) = 0$.

Özellik 3.1.35 : (X, A) ikilisinde A alt uzayı X uzayının deformasyon retractı ise $H_*(X, A) = 0$ dir.

Daha genel olarak (X, A, B) üçlüsü ile X uzayını v $A \subset B \subset X$ alt uzaylarını

gösteriyoruz. Böylece (X, A, B) üçlüsü için zincir komplekslerin

$$0 \rightarrow S_*(A, B) \rightarrow S_*(X, B) \rightarrow S_*(X, A) \rightarrow 0$$

kısa tam dizisi ve dolayısıyla relative homoloji gruplarının

$$\dots \rightarrow H_n(A, B) \rightarrow H_n(X, B) \rightarrow H_n(X, A) \xrightarrow{\Delta} H_{n-1}(A, B) \rightarrow \dots$$

uzun tam dizisi vardır.

Tanım 3.1.36 : (X, A) ve (Y, B) ikilileri verilsin. $f(A) \subset f(B)$ şartını sağlayan

$$f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$$

sürekli fonksiyonuna ikililerin dönüşümü denir ve

$$f_{\#}(S_*(A)) \subset S_*(B)$$

olacak şekilde

$$f_{\#} : S_*(X, A) \rightarrow S_*(Y, B)$$

zincir dönüşümü üretir.

Teorem 3.1.37 : $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ ikililerin dönüşümü ise $f_*, g_* : H_*(X, A) \rightarrow H_*(Y, B)$ homomorfizmaları eşittir.

Teorem 3.1.38 : (X, A) ikilisi ve $U \subset A$ alt kümesi verilsin öyleki $\bar{A} \subset \bar{A}$. Bu takdirde

$$i : (X - U, A - U) \rightarrow (X, A)$$

içerme dönüşümü

$$i_* : H_*(X - U, A - U) \rightarrow H_*(X, A)$$

izomorfizmasını üretir.

Tanım 3.1.39 : A, B ve C abel grupları verilsin.

$$\phi : A \times B \rightarrow C$$

dönüşümü

$$i) \phi(a_1 + a_2, b) = \phi(a_1, b) + \phi(a_2, b)$$

$$ii) \phi(a, b_1 + b_2) = \phi(a, b_1) + \phi(a, b_2)$$

şartlarını sağlıyor ise bilineerdir denir.

$F(A \times B)$, $A \times B$ 'nin ürettiği free abelyen grup olsun. $F(A \times B)$ 'nin bir elemanı

$$\sum^l n_i(a_i, b_i)$$

formundadır. Buradaki " ' " ifadesi sonlu sayıda i hariç $n_i = 0$ olduğunu belirtmek için kullanılmıştır.

Tanım 3.1.40 : $R(A \times B)$,

$$(a_1 + a_2, b) - (a_1, b) - (a_2, b)$$

$$(a, b_1 + b_2) - (a, b_1) - (a, b_2)$$

elemanları tarafından üretilen $F(A \times B)$ 'nin alt grubu olsun. A ve B 'nin tensör çarpımı

$$A \otimes B = F(A \times B)/R(A \times B)$$

şeklinde tanımlanır.

$\phi : A \times B \rightarrow C$ dönüşümü bilineer ise

$$\phi' : F(A \times B) \rightarrow C$$

$$\sum n_i(a_i, b_i) \mapsto \sum n_i\phi((a_i, b_i))$$

homomorfizması yardımı ile üretilen

$$\phi'' = A \otimes B \rightarrow C$$

homomorfizması vardır.

Özellik 3.1.41 :

1-) $A \otimes B \simeq B \otimes A$

2-) $f : A \rightarrow A', g : B \rightarrow B'$ ise

$$f \otimes g : A \otimes B \rightarrow A' \otimes B'$$

$$a \otimes b \mapsto f(a) \otimes g(b)$$

3-) $f : A \rightarrow A', f' : A' \rightarrow A'', g : B \rightarrow B', g' : B' \rightarrow B''$ ise

$$(f' \circ f) \otimes (g' \circ g) = (f' \otimes g') \circ (f \otimes g)$$

4-) $A \simeq \sum A_j$ ise $A \otimes B \simeq \sum (A_j \otimes B)$

5-) $\forall j \in J$ için $f_j : A \rightarrow A'$ homomorfizmaları , $a \in A$ için $f_j(a)$ sonlu sayıda j için sıfırdan farklı ise

$$\sum f_j : A \rightarrow A'$$

$$a \mapsto \sum f_j(a)$$

homomorfizması tanımlanabilir. Bu takdirde keyfi $g : B \rightarrow B'$ homomorfizması için

$$\left(\sum f_j\right) \otimes g = \sum (f_j \otimes g)$$

olur.

6-) A değişmeli grup olmak üzere

$$A \otimes \mathbb{Z} \simeq A$$

7-) $A = F(a_i)$, $B = F(b_j)$ olmak üzere

$$A \otimes B = F(a_i \otimes b_j)$$

8-) $A' \leq A$, $B' \leq B$ için $i_1 : A' \rightarrow A$, $i_2 : B' \rightarrow B$ alt grupların içirme dönüşümleri olmak üzere

$$A/A' \otimes B/B' \simeq \frac{A \otimes B}{\text{im}(i_1 \otimes 1_B) + \text{im}(1_A \otimes i_2)}$$

9-) $\mathbb{Z}_p \otimes \mathbb{Z}_q \simeq \mathbb{Z}_{(p,q)}$

10-)

$$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$$

tam dizi ve D abel grup olmak üzere

$$A \otimes D \rightarrow B \otimes D \rightarrow C \otimes D \rightarrow 0$$

dizisinde tamdır.

Genel olarak

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \rightarrow 0$$

kısa tam dizisi ve D abel grubu için

$$0 \rightarrow A \otimes D \xrightarrow{\alpha \otimes 1_D} B \otimes D \xrightarrow{\beta \otimes 1_D} C \otimes D \rightarrow 0$$

kısa dizisi tam olmayabilir. Çünkü α monomorfizması için $\alpha \otimes 1_D$ monomorfizma olmayabilir.

Tanım 3.1.42 : A abel grubu verilsin. G_0, G_1 free abel gruplar olmak üzere

$$0 \rightarrow G_1 \xrightarrow{j} G_0 \xrightarrow{\tau} A \rightarrow 0$$

kısa tam dizisine A grubunun free resolutionu denir.

Tanım 3.1.43 : D abel grubu için Özellik 3.1.41'in 10. maddesinden

$$G_1 \otimes D \xrightarrow{j \otimes 1_D} G_0 \otimes D \xrightarrow{\tau \otimes 1_D} A \otimes D \rightarrow 0$$

dizisi tamdır. $\text{Ker}(j \otimes 1_D)$ grubuna A ve D gruplarının torsion çarpımı denir ve $\text{Tor}(A, D)$ şeklinde gösterilir. Bu çarpım $j \otimes 1_D$ homomorfizmasının monomorfizmadan uzaklığını ölçer.

Özellik 3.1.44 :

- 1-) $\text{Tor}(\mathbb{Z}, A) \simeq \text{Tor}(A, \mathbb{Z}) = 0$
- 2-) $\text{Tor}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \simeq \text{Tor}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_m) \simeq \text{Tor}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}) = 0$
- 3-) $\text{Tor}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m) \simeq \mathbb{Z}_{(m,n)}$
- 4-) $A = \sum A_i, B = \sum B_j$ ise $\text{Tor}(A, B) \simeq \sum_{ij} \text{Tor}(A_i, B_j)$
- 5-) A, B abelyen gruplar ise $\text{Tor}(A, B) \simeq \text{Tor}(B, A)$
- 6-) A free abelyen grup ise $\text{Tor}(B, A) = 0$
- 7-) $\text{Tor}(A, B)$ A 'nın free resolution seçiminden bağımsızdır.

Tanım 3.1.45 : $C = \{C_n, \partial\}$ free zincir kompleksi ve G abel grubu verilsin. Bu takdirde $C \otimes G$ zincir kompleksi

$$C \otimes G = \{C_n \otimes G, \partial \otimes 1_G\}$$

şeklinde tanımlanır. Gerçekten

$$(\partial \otimes 1_G) \circ (\partial \otimes 1_G) = (\partial \circ \partial) \otimes (1_G \circ 1_G) = 0 \otimes 1_G = 0$$

olduğundan bu dizi bir zincir komplekstir.

C ve C' zincir kompleksler, $f : C \rightarrow C'$ zincir dönüşüm ve G abel grup olmak üzere

$$f \otimes 1_G : C \otimes G \rightarrow C' \otimes G$$

homomorfizması

$$\begin{aligned} (f \otimes 1_G) \circ (\partial \otimes 1_G) &= (f \circ \partial) \otimes (1_G \circ 1_G) = (f \circ \partial) \otimes 1_G \\ &= (\partial' \circ f) \otimes 1_G = (\partial' \otimes 1_G) \circ (f \otimes 1_G) \end{aligned}$$

şartını sağladığından, $C \otimes G$ ve $C' \otimes G$ zincir kompleksleri arasında bir zincir dönüşümdür.

T, f_0 ve f_1 zincir dönüşümleri arasında bir zincir homotopi ise $T \otimes 1_G$

$$(\partial' \otimes 1_G) \circ (T \otimes 1_G) + (T \otimes 1_G) \circ (\partial \otimes 1_G) = f_1 \otimes 1_G - f_0 \otimes 1_G$$

şartını sağladığından $f_0 \otimes 1_G$ ve $f_1 \otimes 1_G$ zincir dönüşümleri arasında zincir homotopidir.

