

T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KÜMELER ÜZERİNDEKİ HİPERYAPILAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mehmet Emin PEKOK

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Abdullah Fatih ÖZCAN

OCAK 2024

**T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

KÜMELER ÜZERİNDEKİ HİPERYAPILAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mehmet Emin PEKOK

(36203614035)

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Abdullah Fatih ÖZCAN

Eş Danışmanı: Doç.Dr. Nurettin BAĞIRMAZ

OCAK 2024

İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ

KÜMELER ÜZERİNDEKİ HİPERYAPILAR

Tezi Hazırlayan: Mehmet Emin PEKOK

Yüksek Lisans Tezi

TEŞEKKÜR VE ÖNSÖZ

Bu tez çalıőmasının her aőamasında yardım, öneri, bilgi, tecrübe ve desteklerini esirgemededen beni her konuda yönlendiren, çok kıymetli danışman hocalarım Sayın Prof. Dr. A.Fatih ÖZCAN ve Sayın Doç.Dr. Nurettin BAĞIRMAZ'a, tüm hayatım boyunca olduğu gibi bu çalıőmalarım süresince de benden her türlü desteklerini esirgemeyen meslektaőım Hasan KAN'a, aileme, eőim Derya'ya, kızlarım Ezgi Sena ve Defne'ye

teşekkür ederim.



ONUR SÖZÜ

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum “Kümeler Üzerindeki Hiperyapılar” başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığına ve yararlandığım bütün kaynakların hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Mehmet Emin PEKOK



İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR VE ÖNSÖZ.....	i
ONUR SÖZÜ.....	ii
İÇİNDEKİLER.....	iii
SEMBOLLER VE KISALTMALAR.....	iv
ÖZET.....	v
ABSTRACT.....	vi
1.GİRİŞ.....	1
2.TEMEL CEBİRSEL YAPILAR.....	3
2.1.Grup.....	3
2.2.Halka.....	7
2.3.Cisim.....	10
2.4.Modül.....	12
3.HİPERGRUPLAR.....	17
3.1.Hipergruplar.....	17
3.2.Hipergrupların Koseti.....	23
4.HİPERHALKALAR.....	25
4.1.Hiperhalkalar.....	25
4.2.Krasner Hiperhalkası.....	31
4.3.Çarpımsal Hiperhalkalar.....	32
5.HİPERCİSİM VE HİPERMODÜL.....	35
5.1.Hipercisim.....	35
5.2.Hipermodül.....	36
6.SONUÇ VE ÖNERİLER.....	38
KAYNAKÇA.....	39
ÖZGEÇMİŞ.....	41

SEMBOLLER VE KISALTMALAR

$P(H)$:H kümesinin tüm alt kümelerinin kümesidir.
$\text{Rad}(N)$:Bir idealin radikali
\circ	:Hiperişlem
$*$:İşlem
\mathbb{N}	:Doğal sayılar kümesi
\mathbb{Z}	:Tam sayılar kümesi
\mathbb{Q}	:Rasyonel Sayılar
\mathbb{R}	:Reel sayılar kümesi
\mathbb{R}^+	:Pozitif reel sayılar kümesi
\mathbb{R}^-	:Negatif reel sayılar kümesi
\mathbb{C}	:Kompleks Sayılar
\mathbb{D}	:Hipergrup
\mathbb{E}	:Hiperhalka
\mathbb{L}	:Hiperçisim
\mathbb{B}	:Hipermodül

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

KÜMELER ÜZERİNDEKİ HİPERYAPILAR

MEHMET EMİN PEKOK

İnönü Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

41+VI sayfa

2024

Danışman: Prof. Dr. Abdullah Fatih ÖZCAN

Temel cebirsel yapılar ve hiperyapılar birlikte ele alınmıştır. Cebirsel hiperyapılar, temel cebirsel yapıların genelleşmesidir. Temel cebirsel yapıda tanımlı bir işlem üzerinde iki elemanın işlemi yine bir eleman iken, cebirsel hiperyapılarda ise tanımlı bir işlem üzerinde iki elemanın işlemi boş olmayan bir kümedir. Temel cebirsel yapılarda grup, halka, cisim, modül kavramları ele alınmıştır. Hiperyapılarda ise hipergrup, hiperhalka, hipercisim ve hipermodül başlıkları anlatılmıştır. İlk bölümde konuyla ilgili giriş yapılmıştır. İkinci bölümde temel cebirsel yapılara yer verilmiştir. Üçüncü bölümde hipergrup kavramı örneklerle ve alt başlıklarla anlatılmıştır. Dördüncü bölümde hiperhalka kavramları tanımlanıp Krasner hiperhalkası, Çarpımsal Hiperhalkalar örneklerle anlatılmıştır. Beşinci bölümde ise hipercisim ve hipermodül başlıkları yer almıştır.

Anahtar Kelimeler: Hipergrup, Hiperhalkalar, Hipercisim, Hipermodül

ABSTRACT

Master Thesis

HYPERSTRUCTURES ON CLUSTERS

Mehmet Emin PEKOK

Inonu University

Graduate School of Nature and Applied Sciences

Department of Mathematics

41+VI pages

2024

Supervisor: Prof. Dr. Abdullah Fatih ÖZCAN

Basic algebraic structures and hyperstructures are discussed together. Algebraic hyperstructures are generalizations of basic algebraic structures. In basic algebraic structure, the operation of two elements is still an element on a defined operation, while in algebraic hyperstructures, the operation of two elements is a non-empty set on a defined operation. The concepts of group, ring, field and module are discussed in basic algebraic structures. Hypergroup, hyperring, hyperfield and hypermodule titles are explained in hyperstructures. In the first chapter, an introduction to the subject has been made. In the second part, basic algebraic structures are given. In the third chapter, the concept of hypergroup is explained with examples and subheadings. In the fourth chapter, hyperring concepts are introduced and Krasner hyperring and multiplicative hyperrings are explained with examples. In the fifth chapter, hyperfield and hypermodule titles are included.

Keywords: Hypergroup, Hyperrings, Hyperfield, Hypermodule.

1.GİRİŞ

Temel cebirsel yapılar (grup, halka, cisim, modül kavramları) hiperyapıların temelini oluşturur. Kümeler üzerinde tanımlanmış hiperyapıların neler olduğuna ve hiperyapıların ilgili olduğu alanların neler olduğuna dair araştırmalar yapılmıştır[1]. Cebirsel bir yapının hiperyapı olabilmesi için sağlaması gereken özellikleri tanımlanmış ve hiperyapılarla ilgili alt başlıklara yer verilmiştir. Hiperyapılar ise hipergrup, hiperhalka, hipercisim ve hipermodül vb. alt başlıklar ile incelenmiştir.

Hiperyapı teorisi ilk kez 1934'teki Sekizinci İskandinav Matematik Kongresi'nde F.Marty[1] tarafından tanıtılmıştır. F.Marty'nin tanımladığı hiperyapılara göre tanımlı bir işlem üzerindeki iki elemanın işlemi boş olmayan bir kümedir. F.Marty hipergruplarla ilgili; cebirsel fonksiyonlar, rasyonel kesirler vb. kavramlarını tanımlamıştır. F.Marty hiperyapıları tanımladıktan sonra hiperyapılar üzerine çeşitli araştırmalar yapılmıştır.

Hipergruplar, grupların genelleştirilmesidir ve bazı problemlerin çözümünde kullanılmıştır. Hipergruplar uygulamalı ve teorik matematiğin birçok alanında kullanılmıştır. Hipergrupların ilgili olduğu alanlar araştırılmış olup hipergrup teorisi aynı zamanda geometri, topoloji, kriptografi, olasılık teorisi, ekonomi, etnoloji, kaba kümeler teorisi vb. alanlarda kullanılmıştır [2, 3].

Hiperişlem kavramı ile hipergrupoid, yarı hipergrup (semihypergroup), kuazi hipergrup kavramları ve hipergrupta olması gereken şartlar belirtilmiştir[1]. Her grup bir hipergruptur ama her hipergrup bir grup olmayabilir[2]. Mittas tarafından ilk defa kanonik hipergruplar tanımlanmıştır[4]. Koskav ise ilk kez alt hipergrupları örneklerle vermiştir [5].

Hipergruplar ile ilgili yapılan araştırmalar artmış ve hipergrupların koseti tanımlanmıştır[6].

Novak [7] hiperhalka kavramını tanımlamış ve bir kümenin hiperhalka olabilmesi için sağlaması gereken şartları belirtmiştir. Hiperhalkalar ikinci işleme göre değişmeli olma özelliğine sahipse değişmeli hiperhalkalar olarak tanımlanır. Novak [7] alt hiperhalka ve hiperhalkanın hiperideali kavramlarını örneklerle vermiştir. Davvaz [8] ise iki hiperhalkanın, hiperhalka homomorfizmi olabilmesi için sağlaması gereken şartları belirtmiştir. Krasner [7]

tarafından Krasner hiperhalkaları tanımlanmıştır. Bu hiperhalkaların önemli bir bölümünü oluşturur.

Rosaria Rota [9] 1982 yılında çarpımsal hiperhalkaları özellikleriyle anlatmıştır. Bir hiperhalkanın çarpımsal hiperhalka olabilmesi için hangi şartları sağlaması gerektiği üzerinde durmuştur. Çarpımsal hiperhalkalara örnekler vermiştir. Çarpımsal hiperhalkalarda hiperişlem çarpma işlemidir.

Bir hiperyapının hipercisim ya da hipermodül olması için önce hiperhalka şartlarını sağlaması gerekir. Corsini [2] bir hiperyapının, hipercisim ve hipermodül belirtebilmesi için hangi özellikleri sağlaması üzerinde durmuştur. Alt hipercismi ve Krasner hipercismi tanımlarını vermiştir. Ayrıca hipercisimlere örnekler verilmiştir.

Corsini [2] hipermodül kavramını tanımladıktan sonra hipermodül ile ilgili araştırmalar artmıştır. Anvariye [10] tarafından asal alt hipermodül ve hipermodül homomorfizmi kavramları tanımlanmıştır.

Bu tezde ilk olarak temel cebirsel yapılar tanıtılmıştır. Temel cebirsel yapılar tanıtıldıktan sonra hiperyapılar sırasıyla anlatılmıştır. Hiperyapılar; hipergrup, hiperhalka, hipercisim, hipermodül başlıkları ile verilmiştir. İlk olarak hiperişlemin ne olduğu daha sonra ise hipergrupoid, yarı hipergrup, kısmi hipergrup kavramları tanıtılmıştır. Hem yarı hipergrup hem de kısmi hipergrup olan yapılara hipergrup denir. İki işlemli bir cebirsel yapı ilk işleme göre değişmeli hipergrup, ikinci işleme göre yarı hipergrup ve ikinci işlemin ilk işlem üzerinde soldan ve sağdan dağılma özelliğine sahipse hiperhalka adını alır. Birimli, sıfır bölensiz hiperhalkaya bölme hiperhalkası denir. Değişmeli bölme hiperhalkasına ise hipercisim denir. Halka üzerinde sol hipermodül olabilmesi için sağlanması gereken şartlar verilmiştir.

2. TEMEL CEBİRSEL YAPILAR

2.1. Grup

2.1.1. Tanım: Bir küme üzerinde bir veya daha fazla işlem tanımlanmışsa bu ikili işlemlere ve buldukları kümece cebirsel yapı denir [11].

D kümesinde bir $+$ işlemi tanımlanmışsa $(D, +)$ ikilisi tek işlemli bir cebirsel yapıdır. Aynı şekilde $(D, +, \cdot)$ yapısı da iki işlemli cebirsel bir yapıdır. Eğer $+$ ve \cdot işlemleri D ve C kümeleri üzerinde birer n-li işlemler ise $(D, +)$ ve (C, \cdot) sistemlerine aynı tip sistemler denir.

2.1.1. Örnek: $+$: $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ ve \cdot : $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ikili işlemdir. O halde $(\mathbb{Z}, +)$ ve (\mathbb{N}, \cdot) aynı tip sistemlerdir [11].

