

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ MARSHALL-OLKİN
AİLESİNE DAYANAN YENİ BİR ÜSTEL DAĞILIM

Egemen ÖZKAN

DOKTORA TEZİ
İstatistik Anabilim Dalı
İstatistik Programı

Danışman
Prof. Dr. Güllhayat GÖLBAŞI ŞİMŞEK

Şubat, 2024

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**GENELLEŞTİRİLMİŞ MARSHALL-OLKİN AİLESİNE
DAYANAN YENİ BİR ÜSTEL DAĞILIM**

Egemen ÖZKAN tarafından hazırlanan tez çalışması 16.02.2024 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Anabilim Dalı İstatistik Programı **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Gülhayat GÖLBAŞI
ŞİMŞEK
Yıldız Teknik Üniversitesi
Danışman

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Gülhayat GÖLBAŞI ŞİMŞEK, Danışman
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Fatma NOYAN TEKELİ, Üye
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Deniz İNAN, Üye
Marmara Üniversitesi

Prof. Dr. Müjgan TEZ, Üye
Marmara Üniversitesi

Doç. Dr. Gülder KEMALBAY, Üye
Yıldız Teknik Üniversitesi

Danışmanım Prof. Dr. Gülhayat GÖLBAŞI ŞİMŞEK sorumluluğunda tarafımca hazırlanan GENELLEŞTİRİLMİŞ MARSHALL-OLKİN AİLESİNE DAYANAN YENİ BİR ÜSTEL DAĞILIM başlıklı çalışmada veri toplama ve veri kullanımında gerekli yasal izinleri aldığımı, diğer kaynaklardan aldığım bilgileri ana metin ve referanslarda eksiksiz gösterdiğimi, araştırma verilerine ve sonuçlarına ilişkin çarpıtma ve/veya sahtecilik yapmadığımı, çalışmam süresince bilimsel araştırma ve etik ilkelerine uygun davrandığımı beyan ederim. Beyanımın aksinin ispatı halinde her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Egemen ÖZKAN

İmza

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasında bilgi birikim ve tecrübelerinden yararlandığım ve desteğini esirgemeyen hocam Prof. Dr. Gülhayat BÖLBAŞI ŞİMŞEK'e, tez izleme komitesi üyeleri Prof. Dr. Fatma Noyan TEKELİ ve Prof.Dr. Deniz İNAN hocalarıma, Doç. Dr. Caner TANIŞ'a ve Yıldız Teknik Üniversitesi İstatistik bölümü hocalarıma katkılarından dolayı teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca üzerimde çok büyük emekleri olan ve hiçbir zaman haklarını ödeyemeyeceğim annem Nimet ÖZKAN ve babam Ahmet ÖZKAN'a ve hiçbir zaman desteğini esirgemeyen her anımda yanımda olan eşim Gülşen ÖZKAN'a ve canım kızım İlay ÖZKAN'a teşekkür ederim.

Egemen ÖZKAN

İÇİNDEKİLER

SİMGE LİSTESİ	vi
KISALTMA LİSTESİ	vii
ŞEKİL LİSTESİ	viii
TABLO LİSTESİ	ix
ÖZET	x
ABSTRACT	xii
1 GİRİŞ	1
1.1 Literatür Özeti	1
1.2 Tezin Amacı	3
1.3 Hipotez	4
2 TEMEL KAVRAMLAR	5
2.1 Dağılım Fonksiyonu	5
2.2 Deneysel Dağılım Fonksiyonu	5
2.3 Sağkalım ve Güvenirlik Fonksiyonu	6
2.4 Gama ve Tam Olmayan Gama Fonksiyonu	6
2.5 Nokta Tahmini	6
2.5.1 En Çok Olabilirlik Tahmin Edicisi	6
2.5.2 En Küçük Kareler ve Ağırlıklı En Küçük Kareler Tahmin Edicisi	7
2.5.3 Anderson-Darling Tahmin Edicisi	8
2.5.4 Cramer-Von Mises Tahmin Edicisi	8
2.6 Model Uyum Ölçütleri	8
2.6.1 Akaike Bilgi Kriteri	9
2.6.2 Kolmogorov-Smirnov Testi	9
2.6.3 Anderson-Darling Test İstatistiği	9
2.6.4 Cramer-Von Mises Test İstatistiği	10
2.7 Bazı Sürekli Yaşam Zamanı Dağılımları	10

2.7.1	Üstel Dağılım	10
2.7.2	Weibull Dağılımı	10
2.7.3	Üstelleştirilmiş Üstel Dağılım	11
2.7.4	Üstelleştirilmiş Weibull Dağılımı	11
2.7.5	Üstelleştirilmiş Weibull Poisson Dağılımı	11
2.7.6	Genişletilmiş Tekdüze Weibull Üstel Dağılım	11
2.7.7	Genelleştirilmiş Binomial Üstel Tip II Dağılımı	12
2.7.8	Marshall-Olkin Genişletilmiş Burr XII (MOGB-XII) Dağılımı	12
2.8	Marshall-Olkin Dağılım Aileleri	12
2.8.1	Marshall-Olkin Dağılım Ailesi	12
2.8.2	Genelleştirilmiş Marshall-Olkin Dağılım Ailesi	13
3	GENELLEŞTİRİLMİŞ MARSHALL OLKİN ÜSTELLEŞTİRİLMİŞ ÜSTEL DAĞILIM	15
3.1	GMO-ÜÜ Dağılımının Elde Edilmesi	15
3.2	Dağılıma Ait Bazı İstatistiksel Özellikler	20
3.3	Nokta Tahmini	24
3.3.1	En Çok Olabilirlik Tahmin Edicisi	24
3.3.2	En Küçük Kareler ve Ağırlıklı En Küçük Kareler Tahmin Edicileri	25
3.3.3	Anderson-Darling Tahmin Edicisi	26
3.3.4	Cramer-von Mises Tahmin Edicisi	26
3.4	Simülasyon Çalışması	27
4	GERÇEK VERİ UYGULAMASI	38
4.1	Gerçek Veri Çalışması I	38
4.2	Gerçek Veri Çalışması II	40
4.3	Gerçek Veri Çalışması III	41
4.4	Gerçek Veri Çalışması IV	43
5	SONUÇ	45
	KAYNAKÇA	47
	TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR	52

SİMGE LİSTESİ

$F(t)$	Dağılım fonksiyonu
$F_n(x)$	Deneyssel dağılım fonksiyonu
$\Gamma(.)$	Gamma fonksiyonu
$S(t)$	Güvenirlilik fonksiyonu
x_p	Kantil fonksiyon
$\ell(.)$	Log-olabilirlik fonksiyonu
$M'_x(t)$	Moment üreten fonksiyon
$L(.)$	Olabilirlik fonksiyonu
$f(t)$	Olasılık yoğunluk fonksiyonu

KISALTMA LİSTESİ

AD	Anderson-Darling
AD*	Anderson Darling test istatistiği
AEKK	Ağırlıklı en küçük kareler
AIC	Akaike bilgi kriteri
bof	Bozulma oranı fonksiyonu
CvM	Cramer-Von Mises
CvM*	Cramer-Von Mises test istatistiği
df	Dağılım fonksiyonu
EÇO	En çok olabilirlik
EKK	En küçük kareler
GMO-ÜÜ	Genelleştirilmiş Marshall-Olkin üstelleştirilmiş üstel dağılım
GTWÜ	Genelleştirilmiş tek düze Weibull üstel dağılım
HKO	Hata kareler ortalaması
K-S	Kolmogorov Smirnov
MO	Marshal-Olkin dağılımı
MOGB-XII	Marshall-Olkin genelleştirilmiş Burr XII
oyf	Olasılık yoğunluk fonksiyonu
ÜÜ	Üstelleştirilmiş üstel dağılım
ÜW	Üstelleştirilmiş Weibull dağılım
ÜWP	Üstelleştirilmiş Weibull-Poisson Dağılım
W	Weibull Dağılımı

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 3.1	GMO-ÜÜ dağılımının farklı α parametre değerlerine ilişkin oyf .	16
Şekil 3.2	GMO-ÜÜ dağılımının farklı λ parametre değerlerine ilişkin oyf .	16
Şekil 3.3	GMO-ÜÜ dağılımının farklı θ parametre değerlerine ilişkin oyf .	17
Şekil 3.4	GMO-ÜÜ dağılımının farklı β parametre değerlerine ilişkin oyf .	17
Şekil 3.5	Farklı değerler alan λ parametresi için GMO-ÜÜ dağılımının bof	18
Şekil 3.6	Farklı değerler alan α parametresi için GMO-ÜÜ dağılımının bof	19
Şekil 3.7	Farklı değerler alan α parametresi için GMO-ÜÜ dağılımının bof	19
Şekil 3.8	Farklı değerler alan β parametresi için GMO-ÜÜ dağılımının bof	20
Şekil 3.9	$\eta_1 = (0.4, 0.8, 1, 0.5)$ durumunda α parametresi için HKO	28
Şekil 3.10	$\eta_1 = (0.4, 0.8, 1, 0.5)$ durumunda λ parametresi için HKO	32
Şekil 3.11	$\eta_1 = (0.4, 0.8, 1, 0.5)$ durumunda θ parametresi için HKO	32
Şekil 3.12	$\eta_1 = (0.4, 0.8, 1, 0.5)$ durumunda β parametresi için HKO	33
Şekil 3.13	$\eta_2 = (0.5, 0.7, 3, 0.9)$ durumunda α parametresi için HKO	33
Şekil 3.14	$\eta_2 = (0.5, 0.7, 3, 0.9)$ durumunda λ parametresi için HKO	34
Şekil 3.15	$\eta_2 = (0.5, 0.7, 3, 0.9)$ durumunda θ parametresi için HKO	34
Şekil 3.16	$\eta_2 = (0.5, 0.7, 3, 0.9)$ durumunda β parametresi için HKO	35
Şekil 3.17	$\eta_3 = (0.2, 0.5, 2, 0.75)$ durumunda α parametresi için HKO	35
Şekil 3.18	$\eta_3 = (0.2, 0.5, 2, 0.75)$ durumunda λ parametresi için HKO	36
Şekil 3.19	$\eta_3 = (0.2, 0.5, 2, 0.75)$ durumunda θ parametresi için HKO	36
Şekil 3.20	$\eta_3 = (0.2, 0.5, 2, 0.75)$ durumunda β parametresi için HKO	37
Şekil 4.1	Ardışık arıza sayısı verisi için uydurulan df'ler	39
Şekil 4.2	Ozon seviyesi ölçümü verisi için uydurulan df'ler	41
Şekil 4.3	Taşkın verisi için uydurulan df'ler	42
Şekil 4.4	COVID-19 verisi için uydurulan df'ler	44

TABLO LİSTESİ

Tablo 3.1	$\alpha = 0.4, \lambda = 0.8, \theta = 1$ ve $\beta = 0.5$ için ortalama yan ve HKO sonuçları	29
Tablo 3.2	$\alpha = 0.5, \lambda = 0.7, \theta = 3$ ve $\beta = 0.9$ için ortalama yan ve HKO sonuçları	30
Tablo 3.3	$\alpha = 0.2, \lambda = 0.5, \theta = 2$ ve $\beta = 0.75$ için ortalama yan ve HKO sonuçları	31
Tablo 4.1	Arıza sayısı verisi için parametre tahminleri (standart hataları) . .	39
Tablo 4.2	Arıza sayısı verileri için uyum iyiliği istatistikleri	39
Tablo 4.3	Ozon seviyeleri verisi için parametre tahminleri (standart hataları)	40
Tablo 4.4	Ozon seviyeleri verisi için uyum iyiliği istatistikleri	40
Tablo 4.5	Taşkın verisi için parametre tahminleri (standart hataları)	42
Tablo 4.6	Taşkın verisi için uyum iyiliği istatistikleri	42
Tablo 4.7	COVID-19 verisi için parametre tahminleri (standart hataları) . .	43
Tablo 4.8	COVID-19 verisi için uyum iyiliği istatistikleri	43

ÖZET

GENELLEŞTİRİLMİŞ MARSHALL-OLKİN AİLESİNE DAYANAN YENİ BİR ÜSTEL DAĞILIM

Egemen ÖZKAN

İstatistik Anabilim Dalı

Doktora Tezi

Danışman: Prof. Dr. Gülhayat GÖLBAŞI ŞİMŞEK

Literatürde yaşam zamanı verilerini modelleyen çok sayıda olasılık dağılımı yer almaktadır. Ancak bu mevcut dağılımlar farklı alanlardan gelen verileri modellemede yetersiz kalabilmektedir. Bu nedenle bu mevcut dağılımlara bir veya birden daha fazla parametre ekleyerek veri modellemede temel dağılıma kıyasla daha esnek olan genelleştirilmiş dağılımların elde edilmesi önem kazanmıştır. Mevcut dağılıma parametre ekleyerek elde edilen genelleştirilmiş dağılımlardan bir tanesi de genelleştirilmiş Marshall-Olkin dağılımıdır. Bu tez çalışmasında, genelleştirilmiş Marshall-Olkin dağılımının bir alt modeli olan genelleştirilmiş Marshall-Olkin üstelleştirilmiş üstel dağılımı önerilmiştir. Önerilen dağılımın momentleri, moment üreten fonksiyonu, tam olmayan momentleri, Lorenz ve Bonferroni eğrileri gibi istatistiksel özellikleri kapsamlı bir şekilde incelenmiştir. Ayrıca, önerilen dağılımın parametrelerinin tahminleri en çok olabilirlik, en küçük kareler, ağırlıklı en küçük kareler, Anderson-Darling ve Cramer-Von Mises olmak üzere beş farklı tahmin yöntemi kullanılarak elde edilmiştir. Tahmin edicilerin performanslarını karşılaştırmak amacıyla, rastgele seçilen üç farklı parametre kümesi için Monte-Carlo simülasyonu gerçekleştirilmiş ve tahmincilerin performansı ortalama yan ve hata kareleri bakımından değerlendirilmiştir. Son olarak, önerilen dağılımın gerçek hayatta kullanışlılığını göstermek amacıyla dört farklı gerçek veri uygulaması sunulmuştur. Bu uygulamalar, önerilen dağılımın rakip dağılımlara göre avantajlarını ve veri modellemedeki etkinliğini ortaya koymaktadır. Bu tez, gerçek veri uygulamalarına uyum sağlama esnekliği ile genelleştirilmiş Marshall-Olkin üstelleştirilmiş üstel

dağılımın istatistiksel özelliklerini kapsamlı bir şekilde inceleyerek literatüre önemli bir katkı sağlamaktadır.

Anahtar Kelimeler:Genelleştirilmiş Marshall-Olkin dağılımı,üstelleştirilmiş üstel dağılım, Monte Carlo simülasyonu, parametre tahmini.