Tanım 3.1.46 : Sabit bir G abel grubu alalım. (X, A) ikilisine karşılık gelen $S_*(X, A)$ free zincir kompleksini kullanarak yeni $S_*(X, A) \otimes G$ zincir kompleksini elde ederiz. Buna

(X, A) 'nın G katsayılı singüler zincir kompleksi denir ve $S_*(X, A; G)$ ile gösterilir.

$$S_*(X, A) \otimes \mathbb{Z} \simeq S_*(X, A)$$

olduğundan $S_*(X, A)$ 'ye tamsayı katsayılı singüler zincir kompleksi de denir. $S_*(X, A; G)$ 'nin homolojisi $H_*(X, A; G)$ ile gösterilir.

$$f : (X, A) \rightarrow (X', A')$$

ikililerin dönüşümü

$$f_* : H_*(X, A; G) \rightarrow H_*(X', A'; G)$$

homomorfizmasını üretir.

Şimdi de (X, A, B) üçlüsünü alalım. Bu üçlüye karşılık

$$0 \rightarrow S_*(A, B; G) \rightarrow S_*(X, B; G) \rightarrow S_*(X, A; G) \rightarrow 0$$

kısa dizisi tamdır.

Teorem 3.1.47 : C free zincir kompleks ve G abel grup ise

$$H_n(C \otimes G) \simeq H_n(C) \otimes G \oplus \text{Tor}(H_{n-1}(C), G)$$

olur.

Sonuç 3.1.48 : (X, A) ikilisi için

$$H_n(X, A; G) \simeq H_n(X, A) \otimes G \oplus \text{Tor}(H_{n-1}(X, A), G)$$

olur.

Tanım 3.1.49 : \wp , (X, A) ikilisi ve n tamsayısını $\wp_n(X, A)$ abel grubu ile ve her $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ ikililerin dönüşümünü $f_* : \wp_n(X, A) \rightarrow \wp_n(Y, B)$ homomorfizması ile eşleştiren bir fonksiyon ve her n için $\partial : \wp_n(X, A) \rightarrow \wp_{n-1}(X, A)$ homomorfizması var olsun. Eğer \wp aşağıdaki aksiyomları sağlar ise \wp bir homoloji teori üretir denir.

1) $id : (X, A) \rightarrow (X, A)$ birim dönüşüm ise

$$id_* \wp_n(X, A) \rightarrow \wp_n(X, A)$$

birim homomorfizmadır.

2) $f : (X, A) \rightarrow (X', A'), g : (X', A') \rightarrow (X'', A'')$ ikililerin dönüşümleri ise

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$$

dır.

3) $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ ikililerin dönüşümü ise

$$\partial \circ f_* = (f|_A)_* \circ \partial$$

4) $i : (A, \emptyset) \rightarrow (X, \emptyset)$ ve $j : (X, \emptyset) \rightarrow (X, A)$ içermeye dönüşümleri ise

$$\cdots \xrightarrow{\partial} \mathcal{H}_n(A) \xrightarrow{i_*} \mathcal{H}_n(X) \xrightarrow{j_*} \mathcal{H}_n(X, A) \xrightarrow{\partial} \mathcal{H}_{n-1}(A) \rightarrow \cdots$$

dizisi tamdır.

5) $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ ikili dönüşümleri homotopik ise

$$f_* = g_*$$

6) (X, A) ikilisinde $U \subset A$ ve $\bar{U} \subset \text{int}(A)$ ise

$$i : (X - U, A - U) \rightarrow (X, A)$$

içermeye dönüşümü için

$$i_* : \mathcal{H}_n(X - U, A - U) \rightarrow \mathcal{H}_n(X, A)$$

izomorfizmadır.

7) $n \neq 0$ için $\mathcal{H}_n(pt) = 0$ dır ve $\mathcal{H}_n(pt)$ 'ye katsayı grubu denir.

Singüler homoloji yukarıdaki aksiyomları sağlar. Böylece aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 3.1.50 : G abelyen grubu verilsin. Katsayı grubu G olan bir homoloji teori vardır öyleki $\mathcal{H}_n(X, A) = H_n(X, A; G)$.

3.2.Singüler Kohomoloji

Tanım 3.2.1 : A ve G abelyen gruplar olmak üzere

$$\text{Hom}(A, G) = \{f \mid f : A \rightarrow G, f \text{ homomorfizma}\}$$

şeklinde tanımlanır. $\text{Hom}(A, G)$ fonksiyonların toplama işlemine göre abel gruptur.

Özellik 3.2.2 :

1-) $\text{Hom}(\mathbb{Z}, A) \simeq A$

2-) $\text{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_m) \simeq \mathbb{Z}_m$

3-) $\text{Hom}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}) \simeq 0$

4-) $\text{Hom}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}_n) \simeq \mathbb{Z}_{(m,n)}$

5-) $A = \sum_i A_i, B = \sum_j B_j$ için

$$\text{Hom}(A, B) = \sum_{i,j} \text{Hom}(A_i, B_j)$$

dir.

$\phi : A \rightarrow B$ homomorfizması

$$\phi^\# : \text{Hom}(B, G) \rightarrow \text{Hom}(A, G)$$

$$G \leftarrow B : f \mapsto \phi^\#(f) = f \circ \phi$$

homomorfizmasını üretir ve $\varphi : B \rightarrow C$ homomorfizması için

$$(\varphi \circ \phi)^\# = \phi^\# \circ \varphi^\#$$

olur.

Tanım 3.2.3 : G abel grubu ve $\{C, \partial\}$ zincir kompleksi verilsin. Her n için C^n abel grupları

$$C^n = \text{Hom}(C_n, G)$$

şeklinde tanımlanır. $\partial : C_{n+1} \rightarrow C_n$ sınır operatörü için

$$\partial^\# : C^n \rightarrow C^{n+1}$$

homomorfizması vardır ve

$$\partial^\# \circ \partial^\# = (\partial \circ \partial)^\# = 0$$

olur.

Burada zincir kompleksine benzeyen bir yapı vardır. Fakat dizimiz azalan değil artandır. Böylece kozincir kompleks tanımını verilebilir.

Tanım 3.2.4 : $\{C^n, \delta\}, \delta : C^n \rightarrow C^{n+1}$ olacak şekilde abel grupların ve homomorfizmaların bir topluluğu olsun. Eğer

$$\delta \circ \delta = 0$$

ise bu diziye kozincir kompleks, δ homomorfizmasında kosınır operatörü denir. $c^n \in C^n$ elemanına da n -kozincir denir.

$\{C^n, \delta\}$ kozincir kompleksi için $D_n = C^{-n}$ ve $\partial = \delta : D_n \rightarrow D_{n-1}$ tanımlamalarını yaparsak $\{D_n, \partial\}$ bir zincir kompleks olur. Böylece bu iki yapının birbirinin duali olduğu görülmüş olur.

Zincir kompleksteki temel tanımlamalar kozincir kompleks içinde yapılabilir.

Tanım 3.2.5 : $\{C^n, \delta\}$ ve $\{D^n, \delta'\}$ kozincir kompleksler olmak üzere $f : C^n \rightarrow D^{n+k}$ homomorfizma koleksiyonu

$$f \circ \delta = \delta' \circ f$$

şartını sağlarsa f 'ye k . dereceden kozincir dönüşümü denir.

Tanım 3.2.6 : f ve g 0. dereceden kozincir dönüşümleri olsunlar. Eğer

$$\delta' \circ T + T \circ \delta = f - g$$

şartını sağlayan

$$T : C^n \rightarrow D^{n-1}$$

homomorfizmaları varsa f ve g kozincir homotopiktir denir.

$\{C, \partial\}, \{D, \partial'\}$ zincir kompleksleri ve $f, g : \{C, \partial\} \rightarrow \{D, \partial'\}$ zincir homotopik dönüşümleri ise keyfi G abel grubu için

$$f^\#, g^\# : \{Hom(D_n, G), \partial'^\#\} \rightarrow \{Hom(C_n, G), \partial^\#\}$$

kozincir dönüşümleri kozincir homotopiktir.

Tanım 3.2.7 : $C = \{C^n, \delta\}$ kozincir kompleks olsun. n -kovevirlerin grubu

$$Z^n(C) = Ker \delta^n$$

, n -kosınırların grubu

$$B^n(C) = Im \delta^{n-1}$$

şeklinde tanımlanır. Böylece n . kohomoloji grubu

$$H^n(C) = Z^n(C)/B^n(C)$$

olur.

$A = \{A^n\}$, $B = \{B^n\}$, $C = \{C^n\}$ kozincir kompleksler ve

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$$

sıfıncı dereceden kozincir dönüşümlerinin kısa tam dizisi ise kohomoloji gruplarının

$$\dots \rightarrow H^n(A) \rightarrow H^n(B) \rightarrow H^n(C) \xrightarrow{\Delta} H^{n+1}(A) \rightarrow \dots$$

uzun tam dizisi vardır. Burada Δ bağlayıcı homomorfizması homolojideki gibidir.

Tanım 3.2.8 : (X, A) ikilisi ve G abel grubu verilsin. (X, A) ikilisinin G katsayılı n . boyutlu kozincir grubu

$$S^n(X, A; G) = \text{Hom}(S_n(X, A), G)$$

şeklinde ve bu kozincir grupları arasındaki kosınır operatörü de

$$\delta : S^n(X, A; G) \rightarrow S^{n+1}(X, A; G)$$

$$\delta = \partial^\#$$

şeklinde tanımlanır. Böylece (X, A) ikilisinin singüler kozincir kompleksini tanımlamış olduk.

