

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ



RELATİVİSTİK KOMPAKT YILDIZ MODELLERİNİN ANALİZİ

Bülent POLAT

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FİZİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ŞUBAT 2024

ANTALYA

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ



RELATİVİSTİK KOMPAKT YILDIZ MODELLERİNİN ANALİZİ

Bülent POLAT

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FİZİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ŞUBAT 2024

ANTALYA

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

RELATİVİSTİK KOMPAKT YILDIZ MODELLERİNİN ANALİZİ

Bülent POLAT

FİZİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ŞUBAT 2024

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

RELATİVİSTİK KOMPAKT YILDIZ MODELLERİNİN ANALİZİ

Bülent POLAT

FİZİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Bu tez 15/02/2024 tarihinde jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Yusuf KÜÇÜKAKÇA (Danışman)

Prof. Dr. Yusuf SUCU

Doç. Dr. Ganim GEÇİM

ÖZET

RELATİVİSTİK KOMPAKT YILDIZ MODELLERİNİN ANALİZİ

Bülent POLAT

Yüksek Lisans Tezi, Fizik Anabilim Dalı

Danışman: Doç.Dr. Yusuf KÜÇÜKAKÇA

Şubat 2024, 43 sayfa

Bu tezde kompakt yıldızın relativistik olarak modellenmesi incelenmiştir. Bu amaçla dış geometri olarak Schwarzschild çözümü kullanılırken iç geometri olarak statik, küresel simetrik bir uzay-zaman metriği ele alınmıştır. İlk olarak madde dağılımı için izotropik ideal akışkan bir enerji momentum tensörü dikkate alınarak Einstein alan denklemlerine analitik çözümler elde edilmiştir. Daha sonra gözlemsel olarak daha gerçekçi olan anizotropik enerji momentum tensörüne sahip bir ideal akışkan ele alınmıştır. Elde edilen Einstein alan denklemleri Karmarkar koşulu kullanılarak çözülmüştür. Her iki modelde de elde edilen çözümlerin fiziksel özellikleri, literatürde çalışılmış ve iyi bilinen Cen X-3, LMC X-4, SMC X-4 ve Her X-1 nötron yıldızlarının gözlemsel verileri üzerinden incelenmiştir. Söz konusu incelemelerde kompakt yıldızların, bazı fiziksel nicelikleri, enerji koşulları, kırmızıya kayma ve kütle yarıçap ilişkisi ile kompaktlık faktörü gibi fiziksel koşullar analiz edilmiştir. Ayrıca kompakt yıldızların denge ve kararlılık durumlarını, nedensellik koşulu, Tolman-Oppenheimer-Volkoff denklemi, Harrison-Zeldovich-Novikov koşulu ve relativistik adyabatik indeks aracılığı ile incelenmiştir. Her iki modelde istenilen fiziksel sınırlar içerisinde dengeli ve kararlı kompakt yıldızların var olabileceğini ortaya koymuştur.

ANAHTAR KELİMELELER: Anizotropik ideal akışkan, Einstein alan denklemleri, İdeal akışkan, Kompakt yıldız.

JÜRİ: Doç. Dr. Yusuf KÜÇÜKAKÇA

Prof. Dr. Yusuf SUCU

Doç. Dr. Ganim GEÇİM

ABSTRACT

ANALYSIS OF RELATIVISTIC COMPACT STAR MODELS

Bülent POLAT

MSc Thesis in PHYSICS

Supervisor: Doç. Dr. Yusuf KÜÇÜKAKÇA

February 2024, 43 pages

In this thesis, relativistic modeling of a compact star is examined. For this purpose, a static, spherically symmetric space-time metric was used as the internal geometry while using the Schwarzschild solution as an outer spacetime. Then, a perfect fluid with anisotropic energy momentum tensor, which is observationally more realistic, is considered. The obtained Einstein field equations were solved using the Karmarkar condition. The physical properties of the obtained solutions in both models were examined through observational data of the well-known Cen X-3, LMC X-4, SMC X-4 and Her X-1 neutron stars, which have been studied in the literature. In these studies, some physical quantities, energy conditions, redshift, mass-radius relationship and compactness factor of compact stars were examined. Additionally, the equilibrium and stability states of compact stars were analyzed through the causality condition, Tolman-Oppenheimer-Volkoff equation, Harrison-Zeldovich-Novikov condition and relativistic adiabatic index. Both models reveal that stable and balanced compact stars can exist within desired physical limits.

KEYWORDS: Anisotropic perfect fluid, Compact star, Einstein field equations, Perfect fluid.

COMMITTEE: Doç. Dr. Yusuf KÜÇÜKAKÇA

Prof. Dr. Yusuf SUCU

Doç. Dr. Ganim GEÇİM

ÖNSÖZ

Bu yüksek lisans tezi ile okyanusa bir damla bırakmanın mutluluğunu ve gururunu yaşıyorum. Bu bölümü damlanın oluşmasında katkısı olan insalara teşekkür etmek için kullanacağım.

Bu çalışmanın gerçekleşmesinde büyük emeği olan, süreç boyunca bilgi ve tecrübesini benimle paylaşan, değerli danışmanım Doç. Dr. Yusuf KÜÇÜKAKÇA'ya, sundukları fikirler ile katkılardan dolayı Prof. Dr. Yusuf SUCU ve Doç. Dr. Ganim GEÇİM'e ve yüksek lisans eğitimi almam konusunda beni cesaretlendiren Doç. Dr. Ramazan ŞAHİN'e teşekkürlerimi sunarım.

Bu çalışmanın yazım denetimi konusunda yardımlarını esirgemeyen arkadaşım Mehmet ŞENGÜL'e, süreç boyunca manevi desteğini esirgemeyen eşim Nejla GÜLER POLAT'a ve oyun arkadaşını bu çalışma ile paylaşmak zorunda kalan kızım Toprak POLAT'a teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
ÖNSÖZ	iii
AKADEMİK BEYAN	v
SİMGELER VE KISALTMALAR	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	vii
ÇİZELGELER DİZİNİ	viii
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK TARAMASI	4
2.1. Einstein alan denklemleri	4
2.2. Relativistik kompakt yıldızlar	6
2.3. Relativistik kompakt yıldızların fiziksel özellikleri	8
2.3.1. Fiziksel sınır koşulları	8
2.3.2. Kompakt yıldızlar için denge koşulları	11
3. MATERYAL VE METOT	13
3.1. Einstein tensörü	13
3.2. Küresel izotropik ideal akışkan modeli	14
3.3. Küresel anizotropik akışkan modeli	16
4. BULGULAR VE TARTIŞMA	19
4.1. Sınır koşulları	19
4.2. Modellerin fiziksel özellikleri	20
4.2.1. Küresel izotropik ideal akışkan modelinin fiziksel özellikleri	21
4.2.2. Küresel anizotropik akışkan modelinin fiziksel özellikleri	28
5. SONUÇLAR	38
6. KAYNAKLAR	40
ÖZGEÇMİŞ	

AKADEMİK BEYAN

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “Relativistik Kompakt Yıldız Modellerinin Analizi” adlı bu çalışmanın, akademik kurallar ve etik değerlere uygun olarak bulunduğunu belirtir, bu tez çalışmasında bana ait olmayan tüm bilgilerin kaynağını gösterdiğimi beyan ederim.

15/02/2024

Bülent POLAT

İmza

XXXXXX

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler:

Δ	: anizotropik faktör
P	: basınç
u_i	: dörtlü hız vektörü
G_{ij}	: Einstein tensörü
T_{ij}	: enerji-momentum tensörü
$M_{\odot}$	: Güneş'in kütlesi
c	: ışık hızı
Γ_{jk}^i	: ikinci tür Christoffel sembolleri
z	: kırmızıya kayma
u	: kompaktlık faktörü
G	: kütle çekim sabiti
$\mathcal{L}$	: Lagragian yoğunluğu
g_{ij}	: metrik tensör
$\bar{\rho}$	: ortalama yoğunluk
$\mathcal{R}_{ijkl}$	: Reimann tensörü
Γ	: relativistik adyabatik indeks
$\mathcal{R}$	: Ricci skaleri
$\mathcal{R}_{ij}$	: Ricci tensörü
v_s	: ses hızı
ρ_c	: yıldızın merkezindeki yoğunluk
M	: yıldız kütlesi
P_c	: yıldızın merkezindeki basınç
R	: yıldızın yarıçapı
ρ	: yoğunluk
z_s	: yüzeyde kırmızıya kayma

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 4.1.	Metrik potansiyellerin yarıçap ile değişimi.	22
Şekil 4.2.	Basınç ve yoğunluğun yarıçap ile değişimi.	22
Şekil 4.3.	$\frac{dP}{dr}$ ve $\frac{d\rho}{dr}$ ifadelerinin yarıçapa bağlı değişimleri	23
Şekil 4.4.	Enerji koşullarının yarıçap ile değişimi	24
Şekil 4.5.	Kütle fonksiyonu ve kompaktlık faktörünün yarıçapa bağlı değişimi.	25
Şekil 4.6.	Kırmızıya kayma miktarının yarıçap ile değişimi.	25
Şekil 4.7.	Nedensellik koşulunun yarıçapa bağlı değişimi.	26
Şekil 4.8.	F_g ve F_h kuvvetlerinin yarıçap ile değişimi.	27
Şekil 4.9.	Kütlenin, yıldız merkezindeki yoğunluğa bağlı değişimi.	27
Şekil 4.10.	Relativistik adyabatik indeksin yarıçap ile değişimi.	28
Şekil 4.11.	Metrik potansiyellerin yarıçap ile değişimi.	29
Şekil 4.12.	P_r , P_t , Δ ve ρ niceliklerinin yarıçap ile değişimi.	30
Şekil 4.13.	$\frac{d\rho}{dr}$, $\frac{dP_r}{dr}$ ve $\frac{dP_t}{dr}$ ifadelerinin yarıçapa bağlı değişimi.	31
Şekil 4.14.	Enerji koşullarının yarıçapa bağlı değişimi.	32
Şekil 4.15.	Kütle fonksiyonu ve kompaktlık faktörünün yarıçapa bağlı değişimi.	33
Şekil 4.16.	Kırmızıya kayma miktarının yarıçapa bağlı değişimi.	33
Şekil 4.17.	Nedensellik koşullarının yarıçapa bağlı değişimi.	34
Şekil 4.18.	F_g , F_h ve F_a kuvvetlerinin ve toplamalarının yarıçap ile değişimleri.	35
Şekil 4.19.	Kütlenin, yıldız merkezindeki yoğunluğa bağlı değişimi.	36
Şekil 4.20.	Relativistik adyabatik indeks değerinin yarıçap ile değişimi.	37

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 1.1.	Bazı tipik cisimlerin kütleleri, yarıçapları, Swarzschild yarıçapı ve ortalama yoğunlukları (Glendenning 2012).	2
Çizelge 4.2.	Küresel izotropik ideal akışkan modeline göre nötron yıldızlarına ait fiziksel nicelikler.	21
Çizelge 4.3.	Küresel anizotropik akışkan modeline göre nötron yıldızlarına ait fiziksel nicelikler.	29



1. GİRİŞ

Güneş gökyüzünü terk ederken, ardından diğer yıldızların belirmesi aslında devasa boyutlardaki bir laboratuvarın kapılarını da açmasıdır. Bu laboratuvar zamanın başlangıcından beri faaliyet yürütmektedir. İnsanlık ise kendi tarihi kadar eski zamanlardan beri bu laboratuvarı çalışmış ve yapılan gözlemlerin birikimi ile elde edilen bilgiler sayesinde gök cisimleri daha iyi anlaşılmıştır. Bu laboratuvar kimi zaman gözlemsel verileri açıklamak için bilim insanlarını merakını kamçılarken kimi zaman da öne süren teorilerin geçerliliklerini kanıtlamak için test edildikleri bir ortam olmuştur.

Bu sınamadan yüzünün akıya çıkan teorilerden birisi de Albert Einstein'ın geliştirdiği ve 1915 yılında yayınladığı genel görelilik teorisidir. 18. yüzyılda Newton, kütle çekim teorisi ile gözlemlenen gök cisimlerin dinamiğini ortaya koymuştur. Ancak gözlemler ile uyuşmayan noktalara sahip olan teorinin iyileştirilmesi çabaları 20. yüzyılın başına kadar devam etmiştir. Albert Einstein'ın devrimci bir yaklaşımla oluşturduğu genel görelilik teorisi insanlığın evreni anlama serüvenine yeni bir boyut kazandırmıştır.

Genel görelilik teorisi, kütle çekim kuvvetinin klasik anlamda iki kütle arasındaki etkileşimin bir sonucu olmadığını, kütlelerin uzay-zaman geometrisinde oluşturdukları bükülmelerin bir sonucu olduğunu söylemektedir. Böylece uzay-zaman geometrisi ile madde arasında temel bir ilişki kuran genel görelilik teorisi, kütle çekim kuvvetine yeni bir bakış kazandırmıştır. Sadece farklı bir bakış sunmak ile kalmamış, Merkür'ün Güneş etrafındaki yörüngesinin devinimi, Güneş gibi büyük kütleli gök cisimlerinin ışığı sapıtması, ışığın kütle çekim kuvveti etkisi ile kırmızıya kayması olaylarını öngörmüş ve gözlemsel çalışmalar ile de uyumlu sonuçlar ortaya koymuştur. Bunların yanında karadelikler ve kütle çekim dalgaları gibi öngördüğü sonuçların, teorinin ortaya çıkışından neredeyse yüzyıl sonra gözlemlenmiş olması da zarafetinin bir göstergesidir. Bu başarılar sayesinde genel görelilik teorisi gözlemlendiğimiz evreni açıklamadaki en etkili araç haline almıştır. Bu aracın kullanıldığı bir saha da güçlü gravitasyonel alana sahip olan kompakt yıldızlardır.

Yıldızlar; doğum, yaşam ve ölüm olarak tarif edilen bir evrim süreci takip eder. Genellikle gaz halindeki nebula'nın kütle-çekimsel çöküşü ile bir yıldızın doğum süreci başlar. Bu çöküş esnasında toplanan kütle, yıldızın evrimi sonunda nasıl bir yıldız dönüşece-

ğini de belirler. Çöküş esnasında yoğunluk ve sıcaklık, hidrojen atomu çekirdeklerinin nükleer füzyon gerçekleştirmesine olanak sağlar. Ortaya çıkan enerji ile sıcaklık daha da artarak plazma küresinin çökmesini engelleyen bir basınç oluşturur. İki basınç arasında oluşan denge ile yıldız yaşam olarak adlandırılan sürecine geçmiş olur. Bu aşama sahip olduğu nükleer yakıtını tüketene kadar devam edecektir. Bu gerçekleştiğinde denge kütleçekiminin lehine bozularak yıldızın çökmesine neden olacaktır. Artık yıldızın ölümü olarak tarif edilen aşamaya geçilmiştir. Yıldız, çekirdeğine çökmesiyle ortaya çıkan enerji sayesinde dış katmanlarını uzaya saçarak bir patlama gerçekleştirir. Kalan çekirdeğinin kaderi ise kütlesine bağlı olarak farklı yollar izlemektedir. Belirli bir kütle değerine kadar çekidekteki çöküş, elektronların uyguladığı Pauli basıncı ile dengelenir. Bunun denge durumunda bir beyaz cüce oluşur. Pauli basıncını yenebilecek kadar kütleyle sahip yıldızların, çekirdeklerindeki çöküş devam edecektir. Ancak bu çöküş nükleon basıncı ile dengelenirse bir nötron yıldızı oluşacaktır. Eğer yıldız, nükleon basıncını da yenecek kadar kütleyle sahip ise çöküş devam ederek bir karadeliğe meydana gelecektir. Yıldız evriminin son aşaması her durumda çekirdeğinin içe çökerek yoğunluğunu artıracak şekilde sonuçlanmaktadır. Çizelge 1.1’den de görüleceği gibi ölen yıldızların ulaştıkları yoğunluk değerleri diğer gök cisimlerine göre çok yüksektir. Bu şekilde yüksek yoğunluğa sahip yıldızlar kompakt yıldız olarak adlandırılmaktadır (Glendenning 2012).