2.1.2. Tanım: Boştan farklı bir D kümesinde tanımlanan $+$ işlemi kapalı bir özelliğe sahipse $(D, +)$ sistemine grupoid ya da magma denir [11].

2.1.3. Tanım: Boştan farklı bir D kümesi üzerinde tanımlanan $+$ işlemi birleşme özelliğine sahipse $(D, +)$ sistemine yarı grup denir [11].

2.1.2. Örnek: $(\mathbb{N}, +)$, (\mathbb{N}, \cdot) , $(\mathbb{R}, +)$, (\mathbb{R}, \cdot) sistemleri birer yarı gruptur [11].

2.1.4. Tanım: $(D, +)$ yarı grup olsun. Eğer her $a \in D$ için $a+e=e+a=a$ olacak şekilde bir $e \in D$ bulunabiliyorsa e 'ye $+$ işlemine göre D'nin birim elemanı denir ve $(D, +)$ ikilisine de monoid denir [11].

2.1.3. Örnek: $(\mathbb{Z}, +)$ cebirsel yapısı bir monoiddir. $(\mathbb{N}, +)$ cebirsel yapısı yarı gruptur ama monoid değildir [11].

2.1.5. Tanım: D boştan farklı bir küme ise ve $+$ işlemine göre aşağıdaki dört özellik sağlanıyorsa $(D, +)$ sistemine bir grup denir.

- (i) $\forall a, b \in D$ için $a+b \in D$ (Kapalılık) .
- (ii) $\forall a, b, c \in D$ için $(a+b)+c = a+(b+c)$ (Birleşme).
- (iii) $\forall a \in D$ için $a+e = e+a = a$ olacak şekilde $e \in D$ vardır (Birim eleman) .

(iv) $\forall a \in D$ için $a+b = b+a = e$ olacak şekilde $b \in D$ vardır (Ters eleman).

Yukarıdaki şartlara ek olarak,

(v) $\forall a, b \in D$ için $a+b = b+a$ (Değişme).

varsa $(D, +)$ yapısına değişmeli grup denir.

Not: Burada (iv) özelliğinin b elemanına a'nın + işlemine göre tersi denir ve genellikle $b = -a$ ile gösterilir.

Verilen tanımında kullanılmış olan notasyona toplamsal notasyon ve + işlemine ise grup toplaması denir.

Bu nedenle $a+b$, a artı b şeklinde okunur. Toplamsal notasyondaki $a+b$ ifadesi yerine çarpımsal notasyonda $a \cdot b$ şeklinde yazılır. Toplamsal notasyonda bir elemanın tersini $b = -a$ iken çarpımsal notasyonda bir elemanın tersi $b = a^{-1}$ şeklinde yazılır[11].

2.1.4.Örnek: $D = \{ (a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a \leq 0, b > 0 \}$ kümesinde $(a, b) * (c, d) = (a+c, bd)$ işlemi tanımlanıyor. $(D, *)$ bir değişmeli gruptur. Gerçekten;

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$ olsun.

i) $a \leq 0, c \leq 0 \Rightarrow a+c \leq 0$ ve $b > 0, d > 0 \Rightarrow bd > 0$ olduğundan $(a+c, bd) \in D$ olduğu görülür. Bundan dolayı * işlemi kapalıdır.

ii) $[(a, b) * (c, d)] * (e, f) = (a+c, bd) * (e, f) = (a+c+e, bdf)$

$= (a,b) * (c+e, df) = (a, b) * [(c, d) * (e, f)]$ dir. $(D, *)$ 'ın birleşme özelliği vardır.

iii.) Birim eleman $(0, 1) \in D$ 'dir. Gerçekten,

$(a, b) * (0, 1) = (a+0, b \cdot 1) = (a, b)$ ve $(0, 1) * (a, b) = (0+a, 1 \cdot b) = (a, b)$ dir.

iv.) $(a, b) * (c, d) = (0, 1) \Rightarrow (a+c, bd) = (0, 1) \Rightarrow c = -a, d = 1/b$ 'dir. Böylece,

$\forall (a, b) \in D$ için $(a, b)^{-1} = (-a, \frac{1}{b})$ ters elemanı vardır.

v) $(a, b) * (c, d) = (a+c, bd) = (c+a, db) = (c, d) * (a, b)$ olup $(D, *)$ işleminin değişme özelliği vardır. $(D, *)$ bir değişmeli gruptur [11].

2.1.5.Örnek $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$ cebirsel yapıları birer değişmeli gruptur. Değişmeli gruplar için $(\mathbb{Q} - \{0\}, \cdot)$ cebirsel yapısı da örnek olarak verilebilir. Her elemanın tersi olmadığından $(\mathbb{N}, +)$, (\mathbb{N}, \cdot) , (\mathbb{Z}, \cdot) cebirsel yapıları ise bir grup değildir.

2.1.6.Örnek: $D = \{1, -1, i, -i\}$ kümesi çarpma işlemine göre gruptur.

- i.) Kapalılık özelliği vardır.
- ii.) Birleşme özelliğini sağlar.
- iii.) Çarpma işleminin birim elemanı $e = 1$ 'dir.
- iv.) Bütün elemanların tersi vardır.

$$1^{-1} = 1$$

$$(-1)^{-1} = -1$$

$$i^{-1} = -i$$

$$(-i)^{-1} = i$$

olduğundan tüm elemanların tersi vardır. Yani (D, \cdot) bir gruptur [11].

2.1.1.Teorem: $(D, +)$ herhangi bir grup ise,

- i.) D 'nin bir tane birim elemanı vardır.
- ii.) Tüm elemanların bir tane ters elemanı vardır.
- iii.) $-(-a) = a$ 'dır.
- iv.) $-(a+b) = (-b)+(-a)$ 'dır [11].

2.1.2.Teorem: D bir grup olsun ve $x, y \in D$ ve $a, b \in \mathbb{N}$ olsun. Bu durumda her $x, y \in D$ için,

$$(x^a)^b = x^{a \cdot b} \text{ ve}$$

$$x^a \cdot x^b = x^{a+b} \text{ dir [11].}$$

2.1.6.Tanım: $(D, +)$ bir grup ve $\emptyset \neq C \subseteq D$ olsun. Eğer $(C, +)$ yapısı bir grup ise (yani C kümesi de aynı $+$ işlemi ile grup oluyorsa) C 'ye D 'nin bir alt grubu denir ve $C \leq D$ ile gösterilir [12].

Not: C kümesi bir alt grup değil ise ya kapalı değildir, ya birim eleman yoktur ya da C 'deki bazı elemanların tersleri C de değildir fakat $C \subseteq D$ olduğundan birleşme özelliği C 'de mevcuttur.

2.1.7.Örnek: $(\mathbb{Z}, +)$ grubu, $(\mathbb{Q}, +)$ grubunun alt grubudur.

2.1.8.Örnek: $(\mathbb{Q} - \{0\}, \cdot)$ grubu, $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$ grubunun bir alt grubudur.

2.1.3.Teorem : $(D, +)$ bir grup ve C 'de D 'nin boştan farklı alt kümesi olsun. C 'nin bir alt grup olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul her $a, b \in C$ için $a + (-b) \in C$ olmasıdır [13].

2.1.9.Örnek: $D_1 = \{1, -1, i, -i\}$ ve $D_2 = \{1, -1\}$ olsun. Çarpma işlemine göre D_2 kümesini inceleyelim.

- i.) D_2 kümesi kapalıdır.
- ii.) D_2 kümesinin birleşme özelliği vardır.
- iii.) $e = 1 \in D_2$ birim elemanı vardır.
- iv.)

$$1^{-1} = 1, \\ (-1)^{-1} = -1 \text{ olup,}$$

D_2 kümesindeki elemanların tersi de D_2 kümesindedir. O halde $D_2 \leq D_1$ şeklinde yazılabilir [12].

2.1.7.Tanım: D bir grup, e de D 'nin birim elemanı olsun. Bu durumda $\{e\}$ ve D kümeleri birer alt grup olmaktadır. Bu alt gruplara aşıkâr (trivial) alt gruplar adı verilir[11].

2.1.8.Tanım: D bir grup, C ise boş kümeden farklı D grubunun bir alt grubu olsun. D 'nin C grubunu içeren tüm alt gruplarının arakesitine üretilen alt grup adı verilir. $\langle C \rangle$ sembolü ile gösterilir[11].

2.1.9.Tanım: D bir grup ve $C \leq D$ olsun. $\forall x \in D$ için $xC = Cx$ ise C alt grubuna D 'nin normal alt grubu denir. ' $C \triangleleft D$ ' sembolü ile gösterilir[11].

2.1.10.Tanım: D bir grup ve $C \leq D$ ve $x \in D$ olmak üzere,

$$Cx = \{cx : c \in C\}$$

kümesine C kümesinin D grubu içindeki bir sağ koseti denir [11].

2.1.11.Tanım: D 'nin bir grup ve $C \leq D$ olsun ve $x \in D$ için,

$$xC = \{xc : c \in C\}$$

kümesine C kümesinin D grubu içindeki bir sol koseti denir [11].

2.1.12.Tanım : D'nin bir grup ve $C \leq D$ olduğunu varsayalım. D'nin C'ye göre sol kosetleri kümesi,

$$D/C: = \{aC: a \in D\}$$

ile gösterilir [11].

2.1.13.Tanım: D bir grup ve $C \triangleleft D$ olsun. Bu durumda D/C grubuna D'nin C'ye göre bölüm grubu denir [11].

2.1.14.Tanım: $(D_1, +)$ ve (D_2, \cdot) iki grup ve $f: D_1 \rightarrow D_2$ bir fonksiyon olduğunu varsayalım. Eğer f fonksiyonu grup işlemlerini koruyorsa; yani $\forall a, b \in D_1$ için $f(a+b) = f(a) \cdot f(b)$ ise f'ye D_1 'den D_2 'ye grup homomorfizmi denir [12].

2.1.10.Örnek: $D_1 = (\mathbb{R}, +)$ ve $D_2 = (\mathbb{R}^+, \cdot)$ olsun. $f: D_1 \rightarrow D_2$, $f(a) = e^a$ şeklinde tanımlansın. Her $a, b \in \mathbb{R}$ için $f(a + b) = e^{a+b} = e^a \cdot e^b = f(a) \cdot f(b)$ olup f bir grup homomorfizması olur [12].

2.1.15.Tanım: $f: D_1 \rightarrow D_2$ grup homomorfizması birebir ve örtense f'ye bir grup izomorfizmi ya da izomorfizm denir [12].

2.2.Halka

2.2.1.Tanım: Boştan farklı bir E kümesi üzerinde + ve \cdot işlemleri tanımlansın.

Aşağıdaki koşullar sağlanırsa $(E, +, \cdot)$ iki işlemlili cebirsel yapıya halka denir [11].

a) $(E, +)$ bir değişmeli gruptur.

b) (E, \cdot) yarı gruptur.

c) \cdot işleminin + üzerine dağılım özelliğine vardır. Yani;

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) \text{ (Soldan dağılım özelliği),}$$

$$(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c) \text{ (Sağdan dağılım özelliği).}$$

$(E, +, \cdot)$ halka özellikleri sağlanıyor ve,

d) Her $a, b \in E$ için $a \cdot b = b \cdot a$ ise (\cdot işlemine göre değişmeli ise) E 'ye değişmeli halka denir.

e). Her $a \in E$ için $a \cdot e = e \cdot a = a$ olacak şekilde bir $e \in E$ var ise e 'ye birim eleman denir. E 'ye de birim elemanlı halka denir.

2.2.1. Örnek: Bilinen toplama ve çarpma işlemlerine göre \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} kümeleri halkadır. Bilinen matris toplaması ve matris çarpması işlemlerine göre 2×2 tipindeki reel matrisler kümesi bir halkadır [11].

2.2.2. Örnek: $E = \{0, e\}$ kümesinde toplama ve çarpma şöyle tanımlansın.

+	0	e
0	0	e
e	e	0

.	0	e
0	0	0
e	0	e

Yukarıdaki tabloda tanımlanan işlemlere göre, $(E, +, \cdot)$ bir halkadır [11].

