



T.C.

**KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**GENELLEŞTİRİLMİŞ TRIBONACCİ KUATERNİYONLARININ BAZI
ÖZELLİKLERİ ÜZERİNE**

**Leyla KARABULUT
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**DANIŞMAN
Dr. Öğr. Üyesi Gonca KIZILASLAN YILDIRIM**

KIRIKKALE 2023

Matematik Anabilim Dalında Leyla KARABULUT tarafından hazırlanan GENEL-
LEŐTİRİLMİŐ TRİBONACCİ KUATERNİYONLARININ BAZI ÖZELLİKLERİ ÜZE-
RİNE adlı Yüksek Lisans Tezinin Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onay-
larım.

Prof. Dr. Ali OLGUN

Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumu ve tezin **Yüksek Lisans Tezi** olarak bütün gereklilikleri yerine
getirdiğini onaylarım.

Dr. Öğr. Üyesi Gonca KIZILASLAN YILDIRIM

Danışman

Jüri Üyeleri

Başkan : Prof. Dr. Mehmet YILDIRIM

Üye(Danışman) : Dr. Öğr. Üyesi Gonca KIZILASLAN YILDIRIM

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Talha ARIKAN

17/07/2023

Bu tez ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek
Lisans derecesini onaylamıştır.

Prof. Dr. Recep ÇALIN

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

*2018 yılında aramızdan ayrılan canım annemin anısına
ve canım babama...*



ETİK BEYANI

Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Leyla KARABULUT

17.07.2023

ÖZET

GENELLEŞTİRİLMİŞ TRIBONACCI KUATERNİYONLARININ BAZI ÖZELLİKLERİ ÜZERİNE

KARABULUT, Leyla

Kırıkkale Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Gonca KIZILASLAN YILDIRIM

Temmuz 2023, 67 sayfa

Bu tezde, katsayıları sırasıyla keyfi Tribonacci sayıları ve Tribonacci-Lucas sayılarından alınarak Tribonacci ve Tribonacci-Lucas kuaterniyonlarının bir genellemesi tanımlanmıştır. Bu kuaterniyonlar için üreteç fonksiyonları ve Binet formülleri elde edilmiştir. Ayrıca, çeşitli toplam formülleri ve bir matris gösterimi elde edilmiştir. Son olarak ise Tribonacci ve Tribonacci-Lucas kuaterniyon polinomlarının bir genellemesi tanımlanmış ve bazı özdeşlikler elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Yineleme Bağlılıkları, Tam sayı Dizileri, Kuaterniyonlar, Kuaterniyon Dizileri, Kuaterniyon Polinomları.

ABSTRACT

ON SOME PROPERTIES OF GENERALIZED TRIBONACCI QUATERNIONS

KARABULUT, Leyla

Kırıkkale University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics, Master's Thesis

Supervisor: Dr. Gonca KIZILASLAN YILDIRIM

July 2023, 67 pages

In this thesis, a generalization of Tribonacci and Tribonacci-Lucas quaternions is defined by taking arbitrary Tribonacci numbers and Tribonacci-Lucas numbers coefficients, respectively. We get generating functions and Binet's formulas for these quaternions. Furthermore, several sum formulas and a matrix representation are obtained. Finally, a generalization of Tribonacci and Tribonacci-Lucas quaternion polynomials is defined and some identities are obtained.

Key Words: Recurrences, Integer Sequences, Quaternions, Quaternion Sequences, Quaternion Polynomials.

TEŐEKKÖR

Bu tez konusunu bana veren ve tezimin oluőma sűrecinde desteęini esirgemeyen danıőman hocam Dr. Öęr. Üyesi Gonca KIZILASLAN YILDIRIM'a en derin saygılarımı ve teőekkűrlerimi sunarım. Sevgileri, destekleri ve anlayıőları ięin babama, aileme ve aramızdan ayrılan ancak sevgisiyle her an benimle olan canım anneme teőekkűr ederim.



İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	vii
SİMGELER DİZİNİ	ix
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	5
2.1 Reel Kuaterniyon Cebiri	5
2.2 Sayı dizileri	6
2.3 Kuaterniyon dizileri	12
2.3.1 Kısıtlamasız Fibonacci ve Lucas Kuaterniyonları	12
2.3.2 Kısıtlamasız k – Fibonacci ve k – Lucas Kuaterniyonları	15
2.3.3 Kısıtlamasız Pell ve Pell-Lucas Kuaterniyonları	16
2.3.4 Tribonacci ve Tribonacci-Lucas Kuaterniyonu	18
2.3.5 Tribonacci ve Tribonacci-Lucas Kuaterniyon Polinomları	22
3. KISITLAMASIZ TRİBONACCİ ve TRİBONACCİ-LUCAS KUATER- NİYONLARI	26
3.1 Kısıtlamasız Tribonacci ve Tribonacci-Lucas Kuaterniyonları İçin Bazı Özdeşlikler	30
4. KISITLAMASIZ TRİBONACCİ ve TRİBONACCİ-LUCAS KUATER- NİYON POLİNOMLARI	47
4.1 Kısıtlamasız Tribonacci ve Tribonacci-Lucas Kuaterniyon Polinomla- rının Bazı Özellikleri	47

5. TARTIŞMA VE SONUÇ	61
KAYNAKLAR	62
ÖZGEÇMİŞ	67



SİMGELER DİZİNİ

T_n	n —inci Tribonacci sayısı
TK_n	n —inci Tribonacci-Lucas sayısı
Q_n	n —inci Fibonacci kuaterniyonu
K_n	n —inci Lucas kuaterniyonu
$\mathfrak{P}_n^{(p,r,s)}$	n —inci Kısıtlamasız Pell kuaterniyonu
$\mathfrak{Q}_n^{(p,r,s)}$	n —inci Kısıtlamasız Pell-Lucas kuaterniyonu
$\mathfrak{F}_n^{(p,r,s)}$	n —inci Kısıtlamasız Fibonacci kuaterniyonu
$\mathfrak{L}_n^{(p,r,s)}$	n —inci Kısıtlamasız Lucas kuaterniyonu
$\mathbf{T}Q_n$	n —inci Tribonacci kuaterniyonu
$\mathbf{T}\tilde{Q}_n$	n —inci Tribonacci-Lucas kuaterniyonu
$\mathbf{Q}_n^{(p,r,s)}$	n —inci Kısıtlamasız Tribonacci kuaterniyonu
$\tilde{\mathbf{Q}}_n^{(p,r,s)}$	n —inci Kısıtlamasız Tribonacci-Lucas kuaterniyonu
$\text{Tr}(q)$	q kuaterniyonunun izi
$Q_n^{(p,r,s)}(x)$	n —inci Kısıtlamasız Tribonacci kuaterniyon polinomu
$\tilde{Q}_n^{(p,r,s)}(x)$	n —inci Kısıtlamasız Tribonacci-Lucas kuaterniyon polinomu
$T_n(x)$	Tribonacci polinomu
$t_n(x)$	Tribonacci-Lucas polinomu

1 . GİRİŞ

Kuaterniyonlar ilk olarak İrlandalı matematikçi Sir William Rowan Hamilton tarafından tanımlanmıştır. 1983 yılında P. R. Girard kuaterniyon grubununun fiziğin çeşitli ana kovaryans gruplarıyla bağlantısını önemli fiziksel uygulamalarla birlikte analiz etmiştir. Kuaterniyonlar elastodinamik, kuantum mekaniği, elastisite teorisi ve modern bilimlerin farklı alanlarındaki birçok problemde karşılaşılmaması nedeniyle yaygın olarak çalışılmıştır, [18, 19, 40, 58].

a_0, a_1, a_2, a_3 reel sayılar ve $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = k = -ji$, $jk = i = -kj$, $ki = j = -ik$ olmak üzere tabanı $\{1, i, j, k\}$ olan $\mathbb{H}$ reel kuaterniyon cebirinden alınan bir q kuaterniyonu

$$q = 1a_0 + \mathbf{i}a_1 + \mathbf{j}a_2 + \mathbf{k}a_3$$

şeklindedir, [20, 23, 28]. Kuaterniyon cebirinin sıfır bölenleri yoktur. Dolayısıyla reel kuaterniyonlar, birleşmeli fakat değişmeli olmayan bir bölüm cebiridir. Kompleks sayılar ise kuaterniyonların bir alt cebirini oluşturur.

Hiper-kompleks sayı teorisinin başlangıcından bu yana, birçok araştırmacı bileşenleri özel sayı dizilerinden alınan kuaterniyonları, oktoniyonları ve sedeniyonları farklı şekillerde incelemiştir. Bileşenleri sayı dizilerinden alınarak elde edilen kuaterniyonlar kuaterniyon dizileri olarak adlandırılır. Kuaterniyon dizileri arasında en iyi bilineni Horadam tarafından tanımlanan Fibonacci kuaterniyon dizileridir, [26]. $n \geq 0$ için F_n n -inci Fibonacci sayısı olmak üzere n -inci Fibonacci kuaterniyonu

$$Q_n = F_n + \mathbf{i}F_{n+1} + \mathbf{j}F_{n+2} + \mathbf{k}F_{n+3},$$

şeklinde tanımlıdır, [11, 20, 26]. Dolayısıyla $Q_0 = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ ve $Q_1 = 1 + \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$

olmak üzere $n \geq 0$ için

$$Q_{n+2} = Q_{n+1} + Q_n \quad (1.1)$$

sağlanır, [2]. (1.1) denklemi ile verilen yineleme bağıntısının karakteristik denklemi

$$x^2 - x - 1 = 0$$

olup denklemin kökleri $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ şeklindedir. $\underline{\alpha} = 1 + \mathbf{i}\alpha + \mathbf{j}\alpha^2 + \mathbf{k}\alpha^3$ ve $\underline{\beta} = 1 + \mathbf{i}\beta + \mathbf{j}\beta^2 + \mathbf{k}\beta^3$ olmak üzere Fibonacci kuaterniyonunun Binet formülü

$$Q_n = \frac{\underline{\alpha}\alpha^n - \underline{\beta}\beta^n}{\underline{\alpha} - \underline{\beta}}$$

şeklindedir. Fibonacci kuaterniyonunun üreteç fonksiyonu

$$G(t) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n t^n = \frac{t + \mathbf{i} + \mathbf{j}(t+1) + \mathbf{k}(t+2)}{1 - t - t^2}$$

olarak elde edilir, [20].

Iyer benzer bir kuaterniyon dizisini katsayıları Lucas sayılarından alarak tanımlamıştır, [32]. $n \geq 0$ için L_n n -inci Lucas sayısı olmak üzere n -inci Lucas kuaterniyonu K_n

$$K_n = L_n + \mathbf{i}L_{n+1} + \mathbf{j}L_{n+2} + \mathbf{k}L_{n+3},$$

şeklinde tanımlanır, [11, 32]. Dolayısıyla $K_0 = 2 + \mathbf{i} + \mathbf{j}3 + \mathbf{k}4$ ve $K_1 = 1 + \mathbf{i}3 + \mathbf{j}4 + \mathbf{k}7$ olmak üzere $n \geq 0$ için

$$K_{n+2} = K_{n+1} + K_n$$

sağlanır, [2]. Lucas kuaterniyonunun Binet formülü

$$K_n = \underline{\alpha}\alpha^n + \underline{\beta}\beta^n$$

şeklindedir, [20]. Lucas kuaterniyonunun üreteç fonksiyonu ise

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} K_n t^n = \frac{(2-t) + \mathbf{i}(1+2t) + \mathbf{j}(3+2t) + \mathbf{k}(5+2t)}{1-t-t^2},$$

ile verilir, [23].

Fibonacci ve Lucas kuaterniyonları kapsamlı bir şekilde incelenmiş ve birçok genelleme yapılmıştır, [1–4, 7–11, 16–18, 20–23, 26, 28, 30–33, 36–40, 43, 44, 47–49, 51, 53, 55–58]. Bu çalışmalarda kuaterniyon dizilerinin Binet formülleri ve üreteç fonksiyonları elde edilmiş ve çeşitli özdeşlikler sunulmuştur. Catarino $h(x)$ -Fibonacci polinomlarını kullanarak $h(x)$ -Fibonacci kuaterniyon polinomlarını tanıtmıştır. $h(x)$ reel katsayılı bir polinom olsun. $h(x)$ -Fibonacci polinomları $\{F_{h,n}(x)\}_{n \geq 0}$ başlangıç koşulları

$$F_{h,0}(x) = 0, F_{h,1}(x) = 1$$

olmak üzere $n \geq 2$ için

$$F_{h,n}(x) = h(x)F_{h,n-1}(x) + F_{h,n-2}(x)$$

yineleme bağıntısı ile tanımlıdır, [45]. $h(x)$ -Fibonacci polinomlarının k -Fibonacci sayılarının, Catalan-Fibonacci polinomlarının ve Byrd-Fibonacci polinomlarının bir genelleştirmesi olduğu da görülebilir. $h(x)$ -Fibonacci kuaterniyon polinomları $\{Q_{h,n}(x)\}_{n=0}^{\infty}$,

$$Q_{h,n}(x) = F_{h,n}(x) + \mathbf{i}F_{h,n+1}(x) + \mathbf{j}F_{h,n+2}(x) + \mathbf{k}F_{h,n+3}(x)$$

yineleme bağıntısı ile tanımlanır. $h(x)$ -Fibonacci kuaterniyon polinomları için Binet formülü, üreteç fonksiyonu ve bazı temel özdeşlikler elde edilmiştir, [9]. Tribonacci ve Tribonacci-Lucas dizileri alınarak tanımlanan Tribonacci ve Tribonacci-Lucas kuaterniyonları da Fibonacci ve Lucas kuaterniyonlarının bir başka genelleştirmesidir, [1, 43]. Ayrıca bu dizilerin polinomsal genelleştirmeleri de çalışılmıştır, [44]. Çalışılan bütün bu kuaterniyon dizilerinin ortak özelliklerinden birisi bu kuaterniyonların bileşenlerinin ele alınan sayı dizilerinin ardışık terimlerinden seçilmesidir. Yakın zamanda bileşenleri bazı sayı dizilerinin keyfi terimlerinden alınarak elde edilen kuaterniyon dizileri

de tanımlanmış ve çeşitli özellikleri incelenmiştir, [3, 4, 11].

Üçüncü bölümde bileşenleri Tribonacci ve Tribonacci-Lucas dizilerinin keyfi terimlerinden alınan kısıtlamasız Tribonacci ve Tribonacci-Lucas kuaterniyon dizileri tanımlanacaktır, [35]. Dördüncü bölümde ise kısıtlamasız Tribonacci ve Tribonacci-Lucas kuaterniyon polinomları ele alınacaktır. Böylelikle daha önce çalışılmış olan bazı kuaterniyon dizileri genelleştirilmiş olacaktır. Tanımlanan diziler için Binet formülleri ve üreteç fonksiyonları elde edilecektir. Ayrıca bazı özellikler ve özdeşlikler verilecektir.



2 . TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Reel Kuaterniyon Cebiri

$q = a_0 + \mathbf{i}a_1 + \mathbf{j}a_2 + \mathbf{k}a_3$ reel kuaterniyon olsun. $u = \mathbf{i}a_1 + \mathbf{j}a_2 + \mathbf{k}a_3$ olmak üzere $q = a_0 + u$ şeklinde yazılabilir. a_0 , q kuaterniyonunun skaler kısmı ve u vektörel kısmı olarak adlandırılır, [20]. $a_0 - u$ kuaterniyonu q kuaterniyonunun eşleniği olarak adlandırılır ve q^* ile gösterilir. $N(q)$ ile gösterilen q kuaterniyonunun normu q ile q^* kuaterniyonunun çarpımına eşittir. Dolayısıyla $q \neq 0$ için q kuaterniyonunun tersi q^{-1} ile gösterilir ve

$$q^{-1} = q^* N(q)^{-1}$$

ile verilir. q kuaterniyonunun izi

$$\text{Tr}(q) = q + q^*$$

ile ifade edilir.

$q_1 = a_0 + \mathbf{i}a_1 + \mathbf{j}a_2 + \mathbf{k}a_3$ ve $q_2 = b_0 + \mathbf{i}b_1 + \mathbf{j}b_2 + \mathbf{k}b_3$ olmak üzere iki kuaterniyonun toplamı

$$q_1 + q_2 = (a_0 + b_0) + \mathbf{i}(a_1 + b_1) + \mathbf{j}(a_2 + b_2) + \mathbf{k}(a_3 + b_3)$$

ile ve $\alpha \in \mathbb{R}$ için bir kuaterniyonun skaler ile çarpımı

$$\alpha q_1 = \alpha a_0 + \mathbf{i}\alpha a_1 + \mathbf{j}\alpha a_2 + \mathbf{k}\alpha a_3$$

şeklinde tanımlanır, [56].

2.2. Sayı dizileri

Fibonacci dizisi $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ olmak üzere $n \geq 2$ için

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (2.1)$$

yineleme bağıntısı ile tanımlanır, [25]. (2.1) ile verilen yineleme bağıntısının karakteristik denklemi

$$x^2 - x - 1 = 0 \quad (2.2)$$

olup denklemin kökleri $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ şeklindedir. 1843 yılında Fransız matematikçi Jacques-Phillipe-Marie Binet, F_n için açık bir formül elde etmiştir. Bu formül $n \geq 0$ için

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

şeklindedir. Fibonacci dizisinin üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

olarak elde edilir, [3].

Lucas dizisi $L_0 = 2$, $L_1 = 1$ olmak üzere $n \geq 2$ için $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ yineleme bağıntısı ile tanımlanır. $n \geq 0$ için $L_n = \alpha^n + \beta^n$ Lucas sayı dizisinin Binet formülüdür, [16,41]. Binet formülleri kullanılarak negatif indisli Fibonacci ve Lucas sayıları da türetilir. Lucas dizisinin üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n x^n = \frac{2 - x}{1 - x - x^2}$$

olarak elde edilir, [3]. Fibonacci ve Lucas dizilerinin ilk birkaç terimi aşağıdaki tabloda verilmiştir.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233
L_n	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123	199	322	521

Fibonacci ve Lucas dizilerinin ilk birkaç terimi

Fibonacci ve Lucas dizilerinin bir genelleştirmesi k -Fibonacci ve k -Lucas dizileri olarak adlandırılır, [13]. $k \geq 1$ tam sayısı için, $\{F_{k,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ k -Fibonacci dizisi $F_{k,0} = 0$, $F_{k,1} = 1$ olmak üzere $n \geq 1$ için

$$F_{k,n+1} = kF_{k,n} + F_{k,n-1}$$

bağıntısı ile ve k -Lucas dizisi $\{L_{k,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ $L_{k,0} = 2$, $L_{k,1} = k$ olmak üzere $n \geq 1$ için

$$L_{k,n+1} = kL_{k,n} + L_{k,n-1},$$

bağıntısı ile tanımlanır, [12]. Doğal bir düşünce ile $\{F_{k,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ ve $\{L_{k,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizileri $n \geq 2$ için a, b, p, q tamsayılar ve $W_0 = a$, $W_1 = b$ olmak üzere

$$W_n = pW_{n-1} + qW_{n-2} \quad (2.3)$$

şeklinde genelleştirilmiştir. Bu dizi kısaca $\{W_n(a, b; p, q)\}$ ile gösterilir, [27]. (2.3) yineleme bağıntısının karakteristik denklemi $x^2 - px - q = 0$ şeklindedir. Bu dizinin Binet formülü $p^2 + 4q \geq 0$ için $\alpha = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$ ve $\beta = \frac{p - \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$ olmak üzere

$$W_n(a, b; p, q) = \frac{(b - a\beta)\alpha^n - (b - a\alpha)\beta^n}{\alpha - \beta}$$

formundadır. Bazı özel a, b, p, q değerleri için $\{W_n(a, b; p, q)\}$ dizisinin karşılık geldiği diziler aşağıdaki tabloda gösterilmiştir.

$W_n(a, b; p, q)$	a	b	p	q
Fibonacci	0	1	1	1
Lucas	2	1	1	1
Pell	0	1	2	1
Pell-Lucas	2	1	2	1
Jacobsthal	0	1	1	2
Jacobsthal-Lucas	2	1	1	2

İyi bilinen bazı sayı dizileri

e_i 'ler bir baz kümesinin elemanları ve w_i 'ler reel sayılar olmak üzere $2^N - on$ olarak bilinen hiper-kompleks sayılar, baz kümesindeki elemanların doğrusal kombinasyonları olarak

$$w = \sum_{i=0}^{2^N-1} w_i e_i = w_0 e_0 + w_1 e_1 + \dots + w_{2^N-1} e_{2^N-1}$$

şeklinde tanımlanabilir. Katsayıları Fibonacci ve Lucas dizilerinden alınarak elde edilen hiper-kompleks sayılar bu dizilerin bir başka genelleştirmesi olup Fibonacci ve Lucas hiper-kompleks sayı dizileri olarak adlandırılır, [5].

Fibonacci dizisi polinomsal olarak da genelleştirilmiştir. $h(x)$ reel katsayılı bir polinom olsun. $\{F_{h,n}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ ile gösterilen $h(x)$ -Fibonacci polinomları $F_{h,0}(x) = 0$ ve $F_{h,1}(x) = 1$ olmak üzere $n \geq 1$ için,

$$F_{h,n+1}(x) = h(x)F_{h,n}(x) + F_{h,n-1}(x)$$

yineleme bağıntısı ile tanımlanır, [45].