Çizelge 1.1. Bazı tipik cisimlerin kütleleri, yarıçapları, Swarzschild yarıçapı ve ortalama yoğunlukları (Glendenning 2012).

İsim	$M/M_{\odot}$	$R(km)$	$R_s(km)$	$\bar{\rho}(g/cm^3)$
Nominal Nörton Yıldızı	2	10	6	$5 \cdot 10^{14}$
Beyaz Cüce (Sirius B)	1	5400	3	$3 \cdot 10^6$
Güneş	1	$7 \cdot 10^5$	3	1.4
Jüpiter	10^{-3}	$7 \cdot 10^4$	$3 \cdot 10^{-3}$	1.3
Dünya	$3 \cdot 10^{-6}$	6000	$9 \cdot 10^{-6}$	5.5

Genel görelilik teorisine göre kompakt yıldızların güçlü bir gravitasyonel alana sahip olmaları gerekir. Dolayısıyla kompakt yıldız şekillendiren bu gravitasyonel etki göz önünde bulundurmadan oluşturulacak bir model gerçekçi olmayacaktır. Bu nedenle rela-

tivistik kompakt yıldız olarak modellemek gerçeğe daha yakın sonuçlar sunacaktır. Aynı zamanda relativistik kompakt yıldızlar da genel görelilik teorisinin sınanabileceği bir laboratuvar olarak ele alınabilecektir.



2. KAYNAK TARAMASI

Genel görelilik teorisinin dayandığı matematiksel yapı Einstein alan denklemleridir. Bu denklemler ise differansiyel geometri ile ilişkilidir. Genel görelilik teorisi bize uzay-zaman yapısının madde üzerinde nasıl etki ederek kütle-çekim alanı oluşturduğunu ve maddenin de uzay-zamanı etkileyerek nasıl eğrilik oluşturduğunu söyleyecektir. Bu karşılıklı ilişkiyi yöneten yasaları ortaya koyacak denklemleri oluşturarak işe başlanmalıdır.

2.1. Einstein alan denklemleri

Einstein alan denklemleri Einstein-Hilbert etki integralinin metrik tensöre göre varyasyonu alınarak türetilir. Einstein-Hilbert etki integrali

$$S = S_G + S_M , \quad (2.1)$$

şekilde verilir. Burada S_G boş uzaydaki gravitasyonel alanı, S_M ise madde dağılımının gravitasyonel alan ile etkileşimini veren etki integralidir. Bu etki integrali

$$S = \int d^4x \left[\frac{1}{2\kappa} \mathcal{R} + \mathcal{L}_M \right] \sqrt{-g} , \quad (2.2)$$

şeklinde olup burada $g = \det(g_{ij})$ metrik tensör determinantını, $\mathcal{L}_M$ ise kaynak alanların değişmez lagrangian yoğunluğunu ifade eder. $\mathcal{R}$ Ricci skaleri, κ ise $\kappa = 8\pi G c^{-4}$ ye eşit olan bir oran sabitidir. G kütle çekim sabiti, c ise ışığın vakum ortamındaki hızıdır. Ortaya çıkan etki integralinin kovaryant metrik tensörü olan g^{ij} ye göre varyasyonu alındığında en küçük etki prensibine göre $\delta S = 0$ olmalıdır. Varyasyon etki integraline uyguladığında

$$\delta S = \int d^4x \frac{1}{2\kappa} \delta (\sqrt{-g} \mathcal{R}) + \int d^4x \delta (\sqrt{-g} \mathcal{L}_M) = 0 , \quad (2.3)$$

şeklinde olur. İlk terimin içerisindeki varyasyonu $\mathcal{R} = g^{ij} \mathcal{R}_{ij}$ eşitliğini kullanarak

$$\delta (\sqrt{-g} \mathcal{R}) = g^{ij} \mathcal{R}_{ij} \delta \sqrt{-g} + \sqrt{-g} \mathcal{R}_{ij} \delta g^{ij} + \sqrt{-g} g^{ij} \delta \mathcal{R}_{ij} , \quad (2.4)$$

şeklinde daha açık yazılabilir. Metrik tensör determinantı ile Ricci tensörünün varyasyonları için

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{ij} \delta g^{ij} , \quad (2.5)$$

$$\delta \mathcal{R}_{ij} = \nabla_i (\delta \Gamma_{ji}^k) - \nabla_j (\delta \Gamma_{li}^k) , \quad (2.6)$$

eşitlikleri kullanılacaktır. Burada Γ_{ji}^k ve Γ_{li}^k ikinci tür Crishtoffel sembollerini ifade etmektedir. (2.5) ve (2.6) eşitliklerini (2.4) içerisine koyarsak aşağıdaki gibi olacaktır

$$\delta(\sqrt{-g}\mathcal{R}) = \sqrt{-g}\delta g^{ij} \left[\mathcal{R}_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}\mathcal{R} \right] + \sqrt{-g}\nabla_m [g^{ij}(\delta\Gamma_{ij}^m) - g^{im}(\delta\Gamma_{li}^l)] . \quad (2.7)$$

Böylece (2.3) eşitliğindeki etki integralinin ilk terimi daha açık bir şekilde yazabilir

$$\int d^4x \left[\frac{\sqrt{-g}}{2\kappa} \delta g^{ij} \left(\mathcal{R}_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}\mathcal{R} \right) + \frac{\sqrt{-g}}{2\kappa} \nabla_m (g^{ij}(\delta\Gamma_{ij}^m) - g^{im}(\delta\Gamma_{li}^l)) \right] + \int d^4x \delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M) = 0 . \quad (2.8)$$

(2.8)'deki integral, Gauss teoremi aracılığıyla 4 boyutlu uzay-zamanı çevreleyen bir hiper yüzey integraline dönüştürülebilir. En küçük etki prensibi gereği bu yüzeyin sınırlarındaki değişimler sıfıra eşit olacaktır. Bu nedenle integral içerisindeki ikinci terimin bu sınırlarda katkısı olmayacaktır. (2.3) denklemi bu kabul dikkate alınarak düzenlendiğinde aşağıdaki gibi olacaktır

$$\int d^4x \left[\frac{\sqrt{-g}}{2\kappa} \delta g^{ij} \left(\mathcal{R}_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}\mathcal{R} \right) + \delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M) \right] = 0 . \quad (2.9)$$

Açıkça görüldüğü gibi bu integralin sıfır olması için köşeli parantez içindeki ifadenin sıfıra eşit olması gerekmektedir. Bu da aşağıdaki eşitliğe götürecektir.

$$\mathcal{R}_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}\mathcal{R} = -\frac{2\kappa}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M)}{\delta g^{ij}} . \quad (2.10)$$

Burada eşitliğin sağ tarafı enerji-momentum tensörüne karşılık gelmektedir (Dalarsson ve Dalarsson 2015)

$$T_{ij} = \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M)}{\delta g^{ij}} = -2 \frac{\delta\mathcal{L}_M}{\delta g^{ij}} + g_{ij}\mathcal{L}_M . \quad (2.11)$$

Böylece Einstein-Hilbert etkisini kullanarak Einstein alan denklemleri elde edilmiştir

$$\mathcal{R}_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}\mathcal{R} = \kappa T_{ij} . \quad (2.12)$$

Bu çalışma boyunca $G = c = 1$ kabul edilecektir. Böylece alan denklemleri

$$\mathcal{R}_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}\mathcal{R} = 8\pi T_{ij} , \quad (2.13)$$

halini alacaktır. Bu denklemler tarih sahnesinde belirdikten sonra gökyüzündeki kompakt yıldızlara bakış değişecek ve artık onlar relativistik kompakt yıldızlar olarak görülecektir.

2.2. Relativistik kompakt yıldızlar

20. yüzyıl başlarında bilim insanları çok yüksek yoğunluk ve basınç altındaki maddenin doğasının nasıl değiştiğini anlamak için yıldızları bir laboratuvar olarak kullanmışlardır. Kompakt gök cisimlerini anlama serüveninin yolu çok kısa sürede genel görelilik teorisi ile kesişecektir. Serüvenin, teorik olarak ortaya konmasından çok önce gözlemlenen beyaz cüceler ile başlamıştır. Arthur S. Eddington beyaz cüceleri ayrıntılı olarak incelemiştir (Bonolis 2017). Ayrıca Yacov I. Frenkel, süper yoğun yıldızları, elektron gazından oluşan göreceli ve göreceli olmayan iki kategoriye ayırmıştır (Bonolis 2017). Fowler (1926) beyaz cücelerin yoğunluğu enerjisi ve sıcaklığı arasındaki ilişkinin, Fermi-Dirac istatistiklerine uyan bir gaz olarak ele alınabilceğini bulmuştur. Bu fermi gaz modeline göreli bir düzeltme uygulanarak bir yıldızın kütesinin maksimum bir değere sahip olması gerektiğini öne sürülmüştür (Anderson 1929). Chandrasekhar (1931) bir dizi makale yayınlarak hidrostatik denklemi, göreceli olmayan fermi gazı durum denklemiyle çözmüş ve bugün Chandrasekhar limiti olarak bilinen kütle sınırını belirlemiştir.

Einstein genel görelilik teorisini yayınladıktan bir yıl sonra 1916 yılında Schwarzschild boş uzay için Einstein alan denklemlerinin çözümünü yayınlamıştır (Schwarzschild 1999). Zwicky (1938) çalışmasında Swarzschild çözümü tartışarak “çökmüş bir nötron yıldızı” için model sağlamak amacıyla Schwarzschild dış çözümünün kullanılmasını önermiştir. Genel görelilik teorisinin kompakt yıldızların analizinde kullanılmasına ilham olan kişi Richard C. Tolman’dır. Çalışmasında statik küresel ideal bir akışkan için Einstein alan denklemlerinin çözümünü yapmıştır. Analitik çözüm için önce uygun matematiksel önermelerde bulunup daha sonra sonuçların fiziksel koşullara uygunluğunu değerlendirmiştir (Tolman 1939). Oppenheimer ve Volkoff (1939), "Tolman IV" çözümünü kullanarak nötron yıldızı için göreceli hidrostatik denge denklemini ortaya çıkarmış ve nötron yıldızları için sınır kütle değerini hesaplamışlardır. Bu sınır bugün Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) sınırı olarak bilinmektedir. Yapılan modern çalışmalar ile bu sınır için $1.5M_{\odot} - 3M_{\odot}$ aralığında tahmin edilmektedir (Bombaci 1996). Böylece astrofizik alanında kompakt yıldızın iç yapısını anlamak için nükleer fizik ve parçacık fiziği vazgeçilmez hale gelirken bu yıldızların ancak genel görelilik teorisi kapsamında modellenebileceği ortaya çıkmıştır.

Schwarzschild dış çözümü küresel simetri sahibi mükemmel akışkanların modellen-

mesinde ilk adım olmuştur. Kompakt yıldızların gerçekçi modellerini elde etmek için anizotropik maddenin özelliklerinin anlaşılması için çalışmalar yapılmıştır. Genel olarak kompakt yıldız statik, küresel simetrik ve izotropik oluğu kabul edilmiştir. Ancak kompakt yıldızın yüksek iç yoğunluğu ve güçlü yer çekimi, bu nesnelerin içindeki basıncın izotropik bir akışkan formunda olamayacağı düşünülmektedir. Teorik çalışmalar kompakt yıldızların içindeki basıncın genellikle anizotropik olduğunu göstermektedir. Bu akışkan içindeki basıncın özdeş olmayan iki parçaya ayrılabilceğini söyler. Radyal yönde oluşan radyal basınç P_r ve ona dik yönde etki eden teğetsel basınç P_t . Anizotropik faktör ise Δ ($\Delta = P_t - P_r$) yıldızın iç durumunu ifade eden bir fonksiyondur. Teğetsel basıncın radyal basınçtan farklı olabileceği fikri ilk olarak Lemaître (1937) tarafından ortaya atılmıştır. Bu model teğetsel basınca bağlı ve sabit yoğunluğa sahiptir. Daha sonra Florides (1974) tarafından değişken yoğunluk için genelleştirmiştir. Sonrasında bir çok bilim insanı anizotropi üzerine çalışmışlardır.

Yıldız modelindeki anizotropinin varlığının nedeni olarak farklı faktörlerin rol oynayabileceği ileri sürülmüştür. Yüksek yoğunlukta nükleer etkileşimlerin anizotropi geliştirebileceği iddia edilmiştir (Ruderman 1972). Ayrıca yıldızların içinde süper akışkan nötronların oluşması nedeniyle anizotropi oluşabileceği öne sürülmüştür (Kippenhahn vd. 2012). Basınç anizotropisi için katı çekirdeğin varlığı (Sokolov 1980), pion yoğunlaşması (Sawyer 1972), yavaş dönüş (Herrera ve Sontos 1995) güçlü manyetik alan (Weber 1999), iki akışkanın karışımı (Bayin 1982; Letelier 1980) gibi öneriler sunulmuştur. Viskozite-ninde yerel anizotropinin kaynağı olabileceği düşünülmüş ve buna dair hesaplamalar yapılmıştır (Barreto ve Rojas 1992; Barreto 1993). Sistemin başlangıçta izotropik olduğu varsayılsa bile, enerji tüketen akışlar, sıvı akışında kaymanın ortaya çıkması gibi fiziksel süreçlerin her zaman basınç anizotropisi üretme eğiliminde olduğunu sonucuna varmıştır (Herrera 2000). Dolayısıyla kompakt bir yıldız denge durumuna ulaşacağı dinamik süreç içerisinde basınç anizotropisi ortaya çıkacaktır. Denge halinde ise bu anizotropi kalıcı olacaktır. Bu nedenle göreceli akışkanlar için basınç anizotropisinin dikkate alınması önemlidir.

Bowers ve Liang (1974), relativistik kompakt yıldızlara anizotropik modeli uygulanmış ve ayrıca anizotropinin yüzey kırmızıya kayması ve denge kütlesi üzerinde ihmal edilemeyecek etkileri olabileceğini öne sürülmüştür. Dev ve Gleiser (2002), sabit yoğun-

luklu yıldızlar için elde ettiği çözümde anizotropinin, denge kütlesi ve yüzeyde kırmızıya kayma gibi özelliklerini değiştirdiğini göstermişlerdir. Anizotropik kuvvetin, kompakt yıldızı, izotropik duruma kıyasla daha kompakt hale gelmesine neden olacağını ve bunun sonunda nötron yıldızının garip bir yıldıza geçişini sağladığı iddia edilmiştir (Jasmin vd. 2018). Yerel anizotropi varsayımı, relativistik kompakt yıldızların modellenmesinde yararlı olduğu görülmüştür. Anizotropik faktör ifadesi hem pozitif hem de negatif değer alabilmektedir. Her iki durumunda farklı sonuçları olacaktır. Teğetsel basınç, radyal basınçtan büyük olduğunda anizotropik faktör pozitif olacak ve dışa doğru yerçekimine karşı koyan bir kuvvet üretir. Bu durum sistemin kararlılığını artıracaktır. Eğer radyal basınç, teğetsel basınçtan büyük olursa anizotropik faktör negatif olacak ve içe doğru bir kuvvet oluşacaktır (Maurya vd. 2018).

2.3. Relativistik kompakt yıldızların fiziksel özellikleri

Oluşturulan her model geçerliliğini test etmek için fiziksel koşulların süzgecinden geçmesi gerekmektedir. Bu koşullardan bazıları yıldızın yapısını belirleyen fiziksel niceliklerin sınırları ile ilgilidir. Bazı koşullar ise yıldızın dengede kalması ile ilgilidir. Dolayısıyla bu koşullar iki ayrı başlık altında incelenebilir.