ABSTRACT

A NOVEL EXPONENTIAL DISTRIBUTION BASED ON GENERALIZED MARSHALL-OLKIN FAMILY

Egemen ÖZKAN

Department of Statistics
Doctor of Philosophy Thesis

Advisor: Prof. Dr. Gülhayat GÖLBAŞI ŞİMŞEK

There are many probability distributions modeling life time data in the literature. However, these existing distributions may be insufficient to model data coming from different fields. Therefore it has become important to obtain generalized distributions that are more flexible than the base distribution in data modelling, by adding one or more parameters to the base distributions. One of the generalized distributions obtained by adding parameter to the base distribution is the generalized Marshall-Olkin. In this thesis, we propose the generalized Marshall-Olkin exponentiated exponential distribution, which is a sub-model of the generalized Marshall-Olkin distribution. Some statistical properties of the proposed distribution such as moments, moment generating function, incomplete moment, Lorenz and Bonferroni curves are extensively investigated. Further, we obtain the estimates of the parameters of the proposed distribution by using five different estimation methods: maximum likelihood, least squares, weighted least squares, Anderson Darling, and Cramer-Von Mises. In order to compare the performances of the estimators, a Monte Carlo simulation study is conducted for three randomly chosen parameter sets, and the performances of the estimators are evaluated in terms of mean bias and mean squared error. Finally, four different real data applications are presented to demonstrate the usefulness of the proposed distribution in real life. These applications indicate the advantages of the proposed distribution over competing distributions and its effectiveness in data modeling. This thesis provides a substantial contribution to the literature by thoroughly investigating the statistical

properties of the generalized Marshall-Olkin exponentiated exponential distribution with its flexibility to comply with real data applications.

Keywords: Generalized Marshall-Olkin distribution, exponentiated exponential distribution, Monte Carlo simulation, parameter estimation.



1.1 Literatür Özeti

İstatistiksel dağılımlar, sağ kalım analizi de dahil olmak üzere verileri modellemek için yaygın olarak kullanılır. Üstel, Weibull, Rayleigh, gama ve lognormal dağılımlar, hayatta kalma analizinde kullanılan en esnek dağılımlar arasında yer almaları nedeniyle literatürde merkezi bir öneme sahiptir. Ancak veri üretim süreçlerinin sınırsız sayıda olduğu dikkate alındığında bu dağılımların veri modellemede yeterli esnekliği sağlayamadığı gözlemlenmiştir. Bu nedenle son yıllarda mevcut dağılımlara dönüşüm, birleştirme ve üstelleştirme gibi türetme yöntemleri kullanılarak yeni dağılımlar ve dağılım aileleri türetilmiştir.

Marshall ve Olkin [1] tarafından önerilen Marshall-Olkin ailesi, Jayakumar ve Mathew [2] tarafından tanıtılan genelleştirilmiş Marshall-Olkin ailesi, Eugene vd. [3] tarafından tanıtılan Beta-G ailesi, Corderio ve Castro [4] tarafından tanıtılan Kumaraswamy-G ailesi, Alexander vd. [5] tarafından tanıtılan McDonald-G ailesi, Zografos ve Balakrishnan [6] tarafından tanıtılan gama-G ailesi, Bourguignon vd.[7] tarafından tanıtılan Weibull-G ailesi , Alzaatreh vd. [8] tarafından önerilen T-X dönüşümlü ailesi ve Korkmaz vd.[9] tarafından tanıtılan Marshall-Olkin genelleştirilmiş-G Poisson ailesi literatürde iyi bilinen dağılım aileleri olarak özetlenebilir.

Mevcut dağılımın üstelleştirilmesi ile elde edilen yeni bir dağılım türetme yöntemi ise üstelleştirilmiş dağılımlardır. Üstelleştirilmiş dağılımlar, temel dağılımlara kıyasla daha fazla parametreye sahip olduklarından, veri modellemede daha esnek bir yaklaşım sunabilirler. Üstelleştirilmiş dağılımlar fikri ilk olarak Lehmann [10] tarafından ortaya atılmıştır. Ancak mevcut dağılımın üstelleştirilmesi yolu ile dağılım türetme Gompertz [11] ve Verhulst [12–14] gibi isimlere kadar uzanmaktadır. Gupta ve Kundu [15] gama ve Weibull dağılımına alternatif olarak kullanılan önemli dağılımlardan bir tanesi olan üstel dağılımın üstelleştirilmesi ile elde edilen üstelleştirilmiş üstel dağılımı önermişlerdir. Ayrıca üstelleştirilmiş üstel dağılım Nadajarah [16] tarafından ele alınmış ve dağılımın matematiksel özellikleri

kapsamlı bir biçimde elde edilmiştir. Daha sonra araştırmacılar üstelleştirme fikrinden etkilenerek literatüre çeşitli dağılımlar kazandırmışlardır. Nadajarah ve Kotz [17] üstelleştirilmiş gama, üstelleştirilmiş Weibull, üstelleştirilmiş Gumbel ve üstelleştirilmiş Frechet dağılımlarını elde etmiş ve dağılımların matematiksel özelliklerini incelemişlerdir. Hasan ve Abd-Allah [18] üstelleştirilmiş Lomax geometrik dağılımını özellikleri ve uygulamalarıyla ele almışlardır. Adeleke vd.[19] üstelleştirilmiş üstel lomax dağılımını tanıtmış ve dağılımın matematiksel özelliklerini ele almışlardır. Nasir vd. [20] üstelleştirilmiş Burr XII ve kuvvet serisi dağılımlarının birleştirilmesiyle elde edilen ve güçlü bir motivasyona sahip olan üstelleştirilmiş Burr XII kuvvet serisi dağılımını tanıtmışlardır. Bu çalışmada dağılıma ilişkin momentler ve tam olmayan momentler elde edilmiştir. Model parametreleri en çok olabilirlik yöntemi ile elde edilmiştir. Tahmin edicinin performansı yan ve hata kareler ortalaması ile değerlendirilmiştir. Elde edilen yeni modelin kullanışlılığı üç gerçek veri seti ile değerlendirilmiş ve önerilen modelin rakip modellere göre daha iyi uyum sağladığı sonucuna varılmıştır.

Dağılım türetme yöntemlerinden bir tanesi de mevcut dağılımların tanım kümesinin $(0,1)$ aralığında indirilmesi ile elde edilen unit dağılımlardır. Unit dağılımlar biyolojik çalışmalar, ölüm ve iyileşme oranları, ekonomi, sağlık, riskler ve ölçme bilimleri gibi bir çok alanda yer alan verileri modellemek için yaygın olarak kullanılmaktadır. Beta [21], Topp- Leone [22] ve Kumaraswamy [23] dağılımları $(0,1)$ aralığındaki verileri modellemede akla gelen en popüler dağılımlardır. Ancak, bu klasik dağılımlar veri modellemede yetersiz kalabilir ve veriyi doğru analiz etmede önemli sorunlar ortaya çıkarabilir. Bu nedenle literatürde $(0,1)$ aralığındaki verileri modellemeye yönelik çalışmaların sayısı artmaktadır. Yeni önerilen unit dağılımlar iyi bilinen sürekli dağılımların genellikle $Y = \exp(-x)$ veya $Y = \frac{X}{X+1}$ dönüşümleri kullanılarak elde edilir. Burada Y elde edilen yeni rasgele değişkenin dağılımını ve X rasgele değişkeni de literatürde var olan bir dağılımı temsil etmektedir. Unit dağılımların avantajı, yeni parametreler eklemekten temel dağılımlara daha fazla esneklik kazandırmaktır. Unit gama [24], unit Weibull [25], unit Gompertz [26], unit Lindley-Weibull [27], unit Birnbaum-Saunders [25] ve unit log-log [28] dağılımları $\exp(-x)$ dönüşümü yardımı ile $(0,1)$ aralığına indirgenmiş dağılımlardır. Unit Lidney [29] dağılımı, hiperbolik normal dağılım [30] ve dönüştürülmüş unit Rayleigh dağılımı da [31] dönüşüm yöntemleri ile $(0,1)$ aralığına indirgenmiş dağılımlardandır.

Diğer bir dağılım önerme yöntemi ise literatürde yer alan yaşam zamanı verilerini modellen yaşam zamanı dağılımları ile kesikli veya sürekli bir dağılımın birleştirilmesi sonucunda elde edilen bileşik (compound) dağılımlardır. Adamis ve Loukas [32] tarafından üstel dağılım ve geometrik dağılımın birleştirilmesiyle elde edilen iki parametrelili üstel-geometrik dağılım birleştirme ile ortaya konulan

dağılımların başında gelmektedir. Benzer mantıkla Kuş [33] üstel dağılım ve Poisson dağılımını birleştirerek üstel-Poisson dağılımı, Tahmasbi ve Rezaei [34] üstel dağılım ile logaritmik dağılımı birleştirerek üstel-logaritmik dağılımı tanıtmışlardır. Asgharzadeh vd.[35] Weibull dağılımı ve Lidney dağılımını birleştirerek Weibull-Lidney dağılımını, Lu ve Shi [36] Weibull dağılımı ve poisson dağılımını birleştirerek Weibull-Poisson dağılımını, Barreto-Souza vd. [37] Weibull dağılımı ile geometrik dağılımı birleştirerek Weibull-geometrik dağılımını, Korkmaz ve Erişoğlu [38] Burr XII dağılımı ve geometrik dağılımı birleştirerek Burr XII-geometrik dağılımını, Sen vd.[39] xgamma ve Poisson dağılımını birleştirerek xgamma-Poisson dağılımını, Mahmoudi ve Jafari [40] genelleştirilmiş üstel dağılım ve kuvvet seri dağılımını birleştirerek genelleştirilmiş üstel kuvvet seri dağılımını elde etmişlerdir.

Bu tez çalışmasında, genelleştirilmiş Marshall-Olkin dağılımının bir alt modeli olan genelleştirilmiş Marshall-Olkin üstelleştirilmiş üstel dağılımı tanıtılmıştır. Önerilen yeni dağılım temel özellikleri kapsamlı bir şekilde ele alınmıştır. Dağılımın bilinmeyen parametreleri; en çok olabilirlik yöntemi, en küçük kareler yöntemi, ağırlıklı en küçük kareler yöntemi, Anderson-Darling yöntemi ve son olarak Cramer-Von Mises yöntemi ile tahmin edilmiştir. Tahmin edicilerin performansı Monte Carlo simülasyon çalışması sonucunda elde edilen ortalama yan ve hata kareler ortalaması bakımından değerlendirilmiştir. Ayrıca dağılımın farklı alanlardaki verileri modelleme esnekliğine sahip olduğunu göstermek amacı ile dört gerçek veri çalışması yapılmıştır.

Tez çalışmasının ikinci bölümünde tez boyunca kullanılacak temel kavramlar ve gerçek veri çalışmasında kullanılacak bazı sürekli yaşam zamanı dağılımlarına yer verilmiştir. Üçüncü bölümde ise genelleştirilmiş Marshall-Olkin üstelleştirilmiş üstel dağılım kapsamlı bir şekilde incelenmiş ve Monte Carlo Simülasyon çalışması yapılmıştır. Dördüncü bölümde gerçek veri çalışmasına, son bölümde ise sonuç ve önerilere yer verilerek çalışma tamamlanmıştır.

1.2 Tezin Amacı

Veri üretme sistemlerindeki gelişmeler ve verilerin çeşitliliği araştırmacıların yeni olasılık dağılımları ile çalışma ihtiyacını da beraberinde getirmektedir. Son zamanlarda, veri modellemede büyük bir avantaj sağlaması nedeniyle iyi bilinen dağılımları genişleterek yeni dağılımların tanıtılması önem kazanmıştır. Elde edilen dağılımların güncel hayattaki verileri modelleme esnekliği bozulma oranı fonksiyonu grafiklerinin çeşitliliğine bağlıdır. Örneğin bozulma oranı fonksiyonu kuvvet eğrisi şeklinde olan bir dağılım, sadece artan veya azalan bozulma oranına sahip olan bir dağılıma göre daha fazla sayıda veriyi

modelleme esnekliğine sahiptir. Bu nedenle çalışmanın amacı, artan ve azalan bozulma oranı fonksiyonuna sahip olan üstelleştirilmiş üstel dağılımı temel alınarak genelleştirilmiş Marshall-Olkin üstelleştirilmiş üstel dağılımını tanıtmaktır. Üstelleştirilmiş üstel dağılım artan ve azalan bozulma oranına sahip iken; artan, azalan, sabit, artan-azalan-artan, ters kuvvet ve kuvvet eğrisi şekillerine sahip olan yeni bir model elde edilerek literatüre katkı sağlanmaktadır. Ayrıca elde edilen dağılımın bazı dağılımsal özellikleri elde edilmiş ve dağılımın veri modellemede esnekliği gösterilmiştir.

1.3 Hipotez

Bu çalışmanın amacı, üstelleştirilmiş üstel dağılım temel dağılım olarak alınarak veri modellemede üstelleştirilmiş üstel dağılıma göre daha esnek bir yapıya sahip olan genelleştirilmiş Marshall-Olkin üstelleştirilmiş üstel dağılımı tanıtmaktır. Tezin hipotezleri: Önerilen modelin dağılım fonksiyonu ve bozulma oranı fonksiyonunun kapalı formda oldukça basit bir şekilde ifade edilebilmesi, yeni modelin istatistiksel özelliklerinin belirlenebilmesi, elde edilen modelin literatürde var olan modellere göre daha esnek olabilmesi, ayrıca önerilen modelin Marshall-Olkin dağılımlarının uzantılarına ve üstel dağılımın uzantılarına iyi bir alternatif olması şeklinde sıralanabilir.

2 TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde çalışma boyunca kullanılacak temel kavramlar ve yeni elde edilen dağılımın gerçek verilere uyumunun kıyaslamasında kullanılacak olan bazı yaşam zamanı dağılımları hakkında önemli bilgilere yer verilecektir.

2.1 Dağılım Fonksiyonu

T sürekli rastgele değişkenine ait dağılım fonksiyonu (df)

$$F(t) = P(T \leq t) = \int_{-\infty}^t f(t) dt \quad (2.1)$$

olarak tanımlanır. Burada f olasılık yoğunluk fonksiyonudur ve rastgele bir T değişkeninin dağılım fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlar [41].

- F azalmayandır.
- F sağdan süreklidir.
- $\lim_{t \rightarrow -\infty} F(t) = 0$ ve $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = 1$.

2.2 Deneysel Dağılım Fonksiyonu

$X_1, X_2, \dots, X_n$ herhangi bir F_x dağılımından alınmış n birimlik örneklem olsun. $x_{1:n}, x_{2:n}, \dots, x_{n:n}$ ise $X_{1:n}, X_{2:n}, \dots, X_{n:n}$ sıra istatistiklerinin gözlenen değerini belirtmek üzere

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{eğer } x < x_{1:n}, \\ \frac{k}{n} & \text{eğer } x_{k:n} \leq x \leq x_{k+1:n} \\ 1 & \text{eğer } x_{n:n} > x. \end{cases} \quad (2.2)$$

biçiminde tanımlanan $F_n(x)$ fonksiyonuna deneysel dağılım fonksiyonu denir. Deneysel dağılım fonksiyonu kitle dağılım fonksiyonunun bir tahminidir.

