

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÇİZELGE LİSTESİ	iii
ÖNSÖZ	iv
ÖZET	v
ABSTRACT	vi
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL BİLGİLER.....	2
2.1 Ön bilgiler.....	2
2.2 Sonlu Farklar	5
2.3 Problemin Sınıflandırılması.....	6
2.3.1 Eliptik Denklem.....	6
2.3.2 Hiperbolik Denklem	7
2.3.3 Parabolik Denklem	8
3. PARABOLİK KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMİN SONLU FARKLAR İLE BAZI NÜMERİK ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ.....	9
3.1 Euler Yöntemi.....	9
3.2 Richardson Yöntemi	12
3.3 Dufort-Frankel Yöntemi	15
3.4 Crank-Nicholson Yöntemi.....	18
4. NÜMERİK TUTARLILIK.....	25
4.1 Euler Yöntemi'nin Tutarlılığı.....	25
4.2 Richardson Yöntemi'nin Tutarlılığı	26
4.3 Dufort-Frankel Yöntemi'nin Tutarlılığı	27
4.4 Crank- Nicholson Yöntemi'nin Tutarlılığı.....	27
5. NÜMERİK KARARLILIK	30
5.1 Euler Yöntemi'nin Kararlılığı	30
5.2 Richardson Yöntemi'nin Kararlılığı.....	32
5.3 Dufort-Frankel Yöntemi'nin Kararlılığı.....	32
5.4 Crank-Nicholson Yöntemi'nin Kararlılığı.....	33
6. SONUÇ.....	35

ÇİZELGE LİSTESİ

	Sayfa
Çizelge 3.1 Euler Yöntemi ile ilgili örneğin $r = 0.5$ için sonuçları.....	12
Çizelge 3.2 Richardson Yöntemi ile ilgili örneğin sonuçları	15
Çizelge 3.3 Dufort-Frankel Yöntemi ile ilgili örneğin sonuçları	18
Çizelge 3.4 Crank-Nicholson Yöntemi ile ilgili örneğin sonuçları.....	24
Çizelge 5.1 Euler Yöntemi ile ilgili örneğin $r = 0.833333$ için sonuçları.....	31

ÖNSÖZ

Kısmi diferansiyel denklemler içeren matematiksel modeller, fizik, mühendislik ve uygulamalı bilimlerde geniş bir yer tutar. Bu konuda yapılan nümerik çalışmalar özellikle bilgisayar teknolojisinin gelişmesiyle büyük bir hız kazanmıştır ve denklemlerin nümerik çözümlerini elde etmek için bir çok yöntem geliştirilmiştir.

Bu çalışmada, sonlu farklar yaklaşımıyla bazı nümerik yöntemler ele alınmıştır. Daha sonra bu nümerik yöntemlerin tutarlılık ve kararlılıkları incelenmiştir.

Bu çalışmanın hazırlanmasında yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Nuran Güzel'e teşekkür ediyorum.

Ayrıca, yüksek lisans boyunca beni destekleyen Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK)'a teşekkürlerimi sunarım.

ÖZET

Bu tezde, mühendislik ve fen bilimlerinde ortaya çıkan parabolik kısmi diferansiyel denklemini çözmek için sonlu farklar yöntemi kullanan bazı nümerik metotlar sunulmuştur. Daha sonra bu nümerik yöntemlerin tutarlılığı ve nümerik kararlılığı incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Parabolik kısmi diferansiyel denklem, tutarlılık, kararlılık.

ABSTRACT

In this thesis, some numerical methods using finite difference formulas are described for the solving parabolic partial differential equation arising in sciences and engineering. Then, the consistency and the numerical stability of the methods are studied.

Keywords: Parabolic partial differential equation, consistency, stability.

1. GİRİŞ

Matematik'te uygulama alanı çok geniş olan alanlardan bir tanesi kısmi diferansiyel denklemlerdir. Her zaman kısmi diferansiyel denklemlerin tam çözümlerini elde edemeyebiliriz. Bu yüzden nümerik olarak inceleriz. Uygulama alanı çok geniş olduğundan birçok matematikçinin ilgisini çekmiş ve çözümü için farklı yöntemler geliştirilmiştir.

20. yüzyıla gelindiğinde kısmi diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri analiz edilmeye başlanmıştır. İlk olarak 1928 yılında Courant, Friedrichs ve Lewy matematiksel fizik problemlerinde sonlu fark formüllerini kullandı. Eliptik kısmi diferansiyel denklemlerin fark formülleri için hata sınırları ilk defa 1930 yılında Gerschgorin tarafından gösterildi. Bu yaklaşım 1960'lı yıllara kadar Collotz, Motzkin, Wasom, Bramble, Hubbard gibi bilim adamları tarafından kullanıldı. Ayrıca, birçok eliptik denklem formülleri ve buna bağlı olarak sınır koşulları analiz edildi. II. Dünya Savaşı boyunca sonlu farklar yöntemi ile zaman (t) koşullu problemler bilgisayar yardımıyla çözüldü. John von Neumann'ın çalışmaları bu problemlerin çözülmesinde büyük katkı sağlamıştır. 1951'de ise bu çalışmalar O'Brien, Hyman ve Kaplan tarafından yazıldı. Parabolik denklemler için John von Neumann 1951 yılında yeni bir teori geliştirdi. Bu arada 1947 yılında Crank ve Nicholson 1947 yılında başlangıç-sınır değer problemleri için yeni bir yöntem geliştirdi. Lax Denklik Teoremi'nin ve Kreris Matris Metodu'nun (kararlılık için) bulunmasıyla, genel başlangıç değer problemleri için sonlu farklar teorisinde ve parabolik denklemlerde 1950 ve 1960 yıllarında bir gelişme kaydedildi. Hiperbolik denklemler için özellikle de doğrusal olmayan hiperbolik denklemler için sonlu fark formülleri yakın zamana kadar önemli bir yer tuttu. Friedrichs, Lax ve Wendroff sonlu fark formülleri ile hiperbolik denklemler üzerinde ilk çalışan bilim adamlarıdır. Son yıllarda özellikle bilgisayar teknolojisinin gelişmesiyle kısmi diferansiyel denklemlerin nümerik çözümlerinde önemli mesafeler alınmıştır.

Bu çalışmada ise parabolik kısmi diferansiyel denklem olan ısı denkleminin bazı nümerik yöntemleri incelendi. Daha sonra bu yöntemlerin Taylor serisi yardımıyla tutarlılığı araştırıldı. Son aşama olarak da incelenen yöntemlerin kararlılıkları araştırıldı.

2. TEMEL BİLGİLER

2.1 Önbilgiler

Bu bölümde, tezde kullanılan bazı temel kavramlar verilecektir.

2.1.1. Tanım: Bir bağımlı değişkenin bir bağımsız değişkene göre çeşitli mertebeden türevlerini bulunduran denkleme diferansiyel denklem denir. Bu tür denklemlerin en genel formu,

$$f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (2.1)$$

şeklinde gösterilir. Burada $y^{(n)}$, y 'nin x 'e göre n . türevidir. (2.1) denklemini $y^{(n)}$ ye göre çözümlürse,

$$y^{(n)} = g(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \quad (2.2)$$

elde edilir. Bu da (2.1)'in açık formda yazılmış halidir.

2.1.2. Tanım: n bağımsız değişkenli bir tek bilinmeyen fonksiyonlu bir diferansiyel denklem ele alınsın. Bağımsız değişkenler $x_1, x_2, \dots, x_n$ ve bilinmeyen fonksiyon da $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow z = z(x) = z(x_1, x_2, \dots, x_n)$

olsun. Kısmi türevler $p_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial z}{\partial x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $i = 1, \dots, n$ ya da nokta

belirtilmemek üzere $p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}$ ile gösterilsin. Kısmi diferansiyel denklem genel olarak

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n; z, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0 \quad (2.3)$$

ya da kısaca

$$f(x, z, p) = 0 \quad (2.4)$$

biçiminde gösterilir.

2.1.3. Tanım: $c_i, b \in R$ ve x_i ler de değişkenler olmak üzere,

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n = b \quad (2.5)$$

şeklindeki bir ifadeye lineer denklem denir.

$a_{ij}, b_i \in R$ ve x_i değişkenler olmak üzere

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \quad (2.6)$$

şeklindeki bir ifadeye lineer denklem sistemi adı verilir. Burada $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ matrisine sistemin katsayılar matrisi ve

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \text{ ile } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

matrislerine de sırası ile sistemin ikinci yanı ve bilinmeyenler matrisi denir.

$$[A : B] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \vdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \vdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & \vdots & b_m \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

matrisine de sistemin genişletilmiş katsayılar matrisi denir.

Yukarıdaki lineer denklem sisteminin matris gösterimi $Ax = B$ şeklindedir. Bir lineer denklem sisteminde, sistemin genişletilmiş katsayılar matrisi üzerinde yapılan elementer satır ve sütun işlemleri, sistemin çözümünü değiştirmez. Yani,

- Herhangi iki denklemin yeri değiştirilirse,
- Herhangi iki denklemin her iki yanı sıfırdan farklı bir skalerle çarpılırsa,
- Herhangi iki denklemin her iki yanı, herhangi bir skalerle çarpıldıktan sonra başka bir denklemle taraf tarafa toplanırsa sistemin çözümleri aynı kalır.

