

T.C.
YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

**ÜÇÜNCÜ, DÖRDÜNCÜ ve BEŞİNCİ BASAMAKTAN BELLİ
BİÇİMDEKİ LİNEER OLMAYAN DİFERANSİYEL
DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN NİTELİKSEL
DAVRANIŞLARI ÜZERİNE**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: Merve Esra EREZ ÇELİK
DANIŞMAN : Prof. Dr. Cemil TUNÇ

VAN - 2007

T.C.
YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

**ÜÇÜNCÜ, DÖRDÜNCÜ ve BEŞİNCİ BASAMAKTAN BELLİ
BİÇİMDEKİ LİNEER OLMAYAN DİFERANSİYEL
DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN NİTELİKSEL
DAVRANIŞLARI ÜZERİNE**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN: Merve Esra EREZ ÇELİK

VAN - 2007

ÖZET

ÜÇÜNCÜ, DÖRDÜNCÜ ve BEŞİNCİ BASAMAKTAN BELLİ BİÇİMDEKİ LİNEER OLMAYAN DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN NİTELİKSEL DAVRANIŞLARI ÜZERİNE

EREZ ÇELİK, Merve Esra

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Cemil TUNÇ

Şubat 2007, 92 sayfa

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde tez ile ilgili bazı temel tanımlar, teoremler, lemmalar ve bunlar ile ilgili bazı örnekler verildi. İkinci bölümde ise, bazı üçüncü basamaktan lineer olmayan diferansiyel denklemlerin Dispativliği için Frequency-Domain kriterleri verildi. Bu kriterler Afuwape(1978), tarafından daha önceden incelenmişti. Tezin üçüncü bölümünde ise ikinci bölümde olduğu gibi, ilgili literatürde bazı dördüncü basamaktan lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çözümlerinin sınırlılığı, üstel anlamda kararlılığı ve periyodik çözümlerin varlığı ile ilgili olarak var olan bazı sonuçlar sunuldu. Tezin son bölümünde ise ikinci ve üçüncü bölümde belirtilen sonuçlara benzer bazı sonuçlar belli türden beşinci basamaktan lineer olmayan diferansiyel denklemler için incelendi.

Anahtar kelimeler: Düzgün dispativlik, Frequency-Domain Kriteri, global üstel kararlılık, kararlılık, periyodiklik

ABSTRACT

ON THE QUALITATIVE BEHAVIOR OF SOLUTIONS OF SOME CERTAIN NON-LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS of THIRD, FOURTH and FIFTH ORDER

EREZ ÇELİK, Merve Esra

Msc , Mathematics Science

Supervisor : Prof. Dr. Cemil TUNÇ

February 2007, 92 pages

This thesis consists of four chapters. In the first chapter, some basic definitions, theorems, lemmas, which are related to the subject of the thesis, and some explanatory examples with respect to these theorems, lemmas were given. Later, in the second chapter of the thesis, it was given Frequency-Domain criteria for uniform dissipativity of some certain non-linear differential equations of third order. These criterions have been investigated by Afuwape (1978), earlier. In the third chapter of the thesis, some similar topics which were investigated in the literature, as in the second chapter of the thesis, that is, boundedness of solutions, globally exponential stability of solutions, existence of periodic solutions of some non-linear differential equations of fourth order were introduced. Finally, in the last chapter of the thesis, some similar topics carried out on the certain non-linear differential equations of fifth order earlier were also studied.

Keywords: Frequency-Domain Criteria, globally exponential stability, periodicity, stability, uniform dissipativity.

ÖNSÖZ

Belirtelim ki, diferansiyel denklemlerin çözümlerinin niteliksel davranışları ile ilgili olarak, yani çözümlerin kararlılık, sınırlılık, asimptotik davranışları, periyodik çözümler v.b. konularda literatürde yapılmış bulunan çok sayıda çalışma mevcuttur. Bu çalışmaların bir kısmı kitaplarda verilmekte, bir kısmı ise makale halinde mevcuttur. Bu çalışmalarda diferansiyel denklemlerin çözümlerinin kararlılık, sınırlılık, üstel kararlılık, çözümlerinin dispativlik özelliklerinin yanı sıra, burada belirtilmeyen çok sayıda özellikleri incelenmiş olup, uygulamada bunların önemi gösterilmiştir. Bu çalışmaların büyük bir kısmında Lyapunov'un İkinci (ya da) Doğrudan Yöntemi, bir kısmında ise Frequency-Domain Metodu kullanılmıştır.

Bu çalışmamda bana destek ve yardımcı olan değerli hocam Prof. Dr. Cemil TUNÇ' a, sevgili eşim Ferit ÇELİK' e ve aileme candan teşekkür ediyorum.

Van-2007

Merve Esra EREZ ÇELİK

İÇİNDEKİLER

	sayfa
ÖZET	i
ABSTRACT	iii
ÖNSÖZ	v
İÇİNDEKİLER	vii
1. TEMEL TANIM ve TEOREMLER	1
2. ÜÇÜNCÜ BASAMAKTAN LİNEER OLMAYAN BAZI DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN DİSPATİVLİĞİ İÇİN FREQUENCY-DOMAIN KRİTERLERİ	13
2.1. Üçüncü Basamaktan Lineer Olmayan Bazı Diferansiyel Denklemlerin Dispativ- liği İçin Frequency-Domain Kriterleri	13
3. DÖRDÜNCÜ BASAMAKTAN LİNEER OLMAYAN BAZI DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN DAVRANIŞLARI	19
3.1. Giriş	19
3.2. Dördüncü Basamaktan Lineer Olmayan Bazı Diferansiyel Denklemlerin Çözümlerinin Sınırlılığı, Global Üstel Kararlılığı ve Periyodik Olması	19
3.3. Dördüncü Basamaktan Lineer Olmayan İki Diferansiyel Denklem Sınıfı İçin Çözümlerin Düzgün Dispativliği (Uniform Dissipative)	20
3.4. Dördüncü Basamaktan Bazı Lineer Olmayan Diferansiyel Denklemler İçin Düzgün Dispative Çözümler	28
3.5. Dördüncü Basamaktan Lineer Olmayan Bazı Diferansiyel Denklemlerin Çözümlerinin Niteliksel Davranışları Üzerine	38
3.6. Dördüncü Basamaktan Lineer Olmayan Bazı Diferansiyel Denklemler İçin Frequency-Domain Metodu İle Çözümlerin Kararlılığı ve Periyodik Davranışların Belirlenmesi	45

4. BEŞİNCİ BASAMAKTAN LİNEER OLMAYAN BAZI DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN DAVRANIŞLARI	56
4.1. Beşinci Basamaktan Lineer Olmayan Bazı Diferansiyel Denklemleri Düzgün Dispativliği	56
4.2. Beşinci Basamaktan Lineer Olmayan Bazı Diferansiyel Denklemlerin Çözümlerinin Sınırlılığı, Üstel Kararlılığı ve Periyodikliği	66
4.3. Beşinci Basamaktan Lineer Olmayan Bazı Diferansiyel Denklemlerin Düzgün Dispativliği Üzerine	79
KAYNAKLAR	88
ÖZ GEÇMİŞ	92

1.TEMEL TANIM ve TEOREMLER

Bu bölümde tez konusu ile ilgili olan bazı temel tanım ve teoremler verilecektir. Ayrıca konu ile ilgili açıklayıcı bazı örnekler ifade edilecektir. Şimdi, birinci basamaktan

$$x' = f(t, x), \quad (1.1)$$

diferansiyel denklem sistemini göz önüne alalım. Burada $x \in R^n$ ve $t \in [0, \infty)$ olup, f fonksiyonu t ve x 'in sürekli bir fonksiyonudur.

1.1.1.Tanım

$x(t)$, (1.1) denkleminin bir çözümü olsun. $T > 0$ olmak üzere, eğer $x(t) = x(t + T)$ ise, $x(t)$ çözümüne (1.1) denkleminin bir periyodik çözümü denir ve T ise x in periyodu olarak bilinir. Şayet T en küçük periyot ise T ye esas periyot adı verilir (Afuwape ve Adesina,2005).

Örnek:

İkinci basamaktan sabit katsayılı, lineer

$$x'' + x = 0$$

diferansiyel denklemini ele alalım. Bu denklem $x_1(t) = \cos t$ ve $x_2(t) = \sin t$ çözümlerine sahiptir. Bu çözümler birer periyodik çözüm olup, çözümler için esas periyot $T = 2\pi$ dir.

1.1.2.Tanım

(1.1) denklemini ele alalım. $I \subset [0, \infty)$ ve $A \subset R^n$ olsun. Eğer herhangi bir $\varsigma > 0$ sayısı için bir $I(\varsigma) > 0$ var ve $I(\varsigma)$ uzunluktaki bir aralıkta bir τ sayısı bulunabilir öyle ki her $t \in I, x \in A$ için,

$$\|f(t + \tau, x) - f(t, x)\| \leq \varsigma$$

oluyorsa, $f(t, x)$ fonksiyonuna x 'e göre düzgün ve t 'ye göre ise hemen hemen periyodiktir denir.

Belirtelim ki, $f(t, x)$ fonksiyonunun t 'ye göre hemen hemen periyodik olması durumunda (1.1) denkleminin $x(t)$ çözümüne hemen hemen periyodiktir denir (Afuwape ve Adesina, 2005).

Örnek:

İkinci basamaktan sabit katsayılı, lineer

$$x'' + x = \cos 2t$$

diferansiyel denklemini ele alalım. Bu denklem,

$$x' = y,$$

$$y' = -x + \cos 2t$$

sistemine eşdeğer olup, bu diferansiyel denklem sistemi

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \cos 2t \end{bmatrix}$$

biçiminde düzenlenebilir. Burada (1.1) ile karşılaştırma yapıldığında

$$f(t, x) = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos 2t \end{bmatrix}$$

olduğu görülür. $f(t, x) = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos 2t \end{bmatrix}$ fonksiyonunun yukarıdaki tanımdaki özellikleri sağladığı açıktır.

1.1.3.Tanım

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y)$$

$$\frac{dy}{dt} = Q(x, y)$$

otonom sistemi verilsin. (x_0, y_0) bir nokta olmak üzere, $P(x_0, y_0) = 0$ ve $Q(x_0, y_0) = 0$ ise, (x_0, y_0) noktasına bu diferansiyel denklem sisteminin bir denge noktası (veya kritik noktası) denir (Ross, 1984).

Örnek:

İkinci basamaktan sabit katsayılı, lineer

$$x'' + x = 0$$

diferansiyel denklemini tekrar ele alalım. Bu denklem,

$$x' = y,$$

$$y' = -x$$

sistemine eşdeğerdir. $(0,0)$ noktası bu sisteminin bir denge noktasıdır.

1.1.4.Tanım

$x(t)$, (1.1) diferansiyel denkleminin bir çözümü ve $f(t,0) = 0$ olsun. Eğer başlangıç şartlarında bağımsız pozitif α ve β sabitleri var öyle ki $\|x(t_0)\| \leq \varepsilon$ olduğunda her $t \geq t_0$ için,

$$\|x(t)\| \leq \beta e^{-\alpha(t-t_0)} \|x(t_0)\|$$

oluyorsa, (1.1) denkleminin sıfır denge noktasına üstel olarak kararlıdır denir (Afuwape ve Adesina,2005).

Örnek:

$$\frac{dx}{dt} = -x$$

$$x(t_0) = x_0$$

başlangıç değer problemini göz önüne alalım. Bu problem için $f(t,x) = -x$ ve $f(t,0) = 0$ dır.

Ayrıca, bu başlangıç değer problemi $x(t) = x_0 \exp[-(t-t_0)]$ çözümüne sahiptir.

$|x(t)| \leq |x_0| e^{[-(t-t_0)]}$ ve $\alpha = \beta = 1$ olduğu açıktır. Dolayısıyla (1.1) denkleminin sıfır çözümü üstel olarak kararlıdır.

1.1.5.Tanım (Slyvester Kriteri)

$A = (a_{ij})$, $n \times n$ -basamaktan, reel ve simetrik bir matris, yani $A^t = A$ olsun.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ & & & \cdot & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & \cdot & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{bmatrix}$$

olarak alınabilir, burada, $a_{ij} = a_{ji}$ ($i \neq j$) dir.

Slyvester Kriteri'ne göre, A matrisinin pozitif tanımlı olması için ancak ve ancak A 'nın tüm esas köşegen minörlerinin pozitif olmasıdır; yani

$$a_{11} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0, \dots, |A| > 0$$

olmalıdır (Rao, 1980).

Örnek:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ matrisi simetrik bir matristir.}$$

$$a_{11} = 2 > 0 \text{ ve } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 3 > 0 \text{ dır.}$$

Bu nedenle A matrisi pozitif tanımlı bir matristir.

Yukarıdaki kriter, bir başka şekilde, aşağıdaki gibi de ifade edilmektedir.

1.1.1.Teorem

A , $n \times n$ -basamaktan reel elemanlı ve simetrik bir matris olsun. A 'nın pozitif tanımlı olması için gerek ve yeter şart tüm özdeğerlerinin pozitif olmasıdır (Bellman,1997).

Örnek:

Yukarıda verilen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{matrislerinin pozitif tanımlı oldukları kolaylıkla}$$

görülebilir.

1.1.6.Tanım

A , $n \times n$ -basamaktan bir matris olsun. λ reel yada karmaşık bir sayı ve X , $n \times 1$ -boyutlu bir vektör olmak üzere $AX = \lambda X$, denklemini sağlayan λ değerlerine A matrisinin karakteristik (öz) değerleri adı verilir. λ 'nın bu değerlerine karşılık gelen sıfırdan farklı X vektörlerine ise, A matrisinin karakteristik (öz) vektörleri denir (ONeil,1986).

Örnek:

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

matrisini ele alalım. Yukarıda verilen tanım uygulandığında, bu matrisin özdeğerleri $\lambda_1 = 2$ ve $\lambda_2 = 4$ olarak bulunur. Bu özdeğerleri karşılık gelen özvektörler ise sırası ile

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

ve

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Ayrıca A matrisi pozitif tanımlı bir matristir.

1.1.7.Tanım

$A = (a_{ij})$, $n \times n$ -basamaktan reel ve simetrik bir matris olsun. Eğer $A = (a_{ij})$ matrisinin tüm özdeğerleri negatif reel kısımlı ise, A matrisine kararlı bir matristir denir (Bellman,1997).

Örnek:

$$C = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

matrisi kararlı bir matristir. Gerçekte C matrisinin özdeğerleri $\lambda_1 = -1$ ve $\lambda_2 = -3$ olarak bulunur. Matrisin kararlı olması tanımından dolayı, C matrisi kararlı bir matristir.

1.1.2.Teorem

Eğer

$$L(D)y = (D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_n)y = 0$$

diferansiyel denkleminde ait

$$L(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n$$

karakteristik polinomunun tüm kökleri negatif reel kısımlı ise, bu takdirde $a_1, a_2, \dots, a_n$ katsayıları pozitifdir (Rao, 1980).

1.1.3.Teorem

Eğer,

$$L(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n$$

karakteristik polinomunun kökleri negatif reel kısımlı ise, bu takdirde $L(\lambda)$ polinomu karalıdır.(Rao 1980).

1.1.4. Teorem (Hurwitz Teoremi)

$a_1, a_2, \dots, a_n$ reel sabitler olmak üzere,

$$L(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n \quad (1.2)$$

polinomunun tüm köklerinin negatif reel kısmı olması için gerek ve yeter koşul;

$$H_n = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ & & & & & & & . & & & \\ & & & & & & & . & & & \\ & & & & & & & . & & & \\ & & & & & & & . & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & a_n \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

matrisinin tüm esas köşegen minörlerinin pozitif olmasıdır. Burada H_n matrisi Hurwitz matrisi olarak bilinir ve bu matrisi:

$$\begin{cases} H_n = (b_{ik}) \\ b_{ik} = a_{2i-k} \end{cases} \quad (i, k = 1, 2, 3, \dots, n)$$

bağıntıları yardımıyla aşağıdaki özellikler dikkate alınarak belirlenir: Şöyle ki, b_{ik} katsayıları belirlenirken bunlara karşılık gelen a_{2i-k} katsayılarının indisleri şayet (1.2) polinomunun katsayılarının indisleri arasında yok ise bunların yerine sıfır alınacak, $a_0 = 1$ olduğu kabul edilecektir.

1.1.8. Tanım

$$X' = AX - B\varphi(\sigma) + P(t), \quad \sigma = C^* X \quad (1.4)$$

diferansiyel denklem sistemini göz önüne alalım. Burada $X, n \times 1$ -boyutlu bir vektör, $A, n \times n$ -boyutlu reel bir matris, B ve C ise $n \times m$ -boyutlu reel matrisler olup

$\sigma = C^* X$ dir. C^* , C -matrisinin transpozudur. $\varphi(\sigma) = \text{col}\varphi_j(\sigma_j)$, ($j = 1, 2, \dots, m$) ve $P(t)$ ise n - bileşenli bir vektördür.

$$X' = A_1 X - B_1 \varphi(\sigma_1) + P_1(t), \quad \sigma_1 = C_1^* X \quad (1.5)$$

sistemi (1.4) sisteminin bir duali olarak adlandırılır. Burada $A_1 = A^*$, (A^* , (1.4) sistemindeki A matrisinin transpozudur.), $B_1 = C$, $C_1 = B$ ve $P(t) = TP(t)$ olup burada T singüler olmayan bir matris dönüşümüdür (Barbalat ve Halanay, 1970).

Belirtmelidir ki (1.4) vektör diferansiyel denkleminin açık bir biçimde yazılışında fayda vardır. Çünkü bu tez boyunca bu tür diferansiyel denklem sistemleri sürekli ortaya çıkacaktır.

Gerçekten bu denklem sitemi aşağıdaki biçimde yazılabilir:

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & b_{1m} \\ b_{21} & \cdot & \cdot & \cdot & b_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & \cdot & \cdot & \cdot & b_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1(\sigma_1) \\ \varphi_2(\sigma_2) \\ \cdot \\ \cdot \\ \varphi_m(\sigma_m) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ P_n(t) \end{bmatrix}$$

Burada $\varphi(\sigma) = \text{col}\varphi_j(\sigma_j) = \begin{bmatrix} \varphi_1(\sigma_1) \\ \varphi_2(\sigma_2) \\ \cdot \\ \cdot \\ \varphi_m(\sigma_m) \end{bmatrix}$, ($j = 1, 2, \dots, m$) şeklindedir.

$$\sigma = C^* X = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & c_{1n} \\ c_{21} & \cdot & \cdot & \cdot & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{m1} & \cdot & \cdot & \cdot & c_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}$$

olduğuna göre,

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n \\ \sigma_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \dots + c_{2n}x_n \\ . \\ . \\ . \\ \sigma_m = c_{m1}x_1 + c_{m2}x_2 + \dots + c_{mn}x_n \end{array} \right.$$

olarak elde edilir. O halde (1.4) denklem sisteminin açık biçimdeki yazılışının

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ . \\ . \\ . \\ x'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & . & . & . & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & . & . & . & b_{1m} \\ b_{21} & . & . & . & b_{2m} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ b_{n1} & . & . & . & b_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1(c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n) \\ \varphi_2(c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \dots + c_{2n}x_n) \\ . \\ . \\ . \\ \varphi_m(c_{m1}x_1 + c_{m2}x_2 + \dots + c_{mn}x_n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ . \\ . \\ . \\ P_n(t) \end{bmatrix}$$

olduğu görülür.

1.1.9.Tanım

Birinci basamaktan

$$X' = AX - B\varphi(\sigma) + P(t, X), \quad \sigma = C^* X, \quad (1.6)$$

diferansiyel denklem sistemini ele alalım ve bu denklemin çözüm uzayı x -olsun. Eğer aşağıdaki şartları sağlayan kapalı ve sınırlı bir F cümlesi var ise, bu taktirde (1.6) sistemine dispative(dissipative)denir;

- (i) Her $t \geq t_0$ için $x(t_0) \in F$ ise $x(t) \in F$ olur.
- (ii) Herhangi bir t anında başlayan bir $x(t)$ çözümü $t = t_0$ anında F de kalır.
- (iii) Bu sistemin en az bir $x_0(t) \in F$ çözümü vardır ve bu çözüm her $t \in R$ için sınırlıdır.

Eğer F cümlesi düzgün sınırlı bir cümle ise, bu taktirde (1.6) sistemine düzgün dissipative denir (Afuwape ve Adesina, 2000a)

1.1.5.Teorem

(1.4) sistemi için aşağıdaki şartların sağlandığını varsayalım;

(i) A kararlı bir matristir.

(ii) $P(t)$, her $t \in R$ için sınırlıdır.

(iii) $\hat{\mu}_j \geq 0$, ($\hat{\mu}_j$ ler sabitler, ($j = 1, 2, \dots, m$) olmak üzere,

$$0 \leq \frac{\varphi_j(\sigma_j) - \varphi_j(\hat{\sigma}_j)}{\sigma_j - \hat{\sigma}_j} \leq \hat{\mu}_j, \quad (\sigma_j \neq \hat{\sigma}_j);$$

(iv) Bir tane köşegen $D > 0$ matrisi vardır öyle ki, R deki her ω için,

$$\pi(\omega) = MD + \operatorname{Re} DG(i\omega) > 0$$

olur. Burada $G(i\omega) = C^*(i\omega I - A)^{-1} \cdot B$ bir dönüşüm fonksiyonudur ve

$M = \operatorname{diag}(\frac{1}{\hat{\mu}_j}), (j = 1, 2, \dots, m)$ dır. Bu taktirde (1.4) sistemi aşağıdaki özelliklere sahiptir:

(α) (1.4) denkleminin bir tek $x(t)$ çözümü vardır, bu çözüm R de sınırlı ve hem de global üstel olarak kararlıdır.

(β) P fonksiyonu periyodik(hemen hemen periyodik) olmak kaydıyla, bu $x(t)$ çözümü periyodik ya da hemen hemen periyodiktir (Adesina, 2000).

Bu çalışma boyunca aşağıdaki kabuller yapılacaktır:

1. $a > 0, c > 0, (ab - c) > 0, (ab - c)c - a^2d > 0, d > 0$

Bu şartlar,

$$x^{(4)} + ax''' + bx'' + cx' + dx = 0$$

lineer denkleminin çözümlerinin kararlı olmasını ve de sınırlı olmalarını garanti eder. Belirtelim ki, buradaki şartların doğruluğu, yukarıda verilen Hurwitz matrisi dikkate alındığında kolaylıkla görülebilir (Adesina, 2000).

2. $v^2 - vb + d = 0$ denklemi v_1 ve v_2 gibi iki tane pozitif reel köke sahiptir.

$$v_1 = \frac{1}{2}[b - (b^2 - 4d)^{\frac{1}{2}}]$$

$$v_2 = \frac{1}{2}[b + (b^2 - 4d)^{\frac{1}{2}}]$$

öyle ki $0 < v_1 < \frac{c}{a} < v_2 < b$ sağlanır.

Örnek: Sabit katsayılı

$$[(D+1)(D+2)(D+3)(D+4)]y = 0$$

lineer diferansiyel denklemini ele alalım. Bu denklem

$$(D^4 + 10D^3 + 35D^2 + 50D + 24)y = 0$$

biçimine yazılabilir. Buradan,

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{1}{2}[35 - (35^2 - 4 \cdot 24)^{\frac{1}{2}}] = \frac{1}{2}[35 - (1225 - 96)^{\frac{1}{2}}] = \frac{1}{2}[35 - (1129)^{\frac{1}{2}}] = \frac{1}{2}[35 - 33.5] \\ &= \frac{1}{2}[35 - 34] = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} = 0,5 \end{aligned}$$

olarak bulunur.