2.3 Sağkalım ve Güvenirlik Fonksiyonu

Sağkalım fonksiyonu, olasılık teorisi ve sağkalım analizlerinde bir parçanın veya bir test bileşeninin belirli bir zaman noktasının ötesinde yaşaması olasılığını veren istatistiksel bir fonksiyondur. Sağkalım fonksiyonu genellikle $S(t)$ ile gösterilir ve burada t belirli bir zaman noktasını veya süreyi temsil eder. Herhangi bir T rastgele değişkeni için yaşam fonksiyonu;

$$S(t) = P(T > t), t > 0 \quad (2.3)$$

$$S(t) = 1 - F(t) = \int_x^{\infty} f(t) dt \quad (2.4)$$

olarak tanımlanır[42]. Burada $F(t)$ ve $f(t)$ sırasıyla dağılım fonksiyonu ve olasılık yoğunluk fonksiyonunu belirtmektedir.

2.4 Gama ve Tam Olmayan Gama Fonksiyonu

Pozitif reel sayılar için tanımlanan gama fonksiyonu

$$\Gamma(\beta) = \int_0^{\infty} t^{\beta-1} e^{-t} dt \quad (2.5)$$

olarak tanımlanır[43]. Burada β pozitif reel sayıdır. Tam olmayan gama fonksiyonu ise gama fonksiyonunun türetilmiş genel bir halidir ve

$$\Gamma(\alpha, \beta) = \int_0^{\beta} t^{\alpha-1} e^{-t} dt \quad (2.6)$$

biçiminde tanımlanır[43]. Burada $\beta = \infty$ alınırsa tam olmayan gama fonksiyonu standart gama fonksiyonuna indirgenir.

2.5 Nokta Tahmini

2.5.1 En Çok Olabilirlik Tahmin Edicisi

Bir olasılık dağılımının parametrelerini tahmin etmek için kullanılan en temel yöntemlerden biri en çok olabilirlik (EÇO) yöntemidir. Bu yöntem kısaca aşağıdaki

gibi tanımlanır. $X_1, X_2, \dots, X_n \sim f(x|\gamma)$ olasılık (yoğunluk) fonksiyonuna sahip n birimlik örneklem olsun. Bu örnekleme ilişkin ortak olasılık (yoğunluk) fonksiyonu $f(\mathbf{x}|\gamma) = f(x_1, x_2, \dots, x_n|\gamma)$, γ parametresi veya vektörünün bir fonksiyonu olarak düşünülürse olabilirlik fonksiyonu adını alır ve aşağıdaki gibi tanılanır.

$$L(\gamma|\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n f(x_i|\gamma) \quad (2.7)$$

2.7’da yer alan olabilirlik fonksiyonu maksimum yapan $\hat{\gamma}(X)$ tahmin edicisine, γ ’nın EÇO tahmin edicisi denir. Ancak 2.7’deki ifadenin çarpımlarla birlikte karmaşık hale gelmesinden dolayı parametre tahminlerinin hesaplanması oldukça zor olduğu için bu fonksiyonun logaritması olan log-olabilirlik fonksiyonunu parametrelere göre maksimize etmek yaygın olarak kullanılmaktadır. Log-olabilirlik fonksiyonu,

$$\ell(\gamma) = \text{Log}(L(\gamma|\mathbf{x})) = \sum_{i=1}^n \log(f(x_i|\gamma)) \quad (2.8)$$

olarak tanımlanır[44].

2.5.2 En Küçük Kareler ve Ağırlıklı En Küçük Kareler Tahmin Edicisi

En küçük kareler (EKK) ve ağırlıklı en küçük kareler (AEKK) yöntemleri, 1998’de Swain vd.[45] tarafından beta dağılımının bilinmeyen parametresini tahmin etmek için EÇO yöntemine alternatif olarak önerilmiş regresyon tabanlı yöntemlerdir. Bu yöntemler kısaca aşağıdaki gibi tanımlanır. Varsayalım ki $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$, $G(\gamma)$ dağılım fonksiyonundan alınmış n birimlik örneklem ve $Y_{j:n}; j = 1, 2, \dots, n$ ’de sıra istatistiklerini gösterebilir. Buna göre $G(Y_{j:n})$ rastgele değişkeni $Beta(j, n - j + 1)$ dağılmaktadır. $G(Y_{j:n})$ rastgele değişkeninin beklenen değeri ve varyansı;

$$E(G(Y_{j:n})) = \frac{j}{n+1}, \quad V(G(Y_{j:n})) = \frac{j(n-j+1)}{(n+1)^2(n+2)} \quad (2.9)$$

olmak üzere en küçük kareler tahmin edicisi aşağıdaki eşitliğin γ parametresine göre minimize edilmesi ile elde edilir[46].

$$\Psi(\gamma) = \sum_{j=1}^n \left[G(Y_{j:n}, \gamma) - \frac{j}{n+1} \right]^2 \quad (2.10)$$

Ağırlıklı en küçük kareler tahmin edicisi ise;

$$\omega(\gamma) = \sum_{j=1}^n w_j \left[G(Y_{j:n}, \gamma) - \frac{j}{n+1} \right]^2 \quad (2.11)$$

fonksiyonunun γ parametresine göre minimize edilmesi ile elde edilir. Burada $w_j = \frac{(n+1)^2(n+1)}{(j(n-j+1))}$ şeklindedir[46].

2.5.3 Anderson-Darling Tahmin Edicisi

Anderson-Darling (AD) tahmin edicisi, 1952’de Anderson ve Darling [47] tarafından önerilen uyum iyiliği istatistiğinin minimizasyonuna dayanan tahmin yöntemlerinden bir tanesidir. Buna göre γ parametresinin AD tahmin edicisi olan $\hat{\gamma}_{ADE}$;

$$A(\gamma) = -n - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (2j-1) [\log(G(Y_{j:n})) + \log(1 - G(Y_{j:n}))] \quad (2.12)$$

fonksiyonunun minimize edilmesi ile elde edilir.

2.5.4 Cramer-Von Mises Tahmin Edicisi

Cramer-Von Mises (CvM) yöntemi, teorik dağılım fonksiyonu ile bir veri setinin deneysel dağılım fonksiyonu arasındaki farkı minimize etmeye dayalı bir uyum iyiliği tahmin edicisidir. Kısaca bu tahmin yöntemini tanımlayalım. $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$, $G(\gamma)$ dağılımından alınmış n birimlik örneklem ve $Y_{j:n}; j = 1, 2, \dots, n$ ’de bu örnekleme ilişkin sıra istatistiklerini gösterebilir. Bu durumda γ parametresinin CvM tahmin edicisi $\hat{\gamma}_{CvM}$

$$CvM(\gamma) = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^n \left(G(Y_{i:n}, \gamma) - \frac{2i-1}{2n} \right)^2 \quad (2.13)$$

fonksiyonunun γ parametresine göre minimize edilmesi ile elde edilir[48].

2.6 Model Uyum Ölçütleri

Model uyum ölçütleri (uyum iyiliği kriterleri), bir teorik dağılımın bir veri setine ne kadar iyi uyum sağladığını belirlemek için kullanılan istatistiksel niceliklerdir. Çalışmanın bu bölümünde literatürde yaygınca kullanılan bazı uyum ölçütleri olan Akaike bilgi kriteri, AD test istatistiği, Kolmogorov-Smirnov (K-S) test istatistiği, CvM test istatistiğinden bahsedilecektir.

2.6.1 Akaike Bilgi Kriteri

Akaike Bilgi Kriteri (AIC), 1974 yılında Japon istatistikçi Hirotugu Akaike [49] tarafından geliştirilen ve herhangi bir modelin veri kümesine uyumunu değerlendirmek için kullanılan istatistiksel bir ölçüdür. AIC, bilgi teorisi fikrine dayanmaktadır ve hem modelin veriye uygunluğunu hem de modeldeki parametre sayısını dikkate almaktadır. AIC değeri aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$AIC = -2\ell(\theta) + 2k \quad (2.14)$$

Burada k parametre sayısını, $\ell(\theta)$ 'da log-olabilirlik fonksiyonunu temsil etmektedir. Modellerin karşılaştırılmasında AIC değeri en düşük olan model en uygun model olarak kabul edilir.

2.6.2 Kolmogorov-Smirnov Testi

Kolmogorov-Smirnov (K-S) testi, örneklem dağılımının belirli bir teorik dağılımdan gelip gelmediğini veya bu dağılımdan önemli derecede farklı olup olmadığını belirlemek için kullanılan en popüler uyum iyiliği testlerinden biridir. Tek örneklem K-S uyum iyiliği testi 1930'lu yıllarda Rus matematikçiler olan Kolmogorov ve Smirnov tarafından tanıtılmıştır. Kolmogorov-Smirnov testi teorik bir dağılım fonksiyonu ile deneysel dağılım fonksiyonu arasındaki stokastik farka dayanmaktadır. K-S istatistiği aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$D = \sup_x |F_n(x) - F_X(x)| \quad (2.15)$$

Burada $F_X(x)$ birikimli dağılım fonksiyonunu $F_n(x)$ ise deneysel dağılım fonksiyonunu göstermektedir. Veri analizlerinde ise K-S değeri küçük olan model veriye en iyi uyum gösteren model olarak seçilir.

2.6.3 Anderson-Darling Test İstatistiği

Anderson-Darling test istatistiği (AD*), belirli bir veri kümesinin belirli bir dağılıma uyumunun iyiliğini ölçen istatistiksel bir ölçüdür. K-S testinin bir modifikasyonu olup ve 1952 yılında Anderson ve Darling[47] tarafından tanıtılmıştır. AD* aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$AD^* = -n - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (2j-1) \log \{F(G(Y_{j:n}))(1 - G(Y_{n-j+1:n}))\} \quad (2.16)$$

2.6.4 Cramer-Von Mises Test İstatistiği

Cramer-Von Mises test istatistiği (CvM*), bir veri setinin belirli bir teorik olasılık dağılımına ne kadar iyi uyduğunu belirlemek için K-S ve AD* test istatistiklerine alternatif olarak kullanılan bir uyum iyiliği ölçüsüdür. CvM* kısaca aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$CvM^* = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^n \left(F(X_{i:n}) - \frac{2i-1}{2n} \right)^2 \quad (2.17)$$

Burada CvM^* test istatistiğinin değerini, n örneklem büyüklüğünü ve $F(X)$ ise teorik dağılım fonksiyonunu ifade eder [48].

2.7 Bazı Sürekli Yaşam Zamanı Dağılımları

Bu bölümde literatürde yer alan ve gerçek veri analizlerinde önerilen dağılımla karşılaştırma amacı ile kullanılacak olan bazı yaşam zamanı dağılımları ele alınmaktadır.

2.7.1 Üstel Dağılım

X rastgele değişkeni üstel bir dağılıma sahip olduğunda, X rastgele değişkenine ilişkin oyf ve dağılım fonksiyonu aşağıdaki eşitliklerde sırası ile verilmiştir.

$$f(x) = \alpha e^{-\alpha x} \quad (2.18)$$

$$F(x) = 1 - e^{-\alpha x} \quad (2.19)$$

Burada $x > 0$ ve dağılımın parametresi olan $\alpha > 0$ olarak tanımlanmaktadır.

2.7.2 Weibull Dağılımı

X rastgele değişkeni Weibull (W) dağılımına sahip olmak üzere, bu dağılıma ait oyf ve df aşağıdaki eşitliklerde sırası ile yer almaktadır.

$$f(x) = \frac{\alpha}{\lambda} \left(\frac{x}{\lambda} \right)^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{x}{\lambda} \right)^\alpha} \quad (2.20)$$

$$F(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\lambda} \right)^\alpha} \quad (2.21)$$

Burada $x > 0$ ve $\alpha > 0$, $\lambda > 0$ sırası ile şekil ve ölçek parametrelerini belirtmektedir.

2.7.3 Üstelleştirilmiş Üstel Dağılım

X rastgele değişkeni üstelleştirilmiş üstel (ÜÜ) dağılımına sahip olmak üzere, bu dağılıma ait oyf ve df aşağıdaki eşitliklerde sırası ile yer almaktadır.

$$f(x) = \beta \theta \exp(-\theta x) [1 - \exp(-\theta x)]^{\beta-1} \quad (2.22)$$

$$F(x) = [1 - \exp(-\theta x)]^\beta \quad (2.23)$$

Burada $x > 0$ ve $\alpha, \beta > 0$ sırası ile ölçek ve şekil parametrelerini ifade etmektedir. ÜÜ dağılımı gama ve Weibull dağılımlarına alternatif olarak Gupta ve Kundu [15] tarafından önerilmiştir.

2.7.4 Üstelleştirilmiş Weibull Dağılımı

X rastgele değişkeni üstelleştirilmiş Weibull [50](ÜW) dağılımına sahip olmak üzere, bu dağılıma ait oyf ve df aşağıdaki eşitliklerde sırası ile yer almaktadır.

$$F(x) = \left[1 - e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^\alpha}\right]^\theta \quad (2.24)$$

$$f(x) = \frac{\alpha \theta}{\lambda} \left(1 - e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^\alpha}\right)^{\theta-1} e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^\alpha} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\alpha-1} \quad (2.25)$$

Burada dağılımın parametreleri $\alpha, \lambda, \theta > 0$ olarak tanımlanır ve $x > 0$ 'dır.

2.7.5 Üstelleştirilmiş Weibull Poisson Dağılımı

X rastgele değişkeni üstelleştirilmiş Weibull Poisson [51](ÜWP) dağılımına sahip olmak üzere, bu dağılıma ait olasılık yoğunluk fonksiyonu ve dağılım fonksiyonu aşağıdaki eşitliklerde sırası ile yer almaktadır.

$$f(x) = \frac{\beta \theta \alpha \lambda x^{\theta-1}}{e^{\alpha-1}} e^{-(\lambda x)^\theta} \left(1 - e^{-(\lambda x)^\theta}\right)^{\beta-1} e^{\alpha \left(1 - e^{-(\lambda x)^\theta}\right)^\beta} \quad (2.26)$$

$$F(x) = \frac{e^\alpha \left(1 - e^{-(\lambda x)^\theta}\right)^\beta - 1}{e^\alpha - 1} \quad (2.27)$$

Burada $\alpha, \lambda, \theta, \beta > 0$ ve $x > 0$ 'dır.