Bundan dolayı, $[A : B]$ genişletilmiş katsayılar matrisini elementer satır ve sütun işlemleri ile indirgenmiş eşelon forma getirerek çözümler bulunabilir. Bu metotla sistemi çözmeye Gauss-

Jordan yok etme metodu ve katsayılar matrisini indirgenmiş eşelon forma getirerek çözmeye de Gauss-Jordan indirgeme metodu adı verilir.

2.1.4. Tanım: A , $n \times n$ tipinde bir matris olsun. Eğer $|A| \neq 0$ ise A matrisine (tersi mevcut ise) non-singüler (regüler) matris, $|A| = 0$ ise A matrisine (tersi mevcut olmayan) singüler (regüler olmayan) matris denir.

2.1.5. Tanım: A , n . mertebeden bir regüler matris ($|A| \neq 0$) ise $Ax = B$ lineer denklem sisteminin tek çözümü vardır ve bu çözüm

$$x = A^{-1}B \quad (2.9)$$

eşitliği ile verilir.

2.1.6. Tanım: Eğer $f(x)$ fonksiyonunun $x = c$ de her mertebeden türevi varsa,

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + \dots \quad (2.10)$$

serisine $f(x)$ fonksiyonunun $x = c$ deki Taylor Serisi denir. Eğer $c = 0$ alınırsa bu seriye $f(x)$ fonksiyonunun Maclaurin Serisi adı verilir.

2.1.7. Teorem (Taylor Teoremi): $f(x, y)$ fonksiyonu ve ilk n mertebeden kısmi türevi kapalı bir bölgede sürekli ve açık bölgede $n+1$ inci mertebeden türevi mevcut ise

$$\begin{aligned} f(a+h, b+k) &= f(a, b) + \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right) f(a, b) + \frac{1}{2!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(a, b) \\ &+ \dots + \frac{1}{n!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(a, b) + R_n \end{aligned} \quad (2.11)$$

dir. R_n , Langrange kalanı olarak isimlendirilir ve

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(a + \theta h, b + \theta k), \quad 0 < \theta < 1 \quad (2.12)$$

ile verilir ve

$$\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right) f(a, b) = hf_x(a, b) + kf_y(a, b)$$

$$\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(a, b) = h^2 f_{xx}(a, b) + 2hk f_{xy}(a, b) + k^2 f_{yy}(a, b)$$

⋮

şeklindedir.

2.2 Sonlu Farklar

Sonlu farklar yöntemi ile nümerik türev almak için bir takım ayırık noktalarda değeri bilinen bir $f(x)$ fonksiyonunun bir noktasındaki türevi bilinen bu değerler kullanılarak ifade edilir.

h adım uzunluğu olmak üzere, $f(x)$ fonksiyonu $(x+h)$ ve $(x-h)$ civarında

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \frac{h^3}{6} f'''(x) + O(h^4) \quad (2.13)$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) - \frac{h^3}{6} f'''(x) + O(h^4) \quad (2.14)$$

şeklinde Taylor Serisi'ne açılır.

Denklem (2.13) ve (2.14)'ten

$$f(x+h) - f(x-h) = 2hf'(x) - \frac{h^3}{3} f'''(x) + O(h^5)$$

$$f(x+h) - 2f(x) + f(x-h) = h^2 f''(x) + O(h^4)$$

denklemleri elde edilir.

Buradan da

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + O(h^2) \quad (2.15)$$

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + O(h^2) \quad (2.16)$$

elde edilir. Denklem (2.15) ve (2.16)'ya merkezi fark türev formülleri denir.

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + O(h^2) \quad (2.17)$$

$$f''(x) = \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2} + O(h^2) \quad (2.18)$$

denklemlerine ileri fark türev formülleri denir.

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + O(h^2) \quad (2.19)$$

$$f''(x) = \frac{f(x) - 2f(x-h) + f(x-2h)}{h^2} + O(h^2) \quad (2.20)$$

denklemlerine de geri fark türev formülleri denir.

2.3 Problemin Sınıflandırılması

Diferansiyel denklem problemini belirtmek için iki farklı yol vardır. Birincisi, fonksiyon ve türevleri ile cebirsel ilişkisi olan diferansiyel denklemlerdir. İkincisi, birçok olası çözümden arzu edilen çözümü elde etmek için başlangıç ve sınır koşullarının da sağlanmasıdır.

Başlangıç koşulları, bağımsız değişkenin sabit değeri için her yerde sağlanan koşullardır. Genellikle, bağımsız değişken zaman (t) olarak tanımlanır.

Sınır koşulları, diferansiyel denklemin tanımlandığı A bölgesinin ∂A sınırının her yerinde sağlanan koşullardır.

Farklı kısmi diferansiyel denklem tipleri farklı başlangıç ve sınır koşullarına ihtiyaç duyar ve bu da farklı nümerik işlemler anlamına gelir. Uygulamada, genellikle mühendislikte ve temel bilimlerde çok yaygın kullanım alanı olmasından dolayı ikinci dereceden doğrusal kısmi diferansiyel denklem ele alınacaktır.

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = g \quad (2.21)$$

$A = A(x, y, u_x, u_y, u), \dots, F = F(x, y, u_x, u_y, u)$ şeklinde bir ikinci derece kısmi diferansiyel denklem olsun. Bu tip diferansiyel denklemler $B^2 - 4AC$ ye bağlı olarak üç sınıfa ayrılır. Bunlar, eliptik, hiperbolik ve parabolik denklemlerdir.

2.3.1 Eliptik Denklem

Eğer $B^2 - 4AC < 0$ ise (2.21) denklemini eliptik denklemdir. Eliptik kısmi diferansiyel

denklemler sınır değer problemlerini doğurur. Yani sadece sınır koşullar eliptik kısmi diferansiyel denklem çözümünün belirtilmesi için sağlanır. Eliptik denklemler statik (zamandan bağımsız) problemlerde ortaya çıkar. Potansiyel teori, akışkan mekaniği bu tip denklemlere örneklerdir. Örneğin Poisson denklemi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = g(x, y), \quad (x, y) \in A \quad (2.22)$$

bir eliptik denklemdir.

$f_1(x, y), \dots, f_4(x, y)$ bilinen fonksiyonlar ve $\partial A = C_1 \cup C_2 \cup C_3$ olmak üzere

$$u = f_1(x, y) \quad (x, y) \in C_1$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = f_2(x, y) \quad (x, y) \in C_2$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} f_3(x, y)u = f_4(x, y) \quad (x, y) \in C_3$$

sınır koşullarını sağlayan (2.22) denkleminin çözümü aranır.

2.3.2 Hiperbolik Denklem

Eğer $B^2 - 4AC > 0$ ise (2.21) denklemi hiperbolik denklemdir. Hiperbolik kısmi diferansiyel denklemler başlangıç değer problemlerini doğurur. Yani $t=0$ da çözüme başlamak için başlangıç koşullara ihtiyaç duyulur. Hiperbolik denklemler dağılımları yaymayı içeren problemlerde görülür. Dalga mekaniği bu tip denkleme örnektir. Dalga denklemi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(x, t), \quad (t, x) \in (0, \infty) \times (a, b) \quad (2.23)$$

bir hiperbolik denklemdir.

$\phi(x)$ ve $\varphi(x)$, x e bağlı birer fonksiyon olmak üzere

$$u(0, x) = \phi(x), \quad \frac{\partial u(0, x)}{\partial t} = \varphi(x)$$

başlangıç koşullarını sağlayan (2.23) denkleminin çözümü aranır.

2.3.3 Parabolik Denklem

Eğer $B^2 - 4AC = 0$ ise (2.21) denklemi parabolik denklemdir. Parabolik kısmi diferansiyel denklemler başlangıç sınır değer problemlerini doğurur. Yani $t=0$ da çözüme başlamak için başlangıç koşullara ihtiyaç duyulur sonra $t>0$ için çözümün belirtilmesi için sınır koşullar sağlanmalıdır. Parabolik denklemler sıcaklık, manyetik alan problemlerinde sıkça görülür. Difüzyon denklemi

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(x, t), \quad (t, x) \in (0, \infty) \times (a, b) \quad (2.24)$$

bir parabolik denklemdir. $\alpha_a(t), \alpha_b(t), \beta_a(t), \beta_b(t), f_1(t), f_2(t)$ fonksiyonları t 'ye bağlı olmak üzere

$$u(0, x) = \phi(x),$$

$$\begin{cases} \alpha_a(t)u(t, a) + \beta_a(t)\frac{\partial u}{\partial a} = f_1(t) & t > 0 \\ \alpha_b(t)u(t, b) + \beta_b(t)\frac{\partial u}{\partial b} = f_2(t) & t > 0 \end{cases}$$

şeklinde başlangıç ve sınır koşullarını sağlayan (2.24) denkleminin çözümü aranır.

3. PARABOLİK KISMI DİFERANSİYEL DENKLEMİN SONLU FARKLAR İLE BAZI NÜMERİK ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

Bu bölümde,

$$c \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, \quad 0 < x < a, \quad t > 0 \quad (3.1)$$

$$u(0,t) = T_1, \quad u(a,t) = T_2, \quad t > 0 \quad (3.2)$$

$$u(x,0) = f(x), \quad 0 < x < a \quad (3.3)$$

şeklindeki sınır değer probleminin yaklaşık çözümü için dört farklı yöntem verilecektir. Bu denklem bir boyutlu ısı denklemi olarak bilinir ve parabolik tipten bir kısmi diferansiyel denklemdir. Burada T_1 ve T_2 , çubuğun uç noktalarındaki ısıyı gösterir. f fonksiyonu, homojen bir çubuk içinde $x=0$ noktasından $x=a$ noktasına kadar başlangıç ısısının dağılımı olarak düşünülebilir. Eğer f fonksiyonu $[0,a]$ kapalı aralığında sürekli ise (3.1) sınır değer probleminin çözümü taktır.