1.1.6. Teorem (Genelleştirilmiş Yacubovich Teoremi)

(1.4) sistemi için aşağıdaki şartların sağlandığını varsayalım.

$$(i) \quad |\alpha| \geq \lambda_0, \quad 0 \leq \alpha \varphi_j(\alpha) \leq \mu_{0j} \alpha^2, \quad -\alpha_{1j} \leq \varphi'_j(\alpha) \leq \alpha_{2j},$$

$$\mu_{0j} \leq \alpha_{2j} \quad \text{ve} \quad \alpha_{1j} \geq 0$$

dır.

$$(ii) \quad \text{Her } (t, X) \in R^{n+1} \text{ için } |P(t, X)| \leq \rho_0 \text{ dır.}$$

$$(iii) \quad D_1 > 0, \quad D_2 \geq 0, \quad D_3 \geq 0 \text{ köşegen matrisleri vardır. Öyle ki,}$$

$$\begin{aligned} \pi(\omega) &= D_1 + \operatorname{Re}[(D_1 M + i\omega D_2]G(i\omega)) + \omega^2 \operatorname{Re}\{D_3[I + (D'' - D')G(i\omega)] \\ &\quad - G^*(-i\omega)D_3 D' D'' G(i\omega)\} > 0 \end{aligned}$$

Frequency-Domain eşitsizliği her $\omega \in \bar{R}$ için sağlanır. Burada

$M = \text{diag}(\mu_{0j}), D' = \text{diag}(\alpha_{1j}), D'' = \text{diag}(\alpha_{2j})$ ve $G(i\omega) = C^*(i\omega I - A)^{-1}B$ dir.

Buna ilaveten eğer,

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} D_2 \left(\frac{1}{\lambda^2} \right) \text{diag} \left[\int_0^\lambda \varphi_j(\alpha) d\alpha - \frac{\lambda}{2} \varphi_j(\lambda) \right] \geq 0$$

şartı sağlanır ise, bu taktirde (1.4) sistemi düzgün dissipative çözümlere sahiptir.

(1.4) sistemi ve bu sistemin duali olan,

$$X' = AX - B\phi(\sigma) + P(t, X), \quad \sigma = C^*X$$

sistemi için Frequency-Domain eşitsizlikleri birbirine eşdeğerdir (Barbalat ve Halanay,1971).

1.1.7.Teorem

Dual sistemler için Frequency-Domain eşitsizlikleri birbirlerine eşdeğerdir (Adesina,2000).

2. ÜÇÜNCÜ BASAMAKTAN LİNEER OLMAYAN BAZI DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN DİSPATİVLİĞİ İÇİN FREQUENCY-DOMAIN KRİTERLERİ

Afuwape (1978), üçüncü basamaktan lineer olmayan bazı diferansiyel denklemlerin dispativliği için Frequency-Domain kriterleri verdi. Üçüncü basamaktan lineer olmayan bazı diferansiyel denklemlerin çözümlerinin niteliksel bazı davranışları ayrıca Afuwape (1979; 1981;1983a;1983b; 2005), Afuwape ve Omeike (2004), Ezeilo (1962), Qian (2000), Tunç (2005a; 2005b), da incelediler. Bu bölümde, Yacubovich (1965),’in teoreminin sonucu dikkate alınarak söz konusu olan denklemlerinin düzgün dispativ olduğu gösterilecektir.

2.1. Üçüncü Basamaktan Lineer Olmayan Bazı Diferansiyel Denklemlerin Dispativliği İçin Frequency-Domain Kriterleri

Bu kesimde;

$$x''' + \alpha x'' + g(x') + h(x) = p(t, x, x', x'') \quad (2.2.1)$$

ve

$$x''' + \alpha x'' + g_1(x)x' + h(x) = p_1(t, x, x', x'') \quad (2.2.2)$$

biçiminde üçüncü basamaktan lineer olmayan diferansiyel denklemler göz önüne alınacaktır. Bu denklemler için Afuwape (1978), tarafından oluşturulan iki teorem ifade ve ispat edilecektir.

2.2.1. Teorem

(2.2.1) denklemi ile ilgili olarak aşağıdaki şartların sağlandığını kabul edelim:

Pozitif $\alpha, b, c, \mu_1, \mu_2, \lambda_0$ sabitleri vardır öyle ki $\alpha b > c$,

$$|x| \geq \lambda_0 \text{ ve } |y| \geq \lambda_0 \text{ için}$$

$$c \leq \frac{h(x)}{x} \leq c + \mu_2 \quad ; \quad c \leq h'(x) \leq c + \mu_2 ,$$

$$b \leq \frac{g(y)}{y} \leq b + \mu_2 \quad ; \quad b \leq g'(y) \leq b + \mu_1$$

olur.

Bu takdirde (2.2.1) denklemi düzgün dispativdir.

İspat:

$g(y) = by + \hat{g}(y)$ ve $h(x) = cx + \hat{h}(x)$ alalım. Bu durumda (2.2.1) denklemi aşağıdaki sisteme eşdeğer olur;

$$\begin{aligned} x_1' &= -bx_2 - cx_3 - \hat{g}(x_2) - \hat{h}(x_3) + \hat{p}(t, x_1, x_2, x_3), \\ x_2' &= x_1 - \alpha x_2, \\ x_3' &= x_2 \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

Burada $\hat{p}(t, x_1, x_2, x_3) = p(t, x_3'' + \alpha x_3', x_2, x_3)$ olup 1. bölümdeki Yacubovich (1965),’in Genelleştirilmiş Teoremi dikkate alınarak,

$$D_1 = \begin{pmatrix} \frac{\tau_1}{\mu_1} & 0 \\ 0 & \frac{\tau_1}{\mu_2} \end{pmatrix}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} \frac{s}{\tau_1} & 0 \\ 0 & \frac{t}{\tau_2} \end{pmatrix},$$

$$D_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ve } \text{diag}(\mu_0^j) = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix}$$

seçilmektedir. Ayrıca $\tau_1 > 0$, $\tau_2 > 0$ ve s ve t ise belirlenecek olan parametrelerdir. (2.2.3) sistemi göz önüne alınıp, bu sistemin

$$X' = AX - B\varphi(\sigma) + P(t, X), \quad \sigma = C^* X$$

denklem sistemiyle karşılaştırılması yapıldığında

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -b & -c \\ 1 & -a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad p(t, x) = \begin{pmatrix} \hat{p}(t, x_1, x_2, x_3) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ve

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad \sigma = C^* x = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ ve } \varphi(\sigma) = \begin{pmatrix} \hat{g}(x_2) \\ \hat{h}(x_3) \end{pmatrix}$$

olarak bulunur. Şimdi $\Delta \equiv |i\omega I - A| = (c - \alpha\omega^2) + i\omega(b - \omega^2)$ olmak üzere,

$$G(i\omega) = C^* (i\omega I - A)^{-1} B = \begin{pmatrix} \frac{i\omega}{\Delta} & \frac{i\omega}{\Delta} \\ \frac{1}{\Delta} & \frac{1}{\Delta} \end{pmatrix}$$

yazılabilir. Burada Δ , $\Delta \equiv |i\omega I - A|$ olup, $\Delta \equiv (c - \alpha\omega^2) + i\omega(b - \omega^2)$ biçiminde tanımlanmaktadır.

Bu durumda Yacubovich (1965),’in Genelleştirilmiş Teoremindeki Frequency-Domain eşitsizliğinden

$$\pi(\omega) > 0$$

elde edilir. Burada,

$$\pi_1(\omega) = \begin{pmatrix} \frac{\tau_1}{\mu_1} - \frac{\omega^2}{|\Delta|^2} [s_1 \tau_1 (c - \alpha\omega^2) + \tau_1 (b - \omega^2)] \\ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\tau_2}{\Delta} - \frac{\omega^2 s_1 \tau_1}{\Delta} \right) - i\omega \left(\frac{\tau_1}{\Delta} - \frac{t_1 \tau_2}{\Delta} \right) \right] \end{pmatrix},$$

$$\pi_2(\omega) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\tau_2}{\Delta} - \frac{\omega^2 s_1 \tau_1}{\Delta} \right) + i\omega \left(\frac{\tau_1}{\Delta} - \frac{t_1 \tau_2}{\Delta} \right) \right] \\ \frac{\tau_2}{\mu_2} + \frac{\tau_2}{|\Delta|^2} [(c - \alpha\omega^2) + \omega^2 t_1 (b - \omega^2)] \end{pmatrix},$$

$s_1 = \frac{s}{\tau_1}$ ve $t_1 = \frac{t}{\tau_2}$ olmak üzere

$$\pi(\omega) = (\pi_1(\omega), \pi_2(\omega)) \text{ dır.}$$

$\pi(\omega)$ 'nın pozitif tanımlı olduğunun gösterilmesi gerekir. Bunun için $\pi_1(\omega)$ pozitif olmalıdır.

Bu nedenle $s_1 \in (1/\alpha, b/c)$ ve

$$\frac{1}{\mu_1} > \frac{\omega^2 [\omega^2 (1 - \alpha s_1) + (s_1 c - b)]}{(c - \alpha \omega^2)^2 + (b - \omega^2)^2 \omega^2}$$

alındığında $\pi_1(\omega)$ ifadesinden

$$\frac{\sigma_1}{\mu_1 |\Delta|^2} \{ \omega^6 + \omega^4 [\alpha^2 - 2b - \mu_1 (1 - \alpha s_1)] + \omega^2 [b^2 - 2\alpha c - \mu_1 (s_1 c - b)] + c^2 \}$$

yazılabilir. Bu ifade ise teoremin şartları dikkate alındığında her $\omega \in R$ için pozitif tanımlıdır.

Şimdi ise, $t_1 > \alpha/b$

$$\frac{1}{\mu^2} > \frac{\omega^4 t_1 + \omega^2 (\alpha - b t_1) - c}{(c - \alpha \omega^2)^2 + \omega^2 (b - \omega^2)^2}$$

alınsın. Bu durumda,

$$\lambda = \tau_1 / \tau_2$$

ve

$$\frac{\mu_1}{4c} < \lambda < \frac{4[\mu_1 (\alpha s_1 - 1) - \mu_2 t_1]}{\mu_1 \mu_2 s_1^2}$$

olmak kaydıyla,

$$\begin{aligned}
|\pi(\omega)| &= \frac{1}{|\Delta|^2} \left\{ \omega^4 \left[\mu_1(\alpha s_1 - 1) - \mu_2 t_1 - \frac{\mu_1 \mu_2 s_1^2 \lambda}{4} \right] + \right. \\
&\quad + \omega^2 \left[\mu_2(b t_1 - \alpha) + \mu_1(b - s_1 c) - \frac{\mu_1 \mu_2}{4\lambda} (\lambda - t_1)^2 - \frac{s_1 \mu_1 \mu_2}{2} \right] \\
&\quad \left. + \left[\mu_2 c - \frac{\mu_1 \mu_2}{4\lambda} \right] \right\} + 1 > 0
\end{aligned} \tag{2.2.4}$$

olarak bulunur. Bu ise 2.2.1. Teorem 'inin ispatını tamamlar.

2.2.2. Teorem

(2.2.2) diferansiyel denklemi için aşağıdaki şartların sağlandığını varsayalım:

Pozitif α, μ_1, μ_2 ve b, c, ρ_0 ve λ_0 sabitleri var öyle ki $|x| \geq \lambda_0$ için

$$|p_1(t, x, x', x'')| \leq \rho_0,$$

$$b \leq \frac{\int_0^x g_1(x) dx}{x} \leq b + \mu_1$$

ve

$$c \leq \frac{h(x)}{x} \leq c + \mu_2 ; c \leq h'(x) \leq c + \mu_2$$

olur.

Bu takdirde (2.2.2) denklemi düzgün dispativdir.

İspat:

Bu teoremin ispatını tamamlamak için (2.2.2) denkleminin (2.2.1) denkleminin duali olduğunu göstermek yeterlidir.

$$\int_0^x g_1(s) ds = bx + \hat{g}_1(x) \quad \text{ve} \quad h_1(x) = cx + \hat{h}_1(x)$$

olsun. Belirtelim ki (2.2.2) denklemi aşağıdaki sisteme eşdeğerdir:

$$\begin{aligned}
x_1' &= x_2, \\
x_2' &= -bx_1 - \alpha x_2 + x_3 - \hat{g}_1(x_1), \\
x_3' &= -cx_1 - \hat{h}_1(x_1) + \hat{p}_1(t, x_1, x_2, x_3)
\end{aligned} \tag{2.2.5}$$

Burada $\hat{p}_1(t, x_1, x_2, x_3) = p_1(t, x_1, x_2, x_3 - bx_1 - \alpha x_2 - \hat{g}_1(x_1))$ dır.

$X' = AX - B\varphi(\sigma) + P(t, X)$ denklemi ve (2.2.5) sistemi karşılaştırıldığında,

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -b & -\alpha & 1 \\ -c & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = C_1^* X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \end{pmatrix} \text{ ve } \varphi(\sigma_1) = \begin{pmatrix} \hat{g}_1(x_1) \\ \hat{h}_1(x_1) \end{pmatrix}$$

olur.

$X' = AX - B\varphi(\sigma) + P(t, X)$, $\sigma = C^* X$ ve $X' = A_1 X - B_1 \varphi(\sigma) + P(t, X)$ sistemleri dikkate alınıp, gerekli karşılaştırmalar yapıldığında, $A_1 = A^*$, $B_1 = C$, $C_1 = B$ elde edilir. Bu ise bize (2.2.2) denkleminin (2.2.1) denkleminin duali olduğunu gösterir. İspatın geri kalan kısmı yukarıda verilen teoremin ispatına benzer biçimde tamamlanabilir. Böylece 2.2.2.Teorem'inde verilen diferansiyel denklemin düzgün dispativ (dissipative) olduğu görülür.

3. DÖRDÜNCÜ BASAMAKTAN LİNEER OLMAYAN BAZI DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN DAVRANIŞLARI

3.1. Giriş

Bu bölümde belli türden dördüncü basamaktan lineer olmayan bazı diferansiyel denklemler ele alınacaktır. Belirtelim ki, burada ele alacağımız lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çözümlerin sınırlı, global olarak üstel kararlı (globally exponential stability), periyodik ve hemen hemen periyodik olma davranışları daha önceden Afuwape (1985), ve Adesina (2000), tarafından incelendi. Yine, aynı şekilde Afuwape (1981b;1988;1989;1991) benzer biçimdeki lineer olmayan bazı dördüncü basamaktan diferansiyel denklemlerin düzgün dispativ (uniform dissipative) çözümlerin varlığı üzerine incelemeler yaptı. Yukarıda belirtilen çalışmaların yanı sıra, Adesina ve Afuwape (2005b), ele aldıkları lineer olmayan bazı dördüncü basamaktan diferansiyel denklemler için Frequency-Domain metodunu Yacubovich (1965),’in Genelleştirilmiş Teoremi kullanarak denklemlerin çözümlerin kararlılığını ve periyodikliğini inceledi. Ayrıca Harrow (1970), Skidmore (1966), Tejumola (1972), Tunç (2006), Wu ve Xiong (1998), tarafından da aynı konu üzerine incelemeler yapıldı. Yapılan bütün bu araştırmalarda göz önüne alınan denklemler için çözümlerin kararlı, global olarak üstel kararlı olmasını, ayrıca, çözümlerin periyodik, hemen hemen periyodik ve düzgün dispativ (uniform dissipative) olmasını sağlayan ve yeter şartlar içeren bazı sonuçlara varıldı.

Bu bölümde, yukarıda konu edilen problemler sırasıyla literatürdeki ele alınış sırası dikkate alınarak kesimler halinde verilecektir.

3.2. Dördüncü Basamaktan Lineer Olmayan Bazı Diferansiyel Denklemlerin Çözümlerinin Sınırlılığı, Global Üstel Kararlılığı ve Periyodik Olması

Afuwape (1985),

$$x^{(4)} + ax''' + bx'' + g(x') + h(x) = p(t) \quad (3.2.1)$$

ve

$$x^{(4)} + ax''' + bx'' + g_1(x)x' + h(x) = p(t) \quad (3.2.2)$$

biçiminde lineer olmayan iki diferansiyel denklemi araştırma konusu edildi. Burada a ve b pozitif sabitler, g, g_1, h ve p ise bağlı bulundukları değişkenlerin sürekli birer fonksiyonudurlar. Afuwape bu çalışmasında Frequency-Domain metodunu kullanarak yukarıdaki (3.2.1) ve (3.2.2) denklemlerin çözümlerinin sınırlılığı, global üstel kararlılığı ve periyodiklik ve hemen hemen periyodik olma durumlarını inceledi. Bilindiği üzere diferansiyel denklemlerin çözümlerinin kararlılık, global olarak üstel kararlılık, periyodiklik v.b. niteliksel davranış özellikleri Lyapunov fonksiyonları yardımıyla da incelenebilmektedir Lyapunov (1966). Ancak, belirtelim ki, yukarıda sözü edilen niteliksel davranışlar Frequency-Domain metodu ile incelendiğinde bir Lyapunov (1966), fonksiyonunun kullanılmasına veya oluşturulmasına ihtiyaç duyulmaz. Afuwape (1985), yaptığı çalışmada yukarıdaki denklemlerin $x(t)$ çözümü ve bu çözümün $x'(t), x''(t), x'''(t)$ türevlerinin R de sınırlı olduğunu ve $t \rightarrow \infty$ için ise denklemin çözümlerinin global üstel kararlı olduğunu gösterdi. Ayrıca yukarıdaki denklemlerdeki $p(t)$ fonksiyonunun periyodik veya hemen hemen periyodik olması halinde sınırlı $x(t)$ çözümünün periyodik veya hemen hemen periyodik olduğunu ispatladı. Belirtelim ki, burada elde edilen sonuçların ifadeleri ve ispatı aşağıda Kesim 3.3'de verilecek olan sonuçların ifade ve ispatlarına benzer olduğundan, bu sonuçlar üzerinde durulmayacaktır.

3.3. Dördüncü Basamaktan Lineer Olmayan İki Diferansiyel Denklem Sınıfı İçin Çözümlerin Düzgün Dispativliği (Uniform Dissipative)

Afuwape (1989), sırasıyla,

$$x^{(4)} + ax''' + bx'' + g(x') + h(x) = q(t, x, x', x'', x'''), \quad (3.3.1)$$

ve

$$x^{(4)} + ax''' + bx'' + g_1(x)x' + h(x) = q(t, x, x', x'', x'''), \quad (3.3.2)$$

biçiminde dördüncü basamaktan lineer olmayan diferansiyel denklemleri çalışma konusu edildi. Burada a, b pozitif sabitler g, g_1, h ve q ise bağlı bulundukları değişkenlere göre reel değerli ve sürekli fonksiyonlardır. Ayrıca kesim boyunca $q(t, x, x', x'', x''')$ fonksiyonunun her

$t, x, x', x'', x''' \in R$ için sınırlı olduğu kabul edilecektir. Yani pozitif bir ρ_0 sabiti vardır öyle ki, her $t, x, x', x'', x''' \in R$ için

$$|q(t, x, x', x'', x''')| < \rho_0$$

olur. Belirmeliyiz ki, daha önceden Barbalat ve Halanay (1974), Frequency-Domain metodunu kullanarak (3.3.1) ve (3.3.2) denklemlerinin özel birer hali olan bazı denklemlerin çözümlerinin düzgün dispative (uniform dissipative) olma özelliklerini inceledi.

Bu kesimdeki amaç, Frequency-Domain tekniği kullanılarak, (3.3.1) ve (3.3.2) denklemlerinin çözümlerinin belirgin şartlar altında düzgün dispative olabildiğini göstermektir. Burada incelenecek olan sonuçlar daha önceden Afuwape (1989a), tarafından verilmişti. Afuwape (1989a), nin sonuçları Barbalat ve Halanay (1974)'ın çalışmalarının bir devamı olarak yukarıda ifade edilen (3.3.1) ve (3.3.2) denklemleri için verilmiştir.

Bu kesimdeki başlıca sonuçlar sırasıyla aşağıda verilen teoremlerde görülecektir.

3.3.1. Teorem.

(3.3.1) denklemi için yukarıda varsayılan kabullere ilaveten aşağıdaki şartların sağlandığını kabul edelim:

Pozitif c, d, μ_1 ve μ_2 sabitleri vardır, öyle ki,

$$ab > c, (ab - c)c - a^2d > 0;$$

eşitsizlikleri sağlanmaktadır.

Her $|z| \geq \lambda_0$, (λ_0 yeterince büyük bir sayı olmak üzere),

$$c \leq g(z)/z \leq c + \mu_1, \quad c \leq g'(z) \leq c + \mu_1 \quad (3.3.3)$$

ve

$$d \leq h(z)/z \leq d + \mu_2, \quad d \leq h'(z) \leq d + \mu_2 \quad (3.3.4)$$

dır. Bu takdirde eğer,

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} (1/z^2) \left\{ \int_0^z g(s) ds - z g(z)/2 \right\} \geq 0 \quad (3.3.5)$$

ve

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} (1/az^2)(ab - 2c) \left\{ \int_0^z h(s) ds - z h(z)/2 \right\} \geq 0 \quad (3.3.6)$$

sağlanırsa (3.3.1) denklemi düzgün dispativdir.

İspat:

c, d ler pozitif sabitler olmak üzere, $g(x') = cx' + \hat{g}(x')$ ve $h(x) = dx + \hat{h}(x)$ alalım.

Bu durumda (3.3.3) ve (3.3.6) şartları göz önüne alındığında

$$0 \leq g(z)/z \quad 0 \leq g'(z) \leq \mu'_1$$

$$0 \leq \hat{h}(z)/z; \quad 0 \leq \hat{h}'(z) \leq \mu_2 \quad (|z| \geq \lambda_0)$$

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} (1/z^2) \left\{ \int_0^z \hat{g}(s) ds - (z/2) \hat{g}(z) \right\} \geq 0,$$

ve

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} (1/az^2)(ab - 2c) \left\{ \int_0^z \hat{h}(s) ds - (z/2) \hat{h}(z) \right\} \geq 0$$

olur. Bu durumda, $x = x_1$, $x'_1 = x_2$, $x'_2 = x_3$, $x'_3 = x_4$, değişken değişimi ile (3.3.1) denklemi,

$$X' = AX - B\phi(\sigma) + P(t, X), \quad \sigma = C^* X \quad (3.3.7)$$

biçiminde yazılabilir. Burada,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -d & -c & -b & -a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ve

$$P(t, X) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hat{q}(t, x_1, x_2, x_3, x_4) \end{pmatrix} \text{ ile } q(t, x_1, x_2, x_3, x_4) = q(t, x_4, x_4', x_4'', x_4''')$$

$$\sigma = C^* X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ ve } \phi(\sigma) = \begin{pmatrix} \hat{h}(x_1) \\ \hat{g}(x_2) \end{pmatrix}$$

dır.

Hurwitz şartlarından dolayı $(ab - c) > 0$ ve $(ab - c)c - a^2d > 0$ ile $c > 0$ ve $d > 0$ olması nedeniyle A matrisinin tüm karakteristik kökleri negatif reel kısımlıdır. Bu durumda A matrisi kararlıdır ve her $\omega \in R$ için $(i\omega I - A)^{-1}$ mevcuttur. Ayrıca,

$$G(i\omega) = C(i\omega I - A)^{-1} B = \left(\frac{1}{\Delta(i\omega)} \right) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i\omega & i\omega \end{pmatrix},$$

$\Delta = \Delta(i\omega) = (\omega^4 - b\omega^2 + d) + i\omega(c - a\omega^2)$ dir. Burada $\bar{\Delta} = \Delta(-i\omega)$ ise Δ nın eşleniğidir.