2.2.2.Tanım: E bir halka ve $\emptyset \neq M \subseteq E$ olsun. Eğer M , E 'de ki işlemlerle bir halka haline gelirse M 'ye E 'nin bir alt halkası denir [11].

2.2.3.Örnek : \mathbb{Z} halkası \mathbb{Q} halkasının; \mathbb{Q} halkası \mathbb{R} 'nin alt halkasıdır. $2\mathbb{Z}$ halkası ise \mathbb{Z} 'nin bir alt halkasıdır [11].

2.2.3.Tanım : E bir halka ve M 'de E 'nin alt halkası olsun. Eğer her $r \in E$ için $rM \subseteq M$ ise bu durumda M 'ye bir sol ideal; $Mr \subseteq M$ ise M 'ye bir sağ ideal denir. Şu şekilde yazabiliriz:

$$\forall r \in E, \forall x \in M \text{ için } rx \in M \Rightarrow M \text{ sol ideal,}$$

$$\forall r \in E, \forall x \in M \text{ için } xr \in M \Rightarrow M \text{ sağ ideal,}$$

M hem sağ hem de sol idealse M 'ye bir ideal denir [11].

2.2.4.Örnek: \mathbb{Z} halkasının bütün alt halkaları birer idealdir.

2.2.4.Tanım: E değişmeli bir halka ve $M \neq E$, E 'nin bir ideali olmak üzere $a, b \in E$ için,

$$a \cdot b \in M \Rightarrow a \in M \text{ veya } b \in M,$$

şartını sağlıyorsa M 'ye E 'nin asal ideali denir [12].

2.2.5.Tanım: Her E halkası için $\{0\}$ ve E , E 'nin idealleridir. $\{0\}$ idealine E 'nin sıfır ideali denir. E 'nin, $M \neq E$ şartını sağlayan bir M idealine, E 'nin öz ideali denir [12].

2.2.6.Tanım: E bir halka ve $M \neq E$ de onun ideali olsun. Eğer E 'nin,

$$M \not\subseteq N,$$

gibi başka bir N öz ideali yoksa M 'ye maksimal ideal denir [12].

2.2.7.Tanım: M , $(E, +, \cdot)$ halkasının bir ideali olsun.

$$E/M = \{M+x: x \in E\}$$

olmak üzere $(E/M, +, \cdot)$ yapısı aşağıda tanımlanan çarpma ve toplama işlemlerine göre halka ise bu halkaya E 'nin M idealine bölüm halkası adı verilir[12].

$$(M+x) + (M+y) = M + (x+y),$$

$$(M+x) \cdot (M+y) = M + (xy),$$

2.2.8.Tanım: $(E, +, \cdot)$ halka ve $a, b \in E - \{0\}$ olsun. $a \cdot b = 0$ olacak şekilde a ve b elemanları varsa, a ve b 'ye E 'nin sıfır bölene denir. a 'ya b 'nin sol sıfır bölene ve b 'ye a 'nın sağ sıfır bölene denir [12].

2.2.9.Tanım: Birimli, değişmeli ve sıfır bölene olmayan halkaya tamlık bölgesi denir [12].

2.2.5.Örnek: \mathbb{Z} bir tamlık bölgesidir. \mathbb{Z} birimli, değişmeli ve sıfır bölene olmayan bir halkadır [12].

2.2.10.Tanım: E_1 ve E_2 iki halka olmak üzere, $f: E_1 \rightarrow E_2$ bir fonkiyon olsun ve her $x, y \in E_1$ için,

i.) $f(x+y)=f(x)+f(y),$

ii.) $f(xy)=f(x)f(y),$

şartlarını sağlıyorsa f 'ye halka homomorfizması denir [12].

2.3.Cisim

2.3.1.Tanım : Boştan farklı bir L kümesinde $+$ ve \cdot ikili işlemleri tanımlansın. Aşağıdaki koşullar sağlanırsa $(L, +, \cdot)$ iki işlemlili cebirsel yapıya bir cisim denir [11].

a) $(L, +)$ bir değişmeli gruptur.

b) $(L-\{0\}, \cdot)$ bir değişmeli gruptur.

c) \cdot işleminin $+$ üzerine dağılım özelliği vardır.

Her cisim bir halkadır, ama her halka bir cisim değildir. Örneğin \mathbb{Z} tam sayılar kümesi bir halkadır fakat çarpma işlemine göre tersi olmadığı için cisim değildir. Değişmeli bölener halkasına cisim denir. Aynı şekilde tüm cisimler bir tamlık bölgesidir ama tüm tamlık bölgeleri cisim olmayabilir. Örnek olarak $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ bir tamlık bölgesidir ama \mathbb{Z} de çarpmaya göre tersi olan elemanlar sadece 1 ve -1 olduğundan dolayı \mathbb{Z} bir cisim değildir [11].

2.3.1.Örnek: Bilinen toplama ve çarpma işlemine göre $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ birer cisimdir [12].

2.3.2.Örnek: $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ bir cisim değildir. Çünkü $3 \in \mathbb{N}$ için 3 ün $+$ işlemine göre tersi $-3 \notin \mathbb{N}$ olduğundan dolayı $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ cisim değildir [12].

2.3.1. Teorem: Bütün cisimler bir tamlık bölgesidir ama bütün tamlık bölgeleri cisim olmayabilir [12].

Örnek olarak $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ bir tamlık bölgesidir ama \mathbb{Z} de çarpmaya göre tersi olan elemanlar sadece 1 ve -1 olduğundan dolayı \mathbb{Z} bir cisim değildir.

2.3.2.Teorem: Her sonlu tamlık bölgesi bir cisimdir [11].

2.3.2.Tanım: L bir cisim, $\emptyset \neq K \subseteq L$ olmak üzere ve K, L de ki işlemlerle cisim oluyorsa K 'ye L 'nin bir alt cismi denir [11].

2.3.3.Teorem: L bir cisim, $K \neq \emptyset$ ve $K \subseteq L$ olsun. K 'nin L 'nin bir alt cismi olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul,

i. $|K| \geq 2$,

ii. $\forall x, y \in K$ için $x-y, xy \in K$,

iii. $\forall x \neq 0$ ve $x \in K$ için $x^{-1} \in K$ olmasıdır [11].

2.3.3.Örnek: $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ cismi $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ cisminin alt cismi; $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ cismi ise $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ cisminin alt cismidir [11].

2.3.1.Önerme: K, L cisminin en az iki elemanını içeren bir alt halkası olsun. K 'nin, L 'nin alt cismi olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul $\forall s \in K, s \neq 0$ için, $s^{-1} \in K$ olmasıdır [11].

2.3.1.İspat: K alt cisimse sıfırdan farklı tüm elemanlarının tersinin K 'de olduğu anlaşılmaktadır.

K 'de sıfırdan farklı tüm elemanlarının tersinin K 'de olduğunu varsayalım. K 'yi bir alt halka olarak kabul ettiğimizden dolayı çarpma işlemine göre kapalı olduğu ve $K-\{0\}$ kümesi, L 'nin çarpma işlemine göre alt grubu olur. O halde K, L 'nin bir alt cismidir.

2.3.1.Sonuç: Eğer K, L 'nin bir alt cismiye $0 \in K$ ve $1 \in K$ olur.

2.3.3.Tanım: Kendisinden başka hiçbir alt cismi olmayan cisme asal cisim denir [11].

2.3.4.Örnek: ρ asal tam sayı ise $\mathbb{Z}\rho$ asal cisimdir [11].

L cisminin, K idealine göre tanımlanan \equiv bağıntısı, L de bir denklik bağıntısıdır. $r \in L$ nin denklik sınıfı,

$$\bar{r} = r + K = \{r + a : a \in K\} \text{ olur.}$$

Tüm denklik sınıfları kümesi L / K şeklinde gösterilir[11].

2.3.4.Tanım: L cisminin, bir K idealine göre tanımlanan denklik sınıfları arasında;

$$(a + K) + (b + K) = (a+b) + K,$$

$$(a + K) \cdot (b + K) = (ab) + K,$$

şeklinde tanımlanan $+$ ve \cdot işlemlerine göre L/P bir cisimdir. Bu cisme L 'nin K idealine göre bölüm cismi denir[11].

2.3.5.Tanım: \mathcal{T} ve L herhangi iki cisim ve $i: L \rightarrow \mathcal{T}$ doğal homomorfizma olsun. i dönüşümü bire-bir ve içine bir homomorfizmayla (\mathcal{T}, i) çiftine L 'nin bir genişlemesi denir. Bu durumda $i(L) \subset \mathcal{T}$ dir ve $i(L)$, \mathcal{T} 'nin bir alt cisimidir. L , \mathcal{T} içine gömülebilir veya \mathcal{T} , L 'nin bir genişlemesidir denir[14].

$L \leq \mathcal{T}$ ile gösterilir. \mathcal{T} , L cisminin bir genişlemesidir ve \mathcal{T} , L üzerinde bir vektör uzayı oluşturur. Bu uzayın boyutu $[\mathcal{T}: L]$ ile gösterilir.

2.3.2.Önerme: Her tamlık bölgesi bir cisme gömülebilir. Tamlık bölgesini kapsayan en küçük cisme kesir cismi denir[15].

2.3.5.Örnek: K, L cisminin bir alt cismi olsun. Bu durumda L cismi K 'nin bir genişlemesidir. Başka bir deyişle $i: K \rightarrow L$ ve her $a \in K$ için $i(a) = a$ olacak şekilde bire-bir homomorfizmi bulunabilir. Tersine, eğer böyle bir homomorfizm mevcutsa o zaman K, L 'nin bir alt cismidir. i homomorfizmasına bir dahil etme dönüşümü denir [12].

2.3.6.Örnek: $\mathbb{C} = \{(a, b): a, b \in \mathbb{R}\}$ kümesini düşünelim. $i(a) = (a, 0)$ biçiminde tanımlanan $i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, a \rightarrow i(a)$ dönüşümü bir izomorfizmdir.

Bu nedenle $i(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$ ve $(a, 0) = a$ yazabiliriz. O halde \mathbb{R} reel sayılar kümesi, \mathbb{C} kompleks sayılar kümesinin bir alt cismidir. Bundan dolayı \mathbb{C} , \mathbb{R} cisminin bir genişlemesidir [12].

2.3.6.Tanım: L, K cismi üzerinde bir cisim genişlemesi olsun ve bu durumda, K üzerinde bir vektör uzayı olarak L 'nin boyutu K üzerinde L 'nin (genişleme) derecesi olarak adlandırılır. $[L: K] = n < \infty$ ise L, K 'nin bir sonlu genişlemesi (veya kısaca L, K üzerinde sonlu), aksi halde L, K 'nin bir sonsuz genişlemesidir denir [12].

2.4.Modül

2.4.1.Tanım: E bir halka ve $(B, +)$ değişmeli bir grup olsun. $f: E \times B \rightarrow B$ dönüşümü için

$f(x, a) \in B$ elemanını xa şeklinde gösterelim. $\forall x, y \in E$ ve $a, b \in B$ için,

1.) $x.(a + b) = xa + xb,$

- 2.) $x.(y.a) = (x.y).a$,
 3.) $(x+y).a = xa+ya$,

şartlarını sağlıyorsa $(B, +)$ değişmeli grubuna E üzerinde sol E -modül denir ve ${}_E B$ ile gösterilir. Benzer koşulları sağlayan,

$$g: B \times E \rightarrow B (g(a, x) = ax),$$

fonksiyonu verilmişse, B 'nin sağ E -modülü denir. B_E şeklinde gösterilir. Sadece modül dediğimiz-de ise, bir sol E -modülü olduğu anlaşılır.

4.) $1.a = a$ ise B 'ye birimli E -modül denir [15].

2.4.1.Örnek: Bütün toplamsal değişmeli B grubu \mathbb{Z} modüldür [15].