2.3.1. Fiziksel sınır koşulları

i) Fiziksel parametreler

- a) **Metrik potansiyellerin doğası:** Metrik potansiyelleri yıldızın merkezinden yüzeyine kadar herhangi bir noktada tekillik barındırmamalıdır. Ayrıca yıldızın yüzeyinde Schwarzschild metriği ile uyumlu olmalıdır

$$\begin{aligned} r = 0 &\implies e^\nu, e^\lambda > 0, \\ r = R &\implies e^\nu, e^{-\lambda} = 1 - \frac{2M}{R}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

- b) **Basınç ve yoğunluk:** Yıldızların yapısında etkili olan fiziksel parametreler basınç ve yoğunluktur. Bu parametreler yıldızın merkezinde sıfırdan farklı ve pozitif değer almaları beklenir. Yıldızın yüzeyine doğru monoton azalan bir fonksiyon olmalıdırlar. Model izotropik ise basınç yıldız yüzeyinde sıfır olması beklenir. Eğer model yerel anizotropi barındırıyorsa radyal basınç P_r

sıfır olmalı, teğetsel basınç P_t ise sıfırdan farklı olmalıdır

$$\begin{aligned} r = 0 &\implies \rho > 0, \quad P_r = P_t > 0, \\ r = R &\implies P_r = 0, \quad P_t > 0, \\ \frac{d\rho}{dr} &< 0, \quad \frac{dP_r}{dr} < 0, \quad \frac{dP_t}{dr} < 0, \end{aligned} \quad (2.15)$$

c) **Zeldovich koşulu:** Yıldızın merkezindeki basınç ve yoğunluk arasında

$$\frac{P_c}{\rho_c} < 1, \quad (2.16)$$

ilişkisi olması beklenir (Zeldovich ve Novikov 1971).

ii) **Enerji koşulu:** Modelinin geçerliliği için yıldızın iç kısmında enerji koşulları pozitif değerler alması gerekmektedir. Bu enerji koşulları ve şartları şu şekildedir (Visser 1995).

a) **Sıfır enerji koşulu (NEC):** Herhangi bir sıfır vektör için öne sürülen koşuldur.

$$\begin{aligned} T_{ij}k^ik^j &\geq 0, \\ \rho + P_i &\geq 0. \end{aligned} \quad (2.17)$$

b) **Zayıf enerji koşulu (WEC):** Herhangi bir zamansal vektör için öne sürülen koşuldur.

$$\begin{aligned} T_{ij}V^iV^j &\geq 0, \\ \rho &\geq 0 \quad \text{ve} \quad \rho + P_i \geq 0. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Bu koşul aynı zamanda sıfır enerji koşulunu da içerecektir. Bu durum herhangi bir zaman gözlemcisinin enerji yoğunluğunu pozitif olarak ölçeceğini ifade etmektedir.

c) **Güçlü enerji koşulu (SEC):** Herhangi zamansal vektör için öne sürülen koşuldur.

$$\begin{aligned} \left(T_{ij} - \frac{T}{2}g_{ij}\right)V^iV^j &\geq 0, \\ T &= -\rho + \sum_j P_j, \\ \rho + P_j &\geq 0 \quad \text{ve} \quad \rho + \sum_j P_j \geq 0. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Burada T enerji-momentum tensörünün izidir. T 'nin daima pozitif olacağını ifade etmektedir. Süreklilik açısından güçlü enerji durumu, sıfır enerji durumunda içermektedir.

d) **Dominant enerji koşulu (DEC):** Herhangi bir zamansal vektör için önerilen koşuldur.

$$\left(T_{ij} - \frac{T}{2}g_{ij}\right)V^iV^j \geq 0 \quad \text{ve} \quad T_{ij}V^j \quad \text{uzaysal değildir.} \quad (2.20)$$

$$\rho \geq 0 \quad \text{ve} \quad P_j \in [-\rho, +P].$$

Bu yerel olarak ölçülen enerji yoğunluğunun her zaman pozitif olduğunu ve enerji akışının zamana bağlı veya sıfır olduğunu söylemektedir. Dominant enerji durumu, zayıf ve dolayısıyla sıfır enerji durumunu barındırmaktadır. Ancak güçlü enerji durumunu ima etmeyecektir.

iii) **Kütle yarıçap ilişkisi ve kompaktlık:** Küresel simetrik ideal akışkan modeli için maksimum kütle ile yarıçap arasındaki oranın bir üst sınırı Buchdahl (1959) tarafından ortaya konulmuştur. Bu üst sınır

$$\frac{M}{R} < \frac{4}{9}, \quad (2.21)$$

şeklindedir. Eğer oluşturulan model anizotropik olduğunda bu oran genel bir ifade olarak kalacaktır. Bu durumda kompaktlığı ifade etmek için kütle fonksiyonunun yarıçapa oranına bakılmalıdır (Mak ve Harko 2003).

$$m(r) = 4\pi \int_0^R \rho(r)r^2 dr, \quad (2.22)$$

$$u = \frac{m(R)}{R}. \quad (2.23)$$

Burada u yıldızın kompaktlık faktörüdür.

iv) **Yüzeyde kırmızıya kayma:** Gözlemsel açıdan bakıldığında yüzeyde kırmızıya kayma önemli bir sınır olmaktadır. Bu sınır koşulu yıldızın kompaktlığı ile ilişkidir. (2.21)'deki sınır koşulu da göz önüne alındığında statik ideal akışkan için kırmızıya kayma miktarı,

$$z = (1 - 2u)^{-1/2} - 1, \quad (2.24)$$

$$z_s \leq 2.$$

şeklinde bulunur (Glendenning 2012). Burada z_s yıldızın yüzeyindeki ($r = R$) kırmızıya kayma miktarıdır. Böhmer ve Harko (2006) çalışmalarında kompakt bir yıldızın yüzeyindeki kırmızıya kayma miktarı için sınır koşulunun

$$z_s \leq 5, \quad (2.25)$$

şeklinde olabileceğini öne sürmüşlerdir.

2.3.2. Kompakt yıldızlar için denge koşulları

- i) **Nedensellik koşulu:** Ses hızının yıldızın her noktasında ışık hızından daha küçük olması gerekir

$$v_s^2 = \frac{dP}{d\rho} < 1. \quad (2.26)$$

Anizotropi barındıran bir model için radyal ve teğetsel basınçlardan dolayı radyal ses hızı v_r ile teğetsel ses hızı v_t 'nin değerleri farklı olacaktır. Nedensellik gereği her iki ses hızı da ışık hızından daha küçük olmaları gerekir

$$\begin{aligned} v_r^2 &= \frac{dP_r}{d\rho} < 1, \\ v_t^2 &= \frac{dP_t}{d\rho} < 1. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Ayrıca Herrera (1992) anizotropik yıldızların radyal pertürbasyon altındaki kararlılığı ile ilgili "çatlama" kavramını öne sürmüştür. Bu çatlama kavramını kullanarak anizotropik bir yıldız da sesin radyal hızının, teğetsel hızıyla kesiştiği bölgenin potansiyel olarak kararlı olacağına, aksi durumda ise potansiyel olarak kararsız olacağını gösterilmiştir (Abreu vd. 2007)

$$\begin{aligned} -1 \leq v_t^2 - v_r^2 \leq 0 &\implies \text{kararlı bölge,} \\ 0 \leq v_t^2 - v_r^2 \leq 1 &\implies \text{kararsız bölge.} \end{aligned} \quad (2.28)$$

- ii) **TOV denklemi:** Yıldızın dengede kalabilmesi için kendi yerçekimini, hidrostatik basınç ile dengelemesi gerekir. Bu hidrostatik dengeyi relativistik kompakt yıldızlar için Oppenheimer ve Volkoff (1939), Tolman'ın küresel simetrik mükemmel akışkan için bulduğu çözümü kullanarak ortaya çıkarmışlardır

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{[P + \rho][m + 4\pi r^3 P]}{r[r - 2m]}. \quad (2.29)$$

Bower ve Liang (1974) TOV denklemini anizotropik model için genelleştirmişlerdir

$$\frac{dP_r}{dr} = -\frac{[P_r + \rho][m + 4\pi r^3 P_r]}{r[r - 2m]} + \frac{2}{r}(P_t - P_r). \quad (2.30)$$

TOV denklemini kuvvetlerin toplamı olarakta yazılmaktadır. Yerçekimi kuvveti F_g , hidrostatik kuvvet F_h , anizotropik kuvvet F_a olarak üç kuvvet şeklinde ifade edilir. TOV denklemine göre bu üç kuvvetin toplamının sıfır olması gerekmektedir

$$F_g = -\frac{[P_r + \rho][m + 4\pi r^3 P_r]}{r[r - 2m]}, \quad (2.31)$$

$$F_h = -\frac{dP_r}{dr}, \quad (2.32)$$

$$F_a = \frac{2}{r}(P_t - P_r), \quad (2.33)$$

$$F_g + F_h + F_a = 0. \quad (2.34)$$

- iii) **Harrison-Zeldovich-Novikov koşulu:** Kompakt bir yıldızın merkezindeki yoğunluk değeri ile yıldızın kütlesi arasındaki ilişkisinden yola çıkarak, yıldızın kararlı bir yapıya sahip olabilmesi için, yıldız kütesinin merkezdeki yoğunluğunun değişimine göre pozitif değerler alması gerektiği koşulu ortaya konulmuştur (Zeldovich ve Novikov 1971; Harrison vd.1965)

$$\frac{\partial M_{(\rho_c)}}{\partial \rho_c} > 0. \quad (2.35)$$

- iv) **Relativistik adyabatik indeks:** Adyabatik indeks, sabit sıcaklıktaki ısı sığası ile sabit basınçtaki ısı sığasının oranı olarak ifade edilir. Relativistik adyabatik indeks, bize kompakt yıldız yapısının sonsuz küçük bir radyal adyabatik bozulmaya karşı dinamik kararlılığını göstermektedir. Newton küresi için adyabatik indeks, dinamik olarak kararlı bir sıvı dağılımı olması için $4/3$ 'ten büyük olmalıdır. Relativistik adyabatik indeksinde bu sınırın üzerinde olması beklenmektedir (Bondi 1964).

$$\Gamma = \left(1 + \frac{\rho}{P}\right) \frac{dP}{d\rho} > \frac{4}{3}. \quad (2.36)$$

3. MATERYAL VE METOT

Genel görelilik teorisinin denklemleri differansiyel denklemlerdir. Bu denklemler doğrusal olmayan, adi türevler barındırmaktadır. Denklemlerin bize fiziksel dünya hakkında anlamlı ifadeler vermesi için bu denklemlere mümkün olduğu kadar kesin çözüm veya tam bir genel çözüm bulmak gerekir. Bunun anlamı, metriğin uzay-zaman koordinatlarına bağlı olarak elde edilmesidir. Bunun için madde dağılımının tüm özelliklerini bilmemiz gerekir. Tabi bu tüm özellikleri uygulamak denklemleri daha da zorlaştıracaktır. Metriğin uzay-zaman koordinatlarına bağlı ifadesine ulaşmak için madde dağılımını modellerken basitten karmaşığa doğru bir yol izlemek faydalı olacaktır. Bu çalışma içerisinde de madde dağılımını modellenirken bu yol izlenecektir.

3.1. Einstein tensörü

Bir önceki bölümde Einstein alan denklemleri elde etmişti. (2.13)'deki Einstein alan denklemlerinin sağ tarafı uzay-zamanın geometrisini betimlemektedir. Uzay-zamanı ifade eden bu kısım Einstein tensörü olarak adlandırılmaktadır (Carroll 2004).

$$G_{ij} = \mathcal{R}_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}\mathcal{R}. \quad (3.1)$$

Einstein tensörü, metrik tensör, Ricci tensörü ve Ricci skaleri arasındaki matematiksel ilişki ile tanımlanmaktadır. Bir uzay-zaman metriği verildiği zaman Einstein tensörünü elde etmek için Ricci tensörü ve Ricci skalerinin belirlenmesi gerekir. Bu çalışmada statik, küresel simetrik uzay zaman metriği kullanılacaktır. Bu metrik

$$ds^2 = e^\nu dt^2 - e^\lambda dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (3.2)$$

ile verilir. Burada e^ν ve e^λ metrik potansiyelleri olup, Einstein alan denklemleri ile belirlenecek radyal koordinata bağlı fonksyonlardır. Ricci tensörünü belirlemek için aşağıdaki ifade kullanılır

$$\mathcal{R}_{ij} = \partial_j \Gamma_{li}^l - \partial_l \Gamma_{ij}^l + \Gamma_{il}^n \Gamma_{nj}^l - \Gamma_{ij}^l \Gamma_{nl}^n. \quad (3.3)$$

Görüldüğü gibi Ricci tensörü ve dolayısıyla Ricci skaleri, ikinci tür Christoffel sembollerine bağlıdır. İkinci tür Christoffel sembolleri aşağıdaki gibi verilir.

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2}g^{ml} \left(\frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right). \quad (3.4)$$

(3.2)'de belirtilen metrik kullanılarak ikinci tür Christoffel sembolleri (3.4) bağıntısı ile hesaplanabilir. Sıfırdan farklı Christoffel sembolleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned}\Gamma_{01}^0 &= \frac{1}{2}\nu', & \Gamma_{00}^1 &= \frac{1}{2}\nu'e^{-\lambda+\nu}, & \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2}\lambda', \\ \Gamma_{22}^1 &= -re^{-\lambda}, & \Gamma_{33}^1 &= -re^{-\lambda}\sin^2\theta, & \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{r}, \\ \Gamma_{33}^2 &= -\cos\theta\sin\theta, & \Gamma_{13}^3 &= \frac{1}{r}, & \Gamma_{23}^3 &= \frac{\cos\theta}{\sin\theta}.\end{aligned}\quad (3.5)$$

Elde edilen bu ikinci tür Christoffel sembolleri kullanılarak sıfırdan farklı Ricci tensörünün bileşenleri

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{00} &= \frac{e^{-\lambda}}{4r} \left(re^\nu (\nu')^2 + re^\nu \nu'' - (re^\nu \lambda' - 4e^\nu) \nu' \right), \\ \mathcal{R}_{11} &= \frac{1}{4}\lambda'\nu' - \frac{1}{4}\nu'^2 - \frac{1}{2}\nu'' + \frac{1}{r}\lambda', \\ \mathcal{R}_{22} &= \frac{e^{-\lambda}}{2} (r\lambda' - r\nu' + 2e^\lambda - 2), \\ \mathcal{R}_{33} &= \frac{e^{-\lambda}\sin^2\theta}{2} (r\lambda' - r\nu' + 2e^\lambda - 2),\end{aligned}\quad (3.6)$$

şeklinde bulunur. Elde edilen Ricci tensörü kullanılarak Ricci skaleri (3.2) metriği için

$$\mathcal{R} = \frac{e^{-\lambda}}{2r^2} \left[r^2 (\nu')^2 + 2r^2 \nu'' - 4r\lambda' - (r^2 \lambda' - 4r) \nu' - 4e^\lambda + 4 \right], \quad (3.7)$$

şeklinde bulunur. Dolayısıyla Einstein tensörü aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}G_{00} &= e^{\nu-\lambda} \left(\frac{\lambda'}{r} + \frac{e^\lambda}{r^2} - \frac{1}{r^2} \right), \\ G_{11} &= \frac{\nu'}{r} - \frac{e^\lambda}{r^2} + \frac{1}{r^2}, \\ G_{22} &= e^{-\lambda} r^2 \left(\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\nu' - \lambda'}{2r} \right), \\ G_{33} &= e^{-\lambda} r^2 \left(\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\nu' - \lambda'}{2r} \right) \sin^2\theta.\end{aligned}\quad (3.8)$$

(2.13)'deki Einstein alan denklemlerinin sol tarafı enerji-momentum tensöründen oluşmaktadır. Bu tensörü oluşturmak için madde dağılımını bilmek gerekir.