3.1 Euler Yöntemi

(3.1) denkleminin yaklaşık çözümünün bulunması için önce bu denklemin yerine geçen fark denklemi elde edilir. Bunun için merkezi fark yaklaşımı kullanılırsa

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{1}{h^2} [u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)]$$

elde edilir. İleri fark yaklaşımı da kullanılarak

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{1}{k} [u(x,t+k) - u(x,t)]$$

elde edilir. Bu değerler (3.1) denkleminde yerine yazılırsa

$$\frac{c}{h^2} [u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)] = \frac{1}{k} [u(x,t+k) - u(x,t)] \quad (3.4)$$

şeklinde fark denklemi elde edilir. Eğer $r = \frac{ck}{h^2}$ ve

$$u(x,t) = u_{ij},$$

$$u(x+h, t) = u_{i+1, j},$$

$$u(x-h, t) = u_{i-1, j},$$

$$u(x, t+k) = u_{i, j+1},$$

olarak alınırsa (3.4) fark denklemi

$$u_{i, j+1} = ru_{i+1, j} + (1-2r)u_{ij} + ru_{i-1, j} \quad (3.5)$$

şeklinde yazılır.

Bazı T değerleri için $0 \leq x \leq a$, $0 \leq t \leq T$ eşitsizliği ile tanımlanan xt -düzlemindeki bir dikdörtgensel bölgede (3.1) denkleminin çözümü elde etmek isteniyorsa bu dikdörtgensel bölge k birim uzunluğunda dikey ve h birim uzunluğunda yatay çizgilerle bölünür. Bu durumda eğer $h = \frac{a}{n}$ ve $k = \frac{T}{m}$ olacak şekilde n ve m pozitif tamsayıları seçilirse, yatay ve dikey ızgara çizgileri $x_i = ih$, $i = 0, 1, \dots, n$ ve $t_j = jk$, $j = 0, 1, \dots, m$ olarak tanımlanır. Amaç j . zaman doğrusu kullanılarak $j+1$. zaman doğrusu üzerindeki noktada $u(x, t)$ fonksiyonunun yaklaşık değerinin bulunması için (3.5) formülünü kullanmaktır. Örneğin, birinci zaman doğrusu ($j = 1$) üzerindeki değerler, sıfırıncı zaman doğrusu üzerinde verilen $u_{i,0} = u(x_i, 0) = f(x_i)$ başlangıç koşuluna bağlıdır. Bu tür nümerik işlemler açık sonlu farklar yöntemi olarak da bilinir.

Örnek

$$u_t(x, t) = u_{xx}(x, t) \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < 0.20$$

$$u(x, 0) = 4x - x^2 \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad 0 \leq t \leq 0.20$$

şeklinde başlangıç ve sınır koşulları verilen ısı denkleminin Euler Yöntemi ile nümerik çözümü aşağıdaki şekildedir.

Eğer $h = 0.2$ ve $k = 0.02$ olarak alınırsa $r = 0.5$ sonucu çıkar. Bu sonuç Euler Yöntemi olarak bilinen denklem (3.5)'te yerine yazılırsa

$$u_{i, j+1} = \frac{u_{i+1, j} + u_{i-1, j}}{2}, \quad i = 0, \dots, 5, \quad j = 0, \dots, 10$$

elde edilir.

Sınır koşulundan $u_{0,0} = u(0,0) = 0$ ve $u_{5,0} = u(1,0) = 0$ 'dır.

Başlangıç koşulu $u(x,0) = 4x - x^2$ $0 \leq x \leq 1$ olmak üzere,

$$u_{1,0} = u(0.2,0) = 4(0.2) - (0.2)^2 = 0.64$$

$$u_{2,0} = u(0.4,0) = 4(0.4) - (0.4)^2 = 0.96$$

$$u_{3,0} = u(0.6,0) = 4(0.6) - (0.6)^2 = 0.96$$

$$u_{4,0} = u(0.8,0) = 4(0.8) - (0.8)^2 = 0.64$$

elde edilir.

$j = 0$ için $i = 1, \dots, 4$ olmak üzere $u_{i,j+1} = \frac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j}}{2}$ denkleminde yerine yazılırsa

$$u_{1,1} = \frac{u_{2,0} + u_{0,0}}{2} = \frac{0.96 + 0}{2} = 0.48$$

$$u_{2,1} = \frac{u_{3,0} + u_{1,0}}{2} = \frac{0.96 + 0.64}{2} = 0.80$$

$$u_{3,1} = \frac{u_{4,0} + u_{2,0}}{2} = \frac{0.64 + 0.96}{2} = 0.80$$

$$u_{4,1} = \frac{u_{5,0} + u_{3,0}}{2} = \frac{0 + 0.96}{2} = 0.48$$

elde edilir. Diğer adımlar için aynı yöntemle devam edilerek çözüldüğünde çizelge (3.1)'deki sonuçlar elde edilir.

Çizelge 3.1 Euler Yöntemi ile ilgili örneğin $r = 0.5$ için sonuçları

	$x_1 = 0.00$	$x_2 = 0.2$	$x_3 = 0.4$	$x_4 = 0.6$	$x_5 = 0.8$	$x_6 = 1.0$
$t_1 = 0.00$	0.000000	0.640000	0.960000	0.960000	0.640000	0.000000
$t_2 = 0.02$	0.000000	0.480000	0.800000	0.800000	0.480000	0.000000
$t_3 = 0.04$	0.000000	0.400000	0.640000	0.640000	0.400000	0.000000
$t_4 = 0.06$	0.000000	0.320000	0.520000	0.520000	0.320000	0.000000
$t_5 = 0.08$	0.000000	0.260000	0.420000	0.420000	0.260000	0.000000
$t_6 = 0.10$	0.000000	0.210000	0.340000	0.340000	0.210000	0.000000
$t_7 = 0.12$	0.000000	0.170000	0.275000	0.275000	0.170000	0.000000
$t_8 = 0.14$	0.000000	0.137500	0.222500	0.222500	0.137500	0.000000
$t_9 = 0.16$	0.000000	0.111250	0.180000	0.180000	0.111250	0.000000
$t_{10} = 0.18$	0.000000	0.090000	0.145625	0.145625	0.090000	0.000000
$t_{11} = 0.20$	0.000000	0.072812	0.117813	0.117813	0.072812	0.000000

3.2 Richardson Yöntemi

Richardson Yöntemi'nde $\frac{\partial u}{\partial t}$ için ileri fark formülü yerine merkezi fark formülü kullanılır.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{1}{h^2} [u(x+h, t) - 2u(x, t) + u(x-h, t)]$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{1}{2k} [u(x, t+k) - u(x, t-k)]$$

şeklindeki fark formülleri (3.1) denkleminde yerine yazılırsa

$$\frac{c}{h^2} [u(x+h, t) - 2u(x, t) + u(x-h, t)] = \frac{1}{2k} [u(x, t+k) - u(x, t-k)] \quad (3.6)$$

şeklinde fark denklemi elde edilir. Eğer $r = \frac{ck}{h^2}$ ve

$$u(x, t) = u_{ij},$$

$$u(x+h, t) = u_{i+1, j},$$

$$u(x-h, t) = u_{i-1, j},$$

$$u(x, t+k) = u_{i, j+1},$$

$$u(x, t-k) = u_{i,j-1},$$

olarak alınırsa (3.6) fark denklemi

$$u_{i,j+1} - u_{i,j-1} = 2r(u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}) \quad (3.7)$$

şeklinde yazılır.

Richardson Yöntemi'ndeki zorluk $j=0$ için $u_{i,-1}$ 'in çözümünün olmadığıdır. Bu zorluğun aşılması için bir yol ilk adımda Richardson Yöntemi yerine Euler Yöntemi kullanılmasıdır.

Örnek

$$u_t(x, t) = u_{xx}(x, t) \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < 0.20$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad 0 \leq t \leq 0.20$$

$$u(x, 0) = \sin(2\pi x) \quad 0 \leq x \leq 1$$

şeklinde başlangıç ve sınır koşulları verilen ısı denkleminin Richardson Yöntemi ile nümerik çözümü aşağıdaki şekildedir. Eğer $h=0.2$ ve $k=0.02$ olarak alınırsa $r=0.5$ sonucu çıkar. Bu sonuç Richardson Yöntemi olarak bilinen denklem (3.7)'de yerine yazılırsa

$$u_{i,j+1} = (u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}) + u_{i,j-1}, \quad i = 0, \dots, 5, \quad j = 0, \dots, 10$$

elde edilir.

Sınır koşulundan $u_{0,0} = u(0, 0) = 0$ ve $u_{5,0} = u(1, 0) = 0$ 'dır.