Fibonacci ve Lucas dizilerinin karakteristik polinomu ikinci derecedendir. Bu dizilerin bir diğer genelleştirmesi karakteristik polinomu üçüncü dereceden olan Tribonacci ve Tribonacci-Lucas dizileridir. Tribonacci dizisi $T_0 = T_1 = 1, T_2 = 2$ olmak üzere $n \geq 2$

için

$$T_{n+1} = T_n + T_{n-1} + T_{n-2} \quad (2.4)$$

yineleme bağıntısı ile tanımlanır, [15,54,55,60]. (2.4) ile verilen yineleme bağıntısının karakteristik denklemi

$$x^3 - x^2 - x - 1 = 0 \quad (2.5)$$

olduğundan $w = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ olmak üzere denklemin kökleri

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1 + \sqrt[3]{19 + 3\sqrt{33}} + \sqrt[3]{19 - 3\sqrt{33}}}{3} \\ \beta &= \frac{1 + w\sqrt[3]{19 + 3\sqrt{33}} + w^2\sqrt[3]{19 - 3\sqrt{33}}}{3} \\ \gamma &= \frac{1 + w^2\sqrt[3]{19 + 3\sqrt{33}} + w\sqrt[3]{19 - 3\sqrt{33}}}{3} \end{aligned} \quad (2.6)$$

olarak elde edilir. Tribonacci dizisi için Binet formülü

$$T_n = \frac{\alpha^{n+2}}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)} + \frac{\beta^{n+2}}{(\beta - \alpha)(\beta - \gamma)} + \frac{\gamma^{n+2}}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)} \quad (2.7)$$

şeklindedir, [14, 15, 34, 54]. Tribonacci dizisinin üreteç fonksiyonu

$$G_{T_n} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n x^n = \frac{1}{1 - x - x^2 - x^3}$$

olarak elde edilir, [1].

Tribonacci-Lucas dizisi $TK_0 = 3, TK_1 = 1, TK_2 = 3$ olmak üzere $n \geq 2$ için

$$TK_{n+1} = TK_n + TK_{n-1} + TK_{n-2} \quad (2.8)$$

yineleme bağıntısı ile tanımlanır, [60]. Tribonacci-Lucas dizisi için Binet formülü

$$TK_n = \alpha^n + \beta^n + \gamma^n \quad (2.9)$$

şeklindedir, [60]. Binet formülleri kullanılarak negatif indisli Tribonacci ve Tribonacci-Lucas sayıları da türetilir.

Tribonacci-Lucas dizisinin üreteç fonksiyonu

$$G_{TK_n} = \sum_{n=0}^{\infty} TK_n x^n = \frac{3 - 2x - x^2}{1 - x - x^2 - x^3}$$

olarak elde edilir, [6]. Tribonacci ve Tribonacci-Lucas dizilerinin ilk birkaç terimi aşağıdaki tabloda verilmiştir.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
T_n	1	1	2	4	7	13	24	44	81	149	274	504	927	1705
TK_n	3	1	3	7	11	21	39	71	131	241	443	815	1499	2757

Tribonacci ve Tribonacci-Lucas dizilerinin ilk birkaç terimi

Tribonacci ve Tribonacci-Lucas dizilerinin genelleştirmesi üzerine de çeşitli çalışmalar yapılmıştır, [6, 14, 15, 34, 42, 46, 52, 54, 59, 60]. Bu genelleştirmelerden birisi Fibonacci polinomunun tanımından yola çıkılarak tanımlanan Tribonacci ve Tribonacci-Lucas polinomlarıdır, [24, 44, 50]. Tribonacci polinomu $\{T_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$, $T_0(x) = 0$, $T_1(x) = 1$, $T_2(x) = x^2$ olmak üzere herhangi bir pozitif x reel sayısı ve $n \geq 3$ için

$$T_n(x) = x^2 T_{n-1}(x) + x T_{n-2}(x) + T_{n-3}(x) \quad (2.10)$$

yineleme bağıntısı ile tanımlanır. (2.10) denklemi ile verilen yineleme bağıntısının karakteristik denklemi

$$\lambda^3 - x^2 \lambda^2 - x \lambda - 1 = 0 \quad (2.11)$$

olup denklemin kökleri

$$A(x) = \sqrt[3]{\frac{x^6}{27} + \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{x^6}{37} + \frac{7x^3}{54} + \frac{1}{4}}, \quad B(x) = \sqrt[3]{\frac{x^6}{27} + \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{x^6}{37} + \frac{7x^3}{54} + \frac{1}{4}}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}\alpha(x) &= \frac{x^2}{3} + A(x) + B(x) \\ w_1(x) &= \frac{x^2}{3} + wA(x) + w^2B(x) \\ w_2(x) &= \frac{x^2}{3} + w^2A(x) + wB(x)\end{aligned}\tag{2.12}$$

şeklindedir. Dolayısıyla

$$\alpha(x) + w_1(x) + w_2(x) = x^2\tag{2.13}$$

$$\alpha(x)w_1(x)w_2(x) = 1\tag{2.14}$$

olduğu görülebilir. $n \geq 0$ için

$$\begin{aligned}T_n(x) &= \frac{\alpha^{n+1}(x)}{(\alpha(x) - w_1(x))(\alpha(x) - w_2(x))} + \frac{w_1^{n+1}(x)}{(w_1(x) - \alpha(x))(w_1(x) - w_2(x))} \\ &+ \frac{w_2^{n+1}(x)}{(w_2(x) - \alpha(x))(w_2(x) - w_1(x))}\end{aligned}\tag{2.15}$$

Tribonacci polinomu için Binet formülüdür. Tribonacci polinomunun üreteç fonksiyonu

$$G(y) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)y^n = \frac{y}{1 - x^2y - xy^2 - y^3}\tag{2.16}$$

olarak elde edilir. (2.16) denkleminde $x = 1$ alındığında başlangıç koşulları $T_0 = 0, T_1 = 1, T_2 = 1$ olan Tribonacci dizisinin üreteç fonksiyonu elde edilir.

Tribonacci-Lucas polinomu $\{t_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$, $t_0(x) = 3$, $t_1(x) = x^2$, $t_2(x) = x^4 + 2x$ olmak üzere herhangi bir pozitif x reel sayısı ve $n \geq 3$ için

$$t_n(x) = x^2t_{n-1}(x) + xt_{n-2}(x) + t_{n-3}(x)\tag{2.17}$$

yineleme bağıntısı ile tanımlanır. $n \geq 0$ için

$$t_n(x) = \alpha^n(x) + w_1^n(x) + w_2^n(x) \quad (2.18)$$

Tribonacci Lucas polinomu için Binet formülüdür. Tribonacci Lucas polinomunun üreteç fonksiyonu

$$g(y) = \sum_{n=0}^{\infty} t_n(x)y^n = \frac{3 - 2x^2y - xy^2}{1 - x^2y - xy^2 - y^3} \quad (2.19)$$

şeklindedir. (2.19) denkleminde $x = 1$ alındığında Tribonacci-Lucas dizisinin üreteç fonksiyonu elde edilir.

2.3. Kuaterniyon dizileri

Bu bölümde bileşenleri bazı sayı dizilerinin keyfi terimleri alınarak elde edilen kuaterniyon dizilerinin tanımları verilecek ve çeşitli özellikleri ele alınacaktır. Ayrıca Tribonacci ve Tribonacci-Lucas kuaterniyonları ile bu kuaterniyonların polinomsal bir genelleştirmesinden bahsedilecektir.

2.3.1. Kısıtlamasız Fibonacci ve Lucas Kuaterniyonları

Bileşenleri Fibonacci ve Lucas sayı dizileri ile bu dizilerin genelleştirmelerinden alınarak elde edilen kuaterniyon dizileri bugüne kadar kapsamlı bir şekilde incelenmiştir. Bu çalışmalarda kuaterniyonların katsayıları ele alınan sayı dizilerinin ardışık terimlerinden seçilmiştir. Yakın zamanda bileşenleri Fibonacci ve Lucas dizilerinin keyfi terimleri alınarak yeni kuaterniyon dizileri tanımlanmıştır, [11].

p, r, s keyfi tam sayılar olmak üzere n –inci kısıtlamasız Fibonacci kuaterniyonu

$$\mathfrak{F}_n^{(p,r,s)} = F_n + \mathbf{i}F_{n+p} + \mathbf{j}F_{n+r} + \mathbf{k}F_{n+s}$$

şeklinde tanımlıdır, [11]. Benzer şekilde n –inci kısıtlamasız Lucas kuaterniyonu

$$\mathfrak{L}_n^{(p,r,s)} = L_n + \mathbf{i}L_{n+p} + \mathbf{j}L_{n+r} + \mathbf{k}L_{n+s}$$

ile tanımlıdır. Buradan n –inci kısıtlamasız Fibonacci kuaterniyonu ve n –inci kısıtlamasız Lucas kuaterniyonu başlangıç koşulları sırasıyla

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}_0^{(p,r,s)} &= \mathbf{i}F_p + \mathbf{j}F_r + \mathbf{k}F_s, \\ \mathfrak{F}_1^{(p,r,s)} &= 1 + \mathbf{i}F_{1+p} + \mathbf{j}F_{1+r} + \mathbf{k}F_{1+s} \\ \mathfrak{L}_0^{(p,r,s)} &= 2 + \mathbf{i}L_p + \mathbf{j}L_r + \mathbf{k}L_s, \\ \mathfrak{L}_1^{(p,r,s)} &= 1 + \mathbf{i}L_{1+p} + \mathbf{j}L_{1+r} + \mathbf{k}L_{1+s}\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\mathfrak{F}_n^{(p,r,s)} = \mathfrak{F}_{n-1}^{(p,r,s)} + \mathfrak{F}_{n-2}^{(p,r,s)} \quad (2.20)$$

$$\mathfrak{L}_n^{(p,r,s)} = \mathfrak{L}_{n-1}^{(p,r,s)} + \mathfrak{L}_{n-2}^{(p,r,s)} \quad (2.21)$$

yineleme bağıntıları ile tanımlanır.

p, r, s sayılarının seçilen özel değerlerine göre daha önce çalışılan bazı kuaterniyon dizileri elde edilir. Örneğin, $p = r = s = -n$ için klasik Fibonacci sayıları

$$\mathfrak{F}_n^{(-n,-n,-n)} = F_n,$$

$p = 1$ ve $r = s = -n$ için Gauss Fibonacci sayıları

$$\mathfrak{F}_n^{(1,-n,-n)} = F_n + \mathbf{i}F_{n+1},$$

$p = 1, r = 2$ ve $s = 3$ için klasik Fibonacci ve Lucas kuaterniyonları

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}_n^{(1,2,3)} &= Q_n = F_n + \mathbf{i}F_{n+1} + \mathbf{j}F_{n+2} + \mathbf{k}F_{n+3} \\ \mathfrak{L}_n^{(1,2,3)} &= K_n = L_n + \mathbf{i}L_{n+1} + \mathbf{j}L_{n+2} + \mathbf{k}L_{n+3}\end{aligned}$$

elde edilir.

(2.20) ve (2.21) ile verilen yineleme bağıntılarının karakteristik denklemi (2.2) olup denklemin kökleri $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ şeklindedir. n tam sayı ve $\underline{\alpha} = 1 + \mathbf{i}\alpha^p + \mathbf{j}\alpha^r + \mathbf{k}\alpha^s$, $\underline{\beta} = 1 + \mathbf{i}\beta^p + \mathbf{j}\beta^r + \mathbf{k}\beta^s$ olmak üzere kısıtlamasız Fibonacci kuaterniyonu için Binet formülü

$$\mathfrak{F}_n^{(p,r,s)} = \frac{\underline{\alpha}\alpha^n - \underline{\beta}\beta^n}{\alpha - \beta},$$

şeklindedir, [11].

Kısıtlamasız Fibonacci kuaterniyonu için üreteç fonksiyonu

$$G_{\mathfrak{F}}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{F}_n^{(p,r,s)} x^n = \frac{\mathfrak{F}_0^{(p,r,s)} + \mathfrak{F}_{-1}^{(p,r,s)} x}{1 - x - x^2},$$

olarak elde edilir, [11]. Ayrıca

$$E_{\mathfrak{F}}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{F}_n^{(p,r,s)} \frac{x^n}{n!} = \frac{\underline{\alpha}e^{\alpha x} - \underline{\beta}e^{\beta x}}{\alpha - \beta}$$

kısıtlamasız Fibonacci kuaterniyonunun üstel üreteç fonksiyonudur, [11].

Kısıtlamasız Lucas kuaterniyonu için Binet formülü

$$\mathfrak{L}_n^{(p,r,s)} = \underline{\alpha}\alpha^n + \underline{\beta}\beta^n$$

şeklindedir, [11]. Kısıtlamasız Lucas kuaterniyonu için üreteç fonksiyonu

$$G_{\mathfrak{L}}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{L}_n^{(p,r,s)} x^n = \frac{\mathfrak{L}_0^{(p,r,s)} + \mathfrak{L}_{-1}^{(p,r,s)} x}{1 - x - x^2}$$

olarak elde edilir, [11]. Ayrıca

$$E_{\mathfrak{L}}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{L}_n^{(p,r,s)} \frac{x^n}{n!} = \underline{\alpha}e^{\alpha x} + \underline{\beta}e^{\beta x}$$

kısıtlamasız Lucas kuaterniyonunun üstel üretic fonksiyonudur, [11].

2.3.2. Kısıtlamasız k – Fibonacci ve k – Lucas Kuaterniyonları

k bir reel sayı, n negatif olmayan bir tamsayı ve p, r, s tamsayılar olmak üzere, kısıtlamasız k -Fibonacci kuaterniyonu

$$Y_{k,n}^{(p,r,s)} = F_{k,n} + \mathbf{i}F_{k,n+p} + \mathbf{j}F_{k,n+r} + \mathbf{k}F_{k,n+s}$$

şeklinde tanımlanır, [3]. Benzer şekilde kısıtlamasız k -Lucas kuaterniyonu

$$Z_{k,n}^{(p,r,s)} = L_{k,n} + \mathbf{i}L_{k,n+p} + \mathbf{j}L_{k,n+r} + \mathbf{k}L_{k,n+s}$$

şeklinde tanımlanır. Buradan kısıtlamasız k -Fibonacci kuaterniyonu ve kısıtlamasız k -Lucas kuaterniyonunun başlangıç koşulları sırasıyla

$$\begin{aligned} Y_{k,0}^{(p,r,s)} &= \mathbf{i}F_{k,p} + \mathbf{j}F_{k,r} + \mathbf{k}F_{k,s}, \\ Y_{k,1}^{(p,r,s)} &= 1 + \mathbf{i}F_{k,1+p} + \mathbf{j}F_{k,1+r} + \mathbf{k}F_{k,1+s} \\ Z_{k,0}^{(p,r,s)} &= 2 + \mathbf{i}L_{k,p} + \mathbf{j}L_{k,r} + \mathbf{k}L_{k,s}, \\ Z_{k,1}^{(p,r,s)} &= k + \mathbf{i}L_{k,1+p} + \mathbf{j}L_{k,1+r} + \mathbf{k}L_{k,1+s} \end{aligned}$$

olmak üzere

$$Y_{k,n}^{(p,r,s)} = kY_{k,n-1}^{(p,r,s)} + Y_{k,n-2}^{(p,r,s)} \quad (2.22)$$

$$Z_{k,n}^{(p,r,s)} = kZ_{k,n-1}^{(p,r,s)} + Z_{k,n-2}^{(p,r,s)} \quad (2.23)$$

sağlandığı görülebilir, [3].

(2.22) ve (2.23) ile verilen yineleme bağıntılarının karakteristik denklemi

$$x^2 - kx - 1 = 0$$

olup denklemin kökleri $\alpha = \frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}$ ve $\beta = \frac{k-\sqrt{k^2+4}}{2}$ şeklindedir. $\underline{\alpha} = 1 + \mathbf{i}\alpha^p + \mathbf{j}\alpha^r + \mathbf{k}\alpha^s$, $\underline{\beta} = 1 + \mathbf{i}\beta^p + \mathbf{j}\beta^r + \mathbf{k}\beta^s$ olmak üzere n 'inci kısıtlamasız k -Fibonacci kuaterniyonu için Binet formülü

$$Y_{k,n}^{(p,r,s)} = \frac{\underline{\alpha}\alpha^n - \underline{\beta}\beta^n}{\alpha - \beta}$$

şeklindedir, [3]. Kısıtlamasız k -Fibonacci kuaterniyonu için üreteç fonksiyonu

$$G_{Y(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} Y_{k,n}^{(p,r,s)} x^n = \frac{Y_{k,0}^{(p,r,s)} + (Y_{k,1}^{(p,r,s)} - kY_{k,0}^{(p,r,s)})x}{1 - kx - x^2}$$

olarak elde edilir, [3]. Kısıtlamasız k -Lucas kuaterniyonu için Binet formülü

$$Z_{k,n}^{(p,r,s)} = \underline{\alpha}\alpha^n + \underline{\beta}\beta^n$$

şeklindedir, [3]. Kısıtlamasız k -Lucas kuaterniyonu için üreteç fonksiyonu

$$G_{Z(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} Z_{k,n}^{(p,r,s)} x^n = \frac{Z_{k,0}^{(p,r,s)} + (Z_{k,1}^{(p,r,s)} - kZ_{k,0}^{(p,r,s)})x}{1 - kx - x^2}$$

olarak elde edilir, [3].

2.3.3. Kısıtlamasız Pell ve Pell-Lucas Kuaterniyonları

p, r, s, n keyfi tam sayılar olsun. P_n , n -inci Pell sayısı olmak üzere n -inci kısıtlamasız Pell kuaterniyonu

$$\mathfrak{P}_n^{(p,r,s)} = P_n + \mathbf{i}P_{n+p} + \mathbf{j}P_{n+r} + \mathbf{k}P_{n+s}$$

şeklinde tanımlanır. Pell kuaterniyonu başlangıç koşulları

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}_0^{(p,r,s)} &= \mathbf{i}P_p + \mathbf{j}P_r + \mathbf{k}P_s \\ \mathfrak{P}_1^{(p,r,s)} &= 1 + \mathbf{i}P_{1+p} + \mathbf{j}P_{1+r} + \mathbf{k}P_{1+s} \end{aligned}$$

olmak üzere $n \geq 2$ için

$$\mathfrak{P}_n^{(p,r,s)} = 2\mathfrak{P}_{n-1}^{(p,r,s)} + \mathfrak{P}_{n-2}^{(p,r,s)} \quad (2.24)$$

yineleme bağıntısı ile tanımlanır, [4]. (2.24) ile verilen yineleme bağıntısının karakteristik denklemi

$$x^2 - 2x - 1 = 0$$

olup denklemin kökleri $\lambda = 1 + \sqrt{2}$ ve $\delta = 1 - \sqrt{2}$ şeklindedir. $\underline{\lambda} = 1 + \mathbf{i}\lambda^p + \mathbf{j}\lambda^r + \mathbf{k}\lambda^s$, $\underline{\delta} = 1 + \mathbf{i}\delta^p + \mathbf{j}\delta^r + \mathbf{k}\delta^s$ olmak üzere kısıtlamasız Pell kuaterniyonunun Binet formülü

$$\mathfrak{P}_n^{(p,r,s)} = \frac{\underline{\lambda}\lambda^n - \underline{\delta}\delta^n}{\underline{\lambda} - \underline{\delta}}$$

şeklindedir. Kısıtlamasız Pell kuaterniyonunun üreteç fonksiyonu

$$G_{\mathfrak{P}}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{P}_n^{(p,r,s)} x^n = \frac{\mathfrak{P}_0^{(p,r,s)} + x(\mathfrak{P}_1^{(p,r,s)} - 2\mathfrak{P}_0^{(p,r,s)})}{1 - 2x - x^2}$$

olarak elde edilir.

q_n , n —inci Pell-Lucas sayısı olmak üzere n —inci kısıtlamasız Pell-Lucas kuaterniyonu

$$\mathfrak{Q}_n^{(p,r,s)} = q_n + \mathbf{i}q_{n+p} + \mathbf{j}q_{n+r} + \mathbf{k}q_{n+s}$$

şeklinde tanımlanır. Pell-Lucas kuaterniyonu başlangıç koşulları

$$\begin{aligned} \mathfrak{Q}_0^{(p,r,s)} &= 1 + \mathbf{i}q_p + \mathbf{j}q_r + \mathbf{k}q_s \\ \mathfrak{Q}_1^{(p,r,s)} &= 1 + \mathbf{i}q_{1+p} + \mathbf{j}q_{1+r} + \mathbf{k}q_{1+s} \end{aligned}$$

olmak üzere $n \geq 2$ için

$$\mathfrak{Q}_n^{(p,r,s)} = 2\mathfrak{Q}_{n-1}^{(p,r,s)} + \mathfrak{Q}_{n-2}^{(p,r,s)}$$

yineleme bağıntısı ile tanımlanır, [4].

n tam sayı olmak üzere kısıtlamasız Pell-Lucas kuaterniyonunun Binet formülü

$$\varrho_n^{(p,r,s)} = \underline{\lambda}\lambda^n + \underline{\delta}\delta^n$$

şeklindedir. Kısıtlamasız Pell-Lucas kuaterniyonunun üreteç fonksiyonu

$$G_{\varrho(X)} = \sum_{n=0}^{\infty} \varrho_n^{(p,r,s)} x^n = \frac{\varrho_0^{(p,r,s)} + x(\varrho_1^{(p,r,s)} - 2\varrho_0^{(p,r,s)})}{1 - 2x - x^2}$$

olarak elde edilir.