3.2. Küresel izotropik ideal akışkan modeli

Bu bölümde relativistik kompakt yıldızın statik ve izotropik, ideal bir akışkan olarak modellenmesi ele alınacaktır. Bu durumda enerji momentum tensörü

$$T_{ij} = (\rho + P)u_i u_j - P g_{ij}, \quad (3.9)$$

şeklinde ifade edilmektedir. Burada ρ kompakt yıldızın yoğunluğu, P ise basıncını ifade etmektedir. Bu ifadeler sadece yarıçapa bağlı fonksiyonlardır. Ayrıca u_μ ise dördü hız vektörü olup $u_\mu u^\mu = 1$ normalleştirme koşulunu sağlar. (3.2) ile verilen statik küresel simetrik olan metrik için dördü hız vektörünün sadece zamansal bileşeni olup aşağıdaki gibidir.

$$u_i = (e^{-\frac{\nu}{2}}, 0, 0, 0) . \quad (3.10)$$

Böylece enerji-momentum tensörünün sıfırdan farklı bileşenleri aşağıdaki gibi bulunur.

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} e^\nu \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^\lambda P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 P \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

(3.8) ve (3.11) eşitlikleri (2.13) içerisine yerleştirilirse Einstein alan denklemleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda'}{r} + \frac{e^\lambda}{r^2} - \frac{1}{r^2} \right) = 8\pi \rho , \quad (3.12)$$

$$e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'}{r} - \frac{e^\lambda}{r^2} + \frac{1}{r^2} \right) = 8\pi P , \quad (3.13)$$

$$e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'^2}{4} + \frac{\nu''}{2} - \frac{\lambda'}{2r} - \frac{\lambda' \nu'}{4} - \frac{\nu'}{2r} \right) = 8\pi P . \quad (3.14)$$

Einstein tensörü G_{33} ile enerji momentum tensörünün T_{33} bileşenlerinden oluşan denklem, (3.14) denklemini vereceğinden elimizde üç adet denklem kalmaktadır. Bu denklemler barındırdığı ν , λ , ρ ve P 'den oluşan dört bilinmeyen bulunmaktadır. Denklemlerin çözümüne ulaşmak için bir denkleme daha ihtiyaç bulunmaktadır. Öncelikle (3.13) ve (3.14)'de verilen denklemler P basıncının iki farklı ifadesidir. Bunları eşitleyerek ν ve λ 'nın r 'ye bağımlılığı için bir denklem elde edilir. Elde edilen ifadeyi integrallenebilir formda yazarak çözüm önerisinin daha rahat görülmesi sağlanır. Dolayısıyla (3.13) ve (3.14) denklemlerinden

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{e^{-\lambda-1}}{r^2} \right) + \frac{d}{dr} \left(\frac{e^{-\lambda} \nu'}{2r} \right) + e^{-\lambda-\nu} \frac{d}{dr} \left(\frac{e^{-\nu} \nu'}{2r} \right) = 0 , \quad (3.15)$$

elde edilir. Analitik bir çözüme ulaşmak için günümüze kadar birçok çözüm önerilmiştir. Bu model için Tolman (1939)'da önerdiği "Tolman IV" olarak adlandırılan,

$$\frac{e^\nu \nu'}{2r} = \text{sabit} , \quad (3.16)$$

kullanılarak elde edilen çözümler araştırılacaktır. (3.16) denklemi çözüldüğünde aşağıdaki eşitliğe ulaşılabacaktır.

$$e^\nu = B^2 \left(1 + \frac{r^2}{A^2} \right). \quad (3.17)$$

Burada A ve B integral sabitleridir. (3.17)'deki çözümü (3.15) içerisine yerleştirilir ve daha sonra çözülürse

$$e^\lambda = \frac{(A^2 + 2r^2) C^2}{(A^2 + r^2)(C^2 - r^2)}, \quad (3.18)$$

eşitliğine ulaşılmaktadır. Burada C integral sabitidir. (3.17) ve (3.18) eşitliklerini (3.12) ve (3.13) denklemleri içerisinde kullanarak

$$8\pi\rho = \frac{3A^2(A^2 + C^2) + r^2(7A^2 + 2C^2 + 6r^2)}{(A^2 + 2r^2)^2 C^2}, \quad (3.19)$$

$$8\pi P = \frac{C^2 - A^2 - 3r^2}{(A^2 + 2r^2) C^2}, \quad (3.20)$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece ν , λ , ρ ve P bilinmeyenleri integral sabitleri cinsinden ifade edilecek şekilde çözüme kavuşturulmuş olur. Bir sonraki bölümde ise sınır koşulları uygulanarak bu sabitler belirlenecektir.

3.3. Küresel anizotropik akışkan modeli

Bu modelde relativistik kompakt yıldız izotropik değil, statik ve anizotropik akışkan olarak modellenmesi ele alınacaktır. Böylece kompakt yıldızın basıncı özdeş olmayan, radyal yönde oluşan basınç ve ona dik yönde etki eden teğetsel basınç olarak ikiye ayrılacaktır. Bu durumu enerji momentum tensörü

$$T_{ij} = (\rho + P_t)u_i u_j - P_t g_{ij} + (P_r - P_t)v_i v_j, \quad (3.21)$$

şeklinde verilir. Burada P_r radyal yöndeki, P_t ise teğetsel yöndeki basıncı ifade etmektedir. v_i ise dörtlü hız vektörü olup $v_i v^i = -1$ normalleştirme koşulunu da sağlar. (3.2)'deki statik küresel metrik için v_i dörtlü hız vektörünün sadece uzaysal bileşeni olup aşağıdaki gibidir.

$$v_i = (0, e^{\frac{\nu}{2}}, 0, 0). \quad (3.22)$$

Enerji momentum tensörü aşağıdaki gibi bulunur.

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} e^\nu \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^\lambda P_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 P_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta P_t \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

(3.8) ve (3.23) eşitliklerini (2.13) içerisine yerleştirilirse Einstein alan denklemleri anizotropik model için aşağıdaki gibi elde edilir.

$$e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda'}{r} + \frac{e^\lambda - 1}{r^2} \right) = 8\pi \rho, \quad (3.24)$$

$$e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'}{r} - \frac{e^\lambda - 1}{r^2} \right) = 8\pi P_r, \quad (3.25)$$

$$e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'^2}{4} + \frac{\nu''}{2} - \frac{\lambda'}{2r} - \frac{\lambda' \nu'}{4} - \frac{\nu'}{2r} \right) = 8\pi P_t. \quad (3.26)$$

(3.25) ve (3.26) denklemlerini kullanarak anizotropik faktörü

$$\Delta = P_t - P_r = \frac{e^{-\lambda}}{8\pi} \left(\frac{\nu''}{2} - \frac{\nu' \lambda'}{4} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu' + \lambda'}{2r} + \frac{e^\lambda - 1}{r^2} \right), \quad (3.27)$$

şeklinde bulunur. Elimizdeki denklem sayısı, ν , λ , ρ , P_r ve P_t bilinmeyenlerini belirlemek için yetersizdir. Bir çözüm önerisinin yanında bir denkleme daha ihtiyaç duyulmaktadır. İhtiyaç duyulan bu denklemi Karmarkar koşulu olarak adlandırılan ve Riemann tensörünün bileşenleri arasında kurulan matematiksel eşitlik ile elde edilecektir (Karmarkar 1948).

$$\mathcal{R}_{0110} = \frac{\mathcal{R}_{1221} \mathcal{R}_{0330} + \mathcal{R}_{1224} \mathcal{R}_{1334}}{\mathcal{R}_{2332}}, \quad (3.28)$$

Bu koşul 4-boyutlu pseudo-öklidyen bir uzayın 5-boyutlu bir eğri uzay-zamana gömülmesi sonucu ortaya çıkmıştır. Karmarkar koşulunun içerisindeki Reimann tensörünün bileşenleri ise

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{0110} &= e^\nu \left(\frac{1}{2} \nu'' + \frac{1}{4} \nu'^2 - \frac{1}{4} \nu' \lambda' \right), & \mathcal{R}_{0330} &= e^{\nu-\lambda} \nu' \frac{r}{2} \sin^2 \theta, \\ \mathcal{R}_{1221} &= \frac{r}{2} \lambda', & \mathcal{R}_{1224} &= 0, \\ \mathcal{R}_{1334} &= 0, & \mathcal{R}_{2332} &= (1 - e^{-\lambda}) r^2 \sin^2 \theta, \end{aligned} \quad (3.29)$$

olarak hesaplanır. (3.29)'deki ifadeleri (3.28) içerisine yazarak düzenlersek,

$$\frac{2\nu''}{\nu'} + \nu' = \frac{\lambda' e^\lambda}{e^\lambda - 1}, \quad (3.30)$$

eşitliği elde edilir. (3.30) denkleminin ν 'ye göre çözümünden

$$e^\nu = \left(A + B \int dr \sqrt{e^\lambda - 1} \right)^2, \quad (3.31)$$

elde edilir. Burada A ve B integral sabitleridir. (3.31) ifadesinin integre edilmesi e^λ fonksiyonunun r 'ye bağıllığının açık olarak bilinmesine bağlıdır. Bu nedenle e^λ için son yıllarda literatürde sıklıkla kullanılan

$$e^\lambda = \frac{r^2}{(a^2 + 1)k^2} + 1, \quad (3.32)$$

şeklindeki çözüm önerisi kullanılacaktır (Pandya vd. 2020). Burada a ve k yıldızın geometrisine ait sabitlerdir. Bu çözüm önerisini (3.31) eşitliği içerisinde kullanıldığında

$$e^\nu = \left(A + \frac{Br^2}{2\sqrt{(a^2 + 1)k^2}} \right)^2, \quad (3.33)$$

sonucuna ulaşılır. Aynı şekilde (3.32) önerisini (3.24) içerisinde kullanarak yoğunluk ifadesi

$$8\pi\rho = \frac{3k^2(a^2 + 1) + r^2}{(k^2(a^2 + 1) + r^2)^2}, \quad (3.34)$$

şeklinde olur. (3.32) ve (3.33) eşitliklerini (3.25), (3.26) ve (3.37) denklemlerinde kullanarak P_r , P_t ve Δ nicelikleri aşağıdaki gibi bulunur

$$8\pi P_r = \frac{4B(k^2(a^2 + 1)) - Br^2 - 2Ak\sqrt{a^2 + 1}}{(k^2(a^2 + 1) + r^2)(Br^2 + 2Ak\sqrt{a^2 + 1})}, \quad (3.35)$$

$$8\pi P_t = \frac{B((4r^2(a^2 + 1) + r^2) - 2Ak\sqrt{a^2 + 1})(a^2 + 1)k^2}{(k^2(a^2 + 1) + r^2)^2(Br^2 + 2Ak\sqrt{a^2 + 1})}, \quad (3.36)$$

$$\Delta = \frac{(B(r^2 - 2k^2(a^2 + 1)) + 2Ak\sqrt{a^2 + 1})r^2}{8\pi(k^2(a^2 + 1) + r^2)^2(Br^2 + 2Ak\sqrt{a^2 + 1})}. \quad (3.37)$$

Böylece statik, anizotropik akışkan modeli için relativistik kompakt yıldızın fiziksel parametreleri ν , λ , P_r ve P_t integral sabitleri A , B , k ve a cinsinden ifade edilmiş olur.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Her iki model içinde fiziksel parametreler, integral sabitleri ile belirlenmiştir. Bu sabitler sınır koşulları uygulanarak belirlenir.

4.1. Sınır koşulları

Her iki model için de yıldız yüzeyinin dışı boş uzay olarak tanımlıdır. Bu nedenle oluşturulan statik, küresel simetrik olan metrik, yıldız yüzeyinin dışında,

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) , \quad (4.1)$$

olarak verilen Schwarzschild metriği ile uyumlu olmalıdır. (3.2)'deki metrik potansiyelleri yıldızın yüzeyinde,

$$e^\nu = e^{-\lambda} = \left(1 - \frac{2M}{R}\right) , \quad (4.2)$$

koşulunu sağlamalıdır. Diğer uygulanacak sınır koşulu ise

$$P_{r(r=R)} = 0 , \quad (4.3)$$

şeklinde radyal basıncın yıldızın yüzeyindeki durumu ile ilgilidir. Bundan sonra hem izotropik hem de anizotropik modeller için bu sınır koşulları uygulanacaktır.

Küresel izotropik ideal akışkan modeline sınır koşullarını uygulamak için $r = R$ 'de (4.2) koşulu (3.12) ve (3.13) denkleminde, (4.3) sınır koşulu ise (3.14) dekleminde yerine konulursa kompakt yıldızı modelleyen A , B ve C sabitleri,

$$A^2 = \frac{R^2 (R - 3M)}{M} , \quad (4.4)$$

$$B^2 = 1 - \frac{3M}{R} , \quad (4.5)$$

$$C^2 = \frac{R^3}{M} , \quad (4.6)$$

şeklinde bulunur. Bu ifadeleri (3.17), (3.18), (3.19) ve (3.20) denklemlerinde yerine ko-

nulursa

$$e^\nu = \frac{Mr^2 + R^3 - 3MR^2}{R^3}, \quad (4.7)$$

$$e^\lambda = \frac{R^3 (R^3 - 3MR^2 + 2Mr^2)}{(R^5(R - 3M) + M^2r^2(3R^2 - r^2))}, \quad (4.8)$$

$$8\pi\rho = \frac{3M(2R^6 + 9MR^4(M - R) + MR^2r^2(3R - 7M) + 2M^2r^4)}{(R^3 - 3Mr^2 + 2Mr^2)^2 R^3}, \quad (4.9)$$

$$8\pi P = \frac{3M^2(R^2 - r^2)}{(2Mr^2 + R^3 - 3MR^2) R^3}, \quad (4.10)$$

şeklinde çözümler elde edilir. Böylece modelin fiziksel parametreleri relativistik kompakt yıldızın kütle ve yarıçap değerlerine bağlı olarak elde edilmiş olur.

Küresel anizotropik akışkan modeline sınır koşullarının uygulanması için ise (4.2) ile verilen koşulu (3.24) ve (3.25) denklemlerinde yerine koyarsak

$$k = R \sqrt{\frac{R - 2M}{2M(a^2 + 1)}}, \quad (4.11)$$

$$M = \frac{R^3}{2(k^2(a^2 + 1) + R^2)}, \quad (4.12)$$

şeklinde bulunur. Ayrıca (4.3) sınır koşulunu (3.35) denkleminde yerine konursa

$$A = \frac{R^2 - 4k^2(a^2 + 1)}{-4k^2(a^2 + 1)} \sqrt{\frac{k^2(a^2 + 1)}{R^2 + k^2(a^2 + 1)}}, \quad (4.13)$$

$$B = \frac{1}{2\sqrt{R^2 + k^2(a^2 + 1)}}, \quad (4.14)$$

şeklinde elde edilir. Dolayısıyla (4.13) ve (4.14) eşitlikleri (3.35), (3.36) ve (3.37) çözümleri

$$8\pi P_r = \frac{R^2 - r^2}{(4k^2(a^2 + 1) - R^2 + r^2)(k^2(a^2 + 1) + r^2)}, \quad (4.15)$$

$$8\pi P_t = \frac{k^2(a^2 + 1)(R^2 + r^2)}{(4k^2(a^2 + 1) - R^2 + r^2)}, \quad (4.16)$$

$$\Delta = \frac{(k^2(a^2 + 1) - R^2 + r^2)r^2}{8\pi(4k^2(a^2 + 1) - R^2 + r^2)(k^2(a^2 + 1) + r^2)^2}, \quad (4.17)$$

şeklinde ifade edilerek bütün fiziksel nicelikler yıldızın kütlesi, yarıçapı ve geometrik sabiti cinsinden bulunmuş olur.

4.2. Modellerin fiziksel özellikleri

Modelin geçerliliği ancak fiziksel koşullarla sınılandıktan sonra mümkün olacaktır. Fiziksel nicelikler, küresel izotropik ideal akışkan modelinde sadece M ve R 'ye bağlıyken,

küresel anizotropik akışkan modelinde M , R ve a 'ya bağlıdır. Bu sabitlere verilecek değerlerin gözlemlenmiş nötron yıldızlarına ait olması en makul yaklaşım olacaktır. Kütle ve yarıçap için, Rawls vd. (2011) tarafından elde edilen, CEN X-3, LMC X-4, SMC X-4 ve Her X-1 isimli nötron yıldızlarının değerleri kullanılacaktır. Bu değerler Çizelge 4.2.'de verilmiştir. Ayrıca a sabiti analiz boyunca 0.5 olarak seçilecektir.