$x, y \in \mathbb{Z}$ ve $a, b \in B$ için $\mathbb{Z} \times B \rightarrow B$ tanımlansın.

i.) $x.(a+b) = (a+b)+(a+b)+\dots+(a+b)$

$$= \underbrace{a+\dots+a}_{x \text{ tane}} + \underbrace{b+\dots+b}_{x \text{ tane}} = xa+xb$$

ii.) $(x, a) \rightarrow x.a = \underbrace{a+a+a+\dots+a}_{x \text{ tane}}$

$$(x+y).a = \underbrace{a+\dots+a}_{x \text{ tane}} + \underbrace{a+\dots+a}_{y \text{ tane}}$$

$$=(xa+ya)$$

iii.) $x(ya) = (xy)a$

iv.) $1.a=a$

2.4.2.Örnek: \mathbb{R} -modülde toplama ve çarpma işlemine göre $\mathbb{Z}_7 = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$ kümesi bir cisim ve aynı zamanda bir modüldür.

2.4.2.Tanım: B bir E-modülü ve A kümesi B'nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. Eğer A kümesi B'nin bir alt grubuysa ve her $r \in E$, $x \in A$ için $rx \in A$ ise A'ya B nin bir alt modülü denir. $A \leq B$ ile gösterilir [16].

2.4.3.Tanım: B bir modül ve A, B'nin bir alt modülü olsun. $\forall a \in A$ ve $x \in B$ için $ax \in A$ ve $xa \in A$ ise A'ya B'nin bir ideali denir [15].

2.4.3.Örnek: Bir E halkasının her ideali, E'nin bir E-alt modülüdür. Bunun tersi de doğrudur. Başka bir deyişle, E halkasının her E-alt modülü, E halkasının bir idealidir.

E bir halka olsun. E bir E-modüldür. N, E'nin bir ideali ve her $a, b \in N$ ve her $r \in E$ için a.r dış işlemi olarak E halkasındaki çarpma işlemi tanımlanırsa,

i.) $a-b \in N$,

ii.) $r.a, a.r \in N$ dir. N bir E-alt modüldür.

Tersine N, E'nin bir E-alt modülü olsun. O zaman tanım gereği her $a, b \in N$ ve her $r \in E$ için,

$$0 \in N,$$

$$a-b \in N,$$

$$r.a, a.r \in N$$

olduğundan N, E'nin bir idealidir [17].

2.4.4.Tanım: B bir E-modülü, A da B'nin bir alt modülü olsun. $A \neq B$, $x \in E$, $a \in B$ ve $xa \in A$ ise $a \in A$ veya $x \in (A:B)$, o zaman A alt modülüne asal alt modül adı verilir[16].

2.4.5.Tanım: B modülünden A modülüne olan $g: B \rightarrow A$ fonksiyonu, her $a, b \in B$ ve $x \in E$ için,

$$g(a+b) = g(a) + g(b),$$

$$g(xa) = xg(a),$$

şartları gerçekleşirse, g'ye homomorfizm (modül homomorfizması veya E-homomorfizması) denir [15].

2.4.6.Tanım: $A \leq B$ ve $m \in B$ olsun. B'nin,

$$m+A = \{m+n: n \in A\},$$

alt kümesine, B'nin A alt modülüne göre sol yansınıfları denir. Bütün sol yansınıflar kümesi B/A şeklinde gösterilir [15].

2.4.7.Tanım: B modülünün A alt modülüne göre yansınıflar kümesinin oluşturduğu B/A modülüne B'nin A'ya göre bölüm modülü denir[15].

2.4.4.Örnek: B bir E modülü ve A bir E-alt modülü olsun. $a \in B$ için,

$$\pi: B \rightarrow B/A,$$

$$a \rightarrow a + A,$$

olarak tanımlanan bir dönüşüm bir E-homomorfizmdir.

A, B'nin bir E-alt modülü olduğundan bir idealdir. Bu durumda B/A E-modüldür.

$a, b \in B$ ve $x \in E$ için,

$$\pi(a+b) = (a+b)+A = a+A+b+A = \pi(a)+\pi(b) \text{ ve}$$

$$\pi(x.a) = (x.a)+A = x.(a+A) = x.\pi(a),$$

olduğundan π bir E-homomorfizmdir [17].

2.4.5.Örnek: B bir E-modül olsun. $N: B \rightarrow B$, $N(x) = x$ ile tanımlanan özdeşlik dönüşümü bir E-homomorfizmdir. Ayrıca $0: B \rightarrow B$, $0(x) = 0$ ile tanımlanan dönüşüm bir E-homomorfizmdir.

E bir halka olsun ve o halde E bir E-modül ve $E^n = E \times E \times E \dots \times E$ bir E-modüldür.

$$f_k: E^n \rightarrow E, f_k(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

dönüşümüne E-homomorfizması denir [17].

2.4.1.Önerme: B bir E-modül ve A, B'nin alt modülü olsun. Aşağıdakiler sağlanır.

1) İki farklı sol yansınıfları ayrıktır ve B yansınıflarının birleşimine eşittir.

2) $m+A = x+A$ olabilmesi için gerekli ve yeterli şart $m-x \in A$ olmasıdır.

3) B/A kümesinde toplama işlemini,

$$(m+A) + (x+A) = (m+x)+A,$$

ve halkanın bir r elemanı ile çarpma işlemini de

$$r(m+A) = rm+A,$$

ile tanımladığımızda B/A bir modül oluşturur [15].

2.4.8.Tanım: $A \leq B$ ve $A \neq B$ olsun. Eğer B 'nin bir öz alt modül olarak A içeren bir öz alt modülü yoksa o zaman, A 'ya B 'nin maksimal alt modülü denir. Yani, $A \leq K \leq B$ durumu yalnızca $K = A$ ve $K = B$ için gerçekleşirse, A 'ya B 'nin maksimum alt modülü denir [15].

2.4.6.Örnek: Z modülünün her p asal sayısı için pZ maksimum alt modüldür [15].

2.4.9.Tanım: B halkasının A sol ideali B 'de maksimal alt modül ise A 'ya maksimal sol ideal denir[15].

3. HİPERGRUPLAR

3.1. Hipergruplar

Bu bölümde hipergrup tanımı ve örnekleri verilmiştir.

3.1.1.Tanım: \mathbb{D} boş olmayan bir küme ve $P(\mathbb{D})$, \mathbb{D} 'nin boş olmayan alt kümelerinin ailesi olsun.

$$o: \mathbb{D} \times \mathbb{D} \rightarrow P(\mathbb{D}),$$

dönüşümüne hiperişlem denir.

$A, B \in P(\mathbb{D})$ ve $x \in \mathbb{D}$ olduğunda o hiperişlemi, $AoB = \cup \{aob : a \in A, b \in B\}$,

$Aox = Ao\{x\}$ ve $xoB = \{x\}oB$ şeklinde tanımlıdır. (\mathbb{D}, o) çiftine ise hipergrupoid denir [1].

3.1.2.Tanım: (\mathbb{D}, o) hipergrupoid olsun. Eğer $\forall a, b, c \in \mathbb{D}$ için, $ao(boc) = (aob)oc$ özelliği sağlamıyorsa (\mathbb{D}, o) ikilisine yarı hipergrup denir (semihypergroup) [1].

3.1.1.Örnek: $(\mathbb{R}, +)$ ve (\mathbb{R}, \cdot) birer yarı hipergruptur ama $(\mathbb{R}, -)$ bir yarı hipergrup değildir.

$a, b \in \mathbb{R}$ için, $o: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow P(\mathbb{R})$

$(a, b) \mapsto \{a - b\}$ biçiminde bir hiperişlem tanımlansın.

i.) $a, b \in \mathbb{R}$ için $aob = \{a-b\}$ olduğundan hipergrupoiddir.

ii.) (\mathbb{R}, o) hipergrupoidi için $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$,

$$(4o2)o3 \neq 4o(2o3)$$

$$\{-1\} \neq \{5\}$$

olduğundan $(\mathbb{R}, -)$ yarı hipergrup değildir.

3.1.3.Tanım: Eğer (\mathbb{D}, o) yarı hipergrup olsun. Her $a \in \mathbb{D}$ için $ao\mathbb{D} = \mathbb{D}oa = \mathbb{D}$ ise (\mathbb{D}, o) ikilisine kısmi hipergrup (kuazi hipergrup) denir [1].

3.1.4.Tanım: Yarı hipergrup ve kısmi (kuazi) hipergrup olan hipergrupoide (\mathbb{D}, o) hipergrup denir [1].

3.1.5.Tanım: \mathbb{D} bir hipergrup olsun. $\forall a, b \in \mathbb{D}$ için $aob = boa$ ise \mathbb{D} değişmeli hipergruptur [2].

3.1.2.Örnek: $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$ birer değişmeli hipergruptur. $(\mathbb{Q}-\{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{R}-\{0\}, \cdot)$ birer değişmeli hipergruptur.

(\mathbb{Z}, \cdot) birer hipergrup değildir. $0 \in \mathbb{Z}$ iken $0 \cdot \mathbb{Z} \notin \mathbb{Z}$ olduğundan hipergrup değildir.

Her grup bir hipergruptur [3, 18]. Bununla ilgili 2.bölümde grup kavramı ile ilgili verilen Örnek 2.1.6' yı inceleyelim.

3.1.3.Örnek: $\mathbb{D} = \{1, i, -i, -1\}$ kümesinin çarpma işlemine göre grup olduğu Örnek 2.1.6'da gösterilmişti. Şimdi hipergrup olduğunu gösterelim.

Her $a, b \in \mathbb{D}$ ve $o: \mathbb{D} \times \mathbb{D} \rightarrow P(\mathbb{D})$,

$(a, b) \mapsto aob = \{a \cdot b\}$ hiperişlem tanımlansın.

- i.) $a, b \in \mathbb{D}$ ve $aob = \{a \cdot b\} \in P(\mathbb{D})$ olduğu için (\mathbb{D}, o) yapısı bir hipergrupoiddir.
- ii.) $a, b, c \in \mathbb{D}$ için $(aob)oc = ao(boc)$ 'dir.

$$(1o-1)o(i) = (1)o(-1o i),$$

$$\{-1\}oi = 1o\{-i\}$$

$$\{-i\} = \{-i\}'dir.$$

Diğer durumlarda benzer şekilde gösterilebilir. O halde,

(\mathbb{D}, o) yapısı bir yarı hipergruptur.

- iii.) $ao\mathbb{D} = \mathbb{D}oa$ dır. $a \in \mathbb{D}$ yani $a = \{1\}, \{-1\}, \{i\}, \{-i\}$ değerleri için,

$$ao\{1, -1, i, -i\} = \{1, -1, i, -i\}oa = \mathbb{D},$$

$$a \cdot \mathbb{D} = \mathbb{D} \cdot a = \mathbb{D}'dir.$$

(\mathbb{D}, o) cebirsel yapısı bir kısmi (kuazi) hipergruptur. (\mathbb{D}, o) cebirsel ifadesi hem ii. hem de iii. öncülü birlikte sağladığından dolayı hipergruptur.

3.1.4.Örnek: $\mathbb{D} = \{-1, 1\}$ olarak tanımlansın.

$a, b \in \mathbb{D}$ için, $o: \mathbb{D} \times \mathbb{D} \rightarrow P(\mathbb{D})$

$(a, b) \mapsto aob = \{a.b\}$ olacak şekilde bir hiperişlem tanımlansın. (\mathbb{D}, o) cebirsel ifadesinin hipergrup olduğunu gösterelim.

i.) $a, b \in \mathbb{D}$ için $-1o1 = \{(-1).1\} = \{-1\} \in P(\mathbb{D})$ ve $1o(-1) = \{1.(-1)\} = \{-1\} \in P(\mathbb{D})$ olduğundan hipergrupoiddir.

ii.) (\mathbb{D}, o) hipergrupoidi için $\forall a, b, c \in \mathbb{D}$,

$(aob)oc = ao(boc)$ şartlarını sağlar.

$$(-1o1)o1 = -1o(1o1),$$

$$\{-1.1\}o1 = -1o\{1.1\},$$

$$\{-1.1\} = \{-1.1\} = \{-1\}'dir.$$

(\mathbb{D}, o) yarı hipergruptur.

iii) $a \in \mathbb{D}$, $ao\mathbb{D} = \mathbb{D}oa = \mathbb{D}'dir.$

$a = 1$ olsun.

$$ao\mathbb{D} = \mathbb{D}oa = 1.\{-1, 1\} = \{-1, 1\}.1 = \mathbb{D}'dir.$$

$a = -1$ olsun.

$$ao\mathbb{D} = \mathbb{D}oa = -1.\{-1, 1\} = \{-1, 1\}.-1 = \mathbb{D}'dir.$$

(\mathbb{D}, o) kısmi hipergruptur. (\mathbb{D}, o) cebirsel ifadesi hem ii. hem de iii. öncülü birlikte sağladığından dolayı hipergruptur.