Tanım 3.2.9 : Bu kompleksin homolojisine (X, A) ikilisinin G katsayılı singüler kohomoloji grubu denir ve $H^*(X, A; G)$ şeklinde gösterilir.

Homolojideki tüm kovaryant özellikler kohomolojide kontravaryant hale gelir. Özellikle $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ ikililerin dönüşümünün ürettiği homomorfizma

$$f^* : H^*(Y, B; G) \rightarrow H^*(X, A; G)$$

olur ve $g : (Y, B) \rightarrow (W, C)$ başka bir ikililerin dönüşümü ise

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$$

olur.

Tanım 3.2.10 :

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$$

abel grupların ve homomorfizmaların kısa tam dizisi olsun. $f(A)$, B 'nin direkt toplam terimi ise bu diziye ayrılabilir tam dizi denir.

Özellik 3.2.11 :

$$0 \rightarrow F \xrightarrow{i} H \xrightarrow{\pi} K \rightarrow 0$$

ayrılabilir tam dizi ve G abel grup ise

$$0 \rightarrow \text{Hom}(K, G) \xrightarrow{\pi^*} \text{Hom}(H, G) \xrightarrow{i^*} \text{Hom}(F, G) \rightarrow 0$$

dizisi tamdır.

(X, A) ikilisi için

$$0 \rightarrow S_*(A) \rightarrow S_*(X) \rightarrow S_*(X, A) \rightarrow 0$$

dizisi ayrılabilir tamdır ve Özellik 3.2.11 'den dolayı

$$0 \rightarrow S^*(X, A; G) \rightarrow S^*(X; G) \rightarrow S^*(A; G) \rightarrow 0$$

kısa dizisi tamdır. Böylece singüler kohomoloji gruplarının

$$\dots \rightarrow H^n(X, A; G) \rightarrow H^n(X; G) \rightarrow H^n(A; G) \rightarrow H^{n+1}(X, A; G) \rightarrow \dots$$

uzun tam dizisini elde ederiz.

Özellik 3.2.12 :

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$$

dizisi tam ise

$$0 \rightarrow \text{Hom}(C, G) \xrightarrow{g^\#} \text{Hom}(B, G) \xrightarrow{f^\#} \text{Hom}(A, G)$$

dual dizisinde tamdır.

Genel olarak

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$$

kısa tam dizisi için

$$0 \rightarrow \text{Hom}(C, G) \xrightarrow{g^\#} \text{Hom}(B, G) \xrightarrow{f^\#} \text{Hom}(A, G) \rightarrow 0$$

dizisi tam olmayabilir. Çünkü f monomorfizması için $f^\#$ epimorfizma olmayabilir.

E abel grubu ve E 'nin bir free resolutionu yani G_0 ve G_1 free abelyen gruplar olmak üzere

$$0 \rightarrow G_1 \xrightarrow{\alpha} G_0 \xrightarrow{\beta} E \rightarrow 0$$

kısa tam dizisi verilsin. Keyfi G abel grubu için Özellik 3.2.12 'den dolayı

$$0 \rightarrow \text{Hom}(E, G) \xrightarrow{\beta^\#} \text{Hom}(G_0, G) \xrightarrow{\alpha^\#} \text{Hom}(G_1, G)$$

dizisi tamdır.

$$\text{Ext}(E, G) = \text{Hom}(G_1, G) / \text{Im}(\alpha^\#)$$

grubuna E ve G 'nin Exterior Çarpımı denir ve bu çarpım $\alpha^\#$ 'in epimorfizmadan uzaklığını ölçer.

Özellik 3.2.13 :

1-) $A = \sum_i A_i, B = \sum_i B_i$ ise

$$\text{Ext}(A, B) \simeq \sum_i \text{Ext}(A_i, B_i)$$

olur.

2-) Herhangi bir G abel grubu için

$$\text{Ext}(\mathbb{Z}, G) = 0$$

3-) $\text{Ext}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \simeq \text{Ext}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_m) = 0$

4-) $\text{Ext}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}_m$

5-) $\text{Ext}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}_n) \simeq \mathbb{Z}_{(m,n)}$

6-) E free abel grup ise

$$\text{Ext}(E, G) = 0$$

7-) $\text{Ext}(E, G)$, E 'nin free resolution seçiminden bağımsızdır.

8-)

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$$

kısa dizisi tam ise

$$0 \rightarrow \text{Hom}(C, G) \xrightarrow{g^\#} \text{Hom}(B, G) \xrightarrow{f^\#} \text{Hom}(A, G) \rightarrow \text{Ext}(C, G) \xrightarrow{g^\#} \text{Ext}(B, G) \xrightarrow{f^\#} \text{Ext}(A, G) \rightarrow 0$$

dizisinde tamdır.

Özellik 3.2.14 : X topolojik uzay ve $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$, X uzayının yol bağlantılı bileşenleri ise

$$H^0(X; G) \simeq \prod_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha$$

olur.

Teorem 3.2.15 : (X, A) ikilisi ve $\bar{U} \subset \text{int}(A)$ olacak şekilde $U \subset A$ alt kümesi verilsin.

$$i : (X - U, A - U) \rightarrow (X, A)$$

ikililerin içerme dönüşümü

$$i^* : H^*(X, A; G) \rightarrow H^*(X - U, A - U; G)$$

izomorfizmasını üretir.

Teorem 3.2.16 : $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ ikililerin dönüşümleri homotopik ise bu homomorfizmaların ürettiği

$$f^*, g^* : H^*(Y, B; G) \rightarrow H^*(X, A; G)$$

homomorfizmaları eşittir.

Teorem 3.2.17 : (X, A) ikilisi ve G abel grubu verilsin. Bu takdirde

$$0 \rightarrow \text{Ext}(H_{n-1}(X, A), G) \rightarrow H^n(X, A; G) \rightarrow \text{Hom}(H_n(X, A), G) \rightarrow 0$$

ayrılabilir tam dizisi vardır.

3.3.Cup Çarpım

Tanım 3.3.1 : X topolojik uzayı ve R değişmeli halkası verilsin. $\phi : \sigma_{p+q} \rightarrow X$ olmak üzere

$$S^p(X; R) \times S^q(X; R) \xrightarrow{\cup} S^{p+q}(X; R)$$

$$\langle c^p \cup c^q, \phi \rangle = \langle c^p, \phi \circ l(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p) \rangle \cdot \langle c^q, \phi \circ l(\varepsilon_p, \varepsilon_{p+1}, \dots, \varepsilon_{p+q}) \rangle$$

dönüşümü tanımlansın. Buradaki $c^p \cup c^q$ kozincirine c^p, c^q kozincirlerinin cup çarpımı denir. $\phi \circ l(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ dönüşümü ϕ singüler $(p+q)$ -simpleksinin ön p yüzüne, $\phi \circ l(\varepsilon_p, \varepsilon_{p+1}, \dots, \varepsilon_{p+q})$ dönüşümü ise ϕ singüler $(p+q)$ -simpleksinin arka q yüzüne kısıtlanışlarıdır.

Teorem 3.3.2 : Kozincirlerin cup çarpımı bilinear ve birleşmelidir. z^0 tüm 0-simplekslerdeki değeri 1 olan kozincir olsun. z^0 birim elemandır. Ayrıca

$$\delta(c^p \cup c^q) = (\delta c^p) \cup c^q + (-1)^p c^p \cup (\delta c^q)$$

kosunur formülü geçerlidir.

Teorem 3.3.3 : Kozincirlerin cup çarpımı

$$H^p(X; R) \times H^q(X; R) \xrightarrow{\cup} H^{p+q}(X; R)$$

bilinear ve birleşmeli operatörünü üretir. $[z^0]$ kohomoloji sınıfı birim elemandır.

Teorem 3.3.4 : $h : X \rightarrow Y$ sürekli ise h^* cup çarpımı sağlar.

Tanım 3.3.5 : $H^*(X; R) = \bigoplus H^i(X; R)$ olmak üzere cup çarpımı bu grubu birimli halkaya dönüştürür ve bu halkaya X uzayının R katsayılı kohomoloji halkası denir.

4.ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1.Steenrod Cebiri

Tanım 4.1.1 : p, q sabit tam sayılar ve G, G' halkalar olmak üzere $(p, G; q, G')$ tipindeki bir Θ kohomoloji operasyonu $H^p(, G)$ funtorundan $H^q(, G')$ funktörüne giden doğal bir transformasyondur öyleki her X uzayı için ve her $f : X \rightarrow Y$ bir dönüşümü için

$$\begin{array}{ccc} H^p(X; G) & \xrightarrow{\Theta_X} & H^q(X; G') \\ \uparrow f^* & & \uparrow f^* \\ H^p(Y; G) & \xrightarrow{\Theta_Y} & H^q(Y; G') \end{array}$$

diyagramını değişmeli kılar ve $\sigma(G, p; G', q)$ ile gösterilir.

$\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ve p tek asal sayı olsun. $0 \rightarrow \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Z}_{p^2} \rightarrow \mathbb{Z}_p \rightarrow 0$ tam dizisine karşılık gelen $\beta : H^q(X; \mathbb{Z}_p) \rightarrow H^{q+1}(X; \mathbb{Z}_p)$ Bockstein ko-sınır operasyonu, $\beta^2 = 0$ ve $\beta(x \cdot y) = \beta(x)y + (-1)^q x\beta(y)$, $\dim(x) = q$ özelliklerini sağlayan bir doğal homomorfizma olarak bilinmektedir.