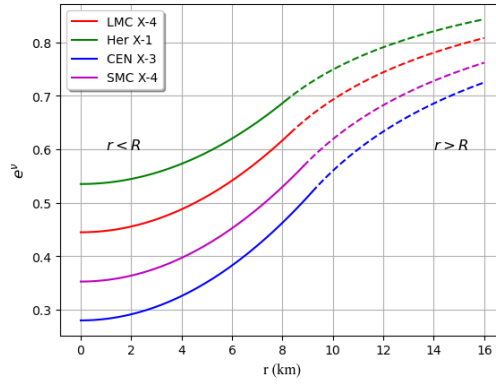
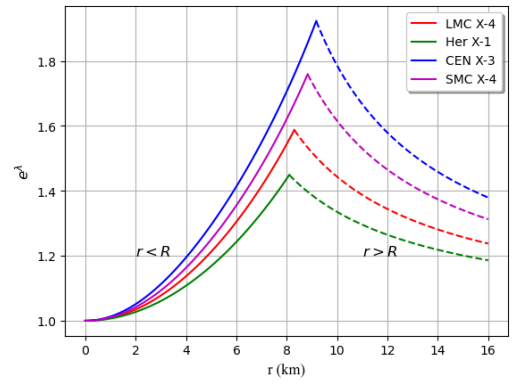
4.2.1. Küresel izotropik ideal akışkan modelinin fiziksel özellikleri

Seçilen nötron yıldızlarının kütle ve yarıçap verileri ile modele bağlı olarak hesaplanan merkezdeki basıncın yoğunluğa oranı, kompaktlık faktörü ve yüzeyde kırmızıya kayma değerleri Çizelge 4.2.'de verilmiştir.

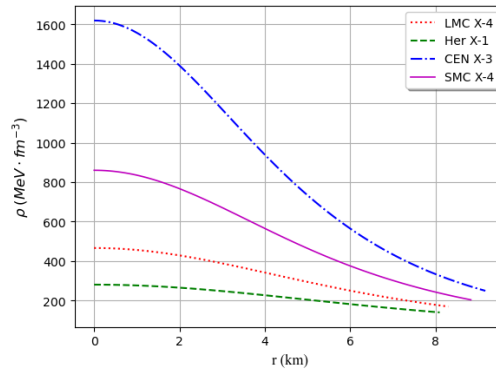
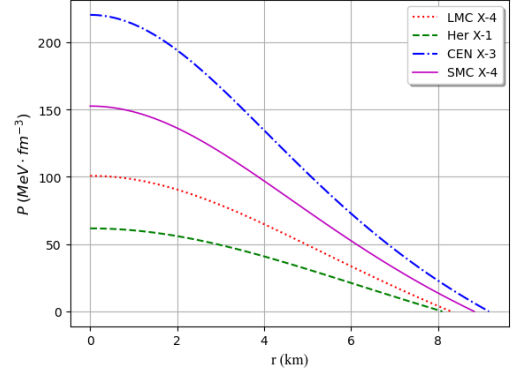
Çizelge 4.2. Küresel izotropik ideal akışkan modeline göre nötron yıldızlarına ait fiziksel nicelikler.

Yıldızın Adı	$M(M_{\odot})$	$R(km)$	$\frac{P_c}{\rho_c}$	$u_{(r=R)}$	$z_{(r=R)}$
CEN X-3	1.49	9.17	0.19	0.32	0.39
LMC X-4	1.29	8.83	0.13	0.23	0.26
SMC X-4	1.04	8.30	0.16	0.28	0.33
Her X-1	0.85	8.1	0.10	0.18	0.20

Çizelge 4.2.'de verilen nötron yıldızlarına ait kütle ve yarıçap değerleri (4.7) ve (4.8)'deki denklemlerde yerine konulduğunda metrik potansiyellerin, yoğunluğun ve basıncın yarıçapa bağlı fonksiyonlar elde edilir. Şekil 4.1.'de metrik potansiyellerin yarıçapla değişimi verilmiştir. Buna göre her iki metrik potansiyel de yarıçapla artmaktadır. e^{ν} metrik potansiyeli yıldızın merkezinde sıfırdan farklı pozitif değerler alırken, e^{λ} ise 1 değerini almıştır. Ayrıca yıldızın yüzeyinde yani $r = R$ 'de her iki metrik potansiyeli de (4.1)'de verilen karelik çözümü ile uyumaktadır.

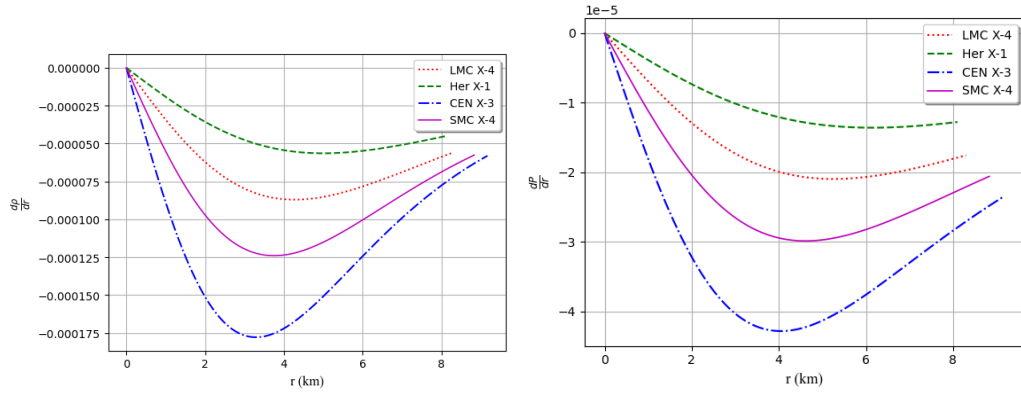
(a) e^ν -r grafiği.(b) e^λ -r grafiği.**Şekil 4.1.** Metrik potansiyellerin yarıçap ile değişimi.

Modele ait yoğunluk ve basıncın yarıçapa bağlı değişimi Şekil 4.2.'de verilmiştir. Grafiklerinden bu fiziksel niceliklerin yıldızın merkezinde maksimum değer aldığı görülmektedir. Yıldızın yüzeyinde yoğunluk sıfırdan farklı minimum bir değere ulaşmaktadır. Basınç beklenildiği gibi yüzeyde sıfırdır. Ayrıca $\frac{dP}{dr}$ ve $\frac{d\rho}{dr}$ ifadelerinin yarıçapa bağlı değişimi Şekil 4.3.'de verilmiştir. Bu grafikler yoğunluk ve basınç değerlerinin yarıçap boyunca azalış gösterdiği görülmektedir.

(a) ρ -r grafiği.

(b) P-r grafiği.

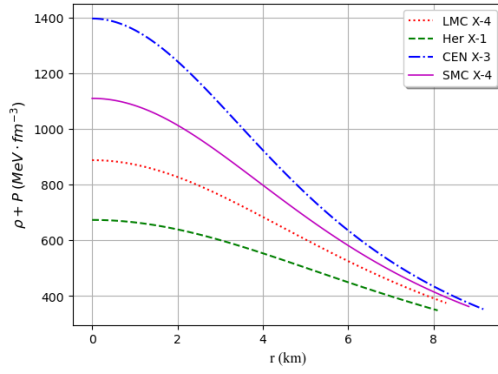
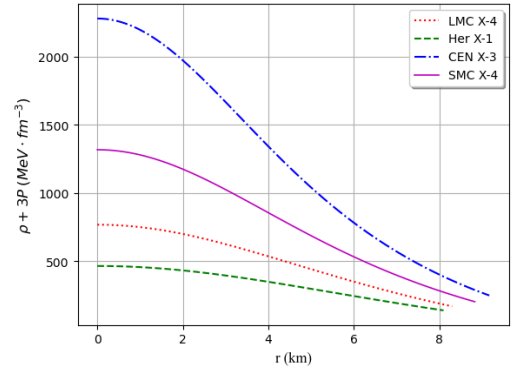
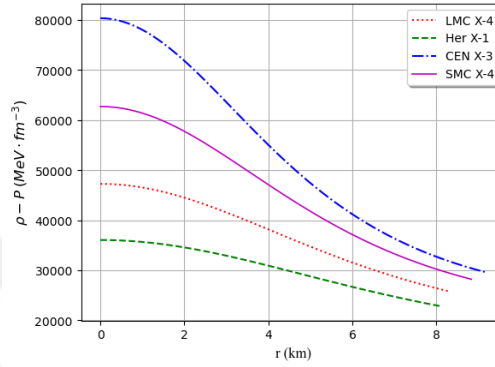
Şekil 4.2. Basınç ve yoğunluğun yarıçap ile değişimi.

(a) $\frac{dP}{dr}$ -r grafiği.(b) $\frac{d\rho}{dr}$ -r grafiği.**Şekil 4.3.** $\frac{dP}{dr}$ ve $\frac{d\rho}{dr}$ ifadelerinin yarıçapa bağlı değişimleri

(2.16)'da verilen Zeldovich koşulundaki $r = 0$ 'daki basınç ve yoğunluk değerlerinin oranları Çizelge 4.2. verilmiştir. Burada görüldüğü gibi bu oranlar Zeldovich koşulunu sağlamaktadır. (4.9) ve (4.10) denklemlerinden (2.19)'da verilen güçlü enerji koşulu ve (2.20)'de verilen baskın enerji koşullarını uygularsak

$$\begin{aligned}\rho + P &= \frac{3M(R - M)(R^3 - 3MR^2 + Mr^2)}{4\pi R(R^3 - 3MR^2 + 2Mr^2)^2}, \\ \rho + 3P &= \frac{3M(R^5(R - 3M) + 2M^2r^2(2R^2 - r^2))}{4\pi R^3(R^3 - 3MR^2 + 2Mr^2)^2}, \\ \rho - P &= \frac{3M(R^5(R - 5M) + 2MR^2r^2(R - 3M) + 2M^2(3R^4 + r^4))}{4\pi R^3(R^3 - 3MR^2 + 2Mr^2)^2},\end{aligned}\quad (4.18)$$

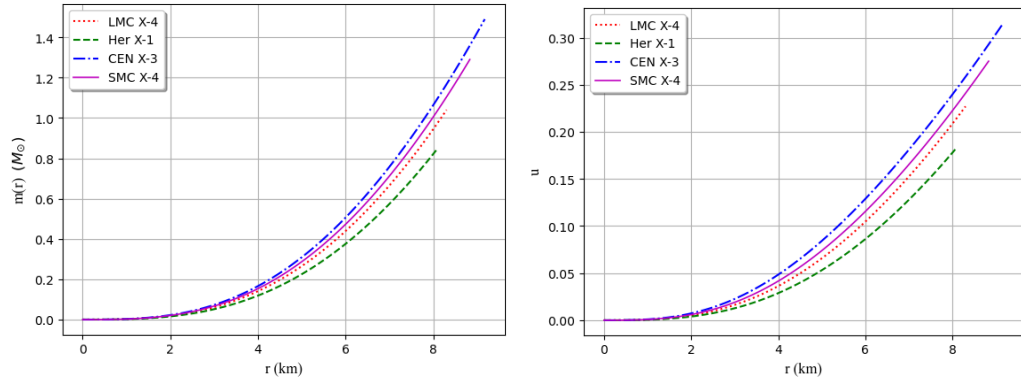
ifadeleri elde edilir. Bu ifadelerin yarıçapa bağlı değişimleri Şekil 4.4.'de verilmiştir. Bu grafikler sıfırdan farklı pozitif değer olarak, güçlü ve baskın enerji koşulları sağlanmaktadır. Ayrıca güçlü enerji koşulu, sıfır enerji koşulunu da barındırdığı için sıfır enerji koşulu da sağlanmıştır. Şekil 4.2. (a) ile Şekil 4.4. (a)'daki grafikleri sıfırdan farklı pozitif değer olarak (2.18)'deki zayıf enerji koşulu sağlanmaktadır.

(a) $(\rho + P)$ -r grafiği.(b) $(\rho + 3P)$ -r grafiği.(c) $(\rho - P)$ -r grafiği.**Şekil 4.4.** Enerji koşullarının yarıçap ile değişimi

(2.22)'de verilen kütle fonksiyonu ve (2.23)'de verilen kompaktlık faktörü bu modele göre hesaplandığında sırasıyla

$$\begin{aligned} m(r) &= \frac{Mr^3(2R^3 - 3MR^2 + Mr^2)}{2R^3(R^3 - 3MR^2 + 2Mr^2)}, \\ u(r) &= \frac{Mr^3(2R^3 - 3MR^2 + Mr^2)}{2R^4(R^3 - 3MR^2 + 2Mr^2)}, \end{aligned} \quad (4.19)$$

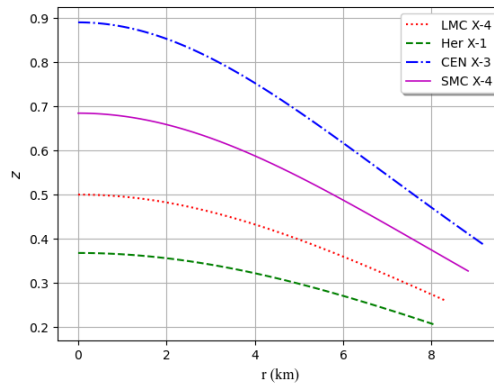
şeklinde bulunur. Bu niceliklerin yarıçap ile değişimleri Şekil 4.5. ile verilmiştir.

(a) $m(r)$ - r grafiği.(b) u - r grafiği.**Şekil 4.5.** Kütle fonksiyonu ve kompaktlık faktörünün yarıçapa bağlı değişimi.

Şekil 4.5.(a)'da kütle fonksiyonunun yarıçap ile değişimi görülmektedir. Yıldızın yüzeyinde kütle değerine ulaşıldığı görülmektedir. Şekil 4.5.(b)'de kompaktlık faktörünün değişimi görülmektedir. Kompaktlık faktörünün yüzeydeki değeri kütlelerin yarıçapa oranını verecektir. Çizelge 4.2.'de verilen bu değerler (2.21)'deki Buchdhal koşuluna sağlamıştır. (2.24)'de verilen kırmızıya kayma koşulunu modele uygulayacak olursak

$$z = \sqrt{\frac{R^3}{(R^3 + Mr^2 - 3MR^2)}} - 1, \quad (4.20)$$

şeklinde bulunur.

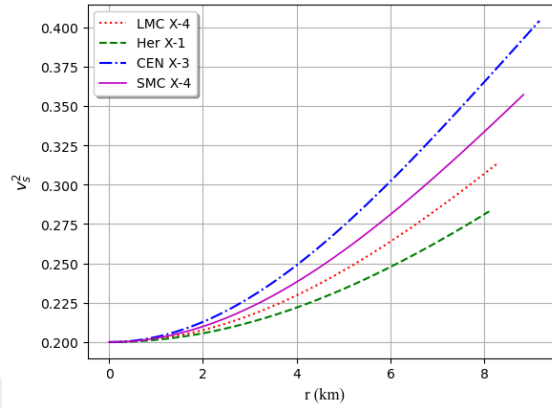
**Şekil 4.6.** Kırmızıya kayma miktarının yarıçap ile değişimi.

Kırmızıya kayma miktarının yarıçap ile değişimi Şekil 4.6.'da verilmiştir. Yıldızın iç bölgesinde kırmızıya kayma miktarı (2.24)'de belirtilen sınıra uyduğu görülmektedir. Ayrıca yıldızın yüzeyi için elde edilen kırmızıya kayma değerleri Çizelge 4.2.'de verilmiştir.