2.3.4. Tribonacci ve Tribonacci-Lucas Kuaterniyonu

r, s, t reel sayılar olmak üzere başlangıç koşulları $V_0 = a, V_1 = b, V_2 = c$ tamsayılar olan üçüncü mertebeden $\{V_n\}_{n \geq 0}$

$$V_n = rV_{n-1} + sV_{n-2} + tV_{n-3}, \quad n \geq 3$$

yineleme bağıntısı ile tanımlanan dizi genelleştirilmiş Tribonacci dizisi olarak adlandırılır, [43]. $r = s = t = 1$ ve $V_0 = 1, V_1 = 1, V_2 = 2$ alındığında bu dizi $\{T_n\}_{n \geq 0}$ ile gösterilen klasik Tribonacci dizisine indirgenir [14, 15, 34]. $r = s = t = 1$ ve $V_0 = 3, V_1 = 1, V_2 = 3$ alındığında ise genel terimi TK_n ile gösterilen Tribonacci-Lucas dizisi elde edilir [60]. Katsayıları $\{V_n\}_{n \geq 0}$ dizisinden alınarak elde edilen kuaterniyonlar genelleştirilmiş Tribonacci ve Tribonacci-Lucas kuaterniyon dizileri olarak adlandırılır.

n 'inci Tribonacci kuaterniyonu

$$\mathbf{T}Q_n = T_n + \mathbf{i}T_{n+1} + \mathbf{j}T_{n+2} + \mathbf{k}T_{n+3} \quad (2.25)$$

şeklinde tanımlanır. Tribonacci kuaterniyonu başlangıç koşulları

$$\mathbf{T}Q_0 = 1 + \mathbf{i} + \mathbf{j}2 + \mathbf{k}4$$

$$\mathbf{T}Q_1 = 1 + \mathbf{i}2 + \mathbf{j}4 + \mathbf{k}7$$

$$\mathbf{T}Q_2 = 2 + \mathbf{i}4 + \mathbf{j}7 + \mathbf{k}13$$

olmak üzere $n \geq 0$ için

$$\mathbf{T}Q_{n+3} = \mathbf{T}Q_{n+2} + \mathbf{T}Q_{n+1} + \mathbf{T}Q_n \quad (2.26)$$

yineleme bağıntısı ile tanımlanır, [1].

Tribonacci kuaterniyonunun eşleniği

$$\mathbf{T}Q_n^* = T_n - \mathbf{i}T_{n+1} - \mathbf{j}T_{n+2} - \mathbf{k}T_{n+3}$$

şeklindedir.

$f(x)$, x 'in kuvvetlerinden oluşan bir seri olsun. $[x^n]f(x)$ sembolü $f(x)$ serisinde x^n 'in katsayılarını ifade edecektir. Dolayısıyla Tribonacci kuaterniyonunun normu

$$N_{(\mathbf{T}Q_n)} = \sum_{i=0}^3 T_{n+i}^2 = [x^n] \frac{2(3 + 5x + 4x^2 - 2x^3 - x^4 - x^5)}{(1 - 3x - x^2 - x^3)(1 + x + x^2 - x^3)}$$

ile verilir, [1].

(2.26) ile verilen yineleme bağıntısının karakteristik denklemi (2.5) denklemi ile aynıdır ve denklemin kökleri (2.6) denklemi ile verilmiştir.

Tribonacci kuaterniyonunun Binet formülü

$$\underline{\alpha} = 1 + \mathbf{i}\alpha + \mathbf{j}\alpha^2 + \mathbf{k}\alpha^3$$

$$\begin{aligned}\underline{\beta} &= 1 + \mathbf{i}\beta + \mathbf{j}\beta^2 + \mathbf{k}\beta^3 \\ \underline{\gamma} &= 1 + \mathbf{i}\gamma + \mathbf{j}\gamma^2 + \mathbf{k}\gamma^3\end{aligned}\tag{2.27}$$

olmak üzere

$$\mathbf{T}Q_n = \frac{\underline{\alpha}\alpha^{n+2}}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)} + \frac{\underline{\beta}\beta^{n+2}}{(\beta - \alpha)(\beta - \gamma)} + \frac{\underline{\gamma}\gamma^{n+2}}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)}\tag{2.28}$$

şeklindedir. Tribonacci kuaterniyonunun üretic fonksiyonu

$$G_{\mathbf{T}Q_n}(x) = \frac{1 + \mathbf{i}(1 + x + x^2) + \mathbf{j}(2 + 2x + x^2) + \mathbf{k}(4 + 3x + 2x^2)}{1 - x - x^2 - x^3}$$

olarak elde edilir, [1].

n –inci Tribonacci-Lucas kuaterniyonu

$$\mathbf{T}\tilde{Q}_n = TK_n + \mathbf{i}TK_{n+1} + \mathbf{j}TK_{n+2} + \mathbf{k}TK_{n+3}\tag{2.29}$$

şeklinde tanımlanır. Tribonacci-Lucas kuaterniyonu başlangıç koşulları

$$\begin{aligned}\mathbf{T}\tilde{Q}_0 &= 3 + \mathbf{i} + \mathbf{j}3 + \mathbf{k}7 \\ \mathbf{T}\tilde{Q}_1 &= 1 + \mathbf{i}3 + \mathbf{j}7 + \mathbf{k}11 \\ \mathbf{T}\tilde{Q}_2 &= 3 + \mathbf{i}7 + \mathbf{j}11 + \mathbf{k}21\end{aligned}$$

olmak üzere $n \geq 0$ için

$$\mathbf{T}\tilde{Q}_{n+3} = \mathbf{T}\tilde{Q}_{n+2} + \mathbf{T}\tilde{Q}_{n+1} + \mathbf{T}\tilde{Q}_n\tag{2.30}$$

yineleme bağıntısı ile tanımlanır.

Tribonacci-Lucas kuaterniyonunun eşleniği

$$\mathbf{T}\tilde{Q}_n^* = TK_n - \mathbf{i}TK_{n+1} - \mathbf{j}TK_{n+2} - \mathbf{k}TK_{n+3}$$

ile verilir.

Tribonacci-Lucas kuaterniyonunun Binet formülü

$$\mathbf{T}\tilde{Q}_n = \underline{\alpha}\alpha^n + \underline{\beta}\beta^n + \underline{\gamma}\gamma^n \quad (2.31)$$

şeklindedir. Tribonacci-Lucas kuaterniyonunun üreteç fonksiyonu

$$G_{\mathbf{T}\tilde{Q}_n}(x) = \frac{3 - 2x - x^2 + \mathbf{i}(1 + 2x + 3x^2) + \mathbf{j}(3 + 4x + x^2) + \mathbf{k}(7 + 4x + 3x^2)}{1 - x - x^2 - x^3}$$

olarak elde edilir, [1].

Tribonacci ve Tribonacci-Lucas kuaterniyonları için bazı özdeşlikler aşağıdaki gibidir, [1].

$$\begin{aligned} \mathbf{T}Q_n^2 &= 2T_n\mathbf{T}Q_n - \mathbf{T}Q_n\mathbf{T}Q_n^* \\ \mathbf{T}Q_n + \mathbf{T}Q_n^* &= 2T_n \\ \mathbf{T}\tilde{Q}_{n+1} &= \mathbf{T}Q_n + 2\mathbf{T}Q_{n-1} + 3\mathbf{T}Q_{n-2} \end{aligned}$$

sağlanır, [1].

$$\begin{aligned} C_n &= \alpha^n\beta^n + \alpha^n\gamma^n + \beta^n\gamma^n \\ \underline{C}_{2n-m} &= C_{2n-m} + \mathbf{i}C_{2n-m-1} + \mathbf{j}C_{2n-m-2} + \mathbf{k}C_{2n-m-3} \end{aligned} \quad (2.32)$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} \mathbf{T}Q_{m+n} &= \mathbf{T}Q_mTK_n - \mathbf{T}Q_{m-n}C_n + \mathbf{T}Q_{m-2n} \\ \mathbf{T}\tilde{Q}_{m+n} &= \mathbf{T}\tilde{Q}_mTK_n - \mathbf{T}\tilde{Q}_{m-n}C_n + \underline{C}_{2n-m} \end{aligned}$$

elde edilir.

Başka bir özdeşlik

$$\mathbf{T}Q_{n+2m} = TK_m \mathbf{T}Q_{n+m} - TK_{-m} \mathbf{T}Q_n + \mathbf{T}Q_{n-2m}$$

olarak yazılabilir.

Tribonacci ve Tribonacci-Lucas kuaterniyon dizileri için çeşitli toplamsal özdeşlikler de elde edilmiştir, [1].

Teorem 2.1 ([1]).

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \mathbf{T}Q_k &= \frac{\mathbf{T}Q_{n+2} + \mathbf{T}Q_n - (1 + 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 9\mathbf{k})}{2} \\ \sum_{k=0}^n \mathbf{T}Q_{2k} &= \frac{\mathbf{T}Q_{2n+1} + \mathbf{T}Q_{2n} - (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k})}{2} \\ \sum_{k=0}^n \mathbf{T}Q_{2k+1} &= \frac{\mathbf{T}Q_{2n+2} + \mathbf{T}Q_{2n+1} - (1 + 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k})}{2} \\ \sum_{k=0}^n \mathbf{T}Q_{3k} &= \sum_{k=0}^{3n-1} \mathbf{T}Q_k + \mathbf{T}Q_0 = \frac{\mathbf{T}Q_{3n+2} - \mathbf{T}Q_{3n} - (-1 + \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})}{2} \\ \sum_{k=0}^n \mathbf{T}Q_{4k} &= \frac{\mathbf{T}Q_{4n+2} + \mathbf{T}Q_{4n} - (-1 + \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})}{4} \end{aligned}$$

şeklindedir.

2.3.5. Tribonacci ve Tribonacci-Lucas Kuaterniyon Polinomları

Bileşenleri Tribonacci ve Tribonacci-Lucas polinomları alınarak elde edilen kuaterniyonlar sırasıyla Tribonacci ve Tribonacci-Lucas kuaterniyon polinomları olarak adlandırılır, [44]. Böylece Tribonacci ve Tribonacci-Lucas kuaterniyonlarının bir genelleştirmesi elde edilir.

$n \geq 0$ için n –inci Tribonacci kuaterniyon polinomu

$$Q_{T,n}(x) = T_n(x) + \mathbf{i}T_{n+1}(x) + \mathbf{j}T_{n+2}(x) + \mathbf{k}T_{n+3}(x) \quad (2.33)$$

ile tanımlıdır. Buradan

$$Q_{T,n+3}(x) = x^2 Q_{T,n+2}(x) + x Q_{T,n+1}(x) + Q_{T,n}(x) \quad (2.34)$$

sağlandığı görülebilir. (2.33) denkleminde $x = 1$ alındığında $(n - 1)$ –inci Tribonacci kuaterniyonu elde edilir.

(2.34) ile verilen yineleme bağıntısının karakteristik denklemi (2.11) denklemi ile aynıdır ve denklemin kökleri (2.12) eşitliğinde verilmiştir.

$n \geq 0$ için Tribonacci kuaterniyon polinomunun Binet formülü

$$\begin{aligned} \underline{\alpha} &= 1 + \mathbf{i}\alpha(x) + \mathbf{j}\alpha^2(x) + \mathbf{k}\alpha^3(x), \\ \underline{w_1} &= 1 + \mathbf{i}w_1(x) + \mathbf{j}w_1^2(x) + \mathbf{k}w_1^3(x) \\ \underline{w_2} &= 1 + \mathbf{i}w_2(x) + \mathbf{j}w_2^2(x) + \mathbf{k}w_2^3(x) \end{aligned} \quad (2.35)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} Q_{T,n}(x) &= \frac{\underline{\alpha}\alpha^{n+1}(x)}{(\alpha(x) - w_1(x))(\alpha(x) - w_2(x))} + \frac{\underline{w_1}w_1^{n+1}(x)}{(w_1(x) - \alpha(x))(w_1(x) - w_2(x))} \\ &+ \frac{\underline{w_2}w_2^{n+1}(x)}{(w_2(x) - \alpha(x))(w_2(x) - w_1(x))} \end{aligned} \quad (2.36)$$

şeklindedir. Tribonacci kuaterniyon polinomunun üreteç fonksiyonu

$$G_{Q_{T,n}}(y) = \frac{y + \mathbf{i} + \mathbf{j}(x^2 + xy + y^2) + \mathbf{k}(x^4 + x + x^3y + y + x^2y^2)}{1 - x^2y - xy^2 - y^3}$$

olarak elde edilir. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Q_{T,n}}{n!} y^n &= \frac{\underline{\alpha} \alpha(x) e^{\alpha(x)y}}{(\alpha(x) - w_1(x))(\alpha(x) - w_2(x))} + \frac{\underline{w}_1 w_1(x) e^{w_1(x)y}}{(w_1(x) - \alpha(x))(w_1(x) - w_2(x))} \\ &+ \frac{\underline{w}_2 w_2(x) e^{w_2(x)y}}{(w_2(x) - \alpha(x))(w_2(x) - w_1(x))} \end{aligned}$$

Tribonacci kuaterniyon polinomunun üstel üreteç fonksiyonudur.

$n \geq 0$ için Tribonacci-Lucas kuaterniyon polinomu

$$Q_{t,n}(x) = t_n(x) + \mathbf{i}t_{n+1}(x) + \mathbf{j}t_{n+2}(x) + \mathbf{k}t_{n+3}(x) \quad (2.37)$$

şeklinde tanımlanır. Dolayısıyla

$$Q_{t,n+3}(x) = x^2 Q_{t,n+2}(x) + x Q_{t,n+1}(x) + Q_{t,n}(x) \quad (2.38)$$

elde edilir. (2.37) denkleminde $x = 1$ değeri için Tribonacci-Lucas kuaterniyonu elde edilir.

$n \geq 0$ için Tribonacci-Lucas kuaterniyon polinomunun Binet formülü

$$Q_{t,n}(x) = \underline{\alpha} \alpha^n(x) + \underline{w}_1 w_1^n(x) + \underline{w}_2 w_2^n(x) \quad (2.39)$$

şeklindedir. Tribonacci-Lucas kuaterniyon polinomlarının üreteç fonksiyonu

$$\begin{aligned} G_{Q_{t,n}}(y) &= \frac{3 - 2x^2y - xy^2 + \mathbf{i}(x^2 + 2xy + 3y^2) + \mathbf{j}(x^4 + 2x + x^3y + 3y + x^2y^2)}{1 - x^2y - xy^2 - y^3} \\ &+ \frac{\mathbf{k}(x^6 + 3x^3 + 3 + x^5y + 3x^2y + x^4y^2 + 2xy^2)}{1 - x^2y - xy^2 - y^3} \end{aligned}$$

olarak elde edilir. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{Q_{t,n}}{n!} y^n = \underline{\alpha} e^{\alpha(x)y} + \underline{w}_1 e^{w_1(x)y} + \underline{w}_2 e^{w_2(x)y}$$

Tribonacci-Lucas kuaterniyon polinomunun üstel üreteç fonksiyonudur.



3 . KISITLAMASIZ TRIBONACCI ve TRIBONACCI-LUCAS KUATERNİYONLARI

Bu bölümde, klasik Tribonacci kuaterniyonları ve Tribonacci-Lucas kuaterniyonlarının bir genelleştirmesi tanımlanmış ve Binet formülleri ile üreteç fonksiyonları elde edilmiştir. Tanımlanan kuaterniyon dizileri için bazı özdeşlikler sunulmuştur. Bölüm boyunca p, r, s keyfi tam sayılar olarak alınacaktır, [35].

Tanım 3.1. n —inci kısıtlamasız Tribonacci kuaterniyonu $\mathbf{Q}_n^{(p,r,s)}$

$$\mathbf{Q}_n^{(p,r,s)} = T_n + \mathbf{i}T_{n+p} + \mathbf{j}T_{n+r} + \mathbf{k}T_{n+s} \quad (3.1)$$

ve n —inci kısıtlamasız Tribonacci-Lucas kuaterniyonu $\tilde{\mathbf{Q}}_n^{(p,r,s)}$

$$\tilde{\mathbf{Q}}_n^{(p,r,s)} = TK_n + \mathbf{i}TK_{n+p} + \mathbf{j}TK_{n+r} + \mathbf{k}TK_{n+s} \quad (3.2)$$

şeklinde tanımlanır.

p, r, s sayıları için seçilen özel değerlere karşılık daha önce çalışılan bazı kuaterniyon dizileri elde edilir. Örneğin,

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_n^{(-n,-n,-n)} &= T_n, \\ \mathbf{Q}_n^{(1,-n,-n)} &= T_n + \mathbf{i}T_{n+1}, \\ \mathbf{Q}_n^{(1,2,3)} &= \mathbf{T}Q_n, \\ \tilde{\mathbf{Q}}_n^{(1,2,3)} &= \mathbf{T}\tilde{Q}_n \end{aligned}$$

olacaktır.

$\mathbf{Q}_n^{(p,r,s)}$ n —inci kısıtlamasız Tribonacci kuaterniyonu ve $\tilde{\mathbf{Q}}_n^{(p,r,s)}$ n —inci kısıtlamasız

Tribonacci-Lucas kuaterniyonu başlangıç koşulları sırasıyla

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}_0^{(p,r,s)} &= 1 + \mathbf{i}T_p + \mathbf{j}T_r + \mathbf{k}T_s \\
\mathbf{Q}_1^{(p,r,s)} &= 1 + \mathbf{i}T_{1+p} + \mathbf{j}T_{1+r} + \mathbf{k}T_{1+s} \\
\mathbf{Q}_2^{(p,r,s)} &= 2 + \mathbf{i}T_{2+p} + \mathbf{j}T_{2+r} + \mathbf{k}T_{2+s}, \\
\tilde{\mathbf{Q}}_0^{(p,r,s)} &= 3 + \mathbf{i}TK_p + \mathbf{j}TK_r + \mathbf{k}TK_s \\
\tilde{\mathbf{Q}}_1^{(p,r,s)} &= 1 + \mathbf{i}TK_{1+p} + \mathbf{j}TK_{1+r} + \mathbf{k}TK_{1+s} \\
\tilde{\mathbf{Q}}_2^{(p,r,s)} &= 3 + \mathbf{i}TK_{2+p} + \mathbf{j}TK_{2+r} + \mathbf{k}TK_{2+s}
\end{aligned}$$

olmak üzere $n \geq 0$ için

$$\mathbf{Q}_{n+3}^{(p,r,s)} = \mathbf{Q}_{n+2}^{(p,r,s)} + \mathbf{Q}_{n+1}^{(p,r,s)} + \mathbf{Q}_n^{(p,r,s)} \quad (3.3)$$

$$\tilde{\mathbf{Q}}_{n+3}^{(p,r,s)} = \tilde{\mathbf{Q}}_{n+2}^{(p,r,s)} + \tilde{\mathbf{Q}}_{n+1}^{(p,r,s)} + \tilde{\mathbf{Q}}_n^{(p,r,s)} \quad (3.4)$$

bağıntılarını sağlamaktadır.

(3.3) ve (3.4) denklemleri ile verilen yineleme bağıntılarının karakteristik denklemi

$$x^3 - x^2 - x - 1 = 0$$

olup, denklemin kökleri (2.6) eşitliğinde α, β, γ olarak verilmiştir.

Şimdi $\mathbf{Q}_n^{(p,r,s)}$ ve $\tilde{\mathbf{Q}}_n^{(p,r,s)}$ kuaterniyonlarının Binet formülleri ve üreteç fonksiyonları verilecektir.

Teorem 3.1. $\mathbf{Q}_n^{(p,r,s)}$ ve $\tilde{\mathbf{Q}}_n^{(p,r,s)}$ kuaterniyonlarının Binet formülleri

$$\begin{aligned}
\underline{\alpha} &= 1 + \mathbf{i}\alpha^p + \mathbf{j}\alpha^r + \mathbf{k}\alpha^s \\
\underline{\beta} &= 1 + \mathbf{i}\beta^p + \mathbf{j}\beta^r + \mathbf{k}\beta^s
\end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\underline{\gamma} = 1 + \mathbf{i}\gamma^p + \mathbf{j}\gamma^r + \mathbf{k}\gamma^s$$

olmak üzere

$$\mathbf{Q}_n^{(p,r,s)} = \frac{\underline{\alpha}\alpha^{n+2}}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + \frac{\underline{\beta}\beta^{n+2}}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)} + \frac{\underline{\gamma}\gamma^{n+2}}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)} \quad (3.6)$$

$$\tilde{\mathbf{Q}}_n^{(p,r,s)} = \underline{\alpha}\alpha^n + \underline{\beta}\beta^n + \underline{\gamma}\gamma^n \quad (3.7)$$

şeklindedir.