Buna bağlı olarak $|\Delta|^2 = \Delta\bar{\Delta} = (\omega^4 - b\omega^2 + d)^2 + \omega^2(c - a\omega^2)^2$ her $\omega \in \bar{R}$ için $|\Delta|^2 > 0$ olur.

Yacubovich (1965), 'in Genelleştirilmiş Teoremi'ni kullanmak için,

$$D_1 = \begin{pmatrix} \frac{\tau_1}{\mu_1} & 0 \\ 0 & \frac{\tau_2}{\mu_2} \end{pmatrix}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} \theta_1 & 0 \\ 0 & \theta_2 \end{pmatrix},$$

(3.3.8)

$$D_3 = \begin{pmatrix} \frac{\delta_1}{\mu_1} & 0 \\ 0 & \frac{\delta_2}{\mu_2} \end{pmatrix} \text{ ve } \text{diag} \mu_0^j = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix} \text{ alalım.}$$

Burada $\tau_j \geq 0$, $\delta_j \geq 0$ ve θ_j ($j = 1, 2$) parametreler olup amaca uygun olarak daha sonra seçilecektir.

(3.3.8) ifadesi dikkate alındığında

$$\{ D_1 + \text{Re} \{ [D_1 \text{diag} \mu_0^j + i\omega D_2] G(i\omega) \} + \omega^2 \text{Re} \{ D_3 [I + \text{diag} \alpha_2^j] G(i\omega) \} \} > 0 \quad (3.3.9)$$

ile verilen Frequency-Domain şartları

$$\pi(\omega) = \begin{pmatrix} \pi_1(\omega) & \pi_2(\omega) \\ \pi_3(\omega) & \pi_4(\omega) \end{pmatrix} > 0 \quad (3.3.10)$$

olur. Burada, $\pi_1(\omega)$, $\pi_2(\omega)$, $\pi_3(\omega)$ ve $\pi_4(\omega)$ aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$\pi_1(\omega) = \tau_1 \left\{ \frac{1}{\mu_1} + \left[(\omega^4 - b\omega^2 + d) + \omega^2 \theta_1 (c - a\omega^2) / (\tau_1 + \omega^2 \delta_1) \right] / |\Delta|^2 \right\}$$

$$\begin{aligned} \pi_2(\omega) = & \left\{ \left[(\tau_1 + \omega^2 (\delta_1 - \theta_2)) (\omega^4 - b\omega^2 + d) + \omega^2 (\tau_2 + \omega_2 \delta_2 + \theta_1) (c - a\omega^2) \right] \right. \\ & \left. - i\omega \left[(\tau_1 + \omega^2 (\delta_1 + \theta_2)) (c - a\omega^2) + (\tau_2 + \omega^2 \delta_2 - \theta_1) (\omega^4 - b\omega^2 + d) \right] \right\} / 2|\Delta|^2 \end{aligned}$$

$$\pi_3(\omega) = \bar{\pi}_2(\omega)$$

ve

$$\pi_4(\omega) = \tau_2 \left\{ \frac{1}{\mu_2} + \omega^2 \left[(c - a\omega^2) - \theta_2 (\omega^4 - b\omega^2 + d) / (\tau_2 + \omega^2 \beta \delta_2) \right] / |\Delta|^2 \right\}$$

matrisinin pozitif tanımlı olabilmesi için asli köşegen minörlerinin pozitif yani,

$$\pi_1(\omega) > 0 \text{ ve } \pi_1(\omega)\pi_4(\omega) - |\pi_2(\omega)|^2 > 0, \pi_3(\omega) = \bar{\pi}_2(\omega)$$

ya da

$$\pi_4(\omega) > 0 \text{ ve } \pi_1(\omega)\pi_4(\omega) - |\pi_2(\omega)|^2 > 0, \omega \in R$$

olması gereklidir.

Teoremin ispatını tamamlamak için aşağıdaki iki lemma verilecektir.

3.3.1.Lemma

$\theta_1 = (ab - 2c)(\tau_1 + \delta_1 c/a)/ac$ ve $\theta_2 = c(\tau_2 + \omega_1^2 \delta_2)/d(b^2 - 4d)^{1/2}$ olsun.

Bu takdirde,

$2\omega_1^2 = \left[b + (b^2 - 4d)^{1/2} \right]$, ω_1^2 , $\omega^4 - b\omega^2 + d = 0$ denkleminin büyük kökü,

$\mu_1 < [(ab - c)c - a^2 d]/a^2$ ve $\mu_2 < (a\omega_1^2 - c)$ olmak kaydıyla $\pi_1(\omega) > 0$ ve $\pi_4(\omega) > 0$ olur.

İspat:

Bkz. (Afuwape, 1989).

3.3.2. Lemma

Her ω ve pozitif her $t = \delta_1/\tau_1$ ve $s = \delta_2/\tau_2$ için $\pi(\omega)\pi(\omega) - |\pi_2(\omega)|^2 > 0$ dır.

İspat:

Bkz. (Afuwape, 1989).

Yukarıdaki bilgiler, 3.3.1.Lemma ve 3.3.2.Lemma'nın göz önüne alınması sonucu Frequency-Domain şartlarının (3.3.1) denklemi için yazılan (3.3.7) sistemi için geçerli olduğu görülür. Böylece Genelleştirilmiş Yacubovich Teoreminin tüm şartları sağlanır. Bu ise teoremin ispatını tamamlar.

3.3.2.Teorem

Kabul edelim ki, a, b pozitif sabitler g, g_1, h ve q ise bağlı bulundukları değişkenlere göre reel değerli ve sürekli fonksiyonlardır ve pozitif bir ρ_0 sabiti vardır öyle ki, her $t, x, x', x'', x''' \in R$ için,

$$|q(t, x, x', x'', x''')| < \rho_0$$

dır.

Yukarıdaki temel kabullere ilaveten pozitif c, d, μ_1 ve μ_2 sabitleri var öyle ki,

$$ab > c, (ab - c)c - a^2d > 0$$

ve (3.3.4) eşitsizlikleri sağlanmakta ayrıca λ_0 yeterince büyük olmak üzere $|\lambda| \geq \lambda_0$ için

$$c \leq G_1(x)/x \leq c + \mu_1$$

dır. Burada $G_1(x) = \int_0^x g_1(s)ds$ olarak tanımlanmaktadır. Bu takdirde (3.3.6) eşitsizliği sağlanır ise (3.3.2) denklemi düzgün dispativdir.

İspat:

(3.3.2) denklemi için $\int_0^x g_1(s)ds = cx + \hat{g}_1(x)$ ve $h(x) = dx + \hat{h}(x)$ alalım. Burada

c ve d pozitif sabitler $g_1(x)$ ve $\hat{h}(x)$ sürekli türevlenebilir fonksiyonlar ve $\hat{g}(0) = 0 = \hat{h}(0)$ dır. (3.3.2) diferansiyel denklemi,

$$\begin{aligned} x_1' &= -dx_4 - \hat{h}(x_4) + \hat{g}(t, x_1, x_2, x_3, x_4), \\ x_2' &= x_1 - cx_4 - \hat{g}_1(x_4), \\ x_3' &= x_2 - bx_4, \\ x_4' &= x_3 - ax_4 \end{aligned}$$

sistemine eşdeğerdir.

Burada,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -d \\ 1 & 0 & 0 & -c \\ 0 & 1 & 0 & -b \\ 0 & 0 & 1 & -a \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olmak üzere,

$$X' = A_1 X - B_1 \phi(\bar{\sigma}) + P_1(t, X), \bar{\sigma} = C_1^* X,$$

biçiminde vektörel formda yazılabilir.

Bu sistem ise (3.3.7) sisteminin bir dualidir. Her iki sistem için Frequency-Domain şartları aynı olduğundan 3.3.1.Teorem'inin sonucu bu teorem için de geçerlidir. Böylece Teoremin ispatı tamamlanmış olur.

3.3.3.Teorem

Kabul edelim ki, (3.3.7) sistemindeki A matrisi $n \times n$ -biçiminde kararlı bir matris, B ve C $n \times n$ -basamaktan matrisler, C^*, C matrisinin karmaşık eşleniğidir. Ayrıca kabul edelim ki,

$$0 \leq \alpha \phi_j(\alpha) \leq \mu_0^j \alpha^2, \quad -\alpha_1^j \leq \phi_j'(\alpha) \leq \alpha_2^j, \\ \mu_0^j \leq \alpha_2^j, \quad \alpha_1^j \geq 0 \quad \text{ve} \quad |P(t, X)| < \rho_0 \quad \text{her } (t, X) \text{ için sağlanmaktadır.}$$

Eğer $D_1 > 0$, $D_2 \geq 0$, $D_3 \geq 0$ köşegen matrisleri var öyle ki,

$$\phi(\sigma) = \text{col}(\phi_j(\sigma_j)), \quad (j = 1, 2, \dots, m) \text{ ve her } |\alpha| \geq \lambda_0, \text{ için}$$

$$G(i\omega) = C^*(i\omega I - A)^{-1} B$$

olmak üzere her $\omega \in \bar{R}$ için

$$\{ D_1 + \text{Re} \left[D_1 \text{diag} \mu_0^j + i\omega D_2 \right] G(i\omega) \} + \omega^2 \text{Re} \left[D_3 (I + \text{diag}(\alpha_2^j - \alpha_1^j) G(i\omega)) \right] \\ - G^*(-i\omega) D_3 \text{diag}(\alpha_1^j \alpha_2^j) G(i\omega) \} > 0$$

ve buna ilaveten,

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} D_2 (1/\lambda^2) \text{diag} \left\{ \int_0^\lambda \phi_j(\alpha) d\alpha - (1/2) \lambda \phi(\lambda) \right\} \geq 0$$

ise bu taktirde (3.3.7) sistemi düzgün dispativdir.

İspat:

Bkz. (Afuwape,1989).

3.4. Dördüncü Basamaktan Bazı Lineer Olmayan Diferansiyel Denklemler İçin Düzgün Disipative Çözümler

Bu kesimde;

$$x^{(4)} + f_1(x''') + f_2(x'') + cx' + dx = p(t, x, x', x'', x'''), \quad (3.4.1)$$

$$x^{(4)} + f_1(x''') + bx'' + f_3(x') + dx = p(t, x, x', x'', x''') \quad (3.4.2)$$

ve

$$x^{(4)} + f_1(x''') + bx'' + cx' + f_4(x) = p(t, x, x', x'', x'''), \quad (3.4.3)$$

diferansiyel denklemleri göz önüne alınacaktır. Burada a, b, c ve d pozitif sabitler; f_1, f_2, f_3, f_4 ve p fonksiyonlarının bağlı bulundukları değişkenlere göre sürekli oldukları varsayılmaktadır. Bu denklemlerin değişik bir biçimi olan;

$$x^{(4)} + ax''' + bx'' + f_3(x') + f_4(x) = p(t, x, x', x'', x''') \quad (3.4.4)$$

diferansiyel denklemi daha önceden Afuwape (1991), tarafından incelenmişti. Bu kesimde Frequency-Domain metodu kullanılarak (3.4.1)-(3.4.3) diferansiyel denklemleri için çözümlerin düzgün disipative davranışları incelenecektir. (3.4.1)-(3.4.3) denklemlerinin lineer olması durumlarında benzer problemler Barbalat ve Halanay (1971;1974), tarafından incelendi. Ayrıca bu denklemler ve bu denklemlerin değişik türleri için benzer problemler Lyapunov Teorisi kullanılarak pek çok araştırmacı tarafından araştırıldı.(3.4.1)-(3.4.3) diferansiyel denklemlerinin dualleri:

$$y^{(4)} + \frac{d^3}{dt^3}[ay + l_1(y)] + \frac{d^2}{dt^2}[by + l_2(y)] + cy' + dy = p(t, y, y', y'', y'''); \quad (3.4.5)$$

$$y^{(4)} + \frac{d^3}{dt^3}[ay + l_1(y)] + by'' + \frac{d}{dt}[cy + l_3(y)] + dy = p(t, y, y', y'', y'''); \quad (3.4.6)$$

ve

$$y^{(4)} + \frac{d^3}{dt^3} [ay + l_1(y)] + by'' + cy' + [dy + l_4(y)] = p(t, y, y', y'', y'''); \quad (3.4.7)$$

ile verilir.

Temel Kabuller:

(A1) f_j , ($j = 1, 2, 3, 4$) ve p fonksiyonları bağlı bulundukları değişkenlerin sürekli fonksiyonlarıdır, $f_j(0) = 0$;

(A2) $a > 0$, $\mu_1 \geq 0$ sabitleri vardır öyle ki;

$$a \leq f_1(u)/u \leq a + \mu_1, (u \neq 0) \text{ ve } a \leq f_1'(u) \leq a + \mu_1;$$

(A3) $b > 0$, $\mu_2 \geq 0$ sabitleri vardır öyle ki;

$$b \leq f_2(z)/z \leq b + \mu_1, (z \neq 0) \text{ ve } b \leq f_2'(z) \leq b + \mu_2;$$

(A4) $c > 0$, $\mu_3 \geq 0$ sabitleri vardır öyle ki;

$$c \leq f_3(y)/y \leq c + \mu_3, (y \neq 0) \text{ ve } c \leq f_3'(y) \leq c + \mu_3;$$

(A5) $d > 0$, $\mu_4 \geq 0$ sabitleri vardır öyle ki;

$$d \leq f_4(x)/x \leq d + \mu_4, (x \neq 0) \text{ ve } d \leq f_4'(x) \leq d + \mu_2;$$

(A6) Yukarıdaki kabullerde verilen a, b, c, d sabitleri,

$$A_4 = (ab - c)c - a^2d > 0$$

eşitsizliğini sağlar. Bu eşitsizliğin bir sonucu olarak $b^2 - 4d > 0$ dır.

(A7) $\omega^4 - b\omega^2 + d = 0$ denkleminin ω_0^2, ω_1^2 köklerinin reel olduğunu ve bu kökler arasında

$$0 < \omega_0^2 < \frac{c}{a} < \omega_1^2 < b$$

eşitsizliğinin sağlandığını varsayalım,

$$\omega_0^2(c\omega_1^2 - ad) = d(c - a\omega_0^2)$$

ve

$$(\omega_1 - \omega_0^2) = \sqrt{(b^2 - 4d)} = (2\omega_1^2 - b);$$

(A8) Yukarıda verilen kabullerdeki $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ sabitleri

$$(i) 0 \leq \mu_1 < d(c - a\omega_0^2)(\omega_1^2 - \omega_0^2)/c\omega_0^4$$

$$(ii) 0 \leq \mu_2 < (c\omega_1^2 - ad)/d \equiv (c - a\omega_0^2)/\omega_0^2;$$

- (iii) $0 \leq \mu_3 < (c\omega_1^2 - ad)/d$;
- (iv) $\mu_4 \geq \delta_4 > 0$;
- (v) $\mu_1/\mu_2 < cd(\omega_1^2 - \omega_0^2)$;
- (vi) $\omega_0^2 < \mu_1/\mu_3 < (a\omega_1^2 - c)(c - a\omega_0^2)^{-1}\omega$

eşitsizliklerini sağlar.

(A9) $p(t, x, x', x'', x''')$ fonksiyonu sınırlıdır.

Şimdi hazırlık niteliğinde olan aşağıdaki lemmaları verelim. Bu lemmaları ifade etmeden önce 1. Bölümde verilen 1.1.5. Teoremini ve 1.1.7. Teoremini göz önünde bulundurarak

$s = \omega^4 - b\omega^2 + d$; $t = c - a\omega^2$ ve $|\Delta|^2 = s + \omega^2 t^2$, $\omega \in \bar{R}$ alalım. (A7) kabulünden $s = 0$ 'ın kökleri ω_0^2 ve ω_1^2 dir. Ayrıca $0 < \omega_0^2 < \frac{c}{a} < \omega_1^2 < b$ olduğundan s ve t aynı anda sıfır olamazlar.

3.4.1. Lemma

$\delta_1 < 0$ olmak üzere,

$$0 \leq \mu < \frac{d(c - a\omega_0^2)(\omega_1^2 - \omega_0^2)}{c\omega_0^4}$$

olmak kaydıyla her $\omega \in \bar{R}$ için,

$$T_1(\mu, \omega^2) \equiv \frac{1}{\mu} - \frac{\omega(s + \omega^2 \delta_1 t)}{|\Delta|^2} > 0$$

olur.

İspat:

Lemmanın ispatı için $\delta_1 = \frac{c\omega_0^2}{d(\omega_0^2 - \omega_1^2)}$ alınırsa istenen sonuç kolaylıkla görülür.

3.4.2. Lemma

$\delta_2 > 0$ olmak üzere,

$$0 \leq \mu < \left(\frac{c - a\omega_0^2}{\omega_0^2} \right) \equiv \left(\frac{c\omega_1^2 - ad}{d} \right)$$

olmak kaydıyla her $\omega \in \bar{R}$ için

$$T_2(\mu, \omega^2) \equiv \frac{1}{\mu} - \frac{\omega^4(t + \delta_2 s)}{|\Delta|^2} > 0$$

olur.

İspat:

Lemmanın ispatı için $\delta_2 = \frac{A_4 \omega_0^2}{c^2(c - a\omega_0^2)}$ alınırsa istenen sonuç kolaylıkla görülür

3.4.3.Lemma

$\delta_3 > 0$ olmak üzere,

$$0 \leq \mu < (a\omega_1^2 - c)$$

olmak kaydıyla her $\omega \in \bar{R}$ için,

$$T_3(\mu, \omega^2) \equiv \frac{1}{\mu} - \frac{\omega^2(\delta_3 s - t)}{|\Delta|^2} > 0$$

olur.

İspat:

δ_3 yukarıdaki eşitsizlik sağlanacak şekilde uygun bir sayı olarak seçilirse lemmanın sonucu hemen elde edilir.

3.4.4.Lemma

$\delta_4 > 0$ olmak üzere,

$$0 \leq \mu < (A_4/a^2)$$

olmak kaydıyla her $\omega \in \bar{R}$ için,

$$T_4(\mu, \omega^2) \equiv \frac{1}{\mu} - \frac{s + \omega^2 \delta_4 t}{|\Delta|^2} > 0$$

olur.

İspat:

Bkz. (Afuwape, 1991).

Temel Sonuçlar

Bu kesimde ilk olarak Afuwape(1991) tarafından incelenen, (3.4.1.) diferansiyel denklemi ele alınacaktır. (Afuwape, 1991)'nin bu denkleme ait elde ettiği sonuç aşağıdaki teoremdir.

3.4.1. Teorem

a, b, c ve d pozitif sabitler olmak üzere (3.4.1) denklemindeki f_1, f_2, p fonksiyonlarının aşağıdaki şartları sağladığını varsayalım:

- (i) f_1 ve f_2 fonksiyonları yukarıda verilen (A1), (A2) ve (A3) kabullerini sağlar.
- (ii) a, b, c ve d sabitleri (A6) kabulünü sağlar.
- (iii) p fonksiyonu ise (A9) kabulünü sağlar

Bu taktirde,

$$\lim_{|u| \rightarrow \infty} \frac{1}{u^2} \left\{ \int_0^u f_1(\xi) d\xi - \frac{1}{2} u f_1(u) \right\} \geq 0;$$

ve

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{1}{z^2} \left\{ \int_0^z f_2(\xi) d\xi - \frac{1}{2} z f_2(z) \right\} \leq 0;$$

olmak kaydıyla (3.4.1) denklemi düzgün dispativ çözümlere sahiptir.

Uyarı

Belirtelim ki benzer problemler (3.4.1) denkleminde $f_1(x''') = ax''', a > 0$ ve $f_2(x') = bx'', b > 0$ alındığında sırası ile elde edilen elde edilen

$$x^{(4)} + ax''' + f_2(x'') + cx' + dx = p(t, x, x', x'', x'''),$$

ve

$$x^{(4)} + f_1(x''') + bx'' + cx' + dx = p(t, x, x', x'', x''')$$

denklemleri için Halanay (1972), tarafından incelendi.

3.4.1.İspat:

$$f_1(u) = au + \hat{f}_1(u) \text{ ve } f_2(z) = bz + \hat{f}_2(z) \text{ alalım.}$$

Bu takdirde $\hat{f}_j$, $(j=1,2)$ fonksiyonları,

$$0 \leq \hat{f}_j(\xi)/\xi \leq \mu_j, (\xi \neq 0) \text{ ve } 0 \leq \hat{f}_j(\xi) \leq \mu_j$$

bağıntılarını sağlar.

$x = x_1, x'_1 = x_2, x'_2 = x_3, x'_3 = x_4$ alındığında,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -d & -c & -b & -a \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \phi_1(\sigma) = \begin{pmatrix} \hat{f}_2(x_3) \\ \hat{f}_1(x_4) \end{pmatrix} \text{ ve } P_1(t, X) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ p(t, x_1, x_2, x_3, x'_3) \end{pmatrix}$$

olmak kaydıyla (3.4.1) denklemi

$$X' = A_1 X - B_1 \phi(\bar{\sigma}) + P_1(t, X), \bar{\sigma} = C_1^* X,$$

şeklinde yazılabilir. A_1 matrisinin kararlı olduğu kolaylıkla görülebilir. Yani A_1 matrisinin tüm özdeğerlerinin negatif reel kısmı olduğu kolaylıkla görülebilir. Buna bağlı olarak her $\omega \in \bar{R}$ için $(i\omega I - A)^{-1}$ mevcuttur. Ayrıca,

$$G_1(i\omega) = C^* (i\omega I - A_1)^{-1} B_1 = \frac{-\omega^2}{\Delta(i\omega)} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i\omega & i\omega \end{pmatrix} \quad (3.4.8)$$

dır. Burada $\Delta(i\omega) = (\omega^4 - b\omega^2 + d) + i\omega(c - a\omega^2)$ olarak tanımlanmaktadır.

(A7) kabulünden her $\omega \in \bar{R}$ için $\Delta(i\omega) \neq 0$ yazılabilir.

$D_1 = \text{diag}(\tau_j / \mu_j)$; $D_2 = \text{diag}(\varphi_j / \mu_j)$; ($j = 1, 2$) ve $D_3 \equiv 0$ alındığında her $\omega \in R$ için yazılabilir.

$$D_1 + \text{Re}\{[D_1 M + i\omega D_2]G(i\omega)\} + \omega^2 \text{Re}\{D_3[I + (D'' - D')G(i\omega)] - G^*(-i\omega)D_3 D' D'' G(i\omega)\} > 0$$

Frequency-Domain eşitsizliği,

$$\pi_{11}(\omega) = \frac{\tau_1}{\mu_1} - \frac{\omega^2}{|\Delta|^2} \left(\tau_1 s + \frac{\omega^2 \theta_1 t}{\mu_1} \right),$$

$$\pi_{22}(\omega) = \frac{\tau_2}{\mu_2} - \frac{\omega^4}{|\Delta|^2} \left(\tau_2 t - \frac{\theta_2 s}{\mu_2} \right),$$

ve

$$\pi_{12}(\omega) = \bar{\pi}_{21}(\omega) = \frac{-\omega^2}{2|\Delta|^2} \left\{ \left[\left(\tau_1 - \frac{\omega^2 \theta_2}{\mu_2} \right) s + \omega^2 \left(\tau_2 + \frac{\theta_1}{\mu_1} \right) t \right] + i\omega \left[\left(\frac{\theta_1}{\mu_1} - \tau_2 \right) s - \left(\tau_1 + \frac{\omega^2 \theta_2}{\mu_2} \right) t \right] \right\}$$

olmak üzere,

$$\pi_1(\omega) = \begin{pmatrix} \pi_{11}(\omega) & \pi_{12}(\omega) \\ \pi_{21}(\omega) & \pi_{22}(\omega) \end{pmatrix} > 0 \quad (3.4.9)$$

şeklini alır. Burada $\Delta = \Delta(i\omega) = s + i\omega t$ olup, $s = \omega^4 - b\omega^2 + d$ ve $t = c - a\omega^2$ dir. Bu teoremin ispatının tamamlanması için $D_1 > 0$, $D_2 \geq 0$ ve $D_3 \geq 0$ köşegen matrislerinin var olduğu gösterilmelidir, öyle ki, (3.4.9) eşitsizliği ve

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} D_2 \left(\frac{1}{\lambda_2} \right) \text{diag} \left[\int_0^\lambda \theta_j(\alpha) d\alpha - \frac{\lambda}{2} \theta_j(\lambda) \right] \geq 0$$

tamamlayıcı şartı sağlanır.