2.7.6 Genişletilmiş Tekdüze Weibull Üstel Dağılım

X rastgele değişkeni genişletilmiş tekdüze üstel Weibull [52] (GTWÜ) dağılımına sahip olmak üzere, X rastgele değişkene ilişkin oyf ve df sırasıyla;

$$f(x) = \alpha \lambda e^{\alpha \lambda x} (1 - e^{-\lambda x})^{\alpha-1} (1 + \theta(e^{\lambda x} - 1)^\alpha)^{-\frac{1}{\theta}-1} \quad (2.28)$$

ve

$$F(x) = 1 - (1 + \theta(e^{\lambda x} - 1))^{\alpha} e^{-\frac{1}{\theta}} \quad (2.29)$$

şeklindedir. Burada dağılımın parametreleri $\alpha, \beta, \lambda > 0$ ve $x > 0$ olarak tanımlanmaktadır.

2.7.7 Genelleştirilmiş Binomial Üstel Tip II Dağılımı

X rastgele değişkeni genelleştirilmiş binomial üstel tip II [35] (GBÜ-II) dağılımına sahip olmak üzere, bu dağılıma ait olasılık yoğunluk fonksiyonu ve dağılım fonksiyonu aşağıdaki eşitliklerde sırası ile yer almaktadır.

$$f(x) = \alpha \lambda \left(1 + \frac{(\lambda x - 1)\theta}{2 - \theta}\right) e^{-\lambda x} \left[1 - \left(1 + \frac{\lambda \theta x}{2 - \theta}\right) e^{-\lambda x}\right]^{\alpha-1} \quad (2.30)$$

$$F(x) = \left[1 - \left(1 + \frac{\lambda \theta x}{2 - \theta}\right) e^{-\lambda x}\right]^{\alpha} \quad (2.31)$$

2.7.8 Marshall-Olkin Genişletilmiş Burr XII (MOGB-XII) Dağılımı

X rastgele değişkeni Marshall-Olkin genişletilmiş Burr XII [53] (MOGBXII) dağılımına sahip olmak üzere, bu dağılıma ait oyf ve df aşağıdaki eşitliklerde sırası ile yer almaktadır.

$$f(x) = \frac{\alpha \lambda \theta x^{\lambda-1} (1 + x^{\lambda})^{-\theta-1}}{\left(1 - (1 - \alpha)(1 + x^{\lambda})^{-\theta}\right)^2} \quad (2.32)$$

$$F(x) = \frac{1 - (1 + x^{\lambda})^{-\theta}}{1 - (1 - \alpha)(1 + x^{\lambda})^{-\theta}} \quad (2.33)$$

burada x, α, λ ve $\theta > 0$ olarak tanımlanmaktadır.

2.8 Marshall-Olkin Dağılım Aileleri

2.8.1 Marshall-Olkin Dağılım Ailesi

Bilinen dağılım ailelerine parametre eklenmesi basit bir işlem olmayıp karmaşık bir süreç gerektirmesi nedeniyle akademik çalışmalarda büyük bir öneme sahip olmuştur. Genel olarak literatürde yer alan tek parametrelili dağılım aileleri veri modellemede yeterli olmadığından, birden fazla parametreye sahip yeni dağılımların tanıtılması önem kazanmıştır. Bu nedenle literatürde yer alan klasik dağılımları genişletmek ve daha esnek yapıya sahip dağılım aileleri elde etmek için yeni parametreler tanıtılır. Marshall ve Olkin [1] mevcut dağılım ailesine bir parametre ekleyerek daha esnek bir dağılım elde etmek için genel

bir yöntem geliştirmiş ve tanıtılan dağılım ailesini Marshall-Olkin (MO) olarak adlandırmışlardır. Tanıtılan bu yeni dağılım ailesi kısaca aşağıdaki gibi elde edilir: $X_1, X_2, \dots$ birbirinden bağımsız ve aynı $F(x)$ dağılımına sahip test birimlerinin yaşam zamanını belirtsin. T rastgele değişkeni de $X_1, X_2, \dots$ 'den bağımsız olarak $P(T = t) = \alpha(1 - \alpha)^{t-1}$, $0 < \alpha < 1$ geometrik dağılımsın. İlk bozulma zamanı olan $Y = \min(X_1, X_2, \dots, X_T)$ MO dağılımına sahip olur ve df aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} G(x; \alpha) &= 1 - \sum_{t=1}^{\infty} P(\min(X_1, X_2, \dots, X_t) > x) \alpha(1 - \alpha)^t \\ &= 1 - \alpha [1 - F(x)] \sum_{t=1}^{\infty} [(1 - \alpha)(1 - F(x))]^{t-1} \\ &= \frac{F(x)}{\alpha + (1 - \alpha)F(x)} \end{aligned} \quad (2.34)$$

MO dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu ise

$$\frac{dG(x; \alpha)}{dx} = g(x; \alpha) = \frac{\alpha f(x)}{[\alpha + (1 - \alpha)F(x)]^2} \quad (2.35)$$

biçiminde elde edilir.

2.8.2 Genelleştirilmiş Marshall-Olkin Dağılım Ailesi

Uygulamalı bilimlerdeki deneyler genellikle verilerin analizini gerektirir ancak bu veriler genellikle literatürde mevcut olan bilimsel dağılımlara uymaz. Bu nedenle bu tarz verileri modellemek için daha esnek dağılım ailelerini tanımlamaya ihtiyaç duyulmaktadır. Bu dağılım ailelerinden biri de MO dağılımının bir genellemesi olan genelleştirilmiş Marshall-Olkin [54] (GMO) dağılım ailesidir. $\alpha \in [0, 1]$, $\lambda \in [0, 1]$ ve $F(x)$ herhangi bir dağılıma ait df olsun. Bu durumda GMO dağılım ailesine ilişkin df aşağıdaki gibidir.

$$G(x) = \frac{\lambda F(x) + (1 - \lambda)[F(x)]^2}{[\alpha + (1 - \alpha)F(x)]} \quad (2.36)$$

GMO dağılımına ilikin oyf ise

$$g(x) = \frac{(1 - \alpha)(1 - \lambda)[F(x)]^2 + 2\alpha(1 - \lambda)F(x) + \alpha\lambda}{[\alpha + (1 - \alpha)F(x)]^2} f(x) \quad (2.37)$$

GMO dağılım ailesinde $\lambda = 1$ alınırsa MO dağılım ailesi elde edilir. GMO dağılımını iki dağılımın birleşimi olarak

$$G(x) = \lambda F_1(x) + (1 - \lambda)F_2(x) \quad (2.38)$$

yazılabilir. Burada $F_1 = F(x)/\alpha + (1 - \alpha)F(x)$ ile MO dağılımına sahiptir. X rastgele değişkeni MO dağılımlı, Y rastgele değişkeni de $F(x)$ dağılımına sahip olmak üzere, $\max(X, Y)$ 'nin dağılımı $F_2 = [F(x)]^2 / [\alpha + (1 - \alpha)F(x)]$ olur. Bu yeni dağılım ailesine ait yararlı bir seri açılımı ile oyf tekrar aşağıdaki gibi elde edilmiş olup tez çalışmasının 3.2 bölümünde kullanılacaktır.

$(1 - \alpha)[1 - F(x)] \in (0, 1)$ olacak şekilde herhangi x ve α değeri için oyf

$$g(x) = f_0(x) + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{l+1} u_{l,s} f_s(x) \quad (2.39)$$

biçiminde yazılabilir. Burada $f_s(x) = (s + 1)f(x)(F(x))^s$ ve $u_{l,s} = (\lambda - \alpha) \binom{l+1}{s} (1 - \alpha)^l (-1)^s$ şeklindedir.

3

GENELLEŞTİRİLMİŞ MARSHALL OLKİN ÜSTELLEŞTİRİLMİŞ ÜSTEL DAĞILIM

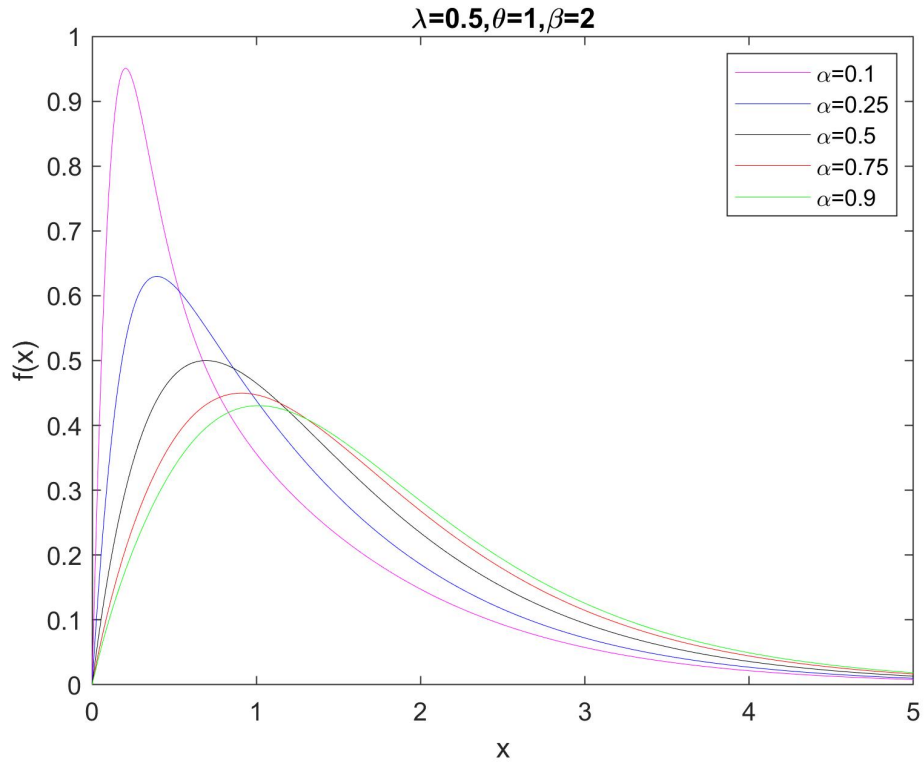
Bu bölümde, GMO dağılımı kullanılarak yeni bir yaşam dağılımı olan genelleştirilmiş Marshall-Olkin üstelleştirilmiş üstel (GMO-ÜÜ) dağılımı tanıtılmıştır. Elde edilen yeni dağılıma ilişkin df, oyf, bozulma oranı fonksiyonu (bof), güvenilirlik fonksiyonu, moment üreten fonksiyon, momentler, Lorenz ve Bonferroni eğrileri gibi dağılımsal özellikleri irdelenmiştir. Yeni elde edilen modelin parametre tahmin edicileri EÇO, EKK, AEKK, CvM ve AD tahmin yöntemleriyle elde edilmiştir. Bu beş farklı tahmin edicinin yan ve hata kareler ortalaması (HKO) bakımından performanslarını değerlendirmek için Monte Carlo (MC) simülasyon çalışması yapılmıştır. MC simülasyon çalışmasına ek olarak GMO-ÜÜ dağılımının gerçek hayatta kullanılabilirliğini göstermek amacıyla dört farklı gerçek veri çalışması yapılmıştır. Ayrıca her bir gerçek veri setine uyum gösteren rakip modeller ve elde edilen yeni model bazı uyum kriterleri ve test istatistikleri açısından karşılaştırılmıştır [55].

3.1 GMO-ÜÜ Dağılımının Elde Edilmesi

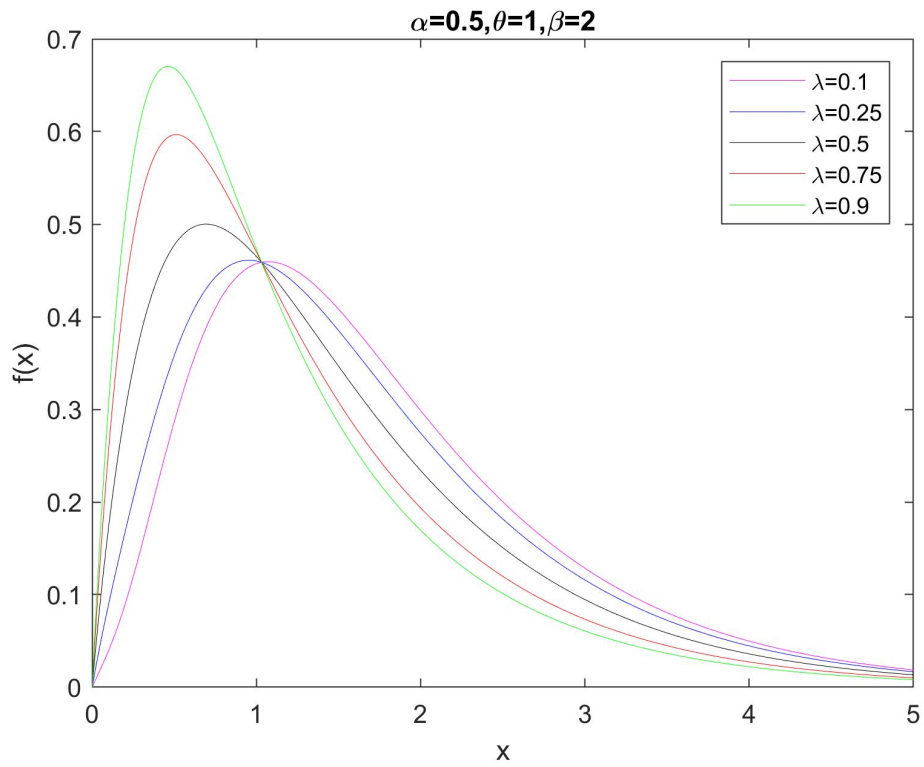
2.36 eşitliğinde yer alan dağılım fonksiyonunda $F(x)$ yerine 2.23 eşitliğinde yer alan ÜÜ dağılımına ait df yazılırsa GMO-ÜÜ olarak adlandırılan yaşam zamanı dağılımı elde edilmiş olur. Yeni elde edilen bu dağılıma ilişkin df ve oyf sırası ile aşağıdaki eşitliklerde verilmiştir.

$$G(x, \eta) = \frac{\lambda(1 - \exp(-\theta x))^\beta + (1 - \lambda)[1 - \exp(-\theta x)]^{2\beta}}{\alpha + (1 - \alpha)(1 - \exp(-\theta x))^\beta} \quad (3.1)$$