İspat. Tribonacci dizisinin Binet formülü (2.7) denklemi ile verilmiştir. Bu formül

Tanım (3.1) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_n^{(p,r,s)} &= T_n + \mathbf{i}T_{n+p} + \mathbf{j}T_{n+r} + \mathbf{k}T_{n+s} \\ &= \frac{\alpha^{n+2}}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + \frac{\beta^{n+2}}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)} + \frac{\gamma^{n+2}}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)} \\ &\quad + \mathbf{i} \left(\frac{\alpha^{n+p+2}}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + \frac{\beta^{n+p+2}}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)} + \frac{\gamma^{n+p+2}}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)} \right) \\ &\quad + \mathbf{j} \left(\frac{\alpha^{n+r+2}}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + \frac{\beta^{n+r+2}}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)} + \frac{\gamma^{n+r+2}}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)} \right) \\ &\quad + \mathbf{k} \left(\frac{\alpha^{n+s+2}}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + \frac{\beta^{n+s+2}}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)} + \frac{\gamma^{n+s+2}}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)} \right) \\ &= \frac{\alpha^{n+2}}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} (1 + \mathbf{i}\alpha^p + \mathbf{j}\alpha^r + \mathbf{k}\alpha^s) \\ &\quad + \frac{\beta^{n+2}}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)} (1 + \mathbf{i}\beta^p + \mathbf{j}\beta^r + \mathbf{k}\beta^s) \\ &\quad + \frac{\gamma^{n+2}}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)} (1 + \mathbf{i}\gamma^p + \mathbf{j}\gamma^r + \mathbf{k}\gamma^s) \\ &= \frac{\alpha^{n+2}}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} \underline{\alpha} + \frac{\beta^{n+2}}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)} \underline{\beta} + \frac{\gamma^{n+2}}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)} \underline{\gamma} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Tribonacci-Lucas dizisinin Binet formülü (2.9) denklemi ile verilmiştir. Benzer şekilde bu formül (3.2)'de yerine yazılarak kısıtlamasız Tribonacci-Lucas kuaterniyonu için (3.7)'deki Binet formülü elde edilir. $\square$

Teorem 3.2. $Q_n^{(p,r,s)}$ kuaterniyonunun üreteç fonksiyonu

$$\mathcal{G}(x) = \frac{Q_0^{(p,r,s)} + x(Q_1^{(p,r,s)} - Q_0^{(p,r,s)}) + x^2(Q_2^{(p,r,s)} - Q_1^{(p,r,s)} - Q_0^{(p,r,s)})}{1 - x - x^2 - x^3}$$

şeklindedir.

İspat. $Q_n^{(p,r,s)}$ kuaterniyonunun üreteç fonksiyonu

$$\mathcal{G}(x) = Q_0^{(p,r,s)} + Q_1^{(p,r,s)}x + Q_2^{(p,r,s)}x^2 + \dots + Q_n^{(p,r,s)}x^n + \dots$$

olsun. Buradan

$$\begin{aligned} x\mathcal{G}(x) &= xQ_0^{(p,r,s)} + x^2Q_1^{(p,r,s)} + x^3Q_2^{(p,r,s)} + \dots + x^{n+1}Q_n^{(p,r,s)} + \dots \\ x^2\mathcal{G}(x) &= x^2Q_0^{(p,r,s)} + x^3Q_1^{(p,r,s)} + x^4Q_2^{(p,r,s)} + \dots + x^{n+2}Q_n^{(p,r,s)} + \dots \\ x^3\mathcal{G}(x) &= x^3Q_0^{(p,r,s)} + x^4Q_1^{(p,r,s)} + x^5Q_2^{(p,r,s)} + \dots + x^{n+3}Q_n^{(p,r,s)} + \dots \end{aligned}$$

olup $\mathcal{G}(x) - x\mathcal{G}(x) - x^2\mathcal{G}(x) - x^3\mathcal{G}(x)$ hesaplandığında

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(x)(1 - x - x^2 - x^3) &= Q_0^{(p,r,s)} + x(Q_1^{(p,r,s)} - Q_0^{(p,r,s)}) + x^2(Q_2^{(p,r,s)} - Q_1^{(p,r,s)} - Q_0^{(p,r,s)}) \\ &\quad + x^3(\underbrace{Q_3^{(p,r,s)} - Q_2^{(p,r,s)} - Q_1^{(p,r,s)} - Q_0^{(p,r,s)}}_{=0}) + \underbrace{\dots}_{=0} \end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$\mathcal{G}(x) = \frac{Q_0^{(p,r,s)} + x(Q_1^{(p,r,s)} - Q_0^{(p,r,s)}) + x^2(Q_2^{(p,r,s)} - Q_1^{(p,r,s)} - Q_0^{(p,r,s)})}{1 - x - x^2 - x^3}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır. □

Benzer şekilde kısıtlamasız Tribonacci-Lucas kuaterniyonunun üreteç fonksiyonu aşağıdaki sonuç ile verilir.

Teorem 3.3. $\tilde{\mathbf{Q}}_n^{(p,r,s)}$ kuaterniyonunun üreteç fonksiyonu

$$\mathcal{H}(x) = \frac{\tilde{\mathbf{Q}}_0^{(p,r,s)} + x(\tilde{\mathbf{Q}}_1^{(p,r,s)} - \tilde{\mathbf{Q}}_0^{(p,r,s)}) + x^2(\tilde{\mathbf{Q}}_2^{(p,r,s)} - \tilde{\mathbf{Q}}_1^{(p,r,s)} - \tilde{\mathbf{Q}}_0^{(p,r,s)})}{1 - x - x^2 - x^3}$$

şeklindedir.

3.1. Kısıtlamasız Tribonacci ve Tribonacci-Lucas Kuaterniyonları İçin Bazı Özdeşlikler

Bu bölümde kısıtlamasız Tribonacci ve Tribonacci-Lucas kuaterniyonları için bazı özdeşlikler elde edilecek ve çeşitli toplamsal formüller sunulacaktır.

Teorem 3.4.

$$(\mathbf{Q}_n^{(p,r,s)})^2 = 2T_n \mathbf{Q}_n^{(p,r,s)} - \mathbf{Q}_n^{(p,r,s)} (\mathbf{Q}_n^{(p,r,s)})^*$$

İspat. $\mathbf{Q}_n^{(p,r,s)}$ kuaterniyonunun tanımından

$$\begin{aligned} (\mathbf{Q}_n^{(p,r,s)})^2 &= T_n^2 - T_{n+p}^2 - T_{n+r}^2 - T_{n+s}^2 + 2T_n(\mathbf{i}T_{n+p} + \mathbf{j}T_{n+r} + \mathbf{k}T_{n+s}) \\ &= 2T_n(T_n + \mathbf{i}T_{n+p} + \mathbf{j}T_{n+r} + \mathbf{k}T_{n+s}) - (T_n^2 + T_{n+p}^2 + T_{n+r}^2 + T_{n+s}^2) \\ &= 2T_n \mathbf{Q}_n^{(p,r,s)} - \mathbf{Q}_n^{(p,r,s)} (\mathbf{Q}_n^{(p,r,s)})^* \end{aligned}$$

elde edilir. □

Teorem 3.5. $\text{Tr}(\mathbf{Q}_n^{(p,r,s)}) = 2T_n$.

İspat.

$$\mathbf{Q}_n^{(p,r,s)} = T_n + \mathbf{i}T_{n+p} + \mathbf{j}T_{n+r} + \mathbf{k}T_{n+s}$$

$$(\mathbf{Q}_n^{(p,r,s)})^* = T_n - \mathbf{i}T_{n+p} - \mathbf{j}T_{n+r} - \mathbf{k}T_{n+s}$$

eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa

$$\mathbf{Q}_n^{(p,r,s)} + (\mathbf{Q}_n^{(p,r,s)})^* = 2T_n$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Teorem 3.6.

$$\tilde{\mathbf{Q}}_{n+1}^{(p,r,s)} = \mathbf{Q}_n^{(p,r,s)} + 2\mathbf{Q}_{n-1}^{(p,r,s)} + 3\mathbf{Q}_{n-2}^{(p,r,s)} \quad (3.8)$$

İspat. İlgili Binet formülleri (3.8) denkleminde yerine yazıldığında

$$\begin{aligned} & \mathbf{Q}_n^{(p,r,s)} + 2\mathbf{Q}_{n-1}^{(p,r,s)} + 3\mathbf{Q}_{n-2}^{(p,r,s)} \\ &= \frac{\alpha^{n+2}}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}\underline{\alpha} + \frac{\beta^{n+2}}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}\underline{\beta} + \frac{\gamma^{n+2}}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}\underline{\gamma} \\ &+ 2\left(\frac{\alpha^{n+1}}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}\underline{\alpha} + \frac{\beta^{n+1}}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}\underline{\beta} + \frac{\gamma^{n+1}}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}\underline{\gamma}\right) \\ &+ 3\left(\frac{\alpha^n}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}\underline{\alpha} + \frac{\beta^n}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}\underline{\beta} + \frac{\gamma^n}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}\underline{\gamma}\right) \\ &= \underline{\alpha}\alpha^{n+1}\frac{(\alpha^2+2\alpha+3)}{\alpha(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + \underline{\beta}\beta^{n+1}\frac{(\beta^2+2\beta+3)}{\beta(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)} + \underline{\gamma}\gamma^{n+1}\frac{(\gamma^2+2\gamma+3)}{\gamma(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)} \end{aligned}$$

olacaktır. Gerekli hesaplamalar yapıldığında

$$\tilde{\mathbf{Q}}_{n+1}^{(p,r,s)} = \mathbf{Q}_n^{(p,r,s)} + 2\mathbf{Q}_{n-1}^{(p,r,s)} + 3\mathbf{Q}_{n-2}^{(p,r,s)}$$

elde edilir. $\square$

Teorem 3.7.

$$\mathbf{Q}_n^{(p+1,r+1,s+1)} = \mathbf{Q}_{n+1}^{(p,r,s)} - T_{n-1} - T_{n-2}$$

$$\tilde{\mathbf{Q}}_n^{(p+1,r+1,s+1)} = \tilde{\mathbf{Q}}_{n+1}^{(p,r,s)} - TK_{n-1} - TK_{n-2}$$

İspat. $\mathbf{Q}_n^{(p,r,s)}$ ve $\tilde{\mathbf{Q}}_n^{(p,r,s)}$ kuaterniyonlarının tanımından

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_n^{(p+1,r+1,s+1)} &= T_n + \mathbf{i}T_{n+p+1} + \mathbf{j}T_{n+r+1} + \mathbf{k}T_{n+s+1} \\ &= (T_{n+1} - T_{n-1} - T_{n-2}) + \mathbf{i}T_{n+1+p} + \mathbf{j}T_{n+1+r} + \mathbf{k}T_{n+1+s} \\ &= T_{n+1} + \mathbf{i}T_{n+1+p} + \mathbf{j}T_{n+1+r} + \mathbf{k}T_{n+1+s} - (T_{n-1} + T_{n-2}) \\ &= \mathbf{Q}_{n+1}^{(p,r,s)} - T_{n-1} - T_{n-2} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{Q}}_n^{(p+1,r+1,s+1)} &= TK_n + \mathbf{i}TK_{n+p+1} + \mathbf{j}TK_{n+r+1} + \mathbf{k}TK_{n+s+1} \\ &= (TK_{n+1} - TK_{n-1} - TK_{n-2}) + \mathbf{i}TK_{n+1+p} + \mathbf{j}TK_{n+1+r} + \mathbf{k}TK_{n+1+s} \\ &= TK_{n+1} + \mathbf{i}TK_{n+1+p} + \mathbf{j}TK_{n+1+r} + \mathbf{k}TK_{n+1+s} - (TK_{n-1} + TK_{n-2}) \\ &= \tilde{\mathbf{Q}}_{n+1}^{(p,r,s)} - TK_{n-1} - TK_{n-2} \end{aligned}$$

elde edilir. □

m, n negatif olmayan tamsayılar ve (2.6) denkleminde verilen α, β, γ değerleri için $C_n = \alpha^n \beta^n + \alpha^n \gamma^n + \beta^n \gamma^n$ olmak üzere Tribonacci ve Tribonacci-Lucas sayıları arasında

$$T_{m+n} = T_m TK_n - T_{m-n} C_n + T_{m-2n} \quad (3.9)$$

$$TK_{m+n} = TK_m TK_n - TK_{m-n} C_n + C_{2n-m} \quad (3.10)$$

$$T_{n+2m} = TK_m T_{n+m} - TK_{-m} T_n + T_{n-2m} \quad (3.11)$$

ilişkileri vardır, [29, 60]. Buradan $\mathbf{Q}_n^{(p,r,s)}$ ve $\tilde{\mathbf{Q}}_n^{(p,r,s)}$ kuaterniyonları için de bazı özdeşlikler elde edilir.

Teorem 3.8. $\underline{C}_{2n-m}^{(p,r,s)} = C_{2n-m} + \mathbf{i}C_{2n-m-p} + \mathbf{j}C_{2n-m-r} + \mathbf{k}C_{2n-m-s}$ olsun. Bu durumda

$$\mathbf{Q}_{m+n}^{(p,r,s)} = \mathbf{Q}_m^{(p,r,s)} TK_n - \mathbf{Q}_{m-n}^{(p,r,s)} C_n + \mathbf{Q}_{m-2n}^{(p,r,s)}, \quad (3.12)$$

$$\tilde{\mathbf{Q}}_{m+n}^{(p,r,s)} = \tilde{\mathbf{Q}}_m^{(p,r,s)} TK_n - \tilde{\mathbf{Q}}_{m-n}^{(p,r,s)} C_n + \underline{C}_{2n-m}, \quad (3.13)$$

$$\mathbf{Q}_{n+2m}^{(p,r,s)} = TK_m \mathbf{Q}_{n+m}^{(p,r,s)} - TK_{-m} \mathbf{Q}_n^{(p,r,s)} + \mathbf{Q}_{n-2m}^{(p,r,s)}, \quad (3.14)$$

$$\mathbf{Q}_{m+n+1}^{(p,r,s)} = T_{m-2} \mathbf{Q}_n^{(p,r,s)} + (T_{m-3} + T_{m-2}) \mathbf{Q}_{n+1}^{(p,r,s)} + T_{m-1} \mathbf{Q}_{n+2}^{(p,r,s)}, n \geq 0, m \geq 3 \quad (3.15)$$

elde edilir.

İspat. Öncelikle (3.12) özdeşliğinin ispatı verilecektir. $\mathbf{Q}_{m+n}^{(p,r,s)}$ kuaterniyonunun tanımı ve (3.9) eşitliği kullanıldığında

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{m+n}^{(p,r,s)} &= T_{m+n} + \mathbf{i}T_{m+n+p} + \mathbf{j}T_{m+n+r} + \mathbf{k}T_{m+n+s} \\ &= (T_m TK_n - T_{m-n} C_n + T_{m-2n}) \\ &\quad + \mathbf{i}(T_{m+p} TK_n - T_{m+p-n} C_n + T_{m+p-2n}) \\ &\quad + \mathbf{j}(T_{m+r} TK_n - T_{m+r-n} C_n + T_{m+r-2n}) \\ &\quad + \mathbf{k}(T_{m+s} TK_n - T_{m+s-n} C_n + T_{m+s-2n}) \\ &= (T_m + \mathbf{i}T_{m+p} + \mathbf{j}T_{m+r} + \mathbf{k}T_{m+s}) TK_n \\ &\quad - (T_{m-n} + \mathbf{i}T_{m-n+p} + \mathbf{j}T_{m-n+r} + \mathbf{k}T_{m-n+s}) C_n \\ &\quad + (T_{m-2n} + \mathbf{i}T_{m-2n+p} + \mathbf{j}T_{m-2n+r} + \mathbf{k}T_{m-2n+s}) \\ &= \mathbf{Q}_m^{(p,r,s)} TK_n - \mathbf{Q}_{m-n}^{(p,r,s)} C_n + \mathbf{Q}_{m-2n}^{(p,r,s)} \end{aligned}$$

elde edilir.

Benzer şekilde $\tilde{\mathbf{Q}}_{m+n}^{(p,r,s)}$ kuaterniyonunun tanımı ve (3.10) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{Q}}_{m+n}^{(p,r,s)} &= TK_{m+n} + \mathbf{i}TK_{m+n+p} + \mathbf{j}TK_{m+n+r} + \mathbf{k}TK_{m+n+s} \\ &= TK_m TK_n - TK_{m-n} C_n + C_{2n-m} \\ &\quad + \mathbf{i}(TK_{m+p} TK_n - TK_{m-n+p} C_n + C_{2n-m-p}) \\ &\quad + \mathbf{j}(TK_{m+r} TK_n - TK_{m-n+r} C_n + C_{2n-m-r}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\mathbf{k}(TK_{m+s}TK_n - TK_{m-n+s}C_n + C_{2n-m-s}) \\
= & TK_n(TK_m + \mathbf{i}TK_{m+p} + \mathbf{j}TK_{m+r} + \mathbf{k}TK_{m+s}) \\
& - C_n(TK_{m-n} + \mathbf{i}TK_{m-n+p} + \mathbf{j}TK_{m-n+r} + \mathbf{k}TK_{m-n+s}) \\
& + C_{2n-m} + \mathbf{i}C_{2n-m-p} + \mathbf{j}C_{2n-m-r} + \mathbf{k}C_{2n-m-s} \\
= & TK_n\tilde{\mathbf{Q}}_m^{(p,r,s)} - C_n\tilde{\mathbf{Q}}_{m-n}^{(p,r,s)} + \underline{C}_{2n-m}^{(p,r,s)}
\end{aligned}$$

özdeşlik (3.13) elde edilir.

Diğer taraftan $\mathbf{Q}_{n+2m}^{(p,r,s)}$ kuaterniyonunun tanımında (3.11) yerine yazıldığında

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}_{n+2m}^{(p,r,s)} &= T_{n+2m} + \mathbf{i}T_{n+p+2m} + \mathbf{j}T_{n+r+2m} + \mathbf{k}T_{n+s+2m} \\
&= TK_mT_{n+m} - TK_{-m}T_n + T_{n-2m} \\
&\quad + \mathbf{i}(TK_mT_{n+p+m} - TK_{-m}T_{n+p} + T_{n+p-2m}) \\
&\quad + \mathbf{j}(TK_mT_{n+r+m} - TK_{-m}T_{n+r} + T_{n+r-2m}) \\
&\quad + \mathbf{k}(TK_mT_{n+s+m} - TK_{-m}T_{n+s} + T_{n+s-2m}) \\
&= TK_m(T_{n+m} + \mathbf{i}T_{n+p+m} + \mathbf{j}T_{n+r+m} + \mathbf{k}T_{n+s+m}) \\
&\quad - TK_{-m}(T_n + \mathbf{i}T_{n+p} + \mathbf{j}T_{n+r} + \mathbf{k}T_{n+s}) \\
&\quad + T_{n-2m} + \mathbf{i}T_{n-2m+p} + \mathbf{j}T_{n-2m+r} + \mathbf{k}T_{n-2m+s} \\
&= TK_m\mathbf{Q}_{n+m}^{(p,r,s)} - TK_{-m}\mathbf{Q}_n^{(p,r,s)} + \mathbf{Q}_{n-2m}^{(p,r,s)}
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır.

(3.15) özdeşliğin ispatı m üzerinden tümevarım ile yapılacaktır. $m = 3$ için

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}_{n+4}^{(p,r,s)} &= T_1\mathbf{Q}_n^{(p,r,s)} + (T_0 + T_1)\mathbf{Q}_{n+1}^{(p,r,s)} + T_2\mathbf{Q}_{n+2}^{(p,r,s)} \\
\mathbf{Q}_{n+4}^{(p,r,s)} &= \mathbf{Q}_n^{(p,r,s)} + 2\mathbf{Q}_{n+1}^{(p,r,s)} + 2\mathbf{Q}_{n+2}^{(p,r,s)} \\
&= \mathbf{Q}_n^{(p,r,s)} + \mathbf{Q}_{n+1}^{(p,r,s)} + \mathbf{Q}_{n+2}^{(p,r,s)} + \mathbf{Q}_{n+1}^{(p,r,s)} + \mathbf{Q}_{n+2}^{(p,r,s)} \\
&= \mathbf{Q}_{n+3}^{(p,r,s)} + \mathbf{Q}_{n+2}^{(p,r,s)} + \mathbf{Q}_{n+1}^{(p,r,s)}
\end{aligned}$$

eşitlik sağlanır. Eşitlik her $m \leq k$ için

$$\mathbf{Q}_{k+n+1}^{(p,r,s)} = T_{k-2}\mathbf{Q}_n^{(p,r,s)} + (T_{k-3} + T_{k-2})\mathbf{Q}_{n+1}^{(p,r,s)} + T_{k-1}\mathbf{Q}_{n+2}^{(p,r,s)}$$

doğru olsun. $m = k + 1$ için eşitliğin doğru olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{k+n+2}^{(p,r,s)} &= \mathbf{Q}_{k+n+1}^{(p,r,s)} + \mathbf{Q}_{k+n}^{(p,r,s)} + \mathbf{Q}_{k+n-1}^{(p,r,s)} \\ &= T_{k-2}\mathbf{Q}_n^{(p,r,s)} + (T_{k-3} + T_{k-2})\mathbf{Q}_{n+1}^{(p,r,s)} + T_{k-1}\mathbf{Q}_{n+2}^{(p,r,s)} \\ &\quad + T_{k-3}\mathbf{Q}_n^{(p,r,s)} + (T_{k-4} + T_{k-3})\mathbf{Q}_{n+1}^{(p,r,s)} + T_{k-2}\mathbf{Q}_{n+2}^{(p,r,s)} \\ &\quad + T_{k-4}\mathbf{Q}_n^{(p,r,s)} + (T_{k-5} + T_{k-4})\mathbf{Q}_{n+1}^{(p,r,s)} + T_{k-3}\mathbf{Q}_{n+2}^{(p,r,s)} \\ &= (T_{k-2} + T_{k-3} + T_{k-4})\mathbf{Q}_n^{(p,r,s)} \\ &\quad + (T_{k-3} + T_{k-2} + T_{k-4} + T_{k-3} + T_{k-5} + T_{k-4})\mathbf{Q}_{n+1}^{(p,r,s)} \\ &\quad + (T_{k-1} + T_{k-2} + T_{k-3})\mathbf{Q}_{n+2}^{(p,r,s)} \\ &= T_{k-1}\mathbf{Q}_n^{(p,r,s)} + (T_{k-2} + T_{k-1})\mathbf{Q}_{n+1}^{(p,r,s)} + T_k\mathbf{Q}_{n+2}^{(p,r,s)}. \end{aligned}$$

Böylece ispat tamamlanmış olur. □

Şimdi Tribonacci ve Tribonacci-Lucas kuaterniyonlarının sonlu toplamalarına dair çeşitli özdeşlikler verilecektir. Elde edilen özdeşliklerde $p = 1, r = 2, s = 3$ alındığında Teorem 2.1 deki özdeşliklerin elde edildiği görülmektedir, [1].