Her hipergrup bir grup değildir. Bu durum aşağıdaki örnekten kolayca görülebilir.

3.1.5.Örnek: $\mathbb{R}^+ \cup 0$ kümesi toplama işlemine göre bir hipergruptur ama grup değildir. Gösterelim. Öncelikle $a, b \in (\mathbb{R}^+ \cup 0)$ için $o: (\mathbb{R}^+ \cup 0) \times (\mathbb{R}^+ \cup 0) \rightarrow P(\mathbb{R}^+ \cup 0)$

$o: (a, b) \mapsto aob = \{a+b\}$ şeklinde hiperişlem tanımlansın.

i.) $a, b \in (\mathbb{R}^+ \cup 0)$ için $aob = \{a+b\} \in (\mathbb{R}^+ \cup 0)'dir. (\mathbb{R}^+ \cup 0, o)$ hipergrupoiddir.

ii.) Her $a, b, c \in (\mathbb{R}^+ \cup 0)$ için $(aob)oc = ao(boc)$ olur.

$a, b, c \in (\mathbb{R}^+ \cup 0)$ için, $\{a+b\} + \{c\} = \{a\} + \{b+c\}$ 'dir.

$(\mathbb{R}^+ \cup 0, o)$ bir yarı hipergruptur.

iii.) Her $a \in (\mathbb{R}^+ \cup 0)$ için $ao(\mathbb{R}^+ \cup 0) = (\mathbb{R}^+ \cup 0)oa = (\mathbb{R}^+ \cup 0)$ 'dir.

$a \in (\mathbb{R}^+ \cup 0)$ için, $\{a\} + (\mathbb{R}^+ \cup 0) = (\mathbb{R}^+ \cup 0) + \{a\} = (\mathbb{R}^+ \cup 0)$ 'dir.

$(\mathbb{R}^+ \cup 0, o)$ kısmi hipergruptur.

$(\mathbb{R}^+ \cup 0, o)$ cebirsel ifadesi hem ii hem de iii. öncülü birlikte sağladığından dolayı

$(\mathbb{R}^+ \cup 0, o)$ bir hipergruptur.

Şimdi $\mathbb{R}^+ \cup 0$ sayılar kümesi toplama işlemine göre grup mudur ? Gösterelim.

Her $a \in (\mathbb{R}^+ \cup 0)$ için $-a \notin (\mathbb{R}^+ \cup 0)$ olduğundan, $(\mathbb{R}^+ \cup 0, +)$ bir grup değildir.

3.1.6.Örnek: $\mathbb{D} = \{1, 2, 3\}$ ve $a, b \in \mathbb{D}$ olsun. $\mathbb{D} \times \mathbb{D} \rightarrow P(\mathbb{D})$, $o: (a, b) \mapsto a * b = \{a\}$ ve

$(a, b) \mapsto a \neq b \Rightarrow a * b = \{a, b\}$ olarak hiperişlem tanımlansın. Tanımlanan hiperişlem tablosunu inceleyelim.

$a * b$	1	2	3
1	{1}	{1,2}	{1,3}
2	{2,1}	{2}	{2,3}
3	{3,1}	{3,2}	{3}

i.) Tablodan açıkça görüldüğü gibi her $a, b \in \mathbb{D}$ için $a * b \in P(\mathbb{D})$ olduğundan bir hipergrupoiddir.

ii.) (\mathbb{D}, o) hipergrupoidi için $\forall a, b, c \in \mathbb{D}$ ve $(aob)oc = ao(boc)$ özelliğini sağlaması gerekmektedir.

$$(1o2)o3 = 1o(2o3) = \{1,2,3\},$$

$$(2o3)o1 = 2o(3o1) = \{1,2,3\},$$

$$(1o3)o2 = 1o(3o2) = \{1,2,3\} \text{ olur.}$$

Şartlarını sağladığından (\mathbb{D}, o) yarı hipergruptur.

iii) Her $a \in \mathbb{D}$ için $a\mathbb{D} = \mathbb{D}a = \mathbb{D}$ olduğunu gösterelim.

$a \in \mathbb{D}$ olsun. Yani $a = \{1\}, \{2\}, \{3\}$ değerleri için,

$$a*\{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3\}*a = \{1, 2, 3\} \in \mathbb{D}' \text{ dir.}$$

(\mathbb{D}, o) cebirsel yapısı kısmı hipergruptur. (\mathbb{D}, o) cebirsel ifadesi hem ii. hem de iii. öncülü birlikte sağladığından dolayı hipergruptur.

3.1.7.Örnek: \mathbb{Z} tam sayılar kümesi üzerinde tanımlanan $o: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = P(\mathbb{Z})$, $o: (a, b) \mapsto a*b = \{ab, ba\}$ hiperişlemi ile (\mathbb{Z}, o) olur. Gerçekten;

i.) $a, b \in \mathbb{Z}$ için $aob = \{ab, ba\} \in P(\mathbb{Z})$ dir. (\mathbb{Z}, o) hipergrupoiddir.

ii.) $a, b, c \in \mathbb{Z}$ için,

$$ao(boc) = (aob)oc \text{ dir.}$$

$$\{a\}*\{b*c\} = \{a\}*\{bc, cb\} = \{abc, cba\},$$

$$\{a*b\}*\{c\} = \{ab, ba\}*\{c\} = \{abc, cba\},$$

$ao(boc) = (aob)oc$ olduğundan (\mathbb{Z}, o) cebirsel yapısı yarı hipergruptur.

iii.) $a \in \mathbb{Z}$, $a\mathbb{Z} = \mathbb{Z}a = \mathbb{Z}$ olması gerekir.

$a*\mathbb{Z} = \{a\mathbb{Z}, \mathbb{Z}a\} = \mathbb{Z}*a = \{\mathbb{Z}a, a\mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}$, olduğundan (\mathbb{Z}, o) cebirsel yapısı kuazi hipergruptur.

(\mathbb{Z}, o) cebirsel yapısı yukarıdaki şartları sağladığından tanımlanan hiperişleme göre (\mathbb{Z}, o) bir hipergruptur.

3.1.8.Örnek: (\mathbb{Z}_5, o) , $a, b \in \mathbb{Z}_5$ ve $o: \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5 \rightarrow \mathbb{Z}_5$ $o: (a, b) \mapsto aob = \{a+b\}$ hiperişlemi için,

\mathbb{Z}_5 'in hipertoplama göre aşağıdaki hiperişlem tanımlansın.

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$

(\mathbb{Z}_5, o) bir hipergruptur. Gösterelim.

- i.) Her a, b için, $a+b \in \mathbb{Z}_5$ olduğundan (\mathbb{Z}_5, o) hipergrupoiddir.
ii.) $a, b, c \in \mathbb{Z}_5$ olsun. $(aob)oc = ao(boc)$ olduğunu gösterelim. Bununla ilgili birkaç örnek verecek olursak,

$$(aob)oc = ao(boc) \text{ için } (a+b)+c = a+(b+c) \text{ olur.}$$

$$(\bar{0}o\bar{1})o\bar{2} = \bar{0}o(\bar{1}o\bar{2}) \text{ için } (\bar{0}+\bar{1})+\bar{2} = \bar{0}+(\bar{1}+\bar{2}) = \bar{3},$$

$$(\bar{1}o\bar{2})o\bar{3} = \bar{1}o(\bar{2}o\bar{3}) \text{ için } (\bar{1}+\bar{2})+\bar{3} = \bar{1}+(\bar{2}+\bar{3}) = \bar{1},$$

$$(\bar{2}o\bar{3})o\bar{4} = \bar{2}o(\bar{3}o\bar{4}) \text{ için } (\bar{2}+\bar{3})+\bar{4} = \bar{2}+(\bar{3}+\bar{4}) = \bar{4} \text{ olur.}$$

(\mathbb{Z}_5, o) yarı hipergruptur.

- iii.) $a \in \mathbb{Z}_5$ ve $ao\mathbb{Z}_5 = \mathbb{Z}_5oa = \mathbb{Z}_5$ olur. Bununla ilgili aşağıdaki gibi örnekler verebiliriz.

$a = \bar{3}$ için,

$$\bar{3} + \bar{0} = \bar{3} \in \mathbb{Z}_5$$

$$\bar{3} + \bar{1} = \bar{4} \in \mathbb{Z}_5$$

$$\bar{3} + \bar{2} = \bar{0} \in \mathbb{Z}_5$$

$$\bar{3} + \bar{3} = \bar{1} \in \mathbb{Z}_5$$

$$\bar{3} + \bar{4} = \bar{2} \in \mathbb{Z}_5$$

Bunun gibi örnekleri çoğaltmamız mümkündür. $\bar{3} + \mathbb{Z}_5 = \mathbb{Z}_5 + \bar{3} = \mathbb{Z}_5$ olduğundan (\mathbb{Z}_5, o) kısmi (kuazi) hipergruptur.

(\mathbb{Z}_5, o) cebirsel ifadesi hem ii. hem de iii. öncülü birlikte sağladığından dolayı hipergruptur.

3.1.6.Tanım: (\mathbb{D}, o) yarı hipergrubunun boş olmayan alt kümesi \mathbb{S} olsun. $\forall a \in \mathbb{S}$ için, $ao\mathbb{S} = \mathbb{S} = \mathbb{S}oa$ ise (\mathbb{S}, o) 'ye (\mathbb{D}, o) ' nın alt hipergrubu denir [5].

3.1.9.Örnek: $a \in \mathbb{Z}$ sabit bir tam sayı olmak üzere, $(a\mathbb{Z}, +)$ hipergrubu $(\mathbb{Z}, +)$ hipergrubunun alt hipergrubudur.

3.1.7.Tanım: (\mathbb{D}, o) değişmeli hipergrup olsun.

i.) $\forall a \in \mathbb{D}$ için $aoe = eoa = a$ olacak şekilde $e \in \mathbb{D}$ vardır.

ii) $\forall a \in \mathbb{D}$ için $e \in aoa^{-1} \cap a^{-1}oa$ olacak şekilde $a^{-1} \in \mathbb{D}$ vardır.

iii.) $a \in boc$ ise $b \in a o c^{-1}$ ve $c \in b^{-1}oa$ dır.

Şartları sağlıyorsa (\mathbb{D}, o) hipergrubuna kanonik hipergrup denir [5].

3.1.8.Tanım: (\mathbb{D}, o_1) ve (\mathbb{S}, o_2) iki hipergrup olsun ve $\theta: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{S}$ fonksiyon olsun. $\forall a, b \in \mathbb{D}$, $\theta(a o_1 b) \subseteq \theta(a) o_2 \theta(b)$ θ 'ya homomorfizm denir. Eğer $\forall a, b \in \mathbb{D}$ için,

$\theta(a o_1 b) = \theta(a) o_2 \theta(b)$ ise θ 'ya iyi homomorfizm denir [19].

3.2. Hipergrupların Koseti

3.2.1.Tanım: \mathbb{D} bir hipergrup, $\mathbb{S} \leq \mathbb{D}$ olsun. Bir $x \in \mathbb{D}$ için,

$$\mathbb{S}x = \{sx: s \in \mathbb{S}\} \text{ ve } x\mathbb{S} = \{xs: s \in \mathbb{S}\}$$

kümelerine, \mathbb{S} 'nin \mathbb{D} 'deki sağ ve sol kosetleri denir [6].

3.2.2.Tanım: (\mathbb{D}, o) bir hipergrup, \mathbb{S} ise \mathbb{D} 'nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. $y \in \mathbb{S}ox$ iken $x \in \mathbb{S} o y$ ise (\mathbb{S}, o) alt hipergrubuna tersi alınabilir alt hipergrup denir [6].