$G = \mathbb{Z}_2$ için Steenrod Square'ları olarak bilinen Sq^i operasyonu, her q için aşağıdaki diyagramı değişmeli kılan $(\mathbb{Z}_2, q; \mathbb{Z}_2, q + i)$ tipinde bir kohomoloji operasyonudur.

$$\begin{array}{ccc} H^q(X; \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{Sq^i} & H^{q+i}(X; \mathbb{Z}_2) \\ \uparrow f^* & & \uparrow f^* \\ H^q(Y; \mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{Sq^i} & H^{q+i}(Y; \mathbb{Z}_2) \end{array}$$

Özellik 4.1.2 : $Sq^i : H^q(X; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^{q+i}(X; \mathbb{Z}_2)$ Steenrod Square operasyonları aşağıdaki özellikleri sağlarlar.

1) $Sq^0 : H^q(X; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^q(X; \mathbb{Z}_2)$, $Sq^0 = 1$

2) $\deg u = q$ ise $Sq^q(u) = u^2$

3) $\deg u < q$ ise $Sq^q(u) = 0$

4) Cartan formülü: $Sq^i(u \cdot v) = \sum_{i=j+k} Sq^j(u) \cdot Sq^k(v)$

5) $Sq^1 : H^q(X; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^{q+1}(X; \mathbb{Z}_2)$, $0 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_4 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow 0$ tam dizisine karşılık

gelen Bockstein ko-sınır homomorfizmasıdır.

$G = \mathbb{Z}_p$ alırsak, P^i Steenrod operasyonu, her q için aşağıdaki diyagramı değişmeli kılan $(\mathbb{Z}_p, q; \mathbb{Z}_p, q + 2i(p-1))$ tipinde bir kohomolji operasyonudur.

$$\begin{array}{ccc} H^q(X; \mathbb{Z}_p) & \xrightarrow{P^i} & H^{q+2i(p-1)}(X; \mathbb{Z}_p) \\ \uparrow f^* & & \uparrow f^* \\ H^q(Y; \mathbb{Z}_p) & \xrightarrow{P^i} & H^{q+2i(p-1)}(Y; \mathbb{Z}_p) \end{array}$$

Özellik 4.1.3 : $P^i : H^q(X; \mathbb{Z}_p) \rightarrow H^{q+2i(p-1)}(X; \mathbb{Z}_p)$ Steenrod operasyonları aşağıdaki özellikleri sağlarlar.

- 1) $P^0 : H^q(X; \mathbb{Z}_p) \rightarrow H^q(X; \mathbb{Z}_p), P^0 = 1$
- 2) $degu = q$ ise $P^q(u) = u^p$
- 3) $degu < 2q$ ise $P^q(u) = 0$
- 4) Cartan formülü: $P^i(u \cdot v) = \sum_{j+l=i} P^j(u) \cdot P^l(v)$

Özellik 4.1.4 : Steenrod operasyonlarının bileşkesi Adem bağıntıları olarak bilinen aşağıdaki bağıntıları sağlar:

$a < 2b$ ise

$$Sq^a Sq^b = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{a}{2} \rfloor} \binom{b-j-1}{a-2j} Sq^{a+b-j} Sq^j$$

$a < pb$ ise

$$P^a P^b = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{a}{p} \rfloor} (-1)^{a+j} \binom{(p-1)(b-j)-1}{a-pj} P^{a+b-j} P^j$$

$a \leq pb$ ise

$$P^a \beta P^b = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{a}{p} \rfloor} (-1)^{a+j} \binom{(p-1)(b-j)}{a-pj} \beta P^{a+b-j} P^j + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{a-1}{p} \rfloor} (-1)^{a+j-1} \binom{(p-1)(b-j)-1}{a-pj-1} P^{a+b-j} \beta P^j$$

dir.

Burada $\binom{m}{n} = 0 \Leftrightarrow m < n$ veya m negatif veya n negatif.

Örnek 4.1.5 : $p = 3$ alırsa

$$\begin{aligned}
P^{10} \cdot P^4 &= \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{10}{3} \rfloor} (-1)^{10+j} \binom{(3-1)(4-j)-1}{10-3j} P^{10+4-j} P^j = \sum_{j=0}^3 (-1)^{10+j} \binom{7-2j}{10-3j} P^{10+4-j} P^j \\
&= \binom{7}{10} \cdot P^{14} \cdot P^0 - \binom{5}{7} \cdot P^{13} \cdot P^1 + \binom{3}{4} \cdot P^{12} \cdot P^2 - \binom{1}{1} \cdot P^{11} \cdot P^3 = -P^{11} \cdot P^3
\end{aligned}$$

Tanım 4.1.6 : A_2 mod 2 Steenrod cebiri, derecesi 1 olan β elemanı ve derecesi i olan Sq^i elemanlarıyla üretilen komütatif graded cebir olarak tanımlanır. A Steenrod cebirine ait bir monomial; $\varepsilon_i = 0$ veya 1 ve $r_i \geq 0$ olmak üzere $\beta^{\varepsilon_0} Sq^{r_1} \beta^{\varepsilon_1} Sq^{r_2} \beta^{\varepsilon_2} \dots Sq^{r_k} \beta^{\varepsilon_k}$ şeklinde ifade edilebilir. $I = (\varepsilon_0, r_1, \varepsilon_1, r_2, \varepsilon_2, \dots, r_k, \varepsilon_k)$ olmak üzere bu monomiali Sq^I şeklinde göstereceğiz.

Tanım 4.1.7 : A mod p Steenrod cebiri, derecesi 1 olan β elemanı ve derecesi $2i(p-1)$ olan P^i elemanlarıyla üretilen komütatif graded cebir olarak tanımlanır. A Steenrod cebirine ait bir monomial; $\varepsilon_i = 0$ veya 1 ve $r_i \geq 0$ olmak üzere $\beta^{\varepsilon_0} P^{r_1} \beta^{\varepsilon_1} P^{r_2} \beta^{\varepsilon_2} \dots P^{r_k} \beta^{\varepsilon_k}$ şeklinde ifade edilebilir. $I = (\varepsilon_0, r_1, \varepsilon_1, r_2, \varepsilon_2, \dots, r_k, \varepsilon_k)$ olmak üzere bu monomiali P^I şeklinde göstereceğiz.

Tanım 4.1.8 : $T = (t_1, t_2, \dots, t_m)$ elemanları negatif olmayan bir tamsayı dizisi olsun. Eğer $1 \leq i \leq m$ için $t_i \geq p t_{i+1}$ eşitsizliği varsa bu diziyeye admissible dizi ve $P^{t_1} P^{t_2} \dots P^{t_m}$ monomialine de admissible monomial denir. Bütün admissible monomiallerin oluşturduğu küme A steenrod cebiri için bir baz oluşturur ve B_{Adm} ile gösterilir. $P^{t_1} P^{t_2} \dots P^{t_m}$ monomiali P^T ile de gösterilir.

Tanım 4.1.9 : Milnor, A Steenrod cebirinin A^* dualinin, dereceleri $2(p^i - 1)$ olan ξ_i üreteçlere sahip $F_p[\xi_1, \xi_2, \dots]$ polinom cebri ile dereceleri $2p^i - 1$ olan τ_i üreteçlere sahip $E[\tau_0, \tau_1, \tau_2, \dots]$ exterior cebirin tensör çarpımı olduğunu göstermiştir. A^* daki bu monomial bazın A daki dual bazı Milnor bazı diye adlandırılır ve B_{Mil} ile gösterilir. A^* daki $\tau_0^{\varepsilon_0}, \xi_1^{r_1}, \tau_1^{\varepsilon_1}, \xi_2^{r_2}, \dots$ elemanının duali $P(r_1, r_2, \dots)$ ile gösterilir. $R = (r_1, r_2, \dots)$ negatif olmayan tamsayılardan oluşan sonlu bir dizi ise $P(r_1, r_2, \dots)$ yerine $P(R)$ kullanırız.

Notasyonlar kıyaslandığında $P(n) = P^n$ olduğu bilinmelidir.

Milnor bazında cebir yapısı Milnor çarpımı denilen çarpım ile verilir.

Tanım 4.1.10 : $P(r_1, r_2, \dots), P(s_1, s_2, \dots)$ Milnor elemanları olmak üzere, Milnor çarpımı $P(r_1, r_2, \dots) \cdot P(s_1, s_2, \dots) = \sum_X \beta(X) P(t_1, t_2, \dots)$ şeklinde verilir ki buradaki toplam

aşağıdaki şartları sağlayan bütün $X = (x_{ij})$ matrisleri üzerinden alınır;

$$1) \sum_i x_{ij} = s_j$$

$$2) \sum_j x_{ij} p^j = r_i$$

$$3) \beta(X) = b_1(X)b_2(X)\cdots \in \mathbb{Z}_p,$$

burada $n = x_{0,l} + x_{1,l-1} + \cdots + x_{l,0}$ olmak üzere $b_l(X) = \binom{n}{x_{0,l}|x_{1,l-1}|\cdots|x_{l,0}} \pmod p$ dir.

$$4) \sum_{i+j=k} x_{ij} = t_k$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cc} & t_1 & t_2 \\ & \nearrow & \nearrow \\ X = & \begin{bmatrix} x_{00} & x_{01} & x_{02} & \cdots \\ x_{10} & x_{11} & x_{12} & \cdots \\ x_{20} & x_{21} & x_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \rightarrow r_1 \\ \rightarrow r_2 \end{array} \\ & \begin{array}{cc} \downarrow & \downarrow \\ s_1 & s_2 \end{array} \end{array}
 \end{array}$$

Hesaplamalarda $x_{0,0} = 0$ kabul edilir. 1 ve 2 şartlarını sağlayan $X = (x_{ij})$ matrisine $(R-S)$ -toleranslı matris denir. Ayrıca sadece 4. maddeyi sağlayan X matrisine $P(t_1, t_2, \dots)$ elemanını üretir denir ve $T = (t_1, t_2, \dots)$ olmak üzere $T(X) = T$ şeklinde gösterilir. $(R-S)$ -toleranslı matrislerin kümesini $\chi_{R,S}$ ile göstereceğiz.