Teorem 3.9.

$$\sum_{k=0}^n \mathbf{Q}_k^{(p,r,s)} = \frac{\mathbf{Q}_{n+2}^{(p,r,s)} + \mathbf{Q}_n^{(p,r,s)} + \mathbf{Q}_0^{(p,r,s)} - \mathbf{Q}_2^{(p,r,s)}}{2} \quad (3.16)$$

İspat. İspat n üzerinden tümevarım ile yapılacaktır. $n = 0$ için

$$\mathbf{Q}_0^{(p,r,s)} = \frac{\mathbf{Q}_2^{(p,r,s)} + \mathbf{Q}_0^{(p,r,s)} + \mathbf{Q}_0^{(p,r,s)} - \mathbf{Q}_2^{(p,r,s)}}{2}$$

sağlandığı görülür. $n = m$ için doğru olduğu kabul edilsin, yani

$$\sum_{k=0}^m Q_k^{(p,r,s)} = \frac{Q_{m+2}^{(p,r,s)} + Q_m^{(p,r,s)} + Q_0^{(p,r,s)} - Q_2^{(p,r,s)}}{2}$$

olsun. $n = m + 1$ için

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{m+1} Q_k^{(p,r,s)} &= \sum_{k=0}^m Q_k^{(p,r,s)} + Q_{m+1}^{(p,r,s)} \\ &= \frac{Q_{m+2}^{(p,r,s)} + Q_m^{(p,r,s)} + Q_0^{(p,r,s)} - Q_2^{(p,r,s)}}{2} + Q_{m+1}^{(p,r,s)} \\ &= \frac{Q_{m+2}^{(p,r,s)} + Q_{m+1}^{(p,r,s)} + Q_m^{(p,r,s)} + Q_0^{(p,r,s)} - Q_2^{(p,r,s)} + Q_{m+1}^{(p,r,s)}}{2} \\ &= \frac{Q_{m+3}^{(p,r,s)} + Q_{m+1}^{(p,r,s)} + Q_0^{(p,r,s)} - Q_2^{(p,r,s)}}{2} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. □

Teorem 3.10.

$$\sum_{k=0}^n Q_{2k}^{(p,r,s)} = \frac{Q_{2n+1}^{(p,r,s)} + Q_{2n}^{(p,r,s)} - Q_1^{(p,r,s)} + Q_0^{(p,r,s)}}{2}$$

İspat. (3.3) yineleme bağıntısından,

$$\begin{aligned} Q_3^{(p,r,s)} - Q_1^{(p,r,s)} &= Q_2^{(p,r,s)} + Q_0^{(p,r,s)} \\ Q_5^{(p,r,s)} - Q_3^{(p,r,s)} &= Q_4^{(p,r,s)} + Q_2^{(p,r,s)} \\ Q_7^{(p,r,s)} - Q_5^{(p,r,s)} &= Q_6^{(p,r,s)} + Q_4^{(p,r,s)} \\ &\dots = \dots \\ &\dots = \dots \\ &\dots = \dots \\ Q_{2n+1}^{(p,r,s)} - Q_{2n-1}^{(p,r,s)} &= Q_{2n}^{(p,r,s)} + Q_{2n-2}^{(p,r,s)} \end{aligned}$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemler taraf tarafa toplanıp gerekli işlemler yapıldı-

ğında

$$Q_{2n+1}^{(p,r,s)} - Q_1^{(p,r,s)} = 2 \underbrace{(Q_0^{(p,r,s)} + \dots + Q_{2n}^{(p,r,s)})}_{\sum_{k=0}^n Q_{2k}^{(p,r,s)}} - Q_0^{(p,r,s)} - Q_{2n}^{(p,r,s)}$$

$$\sum_{k=0}^n Q_{2k}^{(p,r,s)} = \frac{Q_{2n+1}^{(p,r,s)} + Q_{2n}^{(p,r,s)} - Q_1^{(p,r,s)} + Q_0^{(p,r,s)}}{2}$$

elde edilir. □

Teorem 3.11.

$$\sum_{k=0}^n Q_{2k+1}^{(p,r,s)} = \frac{Q_{2n+2}^{(p,r,s)} + Q_{2n+1}^{(p,r,s)} + Q_1^{(p,r,s)} - Q_2^{(p,r,s)}}{2}$$

İspat. (3.3) yineleme bağıntısından

$$\begin{aligned} Q_1^{(p,r,s)} + Q_3^{(p,r,s)} &= Q_4^{(p,r,s)} - Q_2^{(p,r,s)} \\ Q_3^{(p,r,s)} + Q_5^{(p,r,s)} &= Q_6^{(p,r,s)} - Q_4^{(p,r,s)} \\ Q_5^{(p,r,s)} + Q_7^{(p,r,s)} &= Q_8^{(p,r,s)} - Q_6^{(p,r,s)} \\ &\dots = \dots \\ &\dots = \dots \\ &\dots = \dots \\ Q_{2n-1}^{(p,r,s)} + Q_{2n+1}^{(p,r,s)} &= Q_{2n+2}^{(p,r,s)} - Q_{2n}^{(p,r,s)} \end{aligned}$$

yazılır. Bu denklemler taraf tarafa toplanıp gerekli işlemler yapıldığında

$$\begin{aligned} 2 \sum_{k=0}^n Q_{2k+1}^{(p,r,s)} &= Q_{2n+2}^{(p,r,s)} + Q_{2n+1}^{(p,r,s)} + Q_1^{(p,r,s)} - Q_2^{(p,r,s)} \\ \sum_{k=0}^n Q_{2k+1}^{(p,r,s)} &= \frac{Q_{2n+2}^{(p,r,s)} + Q_{2n+1}^{(p,r,s)} + Q_1^{(p,r,s)} - Q_2^{(p,r,s)}}{2} \end{aligned}$$

elde edilir. □

Teorem 3.12.

$$\sum_{k=0}^n Q_{3k}^{(p,r,s)} = \sum_{k=0}^{3n-1} Q_k^{(p,r,s)} + Q_0^{(p,r,s)} = \frac{3Q_0^{(p,r,s)} - Q_2^{(p,r,s)} + Q_{3n+2}^{(p,r,s)} - Q_{3n}^{(p,r,s)}}{2}$$

İspat.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n Q_{3k}^{(p,r,s)} &= Q_0^{(p,r,s)} + Q_3^{(p,r,s)} + Q_6^{(p,r,s)} + \dots + Q_{3n}^{(p,r,s)} \\ &= Q_0^{(p,r,s)} + \underbrace{Q_0^{(p,r,s)} + Q_1^{(p,r,s)} + Q_2^{(p,r,s)}}_{Q_3^{(p,r,s)}} + \underbrace{Q_3^{(p,r,s)} + Q_4^{(p,r,s)} + Q_5^{(p,r,s)}}_{Q_6^{(p,r,s)}} \\ &\quad + \underbrace{Q_6^{(p,r,s)} + Q_7^{(p,r,s)} + Q_8^{(p,r,s)}}_{Q_9^{(p,r,s)}} + \dots + \underbrace{Q_{3n-3}^{(p,r,s)} + Q_{3n-2}^{(p,r,s)} + Q_{3n-1}^{(p,r,s)}}_{Q_{3n}^{(p,r,s)}} \\ \sum_{k=0}^n Q_{3k}^{(p,r,s)} &= Q_0^{(p,r,s)} + \sum_{k=0}^{3n-1} Q_k^{(p,r,s)} \end{aligned}$$

elde edilir. (3.3) yineleme bağıntısından

$$\begin{aligned} Q_3^{(p,r,s)} &= Q_2^{(p,r,s)} + Q_1^{(p,r,s)} + Q_0^{(p,r,s)} \\ Q_4^{(p,r,s)} &= Q_3^{(p,r,s)} + Q_2^{(p,r,s)} + Q_1^{(p,r,s)} \\ &\dots = \dots \\ &\dots = \dots \\ &\dots = \dots \\ Q_{3n-1}^{(p,r,s)} &= Q_{3n-2}^{(p,r,s)} + Q_{3n-3}^{(p,r,s)} + Q_{3n-4}^{(p,r,s)} \end{aligned}$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemler taraf tarafa toplanıp gerekli işlemler yapıldığında

$$\sum_{k=0}^n Q_{3k} = \sum_{k=0}^{3n-1} Q_k^{(p,r,s)} + Q_0^{(p,r,s)} = \frac{3Q_0^{(p,r,s)} - Q_2^{(p,r,s)} + Q_{3n+2}^{(p,r,s)} - Q_{3n}^{(p,r,s)}}{2}$$

ispat tamamlanmış olur. □

Teorem 3.13.

$$\sum_{k=0}^n Q_{4k}^{(p,r,s)} = \frac{Q_{4n+2}^{(p,r,s)} + Q_{4n}^{(p,r,s)} + 3Q_0^{(p,r,s)} - Q_2^{(p,r,s)}}{4}$$

İspat. (3.3) yineleme bağıntısından

$$\begin{aligned} Q_4^{(p,r,s)} &= Q_3^{(p,r,s)} + Q_2^{(p,r,s)} + Q_1^{(p,r,s)} \\ Q_8^{(p,r,s)} &= Q_7^{(p,r,s)} + Q_6^{(p,r,s)} + Q_5^{(p,r,s)} \\ \dots &= \dots \\ \dots &= \dots \\ \dots &= \dots \\ Q_{4n}^{(p,r,s)} &= Q_{4n-1}^{(p,r,s)} + Q_{4n-2}^{(p,r,s)} + Q_{4n-3}^{(p,r,s)} \end{aligned}$$

yazılır. Bu denklemler taraf tarafa toplanıp gerekli işlemler yapıldığında

$$2 \sum_{k=0}^n Q_{4k}^{(p,r,s)} = \sum_{k=0}^{4n} Q_k^{(p,r,s)} + Q_0^{(p,r,s)} \quad (3.17)$$

elde edilir. (3.16) eşitliğinde $n \rightarrow 4n$ indis değişimi yapıldığında

$$\sum_{k=0}^{4n} Q_k^{(p,r,s)} = \frac{Q_{4n+2}^{(p,r,s)} + Q_{4n}^{(p,r,s)} + Q_0^{(p,r,s)} - Q_2^{(p,r,s)}}{2}$$

yazılabilir. Bu ifade (3.17) denkleminde yerine yazılırsa

$$\sum_{k=0}^n Q_{4k}^{(p,r,s)} = \frac{Q_{4n+2}^{(p,r,s)} + Q_{4n}^{(p,r,s)} + 3Q_0^{(p,r,s)} - Q_2^{(p,r,s)}}{4}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. □

Şimdi Tribonacci sayıları kullanılarak yeni sayı dizileri ve tanımlanan sayı dizilerini

bileşen kabul eden yeni kuaterniyon dizileri tanımlanacaktır.

$$\begin{aligned} R_n &= 3T_{n+1} - T_n \quad (n \geq 0) \\ U_n &= T_{n-1} + T_{n-2}; \quad U_0 = U_1 = 0 \quad (n \geq 2) \end{aligned}$$

dizileri ele alınsın. Buradan

$$\sum_{k=0}^n U_k = T_{n+1} - 1 \quad (3.18)$$

olduğu görülür, [42, 55]. Bu diziler yardımıyla

$$\mathfrak{R}_n^{(p,r,s)} = R_n + \mathbf{i}R_{n+p} + \mathbf{j}R_{n+r} + \mathbf{k}R_{n+s} \quad (3.19)$$

$$\mathfrak{U}_n^{(p,r,s)} = U_n + \mathbf{i}U_{n+p} + \mathbf{j}U_{n+r} + \mathbf{k}U_{n+s} \quad (3.20)$$

kısıtlamasız kuaterniyon dizileri tanımlanabilir. Tanımlanan kuaterniyon dizileri için de bazı toplamsal özdeşlikler yazılabilir.

Teorem 3.14.

$$\sum_{k=0}^n \mathfrak{U}_k^{(p,r,s)} = \mathcal{Q}_{n+1}^{(p,r,s)} - \mathcal{Q}_0^{(p,r,s)} - 1$$

İspat.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \mathfrak{U}_k^{(p,r,s)} &= \mathfrak{U}_0^{(p,r,s)} + \mathfrak{U}_1^{(p,r,s)} + \dots + \mathfrak{U}_n^{(p,r,s)} \\ &= (U_0 + \mathbf{i}U_p + \mathbf{j}U_r + \mathbf{k}U_s) + (U_1 + \mathbf{i}U_{p+1} + \mathbf{j}U_{r+1} + \mathbf{k}U_{s+1}) \\ &\quad + \dots + (U_n + \mathbf{i}U_{p+n} + \mathbf{j}U_{r+n} + \mathbf{k}U_{s+n}) \\ &= (U_0 + U_1 + \dots + U_n) + \mathbf{i}(U_p + U_{p+1} + \dots + U_{p+n}) \\ &\quad + \mathbf{j}(U_r + U_{r+1} + \dots + U_{r+n}) + \mathbf{k}(U_s + U_{s+1} + \dots + U_{s+n}) \end{aligned}$$

(3.18) eşitliği denklemde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n \mathfrak{U}_k^{(p,r,s)} &= (T_{n+1} - 1) + \mathbf{i}[(T_{n+p+1} - 1) - (T_p - 1)] \\
&\quad + \mathbf{j}[(T_{n+r+1} - 1) - (T_r - 1)] + \mathbf{k}[(T_{n+s+1} - 1) - (T_s - 1)] \\
&= (T_{n+1} + \mathbf{i}T_{n+p+1} + \mathbf{j}T_{n+r+1} + \mathbf{k}T_{n+s+1}) - (\mathbf{i}T_p + \mathbf{j}T_r + \mathbf{k}T_s) - 1 \\
&= Q_{n+1}^{(p,r,s)} - Q_0^{(p,r,s)} - 1
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. $\square$

Teorem 3.15.

$$\sum_{k=0}^n \mathfrak{R}_k^{(p,r,s)} = Q_{n+3}^{(p,r,s)} + 2Q_{n+1}^{(p,r,s)} - Q_2^{(p,r,s)} - 2Q_0^{(p,r,s)}$$

İspat. $\mathfrak{R}_n^{(p,r,s)}$ kısıtlamasız kuaterniyonu (3.19) ve R_n 'in tanımları kullanılarak

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n \mathfrak{R}_k^{(p,r,s)} &= \sum_{k=0}^n (R_k + \mathbf{i}R_{k+p} + \mathbf{j}R_{k+r} + \mathbf{k}R_{k+s}) \\
&= \sum_{k=0}^n (3T_{k+1} - T_k) + \mathbf{i} \sum_{k=0}^n (3T_{k+1+p} - T_{k+p}) \\
&\quad + \mathbf{j} \sum_{k=0}^n (3T_{k+1+r} - T_{k+r}) + \mathbf{k} \sum_{k=0}^n (3T_{k+1+s} - T_{k+s}) \\
&= 3 \sum_{k=0}^n (T_{k+1} + \mathbf{i}T_{k+1+p} + \mathbf{j}T_{k+1+r} + \mathbf{k}T_{k+1+s}) \\
&\quad - \sum_{k=0}^n (T_k + \mathbf{i}T_{k+p} + \mathbf{j}T_{k+r} + \mathbf{k}T_{k+s}) \\
&= 3 \sum_{k=0}^n Q_{k+1}^{(p,r,s)} - \sum_{k=0}^n Q_k^{(p,r,s)} \\
&= 2(Q_1^{(p,r,s)} + Q_2^{(p,r,s)} + \dots + Q_n^{(p,r,s)}) + 3Q_{n+1}^{(p,r,s)} - Q_0^{(p,r,s)} \\
&= 2(Q_0^{(p,r,s)} + Q_1^{(p,r,s)} + \dots + Q_n^{(p,r,s)}) + 3Q_{n+1}^{(p,r,s)} - 3Q_0^{(p,r,s)} \\
&= 2 \left(\frac{Q_{n+2}^{(p,r,s)} + Q_n^{(p,r,s)} + Q_0^{(p,r,s)} - Q_2^{(p,r,s)}}{2} \right) + 3Q_{n+1}^{(p,r,s)} - 3Q_0^{(p,r,s)} \\
&= Q_{n+3}^{(p,r,s)} + 2Q_{n+1}^{(p,r,s)} - 2Q_0^{(p,r,s)} - Q_2^{(p,r,s)}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Teorem 3.16.

$$\sum_{k=0}^n Q_k^{(p,r,s)} = \frac{\mathfrak{U}_{n+2}^{(p,r,s)} + \mathfrak{U}_{n+1}^{(p,r,s)} + Q_0^{(p,r,s)} - Q_2^{(p,r,s)}}{2}$$

İspat. (3.16) denkleminde $Q_n^{(p,r,s)} + Q_{n+2}^{(p,r,s)} = \mathfrak{U}_{n+1}^{(p,r,s)} + \mathfrak{U}_{n+2}^{(p,r,s)}$ olduğu gösterilecektir.

$$\begin{aligned} Q_n^{(p,r,s)} + Q_{n+2}^{(p,r,s)} &= (T_n + \mathbf{i}T_{n+p} + \mathbf{j}T_{n+r} + \mathbf{k}T_{n+s}) \\ &+ (T_{n+2} + \mathbf{i}T_{n+2+p} + \mathbf{j}T_{n+2+r} + \mathbf{k}T_{n+2+s}) \\ &= (T_n + T_{n+2}) + \mathbf{i}(T_{n+p} + T_{n+2+p}) + \mathbf{j}(T_{n+r} + T_{n+2+r}) \\ &+ \mathbf{k}(T_{n+s} + T_{n+2+s}) \\ &= (\underbrace{T_n + T_{n-1}}_{U_{n+1}} + \underbrace{T_{n+1} + T_n}_{U_{n+2}}) \\ &+ \mathbf{i}(\underbrace{T_{n+p} + T_{n+p-1}}_{U_{n+1+p}} + \underbrace{T_{n+p+1} + T_{n+p}}_{U_{n+2+p}}) \\ &+ \mathbf{j}(\underbrace{T_{n+r} + T_{n+r-1}}_{U_{n+1+r}} + \underbrace{T_{n+r+1} + T_{n+r}}_{U_{n+2+r}}) \\ &+ \mathbf{k}(\underbrace{T_{n+s} + T_{n+s-1}}_{U_{n+1+s}} + \underbrace{T_{n+s+1} + T_{n+s}}_{U_{n+2+s}}) \\ &= \mathfrak{U}_{n+1}^{(p,r,s)} + \mathfrak{U}_{n+2}^{(p,r,s)}. \end{aligned}$$

Böylece ispat tamamlanmış olur. $\square$

Teorem 3.17.

$$\sum_{k=0}^n \mathfrak{U}_{3k}^{(p,r,s)} = Q_{3n}^{(p,r,s)} - Q_0^{(p,r,s)} + \mathfrak{U}_0^{(p,r,s)}$$

İspat.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n \mathfrak{U}_{3k}^{(p,r,s)} &= \mathfrak{U}_0^{(p,r,s)} + \mathfrak{U}_3^{(p,r,s)} + \mathfrak{U}_6^{(p,r,s)} + \dots + \mathfrak{U}_{3n}^{(p,r,s)} \\
&= \mathfrak{U}_0^{(p,r,s)} + \mathfrak{U}_0^{(p,r,s)} + \mathfrak{U}_1^{(p,r,s)} + \mathfrak{U}_2^{(p,r,s)} + \mathfrak{U}_3^{(p,r,s)} + \mathfrak{U}_4^{(p,r,s)} + \mathfrak{U}_5^{(p,r,s)} \\
&\quad + \dots + \mathfrak{U}_{3n-3}^{(p,r,s)} + \mathfrak{U}_{3n-2}^{(p,r,s)} + \mathfrak{U}_{3n-1}^{(p,r,s)} \\
&= \mathfrak{U}_0^{(p,r,s)} + \sum_{k=0}^{3n-1} \mathfrak{U}_k^{(p,r,s)}
\end{aligned}$$