Başlangıç koşulu $u(x, 0) = \sin(2\pi x)$ $0 \leq x \leq 1$ olmak üzere,

$$u_{1,0} = u(0.2, 0) = \sin(2\pi(0.2)) = 0.951057$$

$$u_{2,0} = u(0.4, 0) = \sin(2\pi(0.4)) = 0.587785$$

$$u_{3,0} = u(0.6, 0) = \sin(2\pi(0.6)) = -0.587785$$

$$u_{4,0} = u(0.8, 0) = \sin(2\pi(0.8)) = -0.951057$$

şeklindedir.

İlk adımda $j=0$ için Euler Yöntemi kullanılır. $r=0.5$ olduğundan Euler Yöntemi

$u_{i,j+1} = \frac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j}}{2}$ şeklindedir. $i = 1, \dots, 4$ olmak üzere,

$$u_{1,1} = \frac{u_{2,0} + u_{0,0}}{2} = \frac{0.587785 + 0}{2} = 0.293893$$

$$u_{2,1} = \frac{u_{3,0} + u_{1,0}}{2} = \frac{-0.587785 + 0.951057}{2} = 0.181636$$

$$u_{3,1} = \frac{u_{4,0} + u_{2,0}}{2} = \frac{-0.951057 + 0.587785}{2} = -0.181636$$

$$u_{4,1} = \frac{u_{5,0} + u_{3,0}}{2} = \frac{0 - 0.587785}{2} = -0.293893$$

elde edilir.

İkinci adımda $j = 1$ için Richardson Yöntemi $u_{i,j+1} = (u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}) - u_{i,j-1}$ kullanılır.

$$u_{1,2} = (u_{2,1} - 2u_{1,1} + u_{0,1}) + u_{1,0} = (0.181636 - 2(0.293893) + 0) + 0.951057 = 0.544907$$

$$u_{2,2} = (u_{3,1} - 2u_{2,1} + u_{1,1}) + u_{2,0} = (-0.181636 - 2(0.181636) + 0.293893) + 0.587785 = 0.336770$$

$$u_{3,2} = (u_{4,1} - 2u_{3,1} + u_{2,1}) + u_{3,0} = (-0.293893 - 2(-0.181636) + 0.181636) - 0.587785 = -0.336770$$

$$u_{4,2} = (u_{5,1} - 2u_{4,1} + u_{3,1}) + u_{4,0} = (0 - 2(-0.293893) - 0.181636) - 0.951057 = -0.544907$$

elde edilir. Diğer adımlar için aynı yöntemle devam edilerek çizelge (3.2)'deki sonuçlar elde edilir.

Çizelge 3.2 Richardson Yöntemi ile ilgili örneğin sonuçları

	$x_1=0$	$x_2=0.20$	$x_3=0.40$	$x_4=0.60$	$x_5=0.80$	$x_6=1.00$
$t_1=0.00$	0.00	0.951057	0.587785	-0.587785	-0.951057	0.00
$t_2=0.02$	0.00	0.293893	0.181636	-0.181636	-0.293893	0.00
$t_3=0.04$	0.00	0.544907	0.336770	-0.336770	-0.544907	0.00
$t_4=0.06$	0.00	-0.459151	-0.283767	0.283767	0.459151	0.00
$t_5=0.08$	0.00	1.179442	0.055380	-0.055380	-1.179442	0.00
$t_6=0.10$	0.00	-2.762655	1.344513	-1.344513	2.762655	0.00
$t_7=0.12$	0.00	8.049265	-6.704709	6.704709	-8.049265	0.00
$t_8=0.14$	0.00	-25.565894	29.507905	-29.507905	25.565894	0.00
$t_9=0.16$	0.00	88.688958	-120.794318	120.794318	-88.688958	0.00
$t_{10}=0.18$	0.00	-323.738128	480.579817	-480.579817	323.738128	0.00
$t_{11}=0.20$	0.00	1216.745031	-1886.271897	1886.271897	-1216.745031	0.00

Çizelge 3.2'deki düzensiz değişimin nedeni Bölüm 5'te incelenecektir.

3.3 Dufort-Frankel Yöntemi

Bu yöntemde, Richardson Yöntemi'nde elde edilen (3.7) denkleminde $u_{i,j}$ 'nin t için ortalama değeri

$$u_{i,j} = \frac{u_{i,j+1} + u_{i,j-1}}{2} + O(k^2) \quad (3.8)$$

alınarak elde edilir. Richardson Yöntemi'nde

$$\frac{1}{2k}(u_{i,j+1} - u_{i,j-1}) = 2 \frac{c}{h^2}(u_{i+1,j} - 2u_{ij} + ru_{i-1,j})$$

elde edilmişti. Buradan

$$\frac{1}{2k}(u_{i,j+1} - u_{i,j-1}) = 2 \frac{c}{h^2}(u_{i+1,j} - 2(\frac{u_{ij+1} + u_{ij-1}}{2}) + ru_{i-1,j}) \quad (3.9)$$

elde edilir. $r = \frac{ck}{h^2}$ için (3.9) denklemi

$$u_{i,j+1} - u_{i,j-1} = 2ru_{i+1,j} - 2ru_{ij+1} - 2ru_{ij-1} + 2ru_{i-1,j} \quad (3.10)$$

şeklinde yazılır.

$$(1+2r)u_{ij+1} - (1-2r)u_{i,j-1} - 2ru_{i+1,j} - 2ru_{i-1,j} = 0 \quad (3.11)$$

elde edilir. (3.11) denklemini $1+2r$ ile bölünürse

$$u_{i,j+1} = \left(\frac{1-2r}{1+2r}\right)u_{i,j-1} + \frac{2r}{1+2r}u_{i+1,j} + \frac{2r}{1+2r}u_{i-1,j} \quad (3.12)$$

denklemini elde edilir.

Örnek

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < 0.10$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0 \quad 0 \leq t \leq 0.10$$

$$u(x,0) = \sin(\pi x) \quad 0 \leq x \leq 1$$

şeklinde başlangıç ve sınır koşulları verilen ısı denkleminin Dufort-Frankel Yöntemi ile nümerik çözümü aşağıdaki şekildedir. Eğer $h=0.2$ ve $k=0.01$ olarak alınırsa $r=0.25$ sonucu çıkar.

Sınır koşulundan $u_{0,0} = u(0,0) = 0$ ve $u_{5,0} = u(1,0) = 0$ 'dır.

Başlangıç koşulu $u(x,0) = \sin(\pi x)$ $0 \leq x \leq 1$ olmak üzere,

$$u_{1,0} = u(0.2,0) = \sin(\pi(0.2)) = 0.587785$$

$$u_{2,0} = u(0.4,0) = \sin(\pi(0.4)) = 0.951057$$

$$u_{3,0} = u(0.6,0) = \sin(\pi(0.6)) = 0.951057$$

$$u_{4,0} = u(0.8,0) = \sin(\pi(0.8)) = 0.587785$$

elde edilir.

İlk adımda $j=0$ için $i=1,...,4$ olmak üzere Euler Yöntemi kullanılır. $r=0.25$ olduğundan Euler Yöntemi $u_{i,j+1} = 0.25u_{i+1,j} + 0.50u_{ij} + 0.25u_{i-1,j}$ şeklindedir. $i=1,...,4$ olmak üzere,

$$u_{1,1} = 0.25(u_{2,0} + u_{0,0}) + 0.50u_{1,0} = 0.25(0.951057 + 0) + 0.5(0.587785) = 0.531657$$

$$u_{2,1} = 0.25(u_{3,0} + u_{1,0}) + 0.50u_{2,0} = 0.25(0.951057 + 0.587785) + 0.5(0.951057) = 0.860239$$

$$u_{3,1} = 0.25(u_{4,0} + u_{2,0}) + 0.50u_{3,0} = 0.25(0.587785 + 0.951057) + 0.5(0.951057) = 0.860239$$

$$u_{4,1} = 0.25(u_{5,0} + u_{3,0}) + 0.50u_{4,0} = 0.25(0 + 0.951057) + 0.5(0.587785) = 0.531657$$

elde edilir.

İkinci adımda $j = 1$ için $i = 1, \dots, 4$ olmak üzere Dufort-Frankel Yöntemi

$$u_{i,j+1} = \left(\frac{1-2r}{1+2r}\right)u_{i,j-1} + \frac{2r}{1+2r}u_{i+1,j} + \frac{2r}{1+2r}u_{i-1,j} \text{ kullanılır.}$$

$$u_{1,2} = \frac{1}{3}(u_{1,0} + u_{2,1} + u_{0,1}) = \frac{1}{3}(0.587785 + 0.860239 + 0) = 0.482675$$

$$u_{2,2} = \frac{1}{3}(u_{2,0} + u_{3,1} + u_{1,1}) = \frac{1}{3}(0.951057 + 0.860239 + 0.531657) = 0.780984$$

$$u_{3,2} = \frac{1}{3}(u_{3,0} + u_{4,1} + u_{2,1}) = \frac{1}{3}(0.951057 + 0.531657 + 0.860239) = 0.780984$$

$$u_{4,2} = \frac{1}{3}(u_{4,0} + u_{5,1} + u_{3,1}) = \frac{1}{3}(0.587785 + 0 + 0.860239) = 0.482675$$

elde edilir. Diğer adımlar için aynı yöntemle devam edilerek çözüldüğünde çizelge (3.3)'deki sonuçlar elde edilir.