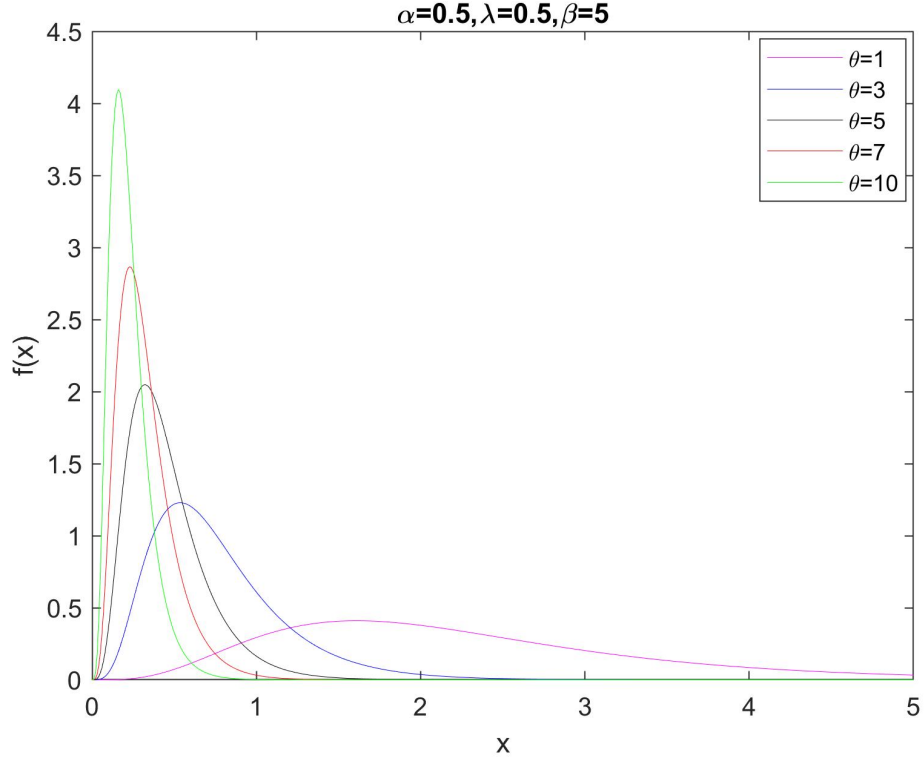
$$g(x, \eta) = \left(\frac{(1-\alpha)(1-\lambda)[1-\exp(-\theta x)]^{2\beta} + 2\alpha(1-\lambda)[1-\exp(-\theta x)]^\beta + \alpha\lambda}{[\alpha + (1-\alpha)(1-\exp(-\theta x))^\beta]^2} \right) \times \beta\theta \exp(-\theta x) [1 - \exp(-\theta x)]^{\beta-1} \quad (3.2)$$



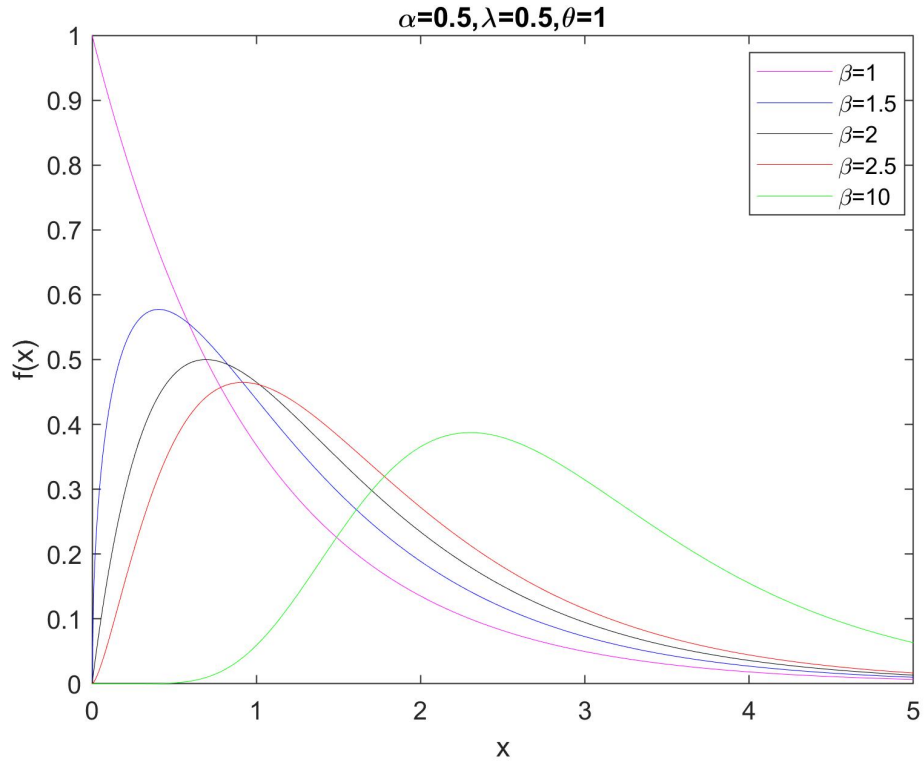
Şekil 3.1 GMO-ÜÜ dağılımının farklı α parametre değerlerine ilişkin oyf



Şekil 3.2 GMO-ÜÜ dağılımının farklı λ parametre değerlerine ilişkin oyf



Şekil 3.3 GMO-ÜÜ dağılımının farklı θ parametre değerlerine ilişkin oyf



Şekil 3.4 GMO-ÜÜ dağılımının farklı β parametre değerlerine ilişkin oyf

Burada $\eta = (\alpha, \lambda, \theta, \beta)$ parametre vektörünü belirtmektedir ve $\alpha, \lambda \in [0, 1)$, $\theta, \beta > 0$ 'dır. GMO-ÜÜ dağılımında $\lambda = 1$ alınırsa Marshall-Olkin dağılımı elde edilir. Eğer GMO-ÜÜ dağılımında $\alpha = 1$, $\lambda = 1$ ve $\beta = 1$ alınırsa üstel dağılım elde edilir. Modeldeki diğer parametreler sabit tutulurken, her parametrenin farklı değerlerine ilişkin oyf grafikleri Şekil 3.1, 3.2, 3.3 ve 3.4'te gösterilmektedir.

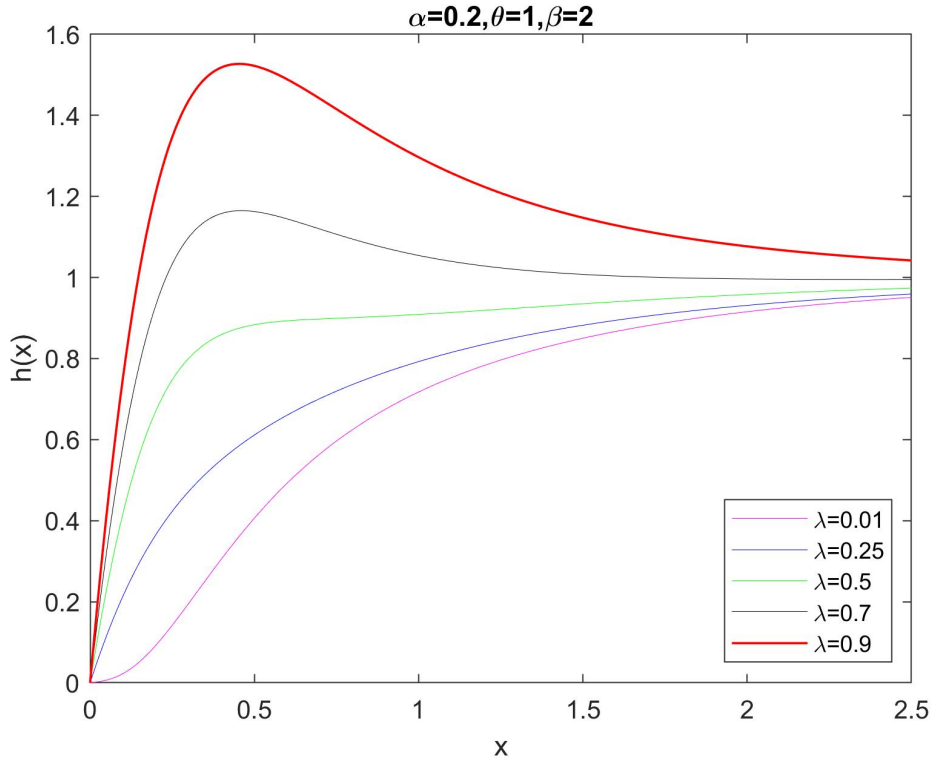
GMO-ÜÜ dağılımı için sağkalım fonksiyonu ve bof sırasıyla

$$S(x, \eta) = \frac{\left[\alpha + (1 - \lambda)(1 - \exp(-\theta x))^\beta \right] \left[1 - (1 - \exp(-\theta x))^\beta \right]}{\alpha + (1 - \alpha)(1 - \exp(-\theta x))^\beta} \quad (3.3)$$

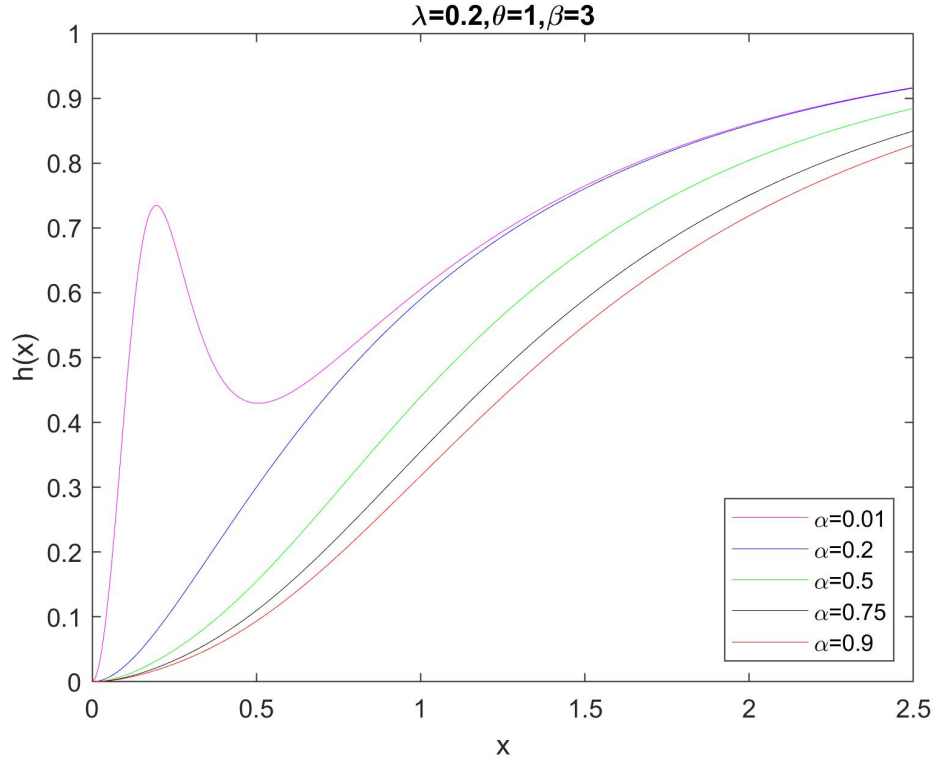
ve

$$h(x, \eta) = \frac{\left[(1 - \alpha)(1 - \lambda)(1 - \exp(-\theta x))^{2\beta} + 2\alpha(1 - \lambda)(1 - \exp(-\theta x))^\beta \right]}{\left[\alpha + (1 - \lambda)(1 - \exp(-\theta x))^\beta \right] \left[\alpha + (1 - \alpha)(1 - \exp(-\theta x))^\beta \right]} \times \frac{\theta\beta \exp(-\theta x)(1 - \exp(-\theta x))^{\beta-1}}{\left[1 - (1 - \exp(-\theta x))^\beta \right]} \quad (3.4)$$

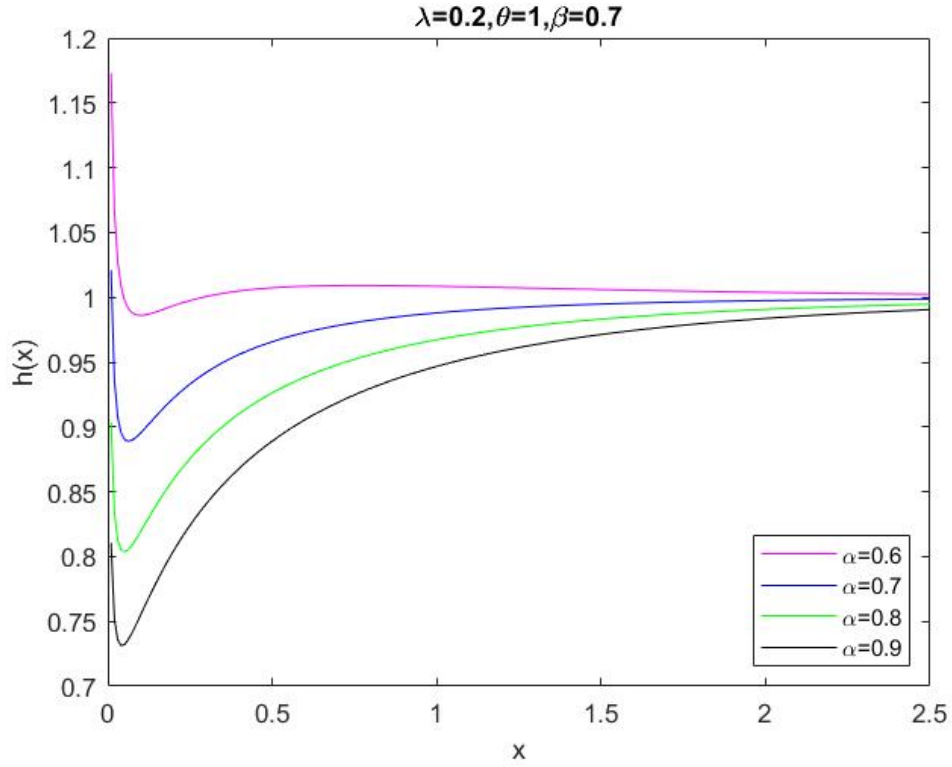
biçimindedir. Modeldeki diğer parametreler sabit tutulurken farklı parametre değerleri için bof grafikleri Şekil 3.5, 3.6, 3.7 ve 3.8'de yer almaktadır.