3.2.3.Tanım: \mathbb{S} , \mathbb{D} 'nin terslenebilir alt hipergrubuysa, \mathbb{D} üzerindeki denklik bağıntısı aşağıdaki gibi tanımlanabilir [6].

$$a \equiv b \Leftrightarrow \mathbb{S}oa = \mathbb{S}ob,$$

Bu şekildeki tüm $a \in \mathbb{D}$ ler için \mathbb{S} 'nin sağ genelleştirilmiş kosetidir denir.

\mathbb{S} , \mathbb{D} 'nin tersi alınabilir bir alt hipergrubuysa, \mathbb{S} 'nin \mathbb{D} 'deki tüm sol genelleştirilmiş kosetlerinin sayısı $[\mathbb{D}:\mathbb{S}]_l$ ile gösterilir. \mathbb{S} 'nin \mathbb{D} 'deki tüm sağ genelleştirilmiş kosetlerinin sayısı $[\mathbb{D}:\mathbb{S}]_r$ ile gösterilir.

Eğer $[\mathbb{D}:\mathbb{S}]_l = [\mathbb{D}:\mathbb{S}]_r = n$, o zaman n 'ye \mathbb{S} 'nin \mathbb{D} 'deki indeksi olduğunu ve $[\mathbb{D}:\mathbb{S}]$ ile gösterildiğini söyleyebiliriz.

4.HİPERHALKALAR

4.1. Hiperhalkalar

4.1.1.Tanım: \mathbb{E} boş kümeden farklı bir küme ve \mathbb{E} üzerinde $+$ ve \cdot ikili hiperişlemleri tanımlansın. $(\mathbb{E}, +, \cdot)$ cebirsel yapısı için;

- 1) $(\mathbb{E}, +)$ değişmeli hipergrup,
- 2) (\mathbb{E}, \cdot) yarı hipergruptur. $a.(b.c) = (a.b).c$.
- 3) $\forall a, b, c \in \mathbb{E}$ için $a.(b+c) = a.b+a.c$ ve $(b+c).a = b.a+c.a$,

şartlarını sağlıyorsa $(\mathbb{E}, +, \cdot)$ cebirsel yapısına hiperhalka denir [7].

4.1.1.Örnek: \mathbb{Z} tam sayılar kümesi $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ikili cebirsel yapısını inceleyelim.

- 1) $(\mathbb{Z}, +)$ değişmeli hipergruptur.
- 2) $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ve $a.(b.c) = a.(b.c)$ olduğundan (\mathbb{Z}, \cdot) yarı hipergruptur.
- 3) $a, b, c \in \mathbb{Z}$ olsun.

$$a.(b+c) = a.b+a.c \text{ ve } (b+c).a = b.a+ c.a ,$$

şartlarını sağladığından $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ cebirsel yapısı hiperhalkadır.

- 4) Her $a, b \in \mathbb{Z}$ için,

$$a.b = b.a \text{ ise değişmeli hiperhalkadır.}$$

4.1.2.Tanım: Hiperhalkanın hipertoplamaya göre etkisiz elemanı hiperhalkanın sıfır elemanıdır ve $\{0\} \in \mathbb{E}$ biçiminde gösterilir [7].

4.1.3.Tanım: Hiperhalkanın ikinci hiperişleme göre etkisiz elemanı varsa bu hiperhalkaya birimli hiperhalka adı verilir. Bu elamana da hiperhalkanın birim elemanı denir [7].

4.1.4.Tanım: Hiperhalka, ikinci hiperişlemine göre değişme özelliğine sahipse bu hiperhalkaya değişmeli hiperhalka denir [7].

4.1.2.Örnek: $\mathbb{E} = \{0, a, b, c\}$ kümesi olmak üzere, \mathbb{E} aşağıdaki hipertoplama ve hiperçarpıma göre bir hiperhalka adını almaktadır [20].

+	0	a	b	c
0	0	a	b	c
a	a	{0, b}	{a, c}	b
b	b	{a, c}	{0, b}	a
c	c	b	a	0

.	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	a	a	b	c
b	0	b	b	0
c	0	c	0	c

4.1.3.Örnek: \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} halkaları birimli ve değişmeli hiperhalkalardır ama $5\mathbb{Z}$ hiperhalkası birimli hiperhalka değildir.

4.1.5.Tanım: $(\mathbb{E}, +, \cdot)$ hiperhalka ve $a, b \in \mathbb{E}$ ve $a, b \neq 0$ için, eğer $a \cdot b = 0$ ise a , b 'nin sol sıfır bölenidir ve b ise a 'nın sağ sıfır bölenidir. Aksi halde hiperhalkanın sıfır böleni yoktur denir [7].

4.1.4.Örnek: \mathbb{Z} hiperhalkası birimli, değişmeli ve sıfır böleni yoktur.

4.1.5.Örnek: $(\mathbb{Z}_8, +, \cdot)$ hiperhalkası birimli değişmelidir. $\mathbb{Z}_8 = \{ \bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7} \}$ olmak üzere,

$\bar{2}, \bar{4} \in \mathbb{Z}_8$ için $\bar{2} \cdot \bar{4} = \bar{8} = \bar{0}$ bulunur. O halde sıfır bölenlidir.

4.1.6.Tanım: \mathbb{E} birimli bir hiperhalka olsun. Her $a \in \mathbb{E} - \{0\}$ için,

$$a.b = b.a = 1,$$

eğer $b \in \mathbb{E}$ mevcutsa b 'ye a 'nın tersi denir [7].

4.1.7.Tanım: Birimli, değişmeli ve sıfır bölensiz hiperhalkaya tamlık bölgesi denir[7].

4.1.6.Örnek: \mathbb{Z} bir tamlık bölgesidir. \mathbb{Z} birimli, değişmeli ve sıfır böleni olmayan bir hiperhalkadır.

4.1.8.Tanım: Birimli, sıfır bölensiz hiperhalkaya bölme hiperhalkası denir. Değişmeli bölme hiperhalkasına ise hipercisim adı verilir.

4.1.9.Tanım: \mathbb{E} bir hiperhalka ve $\mathbb{M} \neq \emptyset$, $\mathbb{M} \subseteq \mathbb{E}$ olsun. \mathbb{M} , \mathbb{E} 'deki işlemlere göre hiperhalka ise \mathbb{M} 'ye \mathbb{E} 'nin alt hiperhalkası denir [7].

4.1.7.Örnek : \mathbb{Z} , \mathbb{Q} 'nun bir alt hiperhalkasıdır. \mathbb{Q} ise \mathbb{R} 'nin bir alt hiperhalkasıdır.

4.1.8.Örnek: $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ birimli bir hiperhalkadır. $(2\mathbb{Z}, +, \cdot)$ da birimsiz hiperhalka ve $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ 'nin alt hiperhalkasıdır.

4.1.9.Örnek: Birimleri farklı olan hiperhalka ve alt hiperhalka örneği verecek olursak, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ birimli bir hiperhalkadır ve $(1,1)$, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ 'nin birimidir. $\{0\} \times \mathbb{Z}$ alt hiperhalkasında ise $\{0\} \times \mathbb{Z}$ 'nin birimi $(0,1)$ 'dir ama $(0,1) \neq (1,1)$ 'dir [13].

4.1.10.Tanım: \mathbb{E} bir hiperhalka olsun. Her $a \in \mathbb{E}$ için $na = 0$ yapan n pozitif tam sayılarının en küçüğüne \mathbb{E} 'nin karakteristiği denir ve $\text{kar}(\mathbb{E})$ şeklinde gösterilir.

Eğer böyle bir n bulunamıyorsa $\text{kar}(\mathbb{E}) = 0$ 'dır [13].

4.1.10.Örnek: $\mathbb{Z}_5 = \{ \bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4} \}$ in karakteristiği,

$$m.\bar{1} = \bar{0},$$

$$m = 5 \text{ tir.}$$

Not: m asal ise \mathbb{Z}_m 'nin karakteristiği m 'dir.

4.1.11.Tanım: $(\mathbb{E}, +, \cdot)$ cebirsel yapısı bir hiperhalka ve \mathbb{N} de boş küme olmayan farklı bir küme olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa \mathbb{N} 'ye \mathbb{E} hiperhalkasının hiperideali denir [21].

- a.) $\forall a, b \in \mathbb{N}$ için $a-b \in \mathbb{N}$,
b.) $\forall r \in \mathbb{E}$ ve $\forall x \in \mathbb{N}$ için $rx \subseteq \mathbb{N}$ ise,

4.1.11.Örnek : $\mathbb{E} = \{0,1,2\}$ ve $\mathbb{N} = \{0,2\}$ olduğunu varsayalım. '+' hipertoplamasını ve '.' hiperçarpımını tabloyla tanımlarsak,

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	\mathbb{E}	1
2	2	1	\mathbb{N}

.	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	0

$(\mathbb{E}, +, \cdot)$ bir hiperhalkadır. \mathbb{N} , \mathbb{E} 'nin hiperideali [21].

4.1.12.Örnek: \mathbb{N} ve \mathbb{P} , \mathbb{E} 'nin iki hiperideali olsun. $\mathbb{N} \cap \mathbb{P}$ 'nin \mathbb{E} 'de bir hiperideal olduğunu gösterecek olursak ,

\mathbb{N} ve \mathbb{P} , \mathbb{E} 'nin hiperideali olduğundan aynı zamanda değişmeli alt hipergruplarıdır. $0 \in \mathbb{P}$ ve

$0 \in \mathbb{N}$ 'dir. Böylece $0 \in \mathbb{N} \cap \mathbb{P}$ 'dir. $\emptyset \neq \mathbb{N} \cap \mathbb{P} \subseteq \mathbb{E}$ 'dir.

Tüm $x, y \in \mathbb{N} \cap \mathbb{P}$ ler için $x, y \in \mathbb{P}$ ve $x, y \in \mathbb{N}$ 'dir. \mathbb{N} ile \mathbb{P} alt hiperhalka olduğundan $x+y, xy \in \mathbb{N}$ ve $x+y, xy \in \mathbb{P}$ 'dir. Her $r \in \mathbb{N} \cap \mathbb{P}$, $r \in \mathbb{E}$ için \mathbb{N} hiperideal olduğundan $rx, xr \in \mathbb{N}$ ve \mathbb{P} hiperideal olduğundan $xr, rx \in \mathbb{P}$ 'dir. Bundan dolayı $\mathbb{N} \cap \mathbb{P}$, \mathbb{E} 'nin hiperidealidir [13].

4.1.12.Tanım: \mathbb{E} bir hiperhalka, \mathbb{E} 'nin hiperidealleri üzerindeki artan zincir koşulunu sağlıyorsa Noetherian olarak adlandırılır. Artan hiperidealler zinciri $\mathbb{N}_1 \subseteq \mathbb{N}_2 \subseteq \mathbb{N}_3 \subseteq \dots \dots \mathbb{N}_n = \mathbb{N}_{\mathbb{N}}$ olacak şekilde $n \in \mathbb{N}$ vardır [22].

4.1.13.Tanım: \mathbb{E} hiperhalka, \mathbb{E} 'nin hiperidealleri üzerinde azalan zincir koşulunu sağlıyorsa Artinian olarak adlandırılır [22].

4.1.14.Tanım: Her doğal sayı için azalan hiperideal zinciri $\mathbb{N}_1 \supseteq \mathbb{N}_2 \supseteq \mathbb{N}_3 \supseteq \dots n \in \mathbb{N}$ vardır. Azalan her hiperideal zincirinin bir minimal elamanı vardır [21].

Herhangi sonlu bir hiperhalkanın hem Noether hem de Artinian olduğu açıktır. Çünkü hiperideal zinciri olması için sonlu artan veya azalan olması gerekir [22].

4.1.15.Tanım : \mathbb{N} , \mathbb{E} hiperhalkasının bir hiperideali olmak üzere,

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{B} \subseteq \mathbb{E}$$

olacak şekilde bir hiperideali bulunamıyorsa \mathbb{N} hiperidealine \mathbb{E} 'nin bir maksimal hiperideali denir [22].