Çizelge 3.3 Dufort-Frankel Yöntemi ile ilgili örneğin sonuçları

	$x_1 = 0.00$	$x_2 = 0.20$	$x_3 = 0.40$	$x_4 = 0.60$	$x_5 = 0.80$	$x_6 = 1.00$
$t_1 = 0.00$	0.000000	0.587785	0.951057	0.951057	0.587785	0.000000
$t_2 = 0.01$	0.000000	0.531657	0.860239	0.860239	0.531657	0.000000
$t_3 = 0.02$	0.000000	0.482675	0.780984	0.780984	0.482675	0.000000
$t_4 = 0.03$	0.000000	0.437547	0.707966	0.707966	0.437547	0.000000
$t_5 = 0.04$	0.000000	0.396880	0.642166	0.642166	0.396880	0.000000
$t_6 = 0.05$	0.000000	0.359904	0.582337	0.582337	0.359904	0.000000
$t_7 = 0.06$	0.000000	0.326406	0.528136	0.528136	0.326406	0.000000
$t_8 = 0.07$	0.000000	0.296013	0.478960	0.478960	0.296013	0.000000
$t_9 = 0.08$	0.000000	0.268455	0.434370	0.434370	0.268455	0.000000
$t_{10} = 0.09$	0.000000	0.244275	0.393928	0.393928	0.244275	0.000000
$t_{11} = 0.10$	0.000000	0.220794	0.357524	0.357524	0.220794	0.000000

3.4 Crank-Nicholson Yöntemi

Bu yöntemde,

$$c \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}, \quad 0 < x < a, \quad t > 0$$

ısı denkleminin karşılık gelen t ve $t+1$ gibi iki noktada hesaplanan merkezi farkların ortalaması olan

$$\begin{aligned} & \frac{c}{2} \left[\frac{u(x+h, t) - 2u(x, t) + u(x-h, t)}{h^2} + \frac{u(x+h, t+k) - 2u(x, t+k) + u(x-h, t+k)}{h^2} \right] \\ &= \frac{1}{k} [u(x, t+k) - u(x, t)] \end{aligned} \quad (3.13)$$

şeklindeki fark denklemini kullanılır. Eğer $r = \frac{ck}{h^2}$ ve

$$u(x, t) = u_{ij},$$

$$u(x+h, t) = u_{i+1, j},$$

$$u(x-h, t) = u_{i-1, j},$$

$$u(x, t+k) = u_{i, j+1},$$

$$u(x+h, t+k) = u_{i+1, j+1},$$

$$u(x-h, t+k) = u_{i-1, j+1},$$

olarak alınırsa (3.13) fark denklemi

$$\frac{1}{2}r(u_{i+1, j} - 2u_{ij} + u_{i-1, j} + u_{i+1, j+1} - 2u_{ij+1} + u_{i-1, j+1}) = u_{i, j+1} - u_{i, j} \quad (3.14)$$

şeklinde yazılır. Denklem (3.14)'ten

$$ru_{i+1, j} + (2-2r)u_{ij} + ru_{i-1, j} + ru_{i+1, j+1} - (2+2r)u_{ij+1} + ru_{i-1, j+1} = 0 \quad (3.15)$$

elde edilir. Denklem (3.15)'ten de

$$ru_{i+1, j} + 2(1-r)u_{ij} + ru_{i-1, j} = -ru_{i+1, j+1} - ru_{i-1, j+1} + 2(1+r)u_{i, j+1} \quad (3.16)$$

elde edilir. Denklem (3.16)'nın her tarafı $\frac{1}{r}$ ile çarpılırsa

$$u_{i+1, j} + 2\left(\frac{1-r}{r}\right)u_{ij} + u_{i-1, j} = -u_{i+1, j+1} - u_{i-1, j+1} + 2\left(\frac{1+r}{r}\right)u_{i, j+1} \quad (3.17)$$

elde edilir. Denklem (3.17)'de $\alpha = 2\left(1+\frac{1}{r}\right)$, $\beta = 2\left(1-\frac{1}{r}\right)$ olarak alınırsa ve $m, n \in \mathbb{Z}^+$ için

$i = 0, 1, \dots, n-1$ ve $j = 0, 1, \dots, m-1$ olmak üzere

$$u_{i+1, j} - \beta u_{ij} + u_{i-1, j} = -u_{i+1, j+1} - u_{i-1, j+1} + \alpha u_{i, j+1} \quad (3.18)$$

elde edilir. (3.18) denkleminde Crank-Nicholson denklemi denir. Her bir $i = 0, 1, \dots, n-1$ için Crank-Nicholson denkleminin j . fark denkleminin seçilmesiyle $u_{i, j+1}$ bilinmeyenine göre $(n-1)$ bilinmeyenli $(n-1)$ denklemden oluşan bir lineer denklemler sistemi elde edilir.

Başlangıçta verilen sınır koşullarından $i = 0$ ve $i = n$ için $u_{i, j+1}$ değeri bilinir. Örneğin $n = 5$ için $(j+1)$. zaman doğrusu üzerinde u 'nun yaklaşık değerini belirlemek için kullanılacak lineer denklem sistemi

$$u_{2,j} - \beta u_{1,j} + u_{0,j} = -u_{2,j+1} - u_{0,j+1} + \alpha u_{1,j+1}$$

$$u_{3,j} - \beta u_{2,j} + u_{1,j} = -u_{3,j+1} - u_{1,j+1} + \alpha u_{2,j+1}$$

$$u_{4,j} - \beta u_{3,j} + u_{2,j} = -u_{4,j+1} - u_{2,j+1} + \alpha u_{3,j+1}$$

$$u_{5,j} - \beta u_{4,j} + u_{3,j} = -u_{5,j+1} - u_{3,j+1} + \alpha u_{4,j+1}$$

şeklindedir. Buradan

$$b_1 = u_{2,j} - \beta u_{1,j} + u_{0,j} ,$$

$$b_2 = u_{3,j} - \beta u_{2,j} + u_{1,j} ,$$

$$b_3 = u_{4,j} - \beta u_{3,j} + u_{2,j} ,$$

$$b_4 = u_{5,j} - \beta u_{4,j} + u_{3,j} ,$$

ile

$$-u_{2,j+1} - u_{0,j+1} + \alpha u_{1,j+1} = b_1$$

$$-u_{3,j+1} - u_{1,j+1} + \alpha u_{2,j+1} = b_2$$

$$-u_{4,j+1} - u_{2,j+1} + \alpha u_{3,j+1} = b_3$$

$$-u_{5,j+1} - u_{3,j+1} + \alpha u_{4,j+1} = b_4 \quad \text{elde edilir.}$$

Böylece $AX = B$,

$$\begin{pmatrix} \alpha & -1 & 0 & 0 \\ -1 & \alpha & -1 & 0 \\ 0 & -1 & \alpha & -1 \\ 0 & 0 & -1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1,j+1} \\ u_{2,j+1} \\ u_{3,j+1} \\ u_{4,j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$$

şeklinde lineer denklem sistemi elde edilir.

Örnek

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < 0.10$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0 \quad 0 \leq t \leq 0.10$$

$$u(x, 0) = \sin(\pi x) + \sin(3\pi x) \quad 0 \leq x \leq 1$$

şeklinde başlangıç ve sınır koşulları verilen ısı denkleminin Crank-Nicholson Yöntemi ile nümerik çözümü aşağıdaki şekildedir. Eğer $h=0.1$ ve $k=0.01$ olarak alınırsa $r=0.01$ sonucu çıkar.

Sınır koşulundan $u_{0,0} = u(0, 0) = 0$ ve $u_{5,0} = u(1, 0) = 0$ 'dır.

Başlangıç koşulu $u(x, 0) = \sin(\pi x) + \sin(3\pi x) \quad 0 \leq x \leq 1$ olmak üzere,

$$u_{1,0} = u(0.1, 0) = \sin(\pi(0.1)) + \sin(3\pi(0.1)) = 1.1180$$

$$u_{2,0} = u(0.2, 0) = \sin(\pi(0.2)) + \sin(3\pi(0.2)) = 1.5388$$

$$u_{3,0} = u(0.3, 0) = \sin(\pi(0.3)) + \sin(3\pi(0.3)) = 1.1180$$

$$u_{4,0} = u(0.4, 0) = \sin(\pi(0.4)) + \sin(3\pi(0.4)) = 0.3632$$

$$u_{5,0} = u(0.5, 0) = \sin(\pi(0.5)) + \sin(3\pi(0.5)) = 0.0000$$

$$u_{6,0} = u(0.6, 0) = \sin(\pi(0.6)) + \sin(3\pi(0.6)) = 0.3632$$

$$u_{7,0} = u(0.7, 0) = \sin(\pi(0.7)) + \sin(3\pi(0.7)) = 1.1180$$

$$u_{8,0} = u(0.8, 0) = \sin(\pi(0.8)) + \sin(3\pi(0.8)) = 1.5388$$

$$u_{9,0} = u(0.9, 0) = \sin(\pi(0.9)) + \sin(3\pi(0.9)) = 1.1180$$

elde edilir.

$$\alpha = 2(1 + \frac{1}{r}) = 2(1 + \frac{1}{1}) = 2 \text{ ve } \beta = 2(1 - \frac{1}{r}) = 2(1 - \frac{1}{1}) = 0 \text{ elde edilir.}$$