Burada Eşitlik (3.20) yerine yazıldığında

$$\begin{aligned}
&= \mathfrak{U}_0^{(p,r,s)} + \sum_{k=0}^{3n-1} (U_k + \mathbf{i}U_{k+p} + \mathbf{j}U_{k+r} + \mathbf{k}U_{k+s}) \\
&= \mathfrak{U}_0^{(p,r,s)} + \sum_{k=0}^{3n-1} ((T_{k-1} + T_{k-2}) + \mathbf{i}(T_{k-1+p} + T_{k-2+p})) \\
&\quad + \sum_{k=0}^{3n-1} (\mathbf{j}(T_{k-1+r} + T_{k-2+r}) + \mathbf{k}(T_{k-1+s} + T_{k-2+s})) \\
&= \mathfrak{U}_0^{(p,r,s)} + \sum_{k=0}^{3n-1} (T_{k-1} + \mathbf{i}T_{k-1+p} + \mathbf{j}T_{k-1+r} + \mathbf{k}T_{k-1+s}) \\
&\quad + \sum_{k=0}^{3n-1} (T_{k-2} + \mathbf{i}T_{k-2+p} + \mathbf{j}T_{k-2+r} + \mathbf{k}T_{k-2+s}) \\
&= \mathfrak{U}_0^{(p,r,s)} + \sum_{k=0}^{3n-1} \mathbf{Q}_{k-1}^{(p,r,s)} + \sum_{k=0}^{3n-1} \mathbf{Q}_{k-2}^{(p,r,s)}
\end{aligned}$$

elde edilir. Eşitliğin sağ tarafına $\sum_{k=0}^{3n-1} \mathbf{Q}_k^{(p,r,s)}$ eklenip çıkarılırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n \mathfrak{U}_{3k}^{(p,r,s)} &= \mathfrak{U}_0^{(p,r,s)} + \sum_{k=0}^{3n-1} \mathbf{Q}_k^{(p,r,s)} + \sum_{k=0}^{3n-1} \mathbf{Q}_{k-1}^{(p,r,s)} + \sum_{k=0}^{3n-1} \mathbf{Q}_{k-2}^{(p,r,s)} - \sum_{k=0}^{3n-1} \mathbf{Q}_k^{(p,r,s)} \\
&= \mathfrak{U}_0^{(p,r,s)} + \sum_{k=0}^{3n-1} \mathbf{Q}_{k+1}^{(p,r,s)} - \sum_{k=0}^{3n-1} \mathbf{Q}_k^{(p,r,s)} \\
&= \mathbf{Q}_{3n}^{(p,r,s)} - \mathbf{Q}_0^{(p,r,s)} + \mathfrak{U}_0^{(p,r,s)}
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. □

Teorem 3.18.

$$\sum_{k=0}^n \mathfrak{U}_{3k+1}^{(p,r,s)} = \mathbf{Q}_{3n+1}^{(p,r,s)} - \mathbf{Q}_0^{(p,r,s)} + \mathfrak{U}_1^{(p,r,s)} - \mathfrak{U}_0^{(p,r,s)}$$

İspat.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \mathfrak{U}_{3k+1}^{(p,r,s)} &= \mathfrak{U}_1^{(p,r,s)} + \mathfrak{U}_4^{(p,r,s)} + \mathfrak{U}_7^{(p,r,s)} + \dots + \mathfrak{U}_{3n+1}^{(p,r,s)} \\ &= \mathfrak{U}_1^{(p,r,s)} + \mathfrak{U}_1^{(p,r,s)} + \mathfrak{U}_2^{(p,r,s)} + \dots + \mathfrak{U}_{3n-2}^{(p,r,s)} + \mathfrak{U}_{3n-1}^{(p,r,s)} + \mathfrak{U}_{3n}^{(p,r,s)} \\ &= \mathfrak{U}_1^{(p,r,s)} + \sum_{k=1}^{3n} \mathfrak{U}_k^{(p,r,s)} \\ &= \mathfrak{U}_1^{(p,r,s)} + \sum_{k=0}^{3n} \mathfrak{U}_k^{(p,r,s)} - \mathfrak{U}_0^{(p,r,s)} \\ &= \mathfrak{U}_1^{(p,r,s)} - \mathfrak{U}_0^{(p,r,s)} + \sum_{k=0}^{3n} (U_k + \mathbf{i}U_{k+p} + \mathbf{j}U_{k+r} + \mathbf{k}U_{k+s}) \\ &= \mathfrak{U}_1^{(p,r,s)} - \mathfrak{U}_0^{(p,r,s)} + \sum_{k=0}^{3n} (\mathbf{Q}_{k-1}^{(p,r,s)} + \mathbf{Q}_{k-2}^{(p,r,s)}) \\ &= \mathfrak{U}_1^{(p,r,s)} - \mathfrak{U}_0^{(p,r,s)} + \sum_{k=0}^{3n} (\mathbf{Q}_k^{(p,r,s)} - \mathbf{Q}_k^{(p,r,s)} + \mathbf{Q}_{k-1}^{(p,r,s)} + \mathbf{Q}_{k-2}^{(p,r,s)}) \\ &= \mathfrak{U}_1^{(p,r,s)} - \mathfrak{U}_0^{(p,r,s)} + \sum_{k=0}^{3n} (\mathbf{Q}_{k+1}^{(p,r,s)} - \mathbf{Q}_k^{(p,r,s)}) \\ &= \mathbf{Q}_{3n+1}^{(p,r,s)} - \mathbf{Q}_0^{(p,r,s)} + \mathfrak{U}_1^{(p,r,s)} - \mathfrak{U}_0^{(p,r,s)} \end{aligned}$$

olup istenen sonuç elde edilir. □

Şimdi $\mathbf{Q}_n^{(p,r,s)}$ kuaterniyonu için bir üreteç matrisi elde edilecektir.

Teorem 3.19.

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ ve } \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_2^{(p,r,s)} - \mathbf{Q}_1^{(p,r,s)} - \mathbf{Q}_0^{(p,r,s)} & \mathbf{Q}_1^{(p,r,s)} - \mathbf{Q}_0^{(p,r,s)} & \mathbf{Q}_1^{(p,r,s)} \\ \mathbf{Q}_0^{(p,r,s)} & \mathbf{Q}_2^{(p,r,s)} - \mathbf{Q}_1^{(p,r,s)} & \mathbf{Q}_1^{(p,r,s)} \\ \mathbf{Q}_2^{(p,r,s)} & \mathbf{Q}_2^{(p,r,s)} + \mathbf{Q}_1^{(p,r,s)} & \mathbf{Q}_3^{(p,r,s)} \end{bmatrix}$$

olsun. $k \geq 2$ için

$$QU^k = \begin{bmatrix} Q_{k-1}^{(p,r,s)} & Q_{k-1}^{(p,r,s)} + Q_{k-2}^{(p,r,s)} & Q_k^{(p,r,s)} \\ Q_k^{(p,r,s)} & Q_k^{(p,r,s)} + Q_{k-1}^{(p,r,s)} & Q_{k+1}^{(p,r,s)} \\ Q_{k+1}^{(p,r,s)} & Q_{k+1}^{(p,r,s)} + Q_k^{(p,r,s)} & Q_{k+2}^{(p,r,s)} \end{bmatrix}$$

elde edilir.

İspat. İspat k üzerinden tümevarım ile yapılacaktır. $k = 2$ için

$$\begin{aligned} QU^2 &= \begin{bmatrix} Q_2^{(p,r,s)} - Q_1^{(p,r,s)} - Q_0^{(p,r,s)} & Q_1^{(p,r,s)} - Q_0^{(p,r,s)} & Q_1^{(p,r,s)} \\ Q_0^{(p,r,s)} & Q_2^{(p,r,s)} - Q_1^{(p,r,s)} & Q_1^{(p,r,s)} \\ Q_2^{(p,r,s)} & Q_2^{(p,r,s)} + Q_1^{(p,r,s)} & Q_3^{(p,r,s)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} Q_1^{(p,r,s)} & Q_1^{(p,r,s)} + Q_0^{(p,r,s)} & Q_2^{(p,r,s)} \\ Q_2^{(p,r,s)} & Q_2^{(p,r,s)} + Q_1^{(p,r,s)} & Q_2^{(p,r,s)} + Q_1^{(p,r,s)} + Q_0^{(p,r,s)} \\ Q_2^{(p,r,s)} + Q_1^{(p,r,s)} + Q_0^{(p,r,s)} & 2Q_2^{(p,r,s)} + Q_1^{(p,r,s)} + Q_0^{(p,r,s)} & 2Q_2^{(p,r,s)} + 2Q_1^{(p,r,s)} + Q_0^{(p,r,s)} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} Q_1^{(p,r,s)} & Q_1^{(p,r,s)} + Q_0^{(p,r,s)} & Q_2^{(p,r,s)} \\ Q_2^{(p,r,s)} & Q_2^{(p,r,s)} + Q_1^{(p,r,s)} & Q_3^{(p,r,s)} \\ Q_3^{(p,r,s)} & Q_3^{(p,r,s)} + Q_2^{(p,r,s)} & Q_4^{(p,r,s)} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

doğru olduğu görülür. k için doğru olduğu kabul edilsin, yani

$$QU^k = \begin{bmatrix} Q_{k-1}^{(p,r,s)} & Q_{k-1}^{(p,r,s)} + Q_{k-2}^{(p,r,s)} & Q_k^{(p,r,s)} \\ Q_k^{(p,r,s)} & Q_k^{(p,r,s)} + Q_{k-1}^{(p,r,s)} & Q_{k+1}^{(p,r,s)} \\ Q_{k+1}^{(p,r,s)} & Q_{k+1}^{(p,r,s)} + Q_k^{(p,r,s)} & Q_{k+2}^{(p,r,s)} \end{bmatrix}$$

doğru olsun. Buradan

$$QU^{k+1} = QU^k U$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{k-1}^{(p,r,s)} & \mathbf{Q}_{k-1}^{(p,r,s)} + \mathbf{Q}_{k-2}^{(p,r,s)} & \mathbf{Q}_k^{(p,r,s)} \\ \mathbf{Q}_k^{(p,r,s)} & \mathbf{Q}_k^{(p,r,s)} + \mathbf{Q}_{k-1}^{(p,r,s)} & \mathbf{Q}_{k+1}^{(p,r,s)} \\ \mathbf{Q}_{k+1}^{(p,r,s)} & \mathbf{Q}_{k+1}^{(p,r,s)} + \mathbf{Q}_k^{(p,r,s)} & \mathbf{Q}_{k+2}^{(p,r,s)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_k^{(p,r,s)} & \mathbf{Q}_k^{(p,r,s)} + \mathbf{Q}_{k-1}^{(p,r,s)} & \mathbf{Q}_{k+1}^{(p,r,s)} \\ \mathbf{Q}_{k+1}^{(p,r,s)} & \mathbf{Q}_{k+1}^{(p,r,s)} + \mathbf{Q}_k^{(p,r,s)} & \mathbf{Q}_{k+2}^{(p,r,s)} \\ \mathbf{Q}_{k+2}^{(p,r,s)} & \mathbf{Q}_{k+2}^{(p,r,s)} + \mathbf{Q}_{k+1}^{(p,r,s)} & \mathbf{Q}_{k+3}^{(p,r,s)} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

□



4 . KISITLAMASIZ TRIBONACCİ ve TRIBONACCİ-LUCAS KUATERNİYON POLİNOMLARI

Bu bölümde Tribonacci ve Tribonacci-Lucas polinomları kullanılarak Tribonacci ve Tribonacci-Lucas kuaterniyon polinomlarının bir genellemesi tanımlanmış ve bu polinomların bazı özellikleri elde edilmiştir.

4.1. Kısıtlamasız Tribonacci ve Tribonacci-Lucas Kuaterniyon Polinomlarının Bazı Özellikleri

Tanım 4.1. Kısıtlamasız Tribonacci kuaterniyon polinomu ve kısıtlamasız Tribonacci-Lucas kuaterniyon polinomu $n \geq 0$ için

$$\begin{aligned} Q_n^{(p,r,s)}(x) &= T_n(x) + \mathbf{i}T_{n+\mathbf{p}}(x) + \mathbf{j}T_{n+\mathbf{r}}(x) + \mathbf{k}T_{n+\mathbf{s}}(x) \\ \tilde{Q}_n^{(p,r,s)}(x) &= t_n(x) + \mathbf{i}t_{n+\mathbf{p}}(x) + \mathbf{j}t_{n+\mathbf{r}}(x) + \mathbf{k}t_{n+\mathbf{s}}(x) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

$p = 1$, $r = 2$ ve $s = 3$ için klasik Tribonacci ve Tribonacci-Lucas kuaterniyon polinomları elde edilecektir, [44].

Teorem 4.1. Kısıtlamasız Tribonacci kuaterniyon polinomu ve kısıtlamasız Tribonacci-Lucas kuaterniyon polinomu başlangıç koşulları sırasıyla

$$\begin{aligned} Q_0^{(p,r,s)}(x) &= \mathbf{i}T_{\mathbf{p}}(x) + \mathbf{j}T_{\mathbf{r}}(x) + \mathbf{k}T_{\mathbf{s}}(x) \\ Q_1^{(p,r,s)}(x) &= 1 + \mathbf{i}T_{1+\mathbf{p}}(x) + \mathbf{j}T_{1+\mathbf{r}}(x) + \mathbf{k}T_{1+\mathbf{s}}(x) \\ Q_2^{(p,r,s)}(x) &= x^2 + \mathbf{i}T_{2+\mathbf{p}}(x) + \mathbf{j}T_{2+\mathbf{r}}(x) + \mathbf{k}T_{2+\mathbf{s}}(x) \\ \tilde{Q}_0^{(p,r,s)}(x) &= 3 + \mathbf{i}t_{\mathbf{p}}(x) + \mathbf{j}t_{\mathbf{r}}(x) + \mathbf{k}t_{\mathbf{s}}(x) \\ \tilde{Q}_1^{(p,r,s)}(x) &= x^2 + \mathbf{i}t_{1+\mathbf{p}}(x) + \mathbf{j}t_{1+\mathbf{r}}(x) + \mathbf{k}t_{1+\mathbf{s}}(x) \end{aligned}$$

$$\tilde{Q}_2^{(p,r,s)}(x) = (x^4 + 2x) + \mathbf{i}t_{2+\mathbf{p}}(x) + \mathbf{j}t_{2+\mathbf{r}}(x) + \mathbf{k}t_{2+\mathbf{s}}(x)$$

olmak üzere $n \geq 0$ için

$$Q_{n+3}^{(p,r,s)}(x) = x^2 Q_{n+2}^{(p,r,s)}(x) + x Q_{n+1}^{(p,r,s)}(x) + Q_n^{(p,r,s)}(x) \quad (4.1)$$

$$\tilde{Q}_{n+3}^{(p,r,s)}(x) = x^2 \tilde{Q}_{n+2}^{(p,r,s)}(x) + x \tilde{Q}_{n+1}^{(p,r,s)}(x) + \tilde{Q}_n^{(p,r,s)}(x) \quad (4.2)$$

bağıntılarını sağlamaktadır.

İspat. Öncelikle (4.1) özdeşliğinin ispatı verilecektir. $Q_n^{(p,r,s)}(x)$ kısıtlamasız Tribonacci kuaterniyon polinomunun tanımı ve (2.10) eşitliği kullanıldığında

$$\begin{aligned} Q_{n+3}^{(p,r,s)}(x) &= x^2 Q_{n+2}^{(p,r,s)}(x) + x Q_{n+1}^{(p,r,s)}(x) + Q_n^{(p,r,s)}(x) \\ &= x^2 (T_{n+2}(x) + \mathbf{i}T_{n+2+\mathbf{p}}(x) + \mathbf{j}T_{n+2+\mathbf{r}}(x) + \mathbf{k}T_{n+2+\mathbf{s}}(x)) \\ &\quad + x (T_{n+1}(x) + \mathbf{i}T_{n+1+\mathbf{p}}(x) + \mathbf{j}T_{n+1+\mathbf{r}}(x) + \mathbf{k}T_{n+1+\mathbf{s}}(x)) \\ &\quad + (T_n(x) + \mathbf{i}T_{n+\mathbf{p}}(x) + \mathbf{j}T_{n+\mathbf{r}}(x) + \mathbf{k}T_{n+\mathbf{s}}(x)) \\ &= \underbrace{(x^2 T_{n+2}(x) + x T_{n+1}(x) + T_n(x))}_{T_{n+3}(x)} \\ &\quad + \mathbf{i} \underbrace{(x^2 T_{n+2+\mathbf{p}}(x) + x T_{n+1+\mathbf{p}}(x) + T_{n+\mathbf{p}}(x))}_{T_{n+3+\mathbf{p}}(x)} \\ &\quad + \mathbf{j} \underbrace{(x^2 T_{n+2+\mathbf{r}}(x) + x T_{n+1+\mathbf{r}}(x) + T_{n+\mathbf{r}}(x))}_{T_{n+3+\mathbf{r}}(x)} \\ &\quad + \mathbf{k} \underbrace{(x^2 T_{n+2+\mathbf{s}}(x) + x T_{n+1+\mathbf{s}}(x) + T_{n+\mathbf{s}}(x))}_{T_{n+3+\mathbf{s}}(x)} \\ &= T_{n+3}(x) + \mathbf{i}T_{n+3+\mathbf{p}}(x) + \mathbf{j}T_{n+3+\mathbf{r}}(x) + \mathbf{k}T_{n+3+\mathbf{s}}(x) \\ &= Q_{n+3}^{(p,r,s)}(x) \end{aligned}$$

elde edilir.

Benzer şekilde $\tilde{Q}_n^{(p,r,s)}(x)$ kısıtlamasız Tribonacci-Lucas kuaterniyon polinomunun ta-

nımı ve (2.17) eşitliği kullanıldığında

$$\begin{aligned}
\tilde{Q}_{n+3}^{(p,r,s)}(x) &= x^2 \tilde{Q}_{n+2}^{(p,r,s)}(x) + x \tilde{Q}_{n+1}^{(p,r,s)}(x) + \tilde{Q}_n^{(p,r,s)}(x) \\
&= x^2(t_{n+2}(x) + \mathbf{i}t_{n+2+\mathbf{p}}(x) + \mathbf{j}t_{n+2+\mathbf{r}}(x) + \mathbf{k}t_{n+2+\mathbf{s}}(x)) \\
&\quad + x(t_{n+1}(x) + \mathbf{i}t_{n+1+\mathbf{p}}(x) + \mathbf{j}t_{n+1+\mathbf{r}}(x) + \mathbf{k}t_{n+1+\mathbf{s}}(x)) \\
&\quad + (t_n(x) + \mathbf{i}t_{n+\mathbf{p}}(x) + \mathbf{j}t_{n+\mathbf{r}}(x) + \mathbf{k}t_{n+\mathbf{s}}(x)) \\
&= \underbrace{(x^2 t_{n+2}(x) + x t_{n+1}(x) + t_n(x))}_{t_{n+3}(x)} \\
&\quad + \mathbf{i} \underbrace{(x^2 t_{n+2+\mathbf{p}}(x) + x t_{n+1+\mathbf{p}}(x) + t_{n+\mathbf{p}}(x))}_{t_{n+3+\mathbf{p}}(x)} \\
&\quad + \mathbf{j} \underbrace{(x^2 t_{n+2+\mathbf{r}}(x) + x t_{n+1+\mathbf{r}}(x) + t_{n+\mathbf{r}}(x))}_{t_{n+3+\mathbf{r}}(x)} \\
&\quad + \mathbf{k} \underbrace{(x^2 t_{n+2+\mathbf{s}}(x) + x t_{n+1+\mathbf{s}}(x) + t_{n+\mathbf{s}}(x))}_{t_{n+3+\mathbf{s}}(x)} \\
&= t_{n+3}(x) + \mathbf{i}t_{n+3+\mathbf{p}}(x) + \mathbf{j}t_{n+3+\mathbf{r}}(x) + \mathbf{k}t_{n+3+\mathbf{s}}(x) \\
&= \tilde{Q}_{n+3}^{(p,r,s)}(x)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. $\square$

(4.1) ve (4.2) denklemleri ile verilen yineleme bağıntılarının karakteristik denklemi (2.11) denklemi ile aynıdır ve denklemin kökleri (2.12) eşitliğinde $\alpha(x), w_1(x), w_2(x)$ olarak verilmiştir.

Şimdi $Q_n^{(p,r,s)}(x)$ ve $\tilde{Q}_n^{(p,r,s)}(x)$ kuaterniyon polinomlarının Binet formülleri ve üreteç fonksiyonları verilecektir.

Teorem 4.2. Kısıtlamasız Tribonacci kuaterniyon polinomunun Binet Formülü

$$\begin{aligned}
\underline{\alpha} &= 1 + \mathbf{i}\alpha^p(x) + \mathbf{j}\alpha^r(x) + \mathbf{k}\alpha^s(x) \\
\underline{w_1} &= 1 + \mathbf{i}w_1^p(x) + \mathbf{j}w_1^r(x) + \mathbf{k}w_1^s(x) \\
\underline{w_2} &= 1 + \mathbf{i}w_2^p(x) + \mathbf{j}w_2^r(x) + \mathbf{k}w_2^s(x)
\end{aligned} \tag{4.3}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
Q_n^{(p,r,s)}(x) &= \frac{\alpha \alpha^{n+1}(x)}{(\alpha(x) - w_1(x))(\alpha(x) - w_2(x))} + \frac{w_1 w_1^{n+1}(x)}{(w_1(x) - \alpha(x))(w_1(x) - w_2(x))} \\
&+ \frac{w_2 w_2^{n+1}(x)}{(w_2(x) - \alpha(x))(w_2(x) - w_1(x))}
\end{aligned} \tag{4.4}$$

şeklindedir.