Örnek 4.1.11 : $p = 3$ için $P(1,3).P(4)$ çarpımını bulalım. Yukarıdaki koşulları sağlayan

$$\text{sadece } X_1 = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } X_2 = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ matrisleri vardır. } X_1 \text{ matrisi için } \beta(X_1)' \text{ i}$$

hesaplayalım.

$$b_1(X_1) = \frac{(x_{10}+x_{01})!}{x_{10}! \cdot x_{01}!} = \frac{(4+1)!}{4! \cdot 1!} = 5 \equiv 2 \pmod 3$$

$$b_2(X_1) = \frac{(x_{20}+x_{11}+x_{02})!}{x_{20}! \cdot x_{11}! \cdot x_{02}!} = \frac{(3+0+0)!}{3! \cdot 0! \cdot 0!} = 1 \equiv 1 \pmod 3$$

$$b_3(X_1) = \frac{(x_{30}+x_{21}+x_{12}+x_{03})!}{x_{30}! \cdot x_{21}! \cdot x_{12}! \cdot x_{03}!} = \frac{(0+0+0+0)!}{0! \cdot 0! \cdot 0! \cdot 0!} = 1 \equiv 1 \pmod 3$$

$$\beta(X_1) = 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2 \pmod 3$$

X_2 matrisi için $\beta(X_2)$ ' yi hesaplayalım.

$$b_1(X_2) = \frac{(x_{10}+x_{01})!}{x_{10}! \cdot x_{01}!} = \frac{(3+1)!}{3! \cdot 1!} = 4 \equiv 1 \pmod{3}$$

$$b_2(X_2) = \frac{(x_{20}+x_{11}+x_{02})!}{x_{20}! \cdot x_{11}! \cdot x_{02}!} = \frac{(0+0+0)!}{0! \cdot 0! \cdot 0!} = 1 \equiv 1 \pmod{3}$$

$$b_3(X_2) = \frac{(x_{30}+x_{21}+x_{12}+x_{03})!}{x_{30}! \cdot x_{21}! \cdot x_{12}! \cdot x_{03}!} = \frac{(0+1+0+0)!}{0! \cdot 1! \cdot 0! \cdot 0!} = 1 \equiv 1 \pmod{3}$$

$$\beta(X_2) = 1.1.1 = 1 \pmod{3}$$

$P(1,3).P(4) = 2.P(5,3) + 1.P(4,0,1)$ olarak bulunur.

Tanım 4.1.12 : $P(R) = P(r_1, r_2, \dots, r_m)$ formundaki Milnor baz elemanının derecesi

$$|R| = \sum_{k=1}^m (p^k - 1) \cdot r_k \quad \text{olmak üzere} \quad 2. |R| \quad \text{şeklinde tanımlanır ve}$$

$\deg(P(R)) = \deg(P(r_1, r_2, \dots, r_m)) = |P(R)|$ ifadelerinden birisiyle gösterilir.

Tanım 4.1.13 : $P(R) = P(r_1, r_2, \dots, r_m)$ formundaki Milnor baz elemanının excess' i

$$ex(R) = \sum_{k=1}^m r_k \quad \text{olmak üzere} \quad 2. ex(R) \quad \text{olarak tanımlanır ve}$$

$ex(P(R)) = ex(P(r_1, r_2, \dots, r_m))$ ile gösterilir.

Tanım 4.1.14 : $P(R) = P(r_1, r_2, \dots, r_m)$ formundaki Milnor baz elemanının uzunluğu R dizisinin eleman sayısı yani m olarak tanımlanır ve $l(P(R))$ ile gösterilir.

Örnek 4.1.15 : $p = 5$, $T = (4, 6, 2, 5)$ için,

$$|T| = 4 \cdot (5^1 - 1) + 6 \cdot (5^2 - 1) + 2 \cdot (5^3 - 1) + 1 \cdot (5^4 - 1) = 3528$$

$$\deg(P(T)) = 2 \cdot |T| = 2 \cdot 3528 = 7056$$

$$ex(T) = 4 + 6 + 2 + 5 = 17$$

$$l(P(T)) = 4$$

ile gösterilir.

Özellik 4.2.4 : $W(C(T)) = |T|$

Tanım 4.2.5 : $C(T)$ nin dişlerinin sayısına $C(T)$ nin excess' i denir ve $ex(C(T))$ ile gösterilir.

Özellik 4.2.6 : $ex(C(T)) = ex(T)$

Örnek 4.2.7 : $p = 5$ ve $T = (4, 6, 2, 5)$ olsun. $C(T)$ ' nin diş sayısı 17 olup bu Örnek 4.1.15'te bulduğumuz $ex(T)$ ' ye eşittir. Dişlerin ağırlıkları toplamı da

$$\begin{aligned} W(C(T)) &= (p^1 - 1) + (p^1 - 1) + (p^1 - 1) + (p^1 - 1) + (p^2 - 1) + (p^2 - 1) + (p^2 - 1) + \\ &\quad (p^2 - 1) + (p^2 - 1) + (p^2 - 1) + (p^3 - 1) + (p^3 - 1) + (p^4 - 1) + (p^4 - 1) + \\ &\quad (p^4 - 1) + (p^4 - 1) + (p^4 - 1) \\ &= 4.4 + 24.6 + 124.2 + 624.5 = 3528 = |T| \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Tanım 4.2.8 : p^σ tipindeki bir demet, p^σ tane aynı uzunluktaki dişlerin bir sütunda biraraya getirilmiş şeklindedir ki bu sütun σ tane sıfırı takip eden, dişlerin uzunluğu kadar $p^{*\prime}$ içeren bir çeşit genelleştirilmiş diş olarak düşünülebilir.

Örnek 4.2.9 : $p = 5$ olsun. 5^2 tipinde 3 uzunluğundaki demet,

$$\begin{array}{cccccc} p^* & p^* & \dots & p^* & & 0 \\ p^* & p^* & \dots & p^* & & 0 \\ p^* & p^* & \dots & p^* & \equiv & p^* \\ & & & & & p^* \\ & & \underbrace{\hspace{2cm}} & & & p^* \\ & & 5^2 \text{ tane} & & & \end{array}$$

3 uzunluğundaki 25 tane dişin ağırlıkları toplamı $25 \cdot (5^3 - 1)$ 'dir.

Tanım 4.2.10 : n pozitif bir tamsayı ve p tek asal sayı olsun. $0 \leq \alpha_i(n) < p$ olmak üzere n

sayısının $n = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i(n) \cdot p^i$ şeklinde tek türlü belirli bir açılımı vardır ve buna

n -tamsayısının p -adik açılımı denir.

Örnek 4.2.9 için $25 \cdot (5^3 - 1)$ sayının 5-adik gösterimini yazalım,

$$\begin{aligned} 25 \cdot (5^3 - 1) &= 3100 = 0.5^0 + 0.5^1 + 4.5^2 + 4.5^3 + 4.5^4 \\ &= 0.5^0 + 0.5^1 + p^* \cdot 5^2 + p^* \cdot 5^3 + p^* \cdot 5^4 \end{aligned}$$

Son gösterimdeki katsayıları dikey olarak yerleştirirsek

$$\begin{array}{c}
0 \\
0 \\
p^* \\
p^* \\
p^*
\end{array}$$

tekrar 5^2 tipinde 3 uzunluğundaki demeti elde ederiz. Bu noktadan hareketle, $p^\sigma \cdot (p^l - 1)$ ile l uzunluğunda p^σ tipindeki demeti özdeşleştirebiliriz.

Tanım 4.2.11 : $T = (t_1, t_2, \dots, t_m)$ bir dizi olsun. $1 \leq l \leq m$ olmak üzere $t_l = \alpha_0 \cdot p^0 + \alpha_1 \cdot p^1 + \dots + \alpha_n \cdot p^n$ ise l uzunluğundaki dişi p^0, p^1, \dots, p^n tipinde demetlere ayrabiliriz. Bu demetlerin sırası önemli değildir. Sütun olarak $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ katsayılı demetlere sahip tarağa T 'nin kanonik demetlenmiş tarağı denir ve $C_b(T)$ ile gösterilir.