Buradan $j = 0$ için $i = 1, \dots, 10$ olarak alınırsa

$$-u_{0,1} + \alpha u_{1,1} - u_{2,1} = u_{2,0} - \beta u_{1,0} + u_{0,0}$$

$$-u_{1,1} + \alpha u_{2,1} - u_{3,1} = u_{3,0} - \beta u_{2,0} + u_{1,0}$$

$$-u_{2,1} + \alpha u_{3,1} - u_{4,1} = u_{4,0} - \beta u_{3,0} + u_{2,0}$$

$$-u_{3,1} + \alpha u_{4,1} - u_{5,1} = u_{5,0} - \beta u_{4,0} + u_{3,0}$$

$$-u_{4,1} + \alpha u_{5,1} - u_{6,1} = u_{6,0} - \beta u_{5,0} + u_{4,0}$$

$$-u_{5,1} + \alpha u_{6,1} - u_{7,1} = u_{7,0} - \beta u_{6,0} + u_{5,0}$$

$$-u_{6,1} + \alpha u_{7,1} - u_{8,1} = u_{8,0} - \beta u_{7,0} + u_{6,0}$$

$$-u_{7,1} + \alpha u_{8,1} - u_{9,1} = u_{9,0} - \beta u_{8,0} + u_{7,0}$$

$$-u_{8,1} + \alpha u_{9,1} - u_{10,1} = u_{10,0} - \beta u_{9,0} + u_{8,0}$$

denklem sistemi elde edilir.

$$0 + 4u_{1,1} - u_{2,1} = 1.5388$$

$$-u_{1,1} + \alpha u_{2,1} - u_{3,1} = 1.1180 + 1.1180 = 2.2360$$

$$-u_{2,1} + 4u_{3,1} - u_{4,1} = 0.3632 + 1.5388 = 1.9020$$

$$-u_{3,1} + 4u_{4,1} - u_{5,1} = 0 + 1.1180 = 1.1180$$

$$-u_{4,1} + 4u_{5,1} - u_{6,1} = 0.3632 + 0.3632 = 0.7264$$

$$-u_{5,1} + 4u_{6,1} - u_{7,1} = 1.1180 + 0 = 1.1180$$

$$-u_{6,1} + 4u_{7,1} - u_{8,1} = 1.5388 + 0.3632 = 1.9020$$

$$-u_{7,1} + 4u_{8,1} - u_{9,1} = 1.1180 + 1.1180 = 2.2360$$

$$-u_{8,1} + 4u_{9,1} + 0 = 0 + 1.5388 = 1.5388$$

elde edilir. Bu dokuz bilinmeyenli dokuz denklemden oluşan bir lineer denklem sistemidir.

Bu denklem sistemi matris formunda

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \\ u_{3,1} \\ u_{4,1} \\ u_{5,1} \\ u_{6,1} \\ u_{7,1} \\ u_{8,1} \\ u_{9,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5388 \\ 2.2360 \\ 1.9020 \\ 1.1180 \\ 0.7264 \\ 1.1180 \\ 1.9020 \\ 2.2360 \\ 1.5388 \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılır ve çözülürse ilk adım için

$$u_{1,1} = 0.6169$$

$$u_{2,1} = 0.9287$$

$$u_{3,1} = 0.8621$$

$$u_{4,1} = 0.6176$$

$$u_{5,1} = 0.4904$$

$$u_{6,1} = 0.6176$$

$$u_{7,1} = 0.8621$$

$$u_{8,1} = 0.9287$$

$$u_{9,1} = 0.6169$$

olarak bulunur. Diğer adımlar için aynı yöntemle devam edilerek elde edilen lineer denklem sistemleri de çözülerek çizelge (3.4)'teki sonuçlar elde edilir.

Çizelge 3.4 Crank-Nicholson Yöntemi ile ilgili örneğin sonuçları

	$x_2 = 0.1$	$x_3 = 0.2$	$x_4 = 0.3$	$x_5 = 0.4$	$x_6 = 0.5$	$x_7 = 0.6$	$x_8 = 0.7$	$x_9 = 0.8$	$x_{10} = 0.9$
$t_1 = 0.00$	1.1180	1.5388	1.1180	0.3632	0.0000	0.3632	1.1180	1.5388	1.1180
$t_2 = 0.01$	0.6169	0.9287	0.8621	0.6176	0.4904	0.6176	0.8621	0.9287	0.6169
$t_3 = 0.02$	0.3941	0.6479	0.7186	0.6800	0.6488	0.6800	0.7186	0.6479	0.3941
$t_4 = 0.03$	0.2886	0.5066	0.6252	0.6664	0.6732	0.6664	0.6252	0.5066	0.2886
$t_5 = 0.04$	0.2331	0.4257	0.5560	0.6250	0.6457	0.6250	0.5560	0.4257	0.2331
$t_6 = 0.05$	0.1994	0.3720	0.4995	0.5754	0.6002	0.5754	0.4995	0.3720	0.1994
$t_7 = 0.06$	0.1758	0.3314	0.4510	0.5253	0.5503	0.5253	0.4510	0.3314	0.1758
$t_8 = 0.07$	0.1574	0.2981	0.4081	0.4777	0.5015	0.4777	0.4081	0.2981	0.1574
$t_9 = 0.08$	0.1418	0.2693	0.3697	0.4338	0.4558	0.4338	0.3697	0.2693	0.1418
$t_{10} = 0.09$	0.1282	0.2437	0.3351	0.3935	0.4137	0.3935	0.3351	0.2437	0.1282
$t_{11} = 0.10$	0.1161	0.2208	0.3037	0.3569	0.3752	0.3569	0.3037	0.2208	0.1161

4. NÜMERİK TUTARLILIK

Elde edilen nümerik yöntem eğer problemi verirse yani, $h \rightarrow 0$ ve $k \rightarrow 0$ iken problem tekrar elde edilirse, o zaman elde edilen nümerik yöntem tutarlıdır denir. Aksi halde yöntem tutarsızdır. Bunun için,

$$u_{i,j+1} = u_{i,j} + k \frac{\partial u_{i,j}}{\partial t} + \frac{k^2}{2} \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial t^2} + O(k^3) \quad (4.1)$$

$$u_{i,j-1} = u_{i,j} - k \frac{\partial u_{i,j}}{\partial t} + \frac{k^2}{2} \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial t^2} + O(k^3) \quad (4.2)$$

$$u_{i+1,j} = u_{i,j} + h \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} + \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial x^3} + O(h^4) \quad (4.3)$$

$$u_{i-1,j} = u_{i,j} - h \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} - \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial x^3} + O(h^4) \quad (4.4)$$

şeklinde Taylor açılımından yararlanılır.

4.1 Euler Yöntemi'nin Tutarlılığı

Euler Yöntemi,

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{ij}}{k} = c \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2}$$

şeklindedir. Denklemdaki ifadelerin yerine (4.1), (4.2), (4.3), (4.4)'teki Taylor açılımları yazılırsa,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{k} (u_{i,j} + k \frac{\partial u_{i,j}}{\partial t} + \frac{k^2}{2} \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial t^2} + O(k^3) - u_{i,j}) \\ &= \frac{c}{h^2} (u_{i,j} + h \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} + \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial x^3} + O(h^4) - 2u_{i,j} \\ &+ u_{i,j} - h \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} - \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial x^3} + O(h^4)) \end{aligned} \quad (4.5)$$

elde edilir. Denklem (4.5)'ten

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial t} + \frac{k}{2} \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial t^2} = c \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} + O(k^4) \quad (4.6)$$

elde edilir. Denklem (4.6)'dan $h \rightarrow 0$ ve $k \rightarrow 0$ iken denklem

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial t} = c \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} \text{ yani } u_t = cu_{xx} \text{ denklemini verir. Sonuç olarak Euler Yöntemi tutarlıdır.}$$

4.2 Richardson Yöntemi'nin Tutarlılığı

Richardson Yöntemi,

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{ij-1}}{2k} = c \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2}$$

şeklindedir. Denklemdeki ifadelerin yerine (4.1), (4.2), (4.3), (4.4)'teki Taylor açılımları yazılırsa,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2k} (u_{i,j} + k \frac{\partial u_{i,j}}{\partial t} + \frac{k^2}{2} \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial t^2} + O(k^3)) - u_{i,j} + k \frac{\partial u_{i,j}}{\partial t} - \frac{k^2}{2} \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial t^2} + O(k^3)) \\ &= \frac{c}{h^2} (u_{i,j} + h \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} + \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial x^3} + O(h^4)) - 2u_{i,j} \\ &+ u_{i,j} - h \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} - \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial x^3} + O(h^4)) \end{aligned} \quad (4.7)$$

elde edilir. Denklem (4.7)'den

$$\frac{1}{2k} (2k \frac{\partial u_{i,j}}{\partial t}) + O(k^3) = \frac{c}{h^2} (h^2 \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2}) + O(h^4) \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial t} + O(k^3) = c \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} + O(h^4) \quad (4.9)$$

elde edilir. Denklem (4.9)'dan $h \rightarrow 0$ ve $k \rightarrow 0$ iken denklem

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial t} = c \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} \text{ yani } u_t = cu_{xx} \text{ denklemini verir. Sonuç olarak Richardson Yöntemi tutarlıdır.}$$

4.3 Dufort-Frankel Yöntemi'nin Tutarlılığı

Dufort-Frankel Yöntemi,

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{ij-1}}{2k} = c \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j+1} - u_{i,j-1} + u_{i-1,j}}{h^2}$$