4.1.16.Tanım: \mathbb{E} hiperhalka ve sıfır olmayan maksimum hiperideale sahip ise \mathbb{E} 'ye local hiperhalka adı verilir [23].

4.1.17.Tanım: \mathbb{E} değişmeli bir hiperhalka $\mathbb{N} \neq \mathbb{E}$, \mathbb{E} 'nin bir hiperideali olmak üzere

tüm $a, b \in \mathbb{E}$ ler için,

$$a.b \in \mathbb{N} \Rightarrow a \in \mathbb{N} \text{ veya } b \in \mathbb{N},$$

koşulunu sağlıyorsa \mathbb{N} 'ye \mathbb{E} 'nin bir asal hiperideali denir [24].

4.1.13.Örnek: a bir asal sayı olmak üzere $a\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$, $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ hiperhalkasının bir asal hiperidealidir. \mathbb{R} değişmeli bir hiperhalka ise her maksimal hiperideal bir asal hiperidealdir.

4.1.14.Örnek: \mathbb{Z}_A çarpımsal hiperhalka olsun. $A = \{2, 3\}$ olsun. Bu durumda bir asal tam sayı tarafından üretilen tüm temel hiperidealler asal hiperideallerdir [25].

4.1.18.Tanım: \mathbb{E} 'nin bir asal hiperideali \mathbb{N} , tüm asallar arasında minimum ise \mathbb{N} 'ye minimal asal hiperideal denir [25].

4.1.19.Tanım: \mathbb{E} bir hiperhalka ve \mathbb{N} 'de \mathbb{E} 'nin bir hiperideali olsun. \mathbb{N} radikali,

$$\text{Rad}(\mathbb{N}) = \{r \in \mathbb{E} : r^n \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{IN}^+\} \text{dir [26].}$$

4.1.20.Tanım: \mathbb{E} bir hiperhalka ve \mathbb{N} bir \mathbb{E} hiperhalkasının hiperideali olsun. $x, y \in \mathbb{E}$;

$xy \in \mathbb{N}$ olduğunda $x \notin \mathbb{N}$ ve $k \in \mathbb{IN}$ için $y^k \in \mathbb{N}$ ise \mathbb{N} hiperidealine asalımsı hiperideal denir [26].

4.1.21.Tanım: \mathbb{E} değişmeli bir hiperhalka ve \mathbb{N} 'de \mathbb{E} hiperhalkasının bir hiperideali olsun. Eğer hiperideal \mathbb{N} 'nin,

$$\text{Rad}(\mathbb{N}) = \mathbb{P} \text{ radikali asal ise,}$$

\mathbb{N} 'ye \mathbb{P} asalımsı denir[25].

4.1.15.Örnek: Değişmeli çarpımsal hiperideallerde bütün asal hiperidealler asalımsı hiperideallerdir. Bütün çift tam sayıların kümesi, \mathbb{P} olsun. Çift tam sayılardan oluştuğundan asalımsı hiperidealdirler ancak asal değildirler [25].

4.1.22.Tanım: $(\mathbb{E}_1, +_1, o_1)$ ve $(\mathbb{E}_2, +_2, o_2)$ iki hiperhalka olsun. $f: \mathbb{E}_1 \rightarrow \mathbb{E}_2$ fonksiyonu tanımlansın. $\forall a, b \in \mathbb{E}_1$ için

$$1) f(a +_1 b) \subseteq f(a) +_2 f(b),$$

$$2) f(a o_1 b) = f(a) o_2 f(b),$$

koşulları sağlanıyorsa f 'ye hiperhalka homomorfizmi denir [8].

4.1.23.Tanım: Homomorfizmalar, bire bir ise buna monomorfizma, örten bir homomorfizmaysa epimorfizm, hem bire bir hem de örten homomorfizmse buna izomorfizm denir [6].

4.1.24.Tanım: \mathbb{E} bir hiperhalka olsun. $x \in \mathbb{E}$ ve $x^m = 0$ olmak üzere $\exists m \geq 1$ tam sayısı varsa x 'e nilpotent eleman adı verilir.

4.1.16.Örnek: \mathbb{Z}_8 'de nilpotent elemanları bulalım.

$$\overline{2}^m = 0 \quad m = 3,$$

$$\overline{4}^m = 0 \quad m = 2,$$

$$\overline{6}^m = 0 \quad m = 3 \text{ dir.}$$

Buna göre $\overline{2}$, $\overline{4}$, $\overline{6}$ 'dır.

4.1.25.Tanım: $(\mathbb{E}, +, \cdot)$ değişmeli bir hiperhalka, $x \in \mathbb{E}$ olsun. Eğer $(x) = x \cdot x = x^2$ ise x 'e idempotent eleman denir.

4.2. Krasner Hiperhalkası

4.2.1.Tanım: $(\mathbb{E}, +, \cdot)$ hiperhalkası aşağıdaki şartları sağlıyorsa Krasner hiperhalkasıdır.

- 1) $(\mathbb{E}, +)$ cebirsel yapısı kanonik hipergrup,
 - a) $a, b \in \mathbb{E} \Rightarrow a+b \in \mathbb{E}$,
 - b) Her $a, b, c \in \mathbb{E}$ için $a+(b+c) = (a+b)+c$,
 - c) Her $a, b \in \mathbb{E}$ $a+b = b+a$,
 - d) $\exists 0 \in \mathbb{E} \quad \exists -a \in \mathbb{E} \quad 0 \in a+x \Leftrightarrow x = -a$,
 - e) Her $a, b, c \in \mathbb{E} \quad c \in a+b \Rightarrow a \in c+(-b)$ olması gerekir.

2) (\mathbb{E}, \cdot) yarı hipergrubu iki taraflı yutan elemana sahiptir.

$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ olacak şekilde 0 elemanı vardır.

- a) $a, b \in \mathbb{E} \Rightarrow a \cdot b \in \mathbb{E}$,
- b) Her $a, b, c \in \mathbb{E} \Rightarrow a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$,
- c) Her $a \in \mathbb{E} \Rightarrow 0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$ olması gerekir.

3) Tüm $a, b, c \in \mathbb{E}$ ler için,

$$a.(b+c) = a.b+a.c \text{ ve}$$

$$(b+c).a = b.a+c.a,$$

ise Krasner hiperhalkası adı verilir [27].

4.2.1.Örnek: $\mathbb{E} = \{-1, 0, 1\}$ kümesi aşağıda verilen hipertoplama ve hiperçarpıma göre

$(\mathbb{E}, +, \cdot)$ Krasner hiperhalkasıdır [28].

+	0	1	-1
0	0	1	-1
1	1	1	\mathbb{E}
-1	-1	\mathbb{E}	-1

.	0	1	-1
0	0	0	0
1	0	1	-1
-1	0	-1	1

4.3. Çarpımsal Hiperhalkalar

4.3.1.Tanım: \mathbb{E} bir hiperhalka olsun, bu hiperhalka için bir hiperişlem tanımlansın.

$(\mathbb{E}, +, o)$ cebirsel ifadesi,

- i) $(\mathbb{E}, +)$ değişmeli hipergruptur.
- ii) (\mathbb{E}, o) yarı hipergruptur.

- iii) Her $x, y, z \in \mathbb{E}$ için $xo(y+z) \subseteq xoy+xoz$ ve $(y+z) o x \subseteq yox+zox$ 'dir.
- iv) Her $x, y \in \mathbb{E}$ için $xo(-y) = (-x)oy = -(xoy)$ şartlarını sağlıyorsa çarpımsal hiperhalka adını alır.

Eğer (iii) te eşitlik var ise güçlü dağılımlı çarpımsal hiperhalka denir[9].

4.3.1.Örnek: \mathbb{Z} tam sayılar kümesi olduğu $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ için hiperişlem $aob = \{2ab, 3ab\}$ şeklinde tanımlansın.

i) $(\mathbb{Z}, +)$ değişmeli hipergruptur.

ii) $ao(boc) = ao\{2bc, 3bc\} = \{4abc, 6abc, 6abc, 9abc\}$,
 $(aob)oc = \{2ab, 3ab\}oc = \{4abc, 6abc, 6abc, 9abc\}$,
 $ao(boc) = (aob)oc$ olur.

iii.) $ao(b+c) \subseteq aob + aoc$,

$$ao(b+c) = \{2a(b+c), 3a(b+c)\} \subseteq \{2ab, 3ab\} + \{2ac, 3ac\} = aob+aoc \text{ 'dir.}$$

$$ao(b+c) \subseteq aob+aoc \text{ sağlar.}$$

iv.) $(-a)ob = \{-2ab, -3ab\}$,
 $ao(-b) = \{-2ab, -3ab\}$,
 $-aob = \{-2ab, -3ab\}$,

$(-a)ob = bo(-a) = -(aob)$ olduğundan şartları sağlar. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ cebirsel yapısı tanımlanan hiperişleme göre çarpımsal hiperhalkadır.

4.3.2.Örnek: $(\mathbb{E}, +, \cdot)$ bir hiperhalka ve \mathbb{N} 'de \mathbb{E} 'nin bir hiperideali olsun. Bu hiperişlemi şu şekilde tanımlarız;

Her $a, b \in \mathbb{E}$ için $aob = ab + \mathbb{N}$ ve $(\mathbb{E}, +, o)$ çarpımsal bir hiperhalkadır.

i.) $(\mathbb{E}, +)$ değişmeli hipergruptur.

ii.) Her $a, b, c \in \mathbb{E}$ için $a o (b o c) = a o (bc + \mathbb{N}) = \bigcup_{h \in \mathbb{N}} a o (bc + h)$
 $= \bigcup_{h \in \mathbb{N}} a(bc + h) + \mathbb{N} = abc + \mathbb{N}$ ve $(a o b) o c = abc + \mathbb{N}$ dir.

iii.) Her $a, b, c \in \mathbb{E}$ için $a o (b + c) = a(b + c) + \mathbb{N} = ab + ac + \mathbb{N} = a o b + a o c$ ve aynı şekilde $(b + c) o a = b o a + c o a$ olur.

iv.) Her $a, b \in \mathbb{E}$ için; $ao(-b) = a(-b) + \mathbb{N} = (-a)o b$ ve $-(aob) = (-ab) + \mathbb{N} = (-a)b + \mathbb{N} = ao(-b)$ 'dir [8].

4.3.3.Örnek: $(\mathbb{E}, +, \cdot)$ sıfırdan farklı hiperhalka olmak üzere,

Tüm $a, b \in \mathbb{E}$ ler için; hiperişlemi $a \circ b = \{ab, 2ab, 3ab, \dots\}$ ile tanımlayalım. $(\mathbb{E}, +, \circ)$ güçlü dağılımlı olmayan çarpımsal bir hiperhalkadır [8].



5.HİPERCİSİM VE HİPERMODÜL

5.1.Hipercisim

5.1.1.Tanım: Bir hipercisim; boş olmayan bir kümeden, bir hiperişlemden ve bir işlem den oluşur. Boştan farklı bir \mathbb{L} kümesinde $+$ hiperişlemi ve \cdot işlemi tanımlansın. Aşağıdaki koşullar sağlanırsa $(\mathbb{L}, +, \cdot)$ cebirsel yapısına hipercisim denir[29].

- i.) $(\mathbb{L}, +)$ değişmeli hipergruptur.
- ii.) $(\mathbb{L}-\{0\}, \cdot)$ bir değişmeli gruptur.
- iii.) işleminin $+$ hiperişlemi üzerine dağılma özelliği vardır.

Yani bir hiperhalkanın sıfır hariç bütün elemanlarının kümesi çarpımsal grup oluyorsa bu yapıya hipercisim denir.

5.1.1.Örnek: $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ değişmeli bir hiperhalkadır. $\mathbb{R}-\{0\}$ de ki elemanların \cdot 'ya göre tersi olduğundan $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ aynı zamanda hipercisimdir.

5.1.2.Örnek: $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ değişmeli bir hiperhalkadır ama hipercisim değildir.