Sylvester Kriteri göz önüne alındığında her $\omega \in \bar{R}$ için (3.4.9) eşitsizliğinin sağlanması için, ya

$$\pi_{11}(\omega) > 0 \text{ ve } \det \pi_1(\omega) \text{ her } \omega \in \bar{R}$$

yada

$$\pi_{22}(\omega) > 0 \text{ ve } \det \pi_1(\omega) \text{ her } \omega \in \bar{R}$$

sağlanmalıdır. τ_j , ($j = 1, 2$) alınsın. Bu taktirde $\pi_{11}(\omega)$,

$$\pi_{11}(\omega) = \tau_1 \left\{ \frac{1}{\mu_1} - \frac{\omega^2 \left[(\omega^4 - b\omega^2 + d) + \omega^2 \theta_1(c - a\omega^2) / \mu_1 \tau_1 \right]}{(\omega^4 - b\omega^2 + d)^2 + \omega^2 (c - a\omega^2)^2} \right\}$$

biçiminde düzenlenebilir. Eğer,

$$\frac{\phi_1}{\tau_1} < \left(\frac{a\omega_0^2 - c}{\omega_0^2} \right) < 0 \text{ ise 3.4.1 Lemma göz önüne alınarak,}$$

$$0 \leq \mu_1 < \frac{d(c - a\omega_0^2)(\omega_1^2 - \omega_0^2)}{c\omega_0^4},$$

olmak kaydıyla her $\omega \in \bar{R}$ için $\pi_{11}(\omega) > 0$ olduğu görülür. Benzer biçimde $\pi_{22}(\omega)$ ise

$$\pi_{22}(\omega) = \tau_2 \left\{ \frac{1}{\mu_2} + \frac{\omega^4 \left[\frac{\theta_2}{\mu_2 \tau_2} (\omega^4 - b\omega^2 + d) - (c - a\omega^2) \right]}{(\omega^4 - b\omega^2 + d)^2 + \omega^2 (c - a\omega^2)^2} \right\}$$

biçiminde yazılabilir. Eğer,

$$0 < \frac{\theta}{\tau_2} < \frac{A_4}{c^2}$$

alınır ise,

$$0 \leq \mu_2 < \frac{(c - a\omega_0^2)}{\omega_0^2}$$

olmak üzere 3.4.2. Lemma göz önüne alındığında her $\omega \in \bar{R}$ için $\pi_2(\omega)$ nin pozitif tanımlı olduğu kolaylıkla görülebilir.

Yukarıdaki incelemeler dikkate alındığında,

$$\begin{aligned} \det \pi_1(\omega) = & \frac{\tau_1 \tau_2}{\mu_1 \mu_2} - \frac{\omega^2}{|\Delta|^2} \times \left\{ \frac{\tau_2}{\mu_2} \left(\tau_1 s + \frac{\omega^2 \theta_1 t}{\mu_1} \right) + \frac{\omega^2 \tau_1}{\mu_1} \left(\tau_2 t - \frac{\theta_2 s}{\tau_2} \right) \right. \\ & \left. + \frac{\omega^2}{4} \left[\left(\tau_1 + \omega^2 \frac{\theta_2}{\tau_2} \right)^2 + \omega^2 \left(\tau_2 t - \frac{\theta_1}{\mu_1} \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

olur.

Buradaki μ_1 ve μ_2 sabitlerinin (A3) kabulünü sağladığı ve τ_2 yeterince büyük seçilmek üzere her $\omega \in \bar{R}$ için $\det \pi_{11}(\omega) > 0$ olduğu görülür.

Şimdi ise $D_2 = \text{diag}(\theta_2/\mu_j)$, ($j=1,2$) alınsın. Bu durumda

$$\lim_{|x_3| \rightarrow \infty} \frac{\theta_1}{x_3^2} \left\{ \int_0^{x_3} \hat{f}_2(\alpha) d\alpha - \frac{x_3}{2} \hat{f}_2(x_3) \right\} \geq 0$$

$$\lim_{|x_3| \rightarrow \infty} \frac{\theta_2}{x_4^2} \left\{ \int_0^{x_4} \hat{f}_1(\alpha) d\alpha - \frac{x_4}{2} \hat{f}_2(x_4) \right\} \geq 0$$

$\tau_j > 0$, ($j=1,2$) eşitsizlikleri sağlanır. Bu ise teoremin ispatını tamamlar.

Şimdi ise;

$$x^{(4)} + f_1(x''') + bx'' + f_3(x') + dx = p(t, x, x', x'', x'''); \quad (3.4.2)$$

ve

$$x^{(4)} + f_1(x''') + bx'' + cx' + f_4(x) = p(t, x, x', x'', x'''); \quad (3.4.4)$$

denklemlerinin düzgün dispative çözümlerinin olduğuna dair sonuçları ifade edelim. Verilecek olan teoremlerin ispatı yukarıda verilen teoremin ispatına benzer olduğu için ispatları burada verilmeyecektir.

3.4.2. Teorem

(3.4.2) denklemindeki f_1, f_3 ve p fonksiyonları ile b ve d pozitif sabitlerinin aşağıdaki şartları sağladığını kabul edelim.

- (i) f_1 ve f_3 fonksiyonları (A1), (A2) ve (A4) kabullerini sağlar.
- (ii) b ve d sabitleri (A6) kabulünü sağlar.
- (iii) p fonksiyonu (A9) kabulünü sağlar.

Bu taktirde,

$$\lim_{|u| \rightarrow \infty} \frac{1}{u^2} \left\{ \int_0^u f_1(\xi) d\xi - \frac{1}{2} u f_1(u) \right\} \geq 0;$$

ve

$$\lim_{|y| \rightarrow \infty} \frac{1}{y^2} \left\{ \int_0^y f_3(\xi) d\xi - \frac{1}{2} y f_3(y) \right\} \geq 0;$$

sağlanmak kaydıyla (3.4.2) denklemi düzgün dispative çözümlere sahiptir.

İspat:

Bkz. (Afuwape, 1991).

3.4.3. Teorem

(3.4.3) denklemindeki f_1 , f_4 ve p fonksiyonları ile b ve c pozitif sabitlerinin aşağıdaki şartları sağladığını kabul edelim:

(i) f_1 ve f_4 fonksiyonları (A1),(A2) ve (A5) kabullerini sağlar.

(ii) b ve c sabitleri (A6) kabulünü sağlar.

(iii) p fonksiyonu (A9) kabulünü sağlar.

Bu taktirde,

$$\lim_{|u| \rightarrow \infty} \frac{1}{u^2} \left\{ \int_0^u f_1(\xi) d\xi - \frac{1}{2} u f_1(u) \right\} \geq 0$$

ve

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} \left\{ \int_0^x f_3(\xi) d\xi - \frac{1}{2} x f_4(x) \right\} \geq 0$$

sağlamak kaydıyla (3.4.3) denklemini düzgün dispativ çözümlere sahiptir.

İspat:

Bkz. (Afuwape, 1991).

3.5. Dördüncü Basamaktan Lineer Olmayan Bazı Diferansiyel Denklemlerin Çözümlerinin Niteliksel Davranışları Üzerine

Bu kesimde Frequency-Domain Metodu ile Genelleştirilmiş Yacubovich (1965), Teoremini kullanarak dördüncü basamaktan bazı diferansiyel denklemlerin çözümlerinin varlığı için yeter şartlar elde edilecektir. Bu var olan çözümler sınırlı, global olarak üstel (exponential) kararlı, periyodiktir(veya hemen hemen periyodiktir).

Şimdi dördüncü basamaktan lineer olmayan,

$$x^{(4)} + f(x'')x''' + bx'' + g(x') + dx = p(t) \quad (3.5.1)$$

$$x^{(4)} + f(x'')x''' + bx'' + g_1(x)x' + dx = p(t) \quad (3.5.2)$$

şeklindeki diferansiyel denklemleri göz önüne alalım.

Bu çalışmanın amacı Frequency-Domain metodunu kullanarak (belli şartlar altında) (3.5.1) ve (3.5.2) denkleminin aşağıdaki özelliklere sahip olduğunu ispatlamaktır. Yani (3.5.1) ve (3.5.2) denklemlerinin çözümlerinin verilen şartlar altında aşağıdaki özelliklere sahip olduğunu ispatlayacağız.

(α) (3.5.1) ve (3.5.2) denklemlerinin bir tek $x(t)$ çözümü vardır. Bu çözüm R de sınırlı ve hem de global üstel olarak kararlıdır.

(β) (3.5.1) ve (3.5.2) de geçen p fonksiyonu periyodik (hemen hemen periyodik) olmak kaydıyla, bu $x(t)$ çözümünün periyodik olduğunu ya da hemen hemen periyodik olduğunu göstermek.

(3.5.1) ve (3.5.2) denklemleri literatürde geniş bir biçimde ele alındı. Ezeilo (1962), (3.5.1) de $p \neq 0$ olmak üzere Lyapunov fonksiyonlarını Reissing ve ark. (1974), kullanarak (3.5.1) denkleminde ait sınırlılık sonuçları ve çözümlerin global asimptotik kararlılığını inceledi. Birde Afuwape (1985), ve Barbalat ve Halanay (1970), (3.5.1) ve (3.5.2) de $f(x'')x''' = ax''$ (a pozitif sabit olmak üzere) bu denklemlerin (α) ve (β) özelliklerine sahip olduğunu göstermek için Frequency-Domain metodunu kullandı. Burada elde edilen sonuç (Afuwape, 1985) sonuçlarının daha genel bir halidir.

Aşağıdaki temel teoremler ispatlanacaktır.

3.5.1. Teorem

(3.5.1) denklemindeki katsayılar için $f(0) = g(0) = 0$ ve her $t \in R$ için $p(t)$ nin sınırlı olduğunu kabul edelim. Bu şartlara ilaveten kabul edelim ki, a, c, μ_1 ve μ_2 parametreleri var öyle ki f ve g fonksiyonları

$$\mu_1 < m_1 \leq \frac{2b(ab - 2c)^2 + (b^2 - 4d)^2}{2b^2(ab - 2c)}$$

$$\mu_2 < m_2 \leq (ab - 2c) + \frac{a(b^2 - 4d)^{\frac{1}{2}}}{2}$$

olmak üzere pozitif a, c sabitlerinin ve negatif olmayan μ_1 ve μ_2 sabitlerinin varlığını kabul edeceğiz, öyle ki, bu sabitler için,

$$a \leq \frac{1}{z} \int_0^z f(s) ds \leq a + \mu_1, \quad z \neq 0, \mu_1 \geq 0$$

$$c \leq \frac{g(z) - g(\hat{z})}{z - \hat{z}} \leq c + \mu_2, \quad z \neq \hat{z}$$

eşitsizliklerini sağlamaktadır.

Burada m_1 ve m_2 , b, d sabitleri ve a, c parametrelerine bağlıdır. Bu taktirde, (3.5.1) denklemini bir tek $x(t)$ çözümüne sahiptir, bu çözüm R de sınırlıdır ve üstel anlamda kararlıdır.

Eğer $P(t)$ periyodik(veya hemen hemen periyodik) ise bu taktirde (3.5.1)denkleminin bu $x(t)$ çözümü periyodik veya hemen hemen periyodiktir.

İspat:

$$\int_0^z f(s) ds = az + \hat{f}(z) \quad \text{ve} \quad g(x') = cx' + \hat{g}(x') \quad \text{olmak üzere} \quad (3.5.1) \quad \text{denkleminde}$$

$x = x_1$ alındığında bu denklem

$$X' = A_1 X - B_1 \varphi(\sigma_1) + P_1(t), \quad \sigma_1 = C_1^* X$$

eşdeğer sistemi biçiminde yazılabilir. Burada,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -a & 1 \\ -d & c & -b & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

(3.5.3)

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ p(t) \end{pmatrix}, \quad \varphi(\sigma) = \begin{pmatrix} \hat{f}(x_3) \\ \hat{g}(x_2) \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

$(ab - c)c > a^2d$ olduğundan, A matrisinin tüm özdeğerleri negatif reel kısımlı olur. Buna bağlı olarak da A matrisi kararlıdır denir.

Böylece her $\omega \in R$ için $(i\omega I - A)^{-1}$ vardır.

$D = \text{diag}(\tau_j)$ ve $M = \text{diag}\left(\frac{1}{\mu_j}\right)$ $\tau_j > 0, \mu_j > 0, (j = 1, 2)$ olacak şekilde alalım. Bu durumda

$G(i\omega) = C^*(i\omega I - A)^{-1}B$ olmak üzere,

$$\pi(\omega) = MD + \text{Re} DG(i\omega) > 0$$

olmalıdır. (3.5.3) sistemi için Frequency-Domain eşitsizliği göz önüne alındığında gerekli hesaplamalar yapılır ise her $\omega \in R$ için,

$$\pi(\omega) = \begin{pmatrix} \tau_1 \left[\frac{1}{\mu_1} + \frac{\omega^4(c - a\omega^2)}{|\Delta|^2} \right] & \frac{-\omega^2[r_1\bar{\Delta} + r_2\Delta]}{2|\Delta|^2} \\ \frac{-\omega^2[r_1\Delta + r_2\bar{\Delta}]}{2|\Delta|^2} & \tau_2 \left[\frac{1}{\mu_2} + \frac{\omega^2(c - a\omega^2)}{|\Delta|^2} \right] \end{pmatrix} > 0 \quad (3.5.4)$$

elde edilir. Burada $\Delta = (\omega^4 - b\omega^2 + d) + i\omega(c - a\omega^2)$, $\bar{\Delta}$, Δ nın karmaşık eşleniği $|\Delta|^2 = \Delta\bar{\Delta}$ dir. (3.5.4) simetrik bir matris olmak üzere Sylvester Kriteri gereği Frequency-Domain eşitsizliğinin sağlanması için $\pi(\omega)$ simetrik matrisinin esas köşegen minörlerinin pozitif olması gereklidir. Bunun sağlanabilmesi için

$$\frac{1}{\mu_1} > \frac{\omega^4(a\omega^2 - c)}{|\Delta|^2} \quad (3.5.5)$$

$$\frac{1}{\mu_2} > \frac{\omega^2(a\omega^2 - c)}{|\Delta|^2} \quad (3.5.6)$$

olmalıdır

Bu durum aşağıdaki lemmalar vasıtasıyla ispatlanacaktır.

3.5.1.Lemma

$S_1(v)$ fonksiyonu $0 < v < \frac{c}{a}$ olmak üzere

$$S_1(v) = \frac{(av - c)}{v} + \frac{(v^2 - bv + d)^2}{v^2(c - av)}$$

şeklinde tanımlansın. Bu taktirde,

$$\mu_1 < m_1(a, b) = S_1(v_0) = \min_{v_1 < v < b} S_1(v)$$

ve

$$S_1(v_0) \leq S_1\left(\frac{b}{2}\right) = \frac{2b(ab - 2c)^2 + (b^2 - 4d)^2}{2b^2(ab - 2c)}$$

olmak üzere (3.5.5) eşitsizliği her $v > 0$ için sağlanır. Burada v_0 , $\psi(v) = S_1'(v)v^4(av - c)^2$ bağıntısının bir köküdür ve $v_1 < v_0 < b$ dir.

İspat:

(3.5.5) de $\omega^2 = v$ alalım. Bu taktirde (3.5.5) eşitsizliğinden

$$\mu_1 < S_1(v) = \frac{(av - c)}{v} + \frac{(v^2 - bv + d)^2}{v^2(c - av)}$$

yazılabilir. $m_1(a, b)$, $S_1(v)$ nin minimum değeri olsun. Bu değere $v = v_0$ da ulaşılabilir.

$$\begin{aligned} \psi(v) = v^2(av - c)[(av - c)(3av - c) + 2(2v - b)(v^2 - bv + d)] \\ + v(3av - 2c)[(v^2 - bv + d)^2 + v^2(c - av)^2] \end{aligned}$$

yazılabilir. Eğer $\psi(v) = 0$ ise $S_1'(v) = 0$ olur. $S_1(v)$ nin grafiği çizildiğinde $v = 0$ ve $v = \frac{c}{a}$ grafiğinin asimptotlara sahip olduğu görülebilir. v deki minimum değer için $v > \frac{c}{a}$ elde etmelidir. Ayrıca,

$$S_1(v_1) = \frac{(ab - 2c) - a(b^2 - 4d)^{1/2}}{b - (b^2 - 4d)^{1/2}} \quad (3.5.7)$$

$$S_1(v_2) = \frac{(ab - 2c) + a(b^2 - 4d)^{1/2}}{b - (b^2 - 4d)^{1/2}} \quad (3.5.8)$$

ve

$$S_1\left(\frac{b}{2}\right) = \frac{2b(ab - 2c)^2 + (b^2 - 4d)^2}{2b^2(ab - 2c)}$$

(3.5.7) ve (3.5.8) eşitsizliklerinin negatif oldukları görülebilir. Böylece (3.5.5) eşitsizliği $\frac{b}{2} > \frac{c}{a}$ ve $m_1(a, b) \leq S_1\left(\frac{b}{2}\right)$ olmak kaydıyla sağlanır.

3.5.2.Lemma

Her $\omega \in R$ için $\det \pi(\omega)$ pozitifdir.

İspat:

(3.5.4) matrisinin determinantı alındığında,

$$\det \pi(\omega) = \tau_1 \tau_2 \left[\frac{1}{\mu_1 \mu_2} + \frac{\omega^2}{|\Delta|^2} \left[\frac{(-a\omega^2)}{\mu_2} + \omega^2 \frac{(c - a\omega^2)}{\mu_2} - \frac{\omega^2 (\tau_1^2 + \tau_2^2)}{4\tau_1 \tau_2} \right] - \omega^4 \left[\frac{(\omega^4 - b\omega^2 + d)^2 - 3\omega^2 (c - a\omega^2)^2}{2|\Delta|^2} \right] \right]$$

elde edilir. $\omega^2 = 0$ için $\det \pi(\omega) > 0$ olduğu açıkça görülebilir. $\omega^2 \neq 0$ için $\det \pi(\omega) > 0$ olduğunu göstermek;

$$\begin{aligned}
& \left(2|\Delta|^4 + 2\omega^2 |\Delta|^2 \left[(\mu_2 + \omega^2 \mu_1)(c - a\omega^2) - \frac{\mu_1 \mu_2 \omega^2 (\tau_1^2 + \tau_2^2)}{4\tau_1 \tau_2} \right] \right) \\
& > \omega^4 \left((\omega^4 - b\omega^2 + d)^2 - 3\omega^2 (c - a\omega^2)^2 \right) \mu_1 \mu_2
\end{aligned} \tag{3.5.9}$$

eşitsizliğinin gösterilmesine eşdeğerdir. (3.5.9) un sol yanının minimum değeri $2d^4$ iken sağ yanının maksimum değeri 0 dır. $2d^4 > 0$ olduğundan (3.5.9) eşitsizliği daima sağlanır.

3.5.2. Teorem

Kabul edelim ki, $f(0) = g(0) = 0$ ve $p(t)$ fonksiyonu R de sınırlıdır. Ayrıca

$$c \leq \frac{1}{x} \int_0^x g_1(s) d(s) \leq c + \mu_2, \quad c \leq \frac{1}{x} \int_0^x g_1(s) d(s) \leq c + \mu_2 \tag{3.5.10}$$

olmak üzere Teorem 5.1'in tüm şartlarının sağlandığını varsayalım. Bu taktirde (3.5.2) denklemi bir tek $x(t)$ çözümüne sahiptir. Bu çözüm R de sınırlı ve global üstel (exponential) kararlıdır.

Yukarıdaki şartlara ilaveten $p(t)$ periyodik veya hemen hemen periyodik ise bu taktirde (3.5.2) denklemi bir periyodik çözüme veya hemen hemen periyodik çözüme sahiptir

İspat:

a ve c pozitif sabitlerini $\int_0^z f(s) ds = az + \hat{f}(z)$, $\int_0^x g_1(s) ds = cx + \hat{g}_1(x)$ olacak şekilde

seçelim. $x = x_4$ alınırsa (3.5.2) denklemi aşağıdaki eşdeğer forma sahiptir.

$$\begin{aligned}
x_1' &= -dx_4 \\
x_2' &= x_1 - cx_4 - \hat{f}(x_4) \\
x_3' &= x_2 - ax_3 - bx_4 - \hat{g}_1(x_3) + p(t) \\
x_4' &= x_3
\end{aligned}$$

Bu sistem ise şu formdadır;

$$X' = A_1 X - B \varphi(\sigma_1) + P_1(t), \quad \sigma_1 = C_1^* X$$

$A_1 = A_1^*, B_1 = C, C_1 = B$ ve $P_1(t) = TP(t)$ burada X, A, B, C ve P (3.5.3) ile verilmektedir ve

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dir.

Böylece (3.5.2), (3.5.1) sisteminin bir dualidir. Teorem 1.5'den her iki denklem aynı eşdeğer Frequency-Domain şartlarına sahiptir. Buna bağlı olarak Teorem 5.1'in ispatı dikkate alındığında Teorem 5.2'nin ispatı da tamamlanır.

3.6. Dördüncü Basamaktan Lineer Olmayan Bazı Diferansiyel Denklemler İçin

Frequency-Domain Metodu İle Çözümlerin Kararlılığı ve Periyodik Davranışların Belirlenmesi

3.6.1. Teorem

$$x^{(4)} + ax''' + f(x')x'' + g(x') + h(x) = p(t) \quad (3.6.1)$$

diferansiyel denklemi için, a, b, c, d ler pozitif sabitler ve μ_1, μ_2, μ_3, z ise R de parametreler olmak üzere aşağıdaki şartların sağlandığını kabul edelim;

$$b \leq \frac{1}{z} \int_0^z f(s) ds \leq b + \mu_1, \quad z \neq 0, \mu_1 \geq 0 \quad (3.6.2)$$

$$c \leq \frac{g(z) - g(\hat{z})}{z - \hat{z}} \leq c + \mu_2, \quad z \neq \hat{z}, \mu_2 \geq 0 \quad (3.6.3)$$

$$d \leq \frac{h(z) - h(\hat{z})}{z - \hat{z}} \leq d + \mu_3, \quad z \neq \hat{z}, \mu_3 \geq 0 \quad (3.6.4)$$

$$\frac{d(d + \mu_3)}{\mu_2 \mu_3} > \frac{\tau_3}{4\tau_2} \quad (3.6.5)$$

Bu taktirde (3.6.1) denklemi bir tek $x(t)$ çözümüne sahip ise bu çözümün $x'(t), x''(t), x'''(t)$ türevleri sınırlı olup, ayrıca çözüm üstel olarak global kararlıdır (Afuwape ve Adesina, 2005b).