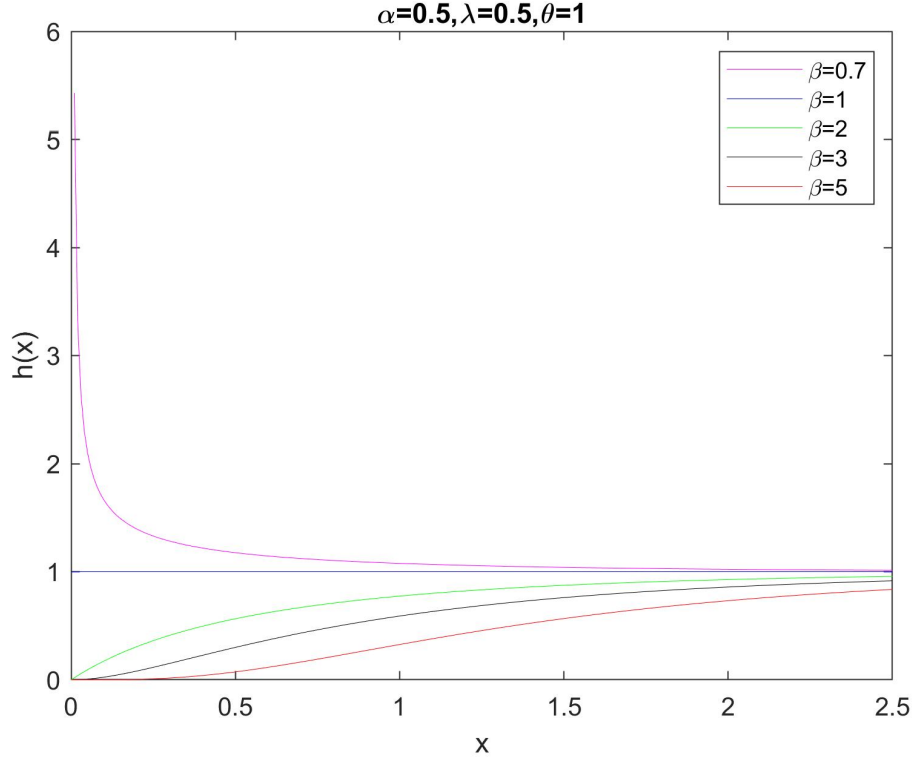
Şekil 3.5 Farklı değerler alan λ parametresi için GMO-ÜÜ dağılımının bof



Şekil 3.6 Farklı değerler alan α parametresi için GMO-ÜÜ dağılımının bof



Şekil 3.7 Farklı değerler alan α parametresi için GMO-ÜÜ dağılımının bof



Şekil 3.8 Farklı değerler alan β parametresi için GMO-ÜÜ dağılımının bof

GMO-ÜÜ dağılımına ait bof grafikleri incelendiğinde, Şekil 3.5'te ters kuvvet eğrisi, Şekil 3.6'da artan-azalan-artan ve sadece artan, Şekil 3.7'de kuvvet eğrisi ve son olarak Şekil 3.8 incelendiğinde ise artan, azalan ve sabit bof fonksiyonlarına sahip oldukları görülmektedir. Bundan dolayı GMO-ÜÜ dağılımı artan, azalan, ters kuvvet eğrisi, kuvvet eğrisi, artan azalan artan ve sabit bozulma oranı fonksiyonlarını gerektiren verileri modelleme esnekliğine sahip olmaktadır.

3.2 Dağılıma Ait Bazı İstatistiksel Özellikler

Bu bölümde GMO-ÜÜ dağılımına ilişkin moment üreten fonksiyon, momentler, Lorenz ve Bonferroni eğrileri ve sayı üreten fonksiyon gibi bazı özelliklere değinilecektir.

X rastgele değişkeni GMO-ÜÜ dağılımına sahip olmak üzere, dağılıma ait moment üreten fonksiyon Eşitlik 3.5 ile aşağıdaki gibi elde edilir.

$$M'_x(t) = M_{x,0}^*(t) + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{l+1} u_{l,s} M_{x,s}^*(t) \quad (3.5)$$

Burada $M_{x,0}^*(t) = \int_0^\infty \exp(tx) f_0(x) dx$ ve $M_{x,s}^*(t) = \int_0^\infty \exp(tx) f_s(x) dx$ aşığıdaki gibi hesaplanır.

$$M_{x,0}^*(t) = E(e^{tx}) = \theta \beta \int_0^\infty \exp(t(x-\theta)) (1 - \exp(-x\theta))^{\beta-1} dx \quad (3.6)$$

$$M_{x,s}^*(t) = (s+1) \theta \beta \int_0^\infty \exp(t(x-\theta)) (1 - \exp(-x\theta))^{\beta(s+1)-1} dx \quad (3.7)$$

Eşitlik 3.6 ve Eşitlik 3.7' de yer alan integrallerde $u = \exp(-\theta x)$ dönüşümü uygulanarak aşığıdaki eşitlikler elde edilir.

$$M_{x,0}^*(t) = \beta \int_0^1 u^{-\frac{t}{\theta}} (1-u)^{\beta-1} du = \frac{\Gamma(1-\frac{t}{\theta}) \Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\frac{t}{\theta})} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} M_{x,s}^*(t) &= (s+1) \beta \int_0^1 u^{-\frac{t}{\theta}} (1-u)^{\beta(s+1)-1} du \\ &= (s+1) \frac{\Gamma(1-\frac{t}{\theta}) \Gamma(\beta(s+1)+1)}{\Gamma(\beta(s+1)+1-\frac{t}{\theta})} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Yukarıdaki her iki eşitlikteki $\Gamma(\cdot)$, 2.5'de verilen gama fonksiyonunu belirtmektedir. Böylece moment üreten fonksiyon 3.8 ve 3.9 yardımıyla,

$$M_x'(t) = \Gamma\left(1 - \frac{t}{\theta}\right) \left[\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\frac{t}{\theta})} + \sum_{l=0}^\infty \sum_{s=0}^{l+1} (s+1) (\lambda - \alpha) A \right] \quad (3.10)$$

biçiminde elde edilir. Burada $A = \binom{l+1}{s} (1-\alpha)^l (-1)^s \frac{\Gamma(\beta(s+1)-1)}{\Gamma(\beta(s+1)+1-\frac{t}{\theta})}$ şeklindedir. GMO-ÜÜ(x, η) dağılımına ilişkin r . moment ise moment üreten fonksiyondaki benzer mantıkla aşığıdaki biçimde elde edilir.

$$M_r' = M_{r,0}^* + \sum_{l=0}^\infty \sum_{s=0}^{l+1} u_{l,s} M_{r,s}^* \quad (3.11)$$

Burada $M_{r,0}^* = \int_0^\infty x^r f_0(x) dx$ ve $M_{r,s}^* = \int_0^\infty x^r f_s(x) dx$ şeklindedir ve aşığıdaki adımlar izlenerek elde edilir.

$$M_{r,0}^* = \theta \beta \int_0^\infty x^r \exp(-\theta x) (1 - \exp(-\theta x))^{\beta-1} dx \quad (3.12)$$

$$M_{r,s}^* = (s+1) \theta \beta \int_0^\infty x^r \exp(-\theta x) (1 - \exp(-\theta x))^{\beta(s+1)-1} dx \quad (3.13)$$

Eşitlik 3.12’de yer alan $(1 - \exp(-\theta x))^{\beta-1}$ ve Eşitlik 3.13’te yer alan $(1 - \exp(-\theta x))^{\beta(s+1)-1}$ ifadeleri binom seri açılımı kullanılarak aşağıdaki gibi tekrar yazılabilir.

$$(1 - \exp(-\theta x))^{\beta-1} = \sum_{i=0}^{\beta-1} \binom{\beta-1}{i} (-1)^i (\exp(-\theta x))^i \quad (3.14)$$

$$(1 - \exp(-\theta x))^{\beta(s+1)-1} = \sum_{i=0}^{\beta(s+1)-1} \binom{\beta(s+1)-1}{i} (-1)^i (\exp(-\theta x))^i \quad (3.15)$$

3.14 ve 3.15’te yer alan ifadeler sırası ile Eşitlik 3.12 ve 3.13’te yerine yazılarak $M_{r,0}^*$ ve $M_{r,s}^*$ integralleri,

$$\begin{aligned} M_{r,0}^* &= \theta \beta \int_0^\infty x^r \exp(-\theta x) \sum_{i=0}^{\beta-1} \binom{\beta-1}{i} (-1)^i (\exp(-\theta x))^i dx \\ &= \beta \sum_{i=0}^{\beta-1} \binom{\beta-1}{i} (-1)^i \frac{\Gamma(r+1)}{\theta^{r(i+1)+1}} \end{aligned} \quad (3.16)$$

ve

$$\begin{aligned} M_{r,s}^* &= (s+1) \theta \beta \int_0^\infty x^r \sum_{i=1}^{\beta(s+1)} (\exp(-\theta x))^{i+1} \binom{\beta(s+1)-1}{i} dx \\ &= (s+1) \beta \sum_{i=1}^{\beta(s+1)-1} \binom{\beta(s+1)-1}{i} (-1)^i \frac{\Gamma(r+1)}{\theta^{r(i+1)+1}} \end{aligned} \quad (3.17)$$

şeklinde hesaplanır. Böylece $\text{GMO-}\ddot{\text{U}}\ddot{\text{U}}(x, \eta)$ dağılımına ait r . moment aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} M_r' &= \frac{\beta \Gamma(r+1)}{\theta^r} \sum_{i=0}^{\beta-1} \binom{\beta-1}{i} \frac{(-1)^i}{(i+1)^{r+1}} + \\ &\quad \frac{\beta \Gamma(r+1)}{\theta^r} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{l+1} \sum_{i=1}^{\beta(s+1)-1} (s+1) \times \\ &\quad (\lambda - \alpha) \binom{l+1}{s} (1 - \alpha)^l (-1)^{s+i} \times \\ &\quad \binom{\beta(s+1)-1}{i} \frac{1}{(i+1)^{r+1}} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Burada $\Gamma(\cdot)$, Eşitlik 2.5 de yer alan gama fonksiyonunu belirtmektedir ve $r = 1, 2, \dots$ dir. GMO-ÜÜ (x, η) dağılımının tam olmayan olamayan r . momentini ise aşağıdaki adımlar takip edilerek elde edilir.

$$\begin{aligned}
m_r(y) &= \int_0^y x^r g(x) dx \\
&= \frac{\beta}{\theta^r} \sum_{i=0}^{\beta-1} \binom{\beta-1}{i} (-1)^i \frac{\Gamma(r+1, \theta y(i+1))}{(i+1)^{r+1}} + \\
&\quad \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{l+1} \sum_{i=0}^{\beta(s+1)-1} (\lambda - \alpha) \binom{l+1}{s} (1 - \alpha)^l \\
&\quad \frac{\beta}{\theta^r} (s+1) \binom{\beta(s+1)-1}{i} (-1)^{i+s} \frac{\Gamma(r+1, y\theta(i+1))}{(i+1)^{r+1}}
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Burada $\Gamma(\alpha, \beta)$ tam olmayan gama fonksiyonunu belirtmektedir. Bonferroni ve Lorenz eğrileri ekonomi ve güvenilirlik alanlarındaki verileri analiz etmek için kullanılan temel istatistiksel yöntemlerden biridir. Buna göre GMO-ÜÜ (x, η) dağılımına ait Bonferroni ve Lorenz eğrilerine ilişkin fonksiyonlar sırasıyla

$$\begin{aligned}
B(p) &= \frac{1}{p\mu} \int_0^q x f(x) dx \\
&= \frac{\beta}{p\theta\mu} \sum_{i=1}^{\beta-1} \binom{\beta-1}{i} (-1)^i \frac{\Gamma(2, q\theta(i+1))}{(i+1)^2} + \\
&\quad \frac{\beta}{p\theta\mu} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{l+1} \sum_{i=0}^{\beta(s+1)-1} (\lambda - \alpha) \binom{l+1}{s} (1 - \alpha)^l \times \\
&\quad (s+1) \binom{\beta(s+1)-1}{i} (-1)^{s+i} \frac{\Gamma(2, \theta q(i+1))}{(i+1)^2}
\end{aligned} \tag{3.20}$$

ve

$$\begin{aligned}
L(p) &= \frac{1}{\mu} \int_0^q x g(x) dx \\
&= \frac{\beta}{\theta\mu} \sum_{i=0}^{\beta-1} \binom{\beta-1}{i} (-1)^i \frac{\Gamma(2, q\theta(i+1))}{(i+1)^2} + \\
&\quad \frac{\beta}{\theta\mu} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{l+1} \sum_{i=0}^{\beta(s+1)-1} (\lambda - \alpha) \binom{l+1}{s} (1 - \alpha)^l \times \\
&\quad (s+1) \binom{\beta(s+1)-1}{i} (-1)^{s+i} \frac{\Gamma(2, \theta q(i+1))}{(i+1)^2}
\end{aligned} \tag{3.21}$$

biçimindedir. Burada μ parametresi ilgilenilen dağılımın birinci momentini ve $q = x(p)$ kantil fonksiyonunu belirtmektedir. $\text{GMO-ÜÜ}(x, \eta)$ ve $p \in (0, 1)$ olmak üzere GMO-ÜÜ dağılımına ait kantil fonksiyonu

$$x_p = - \frac{\log \left(- \left(\frac{-\lambda + p - p\alpha + \sqrt{\lambda^2 - 2\lambda p\alpha + p^2 - 2p^2\alpha + p^2\alpha^2 + 4p\alpha}}{2(1-\lambda)} \right)^{\frac{1}{\beta}} + 1 \right)}{\theta} \quad (3.22)$$

şeklindedir. $U(0, 1)$ düzgün dağılıma sahip bir rastgele değişken olmak üzere, kantil fonksiyonda p yerine $U(0, 1)$ yazılırsa GMO-ÜÜ dağılımdan sayı üretme algoritması elde edilir.