İspat. $Q_n^{(p,r,s)}(x)$ kısıtlamasız Tribonacci kuaterniyon polinomunun tanımı ve (2.15)

Tribonacci polinomunun Binet formülü kullanıldığında

$$\begin{aligned}
Q_n^{(p,r,s)}(x) &= T_n(x) + \mathbf{i}T_{n+\mathbf{p}}(x) + \mathbf{j}T_{n+\mathbf{r}}(x) + \mathbf{k}T_{n+\mathbf{s}}(x) \\
&= \frac{\alpha^{n+1}(x)}{(\alpha(x) - w_1(x))(\alpha(x) - w_2(x))} + \frac{w_1^{n+1}(x)}{(w_1(x) - \alpha(x))(w_1(x) - w_2(x))} \\
&+ \frac{w_2^{n+1}(x)}{(w_2(x) - \alpha(x))(w_2(x) - w_1(x))} \\
&+ \mathbf{i} \left(\frac{\alpha^{n+p+1}(x)}{(\alpha(x) - w_1(x))(\alpha(x) - w_2(x))} + \frac{w_1^{n+p+1}(x)}{(w_1(x) - \alpha(x))(w_1(x) - w_2(x))} \right) \\
&+ \mathbf{i} \left(\frac{w_2^{n+p+1}(x)}{(w_2(x) - \alpha(x))(w_2(x) - w_1(x))} \right) \\
&+ \mathbf{j} \left(\frac{\alpha^{n+r+1}(x)}{(\alpha(x) - w_1(x))(\alpha(x) - w_2(x))} + \frac{w_1^{n+r+1}(x)}{(w_1(x) - \alpha(x))(w_1(x) - w_2(x))} \right) \\
&+ \mathbf{j} \left(\frac{w_2^{n+r+1}(x)}{(w_2(x) - \alpha(x))(w_2(x) - w_1(x))} \right) \\
&+ \mathbf{k} \left(\frac{\alpha^{n+s+1}(x)}{(\alpha(x) - w_1(x))(\alpha(x) - w_2(x))} + \frac{w_1^{n+s+1}(x)}{(w_1(x) - \alpha(x))(w_1(x) - w_2(x))} \right) \\
&+ \mathbf{k} \left(\frac{w_2^{n+s+1}(x)}{(w_2(x) - \alpha(x))(w_2(x) - w_1(x))} \right) \\
&= \frac{\alpha^{n+1}(x)}{(\alpha(x) - w_1(x))(\alpha(x) - w_2(x))} (1 + \mathbf{i}\alpha^p(x) + \mathbf{j}\alpha^r(x) + \mathbf{k}\alpha^s(x)) \\
&+ \frac{w_1^{n+1}(x)}{(w_1(x) - \alpha(x))(w_1(x) - w_2(x))} (1 + \mathbf{i}w_1^p(x) + \mathbf{j}w_1^r(x) + \mathbf{k}w_1^s(x)) \\
&+ \frac{w_2^{n+1}(x)}{(w_2(x) - \alpha(x))(w_2(x) - w_1(x))} (1 + \mathbf{i}w_2^p(x) + \mathbf{j}w_2^r(x) + \mathbf{k}w_2^s(x))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\alpha^{n+1}(x)}{(\alpha(x) - w_1(x))(\alpha(x) - w_2(x))} \underline{\alpha} + \frac{w_1^{n+1}(x)}{(w_1(x) - \alpha(x))(w_1(x) - w_2(x))} \underline{w_1} \\
&\quad + \frac{w_2^{n+1}(x)}{(w_2(x) - \alpha(x))(w_2(x) - w_1(x))} \underline{w_2}
\end{aligned}$$

elde edilir. □

Teorem 4.3. Kısıtlamasız Tribonacci-Lucas kuaterniyon polinomunun Binet formülü

$$\tilde{Q}_n^{(p,r,s)}(x) = \underline{\alpha}\alpha^n(x) + \underline{w_1}w_1^n(x) + \underline{w_2}w_2^n(x) \quad (4.5)$$

şeklindedir.

İspat. $\tilde{Q}_n^{(p,r,s)}(x)$ kısıtlamasız Tribonacci-Lucas kuaterniyon polinomunun tanımı ve (2.18) Tribonacci-Lucas polinomunun Binet formülü kullanıldığında

$$\begin{aligned}
\tilde{Q}_n^{(p,r,s)}(x) &= t_n(x) + \mathbf{i}t_{n+p}(x) + \mathbf{j}t_{n+r}(x) + \mathbf{k}t_{n+s}(x) \\
&= \alpha^n(x) + w_1^n(x) + w_2^n(x) \\
&\quad + \mathbf{i}(\alpha^{n+p}(x) + w_1^{n+p}(x) + w_2^{n+p}(x)) \\
&\quad + \mathbf{j}(\alpha^{n+r}(x) + w_1^{n+r}(x) + w_2^{n+r}(x)) \\
&\quad + \mathbf{k}(\alpha^{n+s}(x) + w_1^{n+s}(x) + w_2^{n+s}(x)) \\
&= \alpha^n(x)(1 + \mathbf{i}\alpha^p(x) + \mathbf{j}\alpha^r(x) + \mathbf{k}\alpha^s(x)) \\
&\quad + w_1^n(x)(1 + \mathbf{i}w_1^p(x) + \mathbf{j}w_1^r(x) + \mathbf{k}w_1^s(x)) \\
&\quad + w_2^n(x)(1 + \mathbf{i}w_2^p(x) + \mathbf{j}w_2^r(x) + \mathbf{k}w_2^s(x)) \\
&= \underline{\alpha}\alpha^n(x) + \underline{w_1}w_1^n(x) + \underline{w_2}w_2^n(x)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. □

Teorem 4.4. Kısıtlamasız Tribonacci kuaterniyon polinomunun üreteç fonksiyonu

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}(y) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n^{(p,r,s)}(x)y^n &= \frac{Q_0^{(p,r,s)}(x) + (Q_1^{(p,r,s)}(x) - x^2Q_0^{(p,r,s)}(x))y}{(1 - x^2y - xy^2 - y^3)} \\ &+ \frac{(Q_2^{(p,r,s)}(x) - x^2Q_1^{(p,r,s)}(x) - xQ_0^{(p,r,s)}(x))y^2}{(1 - x^2y - xy^2 - y^3)} \end{aligned} \quad (4.6)$$

olarak elde edilir. (4.6) denkleminde $x = 1$ alındığında başlangıç koşulları $T_0 = 0, T_1 = 1, T_2 = 1$ olan Tribonacci dizisinin üreteç fonksiyonu elde edilir.

İspat. Kısıtlamasız Tribonacci kuaterniyon polinomunun üreteç fonksiyonu

$$\mathfrak{G}(y) = Q_0^{(p,r,s)}(x) + yQ_1^{(p,r,s)}(x) + y^2Q_2^{(p,r,s)}(x) + \dots + y^nQ_n^{(p,r,s)}(x) + \dots$$

olsun. Buradan

$$\begin{aligned} x^2y\mathfrak{G}(y) &= x^2yQ_0^{(p,r,s)}(x) + x^2y^2Q_1^{(p,r,s)}(x) + \dots + x^2y^{n+1}Q_n^{(p,r,s)}(x) + \dots \\ xy^2\mathfrak{G}(y) &= xy^2Q_0^{(p,r,s)}(x) + xy^3Q_1^{(p,r,s)}(x) + \dots + xy^{n+2}Q_n^{(p,r,s)}(x) + \dots \\ y^3\mathfrak{G}(y) &= y^3Q_0^{(p,r,s)}(x) + y^4Q_1^{(p,r,s)}(x) + \dots + y^{n+3}Q_n^{(p,r,s)}(x) + \dots \end{aligned}$$

olup $\mathfrak{G}(y) - x^2y\mathfrak{G}(y) - xy^2\mathfrak{G}(y) - y^3\mathfrak{G}(y)$ hesaplandığında

$$\begin{aligned} (1 - x^2y - xy^2 - y^3)\mathfrak{G}(y) &= Q_0^{(p,r,s)}(x) + (Q_1^{(p,r,s)}(x) - x^2Q_0^{(p,r,s)}(x))y \\ &+ (Q_2^{(p,r,s)}(x) - x^2Q_1^{(p,r,s)}(x) - xQ_0^{(p,r,s)}(x))y^2 \\ &+ \underbrace{(Q_3^{(p,r,s)}(x) - x^2Q_2^{(p,r,s)}(x) - xQ_1^{(p,r,s)}(x) - Q_0^{(p,r,s)}(x))y^3}_{=0} + \underbrace{(\dots)}_{=0} + \underbrace{(\dots)}_{=0} + \dots \end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}(y) &= \frac{Q_0^{(p,r,s)}(x) + (Q_1^{(p,r,s)}(x) - x^2Q_0^{(p,r,s)}(x))y}{(1 - x^2y - xy^2 - y^3)} \\ &+ \frac{(Q_2^{(p,r,s)}(x) - x^2Q_1^{(p,r,s)}(x) - xQ_0^{(p,r,s)}(x))y^2}{(1 - x^2y - xy^2 - y^3)} \end{aligned}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur. $\square$

Teorem 4.5. Kısıtlamasız Tribonacci-Lucas kuaterniyon polinomunun üreteç fonksiyonu

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{Q}_n^{(p,r,s)}(x) y^n &= \frac{\tilde{Q}_0^{(p,r,s)}(x) + (\tilde{Q}_1^{(p,r,s)}(x) - x^2 \tilde{Q}_0^{(p,r,s)}(x))y}{(1 - x^2 y - x y^2 - y^3)} \\ &+ \frac{(\tilde{Q}_2^{(p,r,s)}(x) - x^2 \tilde{Q}_1^{(p,r,s)}(x) - x \tilde{Q}_0^{(p,r,s)}(x))y^2}{(1 - x^2 y - x y^2 - y^3)} \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

İspat. Kısıtlamasız Tribonacci-Lucas kuaterniyon polinomu için üreteç fonksiyonu da benzer şekilde ispatlanabilir. $\square$

Teorem 4.6. $m \geq 2$ için kısıtlamasız Tribonacci kuaterniyon polinomu $\{Q_{n+m}^{(p,r,s)}(x)\}_{n \geq 0}$ için üreteç fonksiyonu

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}_{n+m}(y) &= \sum_{n=0}^{\infty} Q_{n+m}^{(p,r,s)}(x) y^n \\ &= \frac{Q_m^{(p,r,s)}(x) + [xQ_{m-1}^{(p,r,s)}(x) + Q_{m-2}^{(p,r,s)}(x)]y + (Q_{m-1}^{(p,r,s)}(x))y^2}{1 - x^2 y - x y^2 - y^3} \end{aligned} \quad (4.7)$$

ve kısıtlamasız Tribonacci-Lucas kuaterniyon polinomu $\{\tilde{Q}_{n+m}^{(p,r,s)}(x)\}_{n \geq 0}$ için üreteç fonksiyonu

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}_{n+m}(y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{Q}_{n+m}^{(p,r,s)}(x) y^n \\ &= \frac{\tilde{Q}_m^{(p,r,s)}(x) + [x\tilde{Q}_{m-1}^{(p,r,s)}(x) + \tilde{Q}_{m-2}^{(p,r,s)}(x)]y + (\tilde{Q}_{m-1}^{(p,r,s)}(x))y^2}{1 - x^2 y - x y^2 - y^3} \end{aligned} \quad (4.8)$$

olarak elde edilir.

İspat. $Q_{n+m}^{(p,r,s)}(x)$ kısıtlamasız Tribonacci kuaterniyon polinomunun üreteç fonksiyonu

$$\mathfrak{G}_{n+m}(y) = Q_m^{(p,r,s)}(x) + yQ_{m+1}^{(p,r,s)}(x) + y^2Q_{m+2}^{(p,r,s)}(x) + \dots + y^nQ_{m+n}^{(p,r,s)}(x) + \dots$$

olsun. Buradan

$$\begin{aligned} x^2y\mathfrak{G}_{n+m}(y) &= x^2yQ_m^{(p,r,s)}(x) + x^2y^2Q_{m+1}^{(p,r,s)}(x) + \dots + x^2y^{n+1}Q_{m+n}^{(p,r,s)}(x) + \dots \\ xy^2\mathfrak{G}_{n+m}(y) &= xy^2Q_m^{(p,r,s)}(x) + xy^3Q_{m+1}^{(p,r,s)}(x) + \dots + xy^{n+2}Q_{m+n}^{(p,r,s)}(x) + \dots \\ y^3\mathfrak{G}_{n+m}(y) &= y^3Q_m^{(p,r,s)}(x) + y^4Q_{m+1}^{(p,r,s)}(x) + \dots + y^{n+3}Q_{m+n}^{(p,r,s)}(x) + \dots \end{aligned}$$

olup $\mathfrak{G}_{n+m}(y) - x^2y\mathfrak{G}_{n+m}(y) - xy^2\mathfrak{G}_{n+m}(y) - y^3\mathfrak{G}_{n+m}(y)$ hesaplandığında

$$\begin{aligned} (1 - x^2y - xy^2 - y^3)\mathfrak{G}_{n+m}(y) &= Q_m^{(p,r,s)}(x) + (Q_{m+1}^{(p,r,s)}(x) - x^2Q_m^{(p,r,s)}(x))y \\ &+ (Q_{m+2}^{(p,r,s)}(x) - x^2Q_{m+1}^{(p,r,s)}(x) - xQ_m^{(p,r,s)}(x))y^2 \\ &+ \underbrace{(Q_{m+3}^{(p,r,s)}(x) - x^2Q_{m+2}^{(p,r,s)}(x) - xQ_{m+1}^{(p,r,s)}(x) - Q_m^{(p,r,s)}(x))}_{=0}y^3 + \underbrace{(\dots)}_{=0} + \underbrace{(\dots)}_{=0} + \dots \end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}_{n+m}(y) &= \frac{Q_m^{(p,r,s)}(x) + (Q_{m+1}^{(p,r,s)}(x) - x^2Q_m^{(p,r,s)}(x))y}{(1 - x^2y - xy^2 - y^3)} \\ &+ \frac{(Q_{m+2}^{(p,r,s)}(x) - x^2Q_{m+1}^{(p,r,s)}(x) - xQ_m^{(p,r,s)}(x))y^2}{(1 - x^2y - xy^2 - y^3)} \end{aligned}$$

bulunur. (4.1) yineleme bağıntısında $n + 3 \rightarrow m + 1$ indis değişimi yapıldığında

$$Q_{m+1}^{(p,r,s)}(x) - x^2Q_m^{(p,r,s)}(x) = xQ_{m-1}^{(p,r,s)}(x) + Q_{m-2}^{(p,r,s)}(x)$$

elde edilir.

$$\mathfrak{G}_{n+m}(y) = \frac{Q_m^{(p,r,s)}(x) + (xQ_{m-1}^{(p,r,s)}(x) + Q_{m-2}^{(p,r,s)}(x))y + (Q_{m-1}^{(p,r,s)}(x))y^2}{(1 - x^2y - xy^2 - y^3)}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

(4.8) özdeşliğinin ispatı için $\tilde{Q}_n^{(p,r,s)}(x)$ kısıtlamasız Tribonacci-Lucas kuaterniyon polinomunun Binet formülü (4.5) toplamda yerine yazıldığında

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{Q}_{n+m}^{(p,r,s)}(x)y^n &= \sum_{n=0}^{\infty} (\underline{\alpha}\alpha^{n+m}(x) + \underline{w}_1w_1^{n+m}(x) + \underline{w}_2w_2^{n+m}(x))y^n \\
&= \underline{\alpha}\alpha^m(x) \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha(x)y)^n + \underline{w}_1w_1^m(x) \sum_{n=0}^{\infty} (w_1(x)y)^n \\
&\quad + \underline{w}_2w_2^m(x) \sum_{n=0}^{\infty} (w_2(x)y)^n \\
&= \underline{\alpha}\alpha^m(x) \frac{1}{1-\alpha(x)y} + \underline{w}_1w_1^m(x) \frac{1}{1-w_1(x)y} + \underline{w}_2w_2^m(x) \frac{1}{1-w_2(x)y}
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan gerekli işlemler yapıldığında

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{Q}_{n+m}^{(p,r,s)}(x)y^n \\
&= \frac{\underline{\alpha}\alpha^m(x)(1-w_1(x)y)(1-w_2(x)y) + \underline{w}_1w_1^m(x)(1-\alpha(x)y)(1-w_2(x)y)}{(1-\alpha(x)y)(1-w_1(x)y)(1-w_2(x)y)} \\
&\quad + \frac{\underline{w}_2w_2^m(x)(1-\alpha(x)y)(1-w_1(x)y)}{(1-\alpha(x)y)(1-w_1(x)y)(1-w_2(x)y)} \\
&= \frac{\underline{\alpha}\alpha^m(x)(1-w_2(x)y-w_1(x)y+w_1(x)w_2(x)y^2)}{(1-\alpha(x)y)(1-w_1(x)y)(1-w_2(x)y)} \\
&\quad + \frac{\underline{w}_1w_1^m(x)(1-w_2(x)y-\alpha(x)y+\alpha(x)w_2(x)y^2)}{(1-\alpha(x)y)(1-w_1(x)y)(1-w_2(x)y)} \\
&\quad + \frac{\underline{w}_2w_2^m(x)(1-w_1(x)y-\alpha(x)y+\alpha(x)w_1(x)y^2)}{(1-\alpha(x)y)(1-w_1(x)y)(1-w_2(x)y)} \\
&= \frac{\underline{\alpha}\alpha^m(x) + \underline{w}_1w_1^m(x) + \underline{w}_2w_2^m(x)}{(1-\alpha(x)y)(1-w_1(x)y)(1-w_2(x)y)} \\
&\quad + \frac{[\underline{\alpha}\alpha^m(x)(-w_2(x)-w_1(x)) + \underline{w}_1w_1^m(x)(-w_2(x)-\alpha(x))]y}{(1-\alpha(x)y)(1-w_1(x)y)(1-w_2(x)y)} \\
&\quad + \frac{[\underline{w}_2w_2^m(x)(-w_1(x)-\alpha(x))]y}{(1-\alpha(x)y)(1-w_1(x)y)(1-w_2(x)y)} \\
&\quad + \frac{(\underline{\alpha}\alpha^m(x)w_1(x)w_2(x) + \underline{w}_1w_1^m(x)\alpha(x)w_2(x) + \underline{w}_2w_2^m(x)\alpha(x)w_1(x))y^2}{(1-\alpha(x)y)(1-w_1(x)y)(1-w_2(x)y)}
\end{aligned}$$

$$= \frac{\tilde{Q}_m^{(p,r,s)}(x) + [x\tilde{Q}_{m-1}^{(p,r,s)}(x) + \tilde{Q}_{m-2}^{(p,r,s)}(x)]y + (\tilde{Q}_{m-1}^{(p,r,s)}(x))y^2}{1 - x^2y - xy^2 - y^3}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Teorem 4.7. $n \in \mathbb{N}$ için kısıtlamasız Tribonacci kuaterniyon polinomunun üstel üreteç fonksiyonu

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Q_n^{(p,r,s)}(x)}{n!} y^n &= \frac{\underline{\alpha}\alpha(x)e^{\alpha(x)y}}{(\alpha(x) - w_1(x))(\alpha(x) - w_2(x))} + \frac{\underline{w_1}w_1(x)e^{w_1(x)y}}{(w_1(x) - \alpha(x))(w_1(x) - w_2(x))} \\ &+ \frac{\underline{w_2}w_2(x)e^{w_2(x)y}}{(w_2(x) - \alpha(x))(w_2(x) - w_1(x))} \end{aligned}$$

ve kısıtlamasız Tribonacci-Lucas kuaterniyon polinomunun üstel üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{Q}_n^{(p,r,s)}(x)}{n!} y^n = \underline{\alpha}e^{\alpha(x)y} + \underline{w_1}e^{w_1(x)y} + \underline{w_2}e^{w_2(x)y}$$

olarak elde edilir.

İspat. $Q_n^{(p,r,s)}(x)$ kısıtlamasız Tribonacci kuaterniyon polinomunun Binet formülü (4.4)

kullanıldığında

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Q_n^{(p,r,s)}(x)}{n!} y^n &= \frac{\underline{\alpha}\alpha(x)}{(\alpha(x) - w_1(x))(\alpha(x) - w_2(x))} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha(x)y)^n}{n!} \\ &+ \frac{\underline{w_1}w_1(x)}{(w_1(x) - \alpha(x))(w_1(x) - w_2(x))} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(w_1(x)y)^n}{n!} \\ &+ \frac{\underline{w_2}w_2(x)}{(w_2(x) - \alpha(x))(w_2(x) - w_1(x))} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(w_2(x)y)^n}{n!} \\ &= \frac{\underline{\alpha}\alpha(x)e^{\alpha(x)y}}{(\alpha(x) - w_1(x))(\alpha(x) - w_2(x))} + \frac{\underline{w_1}w_1(x)e^{w_1(x)y}}{(w_1(x) - \alpha(x))(w_1(x) - w_2(x))} \\ &+ \frac{\underline{w_2}w_2(x)e^{w_2(x)y}}{(w_2(x) - \alpha(x))(w_2(x) - w_1(x))} \end{aligned}$$

elde edilir.