İspat:

Yukarıda verilen b, c ve d pozitif sabitleri (3.6.2) ve (3.6.3) eşitsizliklerinin sağlanması için,

$$\int_0^z f(s)ds = bz + \hat{f}(z), g(z) = cz + \hat{f}(z), h(z) = dz + \hat{h}(z) \text{ şeklinde seçelim.}$$

$x = x_1$ alındığında (3.6.1) denklemi.

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= -ax_2 + x_3 \\ x_3' &= -bx_2 + x_4 - \hat{f}(x_2) \\ x_4' &= -dx_1 - cx_2 - \hat{g}(x_2) - \hat{h}(x_1) + p(t) \end{aligned}$$

sistemine eşdeğerdir

$$X' = AX - P\varphi(\sigma) + P(t), \quad \sigma = C^*X \quad (1.4)$$

vektör formunda yazılabilir. Burada X, A, C, P ve φ

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 1 & 0 \\ 0 & -b & 0 & 1 \\ -d & -c & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.6.6)$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ p(t) \end{pmatrix}, \quad \varphi(\sigma) = \begin{pmatrix} f(x_2) \\ g(x_2) \\ \hat{h}(x_1) \end{pmatrix}$$

Eşitliklerine karşılık gelmektedir, C^* matrisi C matrisinin transpozudur. İspatın geri kalan kısmı için bkz. Afuwape, Adesina (2005).

3.6.2. Teorem

$$x^{(4)} + ax''' + f(x')x'' + g(x') + dx = p(t)$$

denkleminde $h(x)$ fonksiyonunun lineer, yani (3.6.1) denklemi biçiminde verildiğini, ayrıca burada $d > 0$ bir sabit ve f, g ve p fonksiyonlarının (3.6.2)-(3.6.4) eşitsizliklerini sağladıklarını varsalım. Bu taktirde,

$$(\mu_1 \mu_2)^2 < 16(b\mu_1 - a\mu_2)(d\mu_1 + c\mu_2)$$

olmak kaydıyla Teorem 3.6.1.'in sonuçları burada geçerlidir.

İspat:

Teorem 3.6.1.'in ispatında olduğu gibi pozitif b ve c sabitleri seçelim öyle ki, eşitsizlikleri sağlansın. Kesim 3'deki belirtilen adımları dikkate aldığımızda

$$x^{(4)} + ax''' + f(x')x'' + g(x') + dx = p(t)$$

denklemini için,

$$\pi_1(\omega) = (\pi_{11}\pi_{12}\pi_{21}\pi_{22}) > 0 \quad (3.6.7)$$

Frequency-domain eşitsizliğini elde ederiz. Burada π_{11} ve π_{22} sırasıyla

$$\pi_{11} = \tau_1 \left[\mu_1^{-1} + \frac{\omega^2(\omega^4 - b\omega^2 + d)}{|\Delta|^2} \right]$$

ve

$$\pi_{22} = \tau_2 \left[\mu_2^{-1} + \omega^2 \frac{(c - a\omega^2)}{|\Delta|^2} \right]$$

denklemleri ile $\pi_{12} = \pi_{21}$ ise

$$\pi_{12} = \frac{1}{2|\Delta|^2} \left[\omega^2 (\tau_1 (c - a\omega^2) - \tau_2 (\omega^4 - b\omega^2 + d)) \right] \\ + i\omega (\tau_1 (\omega^4 - b\omega^2 + d) - \omega^2 \tau_2 (c - a\omega^2)) = \bar{\pi}_{21}$$

eşitliği ile verilmektedir. 3.1.Lemma ve 3.2.Lemma dikkate alındığında (3.6.7) eşitsizliğinin reel sayılardaki her ω için sağlandığı kolaylıkla görülebilir. Teorem 3.6.1. kullanılarak ispatın sonucuna varılır.

Uyarı:

Afuwape (1986), sisteminde gösterdi ki, eğer

$$X' = A_1 X - B_1 \varphi(\hat{\sigma}_1) + P_1(t), \quad \hat{\sigma}_1 = C_1^* X \quad (3.6.8)$$

sistemi (1.4) sisteminin bir duali ise bu taktirde her iki sistem için Frequency-Domain eşitsizlikleri eşdeğerdir.

3.6.3.Teorem

Kabul edelim ki,

$$x^{(4)} + ax''' + f(x')x'' + g_1(x)x' + h(x) = p(t)$$

denklemini Teorem 3.6.1'in bütün şartlarının (3.6.3.) eşitsizliği hariç olmak üzere sağlamaktadır. Bu taktirde,

$$c \leq \frac{1}{z} \int_0^z g_1(s) ds \leq c + \mu_3, z \neq 0, \mu_3 \geq 0$$

olmak kaydıyla Teorem 3.6.1.'in sonuçları bu teorem için de geçerlidir.

Yukarıdaki kabullere ilave olarak eğer $p(t)$ periyodik (veya hemen hemen periyodik) ise bu taktirde

$$x^{(4)} + ax''' + f(x')x'' + g_1(x)x' + h(x) = p(t)$$

denkleminin bir tek periyodik (veya hemen hemen periyodik) çözüme sahip olup, bu çözüm ile birlikte ilk mertebeden türevleri de periyodik (veya hemen hemen periyodik) tir.

İspat:

Teorem 3.6.1.'de f ve g fonksiyonları için verilen şartların sağlandığını kabul edelim. c parametresinin eşitliği sağlanacak şekilde seçersek, bu taktirde

$$x^{(4)} + ax''' + f(x')x'' + g_1(x)x' + h(x) = p(t)$$

denklemini (3.6.8) biçiminde yazılabilir. Burada (3.6.6) sistemindeki gibi verilmek üzere olup, ise (3.6.6) sistemindeki gibi tanımlanmaktadır.

Açıkça (3.6.8) sistemi,

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olmak üzere (3.6.6) sisteminin bir dualidir. Dualite Prensiplerine göre Frequency-Domain eşitsizliği her iki sistem için eşdeğerdir. Ayrıca bu durum dikkate alındığında Teorem 3.6.3.'ün sonucu Teorem 3.6.1.'de kolaylıkla görülebilir.

3.6.4. Teorem

$$x^{(4)} + ax''' + f(x')x'' + g_1(x)x' + d(x) = p(t) \quad (3.6.9)$$

denklemini $d > 0$ bir sabit olmak üzere ele alalım. Eğer f, g_1 ve p fonksiyonları Teorem 3.6.3'ün şartları ile birlikte (3.6.4) eşitsizliğini sağlar ise bu taktirde (3.6.9) denklemini için Teorem 3.6.3'ün sonuçları geçerlidir.

İspat:

b ve c sabitleri (3.6.2) ve (3.6.3) eşitsizliklerini sağlamak üzere,

$$\int_0^z f(s)ds = bz + \hat{f}(z)$$

$$\int_0^z g_1(s)ds = cz + \hat{g}_1(z)$$

olsun. Bu taktirde

$$x^{(4)} + ax''' + f(x')x'' + g_1(x)x' + d(x) = p(t) \quad (3.6.9)$$

denklemini veya bu denkleme eşdeğer olan

$$\begin{aligned} x_1' &= -dx_4 \\ x_2' &= x_1 - ax_2 - bx_3 - cx_3 - \hat{f}(x_3) - \hat{g}_1(x_3) + p(t) \\ x_3' &= x_2 \\ x_4' &= x_3 \end{aligned}$$

sistemi

$$x^{(4)} + ax''' + f(x')x'' + g(x)x' + d(x) = p(t)$$

denkleminin bir dualidir.

Dualite Prensibi kullanıldığından Teorem 3.6.2.'nin ispatından Teorem 3.6.4.'ün sonucu kolaylıkla görülebilir.

Bazı temel lemmalar:

3.6.1.Lemma

$$\begin{aligned}
 A(v) &= 2v^7 - (1 + 4b)v^6 + (4a^2 + 2b^2 + 2b + 4d)v^5 \\
 &\quad + (4a^2b + b^2 - 2a + 6ac + 4bd + 4d)v^4 \\
 &\quad + (4a^2d + 2c^2 - ab + 6abc - 4bd - 2c)v^3 \\
 &\quad + (b^2d - 2b^2 + 2bc^2 + d^2 + 6cad - bc)v^2 \\
 &\quad + (2c^2d + 2bd^2)v - d^3 \\
 S_1(v) &= \frac{(v^2 - bv + d)}{v} + \frac{(c - av)^2}{(v^2 - bv + d)}
 \end{aligned}$$

olsun. Bu taktirde $\mu_1 < S_1(v_0) = \min S_1(v)$ olmak kaydıyla tüm $v > 0$ lar için

$$\mu_1 > \frac{v(v^2 - bv + d)^2}{|\Delta|^2} \text{ dir..}$$

Burada $A(v) = 0$ denkleminin bir tek reel kökü v_0 dır ve $v_2 < v_0 \leq b$ dır.

$$\mu_1 < S_1(v_0) = \min_{v_2 < v \leq b} S_1(v)$$

sağlanır (Afuwape ve Adesina,2005b).

İspat:

$$\mu_1 < S_1(v) = \frac{v^2 - bv + d}{v} + \frac{(c - av)^2}{(v^2 - bv + d)} \quad \text{alalım.}$$

Bu taktirde $S_1(v)$ nin minimum değeri bulunabilir. Kabul edelim ki, $S_1(v)$ fonksiyonu $v = v_0$ da min değerini alsın. O zaman $S'_1(v_0) = 0$ olmak zorundadır. Açıkça $A(v)$ fonksiyonu için

$$\begin{aligned}
 A(v) &= S'_1(v).v^2(v^2 - bv + d)^2 \\
 &= v(2v - b)[(v^2 - bv + d)^2 - v(c - av)^2] \\
 &\quad + (v^2 - vb + d)[(v^2 - bv + d)^2 - 2av(c - av)]
 \end{aligned}$$

Eğer $A(v) = 0$ ise bu taktirde $(v_2, b]$ aralığında $S'_1(v) = 0$ olur. Ayrıca $S_1(v)$ nin grafiği çizilir ise $v \rightarrow 0$ iken v_1 ve v_2 gibi asimptotların var olduğu görülebilir. Ayrıca,

$$S_1\left(\frac{c}{a}\right) = -\frac{[(ab-c)c - a^2d]}{ac}$$

$$S_1\left(\frac{b}{2}\right) = -\frac{[(b^2 - 4ad)^2 + 2b(2c - ab)^2]}{2b(b^2 - 2d)}$$

yazılabilir.

Bu her iki değer de negatiftir. Çünkü Hurwitz şartları dikkate alındığında istenen sonuç kolaylıkla görülür.

Ayrıca,

$$S_1(b) = \frac{b(c - ab)^2 + d^2}{bd}$$

olduğu kolaylıkla görülebilir. Böylece $S_1(v_0) \leq S_1(b)$ olduğundan $\pi_{11} > 0$ olduğu söylenebilir.

3.6.1.Lemma ve 3.6.2.Lemma'daki Afuwape (1985), 3.6.1.Lemma ve 3.6.3.Lemma'dan π_{22} ve π_{33} 'ün pozitif tanımlı olduğu kolaylıkla görülebilir. Gerçekten,

$$\mu_2 < \min_{\frac{c}{a} < v} S_2(v)$$

ve

$$\mu_3 < \min_{v_1 < v < v_2} S_3(v)$$

olması π_{22} ve π_{33} ifadelerinin her $v > 0$ için pozitif tanımlı olması için yeter şartlardır.

Burada,

$$S_2(v) = (av - c) + \frac{(v^2 - bv + d)}{v(av - c)}$$

$$S_3(v) = (-v^2 + bv - d) + \frac{v(c - av)^2}{(-v^2 + bv + d)} = -vS_1(v)$$

3.6.2.Lemma

Kabul edelim ki, pozitif a, b ve c parametreleri vardır. Öyle ki, aşağıdaki şartlar sağlanmaktadır.

$$a^2 > 2b, \quad b^2 > 2ac \quad (3.6.10)$$

$$c^2 > 2bd \quad (3.6.11)$$

$$\mu_1 > a^2 - 2b \quad (3.6.12)$$

$$\frac{b}{c} < \frac{\mu_2}{\mu_3} < \frac{1}{a} \quad (3.6.13)$$

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} < \frac{a}{b} \quad (3.6.14)$$

bu taktirde her $\omega \in R$ için,

$$\pi_{jj}(\omega)\pi_{kk}(\omega) - |\pi_{jk}(\omega)|^2 > 0, \quad (j \neq k), \quad (j, k = 1, 2, 3) \quad (3.6.15)$$

sağlanır (Afuwape ve Adesina, 2005b).

İspat:

$j = 1$ ve $k = 2$ alalım

$$\begin{aligned} \pi_{11}(\omega)\pi_{22}(\omega) - |\pi_{12}(\omega)|^2 &= \tau_1\tau_2 \left[\frac{1}{\mu_1\mu_2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\omega^2}{|\Delta|^2} \left[\frac{(c - a\omega)^2}{\mu_1} - \frac{(\omega^4 - b\omega^2 + d)}{\mu_2} - \frac{\tau_1^2 + \omega^2\tau_2^2}{4\tau_1\tau_2} \right] \right] \end{aligned} \quad (3.6.16)$$

elde edilir.

$$\frac{\mu_1\mu_2}{4(d\mu_1 + c\mu_2)} < \frac{\tau_2}{\tau_1} < \frac{4(b\mu_1 - a\mu_2)}{\mu_1\mu_2}$$

ise (3.6.16) daki ifade her $\omega \in R$ için pozitiftir. Çünkü (3.6.16) bağıntısı ve (3.6.10), (3.6.11), (3.6.12), (3.6.13) ve (3.6.14) eşitsizlikleri dikkate alındığında,

$$(\mu_1\mu_2)^2 < 16(b\mu_1 - a\mu_2)(d\mu_1 + c\mu_2)$$

böylece (3.6.15) eşitsizliklerinin $j = 1$ ve $k = 2$ için pozitif tanımlı olduğu görülür.

Benzer biçimde (3.6.15) de

$j = 2$ ve $k = 3$ için

$$\begin{aligned} \pi_{22}(\omega)\pi_{33}(\omega) - |\pi_{23}(\omega)|^2 = \tau_2\tau_3 \left[\frac{1}{\mu_2\mu_3} + \frac{1}{|\Delta|^2} \left[\frac{(\omega^4 - b\omega^2 + d)}{\mu_2} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\omega^2(c - a\omega^2)}{\mu_3} - \frac{\tau_3^2 + \omega^2\tau_2^2}{4\tau_2\tau_3} \right] \right] \end{aligned} \quad (3.6.17)$$

elde edilir. Bu ifade ise eğer $\frac{\tau_1}{\tau_2}$ (3.6.10),(3.6.11) ve (3.6.12) eşitsizlikleri sağlanacak şekilde

seçilirse her için pozitif tanımlı olduğu görülür. Gerçekten (3.6.17) bağıntısının,

$$\frac{\mu_2\mu_3}{4(c\mu_2 + b\mu_3)} < \frac{\tau_3}{\tau_2} < \frac{4d}{\mu_2}$$

ve

$$(\mu_2^2\mu_3) < 16d(c\mu_2 - b\mu_3)$$

bağıntıları dikkate alındığında pozitif olduğu görülür.

Son olarak $j = 3$ ve $k = 1$ alındığında (3.6.15) den

$$\begin{aligned} \pi_{33}(\omega)\pi_{11}(\omega) - |\pi_{31}(\omega)|^2 = \tau_1\tau_3 \left[\frac{1}{\mu_1\mu_2} + \frac{1}{|\Delta|^2} \left[\frac{(\omega^4 - b\omega^2 + d)}{\mu_1} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\omega^2(\omega^4 + b\omega^2 + d)}{\mu_3} - \frac{\omega^2}{2} - \frac{\omega^2(\tau_1^2 + \tau_3^2)}{4\tau_1\tau_3} \right] \right] \end{aligned}$$

yazılabilir. Elde edilen bu ifade

$$\mu_3 \left(b + \frac{\mu_1}{2} \right) + \mu_1 \left(d + \frac{\mu_2(\tau_1^2 + \tau_3^2)}{4\tau_1\tau_3} \right) > 0$$

olmak kaydıyla pozitif tanımlıdır.

Bu ise bize (3.6.15) bağıntısının $j = 3$ ve $k = 1$ için (3.6.15) bağıntısının pozitif tanımlı olduğunu gösterir.

3.6.3.Lemma

Her $\omega \in R$ için $\det \pi(\omega) > 0$ dır (Afuwape ve Adesina,2005b).

İspat:

$$\begin{aligned}
\det \pi(\omega) &= \pi_{11} \left[\pi_{22} \pi_{33} - |\pi_{23}(\omega)|^2 \right] + \pi_{22} \left[\pi_{11} \pi_{33} - |\pi_{31}(\omega)|^2 \right] + \\
&\quad + \pi_{33} \left[\pi_{11} \pi_{22} - |\pi_{12}(\omega)|^2 \right] - 2\pi_{11} \pi_{22} \pi_{33} + 2 \operatorname{Re}(\pi_{12} \pi_{23} \pi_{31}) \\
&= \tau_1 \tau_2 \tau_3 \left[\frac{1}{\mu_1 \mu_2 \mu_3} + \frac{1}{|\Delta|^2} \left[\frac{(\omega^4 - b\omega^2 + d)}{\mu_1 \mu_2} + \frac{\omega^2 (c - a\omega^2)}{\mu_1 \mu_3} - \frac{\omega^2 (\omega^4 - b\omega^2 + d)}{\mu_2 \mu_3} - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{\omega^2 (\tau_1^2 + \tau_3^2)}{4\tau_1 \tau_3 \mu_2} - \frac{\omega^2}{2\mu_2} - \frac{\omega^2 (\tau_1^2 + \omega^2 \tau_2^2)}{4\tau_1 \tau_2 \mu_3} - \frac{\tau_3^2 + \omega^2 \tau_2^2}{4\tau_2 \tau_3 \mu_1} \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{|\Delta|^4} \left[\frac{\omega^2 (\omega^4 - b\omega^2 + d)(\tau_3^2 + \omega^2 \tau_2^2)(1 - \tau_1 \tau_2 \tau_3)}{\tau_2 \tau_3} - \frac{\omega^4 (\tau_1^2 + \tau_3^2)(c - a\omega^2)}{4\tau_1 \tau_3} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{\omega^2 (\omega^2 - b\omega^2 + d)(\tau_1^2 + \omega^2 \tau_2^2)(1 + \tau_1 \tau_2 \tau_3)}{\tau_1 \tau_2} - \frac{\omega^2 \tau_2 (\tau_1 + \tau_3)^2 (c - a\omega^2)}{4} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{\omega^4 (c - a\omega^2)}{2} \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{|\Delta|^6} \left[\left[\frac{\omega^4 (\omega^4 - b\omega^2 + d)^2 (c - a\omega^2)}{2} [\tau_1 \tau_3 - \tau_1^2 - \tau_3^2 - 4] \right] \right] \right]
\end{aligned}$$

Belirtelim ki $\omega = 0$ için $\det(\omega) > 0$ olduğu kolaylıkla görülebilir. $\omega \neq 0$ için $\det(\omega) > 0$ olduğu kolaylıkla görülür.

4. BEŞİNCİ BASAMAKTAN LİNEER OLMAYAN BAZI DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN DAVRANIŞLARI

4.1. Beşinci Basamaktan Lineer Olmayan Bazı Diferansiyel Denklemleri Düzgün Dispativliği

Bu kesimde sırasıyla,

$$x^{(5)} + ax^{(4)} + bx''' + cx'' + dx' + h(x) = p(t, x', x'', x''', x^{(4)}) \quad (4.1.1)$$

$$x^{(5)} + ax^{(4)} + bx''' + cx'' + g(x') + ex = p(t, x', x'', x''', x^{(4)}) \quad (4.1.2)$$

$$x^{(5)} + ax^{(4)} + bx''' + f(x'') + dx' + ex = p(t, x', x'', x''', x^{(4)}) \quad (4.1.3)$$

ve

$$x^{(5)} + ax^{(4)} + \psi(x''') + cx'' + dx' + ex = p(t, x', x'', x''', x^{(4)}) \quad (4.1.4)$$

biçiminde lineer olmayan diferansiyel denklemler göz önüne alınacaktır. Burada h, p, g, f ve ψ fonksiyonlarının reel değerli ve bağlı bulundukları değişkenlere göre sürekli oldukları varsayılmaktadır. Ayrıca a, b, c, d ve e katsayılarının pozitif sabitler oldukları kabul edilmektedir. Belirtelim ki, (4.1.1)-(4.1.4) denklemleri için daha önceden Adesina (2001; 2003; 2004; 2006), Afuwape ve Adesina (2000a), Frequency –Domain metodu kullanılarak, bu denklemlerin düzgün dispativ çözümlerinin varlığı için yeter şartlar içeren sonuçlar elde ettiler. Ayrıca benzer konularda Abou-El-Ela ve Sadek (1998), Chukwu (1975), Sadek (2005), Tejumola (1975), Tunç (2004) çalışmalar yaptılar.

Kabuller:

Yukarıdaki denklemlerde gözüken katsayılar ve fonksiyonlar la ilgili olarak aşağıdaki kabullerin geçerliliği varsayılacaktır:

$$(i) \ h(0) = g(0) = f(0) = \psi(0) = 0.$$

(ii) $e > 0, \mu_1 \geq 0$ sabitleri vardır öyle ki,

$$e \leq \frac{h(x_1)}{x_1} \leq e + \mu_1, (x \neq 0) \text{ ve } e \leq h'(x_1) \leq e + \mu_1.$$

(iii) $d > 0, \mu_2 \geq 0$ sabitleri vardır öyle ki,

$$d \leq \frac{g(x_2)}{x_2} \leq d + \mu_2, (y \neq 0) \text{ ve } d \leq g'(y) \leq d + \mu_2.$$

(iv) $c > 0, \mu_3 \geq 0$ sabitleri vardır öyle ki,

$$c \leq \frac{f(x_3)}{x_3} \leq c + \mu_3, (z \neq 0) \text{ ve } c \leq f'(z) \leq c + \mu_3.$$

(v) $b > 0, \mu_4 \geq 0$ sabitleri vardır öyle ki,

$$b \leq \frac{\psi(x_4)}{x_4} \leq b + \mu_4, (t \neq 0) \text{ ve } b \leq \psi'(t) \leq b + \mu_4.$$

(vi) (4.1.1)-(4.1.4) denklemindeki a, b, c, d katsayıları için aşağıdaki eşitsizlikler sağlanmaktadır:

$$a > 0, (ab - c) > 0, (ab - c)c - (ad - e)a > 0,$$

$$(ab - c)(cd - be) - (ad - e)^2 > 0, e > 0,$$

$$b > 0, c > 0, d > 0, cd - be > 0, ad - e > 0.$$

(vii) $a\omega^4 - c^2 + e = 0$ denkleminin ω_1^2, ω_2^2 kökleri ve $\omega^4 - b\omega^2 + d = 0$ denkleminin ω_3^2, ω_4^2 kökleri reel olup, bu kökler arasında,

$$0 < \omega_1^2 < \frac{e}{a} < \omega_3^2 < \omega_2^2 < \frac{b}{2} < \omega_4^2$$

eşitsizliği mevcuttur.