3.3 Nokta Tahmini

3.3.1 En Çok Olabilirlik Tahmin Edicisi

$X_1, X_2, \dots, X_n$, $\text{GMO-ÜÜ}(x, \eta)$ dağılımından alınmış n birimlik örneklem olsun. Buna göre dağılıma ilişkin log-olabilirlik fonksiyonu

$$\begin{aligned} \ell(\eta) = & \sum_{i=1}^n \log \left((1-\alpha)(1-\lambda)(1-\exp(-\theta x_i))^{2\beta} \right) \times \\ & 2\alpha(1-\lambda)(1-\exp(-\theta x_i))^\beta + \alpha\lambda + n \log(\theta\beta) - \\ & \theta \sum_{i=1}^n x_i + (\beta-1) \sum_{i=1}^n \log(1-\exp(-\theta x_i)) - \\ & 2 \sum_{i=1}^n \log \left(\alpha + (1-\alpha)(1-\exp(-\theta x_i))^\beta \right) \end{aligned} \quad (3.23)$$

biçimindedir. Parametrelerin EÇÖ tahmin edicileri, $\ell(\eta)$ fonksiyonunun $\eta = (\alpha, \lambda, \theta, \beta)$ parametrelerine göre türevi alınıp sıfıra eşitlenerek oluşturulan olabilirlik denklemlerinin çözümü ile aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} \frac{\ell(\eta)}{\partial \alpha} = & \sum_{i=1}^n \frac{2(1-\lambda)(1-\exp(-\theta x_i))^\beta + \lambda - (1-\lambda)(1-\exp(-\theta x_i))^{2\beta}}{(1-\alpha)(1-\lambda)(1-\exp(-\theta x_i))^{2\beta} + 2\alpha(1-\lambda)(1-\exp(-\theta x_i))^\beta + \alpha\lambda} \\ & - \sum_{i=1}^n \frac{(1-(1-\exp(-\theta x_i))^\beta)}{\alpha + (1-\alpha)(1-\exp(-\theta x_i))^\beta} = 0 \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\frac{\ell(\eta)}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha - (1-\alpha)(1-\exp(-\theta x_i))^{2\beta} - 2\alpha(1-\exp(-\theta x_i))^\beta + \alpha}{(1-\alpha)(1-\lambda)(1-\exp(-\theta x_i))^{2\beta} + 2\alpha(1-\lambda)(1-\exp(-\theta x_i))^\beta + \alpha\lambda} = 0 \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} \frac{\ell(\eta)}{\partial \theta} = & \sum_{i=1}^n \frac{2\beta(1-\lambda)x_i \exp(-\theta x_i) [(1-\lambda)(1-\exp(-\theta x_i))^{2\beta} + \alpha(1-\exp(-\theta x_i))^\beta]}{(1-\exp(-\theta x_i)) [(1-\alpha)(1-\lambda)(1-\exp(-\theta x_i))^{2\beta} + 2\alpha(1-\lambda)(1-\exp(-\theta x_i))^\beta + \alpha\lambda]} \\ & + \frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n \frac{(\beta-1)x_i \exp(-\theta x_i)}{1-\exp(-\theta x_i)} - \sum_{i=1}^n \frac{2(1-\alpha)(1-\exp(-\theta x_i))^\beta \beta x_i \exp(-\theta x_i)}{(1-\exp(-\theta x_i)) (\alpha + (1-\alpha)(1-\exp(-\theta x_i))^\beta)} = 0 \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} \frac{\ell(\eta)}{\partial \beta} = & \sum_{i=1}^n \frac{2(1-\lambda) \log(1-\exp(-\theta x_i)) [(1-\alpha)(1-\exp(-\theta x_i))^{2\beta} + \alpha(1-\exp(-\theta x_i))^\beta]}{(1-\alpha)(1-\lambda)(1-\exp(-\theta x_i))^{2\beta} + 2\alpha(1-\lambda)(1-\exp(-\theta x_i))^\beta + \alpha\lambda} \\ & + \frac{n}{\beta} + \log(1-\exp(-\theta x_i)) - \sum_{i=1}^n \frac{2(1-\alpha)(1-\exp(-\theta x_i))^\beta \log(1-\exp(-\theta x_i))}{\alpha + (1-\alpha)(1-\exp(-\theta x_i))^\beta} = 0 \end{aligned} \quad (3.27)$$

3.3.2 En Küçük Kareler ve Ağırlıklı En Küçük Kareler Tahmin Edicileri

$X_1, X_2, \dots, X_n$, $\text{GMO-}\ddot{\text{U}}\ddot{\text{U}}(x, \eta)$ dağılımından alınmış n birimlik örnek olsun. $X_{1:n}, X_{2:n}, \dots, X_{n:n}$ 'de bu örnekleme ilişkin sıralı yaşam zamanlarını belirtsin. Bu durumda $\eta = (\alpha, \lambda, \theta, \beta)$ parametrelerinin EKK tahmin edicisi aşağıda verilen amaç fonksiyonunun minimize edilmesi ile elde edilir.

$$\Psi(\alpha, \lambda, \theta, \beta) = \sum_{i=1}^n \left[G(x_{i:n}, \alpha, \lambda, \theta, \beta) - \frac{i}{n+1} \right]^2 \quad (3.28)$$

Herbir parametre için amaç fonksiyonunun türevi alınır

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi(\eta)}{\partial \alpha} &= \sum_{i=1}^n \frac{[\lambda [F(x_{i:n})] + (1-\lambda) [F(x_{i:n})]^2] [1 - F(x_{i:n})]}{\alpha + (1-\alpha) [F(x_{i:n})]} \times \\ &\quad \left(G(x_{i:n}, \alpha, \lambda, \theta, \beta) - \frac{i}{n+1} \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$\frac{\partial \Psi(\eta)}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^n \frac{[F(x_{i:n})] - [F(x_{i:n})]^2}{\alpha + (1-\alpha) [F(x_{i:n})]} \left(G(x_{i:n}, \alpha, \lambda, \theta, \beta) - \frac{i}{n+1} \right) = 0 \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi(\eta)}{\partial \theta} &= \sum_{i=1}^n \frac{\beta x_{i:n} \exp(-\theta x) [((\alpha-1)F(x_{i:n}) - 2\alpha)(\lambda-1)(F(x_{i:n}))^2 + \lambda\alpha F(x_{i:n})]}{(1-\exp(\theta x_{i:n}))[\alpha + (1-\alpha)F(x_{i:n})]^2} \times \\ &\quad \left(G(x_{i:n}, \alpha, \lambda, \theta, \beta) - \frac{i}{n+1} \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi(\eta)}{\partial \beta} &= \sum_{i=1}^n \frac{[(\alpha-1)F(x) - 2\alpha](\lambda-1)(F(x))^2 + \lambda\alpha F(x)}{[\alpha + (1-\alpha)F(x)]^2} \times \\ &\quad \ln(1 - \exp(-\theta x)) \left(G(x_{i:n}, \alpha, \lambda, \theta, \beta) - \frac{i}{n+1} \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.32)$$

tahmin denklemleri elde edilir. Burada $F(x)$ fonksiyonu $\ddot{\text{U}}\ddot{\text{U}}$ dağılımına ve $G(x)$ fonksiyonu ise $\text{GMO-}\ddot{\text{U}}\ddot{\text{U}}(x, \eta)$ dağılımına sahiptir. Görüldüğü üzere parametrelerin tahmin edicileri matematiksel olarak açık bir biçimde elde edilmediğinden dolayı, bu tahmin edicileri bulmak için nümerik yöntemlere başvurulacaktır.

$\text{GMO-}\ddot{\text{U}}\ddot{\text{U}}(x, \eta)$ dağılımına ilişkin AEKK tahmin edicisi ise yine EKK yöntemine benzer şekilde aşağıdaki amaç fonksiyonunun $\eta = (\alpha, \lambda, \theta, \beta)$ parametrelerine göre minimize edilmesiyle elde edilir.

$$\omega(\alpha, \lambda, \theta, \beta) = \sum_{i=1}^n w_i \left[G(X_{i:n}) - \frac{i}{n+1} \right]^2 \quad (3.33)$$

Burada $w_i = (n+1)^2 (n+2) / (i(n-i+1))$ şeklindedir ve $G(x)$ fonksiyonu $\text{GMO-}\ddot{\text{U}}\ddot{\text{U}}(x, \eta)$ dağılımına sahip dağılım fonksiyonunu ifade etmektedir.

Parametreler için tahmin denklemleri sırasıyla

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega(\eta)}{\partial \alpha} &= \sum_{i=1}^n w_i \frac{[\lambda F(x_{i:n}) + (1-\lambda) F(x_{i:n})^2]}{\alpha + (1-\alpha) F(x_{i:n})} \times \\ &[1 - F(x_{i:n})] \left(G(x_{i:n}, \alpha, \lambda, \theta, \beta) - \frac{i}{n+1} \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega(\eta)}{\partial \lambda} &= \sum_{i=1}^n w_i \frac{[F(x_{i:n}) - F(x_{i:n})^2]}{\alpha + (1-\alpha) F(x_{i:n})} \times \\ &\left(G(x_{i:n}, \alpha, \lambda, \theta, \beta) - \frac{i}{n+1} \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega(\eta)}{\partial \theta} &= \sum_{i=1}^n w_i \frac{[(\alpha - 1) F(x_{i:n}) - 2\alpha] (\lambda - 1) (F(x_{i:n}))^2 + \lambda \alpha F(x_{i:n})]}{(1 - \exp(\theta x_{i:n})) [\alpha + (1-\alpha) F(x_{i:n})]^2} \times \\ &\beta x_{i:n} \exp(-\theta x) \left(G(x_{i:n}, \alpha, \lambda, \theta, \beta) - \frac{i}{n+1} \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega(\eta)}{\partial \beta} &= \sum_{i=1}^n w_i \frac{[(\alpha - 1) F(x) - 2\alpha] (\lambda - 1) (F(x))^2 + \lambda \alpha F(x)}{[\alpha + (1-\alpha) F(x)]^2} \times \\ &\ln(1 - \exp(-\theta x)) \left(G(x_{i:n}, \alpha, \lambda, \theta, \beta) - \frac{i}{n+1} \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.37)$$

biçimindedir. Ancak yukarıdaki denklemler doğrusal olmayan ifadelerle sahip olduğu için $\eta = (\alpha, \lambda, \theta, \beta)$ parametrelerine ait tahminler bazı nümerik yöntemler kullanılarak elde edilir.

3.3.3 Anderson-Darling Tahmin Edicisi

GMO-ÜÜ dağılımının $\eta = (\alpha, \lambda, \theta, \beta)$ parametreleri için AD tahmin edicileri,

$$A(\alpha, \lambda, \theta, \beta) = -n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (2i-1) [\log(G(x_{i:n}, \alpha, \lambda, \theta, \beta)) + \log(1 - G(x_{i:n}, \alpha, \lambda, \theta, \beta))] \quad (3.38)$$

fonksiyonunun $\eta = (\alpha, \lambda, \theta, \beta)$ parametrelerine göre minimize edilmesi ile elde edilir.

3.3.4 Cramer-von Mises Tahmin Edicisi

GMO-ÜÜ dağılımının $\eta = (\alpha, \lambda, \theta, \beta)$ parametreleri için CvM tahmin edicisi

$$C(\alpha, \lambda, \theta, \beta) = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^n \left[G(x_{i:n}, \alpha, \lambda, \theta, \beta) - \frac{2i-1}{2n} \right]^2 \quad (3.39)$$

fonksiyonunun $\eta = (\alpha, \lambda, \theta, \beta)$ parametrelerine göre minimize edilerek aşağıdaki tahmin denklemlerinin çözümüyle elde edilir.

$$\frac{\partial \Psi(\eta)}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^n \frac{[\lambda [F(x_{i:n})] + (1-\lambda) [F(x_{i:n})]^2] [1 - F(x_{i:n})]}{\alpha + (1-\alpha) F(x_{i:n})} \times \left(G(x_{i:n}, \alpha, \lambda, \theta, \beta) - \frac{2i-1}{2n} \right) = 0 \quad (3.40)$$

$$\frac{\partial \Psi(\eta)}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^n \frac{[F(x_{i:n})] - [F(x_{i:n})]^2}{\alpha + (1-\alpha) F(x_{i:n})} \left(G(x_{i:n}, \alpha, \lambda, \theta, \beta) - \frac{2i-1}{2n} \right) = 0 \quad (3.41)$$

$$\frac{\partial \Psi(\eta)}{\partial \theta} = \sum_{i=1}^n \frac{[(\alpha-1) F(x_{i:n}) - 2\alpha] (\lambda-1) (F(x_{i:n}))^2 + \lambda \alpha F(x_{i:n})}{(1 - \exp(\theta x_{i:n})) [\alpha + (1-\alpha) F(x_{i:n})]^2} \times \beta x_{i:n} \exp(-\theta x) \left(G(x_{i:n}, \alpha, \lambda, \theta, \beta) - \frac{2i-1}{2n} \right) = 0 \quad (3.42)$$

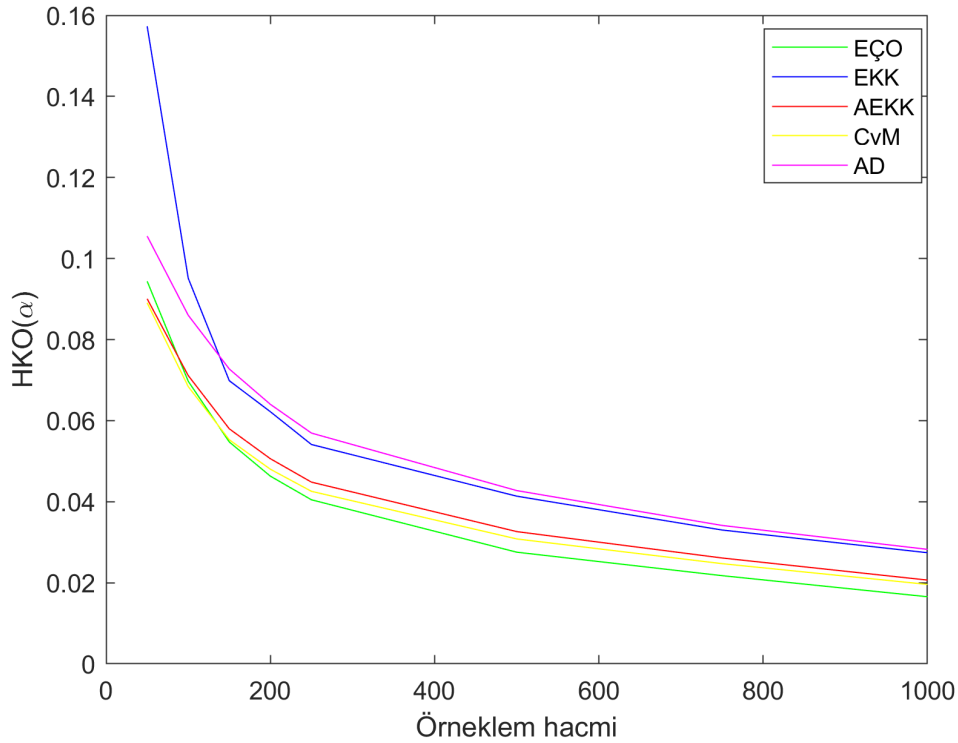
$$\frac{\partial \Psi(\eta)}{\partial \beta} = \sum_{i=1}^n \frac{[(\alpha-1) F(x) - 2\alpha] (\lambda-1) (F(x))^2 + \lambda \alpha F(x)}{[\alpha + (1-\alpha) F(x)]^2} \times \ln(1 - \exp(-\theta x)) \left(G(x_{i:n}, \alpha, \lambda, \theta, \beta) - \frac{2i-1}{2n} \right) = 0 \quad (3.43)$$

Ancak oluşturulan tahmin denklemleri karmaşık ve doğrusal olmayan ifadelerle sahip olduğu için, parametre tahminlerini elde etmek için nümerik yöntemlere başvurulur.

3.4 Simülasyon Çalışması

Bu bölümde, GMO-ÜÜ dağılımının bilinmeyen parametrelerinin tahmini için beş farklı tahmin yönteminden elde edilen EÇO, EKK, AEKK, AD ve CvM tahmin edicilerinin performanslarını HKO ve ortalama yan bakımından değerlendirmek amacı ile bir MC çalışması yürütülmüştür. Veri setleri rastgele olarak seçilen $\eta_1 = (0.4, 0.8, 1, 0.5)$, $\eta_2 = (0.5, 0.7, 3, 0.9)$ ve $\eta_3 = (0.2, 0.5, 2, 0.75)$ parametre değerlerinden üretilmiştir. HKO ve ortalama yan değerleri her bir model için 50, 100, 150, 200, 250, 500, 750 ve 1000 örneklem büyüklüğü ile denemenin 5000 kez tekrarlanmasıyla elde edilmiştir. Simülasyon sonuçları Tablo 3.1, Tablo 3.2 ve Tablo 3.3'te yer almaktadır. Her bir parametreye ilişkin beş farklı tahmin yönteminden elde edilen HKO grafikleri Şekil 3.9 – 3.20'de sunulmaktadır. Beş farklı tahmin yöntemi için GMO-ÜÜ(x, η) dağılımının parametre tahminlerinin ortalama yan ve HKO değerlerine göre tahmin edicilerin performansını değerlendirmek amacı ile yapılan MC simülasyon sonucunda, tüm parametre senaryoları için beş farklı tahmin yönteminin her birinde örneklem hacmi arttıkça ortalama yan ve HKO değerlerinin düzenli olarak azaldığı görülmektedir.