Denklem (2.26) ile verilen nedensellik koşulu hesaplandığında

$$v_s^2 = \frac{R^3 - 3MR^2 + 2Mr^2}{5R^3 - 15MR^2 + 2Mr^2}, \quad (4.21)$$

şeklinde bulunur. Nedensellik koşulunun yarıçapa bağlı değişimi Şekil 4.7.'de görülmektedir. Yarıçap boyunca $v_s^2 < 1$ nedensellik koşulu sağlandığı görülmektedir.



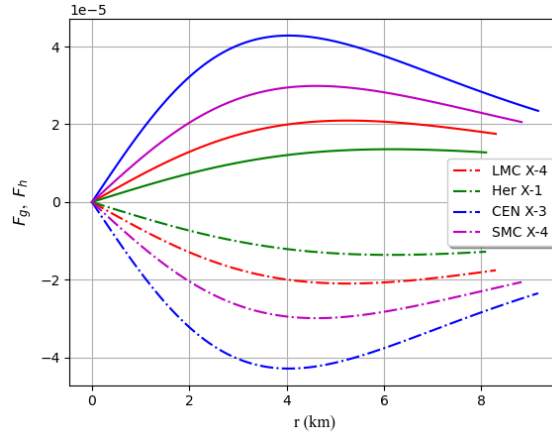
Şekil 4.7. Nedensellik koşulunun yarıçapa bağlı değişimi.

Radyal koordinat boyunca nedensellik koşulu verilen sınırın altında kalmaktadır. İdeal bir akışkan içerisindeki hidrostatik denge gravitasyonel kuvvet ile hidrostatik kuvvet arasında olmaktadır. Sırasıyla (2.31) ve (2.32) denklemleri ile verilen ifadeleri ele alınan model için hesaplandığında

$$F_g = - \frac{3M^2 r (R - M)}{4\pi R (R^3 - 3MR^2 + 2Mr^2)^2}, \quad (4.22)$$

$$F_h = \frac{3M^2 r (R - M)}{4\pi R (R^3 - 3MR^2 + 2Mr^2)^2},$$

şeklinde bulunur.

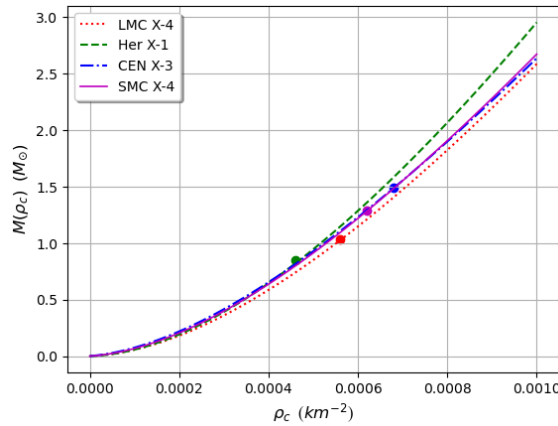


Şekil 4.8. F_g ve F_h kuvvetlerinin yarıçap ile değişimi.

Hidrostatik denge için (2.29)'daki eşitliğin radyal koordinat boyunca sağlanması gerekir. Şekil 4.8.'de F_g ve F_h kuvvetlerinin yıldızın merkezinden yüzeyine kadar birbirilerini dengeledikleri görülmektedir. Yıldızın kütlesini, merkezindeki yoğunluğunun bir fonksiyonu olarak ifade etmek için (4.19)'daki kütle fonksiyonunu (3.19)'un $r = 0$ 'daki ifadesi cinsinden yazılacak olursa

$$\begin{aligned}
 M(\rho_c) &= \frac{4\pi R^3 \rho_c (8\pi R^3 \rho_c (3M - R) - 3M^2)}{3(3M(3M - 2R) - 16\pi R^3 M \rho_c)}, \\
 \frac{\partial M(\rho_c)}{\partial \rho_c} &= \frac{4\pi R^3 (128\pi^2 R^7 \rho_c^2 + 96\pi R^5 \rho_c - 27M^3 - 432\pi M R^4 \rho_c)}{3M(16\pi R^3 \rho_c - 9M + 6R)^2} \\
 &\quad + \frac{4\pi R^3 (432\pi M^2 R^3 \rho_c + 18M^2 R - 384\pi^2 M R^6 \rho_c^2)}{3M(16\pi R^3 \rho_c - 9M + 6R)^2} > 0,
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

şeklinde bulunur.

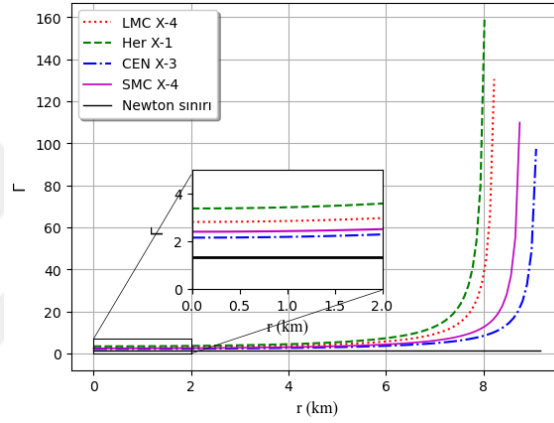


Şekil 4.9. Kütlenin, yıldız merkezindeki yoğunluğa bağlı değişimi.

Kütlenin, merkezdeki yoğunluk değerine bağlı değişimi Şekil 4.9.'da verilmiştir. Grafik içerisinde nokta ile gösterilen yerler modele bağlı bulunan ρ_c ile ona karşılık gelen kütle değerlerini göstermektedir. Görüldüğü gibi merkezdeki yoğunluk değerinin yıldızın sahip olabileceği kütle miktarını etkilemektedir. Bu ilişki (2.35)'de belirtildiği gibi pozitif değerler almaktadır. (2.36)'da verilen yıldızın relativistik adyabatik indeks değerini hesaplayacak olursak

$$\Gamma = \frac{2R^2 (R^3 (R - 2M) + M^2 (5r^2 - 3R^2) - MRr^2)}{M (R^2 - r^2) (5R^3 - 15MR^2 + 2Mr^2)}, \quad (4.24)$$

şeklinde bulunur.



Şekil 4.10. Relativistik adyabatik indeksin yarıçap ile değişimi.

Relativistik adyabatik indeks değerinin yarıçap ile değişimi Şekil 4.10.'da görülmektedir. Merkezden itibaren yüzeye kadar $\Gamma > 4/3$ koşulu ile uyum içersindedir.

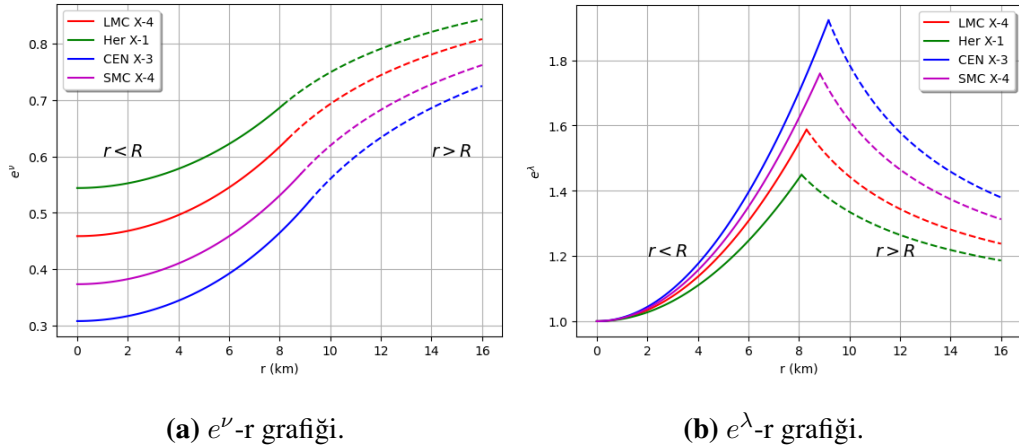
4.2.2. Küresel anizotropik akışkan modelinin fiziksel özellikleri

Bu kesimde anizotropik enerji momentum tensörü ile modellenen kompakt yıldızların fiziksel özellikleri tartışılacaktır. Gözlemsel olarak elde edilen nötron yıldızlarının kütle ve yarıçap değerleri Çizelge 4.3.'de verilmiştir.

Çizelge 4.3. Küresel anizotropik akışkan modeline göre nötron yıldızlarına ait fiziksel nicelikler.

Yıldızın Adı	$M (M_{\odot})$	$R (km)$	$k (km)$	$\frac{Pr_c}{\rho_c}$	$u(r=R)$	$z(r=R)$
CEN X-3	1.49	9.17	8.54	0.10	0.24	0.39
LMC X-4	1.29	8.3	9.7	0.06	0.19	0.26
SMC X-4	1.04	8.83	9.07	0.08	0.22	0.33
Her X-1	0.85	8.1	10.81	0.04	0.16	0.20

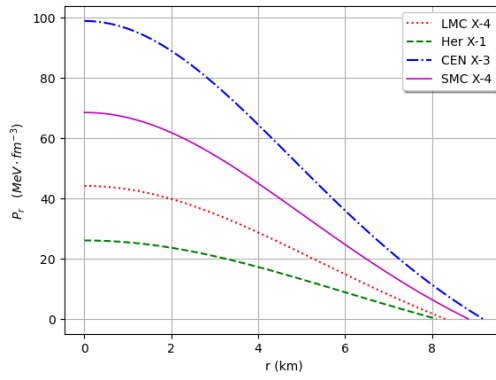
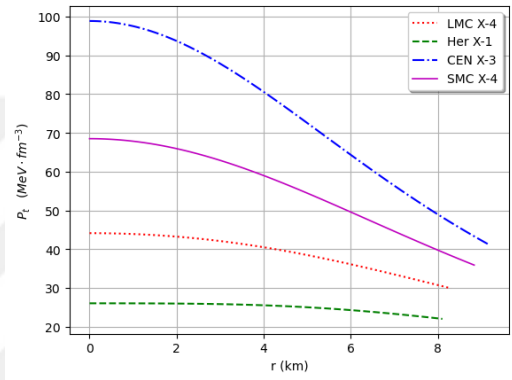
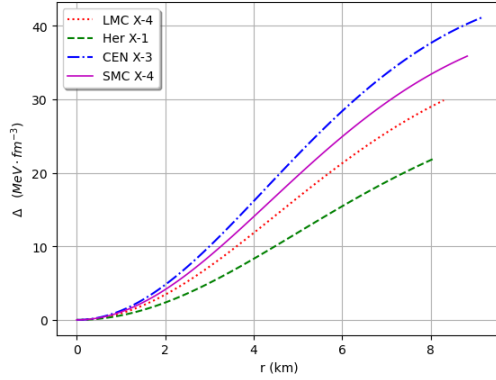
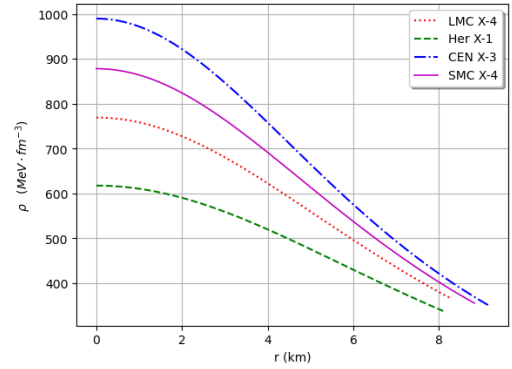
Ele alınan yıldızların kütle ve yarıçap değerleri (4.11) denkleminde yerine konulursa hesaplanan k değeri Çizelge 4.3.'de verilmiştir. Ayrıca yıldızların kütle ve yarıçap değerleri sırasıyla (3.32), (3.33), (3.34), (4.15) ve (4.16)'daki denklemlerde yerine konulduğunda metrik potansiyellerin, yoğunluğun, radyal ve teğetsel basıncın yarıçapa bağlı fonksiyonları elde edilir. Şekil 4.11.(a)'da e^{ν} metrik potansiyeli merkezde pozitif değer alırken yüzeye doğru artış göstermiştir. Şekil 4.11.(b)'de e^{λ} metrik potansiyeli merkezde 1 değerini alırken yüzeye doğru artmaktadır. Her iki metrik potansiyeli de $(r = R)$ 'de (4.1) karadelik çözümü ile uyum içersindedir.



Şekil 4.11. Metrik potansiyellerin yarıçap ile değişimi.

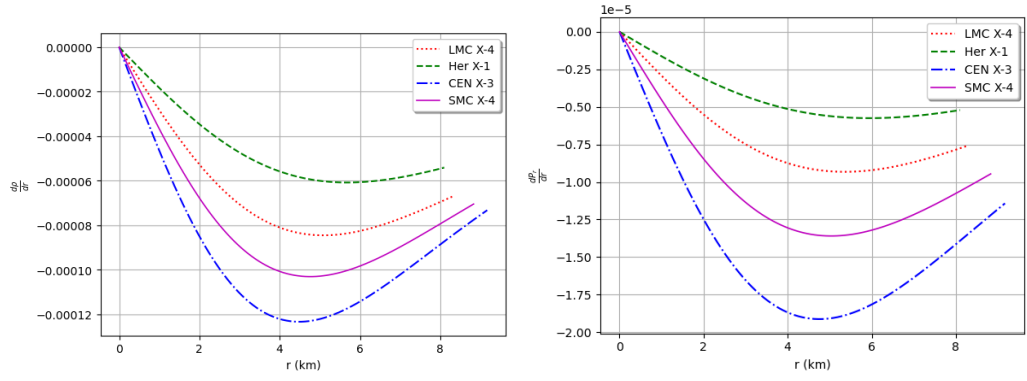
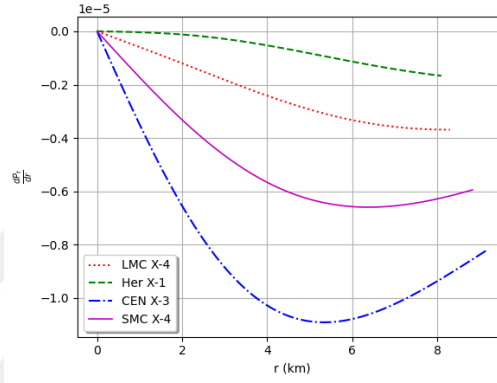
Modelin ortaya koyduğu yoğunluk, radyal ve teğetsel basınç ile anizotropik faktörün yarıçapa bağlı değişimleri Şekil 4.12.'de verilmiştir. Radyal basınç Şekil 4.12. (a)'da görüldüğü gibi radyal basınç yıldızın çekideğinde en büyük değerine alırken yıldızın yüzeyine doğru azalmaktadır. Ayrıca yıldızın yüzeyinde yani $r = R$ 'de beklenildiği gibi sıfır

olmaktadr. Şekil 4.12. (b)'deki teğetsel basıncın değişimi ise benzer şekilde maksimum bir değerden başlayarak yüzeye doğru azalma göstermiş, $r = R$ 'de ise sıfırdan farklı minimum bir değer almıştır. Şekil 4.12. (c) grafiği anizotropik faktörü ise sıfırdan başlayarak yıldızın yüzeyinde pozitif bir maksimum değere ulaşmıştır. Bu yıldız merkezindeki radyal ve teğetsel basınç değerlerin birbirine eşit olduğunu ve yıldızın yüzeyine doğru teğetsel basıncın radyal basınca göre daha fazla arttığını göstermektedir. Ayrıca yıldızın yoğunluğu merkezde maksimum bir değer alırken yüzeye doğru ilerledikçe azalmakta ve $r = R$ 'de minimum değere ulaşmaktadır.

(a) P_r -r grafiği.(b) P_t -r grafiği.(c) Δ -r grafiği.(d) ρ -r grafiği.

Şekil 4.12. P_r , P_t , Δ ve ρ niceliklerinin yarıçap ile değişimi.