şeklindedir. Denklemdaki ifadelerin yerine (4.1), (4.2), (4.3), (4.4)'teki Taylor açılımları yazılırsa,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2k} (u_{i,j} + k \frac{\partial u_{i,j}}{\partial t} + \frac{k^2}{2} \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial t^2} + O(k^3)) - u_{i,j} + k \frac{\partial u_{i,j}}{\partial t} - \frac{k^2}{2} \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial t^2} + O(k^3)) \\ &= \frac{c}{h^2} (u_{i,j} + h \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} + \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial x^3} + O(h^4)) - u_{i,j} + k \frac{\partial u_{i,j}}{\partial t} - \frac{k^2}{2} \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial t^2} + O(k^3) \\ &+ u_{i,j} - h \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} - \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial x^3} + O(h^4) - u_{i,j} + k \frac{\partial u_{i,j}}{\partial t} - \frac{k^2}{2} \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial t^2} + O(k^3)) \end{aligned} \quad (4.10)$$

elde edilir. Denklem (4.10)'dan

$$\frac{1}{2k} (2k \frac{\partial u_{i,j}}{\partial t} + O(k^3)) = \frac{c}{h^2} (h^2 \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} + O(h^4)) - k^2 \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial t^2} + O(k^3) \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial t} - c \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} = -\frac{k^2}{h^2} \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial t^2} + O(h^2) + O(k^2) + O(k^3/h^2) \quad (4.12)$$

elde edilir. $\frac{k}{h} = s$ ($s \Delta t$) ve denklem (4.12)'den $h \rightarrow 0$ ve $k \rightarrow 0$ iken denklem

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial t} = c \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} - s^2 \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial t^2} \text{ yani } u_t = cu_{xx} - s^2 u_{tt} \text{ denklemini verir. Sonuç olarak Dufort-Frankel}$$

Yöntemi tutarlı değildir.

4.4 Crank- Nicholson Yöntemi'nin Tutarlılığı

Crank-Nicholson Yöntemi,

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{ij}}{k} = \frac{c}{2h^2} (u_{i+1,j+1} + u_{i+1,j} - 2(u_{i,j+1} + u_{i,j}) + u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j}) \quad (4.13)$$

şeklindedir. Bu denklemin terimlerine karşılık gelen Taylor açılımları yazılırsa

$$\begin{aligned}
\frac{u_{i,j+1} - u_{ij}}{k} &= (u_{i,j} + k \frac{\partial u_{i,j}}{\partial t} + \frac{k^2}{2} \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial t^2} + O(k^3) - u_{i,j}) \\
&= \frac{\partial u_{i,j}}{\partial t} + \frac{k}{2} \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial t^2} + O(k^2)
\end{aligned} \tag{4.14}$$

sonucu elde edilir.

$$\begin{aligned}
&u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1} = \\
&u_{i,j} + h \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} + k \frac{\partial u_{i,j}}{\partial t} + \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} + hk \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x \partial t} + \frac{1}{2} k^2 \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial t^2} + O(h^3) + O(k^3) \\
&+ u_{i,j} - h \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} + k \frac{\partial u_{i,j}}{\partial t} + \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} - hk \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x \partial t} + \frac{1}{2} k^2 \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial t^2} + O(h^3) + O(k^3) \\
&- 2(u_{i,j} + k \frac{\partial u_{i,j}}{\partial t} + k^2 \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial t^2} + O(k^3)) \\
&= h^2 \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} + O(h^3)
\end{aligned} \tag{4.15}$$

sonucu elde edilir.

$$\begin{aligned}
&u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j} = \\
&u_{i,j} + h \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} + \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial x^3} + O(h^4) - 2u_{i,j} + u_{i,j} - h \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} - \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial x^3} + O(h^4) \\
&= h^2 \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} + O(h^4)
\end{aligned} \tag{4.16}$$

sonucu elde edilir.

Denklem (4.14), (4.15) ve (4.16), denklem (4.13)'te yerine yazılırsa

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial t} + \frac{k}{2} \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial t^2} + O(k^2) = \frac{c}{2h^2} (h^2 \frac{\partial^2 u_{i,j+1}}{\partial x^2} + h^2 \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} + O(h^4)) \tag{4.17}$$

elde edilir. Denklem (4.17)'den

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial t} + \frac{k}{2} \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial t^2} + O(k^2) = c \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} + O(h^2) \tag{4.18}$$

elde edilir. Denklem (4.18)'den $h \rightarrow 0$ ve $k \rightarrow 0$ iken denklem

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial t} = c \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} \text{ yani } u_t = cu_{xx} \text{ denklemini verir. Sonuç olarak Crank-Nicholson Yöntemi}$$

tutarlıdır.

5. NÜMERİK KARARLILIK

Nümerik yöntemlerle yapılan hesaplamalarda, hesaplamanın herhangi bir aşamasında hataların artmadığı, ancak hesaplama süresince azalıyorsa nümerik yöntem kararlıdır denir. Elde edilen nümerik yöntemlerin kararlılıklarını incelemek için Fourier ve matris metodu şeklinde iki farklı yöntem vardır. Bu bölümde parabolik diferansiyel denklemin nümerik çözümlerinin kararlılığı Fourier metoduyla incelenecektir.

Fourier metodunda başlıca gösterim nümerik yöntemin lineer olmasıdır ve böylece nümerik yöntemin

$$u_{p,q} = \lambda^q e^{i\alpha p h} \quad (5.1)$$

şeklinde çözümleri vardır*. Eğer $|\lambda| \leq 1$ ise nümerik yöntem kararlıdır, eğer $|\lambda| > 1$ ise nümerik yöntem kararsız yapıdadır.

5.1 Euler Yöntemi'nin Kararlılığı

Euler Yöntemi,

$$u_{p,q+1} = u_{p,q} + r(u_{p-1,q} - 2u_{p,q} + u_{p+1,q}) \quad (5.2)$$

şeklindedir. (5.1)'deki çözüm, denklem (5.2)'de yerine yazılırsa

$$\lambda^{q+1} e^{i\alpha p h} = \lambda^q e^{i\alpha p h} + r(\lambda^q e^{i\alpha(p-1)h} - 2\lambda^q e^{i\alpha p h} + \lambda^q e^{i\alpha(p+1)h}) \quad (5.3)$$

elde edilir. Denklem (5.3)'ün her iki tarafı $(\lambda^q e^{i\alpha p h})^{-1}$ ile çarpılırsa

$$\lambda = 1 + r(e^{-i\alpha h} - 2 + e^{i\alpha h}) = 1 + 2r(\cos \alpha h - 1) = 1 - 4r \sin^2 \alpha \frac{h}{2} \quad (5.4)$$

elde edilir. Denklem (5.4)'ten λ 'nın reel değeri ve $\lambda \leq 1$ olduğu açıktır. Böylece Euler Yöntemi'nin kararl olmas için $\lambda \geq -1$ de olması gerekir. Bu ise $\forall \alpha$

$$\text{in } 1 - 4r \sin^2 \alpha \frac{h}{2} \geq -1 \Rightarrow \frac{1}{2 \sin^2 \alpha \frac{h}{2}} \geq r \text{ olmasını gerektirir.}$$

* Peiro J., Sherwin S., (2005), "Finite Difference, Finite Element and Finite Volume Methods for Partial Differential Equations", Imperial College, London

Bu koşul ise ancak $r \leq \frac{1}{2}$ olmasıyla sağlanır. Böylece Euler Yöntemi'nin kararlı olması için $r \leq \frac{1}{2}$ olması gerekir.

Örnek

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < 0.20$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0 \quad 0 \leq t \leq 0.20$$

$$u(x,0) = 4x - x^2 \quad 0 \leq x \leq 1$$

şeklinde başlangıç ve sınır koşulları verilen ısı denkleminin Euler Yöntemi ile nümerik çözümü aşağıdaki şekildedir.

Eğer $h = 0.2$ ve $k = \frac{1}{30}$ olarak alınırsa $r = 0.833333$ sonucu çıkar. Bu sonuç Euler Yöntemi olarak bilinen denklem (3.5)'te yerine yazılırsa

$$u_{i,j+1} = -0.666665u_{i,j} + 0.833333(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}), \quad i = 0, \dots, 5, \quad j = 0, \dots, 10$$

elde edilir. Bu denklemden elde edilen sonuçlar çizelge (5.1)'de verilmiştir.