- 1) $(\mathbb{Z}, +)$ değişmeli hipergruptur.
- 2) $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ve $a.(b.c) = a.(b.c)$ olduğundan (\mathbb{Z}, \cdot) yarı hipergruptur.
- 3) $a, b, c \in \mathbb{Z}$ olsun.

$$a.(b+c) = a.b + a.c \text{ ve } (b+c).a = b.a + c.a ,$$

şartlarını sağladığından $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ cebirsel yapısı hiperhalkadır.

- 4) Her $a, b \in \mathbb{Z}$ için,

$$a.b = b.a \text{ ise değişmeli hiperhalkadır.}$$

$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ değişmeli bir hiperhalka şartlarını sağlar ama $\mathbb{Z} -\{0\}$ daki elemanların \cdot ' ya göre tersi bulunmadığı için, $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ bir hipercisim değildir.

5.1.2.Tanım: $(\mathbb{L}, +, \cdot)$ bir Krasner hiperhalkası ve $(\mathbb{L} - \{0\}, \cdot)$ değişmeli grupsa bu Krasner hiperhalkasına Krasner hipercismi denir.

5.1.3.Tanım: \mathbb{L} bir hipercisim ve \mathbb{L} 'nin bir alt hiperhalkası \mathbb{K} olsun. Eğer \mathbb{K} hiperhalkası \mathbb{L} 'nin tanımlı işlemlerine göre bir hipercisim ise \mathbb{K} 'ye \mathbb{L} 'nin alt hipercismi denir[29].

5.1.4.Tanım: $(\mathbb{L}_1, +_1, o_1)$ ve $(\mathbb{L}_2, +_2, o_2)$ iki hiperhalka olsun. $(\mathbb{L}_1 - \{0\}, o_1)$ ve $(\mathbb{L}_2 - \{0\}, o_2)$ değişmeli grup ise $(\mathbb{L}_1, +_1, o_1)$ ve $(\mathbb{L}_2, +_2, o_2)$ cebirsel yapıları birer hipercisimdir. $f: \mathbb{L}_1 \rightarrow \mathbb{L}_2$ fonksiyonu tanımlansın. $\forall a, b \in \mathbb{L}_1$ için,

$$f(a +_1 b) \subseteq f(a) +_2 f(b),$$

$$f(a o_1 b) = f(a) o_2 f(b),$$

koşulları sağlanıyorsa f 'ye hipercisim homomorfizmi denir[29].

5.1.5.Tanım: Bir hipercismin kendinden başka hiçbir alt hipercismi bulunmuyorsa bu hipercisme asal hipercisim denir[29].

5.1.6.Tanım: \mathbb{L} cisminin, bir \mathbb{N} hiperidealine göre tanımlanan denklik sınıfları arasında;

$$(x+\mathbb{N}) + (y+\mathbb{N}) = (x+y)+\mathbb{N},$$

$$(x+\mathbb{N}) \cdot (y+\mathbb{N}) = (xy)+\mathbb{N},$$

ile tanımlanan $+$ ve \cdot işlemlerine göre \mathbb{L}/\mathbb{N} bir hipercisimdir. Bu hipercisme \mathbb{L} 'nin \mathbb{N} hiperidealine göre bölüm hipercismi denir [29].

5.2.Hipermodül

5.2.1.Tanım : $(\mathbb{E}, +, \cdot)$ bir hiperhalka, \mathbb{B} boştan farklı bir küme olsun. \mathbb{B} üzerinde \oplus ve \odot hiperişlemleri tanımlansın. \mathbb{B} kümesi aşağıdaki şartları sağlıyorsa, \mathbb{B} 'ye $(\mathbb{E}, +, \cdot)$ üzerinde sol hipermodül denir.

1.) (\mathbb{B}, \oplus) değişmeli bir hipergruptur.

2.) $\odot : \mathbb{E} \times \mathbb{B} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{B})$ ve her $a, b \in \mathbb{B}$ ve $r, s \in \mathbb{E}$ için aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

a.) $r \odot (a \oplus b) = (r \odot a) \oplus (r \odot b)$,

b.) $(r+s) \odot a = (r \odot a) \oplus (s \odot a)$,

c.) $(r.s) \odot a = r \odot (s \odot a)$,

$(\mathbb{B}, +, \odot)$ ' ye hipermodüldür denir [2].

5.2.1.Örnek: \mathbb{Z} kümesi $+$ hiperişlemine göre değişmeli bir hipergruptur. \mathbb{R} kümesi ise $+$ ve \cdot hiperişlemlerine göre bir hiperhalkadır. \mathbb{Z} 'ye $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ üzerinde hipermodül denir.

5.2.2.Tanım: $(\mathbb{B}, +, \cdot)$, \mathbb{E} hiperhalkası üzerinde bir hipermodül ve \mathbb{A} , \mathbb{B} 'nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. Eğer aşağıdaki aksiyomlar sağlanıyorsa $(\mathbb{A}, +, \cdot)$ 'ya $(\mathbb{B}, +, \cdot)$ 'nin bir alt hipermodülü denir [16].

- i.) $(\mathbb{A}, +)$, $(\mathbb{B}, +)$ 'nin bir alt hipergrubu,
- ii.) $\mathbb{E}\mathbb{A} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{A})$.

5.2.3.Tanım: \mathbb{B} bir \mathbb{E} -hipermodül; \mathbb{A} , \mathbb{B} 'nin bir alt hipermodülü ve $\mathbb{A} \neq \mathbb{B}$ olsun.

$r \in \mathbb{E}$, $m \in \mathbb{B}$ ve $rm \in \mathbb{A}$ olduğunda $m \in \mathbb{A}$ veya $r \in (\mathbb{A} : \mathbb{B})$ ise \mathbb{A} alt hipermodülüne asal alt hipermodül denir [10].

5.2.4.Tanım: $(\mathbb{B}_1, \oplus_1, \odot_1)$ ve $(\mathbb{B}_2, \oplus_2, \odot_2)$ hipermodülleri $(\mathbb{E}, +, \cdot)$ hiperhalkası üzerinde

$f: \mathbb{B}_1 \rightarrow \mathbb{B}_2$ dönüşümü verilsin. Tüm $m, n \in \mathbb{B}_1$ ve $x \in \mathbb{E}$ için;

$$f(m \oplus_1 n) \subseteq f(m) \oplus_2 f(n),$$

$$f(x \odot_1 m) \subseteq x \odot_2 f(m) \text{ bir yarı hipergrup,}$$

şartları sağlanırsa, f 'ye hipermodül homomorfizmi (\mathbb{E} -hiperhomomorfizma) denir [10].

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Marty tarafından 1934 yılında hiperyapı teorisi oluşturulmuş olup, hiperyapılar daha sonra geliştirilip birçok alanda kullanıldığı belirtilmiştir. Bu tez hiperyapılar üzerine çalışmaları toparlamıştır. Böylece bu konuda çalışacak olan araştırmacılara iyi bir kaynak teşkil ederek gelecekteki çalışmalara ışık tutacaktır.

Tez çalışmamızda hiperyapılar üzerine literatür taraması yapılmıştır. Klasik cebirsel yapılardan yola çıkarak hiper cebirsel yapılar oluşturulabilir. Tezimizde hipergrup, hiperhalka, hipercisim ve hipermodül kavramları tanıtılmıştır ve klasik cebirdeki birçok konunun hiperyapılarda araştırılabileceği sonucuna varılmıştır.

KAYNAKÇA

- [1] **Marty, F.** (1934). Sur une gen´eralization ´ de la notion de groupe. 8th Congress Math. Scandinaves, Stockholm, 45–49.
- [2] **P. Corsini, V. Leoreanu,** Applications of Hyperstructure Theory, Advances in Mathematics, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2003j.
- [3] **B. Davvaz,** Polygroup Theory and Related Systems, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2013.
- [4] **J. Mittas,** “Hypergroups canoniques,” Math. Balkanica, vol. 2, pp. 165–179, 1972.
- [5] **M. Koskas,** “Groupoids, semi-hypergroups and hypergroups,” Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, vol. 49, no. 2, p. 155, 1970.
- [6] **Zhan, Sony Sh and Jafarpour,** On hyperactions of hypergroups , Article in UPB Scientific Bulletin , Series A: Applied Mathematics and Physics, January 2011.
- [7] **M. Novák,** Potential of the “Ends lemma” to create ring-like hyperstructures from quasi-ordered (semi)groups, South Bohemia Mathem. Letters 17 (1), 39-50, 2009.
- [8] **B. Davvaz,** Hyperring theory and applications. 2007.
- [9] **Rota, R.,** (1990). “Strongly distributive multiplicative hyperrings”, J. Geom., 39: 130-138.
- [10] **Anvariye and Davvaz,** Construction of (M, N) -hypermodule over (R, S) -hyperring, Acta Univ. Sapientiae, Mathematica, (2019) 131–143.
- [11] **Prof. Dr. Çallıalp F.,** Örneklerle Soyut Cebir, Birsen Yayınevi, İstanbul, 2009.
- [12] **Erdoğan M. ve Yılmaz G.,** Soyut Cebir ve Sayılar Teorisi, Beykent Üniversitesi Yayınevi, İstanbul, 2008.
- [13] **Doğru O. ve ark.,** İlköğretim Matematik Öğretmenliği/Alan Bilgisi, Alan Bilgisi Yayınları, Ankara, 2014.
- [14] **Bağırılmaz N.,** Q Cismi Üzerindeki Trinomial Genişlemeler, Yüksek Lisans Tezi, 2006.
- [15] **Alizade R. ve Pancar A.,** Homoloji Cebire Giriş, On Dokuz Mayıs Üniversitesi, Samsun, 1999.
- [16] **Koç Ö.,** Bulanık Hipermodüller, Yüksek Lisans Tezi, İstanbul, 2014.
- [17] **Aydın N. ve ark.,** Soyut Cebir Problemleri ve Çözümleri, Paradigma Akademi Yayınları, 2015.
- [18] **P. Corsini,** Prolegomena of Hypergroup Theory, Second edition, Aviaın editore, 1993.

- [19] **M. Gionfriddo**, Hypergroups associated with multihomomorphisms between generalized graphs, *Convegno su sistemi binari e loro applicazioni*, Edited by P. Corsini. Taormina, 1978, pp. 161-174.
- [20] **E. Ozel Ay G. Yesilot**, “Some properties of 2-absorbing hyperideals of krasner hyperrings,” in *Proceedings of International Congress on Fundamental and Applied Sciences*, 2016.
- [21] **H.Bordbar, M.Novak and Irina Cristea**; A note on the support of a hypermodule. December 2018.
- [22] **D. Stratigopoulos**, Hyperanneaux non commutatifs: Hyperanneaux artiniens, centralisateur d’un hypermodule et theoreme de densite, *C. R. Acad. Sci. Paris* 269 (1969) 889–891.
- [23] **M. De Salvo**, Hyperrings and hyperfields, *Ann. Sci. Univ. Clermont-Ferrand II Math.* 22 (1984) 89–107.
- [24] **Procesi, R. and Rota, R.**, (1999). “On some classes of hyperstructures”, *Discrete Math.*, 208/209: 485-497.
- [25] **U. Dasgupta**, On prime and primary hyperideals of a multiplicative hyperring, 2012.
- [26] **R. Y. Sharp**, *Steps in commutative algebra*, 51. Cambridge university press, 2000.
- [27] **D. G. Northcott**, *Ideal theory*. Cambridge University Press, 2004, vol. 42.
- [28] **N. Ramaruban**, “Commutative hyperalgebra,” PhD thesis, University of Cincinnati, 2014.
- [29] **Anderson and Davis**, Hyperfield Grassmannians, *Advances in Mathematics*, (2019) 336-366.

ÖZGEÇMİŞ

Ad-Soyad : Mehmet Emin PEKOK

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans** : 2015, Dicle Üniversitesi, Ziya Gökalp Eğitim Fakültesi, İlköğretim Matematik Öğretmenliği
- **Yüksek Lisans** : 2024, İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalı

MESLEKİ DENEYİM:

- 2015-2016 Hani Kuyular Ortaokulu İlk. Matematik Öğretmeni
- 2016-2020 Sur Şefik Alakuş Ortaokulu İlk. Matematik Öğretmeni
- 2020'den Beri Sur Erimli Ortaokulu İlk. Matematik Öğretmeni