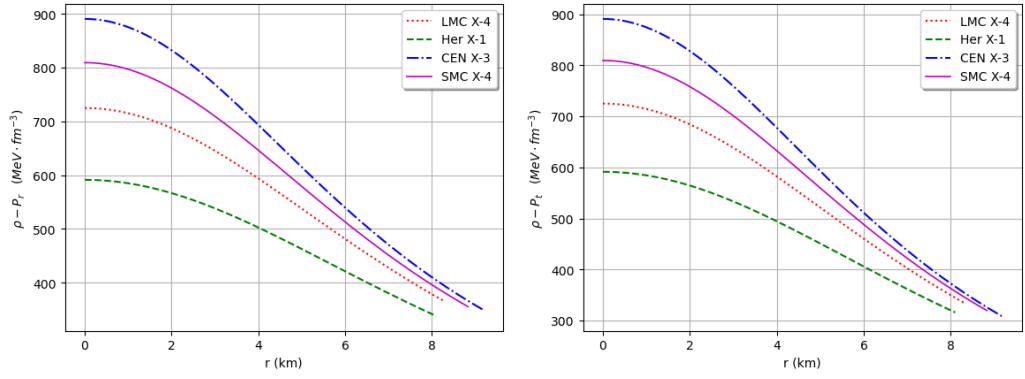
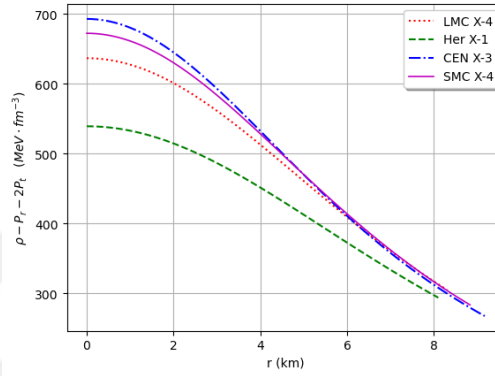
Şekil 4.13.'de $\frac{d\rho}{dr}$, $\frac{dP_r}{dr}$ ve $\frac{dP_t}{dr}$ ifadelerinin yarıçapa bağlı değişimleri verilmiştir. Bu grafiklerden görüldüğü gibi yoğunluk, radyal ve teğetsel basınçlar yarıçap boyunca azalış göstermiştir. (2.16)'de verilen Zeldovich sınırı için $r = 0$ 'daki radyal basınç ve yoğunluk değerlerinin oranları Çizelge 4.3. içinde hesaplamıştır. Buna göre elde edilen değerler Zeldovich sınırına uygundur. (3.34), (4.15) ve (4.16) denklemlerini kullanarak (2.19)'da

(a) $\frac{d\rho}{dr}$ -r grafiği.(b) $\frac{dP_r}{dr}$ -r grafiği.(c) $\frac{dP_t}{dr}$ -r grafiği**Şekil 4.13.** $\frac{d\rho}{dr}$, $\frac{dP_r}{dr}$ ve $\frac{dP_t}{dr}$ ifadelerinin yarıçapa bağlı değişimi.

verilen enerji koşullarını uygularsak

$$\begin{aligned}\rho - P_r &= \frac{6k^4(a^4 + 2a^2 + 1) + 2k^2(a^2 + 1)(2r^2 - R^2) + r^2(r^2 - R^2)}{4\pi(4k^2(a^2 + 1) - R^2 - r^2)(k^2(a^2 + 1) + r^2)^2}, \\ \rho - P_t &= \frac{12k^4(a^4 + 2a^2 + 1) + 2k^2(a^2 + 1)(3r^2 - 2R^2) + r^2(r^2 - R^2)}{8\pi(4k^2(a^2 + 1) - R^2 - r^2)(k^2(a^2 + 1) + r^2)^2}, \\ \rho - P_r - 2P_t &= \frac{6k^4(a^4 + 2a^2 + 1) + 3k^2(a^2 + 1)(r^2 - R^2)}{4\pi(4k^2(a^2 + 1) - R^2 - r^2)(k^2(a^2 + 1) + r^2)^2},\end{aligned}\quad (4.25)$$

ifadeleri elde edilir. Bu modele ait yoğunluk, radyal basınç ve teğetsel basınç nicelikleri pozitif değerler aldığı için (4.25)'deki ifadeler sıfır, zayıf ve dominant enerji koşullarını da sağlamaktadır. Bu niceliklerin yarıçapa bağlı değişimi ise Şekil 4.14.'de verilmiştir.

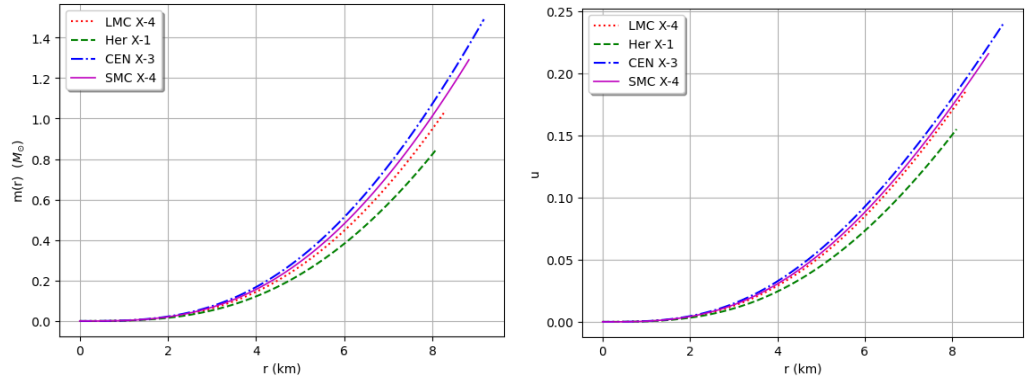
(a) $(\rho - P_r)$ -r grafiği.(b) $(\rho - P_t)$ -r grafiği.(c) $(\rho - P_r - 2P_t)$ -r grafiği.**Şekil 4.14.** Enerji koşullarının yarıçapa bağlı değişimi.

Şekil 4.14.'de güçlü enerji koşulunun yıldızın yarıçapı boyunca pozitif değerlerde kaldığı görülmektedir. Bu aynı zamanda sıfır, zayıf ve dominant enerji koşullarınında sağlandığı anlamına gelmektedir. Kompakt yıldızlara ait kütle fonksiyonunu (2.22) denkleminde, kompakt faktörü ise (2.23) denklemi ile hesaplanırsa sırasıyla

$$m(r) = \frac{r^3}{2(k^2(a^2 + 1) + r^2)}, \quad (4.26)$$

$$u(r) = \frac{r^3}{2R(k^2(a^2 + 1) + r^2)},$$

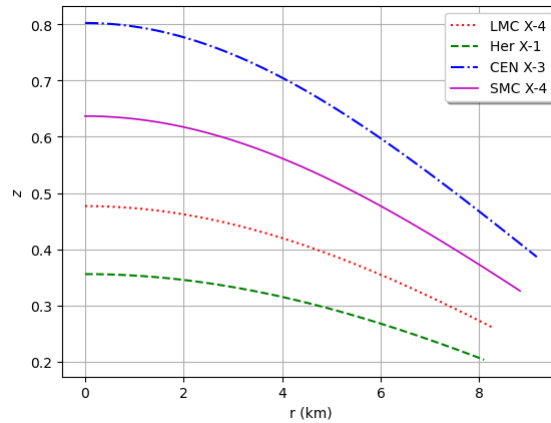
şeklinde bulunur. Bu ifadelerin yarıçap ile değişimleri Şekil 4.15.'de verilmiştir.

(a) $m(r)$ - r grafiği.(b) u - r grafiği.**Şekil 4.15.** Kütle fonksiyonu ve kompaktlık faktörünün yarıçapa bağlı değişimi.

Şekil 4.15. (a)'da yıldızın kütle dağılımı yüzeye yaklaştıkça artmaktadır. Şekil 4.15. (b)'de kompaktlık faktörünün $r = R$ 'de maksimum değere ulaştığı görülmektedir. Bu değerler Çizelge 4.3.'de verilmiştir. Kompaktlık faktörü değerleri (2.21) ile verilen Buchdhal sınırı içerisinde kalmaktadır. Kırmızıya kayma miktarını bulmak için denklem (2.24) kullanırsa

$$z = \frac{4k\sqrt{k^2(a^2 + 1)(a^2 + 1)}}{4k^2(a^2 + 1) - R^2 + r^2} - 1, \quad (4.27)$$

ifadesini elde ederiz. Kırmızıya kayma miktarının yarıçap ile değişimi Şekil 4.16.'da verilmiştir.

**Şekil 4.16.** Kırmızıya kayma miktarının yarıçapa bağlı değişimi.

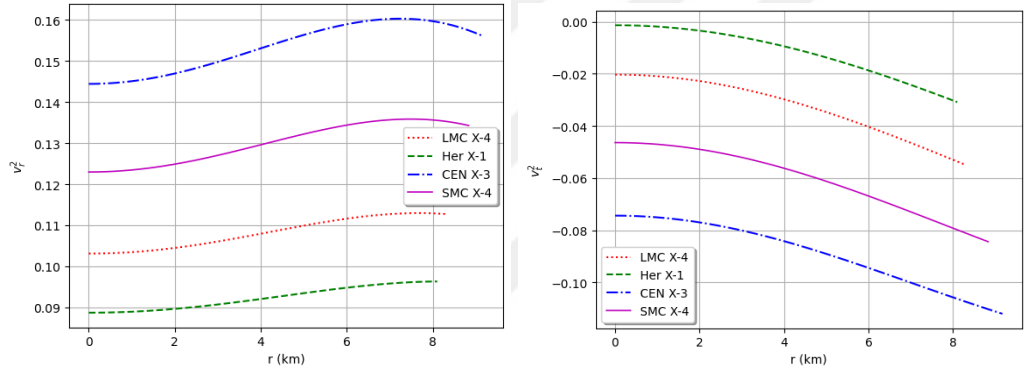
Şekil 4.16.'da görüldüğü gibi yıldızın radyal koordinatı boyunca, (2.25)'de belirtilen kırmızıya kayma sınırı ile uyum göstermektedir. Yüzeydeki kırmızıya kayma miktarları

ise Çizelge 4.3. içerisinde verilmiştir. Nedensellik koşulu için (2.27)'de verilen denklemleri uygulayacak olursak

$$v_r^2 = \frac{(4k^4(a^4 + 2a^2 + 1) + 4k^2R^2(a^2 + 1) - R^4 + 2R^2r^2 - r^4)}{(4k^2(a^2 + 1) - R^2 + r^2)^2} \cdot \frac{(k^2(a^2 + 1) + r^2)}{(5k^2(a^2 + 1) + r^2)},$$

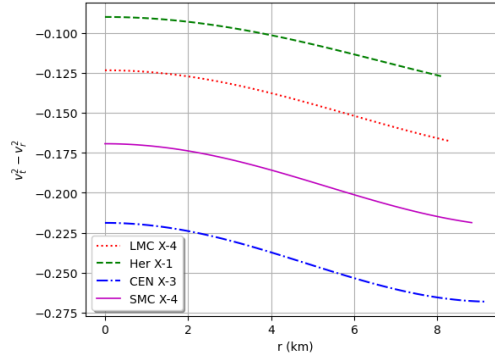
$$v_t^2 = \frac{8k^6(a^6 + 3a^4 + 3a^2 + 1) + k^2(a^2 + 1)(R^4 + 4R^2r^2 - 3r^4)}{(5k^2(a^2 + 1) + r^2)(4k^2(a^2 + 1) - R^2 + r^2)^2} + \frac{R^2r^2(r^2 - R^2) - r^6 - 6k^4R^2(a^4 + 2a^2 + 1)}{(5k^2(a^2 + 1) + r^2)(4k^2(a^2 + 1) - R^2 + r^2)^2}, \quad (4.28)$$

şeklinde bulunur.



(a) v_r^2 -r grafiği.

(b) v_t^2 -r grafiği.



(c) $(v_t^2 - v_r^2)$ -r grafiği.

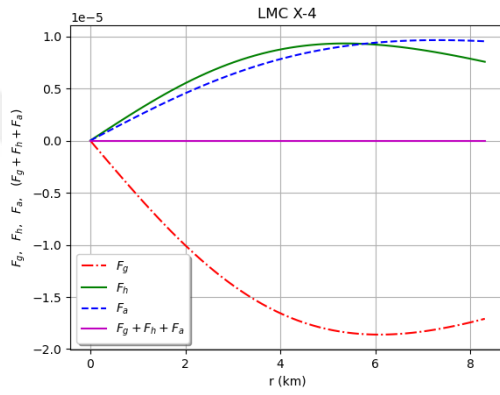
Şekil 4.17. Nedensellik koşullarının yarıçapa bağlı değişimi.

Şekil 4.17. (a) ve (b)'de görüldüğü gibi ses hızı radyal koordinat boyunca $0 < v_r^2 < 1$ ve $-1 < v_t^2 < 0$ aralığında seyretmiştir. Şekil 4.17. (c)'de verilen $v_t^2 - v_r^2$ sonucu ise (2.28)'de verilen kararlı bölge sınırları içerisinde kaldığı görülmektedir.

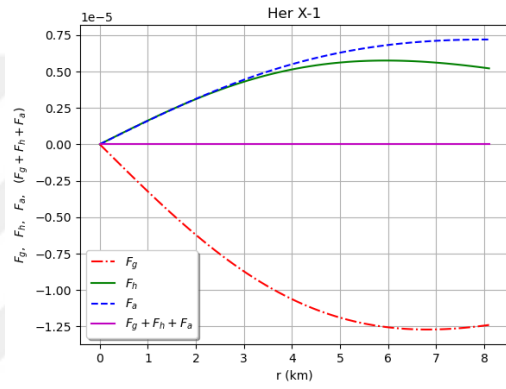
Kompakt yıldıza ait hidrostatik dengeyi görmek için (2.32) verilen F_g , F_h ve F_a nice-likleri hesaplandığında

$$\begin{aligned} F_g &= -\frac{k^2 r (a^2 + 1) (6k^2 (a^2 + 1) - R^2 + 3r^2)}{2\pi (4k^2 (a^2 + 1) - R^2 + r^2)^2 (k^2 (a^2 + 1) + r^2)^2}, \\ F_h &= \frac{r (4k^4 (a^4 + 2a^2 + 1) + 4k^2 R^2 (a^2 + 1) - R^4 + 2R^2 r^2 - R^4)}{4\pi (4k^2 (a^2 + 1) - R^2 + r^2)^2 (k^2 (a^2 + 1) + r^2)^2}, \\ F_a &= \frac{r (2k^2 (a^2 + 1) - R^2 + r^2)}{4\pi (4k^2 (a^2 + 1) - R^2 + r^2) (k^2 (a^2 + 1) + r^2)^2}, \end{aligned} \quad (4.29)$$

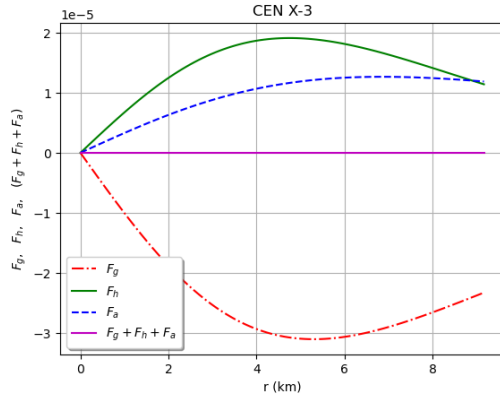
şeklinde bulunur. F_g , F_h , F_a ve bu kuvvetlerin toplamalarının yarıçap ile değişimi Şekil 4.18.'de gösterilmiştir.



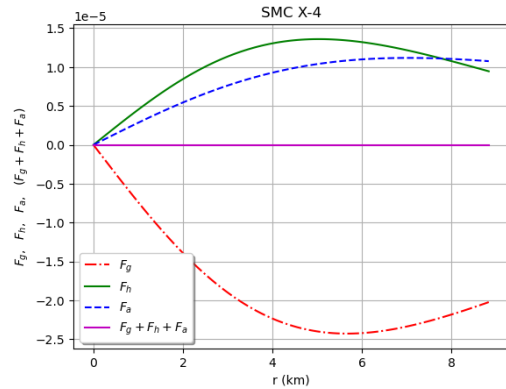
(a) LMC X-4 için F_g -r, F_h -r, F_a -r ve $(F_g + F_h + F_a)$ -r grafiği.