Çizelge 5.1 Euler Yöntemi ile ilgili örneğin $r = 0.833333$ için sonuçları

	$x_1 = 0.00$	$x_2 = 0.20$	$x_3 = 0.40$	$x_4 = 0.60$	$x_5 = 0.80$	$x_6 = 1.00$
$t_1 = 0.000000$	0.000000	0.640000	0.960000	0.960000	0.640000	0.000000
$t_2 = 0.033333$	0.000000	0.373333	0.693333	0.693333	0.373333	0.000000
$t_3 = 0.066667$	0.000000	0.328889	0.426667	0.426667	0.328889	0.000000
$t_4 = 0.100000$	0.000000	0.136296	0.345185	0.345185	0.136296	0.000000
$t_5 = 0.133333$	0.000000	0.196790	0.171111	0.171111	0.196790	0.000000
$t_6 = 0.166667$	0.000000	0.011399	0.192510	0.192510	0.011399	0.000000
$t_7 = 0.200000$	0.000000	0.152826	0.041584	0.041584	0.152826	0.000000
$t_8 = 0.233333$	0.000000	-0.067230	0.134286	0.134286	-0.067230	0.000000
$t_9 = 0.266667$	0.000000	0.156725	-0.033644	-0.033644	0.156725	0.000000
$t_{10} = 0.300000$	0.000000	-0.132520	0.124997	0.124997	-0.132520	0.000000
$t_{11} = 0.333333$	0.000000	0.192511	-0.089601	-0.089601	0.192511	0.000000

5.2 Richardson Yöntemi'nin Kararlılığı

Richardson Yöntemi,

$$u_{p,q+1} = u_{p,q-1} + 2r(u_{p+1,q} - 2u_{p,q} + u_{p-1,q}) \quad (5.5)$$

şeklindedir. (5.1)' deki çözüm, denklem (5.5)'te yerine yazılırsa

$$\lambda^{q+1} e^{i\alpha p h} = \lambda^{q-1} e^{i\alpha p h} + 2r(\lambda^q e^{i\alpha(p+1)h} - 2\lambda^q e^{i\alpha p h} + \lambda^q e^{i\alpha(p-1)h}) \quad (5.6)$$

elde edilir. Denklem (5.6)'nın her iki tarafı $(\lambda^q e^{i\alpha p h})^{-1}$ ile çarpılırsa

$$\lambda = \lambda^{-1} + 2r(e^{i\alpha h} - 2 + e^{-i\alpha h}) = \lambda^{-1} + 4r(\cos \alpha h - 1) = \lambda^{-1} - 8r \sin^2 \alpha \frac{h}{2} \quad (5.7)$$

elde edilir. Denklem (5.7)'den

$$\lambda = \lambda^{-1} - 8r \sin^2 \alpha \frac{h}{2} \quad (5.8)$$

sonucu elde edilir. Denklem (5.8)'den de

$$\lambda^2 + 8\lambda r \sin^2 \alpha \frac{h}{2} - 1 = 0 \quad (5.9)$$

elde edilir ve burada

$$\lambda = -4r \sin^2 \alpha \frac{h}{2} \pm \sqrt{1 + 16r^2 \sin^4 \alpha \frac{h}{2}} \quad (5.10)$$

bu denklemin bir çözümüdür. Açıktır ki her iki çözüm de reel değerlidir fakat sadece biri $|\lambda| < 1$ koşulunu sağlar. Böylece Richardson Yöntemi hiçbir zaman kararlı değildir.

5.3 Dufort-Frankel Yöntemi'nin Kararlılığı

Dufort-Frankel Yöntemi,

$$u_{p,q+1} = u_{p,q-1} + 2r(u_{p+1,q} - u_{p,q+1} - u_{p,q-1} + u_{p-1,q}) \quad (5.11)$$

şeklindedir. (5.1)' deki çözüm, denklem (5.11)'de yerine yazılırsa

$$\lambda^{q+1} e^{i\alpha p h} = \lambda^{q-1} e^{i\alpha p h} + 2r(\lambda^q e^{i\alpha(p+1)h} - \lambda^{q+1} e^{i\alpha p h} - \lambda^{q-1} e^{i\alpha p h} + \lambda^q e^{i\alpha(p-1)h}) \quad (5.12)$$

elde edilir. Denklem (5.12)'nin her iki tarafı $(\lambda^q e^{i\alpha p h})^{-1}$ ile çarpılırsa

$$\lambda = \lambda^{-1} + 2r(e^{i\alpha h} - \lambda - \lambda^{-1} + e^{-i\alpha h}) = -2r\lambda + (1-2r)\lambda^{-1} + 4r(\cos \alpha h) \quad (5.13)$$

elde edilir. Denklem (5.13)'ten

$$(1+2r)\lambda^2 - 4\lambda r(\cos \alpha h) - (1-2r) = 0 \quad (5.14)$$

elde edilir ve burada

$$\lambda = \frac{2r \cos \alpha h \pm \sqrt{1-4r^2 \sin^2 \alpha h}}{1+2r} \quad (5.15)$$

bu denklemin bir çözümüdür.

Eğer λ reel kök ise üçgen eşitsizliğinden

$$|\lambda| = \left| \frac{2r \cos \alpha h \pm \sqrt{1-4r^2 \sin^2 \alpha h}}{1+2r} \right| \leq \frac{|2r \cos \alpha h| + \sqrt{1-4r^2 \sin^2 \alpha h}}{1+2r} \leq \frac{2r+1}{1+2r} = 1$$

sonucu çıkar. Yani λ reel ise Dufort-Frankel Yöntemi kararlıdır.

Eğer λ kompleks kök ise $1-2r < 0$ 'dır ve

$$|\lambda|^2 = \frac{4r^2 \cos^2 \alpha h + 4r^2 \sin^2 \alpha h - 1}{(1+2r)^2} = \frac{4r^2 - 1}{(1+2r)^2} \leq \frac{2r-1}{1+2r} \leq 1$$

sonucu çıkar. Yani λ kompleks ise de Dufort-Frankel Yöntemi kararlıdır.

5.4 Crank-Nicholson Yöntemi'nin Kararlılığı

Crank-Nicholson Yöntemi,

$$u_{p,q+1} = u_{p,q} + \frac{r}{2}(u_{p+1,q+1} + u_{p+1,q} - 2(u_{p,q+1} + u_{p,q}) + u_{p-1,q+1} + u_{p-1,q}) \quad (5.16)$$

şeklindedir. (5.1)'deki çözüm, denklem (5.16)'da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \lambda^{q+1} e^{i\alpha p h} &= \lambda^q e^{i\alpha p h} + \frac{r}{2}(\lambda^{q+1} e^{i\alpha(p+1)h} + \lambda^q e^{i\alpha(p+1)h} \\ &\quad - 2(\lambda^{q+1} e^{i\alpha p h} + \lambda^q e^{i\alpha p h}) + \lambda^{q+1} e^{i\alpha(p-1)h} + \lambda^q e^{i\alpha(p-1)h}) \end{aligned} \quad (5.17)$$

elde edilir. Denklem (5.17)'nin her iki tarafı $(\lambda^q e^{i\alpha p h})^{-1}$ ile çarpılırsa

$$\lambda = 1 + \frac{r}{2}(\lambda e^{i\alpha h} + e^{i\alpha h} - 2(\lambda + 1) + \lambda e^{-i\alpha h} + e^{-i\alpha h}) \quad (5.18)$$

elde edilir. denklem (5.18)'den

$$\lambda = 1 + r(\lambda \cos \alpha h + \cos \alpha h - \lambda - 1) \quad (5.19)$$

elde edilir ve denklem (5.19)'dan

$$\lambda = \frac{1 - 2r \sin^2 \alpha \frac{h}{2}}{1 + 2r \sin^2 \alpha \frac{h}{2}} \quad (5.20)$$

elde edilir. Denklem (5.20)'den $|\lambda|$, h ve k 'nin seçimine bağlı kalmaksızın $|\lambda| < 1$ olduğu açıktır. Sonuç olarak Crank-Nicholson Yöntemi her durumda kararlıdır.

6. SONUÇ

Bu çalışmada parabolik kısmi diferansiyel denklemlerden ısı denklemi için dört farklı nümerik çözüm yöntemi sunuldu. Bu yöntemlerin tek tek tutarlılık ve kararlılıkları incelendi.

Yöntemlerden, Euler Yöntemi'nin tutarlı ve $r \leq \frac{1}{2}$ için kararlı diğer durumlarda ise kararsız olduğu görüldü. Richardson Yöntemi'nin tutarlı fakat $\forall r$ için kararsız olduğu görüldü. Dufort-Frankel Yöntemi ise tutarsız fakat kararlı olduğu görüldü. En son olarak incelenen Crank-Nicholson Yöntemi'nin tutarlı ve her durumda da kararlı olduğu görüldü.

KAYNAKLAR

- Cerit, C., (1998), “Matematik Analiz III”, İstanbul Teknik Üniversitesi, İstanbul.
- Everstine, G. L., (2006), “Numerical Solution of Partial Differential Equations”, George Washington University, Maryland.
- Fausett L. V., (1999), “Applied Numerical Analysis Using Matlab”, Englewood Cliffs, New Jersey.
- Lindsay K. A., (2003), “Numerical Solution of Partial Differential Equations” , University of Glasgow, Glasgow.
- Mattiews J. H., (1992), “Numerical Methods for Mathematics, Science, and Engineering”, Englewood Cliffs, New Jersey.
- Peiro J., Sherwin S., (2005), “Finite Difference, Finite Element and Finite Volume Methods for Partial Differential Equations” , Imperial College, London.
- Thomas J.W., (1995), “Numerical Partial Differential Equations (Finite Difference Methods)”, Springer-Verlag, Newyork.
- Tuncer T., (1992), “Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler”, Mimar Sinan Üniversitesi, İstanbul.

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi 01.03.1982

Doğum yeri Rize

Lise 1997-2000 Ümraniye Lisesi

Lisans 2001-2006 Yıldız Üniversitesi Fen-Edebiyat Fak.
Matematik Bölümü

Yüksek Lisans 2006- Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik. Anabilim Dalı, Matematik Programı