(viii) Her t için $p(t, x', x'', x''', x^{(4)})$ fonksiyonu sınırlıdır.

Şimdi sırası ile yukarıda belirtilen denklemler için ilgili sonuçlar ifade ve ispat edilecektir.

4.1.1. Teorem

Kabul edelim ki, (4.1.1) denklemindeki katsayılar ve fonksiyonlar ile ilgili olan ve yukarıda (i),(ii), (vi) ve (vii) kabullerinde verilen özellikler sağlanmaktadır. Bu taktirde,

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} \left[\int_0^x h(\varsigma) d\varsigma - \frac{1}{2} x h(x) \right] \leq 0$$

olmak kaydıyla (4.1.1) denklemi düzgün dispative çözümlere sahiptir.

İspat:

$h(x) = ex + \hat{h}(x)$ olsun. Bu taktirde h fonksiyonu

$$0 \leq \frac{\hat{h}(x)}{x} \leq \mu_1, \quad (x \neq 0)$$

ve

$$0 \leq \hat{h}'(x) \leq \mu_1$$

bağıntılarını sağlar.

$x = x_1, x' = x_2, x'' = x_3, x''' = x_4, x^{(4)} = x_5$ değişken değişimi yapıldığında (4.1.1) denklemi birinci basamaktan bir denklem sistemi olarak

$$X' = AX - B\phi(\sigma) + P(t, X), \quad \sigma = C^* X, \quad (4.1.5)$$

formunda yazılabilir. Yani (4.1.1) denklemi,

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2, x_2' = x_3, x_3' = x_4, x_4' = x_5 \\ x_5' &= -ax_5 - bx_4 - cx_3 - dx_2 - ex_1 - \hat{h}(x_1) + p(t, x_1, x_2, x_3, x_4, x_4') \end{aligned}$$

sistemine eşdeğerdir. Bu sistemin ise,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -e & -d & -c & -b & -a \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (4.1.6)$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, P(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ p(t, x_1, x_2, x_3, x_4, x_4') \end{pmatrix}, \phi(\sigma) = \hat{h}(x_1)$$

olmak üzere (4.1.5) sistemine eşdeğer olduğu açıktır. A matrisinin Routh-Hurwitz şartlarını sağladığı için karardır. Yani A matrisinin tüm özdeğerleri negatif reel kısımlıdır. Böylece A matrisinin karakteristik polinomu, her $\omega \in \bar{R}$ için tamamen imajiner köklere sahip olmaz. Buna bağlı olarak $(i\omega I - A)^{-1}$ vardır.

$$\Delta(i\omega) = \det(i\omega I - A)^{-1} = (a\omega^4 - c\omega^2 + e) + i\omega(\omega^4 - b\omega^2 + d)$$

ve

$$G(i\omega) = \frac{\bar{\Delta}}{|\Delta|^2}$$

olsun.

Bu taktirde $|\Delta|^2 = (a\omega^4 - c\omega^2 + e)^2 + \omega^2(\omega^4 - b\omega^2 + d)^2$ dir. Burada teorem için (vii) kabulü dikkate alındığında her $\omega \in \bar{R}$ için $\Delta(i\omega) \neq 0$ yazılabilir. 1. Bölümdeki Teorem 1.1.6 kullanabilmemiz için

$$\begin{aligned} \pi(\omega) = & D_1 + \text{Re}[D_1 M + i\omega D_2] G(i\omega) + \omega^2 \text{Re}\{D_3[I + (D'' - D'G(i\omega))] \\ & - G(-i\omega)D_3 D' D'' G(i\omega)\} > 0 \end{aligned}$$

ile verilen Frequency-Domain eşitsizliği sağlanmalıdır. $\tau_1 > 0$ alalım.

$D_1 = \frac{\tau_1}{\mu_1}$, $D_2 = \theta_1$ ve $D_3 = 0$ seçelim. Burada θ_1 daha sonradan amaca yönelik olarak seçilecek bir parametredir. Bu kabuller altında kolay bir hesaplama ile,

$$\begin{aligned} \pi_1(\omega) = & \frac{\tau_1}{\mu_1} + \frac{(a\omega^4 - c\omega^2 + e) + \omega^2 \theta_1 (\omega^4 - b\omega^2 + d) / \mu_1}{|\Delta|^2} \\ & - \tau_1 \left[\frac{1}{\mu_1} + \frac{(r + \omega^2 \delta_1 s)}{|\Delta|^2} \right] \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $r = (a\omega^4 - c\omega^2 + e)$, $s = (\omega^4 - b\omega^2 + d)$ ve $\delta_1 = \frac{\theta_1}{\mu_1 \tau_1}$ dir.

$\pi_1(\omega)$ nin pozitif tanımlı olduğunu göstermek için, $M_1 > 0$ sabitinin var olduğunu göstermeliyiz öyle ki,

$$M_1 \geq \frac{1}{\mu_1} + \max_{\omega \in R} \left[\frac{\delta_1 \omega^6 + \omega^4 (b\delta_1 - a) + \omega^2 (c - d\delta_1) - e}{(a\omega^4 - c\omega^2 + e)^2 + \omega^2 (\omega^4 - b\omega^2 + d)^2} \right] > 0 \quad (4.1.7)$$

olur.

$$\frac{K_1 - 2ab}{b} < \delta_1 < 0$$

ve

$$K_1 = \frac{4[(ab - c)b + 2(e - ad)]}{b^2 - 4d}$$

sağlanmak kaydı ile, (4.1.7) eşitsizliği sağlanır. Bu durumda

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} D_2 \left(\frac{1}{\lambda^2} \right) \text{diag} \left[\int_0^\lambda \phi_j(\alpha) d\alpha - \frac{\lambda}{2} \phi(\lambda) \right] \geq 0$$

eşitsizliği (4.1.1) denklemi için,

$$\lim_{|x_1| \rightarrow \infty} \frac{\theta_1}{x_1^2} \left[\int_0^{x_1} \hat{h}(\alpha) d\alpha - \frac{x_1}{2} \hat{h}(x_1) \right] \geq 0$$

şeklini alır. Bu durumda $\theta_1 < 0$ olmak kaydıyla $\pi_1(\omega)$ pozitif tanımlıdır.

4.1.2. Teorem

Kabul edelim ki, (4.1.2) denklemindeki katsayı ve fonksiyonlar için (i),(iii),(vi) ve (viii) şartları ve bu şartlara ilave olarak,

$$\lim_{|u| \rightarrow \infty} \frac{1}{u^2} \left[\int_0^u g(\zeta) d\zeta - \frac{1}{2} u g(u) \right] \geq 0$$

eşitsizliği sağlanmaktadır.

Bu taktirde (4.1.2) denklemi düzgün dissipative çözümlere sahiptir.

İspat:

$g(u) = du + \hat{g}(u)$ olsun. Bu taktirde g fonksiyonunun daha önceden verilen kabuller dikkate alındığında

$$0 \leq \frac{\hat{g}(\varsigma)}{\varsigma} \leq \mu_2, \quad (\varsigma \neq 0)$$

ve

$$0 \leq \hat{g}'(\varsigma) \leq \mu_2$$

eşitsizliklerini sağladığı açıktır.

$$x = x_1, \quad x' = x_2, \quad x'' = x_3, \quad x''' = x_4, \quad x^{(4)} = x_5$$

değişken değişimi ile (4.1.2) denklemi eşdeğer sistem olarak

$$x'_1 = x_2, \quad x'_2 = x_3, \quad x'_3 = x_4, \quad x'_4 = x_5$$

$$x'_5 = -ax_5 - bx_4 - cx_3 - dx_2 - ex_1 - \hat{g}(x_2) + p(t, x_1, x_2, x_3, x_4, x'_4)$$

biçiminde ifade edilebilir. . Bu sistem ise X, A, B ve $P(t, X)$ fonksiyonları (4.1.6) sistemindeki gibi olmak üzere ve

$$C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \phi(\sigma) = (\hat{g}(x_2))$$

olmak kaydıyla (4.1.5) sistemine eşdeğerdir.

$\tau_2 > 0$ ve $D_1 = \frac{\tau_2}{\mu_2}, D_2 = \theta_2$ ve $D_3 = 0$ seçelim. Bir önceki teoremin ispatında olduğu gibi

(4.1.2) denklemi için Frequency-Domain eşitsizliği

$$\pi_2(\omega) = \tau_2 \left[\frac{1}{\mu_2} + \frac{\omega^2 (s + \delta_2 r)}{|\Delta|^2} \right] > 0 \quad (4.1.8)$$

şeklinde elde edilir.

Burada

$$\delta_2 = \frac{\theta_2}{\mu_2 \tau_2}$$

ve

$$K_2 = \frac{2[(c - ab)c + 2a(ad - e)]}{a(c^2 - 4ae)}$$

olmak kaydıyla

$$\delta_2 > \frac{aK_2 - 1}{a} > 0$$

olduğundan (4.1.8) eşitsizliğinin doğruluğu gözlenebilir.

Bu taktirde bir $M_2 > 0$ sabiti bulunabilir öyle ki

$$M_2 \geq \frac{1}{\mu_2} + \max_{\omega \in R} \left[\frac{\omega^2(\omega^2(a\delta_2 + 1) - \omega^2(b + c\delta_2) + (d + e\delta_2))}{(a\omega^4 - e\omega^2 + e)^2 + \omega^2(\omega^4 - b\omega^2 + d)^2} \right] > 0$$

olur. Bu ise her $\omega \in \bar{R}$ için $\pi_2(\omega)$ ifadesinin pozitif tanımlı olduğunu gösterir. Bu durumda Teorem 4.1.2. deki eşitsizlik

$$\lim_{|x_2| \rightarrow \infty} \frac{\theta_2}{x_2^2} \left[\int_0^{x_2} \hat{g}(\alpha) d\alpha - \frac{x_2}{2} \hat{g}(x_2) \right] \geq 0$$

şeklini alır. Böylece Teorem 4.1.2 nin ispatı tamamlanmış olur.

4.1.3. Teorem

Varsayalım ki, (4.1.3) denklemindeki fonksiyonlar ve katsayılar için (i),(iv),(vi),(viii) kabulleri ile beraber

$$\lim_{|y| \rightarrow \infty} \frac{1}{y^2} \left[\int_0^y f(\varsigma) d\varsigma - \frac{1}{2} y f(y) \right] \leq 0$$

eşitsizliği sağlanmaktadır. Bu taktirde (4.1.3) denklemi düzgün dispative çözümler sahiptir.

İspat:

f fonksiyonu,

$$f(z) = cy + \hat{f}(z)$$

şeklinde tanımlansın. Bu taktirde bu fonksiyon,

$$0 \leq \frac{\hat{f}(\varsigma)}{\varsigma} \leq \mu_3, \quad (\varsigma \neq 0)$$

$$0 \leq \hat{f}'(\varsigma) \leq \mu_3$$

eşitliklerini sağlar. Kolaylıkla görülebilir ki, (4.1.3) denklemi

$$x'_1 = x_2, \quad x'_2 = x_3, \quad x'_3 = x_4, \quad x'_4 = x_5$$

$$x'_5 = -ax_5 - bx_4 - cx_3 - dx_2 - ex_1 - \hat{f}(x_3) + p(t, x_1, x_2, x_3, x_4, x'_4)$$

sistemine eşdeğerdir.

$$C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \phi(\sigma) = (\hat{f}(x_3))$$

alalım. Bu durumda yukarıdaki sistem (4.1.6) biçiminde

düzenlenebilir. $\tau_3 > 0$, $D_1 = \frac{\tau_3}{\mu_3}$, $D_2 = \theta_3$ ve $D_3 = 0$ seçelim. Basit hesaplamalar ile Teorem

4.1.1 in ispatında kullanılan yöntem izlenir ise bunun sonucunda

$$\pi_3(\omega) = \tau_3 \left[\frac{1}{\mu_3} - \frac{\omega^2(r + \omega^2 \delta_2 s)}{|\Delta|^2} \right]$$

olduğu görülür. Burada $\delta_3 = \frac{\theta_3}{\mu_3 \tau_3}$, $(\theta_3 < 0)$ dır.

Eğer $\delta_3 < 0$,

$$\delta_3 > \frac{K_1 - 2ab}{b}$$

seçilir ise, bu taktirde $\pi_3(\omega)$ nin pozitif tanımlı olduğu görülebilir. $M_3 > 0$ sabiti

$$M_3 \geq \frac{1}{\mu_3} + \max_{\omega \in \mathbb{R}} \left[\frac{\delta_3 \omega^6 + \omega^4(b\delta_3 - a) - \omega^2(b\delta_3 - c) - e}{(a\omega^4 - e\omega^2 + e)^2 + \omega^2(\omega^4 - b\omega^2 + d)^2} \right] > 0$$

sağlanacak şekilde seçilir ve

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} D_2 \left(\frac{1}{\lambda^2} \right) \text{diag} \left[\int_0^\lambda \phi_j(\alpha) d\alpha - \frac{\lambda}{2} \phi(\lambda) \right] \geq 0$$

bağıntısı dikkate alınır ise

$$\lim_{|x_3| \rightarrow \infty} \frac{\theta_3}{x_3^2} \left[\int_0^{x_3} \hat{f}(\alpha) d\alpha - \frac{x_3}{2} \hat{f}(x_3) \right] \geq 0$$

sonucuna varılır. Bu sonuç ise teoremin ispatını tamamlar.

4.1.4. Teorem

(4.1.4) denklemindeki katsayı ve fonksiyonlar için, (i), (v), (vi) ve (viii) kabulleri ile birlikte,

$$\lim_{|v| \rightarrow \infty} \frac{1}{v^2} \left[\int_0^v \psi(\varsigma) d\varsigma - \frac{1}{2} v \psi(v) \right] \leq 0 \quad (4.1.9)$$

eşitsizliği sağlansın. Bu taktirde (1.4) denklemini düzgün dissipative çözümler sahiptir.

İspat:

$\psi(v) = bv + \hat{\psi}(v)$ olsun. Bu durumda ψ fonksiyonu

$$0 \leq \frac{\hat{\psi}(\varsigma)}{\varsigma} \leq \mu_4, \quad (\varsigma \neq 0)$$

ve

$$0 \leq \hat{\psi}'(\varsigma) \leq \mu_4$$

eşitsizliklerini sağlar. (4.1.4) denklemini aşağıdaki sisteme eşdeğerdir:

$$x'_1 = x_2, \quad x'_2 = x_3, \quad x'_3 = x_4, \quad x'_4 = x_5$$

$$x'_5 = -ax_5 - bx_4 - cx_3 - dx_2 - ex_1 - \hat{\psi}(x_4) + p(t, x_1, x_2, x_3, x_4, x'_4).$$

Yukarıdaki sistem ise (4.1.5) sistemi biçiminde yazılabilir Daha önceden verilen teoremlerin ispatında olduğu gibi, benzer biçimde $\tau_4 > 0$ ve $D_1 = \frac{\tau_4}{\mu_4}$, $D = \theta_4$ ve $D_4 = 0$ olarak alalım.

Bu durumda (4.1.4) denkleminde ait

$$\begin{aligned} \pi(\omega) = D_1 + \operatorname{Re}[D_1 M + i\omega D_2]G(i\omega) + \omega^2 \operatorname{Re}\{D_3[I + (D'' - D'G(i\omega))] \\ - G(-i\omega)D_3 D' D'' G(i\omega)\} > 0 \end{aligned}$$

Frequency-Domain eşitsizliği

$$\delta_4 = \frac{\theta_4}{\mu_4 \tau_4} \text{ olmak üzere,}$$

$$\pi_4(\omega) = \tau_4 \left[\frac{1}{\mu_4} - \frac{\omega^4 (s - \delta_4 r)}{|\Delta|^2} \right] > 0$$

şeklini alır.

$$\delta = \frac{1 - aK_2}{a} < 0$$

seçelim. Eğer $\theta_4 < 0$ seçilir ve $4(e - ad) < 2c$ alınır ise $\pi_4(\omega)$ ifadesi pozitif tanımlı olur. Bu durumda bir $M_4 > 0$ sayısı vardır öyle ki

$$M_4 \geq \frac{1}{\mu_4} + \max_{\omega \in R} \left[\frac{\omega^4 (\omega^4 (1 - a\delta_4) - \omega^2 (b + c\delta_4) + (d + e\delta_4))}{(a\omega^4 - c\omega^2 + e)^2 + \omega^2 (\omega^4 - b\omega^2 + d)^2} \right] > 0$$

olur. Buna bağlı olarak

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} D_2 \left(\frac{1}{\lambda^2} \right) \operatorname{diag} \left[\int_0^\lambda \phi_j(\alpha) d\alpha - \frac{\lambda}{2} \phi(\lambda) \right] \geq 0$$

şartı

$$\lim_{|x_4| \rightarrow \infty} \frac{\theta_4}{x_1^2} \left[\int_0^{x_4} \hat{\psi}(\alpha) d\alpha - \frac{x_4}{2} \hat{\psi}(x_4) \right] \geq 0$$

bağıntısına indirgenir. Bu ise teoremi tamamlar.

4.2. Beşinci Basamaktan Lineer Olmayan Bazı Diferansiyel Denklemleri Çözümlerinin Sınırlılığı, Üstel Kararlılığı ve Periyodikliği

Bu kesimde Frequency-Domain metodu kullanılarak beşinci mertebeden lineer olmayan belli türden bazı diferansiyel denklemlerin çözümlerinin Afuwape ve Adesina (2000b), tarafından verilen niteliksel davranışları incelenecektir. Burada elde edilen sonuçların Lyapunov Metodu (Lyapunov, 1966) kullanılarak literatürde elde edilen bazı sonuçlardan daha kısıtlayıcı koşullar içerdiği ve etkin olduğu yazarlar tarafından ileri sürülmektedir. Ancak bu sonuçlardaki ile literatürde mevcut olan sonuçlar arasında herhangi bir irdeleme yapılmamıştır. Daha önceden Kalman (1963), Popov (1962), ve Yacubovich (1962;1964;1965;1966), Frequency-Domain Metodunu kullanarak benzer problemleri inceledi. Daha sonradan Barbalat ve Halanay (1974), Popov (1962), ile Yacubovich (1962;1964;1965;1966)'in çalışmaları üzerinde bazı genellemeler yaptılar. Benzer biçimde, daha önceki bölümlerde belirtildiği üzere Afuwape (1981; 1987; 1989; 1991) bazı üç ve dördüncü basamaktan lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çözümlerinin niteliksel özelliklerini incelemek için yukarıda sözü edilen çalışmaları belli türden üç ve dördüncü basamaktan diferansiyel denklemler için elde etti.

Bu kesimde sırasıyla lineer olmayan beşinci basamaktan,

$$x^{(5)} + ax^{(4)} + bx''' + cx'' + g(x') + h(x) = p(t) \quad (4.2.1)$$

ve

$$x^{(5)} + ax^{(4)} + bx''' + cx'' + g_1(x)x' + h(x) = p(t) \quad (4.2.2)$$

diferansiyel denklemleri ele alınmaktadır. Burada a, b ve c pozitif sabitler; g, g_1, h ve p ise bağlı bulundukları değişkenlerin sürekli fonksiyonlarıdır. Burada Afuwape ve Adesina

(2000b), tarafından Frequency-Domain metodu kullanılarak (4.2.1) ve (4.2.2) denklemleri için elde edilen sonuçlar üzerinde durulacaktır.

4.2.1. Teorem

$$X' = AX - B\varphi(\sigma) + P(t), \sigma = C^* X \quad (4.2.3)$$

sistemini göz önüne alalım. Burada A , $n \times n$ -basamaktan reel matrisler, C^* ise C matrisinin transpozu $\varphi(\sigma) = \text{col} \varphi_j(\sigma_j), (j=1,2,\dots,m)$ ve $P(t)$ ise n -bileşenli bir vektördür. Kabul edim ki, (4.2.3) sistemi için aşağıdaki şartlar sağlanmaktadır.

- (i) A kararlı bir matris;
- (ii) $P(t)$ her $t \in R$ için sınırlı;
- (iii) $\hat{\mu}_j \geq 0$ (μ_j ler sabitler ve $(j=1,2,\dots,m)$) olmak üzere,

$$0 \leq \frac{\varphi_j(\sigma_j) - \varphi_j(\hat{\sigma}_j)}{\sigma_j - \hat{\sigma}_j} \leq \hat{\mu}_j, \quad (\sigma_j \neq \hat{\sigma}_j); \quad (4.2.4)$$

- (iv) Bir köşegen D matrisi vardır öyle ki her $\omega \in R$ için

$$\pi(\omega) = MD + \text{Re } DG(i\omega) > 0 \quad (4.2.5)$$

dır.

Frequency-Domain eşitsizliği sağlanır. Burada $G(i\omega) = C^*(i\omega I - A)^{-1}$ biçiminde tanımlanmaktadır ve

$$M = \text{diag} \left(\frac{1}{\hat{\mu}_j} \right), \quad (j=1,2,\dots,m)$$

olarak alınmaktadır. Bu şartlar altında (4.2.3) sistemi aşağıdaki özelliklere sahiptir:

- (Pa) (4.1.3) sistemi bir tek $x(t)$ çözümüne sahiptir öyle ki bu çözüm ve bu çözümün

$x'(t), x''(t), x'''(t)$ ve $x^{(4)}(t)$ türevleri R de sınırlıdır.

(Pb) $x(t)$ çözümü ve $x'(t), x''(t), x'''(t)$ ve $x^{(4)}(t)$ türevleri global olarak üstel kararlıdır.

(Pc) $x(t)$ çözümü ve $x'(t), x''(t), x'''(t)$ ve $x^{(4)}(t)$ türevleri periyodiktir.

Bu çalışmada aşağıdaki kabuller varsayılacaktır: (4.2.1) ve (4.2.2) denklemlerinin lineer sabit katsayılı homojen biçimi

$$x^{(5)} + ax^{(4)} + bx''' + cx'' + dx' + ex = 0$$

denklemdir. Bu denklemin çözümlerinin kararlı olması için Routh-Hurwitz şartları

$$a > 0, (ab - c) > 0, (ab - c)c - a^2d > 0, d > 0,$$

(4.2.6)

$$(ab - c)c - a^2d + 2ea - (ab - bc + e)\frac{e}{a} > 0, e > 0$$

dır. Bu şartlar ise aşağıdaki eşitsizliklerin sağlanmasını zorunlu kılar.

$$b > 0, c > 0, bc - ad > 0, e - ad > 0, b^2 - 4d > 0, c^2 - 4ae > 0.$$

Aşağıdaki denklemleri göz önüne alalım:

$v^2a - ve + e = 0$ ve $v^2 - vb + d = 0$. Bu denklemler aşağıdaki reel köklere sahiptir.

$$v_1 = \frac{1}{2a} \left[c - (c^2 - 4ae)^{1/2} \right]$$

$$v_2 = \frac{1}{2a} \left[c + (c^2 - 4ae)^{1/2} \right]$$

$$\left. \begin{aligned} v_3 &= \frac{1}{2} \left[b - (b^2 - 4d)^{1/2} \right] \\ v_4 &= \frac{1}{2} \left[b + (b^2 - 4d)^{1/2} \right] \end{aligned} \right\}$$

Bu kökler arasında $0 < v_1 < v_3 < v_2 < v_4$ eşitsizliği mevcuttur.

Kabuller:

(i) $g(x'), g_1(x), h(x)$ ve $p(t)$ fonksiyonları süreklidir.