(b) Her X-1 için F_g -r, F_h -r, F_a -r ve $(F_g + F_h + F_a)$ -r grafiği.



(c) CEN X-3 için F_g -r, F_h -r, F_a -r ve $(F_g + F_h + F_a)$ -r grafiği.



(d) SMC X-4 için F_g -r, F_h -r, F_a -r ve $(F_g + F_h + F_a)$ -r grafiği.

Şekil 4.18. F_g , F_h ve F_a kuvvetlerinin ve toplamalarının yarıçap ile değişimleri.

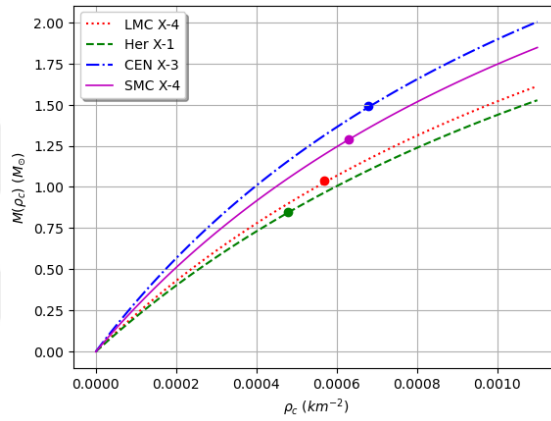
Buna göre hidrostatik dengenin yıldızın merkezinden yüzeyine kadar korunduğu görülmektedir. Anizotropinin oluşturduğu kuvvet hidrostatik kuvvet ile aynı yönlü olup gra-

vitasyonel kuvveti dengelemektedir. Bu durum yıldızın daha kompakt olmasını desteklemektedir. Yıldızın kütlelerini, yıldızın merkezindeki yoğunluk cinsinden elde etmek için (3.34)'ün $r = 0$ 'daki ifadesi denklem (4.26) içerisinde kullanılırsa

$$M_{\rho_c} = \frac{4\pi R^3 \rho_c}{8\pi R^2 \rho_c + 3}, \quad (4.30)$$

$$\frac{\partial M_{(\rho_c)}}{\partial \rho_c} = \frac{12\pi R^3}{(8\pi R^2 \rho_c + 3)^2} > 0,$$

şeklinde bulunur. Böylece ele alınan model (2.35) Harrison-Zeldovich-Novikov koşulu sağlanmaktadır. Kütlelerin merkezdeki yoğunluğa bağlı değişimi Şekil 4.19.'da gösterilmiştir.

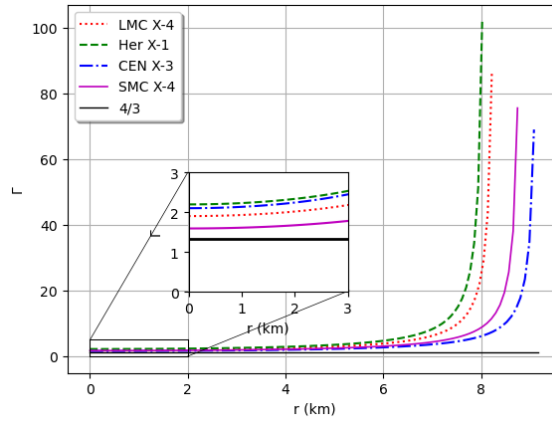


Şekil 4.19. Kütlelerin, yıldız merkezindeki yoğunluğa bağlı değişimi.

Şekil 4.19.'da görüldüğü gibi merkezdeki yoğunluk değerinin yıldızın sahip olabileceği kütle miktarını etkilemektedir. Relativistik adyabatik indeks için (2.36)'daki denklem kullanılırsa

$$\Gamma = \frac{2k^2 (a^2 + 1) (4k^4 (a^4 + 2a^2 + 1) + 4k^2 R^2 (a^2 + 1) - R^4 + 2R^2 r^2 - r^4)}{(5k^2 (a^2 + 1) + r^2) (R^2 - r^2)} \cdot \frac{(6k^2 (a^2 + 1) - R^2 + 3r^2)}{(4k^2 (a^2 + 1) - R^2 + r^2)^2}, \quad (4.31)$$

ifadesine ulaşılır. Relativistik adyabatik indeks değerinin yarıçap ile değişimi Şekil 4.20.'de gösterilmiştir.



Şekil 4.20. Relativistik adyabatik indeks değerinin yarıçap ile değişimi.

Şekil 4.20.'den de görüldüğü gibi yıldız merkezinden yüzeye kadar beklenildiği gibi $\Gamma > 4/3$ koşulunu ile uyumludur.

5. SONUÇLAR

Genel görelilik teorisi; uzay-zamanın yapısı ile madde dağılımı arasındaki karşılıklı ilişkiyi betimlemesi nedeniyle evreni anlama çabamızda önemli bir araçtır. Özellikle gözlemlenen yıldızların iç yapısı hakkında bilgi verecek olması nedeniyle 20. yüzyılın başlarından itibaren kompakt yıldızları açıklama çabasına katkı vermeye başlamıştır. Günümüzde hala çalışmaların sunulduğu güncel bir alandır.

Bu çalışmada Einstein-Hilbert etki integrali kullanılarak alan denklemleri yeniden türetilmiş ve bu denklemlerin geometrik kısmı için statik, küresel simetrik uzay zaman metriği ele alınmıştır. Relativistik kompakt yıldızları modellemek için madde dağılımını ilk önce küresel izotropik ideal bir akışkan olacak biçimde seçilmiştir. Einstein alan denklemleri lineer olmayan diferansiyel denklemlerdir. Alan denklemlerini çözmek için Tolman (1939) tarafından önerilen Tolman IV çözüm önerisi (3.16) dikkate alınmış ve bu denklemlerin analitik çözümü sunulmuştur. Elde edilen modelin fiziksel özellikleri incelenerek geçerliliği literatürde mevcut olan, gözlemsel olarak elde edilmiş kütle, yarıçap verilerine sahip kompakt yıldızlar için test edilmiştir. Modelin tutarlı olması için gereken fiziksel koşullarla uyumlu olduğu gösterilmiştir. Aynı zamanda modelin kararlı bir yapıda olması için gerekli denge koşulları da sağlatılmıştır. Ortaya çıkan modelin fiziksel özellikleri değerlendirilerek gerçekliği test edilmiştir. Modelin fiziksel nicelikleri, ortaya konulmuş olan fiziksel sınır koşulları ile uyumlu sonuçlar vermiştir. Diğer taraftan madde dağılımı için (3.21) denklemi ile verilen anizotropik enerji momentum tensörü dikkate alınarak bir başka kompakt yıldız modeli oluşturulmuştur. Elde edilen Einstein alan denklemlerinin analitik çözümü için iki denkleme ihtiyaç duyulmuştur. Bu iki denklemden ilki Karmarkar koşulundan elde edilen (3.30) denklemdir. Diğeri ise Pandya vd. (2020) çalışmasında önerilen (3.32) denklemdir. Daha sonra (3.24), (3.25) ve (3.26) ile verilen alan denklemlerinden e^ν metrik potansiyeli, yıldızın yoğunluğu ve basıncı radyal koordinatlara bağlı olarak elde edilmiştir. Bu model için de modelin fiziksel özellikleri incelenmiş ve geçerliliği gözlemsel verilerle test edilmiştir. Bu fiziksel niceliklerin gerekli sınır koşulları sağladığı ve kararlı bir yapı oluşturmak için gerekli denge koşullarını sağladığı gösterilmiştir. Ayrıca model anizotropik bir doğaya sahip olduğundan onun anizotropi parametresi detaylı olarak analiz edilmiştir. Anizotropi parametresi beklenildiği

gibi yıldızın çekirdeğinde sıfır iken yarıçapla artış göstermiş ve yıldızın yüzeyinde ise maksimum değere ulaştığı görülmüştür. Sonuç olarak bu çalışmada kompakt bir yıldızı relativistik olarak incelemek için ele aldığımız her iki modelinde kullanılabileceği gösterilmiştir.

Her iki model için elde edilen ve Çizelge 4.2. ile Çizelge 4.3.'de verilen değerlere bakılacak olursa, anizotropik akışkan modeli için bulunan değerlerin ideal akışkan modeli için bulunan değerlerden daha küçük olduğu görülmektedir. Anizotropik model, nötron yıldızların (2.21)'deki kompaktlık sınırına ideal modeldeki kadar yakın olmadığını söyleyerek daha kompakt yıldızların olabileceğini öngörmektedir.

Bu çalışmada madde dağılımını tanımlamak için yoğunluk ve basınç parametreleri seçilmiştir. Relativistik kompakt bir yıldız için oluşturulacak modelin daha gerçekçi olması için maddeye dair daha fazla parametrenin eklenmesi gerekmektedir. Ancak eklenen parametrelerin sayısı arttıkça alan denklemlerine analitik çözümler bulmakta zorlaşmaktadır.

6. KAYNAKLAR

- Abreu, H. and Hernández, H. and Núñez, L.A. 2007. Sound speeds, cracking and the stability of self-gravitating anisotropic compact objects. *Classical and Quantum Gravity*. IOP Publishing. 24(18):4631.
- Anderson, W. Über die Grenzdichte der Materie und der Energie. 1929. *Zeitschrift für Physik*. Springer. 56(11):851-856.
- Barreto, W. Exploding radiating viscous spheres in general relativity. *Astrophysics and space science*. Springer. 201:191-201.
- Barreto, W and Rojas, S. 1992. An equation of state for radiating dissipative spheres in general relativity. *Astrophysics and space science*. Springer. 193:201-215.
- Bayin S.Ş. 1982. Anisotropic fluid spheres in general relativity. *Physical Review D*. American Physical Society. 26(6):1262.
- Bombaci, I. 1996. The maximum mass of a neutron star. *Astronomy and Astrophysics*. 305:871.
- Bondi, H. 1964. Massive spheres in general relativity. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*. The Royal Society London. 282(1390):303-317.
- Bonolis, L. 2017. Stellar structure and compact objects before 1940: Towards relativistic astrophysics. *The European Physical Journal H*. 42:311–393.
- Bowers, R.L. and Liang, E.P.T. 1974. Anisotropic spheres in general relativity. *Astrophysical Journal*. 188:657.
- Böhmer, C.G. and Harko, T. 2006. Bounds on the basic physical parameters for anisotropic compact general relativistic objects. *Classical and Quantum Gravity*. IOP Publishing. 23(22):6479.
- Buchdahl, H.A. 1959. General relativistic fluid spheres. *Physical Review*. American Physical Society. 116(4):1027.

- Canuto, V. 1973. Solvay Conf. on Astrophysics and Gravitation. Brussels. Addison Wesley
- Carroll, S. 2004. Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity.
- Chandrasekhar, S. 1931. XLVIII. The density of white dwarf stars. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*. Taylor & Francis. 11(70):592-596.
- Dalarsson, M. and Dalarsson, N. 2015. Tensors, relativity, and cosmology. Academic Press.
- Dev, K. and Gleiser, M. 2002. Anisotropic stars: exact solutions *General relativity and gravitation*. Springer. 34:1793-1818.
- Florides, P.S. 1974. A new interior Schwarzschild solution. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*. The Royal Society London. 337(1611):529-535.
- Fowler, R.H. 1926. On Dense Matter. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 87:114-122.
- Glendenning, N.K. 2012. Compact stars: Nuclear physics, particle physics and general relativity. Springer Science & Business Media.
- Harrison, B.K. and Thorne, K.S. and Wakano, M. and Wheeler, J.A. 1965. Gravitation Theory and Gravitational Collapse. University of Chicago Press.
- Herrera, L. 1992. Cracking of self-gravitating compact objects. *Physics Letters A*. Elsevier. 165(3):206-210.
- Herrera, L. 2020. Stability of the isotropic pressure condition. *Physical Review D*. American Physical Society. 101(10):104024.
- Herrera, L. and Santos, N.O. 1995. Jeans mass for anisotropic matter. *Astrophysical Journal*. 483:308-313.

- Jasim, M.K. and Deb, D. and Ray, S. and Gupta, Y.K. and Chowdhury, S.R. 2018. Anisotropic strange stars in Tolman–Kuchowicz spacetime. *The European Physical Journal C*. Springer. 78(7):603.
- Karmarkar, K.R. 1948. Gravitational metrics of spherical symmetry and class one. *Proceedings of the Indian Academy of Sciences-Section A*. Springer. 27:56-60.
- Kippenhahn, R. and Weigert, A. and Weiss, A. 2012. Stellar Structure and Evolution. Springer Berlin Heidelberg.
- Lemaître, G. 1937. L’Univers en Expansion. *Publications du Laboratoire d’Astronomie et de Geodesie de l’Universite de Louvain*. 10:01-19.
- Letelier, P.S. 1980. Anisotropic fluids with two-perfect-fluid components. *Physical Review D*. American Physical Society. 22(4):807.
- Mak, M.K. and Harko, T. 2003. Anisotropic stars in general relativity. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. The Royal Society. 459(2030):393-408.
- Maurya, S.K. and Banerjee, A. and Hansraj, S. 2018. Role of pressure anisotropy on relativistic compact stars. *Physical Review D*. American Physical Society. 97(4):44022.
- Morales, E. and Tello-Ortiz, F. 2018. Compact anisotropic models in general relativity by gravitational decoupling. *The European Physical Journal C*. Springer. 78:01-12.
- Moustakidis, C.C. 2017. The stability of relativistic stars and the role of the adiabatic index. *General Relativity and Gravitation*. Springer. 49:01-21.
- Oppenheimer, J.R. and Volkoff, G.M. 1939. On massive neutron cores. *Physical Review*. American Physical Society. 55(4):374.
- Pandya, D.M. and Thakore, B. and Goti, R.B. and Rank, J.P. and Shah, S. 2020. Anisotropic compact star model satisfying Karmarkar conditions. *Astrophysics and Space Science*. Springer. 365(2):30.

- Rawls, M.L. and Orosz, J.A. and McClintock, J.E. and Torres, M.A.P. and Bailyn, C.D. and Buxton, M.M. 2011. Refined Neutron Star Mass Determinations for Six Eclipsing X-Ray Pulsar Binaries. *Astrophysical Journal*. 730(1):25.
- Ruderman, M. 1972. Pulsars: Structure and Dynamics. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*. 10(1):427-476.
- Sawyer, R.F. 1972. Condensed π - phase in neutron-star matter. *Phys. Rev. Lett.*. American Physical Society. 29(6):382-385.
- Schwarzschild, K. 1999. On the gravitational field of a sphere of incompressible fluid according to Einstein's theory. *arXiv preprint physics/9912033*.
- Sokolov, A. 1980. Phase transitions in a superfluid neutron liquid. *Sov. Phys. JETP*. 52(4):575.
- Tolman, R.C. 1939. Static solutions of Einstein's field equations for spheres of fluid. *Physical Review*. American Physical Society. 55(4):364.
- Visser, M. Lorentzian Wormholes: From Einstein to Hawking. Woodbury. American Institute of Physics Melville, NY.
- Weber, F. 1999. Quark matter in neutron stars. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*. IOP Publishing. 25(9):195.
- Zeldovich, Y.B. and Novikov, I.D. 2014. Stars and Relativity. Dover Publications.
- Zwicky, F. 1938. On Collapsed Neutron Stars. *The Astrophysical Journal*. 88:522-525.

ÖZGEÇMİŞ

BÜLENT POLAT

ÖĞRENİM BİLGİLERİ

Yüksek Lisans	Akdeniz Üniversitesi
2021-2024	Fen Bilimleri Enstitüsü, Fizik Anabilim Dalı, Antalya
Lisans	Akdeniz Üniversitesi
2002-2008	Fen Edebiyat Fakültesi, Fizik Bölümü, Antalya

MESLEKİ VE İDARİ GÖREVLER

Uzman Öğretmen	MEB
2015 - Devam Ediyor	Akdeniz Anadolu Lisesi, Antalya