Örnek 4.2.12 : $p = 5$ ve $T = (7, 30, 12, 8)$ olsun. $C_b(T)$ 'yi bulalım. $p^* = 5 - 1$

$$\begin{aligned}
|T| &= (5^1 - 1) \cdot 7 + (5^2 - 1) \cdot 30 + (5^3 - 1) \cdot 12 + (5^4 - 1) \cdot 8 \\
&= (5^1 - 1) \cdot (5^1 + 2 \cdot 5^0) + (5^2 - 1) \cdot (5^2 + 5^1) + (5^3 - 1) \cdot (2 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^0) + (5^4 - 1) \cdot (5^1 + 3 \cdot 5^0) \\
&= (5^1 - 1) \cdot 5^1 + (5^1 - 1) \cdot 2 \cdot 5^0 + (5^2 - 1) \cdot 5^2 + (5^2 - 1) \cdot 5^1 + (5^3 - 1) \cdot 2 \cdot 5^1 + (5^3 - 1) \cdot 2 \cdot 5^0 \\
&\quad + (5^4 - 1) \cdot 5^1 + (5^4 - 1) \cdot 3 \cdot 5^0
\end{aligned}$$

Böylece $C_b(T)$ 'nin tablosu aşağıdaki gibidir:

$$\begin{array}{cccccccc}
0 & 2p^* & 0 & 0 & 0 & 2p^* & 0 & 3p^* \\
p^* & & 0 & p^* & 2p^* & 2p^* & p^* & 3p^* \\
& & p^* & p^* & 2p^* & 2p^* & p^* & 3p^* \\
& & & p^* & 2p^* & & p^* & 3p^* \\
& & & & & & & p^*
\end{array}$$

Bu tabloyu aşağıdaki gibi ayrıştırarak katsayıları kullanmadan da elde edebiliriz.

$$\begin{array}{cccccccccccc}
0 & p^* & p^* & 0 & 0 & 0 & 0 & p^* & p^* & 0 & p^* & p^* & p^* \\
p^* & & & 0 & p^* & p^* & p^* & p^* & p^* & p^* & p^* & p^* & p^* \\
& & & p^* & p^* & p^* & p^* & p^* & p^* & p^* & p^* & p^* & p^* \\
& & & & p^* & p^* & & & & p^* & p^* & p^* & p^* \\
& & & & & & & & & & & & p^*
\end{array}$$

$C(T)$ 'de olduğu gibi $C_b(T)$ üzerinden de $P(T)$ hakkında aynı bilgileri bulabiliriz. l uzunluğundaki p^σ dişlerinden oluşan bir demet ilk en büyük p^* 'a σ 'ıncı satırda sahiptir ve $\alpha_p \cdot p^\sigma \cdot (p^l - 1)$ sayısına da bu demetin ağırlığı denir. $\alpha_p \cdot p^\sigma$ sayılarının toplamına da

$C_b(T)$ ' nin excess'i denir, $ex(C_b(T))$ ile gösterilir ve $ex(T)$ ye eşittir; $C_b(T)$ ' deki demetlerin ağırlıklarının toplamına da $C_b(T)$ ' nin ağırlığı denir, $W(C_b(T))$ ile gösterilir ve $|T|$ ' ye eşittir.

Örnek 4.2.13 : $p = 5, T = (4, 6, 2, 5)$ olsun. $C_b(T)$ ' nin tablosu

$$\begin{array}{cccccccc} p^* & p^* & p^* & p^* & 0 & p^* & p^* & p^* & 0 \\ & & & & & p^* & p^* & p^* & p^* \\ & & & & & p^* & & p^* & p^* \\ & & & & & & & p^* & p^* \\ & & & & & & & & p^* \\ & & & & & & & & p^* \end{array}$$

olur.

$$ex(C_b(T)) = 4.p^0 + 1.p^1 + 1.p^0 + 2.p^0 + 1.p^1 = 17 = ex(T)$$

$$\begin{aligned} W(C_b(T)) &= 4.p^0.(p^1 - 1) + 1.p^1.(p^2 - 1) + 1.p^0.(p^2 - 1) + 2.p^0.(p^3 - 1) + 1.p^1.(p^4 - 1) \\ &= 3528 = |T| \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Tanım 4.2.14 : Verilen bir T dizisine karşılık gelen $C(T)$ 'nin her l uzunluğundaki her τ dişinin, $0 \leq \pi(\tau) \leq l$ olmak üzere $\pi(\tau)$ -inci satırdan iki parçaya ayrılmasıyla elde edilen yapıya parçalanmış tarak denir ve parçalanmış tabloda $\pi(\tau)$ -inci satıra bir çizgi konarak gösterilir. $\pi(\tau)$ sayısına τ dişinin parçalanış sayısı denir.

Örnek 4.2.15 : $p = 5, T = (4, 6, 2, 5)$ için $C(T)$ nin bir parçalanışı

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} \overline{p^*} & \overline{p^*} & \underline{p^*} & \underline{p^*} & p^* & p^* & p^* & p^* & p^* & p^* & p^* & p^* & p^* & p^* & p^* & p^* & p^* \\ & & & & \overline{p^*} & \overline{p^*} & \overline{p^*} & \overline{p^*} & \overline{p^*} & \underline{p^*} & \underline{p^*} & p^* & p^* & p^* & p^* & p^* & p^* \\ & & & & & & & & & p^* & \underline{p^*} & \overline{p^*} & \overline{p^*} & \overline{p^*} & \overline{p^*} & \overline{p^*} \\ & & & & & & & & & & & p^* & p^* & p^* & p^* & p^* \end{array}$$

şeklinde verilebilir. Burada çizginin üstünde kalan

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} p^* & p^* & p^* & p^* & p^* & p^* & p^* & p^* & p^* & p^* & p^* & p^* & p^* & p^* & p^* & p^* \\ & & & & & & & & & p^* & p^* & p^* & p^* & p^* & p^* & p^* \\ & & & & & & & & & & & p^* \end{array}$$

kısmı 1. parça olarak ve çizginin altında kalan

olsun. Bu parçalanmış tarağın demetlenmiş hali aşağıdaki gibidir ve $C_b(T)$ nin bir parçalanışına eşit olacağından $C_b(T)$ ile uyumludur;

$$\begin{array}{ccccccc} \overline{p^*} & \underline{p^*} & 0 & p^* & \overline{p^*} & \overline{p^*} & \\ & & & p^* & \overline{p^*} & p^* & p^* \\ & & & & \overline{p^*} & & \end{array}$$

Diğer taraftan, $C(T)$ ' nin

$$\begin{array}{ccccccccccc} \overline{p^*} & \underline{p^*} & p^* & p^* & p^* & p^* & p^* & \overline{p^*} & \overline{p^*} & \overline{p^*} & \\ & & \overline{p^*} & \overline{p^*} & \overline{p^*} & \overline{p^*} & \underline{p^*} & p^* & p^* & p^* & p^* \end{array}$$

parçalanışının demetlenmiş hali yine kendisine eşittir ve $C_b(T)$ üzerindeki hiç bir parçalanışa eşit olamayacağından bu parçalanmış tarak $C_b(T)$ ile uyumlu değildir.

5.SONUÇLAR ve TARTIŞMA

5.1.Milnor Çarpımının Tarak Yapıları ile İlişkisi

Sabit R ve S dizileri ve p tek asal sayısı verilsin. $P(T)$ Milnor baz elemanının $P(R).P(S)$ çarpımının bir terimi olması için gerek ve yeter şartın $T(X) = T$ olacak şekilde $\forall X \in \chi_{R,S}$ matrisleri için elde edilen $\beta(X)$ katsayılarının toplamının mod p de sıfırdan farklı olması gerektiği Milnor çarpım formülünden açıkça görülmektedir. Bu bölümdeki amacımız bir önceki bölümde tanımladığımız yapıları kullanarak $\beta(X) = 0 \pmod{p}$ olan $X \in \chi_{R,S}$ matrislerini eleyerek işlem kalabalığını azaltmak ve bazı özel durumlar için $P(T)$ elemanının katsayısını belirlemektir.

Teorem 5.1.1 : $a, b \in \mathbb{N}$, $b < a$, p tek asal sayı ve $0 \leq \alpha_i, \beta_i < p$ olmak üzere

$$a = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \cdot p^i, b = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i \cdot p^i \text{ de bu sayıların } p\text{-adik açılımları olsun. Bu durumda}$$

$$\binom{a}{b} = \prod_i \binom{\alpha_i}{\beta_i} \pmod{p}$$

denkliği geçerlidir.

Teorem 5.1.2 : $a, b \in \mathbb{N}$, $b < a$, p tek asal sayı ve $0 \leq \alpha_i, \beta_i < p$ olmak üzere

$$a = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \cdot p^i, b = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i \cdot p^i \text{ de bu sayıların } p\text{-adik açılımları olsun. Bu durumda}$$

$$\binom{a}{b} \neq 0 \pmod{p}$$

olması için gerek ve yeter şart $\forall i$ için $\alpha_i \geq \beta_i$.