- (ii) $g(0) = g_1(0) = h(0) = 0$
 (iii) $p(t)$ R de sınırlıdır.
 (iv) $d > 0$ ve $\mu_2 \geq 0$ sabitleri mevcuttur öyle ki her z ve $\bar{z} \in R$, $z \neq \bar{z}$ için

$$d \leq \frac{g(z) - g(\bar{z})}{z - \bar{z}} \leq d + \mu_2, \quad (z \neq \bar{z}), \quad (4.2.7)$$

olur.

- (v) $d > 0$ ve $\mu_2 \geq 0$ sabitleri mevcuttur öyle ki her $z \in R$, $(z \neq 0)$ için

$$d \leq \frac{1}{z} \int_0^z g_1(s) ds \leq d + \mu_2,$$

olur.

- (vi) $e > 0$, $\mu_1 \geq 0$ sabitleri her z , $\bar{z} \in R$ dir.

$$e \leq \frac{h(z) - h(\bar{z})}{z - \bar{z}} \leq e + \mu_1, \quad (z \neq \bar{z}) \quad (4.2.8)$$

- (vii) (iv)-(vi) kabullerindeki d , e , μ_1 , μ_2 parametreleri,

$$\frac{\mu_1 \mu_2}{4(\mu_2 d - \mu_1 c)} < \frac{4e}{\mu_2},$$

eşitsizliğini sağlar.

- (viii) a , b , c ve d sabitleri aşağıdaki

$$\frac{a}{b} > \frac{\mu_1}{\mu_2} \text{ ve } \frac{d}{c} > \mu_2$$

eşitsizliklerini sağlar.

- (ix) $p(t)$ periyodiktir (hemen hemen periyodiktir).

4.2.2. Teorem

(4.2.1) denklemindeki g , h ve p fonksiyonları ile a , b ve c sabitleri için (i)-(viii) kabullerinin sağlandığını varsayalım. Bu taktirde (4.2.1) denklemi yukarıda verilen (Pa) ve (Pb) özelliklerine sahiptir. Yukarıdaki kabullere ilaveten $p(t)$ fonksiyonu periyodik (hemen hemen periyodik) ise bu taktirde (4.2.1) denklemi (Pc) özelliğine sahiptir. Yani $x(t)$ çözümü ve $x'(t)$, $x''(t)$, $x'''(t)$ ve $x^{(4)}(t)$ türevleri periyodiktir.

İspat:

$$g(z) = dz + \hat{g}(z)$$

ve

$$h(z) = ez + \hat{h}(z)$$

olsun. Bu takdirde $z \neq \bar{z}$ için (4.2.7) ve (4.2.8) eşitsizlikleri

$$0 \leq \frac{\hat{g}(z) - \hat{g}(\bar{z})}{z - \bar{z}} \leq \mu_2$$

ve

$$0 \leq \frac{\hat{h}(z) - \hat{h}(\bar{z})}{z - \bar{z}} \leq \mu_1$$

biçiminde yazılabilir. $x = x_1$ alındığında (4.2.1) denklemini

$$x'_1 = x$$

$$x'_2 = x_3$$

$$x'_3 = x_4$$

$$x'_4 = x_5$$

$$x'_5 = -ex_1 - dx_2 - cx_3 - bx_4 - ax_5 - \hat{g}(x_2) - \hat{h}(x_1) + p(t)$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklem sistemi ise, (4.2.3) biçimindedir.

Burada X, A, B, C, P ve $\varphi(\sigma)$,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -e & -d & -c & -b & -a \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

(4.2.9)

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, P(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ p(t) \end{pmatrix}, \sigma = C^* X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ ve } \varphi(\sigma) = \begin{pmatrix} \hat{h}(x_1) \\ \hat{g}(x_2) \end{pmatrix}$$

sisteminde verildiği üzeredir. Bu durumda Frequency-Domain şartı,

$$\pi(\omega) = \begin{pmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} \\ \pi_{21} & \pi_{22} \end{pmatrix} > 0$$

biçiminde bir matris eşitsizliğine indirgenir. Bu eşitsizlik ise her $\omega \in R$ için sağlanır. Aşağıda verilecek olan Lemma 4.2.1, Lemma 4.2.2 ve Lemma 4.2.3 den bu durumun doğruluğu izlenebilir. Buna ilaveten Yacubovich'in Genelleştirilmiş Teoremi (Barbalat ve Halanay, 1971) göz önüne alındığında teoremin sonucu kolaylıkla doğrulanabilir.

(4.2.1) denkleminde $h(x) = ex$ alınsın. Bu taktirde aşağıdaki teorem geçerlidir.

4.2.3. Teorem

$$x^{(5)} + ax^{(4)} + bx''' + cx'' + g(x') + ex = p(t) \quad (4.2.10)$$

denklemini göz önüne alınsın. Burada a, b, c ve e pozitif sabitler, g ve p fonksiyonlarının ise (i)-(iv) ve (vi) kabullerini sağladıkları varsayılmaktadır öyle ki

$$\mu_2 > M_2 > (c - ab) \left(\frac{b - (b^2 - 4d)^{1/2}}{2} \right) + (ad - e) \quad (4.2.11)$$

olur.

Burada M_2 , d ye bağlı bir sabittir. Bu taktirde, (4.2.10) denklemini (Pa) ve (Pb) özelliklerine sahiptir. Eğer (4.2.10) denklemindeki $p(t)$ fonksiyonu periyodik (hemen hemen periyodik) ise bu taktirde bu denklem (Pc) özelliğine sahiptir.

Belirtelim ki (4.2.1) denkleminde $g(x') = dx'$, $d > 0$ veya (4.2.2) denkleminde $g_1(x)x' = dx'$ alınır ise, bu taktirde aşağıdaki sonuç ifade edilebilir: Kabul edelim ki,

$$x^{(5)} + ax^{(4)} + bx''' + cx'' + dx' + h(x) = p(t) \quad (4.2.12)$$

denklemindeki a, b, c ve d pozitif sabitleri ile h ve p fonksiyonları (i),(ii),(iii),(iv) kabullerini ve

$$\mu_1 \leq M_1 \leq \left(b - \frac{c}{a}\right) \left(\frac{c + (c^2 - 4ae)^{1/2}}{2a}\right) + \left(d - \frac{e}{a}\right) \quad (4.2.13)$$

eşitsizliği sağlanmaktadır. Burada M_1 , e ye bağlı bir sabittir. Bu kabuller altında (4.2.10) denklemi (Pa) ve (Pb) özelliklerine sahiptir. Buna ilaveten $p(t)$ periyodik (hemen hemen periyodik) ise bu taktirde (4.2.12) denklemi (Pc) özelliğine sahiptir.

İspat:

(4.2.7) eşitsizliği $g(z) = dz + \hat{g}(z)$ olmak üzere,

$$0 \leq \frac{\hat{g}(z) - \hat{g}(\bar{z})}{z - \bar{z}} \leq \mu_2$$

eşitsizliği gibi ifade edilebilir. Bu durumda (4.2.10) denklemi aşağıdaki denklem sistemi biçiminde ifade edilebilir:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= x_3 \\ x_3' &= x_4 \\ x_4' &= x_5 \\ x_5' &= -ex_1 - dx_2 - cx_3 - bx_4 - ax_5 - \hat{g}(x_2) + p(t) \end{aligned}$$

Bu sistem ise,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -e & -d & -c & -b & -a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ p(t) \end{pmatrix}$$

$$\sigma = C^* X = x_2, \quad \phi(\sigma) = \hat{g}(x_2)$$

olmak üzere

$$X' = AX - B\varphi(\sigma) + P(t), \sigma = C^* X$$

biçiminde bir vektör diferansiyel denklem olarak yazılabilir.

$$G(i\omega) = C^* (i\omega I - A)^{-1} B = i\omega \left(\frac{\bar{\Delta}}{|\Delta|^2} \right)$$

yazılabilir. Burada,

$$\Delta = (\omega^4 a - \omega^2 c + e) + i\omega(\omega^4 - \omega^2 b + d), |\Delta|^2 = \Delta \cdot \bar{\Delta} \text{ dir.}$$

$$D = \tau_2,$$

$$\pi(\omega) = \tau_2 \left(\mu_2^{-1} + \frac{\omega^2(\omega^4 - \omega^2 b + d)}{|\Delta|^2} \right) > 0 \text{ ve } M = \frac{1}{\mu_2}, \mu_2 > 0 \text{ olarak aldığımızda}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Lemma 4.2.2 dikkate alındığında (4.3.4) eşitsizliğinin her için sağlandığı açıktır. Böylece Teorem 4.1.1.den dolayı Teorem 4.2.3'ün ispatı tamamlanır.

4.2.4. Teorem

$$x^{(5)} + ax^{(4)} + bx''' + cx'' + dx' + hx = p(t) \quad (4.2.14)$$

denklemini göz önüne alınsın. Burada a, b, c ve d pozitif sabitler, h ve p fonksiyonlarının ise (i),(ii),(iii),(iv) kabullerini sağladıkları varsayılmaktadır öyle ki

$$\mu_1 > M_1 > \left(b - \frac{c}{a} \right) \left(\frac{c + (c^2 - 4ae)^{1/2}}{2a} \right) + \left(d - \frac{e}{a} \right) \quad (4.2.15)$$

olur.

Burada M_1 , a ya bağlı bir sabittir. Bu taktirde, (4.3.1) denklemini (Pa) ve (Pb) özelliklerine sahiptir. Eğer (4.3.1) denklemindeki $p(t)$ fonksiyonu periyodik (hemen hemen periyodik) ise bu taktirde bu denklem (Pc) özelliğine sahiptir.

İspat:

Bkz. (Afuwape ve Adesina 2000b).

4.2.5.Teorem

(4.1.2) denklemindeki a, b, c katsayıları ile g_1, h ve p fonksiyonlarının (i)-(iii) ve (v)-(viii) özelliklerini sağladığını varsayalım. Bu kabuller altında (4.1.2) denklemi (Pa) ve (Pb) özelliklerine sahiptir. Buna ilaveten (ix) kabulü sağlanır ise bu taktirde (4.1.2) denklemi (Pc) özelliğine sahiptir.

İspat:

(4.1.2) denklemi Tanım 6.1. göz önüne alındığında

$$X' = A_1 X - B_1 \varphi(\hat{\sigma}_1) + P_1(t), \quad \hat{\sigma}_1 = C_1^* X \quad (4.2.16)$$

sisteminin bir duali olduğu görülür.

$$\int_0^x g_1(s) ds = dx + \hat{g}_1(x)$$

olduğu açıktır.

Bu durumda (4.2.7) eşitsizliği

$$0 \leq \frac{\hat{g}_1(x)}{x} \leq \mu_1, \quad x \neq 0 \quad (4.2.17)$$

biçiminde yazılabilir. Ayrıca (4.1.2) denklemi

$$\begin{aligned}
x_1' &= -ex_5 - \hat{h}(x_5) + p(t) \\
x_2' &= x_1 - dx_5 - \hat{g}(x_5) \\
x_3' &= x_2 - cx_5 \\
x_4' &= x_3 - bx_5 \\
x_5' &= x_4 - ax_5
\end{aligned}$$

sistemine eşdeğerdir. Bu sistem ise A, B, C ve P (4.2.3.) sistemindeki gibi alınmak üzere ve $A_1 = A^*$, $B_1 = C$, $C_1 = B$ ve $P_1(t) = TP(t)$ olmak üzere, vektörel formda (4.2.16) diferansiyel denklem sistemi gibi yazılabilir. Burada T ,

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

biçiminde singüler olmayan bir matris olarak alınmaktadır. Yukarıda verilen Teorem 4.2.3 ispatı dikkate alındığında teoremin ispatının kolaylıkla tamlanabileceği görülebilir.

(4.1.2) denkleminde $h(x) = ex$ altında alındığında aşağıdaki sonuç geçerlidir:

4.2.6. Teorem

$$x^{(5)} + ax^{(4)} + bx''' + cx'' + g_1(x)x' + ex = p(t) \quad (4.2.18)$$

denklemini ele alalım. Burada a, b, c ve e pozitif sabitler, g_1 ve p fonksiyonları ise (i)-(iii) ve (v),(vi) kabulleri ile birlikte (4.3.2) eşitsizliğini sağlamaktadır. Bu durumda (4.3.5) denklemi ve (Pa) ve (Pb) özelliklerini sağlar. Eğer $p(t)$ fonksiyonu periyodik (hemen hemen periyodik) ise o zaman (4.3.5) denklemi (Pc) özelliğine sahip olur.

Şimdi Teorem 4.2.6'nın ispatını vermeden önce, bu teoremin ispatını tamamlamada kullanılacak olan bazı temel bilgiler ve lemmalar verilecektir.

(4.1.1) denklemi,

$$X' = AX - B\varphi(\sigma) + P(t), \quad \sigma = C^* X \quad (4.4.1)$$

sistemi şeklinde ifade edildiğinde,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -e & -d & -c & -b & -a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ p(t) \end{pmatrix}, \quad \sigma = C^* X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ ve } \varphi(\sigma) = \begin{pmatrix} \hat{h}(x_1) \\ \hat{g}(x_2) \end{pmatrix}$$

$$P(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ p(t, x_1, x_2, x_3, x_4, x_4') \end{pmatrix}$$

olur.

$G(i\omega) = C^* (i\omega I - A)^{-1} B$ hesaplandığında (4.4.1) sistemi için

$$G(i\omega) = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i\omega & i\omega \end{pmatrix} \quad (4.4.2)$$

olmak üzere,

$$\Delta = (\omega^4 a - \omega^2 c + e) + i\omega(\omega^4 - b\omega^2 + d)$$

elde edilir.

(4.1.5) Frequency-Domain eşitsizliğini, yani $\pi(\omega) = MD + \text{Re } DG(i\omega) > 0$ elde etmek için τ_1 ve τ_2 sayıları ve pozitif $D = \text{diag}(\tau_j)$ ve $M = \text{diag}\left(\frac{1}{\mu_j}\right), (j = 1, 2)$ matrislerini seçmeliyiz.

Belli hesaplamalardan sonra her $\omega \in R$ için,

$$\pi_{11} = \tau_1 \left(\mu_1^{-1} + \frac{(\omega^4 a - \omega^2 c + e)}{|\Delta|^2} \right), \quad (4.4.3)$$

$$\pi_{12} = \frac{\tau_1 \bar{\Delta} - i\omega \tau_2 \Delta}{2|\Delta|^2} = \bar{\pi}_{21}, \quad (4.4.4)$$

$$\pi_{22} = \tau_2 \left(\mu_2^{-1} + \omega^2 \frac{(\omega^4 - \omega^2 b + d)}{|\Delta|^2} \right) \quad (4.4.5)$$

olmak üzere

$$\pi(\omega) = \begin{pmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} \\ \pi_{21} & \pi_{22} \end{pmatrix} > 0 \quad (4.4.6)$$

elde edilir.

Burada $|\Delta|^2 = \Delta \cdot \bar{\Delta}$; $\bar{\Delta}$ ise , Δ nın karmaşık eşleniğidir.

4.2.1.Lemma

$$S_1(v) = (-v^2 a + vc - e) + \frac{v(v^2 - vb + d)}{(-v^2 a + vc - e)}, \quad (\omega^2 = v)$$

olsun. Bu taktirde,

$$\mu_1 > M_1(d, e) = S_1(v_0) = \max_{v_1 < v < v_2} S_1(v)$$

ve

$$S_1(v_0) > S_1(v_3) = \frac{1}{2}(c - ab)(b - (b^2 - 4d)^{1/2}) + (ad - e)$$

olmak kaydıyla her $v > 0$ için $\pi_{11}(\omega)$ pozitiftir. Burada v_0 ,

$$\begin{aligned} A_1(v) &= S_1'(v) \cdot (-v^2 a + vc - e)^2 \\ &= (c - 2a) \{ (-v^2 a + vc - e)^2 - v(v^2 - vb + d)^2 \} \\ &\quad + (v^2 - vb + d)(5v^2 - 3vb + d)(-v^2 a + vc - e) \end{aligned}$$

$A_1(v) = 0$ in bir kökü ve $M_1(d, e)$ ise $v = v_0$ için $S_1(v)$ nin maksimum değeridir.

İspat:

Bkz. (Afuwape ve Adesina, 2000b).

4.2.2.Lemma

$$S_2(v) = (-v^2 + vb - d) + \frac{(v^2 a - vc + e)^2}{v(-v^2 + vb - d)}, (\omega^2 = v)$$

olsun. Bu taktirde, $\mu_2 < M_2(d, e) = S_2(v_0) = \min_{v_3 < v < v_4} S_2(v)$

ve

$$S_2(v_0) = S_2(v_2) = \frac{1}{2a}(b - \frac{c}{a})(c + (c^2 - 4ae)^{1/2}) - (d - \frac{e}{a})$$

sağlamak kaydıyla $\pi_{22}(\omega)$, her $v > 0$ için pozitifdir. Burada v_0 , $A_2(v) = 0$,

$$\begin{aligned} A_2(v) &= S_2'(v) \cdot v^2(-v^2 + vb - d)^2 \\ &= (b - 2v)\{(v^2 + vb - d)^2 - v(v^2 a - vc + e)^2 \\ &\quad + (v^2 a - vc + e)(v^2 a - vc - e)(-v^2 + vb - d)\} \end{aligned}$$

ifadesinin bir kökü ve $v_3 < v_0 < v_4$ ve $M_2(d, e)$, $S_2(v)$ nin $v = v_0$ da minimum değeridir.

Ayrıca, eğer $v_2 \neq \frac{b}{2}$ ise bu taktirde $S_2(v_2) > S_2(\frac{b}{2})$ ve $v = \frac{b}{2}$, $e = \frac{2bc - b^2 a}{4}$

ve $\varepsilon < 2b(b^2 - 4d)(b - \frac{c}{a})$, $\varepsilon > 0$, $S_1(v_2) > S_2(\frac{b}{2})$ olur.

İspat:

Bkz. (Afuwape ve Adesina, 2000b).

4.2.3.Lemma

$$\lambda = \frac{\tau_1}{\tau_2} > 0$$

parametresi

$$\frac{\mu_1 \mu_2}{4(\mu_2 d - \mu_1 c)} < \lambda < \frac{4e}{\mu_2}$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu taktirde $\mu_1 \cdot \mu_2$ çarpımı negatif olmamak kaydıyla her $\omega \in R$ için $\det \pi(\omega) > 0$ dır.

İspat:

Bkz. (Afuwape ve Adesina, 2000b).

4.3. Beşinci Basamaktan Lineer Olmayan Bazı Diferansiyel Denklemlerin Düzgün Dispativliği Üzerine

Bu çalışmada Frequency-Domain metodu kullanılarak, beşinci basamaktan lineer olmayan bazı diferansiyel denklemlerin düzgün dispativ çözümlerine ait bazı problemler incelenecektir. Ele alınacak denklemler,

$$x^{(5)} + ax^{(4)} + bx''' + cx'' + g(x') + h(x) = p(t, x, x', x'', x''', x^{(4)}) \quad (4.3.1)$$

ve

$$x^{(5)} + ax^{(4)} + bx''' + cx'' + g_1(x)x' + h(x) = p(t, x, x', x'', x''', x^{(4)}) \quad (4.3.2)$$

biçiminde olup, bu denklemlerinin dispativ olan çözümlerinin varlığı için yeter şartlar içeren sonuçlar ifade ve ispat edilecektir. Bu sonuçları elde etmek için Yacubovich'in dispativlik hakkındaki Genelleştirilmiş Teoremini kullanacağız. Afuwape (1986), Afuwape ve Adesina (2000b), Kesim 4.2 de de belirtildiği üzere yukarıda ifade edilen lineer olmayan

$$x^{(5)} + ax^{(4)} + bx''' + cx'' + dx' + h(x) = p(t, x, x', x'', x''', x^{(4)})$$

$$x^{(5)} + ax^{(4)} + bx''' + cx'' + g(x') + ex = p(t, x, x', x'', x''', x^{(4)})$$

$$x^{(5)} + ax^{(4)} + bx''' + f(x'') + dx' + ex = p(t, x, x', x'', x''', x^{(4)})$$

ve

$$x^{(5)} + ax^{(4)} + \psi(x''') + cx'' + dx' + ex = p(t, x, x', x'', x''', x^{(4)})$$

denklemlerinin düzgün disipative çözümlerini (uniformly dissipative solutions) Frequency-Domain Metodunun kullanarak inceledi. Bilindiği üzere, burada a, b, c ve d ler pozitif sabitler olup h, g, g_1, ψ ve p ler de reel değerli ve bağlı bulundukları değişkenin sürekli fonksiyonlarıdır. Bu denklemlerin daha yüksek mertebeli veya düşük mertebeli benzer biçimindeki modellerli için söz konusu olan problemin incelenmesi teori ve pratikte önemlidirler. Çünkü bu türden denklemler R-C filtrelerinin vasıtasıyla otomatik kontrol modellerine uygulanabilmektedir (Andres ve Stanek, 1993).

Bu kesim boyunca aşağıdaki kabullerin doğruluğu varsayılacaktır.

N.1

Frequency-Domain

$$\begin{aligned} \pi(\omega) = D_1 + \text{Re}[D_1 M + i\omega D_2]G(i\omega) + \omega^2 \text{Re}\{D_3[I + (D'' - D'G(i\omega))] \\ - G(-i\omega)D_3 D' D'' G(i\omega)\} > 0 \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

şartı sağlanmaktadır. Belirtelim ki, bu şartın sağlanması halinde

$$x^{(5)} + ax^{(4)} + bx''' + cx'' + dx' + ex = 0 \quad (4.3.4)$$

denkleminin ait karakteristik denklemin tüm kökleri negatif reel kısımlı olur. Bu durum ise (4.3.4) denkleminin tüm çözümlerinin asimptotik kararlı, sınırlı v.b. olması için yeterlidir.

N.2

Her $\omega \in \bar{R}$ için $a\omega^4 - c\omega^2 + e = 0$ denklemi ω_1^2, ω_2^2 gibi iki pozitif reel köke sahip olup, bu kökler $\omega_1^2 = \frac{1}{2a}[c - (c^2 - 4ae)^{1/2}]$ ve $\omega_2^2 = \frac{1}{2a}[c + (c^2 - 4ae)^{1/2}]$ dir. Benzer biçimde $a\omega^4 - b\omega^2 + d = 0$ denklemi ise ω_3^2, ω_4^2 gibi $\omega_3^2 = \frac{1}{2}[b - (b^2 - 4d)^{1/2}]$ ve

$\omega_4^2 = \frac{1}{2}[b + (b^2 - 4d)^{1/2}]$ şeklinde pozitif iki reel köke sahiptir. Uygun olması açısından, $r \equiv a\omega^4 - c\omega^2 + e$ ve $s \equiv \omega^4 - b\omega^2 + d$ alalım.

N.3

Yukarıda belirtilen kökler arasında

$$0 < \omega^2 < \frac{c}{2} < \omega_3^2 < \omega_2^2 < \frac{b}{2} < \omega_4^2 \text{ eşitsizliği vardır.}$$

N.4

Pozitif d, e sabitleri ve $\mu_1 \geq 0, \mu_2 \geq 0$ sayıları vardır, öyle ki,

$$d \leq \frac{g(z)}{z} \leq d + \mu_1, \quad e \leq \frac{h(z)}{z} \leq e + \mu_2 \quad (z \neq 0) \quad \text{olur.}$$

N.5

(4.3.1) denklemindeki p fonksiyonunun her t, x_1, x_2, x_3, x_4' için

$$\left| p(t, x_1, x_2, x_3, x_4, x_4') \right| \leq \rho_0$$

eşitsizliğini sağlandığını kabul edelim. Burada ρ_0 pozitif bir sabittir.