$\tilde{Q}_n^{(p,r,s)}(x)$ kısıtlamasız Tribonacci-Lucas kuaterniyon polinomunun Binet formülü (4.5) toplamda yerine yazıldığında

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{Q}_n^{(p,r,s)}(x)}{n!} y^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\underline{\alpha}\alpha^n(x) + \underline{w}_1 w_1^n(x) + \underline{w}_2 w_2^n(x)) y^n}{n!} \\ &= \underline{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha(x)y)^n}{n!} + \underline{w}_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(w_1(x)y)^n}{n!} + \underline{w}_2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(w_2(x)y)^n}{n!} \\ &= \underline{\alpha} e^{\alpha(x)y} + \underline{w}_1 e^{w_1(x)y} + \underline{w}_2 e^{w_2(x)y} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Teorem 4.8. Kısıtlamasız Tribonacci kuaterniyon polinomu ve kısıtlamasız Tribonacci-Lucas kuaterniyon polinomu $n \geq 0$ için

$$\sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^k \binom{n}{k} \binom{k}{m} x^{k+m} Q_{k+m}^{(p,r,s)}(x) = Q_{3n}^{(p,r,s)}(x) \quad (4.9)$$

$$\sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^k \binom{n}{k} \binom{k}{m} x^{k+m} \tilde{Q}_{k+m}^{(p,r,s)}(x) = \tilde{Q}_{3n}^{(p,r,s)}(x) \quad (4.10)$$

bağıntılarını sağlamaktadır.

İspat. Öncelikle (4.9) özdeşliğinin ispatı yapılacaktır. $Q_n^{(p,r,s)}(x)$ kısıtlamasız Tribonacci kuaterniyon polinomunun Binet formülü (4.4) kullanıldığında

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^k \binom{n}{k} \binom{k}{m} x^{k+m} Q_{k+m}^{(p,r,s)}(x) \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^k \binom{n}{k} \binom{k}{m} x^{k+m} \left(\frac{\underline{\alpha}\alpha^{k+m+1}(x)}{(\alpha(x) - w_1(x))(\alpha(x) - w_2(x))} \right) \\ &\quad + \sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^k \binom{n}{k} \binom{k}{m} x^{k+m} \left(\frac{\underline{w}_1 w_1^{k+m+1}(x)}{(w_1(x) - \alpha(x))(w_1(x) - w_2(x))} \right) \\ &\quad + \sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^k \binom{n}{k} \binom{k}{m} x^{k+m} \left(\frac{\underline{w}_2 w_2^{k+m+1}(x)}{(w_2(x) - \alpha(x))(w_2(x) - w_1(x))} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\underline{\alpha}\alpha(x)}{(\alpha(x) - w_1(x))(\alpha(x) - w_2(x))} \sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^k \binom{n}{k} \binom{k}{m} (x\alpha(x))^{k+m} \\
&\quad + \frac{\underline{w_1}w_1(x)}{(w_1(x) - \alpha(x))(w_1(x) - w_2(x))} \sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^k \binom{n}{k} \binom{k}{m} (xw_1(x))^{k+m} \\
&\quad + \frac{\underline{w_2}w_2(x)}{(w_2(x) - \alpha(x))(w_2(x) - w_1(x))} \sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^k \binom{n}{k} \binom{k}{m} (xw_2(x))^{k+m} \\
&= \frac{\underline{\alpha}\alpha(x)}{(\alpha(x) - w_1(x))(\alpha(x) - w_2(x))} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x\alpha(x) + x^2\alpha^2(x))^k \\
&\quad + \frac{\underline{w_1}w_1(x)}{(w_1(x) - \alpha(x))(w_1(x) - w_2(x))} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (xw_1(x) + x^2w_1^2(x))^k \\
&\quad + \frac{\underline{w_2}w_2(x)}{(w_2(x) - \alpha(x))(w_2(x) - w_1(x))} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (xw_2(x) + x^2w_2^2(x))^k \\
&= \frac{\underline{\alpha}\alpha^{3n+1}(x)}{(\alpha(x) - w_1(x))(\alpha(x) - w_2(x))} + \frac{\underline{w_1}w_1^{3n+1}(x)}{(w_1(x) - \alpha(x))(w_1(x) - w_2(x))} \\
&\quad + \frac{\underline{w_2}w_2^{3n+1}(x)}{(w_2(x) - \alpha(x))(w_2(x) - w_1(x))} \\
&= \mathcal{Q}_{3n}^{(p,r,s)}(x)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Özdeşlik (4.10) için $\tilde{Q}_n^{(p,r,s)}(x)$ kısıtlamasız Tribonacci-Lucas kuaterniyon polinomunun Binet formülü (4.5) toplamda yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^k \binom{n}{k} \binom{k}{m} x^{k+m} \tilde{Q}_{k+m}^{(p,r,s)}(x) \\
&= \sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^k \binom{n}{k} \binom{k}{m} x^{k+m} (\underline{\alpha}\alpha^{k+m}(x) + \underline{w_1}w_1^{k+m}(x) + \underline{w_2}w_2^{k+m}(x)) \\
&= \underline{\alpha} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x\alpha(x) + x^2\alpha^2(x))^k + \underline{w_1} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (xw_1(x) + x^2w_1^2(x))^k \\
&\quad + \underline{w_2} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (xw_2(x) + x^2w_2^2(x))^k \\
&= \underline{\alpha}\alpha^{3n}(x) + \underline{w_1}w_1^{3n}(x) + \underline{w_2}w_2^{3n}(x) \\
&= \tilde{Q}_{3n}^{(p,r,s)}(x)
\end{aligned}$$

bulunur.

□

Teorem 4.9. $x \in \mathbb{R} - \{-1, 0\}$ ve $\delta(x) = x^2 + x$ olmak üzere kısıtlamasız Tribonacci kuaterniyon polinomu için toplam formülü

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^n Q_l^{(p,r,s)}(x) &= \frac{1}{\delta(x)} \left(Q_{n+2}^{(p,r,s)}(x) + (1-x^2)Q_{n+1}^{(p,r,s)}(x) + Q_n^{(p,r,s)}(x) \right) \\ &\quad - \frac{1}{\delta(x)} \left(Q_1^{(p,r,s)}(x) + (1-x^2)Q_0^{(p,r,s)}(x) + Q_{-1}^{(p,r,s)}(x) \right) \end{aligned}$$

şeklindedir.

İspat. $Q_n^{(p,r,s)}(x)$ kısıtlamasız Tribonacci kuaterniyon polinomunun tanımı kullanıldığında

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^n Q_l^{(p,r,s)}(x) &= \sum_{l=0}^n T_l(x) + \mathbf{i} \sum_{l=0}^n T_{l+p}(x) + \mathbf{j} \sum_{l=0}^n T_{l+r}(x) + \mathbf{k} \sum_{l=0}^n T_{l+s}(x) \quad (4.11) \\ &= T_0(x) + T_1(x) + T_2(x) + T_3(x) + \dots + T_n(x) \\ &\quad + \mathbf{i}(T_p(x) + T_{p+1}(x) + T_{p+2}(x) + \dots + T_{p+n}(x)) \\ &\quad + \mathbf{j}(T_r(x) + T_{r+1}(x) + T_{r+2}(x) + \dots + T_{r+n}(x)) \\ &\quad + \mathbf{k}(T_s(x) + T_{s+1}(x) + T_{s+2}(x) + \dots + T_{s+n}(x)) \end{aligned}$$

yazılır. (4.11) eşitliğinde indis değişimi yapıldığında

$$\sum_{l=0}^n Q_l^{(p,r,s)}(x) = \sum_{l=0}^n T_l(x) + \mathbf{i} \sum_{l=p}^{p+n} T_l(x) + \mathbf{j} \sum_{l=r}^{r+n} T_l(x) + \mathbf{k} \sum_{l=s}^{s+n} T_l(x)$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\sum_{l=0}^n T_l(x) = \frac{1}{\delta(x)} (T_{n+2}(x) + (1-x^2)T_{n+1}(x) + T_n(x) - 1)$$

şeklinde yazılabilir, [44].

$$\sum_{l=p}^{p+n} T_l(x) = \sum_{l=0}^{p+n} T_l(x) - \sum_{l=0}^{p-1} T_l(x)$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\sum_{l=p}^{p+n} T_l(x) &= \frac{1}{\delta(x)} (T_{n+p+2}(x) + (1-x^2)T_{n+p+1}(x) + T_{n+p}(x) - 1) \\ &\quad - \frac{1}{\delta(x)} (T_{p+1}(x) + (1-x^2)T_p(x) + T_{p-1}(x) - 1)\end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapıp (4.11) eşitliğinde yerine yazıldığında

$$\begin{aligned}\sum_{l=0}^n Q_l^{(p,r,s)}(x) &= \sum_{l=0}^n T_l(x) + \mathbf{i} \sum_{l=0}^n T_{l+p}(x) + \mathbf{j} \sum_{l=0}^n T_{l+r}(x) + \mathbf{k} \sum_{l=0}^n T_{l+s}(x) \\ &= \frac{1}{\delta(x)} (T_{n+2}(x) + (1-x^2)T_{n+1}(x) + T_n(x) - 1) \\ &\quad + \mathbf{i} \frac{1}{\delta(x)} (T_{n+p+2}(x) + (1-x^2)T_{n+p+1}(x) + T_{n+p}(x) - 1) \\ &\quad - \mathbf{i} \frac{1}{\delta(x)} (T_{p+1}(x) + (1-x^2)T_p(x) + T_{p-1}(x) - 1) \\ &\quad + \mathbf{j} \frac{1}{\delta(x)} (T_{n+r+2}(x) + (1-x^2)T_{n+r+1}(x) + T_{n+r}(x) - 1) \\ &\quad - \mathbf{j} \frac{1}{\delta(x)} (T_{r+1}(x) + (1-x^2)T_r(x) + T_{r-1}(x) - 1) \\ &\quad + \mathbf{k} \frac{1}{\delta(x)} (T_{n+s+2}(x) + (1-x^2)T_{n+s+1}(x) + T_{n+s}(x) - 1) \\ &\quad - \mathbf{k} \frac{1}{\delta(x)} (T_{s+1}(x) + (1-x^2)T_s(x) + T_{s-1}(x) - 1) \\ &= \frac{1}{\delta(x)} \left(Q_{n+2}^{(p,r,s)}(x) + (1-x^2)Q_{n+1}^{p,r,s}(x) + Q_n^{(p,r,s)}(x) \right) \\ &\quad - \frac{1}{\delta(x)} \left(Q_1^{(p,r,s)}(x) + (1-x^2)Q_0^{p,r,s}(x) + Q_{-1}^{(p,r,s)}(x) \right)\end{aligned}$$

olarak bulunur.

□

5 . TARTIŞMA VE SONUÇ

Kuaterniyon dizileri ve bu dizilerin çeşitli özellikleri birçok araştırmacı tarafından incelenmiştir. Bu dizilerin katsayıları genellikle karakteristik polinomu ikinci dereceden olan sayı dizilerinden seçilir. Karakteristik polinomu üçüncü dereceden olan sayı dizilerinden en iyi bilinenlerinden birisi Tribonacci dizisi olarak adlandırılır. Son zamanlarda, Tribonacci sayılarından seçilen bileşenlere sahip kuaterniyonlar da dikkat çekmiştir, [1, 37, 43, 44, 55]. Bu yüksek lisans tezi kapsamında katsayıları Tribonacci ve Tribonacci-Lucas sayı dizilerinden keyfi olarak seçilen kuaterniyon dizileri geliştirilmiş Fibonacci kuaterniyon dizileri için benzer formları alan makalelerdeki fikirlere dayanarak tanımlanmıştır. Tanımlanan bu dizilerin bazı özellikleri verilmiş ve çeşitli özdeşlikler elde edilmiştir. Ayrıca Tribonacci ve Tribonacci-Lucas polinomları kullanılarak Tribonacci ve Tribonacci-Lucas kuaterniyon dizilerinin polinomsal bir genelleştirmesi tanımlanmıştır. Elde edilen dizilerin çeşitli özellikleri incelenmiştir.

KAYNAKLAR

- [1] Akkuş, İ. ve Kızılaslan, G. (2018). On some Properties of Tribonacci Quaternions. *An. Şt.Univ.Ovidius Constanta*, 26(3), 5-20.
- [2] Akyiğit, M., Kösal, H. H. ve Tosun, M. (2014). Fibonacci Generalized Quaternions. *Adv. Appl. Clifford Algebr*, 24, 631-641.
- [3] Bilgici, G. (2021). Kısıtlamasız k -Fibonacci ve k -Lucas Genelleştirilmiş Kuaterniyonları. *Gümüşhane Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 11(1), 179-188.
- [4] Bilgici, G. ve Catarino, P. (2018). Unrestricted Pell and Pell-Lucas quaternions. *International Journal of Mathematics and Systems Science*, 1(3), 816.
- [5] Bilgici, G. ve Daşdemir, A. (2020). Some unrestricted Fibonacci and Lucas hyper-complex numbers. *Acta Et Com. Universitatis Tartuens de mathematica*, 24(1).
- [6] Catalani, M. (2002). Identities for Tribonacci-related sequences. Cornell University. <https://arxiv.org/abs/math/0209179>.
- [7] Catarino, P. (2016). The modified Pell and the modified k -Pell quaternions and octonions. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 26(2), 577-590.
- [8] Catarino, P. (2019). Bicomplex k -Pell quaternions. *Computational Methods and Function Theory*, 19, 65-76.
- [9] Catarino, P. (2015). A note on $h(x)$ -Fibonacci quaternion polynomials. *Chaos, Solitons and Fractals*, 77, 1-5.
- [10] Çimen, B. C. ve İpek, A. (2016). On Pell Quaternions and Pell-Lucas Quaternions. *Adv. Appl. Clifford Algebr*, 26,39-51.
- [11] Daşdemir, A. ve Bilgici, G. (2021). Unrestricted Fibonacci and Lucas Quaternions. *Fundamental Journal of Mathematics and Appl*, 4(1), 1-9.

- [12] Falcon, S. (2011). On the k –Lucas Numbers. *Int. J. Contemp. Math. Sciences*, 6(21), 1039-1050.
- [13] Falcon, S. ve Plaza, A. (2007). On the Fibonacci k –numbers. *Chaos, Solitons and Fractals*, 32, 1615-1624.
- [14] Feinberg, M. (1963). Fibonacci-Tribonacci. *The Fibonacci Quarterly*, 1, 12-15.
- [15] Feng, J. (2011). More Identities on Tribonacci Numbers. *Ars Combinatoria*, 100, 73-78.
- [16] Flaut, C. ve Savin, D. (2015). Quaternion Algebras and Generalized Fibonacci-Lucas Quaternions. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 25(4), 853-862.
- [17] Flaut, C. ve Shpakivskyi, V. (2013). On generalized Fibonacci quaternions and Fibonacci-Narayana quaternions. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 23(3), 677-688.
- [18] Girard, P. R. (1984). The quaternion group and modern physics. *European Journal of Physics*, 5, 25-32.
- [19] Halberstam, H. (Edt.) ve Ingram, R. E. (Edt.) (1967). *The Mathematical Papers of Sir William Rowan Hamilton*. Cambridge University Press.
- [20] Halıcı, S. (2012). On Fibonacci quaternions. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 22, 321-327.
- [21] Halıcı, S. (2013). On complex Fibonacci quaternions. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 23(1), 105-112.
- [22] Halıcı, S. (2021). On quaternion-Gaussian Lucas numbers. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 44(9), 7601-7606.
- [23] Halıcı, S. ve Karataş, A. (2017). On a generalization for Fibonacci quaternions. *Chaos, Solitons and Fractals*, 98, 178-182.
- [24] Hoggatt, V. E. ve Bicknell, M. (1973). Generalized Fibonacci Polynomials. *The Fibonacci Quarterly*, 11, 457-465.

- [25] Horadam, A. F. (1961). The Generalized Fibonacci Sequences. *The American Math. Monthly*, 68(5), 455-459.
- [26] Horadam, A. F. (1963). Complex Fibonacci numbers and Fibonacci quaternions. *The American Mathematical Monthly*, 70(3), 289-291.
- [27] Horadam, A. F. (1967). Special properties of the sequence $W_n(a, b; p, q)$. *Fibonacci Quart.* 5(5), 424-434.
- [28] Horadam, A. F. (1993). Quaternion Recurrence Relations. *Ulam Quarterly*, 2(2), 23-33.
- [29] Howard, F. T. (2001). A Tribonacci identity. *Fibonacci Quarterly*, 39(4), 352-357.
- [30] Iakin, A. L. (1977). Generalized quaternions of higher order. *The Fibonacci Quarterly*, 15(4), 343-346.
- [31] Iakin, A. L. (1977). Generalized quaternions with quaternion components. *The Fibonacci Quarterly*, 15(4), 350-352.
- [32] Iyer, M. R. (1969). A note on Fibonacci quaternions. *The Fibonacci Quart.*, 7(3), 225-229.
- [33] İpek, A. (2017). On (p, q) -Fibonacci quaternions and their Binet Formulas, generating functions and certain binomial sums. *Adv. Appl. Clifford Algebr.*, 27, 1343-1351.
- [34] Kılıç, E. (2008). Tribonacci sequences with certain indices and their sums. *Ars Combinatoria*, 86, 13-22.
- [35] Kızılaslan, G. ve Karabulut, L. (2023). Unrestricted Tribonacci and Tribonacci-Lucas quaternions. *Notes on Number Theory and Discrete Mathematics*, 29(2), 310-321.
- [36] Kızılateş, C. (2019). On quaternions with incomplete Fibonacci and Lucas numbers components. *Utilitas Mathematica*, 110, 263-269.

- [37] Kızılateş, C., Catarino, P. ve Tuğlu, N. (2019). On the bicomplex generalized Tribonacci quaternions. *Mathematics*, 7(1), Article 80.
- [38] Kızılateş, C. ve Kone, T. (2021). On higher order Fibonacci hyper complex numbers. *Chaos, Solitons and Fractals*, 148, 111044.
- [39] Kızılateş, C. ve Kone, T. (2021). On higher order Fibonacci quaternions. *The Journal of Analysis*, 29(4), 1071-1082.
- [40] Kou, K. I. ve Xia, Y. H. Linear Quaternion Differential Equations. *Basic Theory and Fundamental Results*, 1-42. <https://arxiv.org/pdf/1510.02224.pdf>.
- [41] Koshy, T. (2001). *Fibonacci and Lucas numbers with applications*. New York: Wiley-Interscience.
- [42] Lin, P. Y. (1988). De Moivre-type identities for the Tribonacci numbers. *The Fibonacci Quarterly*, 26(2), 131-134.
- [43] Morales-Cerda, G. (2017). On a Generalization for Tribonacci Quaternions. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 14, 239.
- [44] Morales-Cerda, G. (2019). On Tribonacci and Tribonacci-Lucas Quaternions Polynomials. *Palestine Journal of Mathematics*, 8(1), 318,326.
- [45] Nalli, A. ve Haukkanen, P. (2009). On generalized Fibonacci and Lucas polynomials. *Chaos, Solitons & Fractals*, 42, 3179–3186.
- [46] Pethe, S. (1988). Some identities for Tribonacci sequences. *Fibonacci Q.*, 26(2), 144-151
- [47] Polatlı, E. (2016). A Generalization of Fibonacci and Lucas Quaternions. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 26(2), 719-730.
- [48] Polatlı, E. ve Kesim, S. (2015). On quaternions with generalized Fibonacci and Lucas number components. *Advances in Difference Equations*, Article 169.
- [49] Polatlı, E., Kızılateş, C. ve Kesim, S. (2016). On split k -Fibonacci and k -Lucas quaternions. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 26(1), 353-362.

- [50] Ramirez, J. L. ve Sirvent, V. F. (2014). Incomplete Tribonacci numbers and polynomials. *Journal of Integer Sequences*, 17, Article 14.4.2
- [51] Ramirez, J. L. (2015). Some combinatorial properties of the k -Fibonacci and the k -Lucas quaternions. *Analele Stiintifice ale Universitatii Ovidius Constanta*, 23(2), 201-212.
- [52] Shannon, A. G. ve Horadam, A. F. (1972). Some properties of third-order recurrence relations. *Fibonacci Q.*, 10(2), 135-146.
- [53] Swamy, M. N. S. (1973). On generalized Fibonacci quaternions. *The Fibonacci Quarterly*, 11(5), 547-549.
- [54] Spickerman, W. R. (1982). Binet's formula for the Tribonacci sequence. *Fibonacci Quart.*, 20, 118-120.
- [55] Szynal-Liana, A. ve Wloch, I. (2017). Some properties of generalized Tribonacci quaternions. *Scientific Issues. Jan Dlugosz Univerity in Czestochowa. Mathematics*, XXII, 73-81.
- [56] Taşçı, D. (2018). Padovan And Pell-Padovan Quaternions. *Journal of Science and Arts*, 1(42), 125-132.
- [57] Terzioğlu, N., Kızılateş, C. ve Du, W-S. (2022). New properties and identities for Fibonacci finite operator quaternions. *Mathematics*, 10(10), Article 1719.
- [58] Vince, J. (2021). *Quaternions for Computer Graphics*. (2nd ed.). London: Springer.
- [59] Yalavigi, C. C. (1972). Properties of Tribonacci numbers. *Fibonacci Q.* 10(3), 231-246.
- [60] Yılmaz, N.ve Taskara, N. (2014). Tribonacci and Tribonacci-Lucas numbers via the determinants of special matrices. *Applied Mathematical Sciences*. 8(37-40), 1947-1955.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Leyla KARABULUT

Doğum Tarihi/Yeri

Yabancı Dil

Eğitim Durumu

Lisans : Kırıkkale Üniversitesi,
Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü, 2003-2007

Çalıştığı Kurum ve Yıllar :

1.) Gençlik ve Spor Bakanlığı, Şef, 02/2009 - .

Yayınları :

1.) Kızılaslan, G. ve Karabulut, L. (2023). Unrestricted Tribonacci and Tribonacci-Lucas quaternions. *Notes on Number Theory and Discrete Mathematics*, 29(2), 310-321.