Teorem 5.1.3 : $n_j \in \mathbb{N}$, $j \in \{1, 2, \dots, m\}$, $\sum_{j=1}^m n_j = n$ ve $m \geq 3$ olmak üzere

$$\binom{n}{n_1 \mid n_2 \mid \dots \mid n_m} = \binom{n}{n_1} \binom{n-n_1}{n_2} \binom{n-(n_1+n_2)}{n_3} \dots \binom{n-(n_1+n_2+\dots+n_{m-1})}{n_m}$$

Lemma 5.1.4 : $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, p asal sayı ve $\forall i$ için $0 \leq x_i < p$ olsun. $\sum_{i=1}^m x_i \geq p$ ise

$$\sum_{i=t}^m x_i \pmod{p} < x_t \text{ olacak şekilde bir } t \in \{1, 2, \dots, m\} \text{ vardır.}$$

İspat : Varsayalım ki $\forall t \in \{1, 2, \dots, m\}$ için $\sum_{i=t}^m x_i \bmod p \geq x_t$ olsun. $\sum_{i=1}^m x_i \geq p$ ve $\forall i$ için $0 \leq x_i < p$ olduğundan $\exists k \in \{1, 2, \dots, m\}$ öyle ki $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ için $\sum_{i=j}^m x_i \geq p$ ve $l \in \{k+1, k+2, \dots, m\}$ için $\sum_{i=l}^m x_i < p$. Bu durumda $j = k$ için $a \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ olmak üzere $\sum_{i=k}^m x_i = p + a$ yazılabilir ve varsayımdan $\sum_{i=k}^m x_i \bmod p \geq x_k$ ise $a \geq x_k$ olur. $\sum_{i=k+1}^m x_i = x_k + x_{k+1} + \dots + x_m - x_k = p + a - x_k \geq p$ olur. Bu da $i = k+1$ için $\sum_{i=k+1}^m x_i < p$ olması ile çelişir. Dolayısıyla $\sum_{i=t}^m x_i \bmod p < x_t$ olacak şekilde bir $t \in \{1, 2, \dots, m\}$ vardır.

Teorem 5.1.5 : p tek asal sayı, $n_j \in \mathbb{N}$, $j \in \{1, 2, \dots, m\}$, $\sum_{j=1}^m n_j = n$ ve $0 \leq \alpha_i^j < p$ için

$n_j = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i^j p^i$ olmak üzere

$$\left(n_1 \mid n_2 \mid \dots \mid n_m \right) \neq 0 \bmod p$$

olması için gerek ve yeter şart $\forall i$ için $\sum_{j=1}^m \alpha_i^j < p$ olmasıdır.

İspat : $(\Leftarrow) \forall i$ için $\sum_{j=1}^m \alpha_i^j < p$ olsun. Bu takdirde n sayısının p -adik açılımı $\sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^m \alpha_i^j \right) \cdot p^i$

şeklinde olur.

$$\begin{aligned} \left(n_1 \mid n_2 \mid \dots \mid n_m \right) &= \binom{n}{n_1} \binom{n-n_1}{n_2} \binom{n-(n_1+n_2)}{n_3} \dots \binom{n-(n_1+n_2+\dots+n_{m-1})}{n_m} \\ &= \left(\begin{array}{c} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^m \alpha_i^j \right) \cdot p^i \\ \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i^1 p^i \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{j=2}^m \alpha_i^j \right) \cdot p^i \\ \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i^2 p^i \end{array} \right) \dots \left(\begin{array}{c} \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i^m p^i \\ \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i^m p^i \end{array} \right) \end{aligned}$$

Teorem 5.1.2 'den yukarıdaki her bir kombinasyonun sıfırdan farklı olduğu açıktır.

Dolayısıyla

$$\left(n_1 \mid n_2 \mid \dots \mid n_m \right) \neq 0 \bmod p$$

elde edilir.

(\Rightarrow) Diğer taraftan $\sum_{j=1}^m \alpha_i^j \geq p$ olacak şekilde i bileşenleri var ve bunların en küçüğü r

olsun.. $[x]_i$, x 'in p -adic açılımındaki p^i teriminin katsayısı olmak üzere

$$\begin{aligned} \binom{n}{n_1 \mid n_2 \mid \dots \mid n_m} &= \binom{n}{n_1} \binom{n-n_1}{n_2} \binom{n-(n_1+n_2)}{n_3} \dots \binom{n-(n_1+n_2+\dots+n_{m-1})}{n_m} \\ &= \prod_i \binom{[n]_i}{\alpha_i^1} \prod_i \binom{[n-n_1]_i}{\alpha_i^2} \dots \binom{[n-(n_1+n_2+\dots+n_{m-1})]_i}{\alpha_i^m} \pmod{p} \\ &= \prod_i \binom{\left[\sum_{j=1}^m n_j \right]_i}{\alpha_i^1} \prod_i \binom{\left[\sum_{j=2}^m n_j \right]_i}{\alpha_i^2} \dots \binom{[n_m]_i}{\alpha_i^m} \pmod{p} \end{aligned}$$

ifadesinde $i = r$ için

$$\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^m \alpha_r^j \pmod{p} \\ \alpha_r^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{j=2}^m \alpha_r^j \pmod{p} \\ \alpha_r^2 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} \sum_{j=m}^m \alpha_r^j \pmod{p} \\ \alpha_r^m \end{pmatrix}$$

çarpımında Lemma 5.1.4 'den $\sum_{j=t}^m \alpha_r^j < \alpha_r^t \pmod{p}$ olacak şekilde bir t bileşeni vardır ve

Teorem 5.1.2 'den $\begin{pmatrix} \sum_{j=t}^m \alpha_r^j \pmod{p} \\ \alpha_r^t \end{pmatrix} = 0 \pmod{p}$ olur. Dolayısıyla

$$\binom{n}{n_1 \mid n_2 \mid \dots \mid n_m} = 0 \pmod{p}$$

dir.

Tanım 5.1.6 : $T(X) = T$ olacak şekilde bir $X \in \chi_{R,S}$ matrisi verilsin. Bu T dizisine karşılık gelen X matrisi tarafından belirlenen parçalanmış tarak aşağıdaki şekilde tanımlanır ve bu parçalanmış tarak $PC_X(T)$ ile gösterilir;

$\forall x_{i,j}$ için $i+j$ uzunluğunda j parçalanış sayısına sahip $x_{i,j}$ tane diş bulunur.

Teorem 5.1.7 : Sabit R ve S dizileri ve $T(X) = T$ olacak şekilde bir $X \in \chi_{R,S}$ matrisi verilsin. Bu durumda $\beta(X) \neq 0 \pmod{p}$ olması için gerek ve yeter şart $PC_X(T)$ nin $C_b(T)$ ile uyumlu olmasıdır.

İspat : $\beta(X) \neq 0 \pmod{p} \Leftrightarrow \forall l$ için $b_l(X) \neq 0 \pmod{p} \Leftrightarrow t_l = x_{0,l} + x_{1,l-1} + \dots + x_{l,0}$

olmak üzere $b_l(X) = \binom{t_l}{x_{0,l} \mid x_{1,l-1} \mid \dots \mid x_{l,0}} \neq 0 \pmod{p} \Leftrightarrow 0 \leq \alpha_i^{j,l-j} < p$ için

$x_{j,l-j} = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i^{j,l-j} p^i$ olmak üzere Teorem 5.1.5 'ten $\forall i$ için $\sum_{j=0}^l \alpha_i^{j,l-j} < p$ olmalıdır. Bu da

demetlenmiş tarağı elde ederiz ki bu da $C_b(R)$ demetlenmiş tarağıdır.

Sonuç olarak; $C_b(T)$ tarağı üzerinde aldığımız herhangi bir parçalanışın 1. kısmı $C(S)$ tarağı, 2. kısımda $C_b(R)$ demetlenmiş tarağı ise bu parçalanış yardımıyla $X \in \chi_{R,S}$ olacak şekilde bir X ($PC_X(T) = C_b(T)$) matrisi bulunabilir ve parçalanma $C_b(T)$ tarağı üzerinden alındığı için uyumluluk şartında sağlayacağından Teorem 5.1.7'den $\beta(X) \neq 0 \pmod p$ olur. Böylece Milnor çarpımında katsayıya etkisi olmayan $X \in \chi_{R,S}$ matrisleri elenmiş olur. Buna rağmen $\beta(X) \neq 0 \pmod p$ şartını sağlayan $X \in \chi_{R,S}$ matrislerinin $\beta(X)$ katsayıları toplamı $\pmod p$ de sıfır olabilir. Şimdi bazı Milnor elemanları için bu katsayıları hesaplayalım.

Teorem 5.1.11 : R ve S dizileri ve p tek asal sayısı verilsin. $n_i \geq 0$ tamsayısı için $t_i = p^{n_i}$ veya $t_i = 0$ olmak üzere $T = (t_1, t_2, \dots, t_s)$ dizisi için $P(T)$ Milnor baz elemanının $P(R).P(S)$ çarpımının terimi olması için gerek ve yeter şart $a(T)$, $C_b(T)$ demetlenmiş tarağı üzerinde 1. kısımdan $C(S)$ tarağı ve 2. kısımdan $C_b(R)$ parçalanmış tarağının elde edildiği parçalanışların sayısı olmak üzere, $a(T) \neq 0 \pmod p$ olmasıdır.

İspat : $\forall t_i \neq 0$ için $b_l(X)$ katsayısını hesaplayalım. $t_i = p^{n_i}$ için $C(T)$ tarağında

$$\begin{array}{c}
 t_l \text{ tane} \\
 \overbrace{p^* p^* \dots p^*} \\
 l \text{ tane} \{ \begin{array}{c} p^* p^* \dots p^* \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ p^* p^* \dots p^* \end{array}
 \end{array}$$

dişi ve $C_b(T)$ demetlenmiş tarağında

$$\begin{array}{c}
 0 \\
 n_l \text{ tane} \{ \begin{array}{c} \vdots \\ 0 \\ p^* \\ \vdots \\ p^* \end{array}
 \end{array}$$

demetlenmiş dişi vardır. Bu demetlenmiş dişi üzerindeki herhangi bir parçalanış için $\pi(\tau^l)$ parçalanma sayısını göstermek üzere

$$\begin{array}{c}
0 \quad 0 \quad 0 \\
\overline{p^*} \quad 0 \quad 0 \\
p^* \quad 0 \\
\overline{p^*} \quad \overline{p^*} \\
p^* \\
p^*
\end{array}$$

Dolayısıyla $P(T)$ Milnor baz elemanı $P(R).P(S)$ çarpımının terimidir.