4.3.1. Teorem

(4.3.1) sistemindeki a, b, c katsayılarının pozitif sabitler $g(0) = h(0) = 0$ ve N.1-N.5 kabullerine ilave olarak aşağıdaki şartların sağlandığını varsayalım.

$$d \leq g'(z) \leq d + \mu_1$$

$$e \leq h'(z) \leq e + \mu_2$$

Bu taktirde yukarıdaki kabullere ilave olarak,

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{1}{z^2} \left[\int_0^z g(\zeta) d\zeta - \frac{1}{2} z g(z) \right] \geq 0$$

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{1}{z^2} \left[\int_0^z h(\zeta) d\zeta - \frac{1}{2} z h(z) \right] \leq 0$$

şartlarının sağlanması halinde (4.3.1) denkleminin çözümleri düzgün dissipativedir.

Belirtelim ki N.5 kabulü yerine,

$$\left| p(t, x_1, x_2, x_3, x_4, x_4') \right| \leq \rho_0 + \rho_1 (|x_1| + |x_2| + |x_3| + |x_4| + |x_4'|), \quad (\rho_1 > 0)$$

alınması durumunda, N.5 kabulü daha az kısıtlayıcı bir duruma indirgenmiş olur. Eğer $\mu_1 = 0$ ise, bu taktirde (4.3.1) denklemi,

$$x^{(5)} + ax^{(4)} + bx''' + cx'' + dx' + h(x) = p(t, x, x', x'', x''', x^{(4)})$$

denkleminde indirgenir ve Teorem 4.3.1 ise Afuwape ve Adesina (2000a), deki teoreme indirgenir. Benzer biçimde, eğer $\mu_2 = 0$ ise bu taktirde (4.3.1) denklemi,

$$x^{(5)} + ax^{(4)} + bx''' + cx'' + g(x') + ex = p(t, x, x', x'', x''', x^{(4)})$$

denkleminde indirgenir ve Teorem 4.3.1 ise Afuwape ve Adesina (2000a), teoremine indirgenir.

İspat:

Teorem 4.3.1'in ispatını vermeden önce bazı temel varsayımlar verilecektir.

$g(x') = dx + \hat{g}(x')$ ve $h(x) = ex + \hat{h}(x)$ olsun. $x = x_1, x' = x_2, x'' = x_3, x''' = x_4$ ve $x_4' = x_5$ değişken değişimi yapıldığında (4.3.1) denklemi

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -e & -d & -c & -b & -a \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

(4.3.5)

$$\varphi(\sigma) = \begin{pmatrix} \hat{h}(x_1) \\ \hat{g}(x_2) \end{pmatrix}, P(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ p(t, x_1, x_2, x_3, x_4, x_4') \end{pmatrix}$$

olmak üzere vektörel formda,

$$X' = AX - B\phi(\sigma) + P(t, X), \quad \sigma = C^* X$$

biçiminde yazılabilir.

Eğer N.1 şartı sağlanır ise bu taktirde yukarıda verilen A matrisinin tüm özdeğerleri negatif reel kısımlı olur. Bu ise A matrisinin kararlı olmasını gerektirir. Buna bağlı olarak A matrisinin hiçbir karakteristik kökü tamamen imajiner olmaz. Bu nedenle, her $\omega \in \bar{R}$ için $(i\omega I - A)^{-1}$ vardır.

$$\Delta(i\omega) = \det(i\omega I - A) = (a\omega^4 - c\omega^2 + e) + i\omega(\omega^4 - b\omega^2 + d) \equiv r + i\omega s$$

olsun.

$$G(i\omega) = C^* (i\omega I - A)^{-1} B = \frac{1}{\Delta(i\omega)} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i\omega & i\omega \end{pmatrix} \quad (4.3.6)$$

yazılabilir.

Buna bağlı olarak (4.3.3) ile verilen Frequency-Domain eşitsizliği

$$\pi(\omega) = \left(\begin{array}{c} \frac{\tau_1}{\mu_1} + \frac{\tau\tau_1 + \omega^2 \frac{\theta_1}{\mu_1} s}{|\Delta|^2} \quad \frac{\left\{ \tau_1 \bar{\Delta} - \omega^2 \frac{\theta_2}{\mu_2} \Delta \right\} - i\omega \left\{ \tau_2 \Delta - \frac{\theta_1}{\mu_1} \bar{\Delta} \right\}}{2|\Delta|^2} \\ \frac{\left\{ \tau_1 \Delta - \omega^2 \frac{\theta_2}{\mu_2} \bar{\Delta} \right\} + i\omega \left\{ \tau_2 \bar{\Delta} - \frac{\theta_1}{\mu_1} \Delta \right\}}{2|\Delta|^2} \quad \frac{\tau_2}{\mu_2} + \frac{\omega^2 \left\{ s\tau_2 - \frac{\theta_2}{\mu_2} r \right\}}{|\Delta|^2} \end{array} \right) > 0, \quad (4.3.7)$$

$$\omega \in \bar{R}$$

biçiminde yazılabilir.

Burada $|\Delta|^2 = r^2 + \omega^2 s^2$ dır. $D_1 = \text{diag} \frac{\tau_j}{\mu_j}$, $D_2 = \text{diag} \frac{\theta_j}{\mu_j}$ ve $D_3 \equiv 0$ alalım. Bu durumda yukarıdaki matrisin her $\omega \in R$ için pozitif tanımlı olması için,

$$\pi_{11} = \tau_1 \left[\frac{1}{\mu_1} + \frac{\tau + \omega^2 \delta_1 s}{|\Delta|^2} \right] > 0 \text{ ve } \det \pi(\omega) > 0 \quad (4.3.8)$$

$$\pi_{22} = \tau_2 \left[\frac{1}{\mu_2} + \omega^2 \frac{(s - \delta_2 \tau)}{|\Delta|^2} \right] > 0 \text{ ve } \det \pi(\omega) > 0 \quad (4.3.9)$$

olmalıdır. Burada $\delta_i = \frac{\theta_i}{\tau_i \mu_i}$, ($i = 1, 2$) dır.

Şimdi (4.3.8) ve (4.3.9) eşitsizliklerinin ispatlanabilmesi için aşağıdaki lemmalar verilecektir.

4.3.1.Lemma

ω_1 ve ω_3 , N.3 kabulündeki şartları sağlamak üzere ve

$$\mu_1 < \frac{(ab - c)\omega_1^2 + 2a(2e - ad)}{2\delta_1 a^2} \text{ ve } \mu_2 > -\frac{(ab - c)\omega_3^2 + 2(e - ad)}{\delta_2 \omega_3^2}$$

olmak kaydıyla her $\omega \in \bar{R}$ için $\pi_{11}(\omega) > 0$ ve $\pi_{22}(\omega) > 0$ dır (Afuwape ve Adesina, 2003).

İspat:

π_{11} ve π_{22} nin tanımında,

$$\frac{1}{\mu_1} > \max_{\omega \in R} \frac{K_1(\omega^2)}{|\Delta|^2} \text{ ve } \frac{1}{\mu_2} > \max_{\omega \in R} \frac{K_2(\omega^2)}{|\Delta|^2}$$

yazılabilir. Burada $K_1(\omega^2) = -(\tau + \omega^2 s \delta_1)$ ve $K_2(\omega^2) = \omega^2 (\tau \delta_2 - s)$ dır. Ayrıca

$\frac{K_1(\omega^2)}{|\Delta|^2}$ fonksiyonu $\omega^2 = \omega_1^2$ noktasında maksimum değerini alır ve bu değer,

$$M_1 = \frac{2\delta_1 a^2}{(ab - c)\omega_1^2 + 2a(2e - ad)}$$

dır.

Eğer $\delta_1 = b^2 - 4d$ alınırsa $\mu_1 < M_1^{-1}$ olacağı açıktır. Ayrıca benzer biçimde $\frac{K_2(\omega^2)}{|\Delta|^2}$

fonksiyonu ise $\delta_2 = -(c^2 - 4ae)^{1/2} < 0$ olmak kaydıyla $\omega^2 = \omega_3^2$ noktasında maksimum değerini alır. Bu maksimum değer ise

$$M_2 = \frac{-\delta_2 \omega_3^2}{(ab - c)\omega_3^2 + 2(e - ad)}$$

olarak elde edilir. θ_2 negatif seçilebileceğinden bu durum mümkündür. Buna bağlı olarak $\mu_2 < M_2^{-1}$ yazılabilir. Böylece lemmanın ispatı tamamlanır.

4.3.2.Lemma

Her $\omega \in \bar{R}$ için $\det \pi(\omega) > 0$ dır.

İspat:

(4.3.7) deki matrisin determinant değeri hesaplandığında bu determinantın pozitif olabilmesi için

$$\begin{aligned} & \frac{\tau_1 \tau_2}{\mu_1 \mu_2} + \frac{1}{|\Delta|^2} \left[\frac{\omega^2 \tau_1 \tau_2 s}{\mu_1} - \frac{\omega^2 \tau_1 \theta \tau}{\mu_1 \mu_2} + \frac{\tau_1 \tau_2}{\mu_2} + \frac{\omega^2 \theta \tau_2 s}{\mu_1 \mu_2} \right] \\ & - \frac{\omega^2}{|\Delta|^4} \left[\frac{\tau_2 \theta_2 \pi^2}{\mu_2} - \frac{\omega^2 \tau_2 \theta_1 s^2}{\mu_1} \right] > 0 \end{aligned} \quad (4.3.10)$$

olmalıdır. Eğer (4.3.10)'da $\omega^2 = 0$ alınırsa $\det \pi(\omega) > 0$ olduğu açıktır. Benzer biçimde $\omega^2 \neq 0$ ise bu taktirde $|\Delta|^2$ ve $|\Delta|^4$ sırasıyla ω^2 nin beşinci ve onuncu mertebeden polinomları olarak dikkate alınabilir. (4.3.10)'daki eşitsizlikte son parantezin içindeki ifade yeterince küçük olduğundan, μ_1 ve μ_2 Lemma 4.3.1 deki sonuç sağlanacak şekilde seçilirse $\det \pi(\omega) > 0$ olduğu kolaylıkla görülebilir.

Şimdi yukarıda ispatı verilen iki lemma ve Teorem 4.3.1' in şartları yardımıyla aşağıdaki bağıntılar yazılabilir:

(4.2.7) deki $D_2 = \text{diag} \frac{\theta_j}{\mu_j}$, ($j = 1, 2$) alınır ise

$$\lim_{|x_2| \rightarrow \infty} \frac{\theta_2}{x_2^2} \left[\int_0^{x_2} \hat{g}(\alpha) d\alpha - \frac{x_2}{2} \hat{g}(x_2) \right] \geq 0 \quad (4.3.11)$$

$$\lim_{|x_1| \rightarrow \infty} \frac{\theta_2}{x_1^2} \left[\int_0^{x_1} \hat{h}(\alpha) d\alpha - \frac{x_1}{2} \hat{h}(x_1) \right] \geq 0 \quad (4.3.12)$$

elde edilir.

θ_1 ve $\theta_2, \theta_1 > 0$ ve $\theta_2 < 0$ olacak şekilde alınırsa (4.3.11) ve (4.3.12) deki

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{1}{z^2} \left[\int_0^z g(\zeta) d\zeta - \frac{1}{2} zg(z) \right] \geq 0$$

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{1}{z^2} \left[\int_0^z h(\zeta) d\zeta - \frac{1}{2} zh(z) \right] \leq 0$$

sonuçları elde edilir. Bu ise Teorem 4.3.1'in ispatını tamamlar.

4.3.2. Teorem

Kabul edelim ki, (4.3.2) denklemindeki f ve g fonksiyonları için $g_1(0) = 0 = h(0)$ eşitlikleri mevcut ve pozitif d ve e sabitleri var öyle ki, Teorem 4.3.1'in tüm şartları sağlanmaktadır. Bu şartlara ilave olarak

$$e \leq \frac{G(x)}{x} \leq e + \mu_1 \quad (4.3.13)$$

eşitsizliğinin sağlandığını varsayalım. Bu taktirde (4.3.2) denklemini düzgün dissipative (uniformly dissipative) çözümlere sahiptir.

İspat:

$$\int_0^x g_1(s)ds = dx + \hat{g}_1(x) \quad \text{ve} \quad h(x) = ex + \hat{h}(x) \quad \text{olarak alalım. Bu durumda (4.3.2)}$$

denklemini eşdeğer sistem olarak

$$\begin{aligned} x_1' &= -ex_5 - \hat{f}(x_5) + p(t, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5'), \\ x_2' &= x_1 - dx_5 - \hat{g}(x_5), \\ x_3' &= x_2 - cx_5, \\ x_4' &= x_3 - bx_5, \\ x_5' &= x_4 - ax_5 \end{aligned} \quad (4.3.14)$$

biçiminde alınabilir. Bu sistem ise,

$$X' = A_1 X - B\phi(\bar{\sigma}_1) + P(t, X), \quad \bar{\sigma}_1 = C_1^* X$$

formundadır. Burada,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -e \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -d \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -c \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -b \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -a \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.3.15)$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dır. (4.3.15) sistemi (4.3.1) sisteminin bir dualidir. Buna bağlı olarak her iki sistem için yukarıda verilen Frequency-Domain şartları geçerlidir. Yukarıda verilen Teorem 4.3.1'in ispatı dikkate alındığında Teorem 4.3.2.'nin ispatı kolaylıkla tamamlanabilir (Afuwape ve Adesina, 2003).

KAYNAKLAR

- Abou-El-Ela, A. M. A., Sadek, A. I., 1998. On the boundedness of a certain system of fifth-order differential equation. *Annals of Diff.Eqs.*,**1**(14):1-10.
- Adesina, O. A., 2000. On the qualitative behaviour of solutions of some fourth-order non-linear differential equations. *Ordinary differential equations Proc. Natl. Math. Cent. Abuja Niger.*,**1**(1): 87-93.
- Adesina, O. A., 2001. Periodicity and stability results for solutions of some fifth order non-linear differential equations. *Acta Univ. Palack. Olomuc. Fac. Rerum Natur. Math.*, **40**: 7-16.
- Adesina, O. A., 2003. Frequency domain conditions for uniformly dissipative solutions of some fifth order non-linear differential equations. *J. Nigerian Math. Soc.*, **22**: 71-82
- Adesina, O. A., 2004. Some new criteria on the existence of uniformly dissipative solutions of certain fifth order differential equations. *Int. J. Differ. Equ. Appl.*,**4** (9): 329-341.
- Adesina, O. A., 2006. A result on uniformly dissipative solutions for a certain fifth order non-linear differential equation. *J. Math. Res. Exposition.*,**3** (26): 465-470.
- Afuwape, A. U., 1978. Frequency-Domain criteria for dissipativity of some third order differential equations. *An. Stiint. Univ. Al. I. Cuza Iasi Sect. Mat.*,**2** (24): 271-275.
- Afuwape, A. U., 1979. Solutions of some third-order nonlinear differential equations: frequency-domain method. *An. Stiint. Univ. Al. I. Cuza Iasi Sect. Mat.*,**2** (25): 297-302.
- Afuwape, A. U., 1981a. An application of the frequency-domain criteria for dissipativity of a certain third order nonlinear differential equation. *Analysis.*,**3**(1):211-216.
- Afuwape, A. U., 1981b. On the convergence of solutions of certain fourth order differential equations. *An. Stiint. Univ. Al. I. Cuza Iasi Sect. Mat.*,**1**(27):133-138.
- Afuwape, A. U., 1983a. On the convergence of solutions of certain systems of nonlinear third-order differential equations. *Simon Stevin.*,**4** (57): 255-271.
- Afuwape, A. U., 1983b. Ultimate boundedness results for a certain system of third-order nonlinear differential equations. *J. Math. Anal. Appl.*,**1** (97): 140-150.
- Afuwape, A. U., 1985. Further ultimate boundedness results for a third-order nonlinear system of differential equations. *Boll. Un. Mat. Ital.*,**1** (4): 347-361.
- Afuwape, A. U., 1986. Frequency-domain approach to nonlinear oscillations of some third-order differential equations. *Nonlinear Anal.*,**12** (10):1459-1470.
- Afuwape, A.U., 1987. On the applications of the frequency-domain method for uniformly dissipative nonlinear systems. *Math. Nachr.*,**130**: 217-224.

Afuwape, A. U., 1988. Convergence of the solutions for the equation

$$x^{(4)} + ax''' + bx'' + g(x') + h(x) = p(t, x, x', x'', x''') \text{ *Internat. J. Math. Math. Sci.*,4 (11):727-733.}$$

Afuwape, A. U., 1989. Uniform dissipativity of some fourth-order nonlinear differential equations. *An. Stiint. Univ. Al. I. Cuza Iasi Sect. Mat.*,1 (35): 9-16.

Afuwape, A. U., 1991. Uniform dissipative solutions for some fourth order nonlinear differential equations. *An. Stiint. Univ. Al. I. Cuza Iasi Sect. Mat.*,4 (37): 431-445.

Afuwape, A. U., 2005. Resonant oscillations for forced third order nonlinear periodic systems. *Nonlinear Stud.*, 3 (12): 215-231.

Afuwape, A. U., Adesina, O. A. 2000a. Uniform dissipative solutions for some fifth-order non-linear differential equations. *Ordinary differential equations, Proc. Natl. Math. Cent. Abuja Niger.*, 1.(1): 66-74.

Afuwape, A. U., Adesina, O. A., 2000b. Conditions on the qualitative behaviour of solutions for a certain class of fifth-order non-linear differential equations. *An. Stiint. Univ. Al. I. Cuza Iasi. Mat.*,2 (46): 277-294.

Afuwape, A. U., Adesina, O. A., 2003. On the uniform dissipativity of some fifth-order non-linear differential equations. *Ann. Differential Equations.*, 19 (4): 489-496.

Afuwape, A. U., Adesina, O. A., 2005. Frequency-domain approach to stability and periodic solutions of certain fourth-order non-linear differential equations. *Nonlinear Stud.*, 3 (12): 259-269.

Afuwape, A. U., Omeike, M. O., 2004. Further ultimate boundedness of solutions of some system of third order nonlinear ordinary differential equations. *Acta Univ. Palack. Olomuc. Fac. Rerum Natur. Math.*, 43:7-20.

Andres, J., Stanek, S., 1993. Note to the Langrage stability of excited pendulum type equations.,*Mth.Slovaca.*, 49(5):617-630.

Barbalat, I., Halanay, A., 1970. Applications of the frequency-domain method to forced non-linear oscillations. *Math.Nachr.*, 44:165-179.

Barbalat, I., Halanay, A., 1971. Nouvelles applications de la methode frequentielle dans la theories des oscillations. *Roum.Sci.Techn.*,16: 689-702.

Barbalat, I., Halanay, A., 1974. Conditions de comportement 'presque lineaire' dans la theorie des oscillations. *Roum.Sci.Techn.Ser.Electro.et Energ.*,19(2):321-341.

Bellman, R., 1997. *Introduction to matrix analysis*. Reprint of the second edition. With a foreword by Gene Golub. Classics in Applied Mathematics,19. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia.

- Chukwu, E. N., 1975. On the boundedness of solutions of third order differential equations. **Ann. Mat. Pura Appl.**, **104** (4):123-149.
- Ezeilo, J.O.C., 1962. On the boundedness and the stability of solutions of some differential equations of the fourth order. **J. Math. Anal. Appl.**, **5**:136-146.
- Harrow, M., 1970. On the boundedness and the stability of solutions of some differential equations of the fourth order. **SIAM. J. Math. Anal.**, **1**:27-32.
- Kalman, R.E., 1963. Lyapunov functions for the problem of Lurie in automatic control. **Proc.Natn.Acad.Sci.**, **49**:201-205.
- Lyapunov, A.M., 1966. **Stability of Motion.**, Academic Press. London.203.
- ONeil, P. V., 1986. **Advanced Engineering Mathematics**. Second Editon. Wadsworth Publishing Co., Inc., CaliforniaNew York; Collier Macmillan Publishers, London.1122.
- Popov,V.M., 1962. Absolute stability of non-linear control systems.**Aut.Rem.Control.**,**22**:867-875.
- Qian, C., 2000. On global stability of third-order nonlinear differential equations.**Nonlinear Anal.**,**42** (4):651-661.
- Rao, M. R. M., 1980. **Ordinary Differential Equations**. Affiliated East-West Private Limited, London.
- Reissig, R., Sansone, G.,Conti, R., 1974. **Non-linear Differential Equations of Higher Order.**, Translated from the German. Noordhoff International Publishing, Leyden.669.
- Ross, S. L., 1984. **Differential equations**. Third edition, John Wiley & Sons, Inc., New York. 807.
- Sadek, A. I., 2005. On the stability of the solutions of certain fifth order non-autonomous differential equations. **Arch. Math. (Brno)**,**1**(41): 93-106.
- Shi-zhong, L., Zheng-rong, L, Yuan-hong, Y.,1998. Stability for certain fourth-order nonlinear differential equations. **Demonstratio Mathematica.**,**1**(31):87-96.
- Skidmore, A. S., 1966. On the stability of solutions of a differential equation of fourth order. **J. London Math. Soc.**, **41**:649-661.
- Tejumola, H.O., 1972. Further results on the boundedness and the stability of certain fourth order differential equations. **Atti. Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.**,**52**(8):16-23.
- Tejumola, H.O., 1975. Further results onthe existence of periodic solutions of certin fifth-order non-linear differentiell equation., **Atti. Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.**,**3**(53):323-327.
- Tunç, C., 2004. A result on asymptotic behaviour of solutions of certain non-autonomous differential equations of the fifth order. **Nonlinear Phenom. Complex Syst.**,**4** (7): 359-367.
- Tunç, C., 2005a. On the asymptotic behavior of solutions of certain third-order nonlinear differential equations. **J. Appl. Math. Stoch. Anal.**,**1**:29-35.

- Tunç, C., 2005b. Boundedness of solutions of a third-order nonlinear differential equation. ***Pure Appl. Math.***,**1** (6): 3-6.
- Tunç, C., 2006. Stability and boundedness of solutions to certain fourth-order differential equations. ***Electron. J. Differential Equations.***,**35** :10
- Wu, X., Xiong, K., 1998. Remarks on stability results for the solutions of certain fourth-order autonomous differential equations. ***Internat. J. Control.***,**2**(69):353-360.
- Yacubovich,V.A., 1962. Solutions of some matrix inequalities occuring in the theory of automatic control. ***SovietMath.Dokl.***,**4**:1304-1307.
- Yacubovich,V.A., 1964. The matrix method in the theory of the stability of non-linear control systems.***Aut.Rem.Control.***,**25**:905-916.
- Yacubovich,V.A., 1965. Frequency-Domain conditions for absolute stability and dissipativity of control systems with one differenteable non-linearity.***Soviet Math.Dokl.***,**6**:81-101.
- Yacubovich,V.A., 1966. Periodic and almost periodic limit states of controlled systems with several,in general discotinuuous non-linearities.***SovietMath.Dokl.***,**7**:1517-1521.

ÖZ GEÇMİŞ

03.10.1977 tarihinde Van’da doğdu. İlköğrenimini Van Husrevpaşa İlkokulu’nda, orta öğrenimini Özel Halime Hatun Kız Lisesi’nde tamamladı. Yüksek öğrenimini 1999 yılında Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü’nde tamamladı. 2000 yılında Milli Eğitim Bakanlığı’nda matematik öğretmeni olarak çalışmaya başladı ve halen aynı göreve devam etmektedir. Şubat 2004’te Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda yüksek lisansa başladı. Evli ve bir çocuk annesidir.

Merve Esra EREZ ÇELİK