Şimdi Teorem 5.1.11 'in daha genel halini yazalım.

Teorem 5.1.13 : R ve S dizileri ve p tek asal sayısı verilsin. $n_{ij} \geq 0$ ($n_{ij} \neq n_{ik}$) tamsayısı için $t_i = \sum_j p^{n_{ij}}$ veya $t_i = 0$ olmak üzere $T = (t_1, t_2, \dots, t_s)$ dizisi için $P(T)$ Milnor baz elemanının $P(R).P(S)$ çarpımının terimi olması için gerek ve yeter şart $a(T)$, $C_b(T)$ demetlenmiş tarağı üzerinde 1. kısmından $C(S)$ tarağı ve 2. kısmından $C_b(R)$ parçalanmış tarağının elde edildiği parçalanışların sayısı olmak üzere $a(T) \neq 0 \pmod p$ olmasıdır.

İspat : $\forall t_l \neq 0$ için $b_l(X)$ katsayısını hesaplayalım. $n_{lj} \neq n_{lk}$ olmak üzere $t_l = \sum_j p^{n_{lj}}$ için $C(T)$ tarağında

$$\begin{array}{c}
t_l \text{ tane} \\
\overbrace{p^* p^* \dots p^*} \\
l \text{ tane} \{ p^* p^* \dots p^* \\
\vdots \quad \ddots \quad \vdots \\
p^* p^* \dots p^*
\end{array}$$

dişleri ve $C_b(T)$ demetlenmiş tarağında

$$\begin{array}{ccc}
0 & 0 & 0 \\
n_{l1} \text{ tane} \{ \vdots & n_{l2} \text{ tane} \{ \vdots & \dots n_{lm_l} \text{ tane} \{ \vdots \\
0 & 0 & 0 \\
p^* & p^* & p^* \\
l \text{ tane} \{ \vdots & l \text{ tane} \{ \vdots & \dots l \text{ tane} \{ \vdots \\
p^* & p^* & p^*
\end{array}$$

demetlenmiş dişleri vardır. Bu demetlenmiş dişler üzerinde herhangi bir parçalanış için κ_i , i parçalanışına sahip dişlerin kümesini göstermek üzere

$$\begin{aligned}
b_l(X) &= \left(\begin{array}{c} \sum_j p^{n_{ij}} \\ \sum_{j \in \kappa_0} p^j \mid \sum_{j \in \kappa_1} p^j \mid \cdots \mid \sum_{j \in \kappa_l} p^j \end{array} \right) \\
&= \left(\begin{array}{c} \sum_j p^{n_{ij}} \\ \sum_{j \in \kappa_0} p^j \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \sum_j p^{n_{ij}} - \sum_{j \in \kappa_0} p^j \\ \sum_{j \in \kappa_1} p^j \end{array} \right) \cdots
\end{aligned}$$

katsayısındaki herbir kombinasyon $n_{ij} \neq n_{ik}$ şartından ve Teorem 5.1.1'den 1 olur. Dolayısıyla $\beta(X) = b_1(X)b_2(X)\cdots b_m(X) = 1 \pmod p$ elde edilir. $C_b(T)$ demetlenmiş tarağı üzerinde, 1. kısımdan $C(S)$ tarağı ve 2. kısımdan $C_b(R)$ parçalanmış tarağı elde edilen parçalanışların sayısı $a(T)$ olduğundan ve bu parçalanışlardan elde edilen her $X \in \chi_{R,S}$ matrisi için $\beta(X) = 1 \pmod p$ olduğundan $P(R).P(S)$ çarpımında $P(T)$ Milnor baz elemanı $a(T)$ tane vardır. Dolayısıyla $P(T)$ Milnor baz elemanının $P(R).P(S)$ çarpımının terimi olması için $a(T) \neq 0 \pmod p$ olmalıdır.

Örnek 5.1.14 : $p = 5$ ve $R = (125, 125, 5, 5)$, $S = (1, 5, 1)$, $T = (0, 0, 5^0, 5^1 + 5^0, 5^0)$ dizileri verilsin. $P(T)$ Milnor baz elemanının $P(R).P(S)$ çarpımının terimi olup olmadığını inceleyelim.

$C(S)$:

$$\begin{array}{cccccc}
p^* & p^* & p^* & p^* & p^* & p^* & p^* \\
& p^* & p^* & p^* & p^* & p^* & \\
& & & & & & p^*
\end{array}$$

$C_b(R)$:

$$\begin{array}{cccc}
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & p^* & p^* \\
0 & 0 & p^* & p^* \\
p^* & p^* & p^* & p^* \\
& p^* & & p^*
\end{array}$$

$C_b(T)$:

$$\begin{array}{cccc}
0 & p^* & 0 & p^* \\
p^* & p^* & p^* & p^* \\
p^* & p^* & p^* & p^* \\
p^* & p^* & p^* & p^* \\
& & p^* & p^*
\end{array}$$

Burada $C_b(T)$ üzerinde 1. kısmından $C(S)$ tarağı, 2. kısmından $C_b(R)$ demetlenmiş tarağı elde elde edilebilen iki parçalanış vardır.

$$\begin{array}{cccc}
0 & p^* & 0 & p^* \\
\overline{p^*} & p^* & p^* & \overline{p^*} \\
p^* & p^* & p^* & p^* \\
p^* & \overline{p^*} & \overline{p^*} & p^* \\
& & p^* & p^*
\end{array}
\quad \text{ve} \quad
\begin{array}{cccc}
0 & p^* & 0 & p^* \\
p^* & \overline{p^*} & \overline{p^*} & p^* \\
p^* & p^* & p^* & p^* \\
\overline{p^*} & p^* & p^* & \overline{p^*} \\
& & p^* & p^*
\end{array}$$

$a(T) = 2 \neq 0 \pmod{p}$ olduğundan $P(T)$ Milnor baz elemanı $P(R).P(S)$ çarpımının terimidir ve katsayısı 2 dir.

KAYNAKLAR

- [1]Adem, J., 1952. The iteration of the Steenrod Squares in Algebraic Topology. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 38,(0) : 720-726.
- [2]Alizade R., Pancar A., 1999, *Homoloji Cebire Giriş*, Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Samsun, 177p.
- [3]Bourbaki, N., 1989, *Algebra I Chapters 1-3*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg Nem York Inc, Germany, 709p
- [4]Çelik, Ş.A., *Spectral Diziler ve Uygulamaları*, Yüksek Lisans Tezi, Ege Üniversitesi, 2003
- [5]Karaca, İ., 2005. Monomial Bases In The Mod-p Steenrod Algebra. *Czh. Math. Journal*, 55, (3) : 699-707
- [6]Karaca, İ., 2002. Nilpotence Relation in the Mod-p Steenrod Algebra. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 171,(2) : 257-264
- [7]Karaca, İ., 1999. The nilpotence height of for odd primes. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 351,(2) : 547-558.
- [8]Massey, W.S., 1991. *A Basic Course in Algebraic Topology*, Springer-Verlag Nem York Inc, New York , 430p.
- [9]Milnor, J., 1958. The Steenrod Algebra and its Dual. *Ann. Of Math.*, 67,(2) : 150-171.
- [10]Monks, K.G., 1998. Change of Basis, Monomial Relations, and Bases for the Steenrod Alg. *J. of P. and Ap. Alg.*, 125, (1) : 235-260.
- [11]Munkres, J.R., 1984. *Elements of Algebraic Topology*, Perseus Books Publishigs, Cambridge, 455p.
- [12]Silverman, J.H., 1996. Multiplication and the combinatorics in the Steenrod Algebra. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 111,(1) : 303-323
- [13]Spanier, E.H., 1966. *Algebraic Topology*, Springer-Verlag Nem York Inc, New York, 528p.
- [14]Steenrod, N.E., Epstein, D .B.A, 1962. *Cohomology Operations*, Princeton University Press, 143p.
- [15]Steenrod, N.E., 1952. Reduced Powers of Cohomology classes. *Ann. Of Math.*, 56,(1) : 47-67

- [16]Tanay, B., Karaca, İ., 2004. The Bundled and partitioned Comb in the Mod-p Steenrod Algebra. *Int. Journal of Pure and Applied Algebra*.16 (3) : 285-297
- [17]Tanay, B., *Steenrod Cebirinde Bazlar Üzerine*, Doktora Tezi, Ege Üniversitesi, 2003.
- [18]Vick, J.W., 1994. *Homology Theory An Introduction to Algebraic Topology*, Springer-Verlag New York Inc, New York , 256p.
- [19]Wood, R.M.W., 1996. A note on Bases and Relations in The Steenrod Algebra. *Bull. London Math. Soc.*, 27,(4) : 380-386

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	Tarkan ÖNER
Doğum Yeri	Bartın
Doğum Tarihi	1979
Medeni Hali	Evli

EĞİTİM VE AKADEMİK BİLGİLER

Lise	Bursa Nuri ERBAK Lisesi
Lisans	Muğla Üniversitesi Matematik Bölümü 1999-2004
Yabancı Dil	İngilizce

MESLEKİ BİLGİLER

Muğla Üniv. Fen-Edebiyat Fak. Matematik Bölümü Araştırma Görevlisi (2005- ...)