$\eta_1 = (0.4, 0.8, 1, 0.5)$ durumunda bütün parametreler göz önüne alındığında en iyi tahmin yönteminin EÇO olduğu gözlemlenmiştir. $\eta_2 = (0.5, 0.7, 3, 0.9)$ durumunda λ tahminlerinin HKO değerlerinin tahmin yönteminden bağımsız olarak örneklem hacmi 300'den büyük olduğunda düzenli bir şekilde azaldığı görülmektedir. Ayrıca bu parametre değerleri durumunda β parametresinin HKO değerlerinin diğer iki parametre durumuna göre daha büyük sonuçlar verdiği görülmüştür. $\eta_3 = (0.2, 0.5, 2, 0.75)$ parametre değerleri durumunda α parametresi için CvM tahmin edicilerinin diğer tahmin edicilere göre daha düşük HKO değerlerine sahip olduğu gözlenmiştir. Ancak örneklem hacmi arttıkça EÇO, AEKK ve CvM tahmin edicilerinin birbirine yakın sonuçlar verdiği saptanmıştır. Diğer taraftan λ , θ ve β parametreleri için yine EÇO tahmin edicilerinin HKO değerlerinin diğer tahmin edicilere göre daha düşük sonuçlar verdiği görülmüştür. Genel olarak ortalama yan ve HKO değerlerindeki azalma bakımından $\eta_3 = (0.2, 0.5, 2, 0.75)$ parametre durumunda diğer parametre durumlarına göre daha iyi sonuçlar elde edilmiştir. $\eta_2 = (0.5, 0.7, 3, 0.9)$ parametre durumunda ise diğer parametre durumlarına göre bütün tahmin ediciler için daha büyük ortalama yan ve HKO değerlerinin olduğu söylenebilir. Simülasyon sonuçları detaylı bir şekilde değerlendirildiğinde, EÇO tahmin edicilerinin diğer tahmin edicilere göre daha düşük yan ve HKO değerine sahip olduğu fakat tahmin edicilerinin genel anlamda birbirlerine yakın sonuçlar verdiği gözlemlenmiştir.



Şekil 3.9 $\eta_1 = (0.4, 0.8, 1, 0.5)$ durumunda α parametresi için HKO

Tablo 3.1 $\alpha = 0.4, \lambda = 0.8, \theta = 1$ ve $\beta = 0.5$ için ortalama yan ve HKO sonuçları

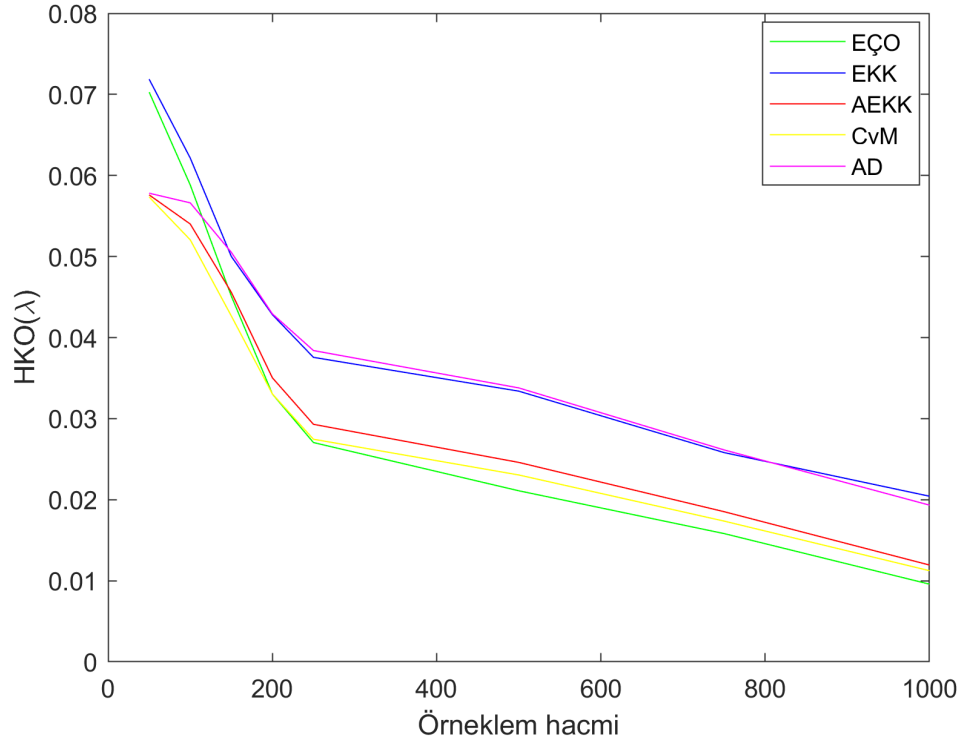
n		Ortalama Yan				HKO			
		$\hat{\alpha}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\theta}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\theta}$	$\hat{\beta}$
50	EÇO	-0.28068	-0.21289	0.12878	0.32917	0.09439	0.07028	0.13230	0.15473
	EKK	-0.26870	-0.14047	-0.04713	0.33943	0.15730	0.07187	0.15674	0.17698
	AEKK	-0.26969	-0.16348	-0.03111	0.29744	0.09006	0.05760	0.12407	0.13903
	CvM	-0.27618	-0.17265	0.01921	0.30419	0.08906	0.05734	0.11549	0.13320
	AD	-0.30248	-0.17779	0.07342	0.40718	0.10553	0.05781	0.17959	0.23130
100	EÇO	-0.23361	-0.18780	0.07709	0.20902	0.06971	0.05883	0.06699	0.06390
	EKK	-0.24670	-0.14643	-0.00722	0.25118	0.09513	0.06215	0.09679	0.09334
	AEKK	-0.23761	-0.15988	0.00178	0.21423	0.07112	0.05401	0.06952	0.06911
	CvM	-0.23717	-0.16180	0.01935	0.21035	0.06840	0.05206	0.06636	0.06327
	AD	-0.26863	-0.17362	0.05957	0.28492	0.08600	0.05662	0.10442	0.11242
150	EÇO	-0.19717	-0.14995	0.04835	0.15931	0.05473	0.04512	0.04279	0.03820
	EKK	-0.22552	-0.13246	-0.00074	0.20328	0.06985	0.05001	0.07593	0.06115
	AEKK	-0.21098	-0.13784	0.00098	0.16955	0.05798	0.04559	0.05071	0.04308
	CvM	-0.20837	-0.13612	0.01048	0.16651	0.05527	0.04267	0.04758	0.04003
	AD	-0.24208	-0.15394	0.04736	0.22584	0.07274	0.05052	0.07987	0.07129
200	EÇO	-0.18062	-0.11785	0.01368	0.13909	0.04630	0.03304	0.02856	0.02769
	EKK	-0.21446	-0.11487	-0.01862	0.17938	0.06220	0.04283	0.05886	0.04530
	AEKK	-0.19743	-0.11361	-0.01861	0.15163	0.05060	0.03504	0.03702	0.03232
	CvM	-0.19429	-0.11093	-0.01358	0.14822	0.04801	0.03305	0.03460	0.03009
	AD	-0.22929	-0.13512	0.01914	0.19605	0.06402	0.04293	0.05951	0.05177
250	EÇO	-0.17093	-0.10282	0.00943	0.13084	0.04047	0.02705	0.02294	0.02325
	EKK	-0.20438	-0.10650	-0.01344	0.16533	0.05411	0.03756	0.04949	0.03730
	AEKK	-0.18725	-0.10235	-0.01433	0.14197	0.04483	0.02930	0.02994	0.02687
	CvM	-0.18377	-0.09893	-0.01115	0.13926	0.04256	0.02746	0.02820	0.02536
	AD	-0.21639	-0.12336	0.01746	0.17859	0.05693	0.03840	0.04993	0.04200
500	EÇO	-0.13525	-0.08224	0.01692	0.10242	0.02754	0.02110	0.01410	0.01368
	EKK	-0.17353	-0.10339	0.01700	0.13296	0.04136	0.03339	0.02920	0.02328
	AEKK	-0.15569	-0.09385	0.01060	0.11435	0.03262	0.02460	0.01754	0.01672
	CvM	-0.15088	-0.08803	0.00957	0.11188	0.03081	0.02305	0.01690	0.01585
	AD	-0.18185	-0.11441	0.03314	0.13973	0.04274	0.03379	0.03000	0.02516
750	EÇO	-0.11531	-0.05141	-0.00069	0.08952	0.02175	0.01582	0.00892	0.01017
	EKK	-0.15256	-0.07956	0.00652	0.11372	0.03301	0.02581	0.01997	0.01660
	AEKK	-0.13710	-0.06916	-0.00002	0.10003	0.02611	0.01852	0.01152	0.01239
	CvM	-0.13262	-0.06358	-0.00158	0.09813	0.02471	0.01736	0.01107	0.01187
	AD	-0.15855	-0.08770	0.01764	0.11813	0.03414	0.02614	0.02019	0.01764
1000	EÇO	-0.09783	-0.02277	-0.01860	0.08534	0.01655	0.00958	0.00604	0.00883
	EKK	-0.13750	-0.05995	-0.00513	0.10715	0.02741	0.02043	0.01516	0.01440
	AEKK	-0.11941	-0.04202	-0.01577	0.09511	0.02066	0.01194	0.00841	0.01080
	CvM	-0.11557	-0.03711	-0.01717	0.09362	0.01959	0.01124	0.00818	0.01042
	AD	-0.14216	-0.06537	0.00334	0.11094	0.02824	0.01933	0.01514	0.01507

Tablo 3.2 $\alpha = 0.5, \lambda = 0.7, \theta = 3$ ve $\beta = 0.9$ için ortalama yan ve HKO sonuçları

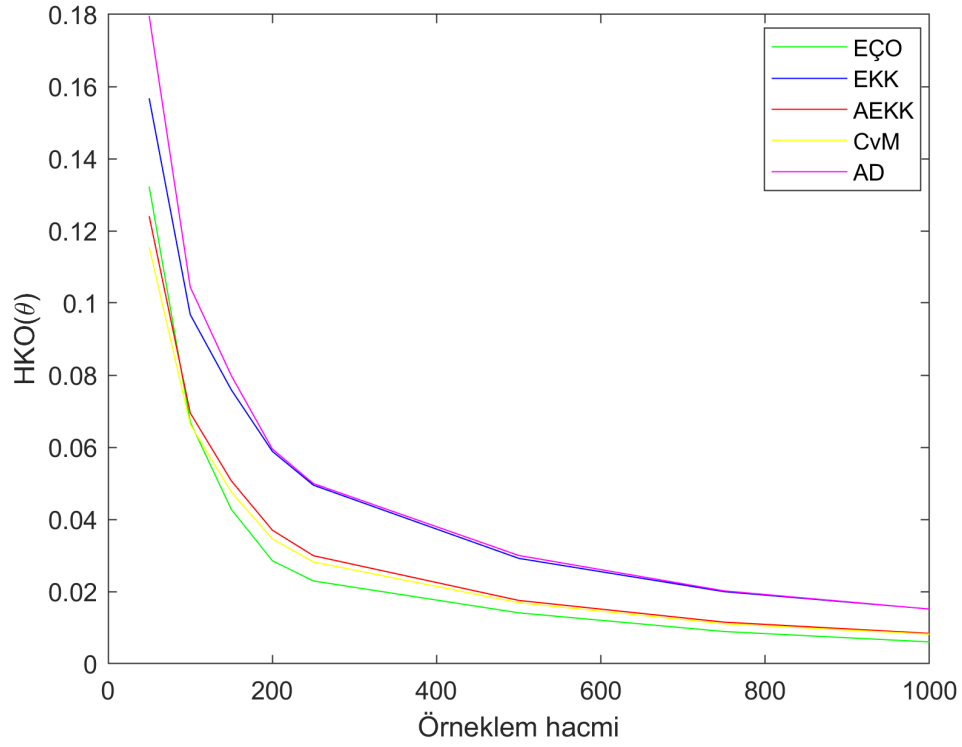
n		Ortalama Yan				HKO			
		$\hat{\alpha}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\theta}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\theta}$	$\hat{\beta}$
50	EÇO	-0.34566	-0.15146	0.00677	0.60609	0.14857	0.05449	0.48936	0.55477
	EKK	-0.36300	-0.07902	-0.41385	0.66166	0.16876	0.05246	0.81635	0.71067
	AEKK	-0.34991	-0.10611	-0.34523	0.55475	0.14735	0.05461	0.67605	0.52172
	CvM	-0.35018	-0.10466	-0.24528	0.56489	0.14420	0.04675	0.57542	0.47921
	ADE	-0.38821	-0.10309	-0.16052	0.81295	0.17133	0.04054	0.70152	0.95300
100	EÇO	-0.28198	-0.16552	0.01055	0.35475	0.11357	0.06027	0.25390	0.21713
	EKK	-0.30520	-0.09688	-0.23223	0.45754	0.13920	0.05504	0.45554	0.34850
	AEKK	-0.29544	-0.13430	-0.16808	0.37014	0.11764	0.05688	0.33056	0.24228
	CvM	-0.29324	-0.13391	-0.13084	0.36300	0.11356	0.05411	0.30408	0.21771
	ADE	-0.33244	-0.12564	-0.09339	0.53200	0.14016	0.04755	0.41361	0.43109
150	EÇO	-0.25939	-0.17702	0.00917	0.26147	0.09960	0.06560	0.17155	0.12454
	EKK	-0.27339	-0.11569	-0.16199	0.35557	0.13815	0.06708	0.30928	0.22372
	AEKK	-0.27616	-0.16345	-0.10978	0.28091	0.10530	0.06761	0.21463	0.15133
	CvM	-0.27159	-0.15454	-0.09228	0.27695	0.10064	0.06100	0.20430	0.13429
	ADE	-0.30060	-0.14182	-0.06659	0.40726	0.12446	0.05311	0.28670	0.26729
200	EÇO	-0.23332	-0.17000	0.01844	0.21561	0.08888	0.06180	0.14380	0.09068
	EKK	-0.26228	-0.13427	-0.09816	0.31242	0.11443	0.06088	0.25047	0.17801
	AEKK	-0.25505	-0.16757	-0.05999	0.24203	0.09671	0.06423	0.17111	0.11598
	CvM	-0.25206	-0.16278	-0.05239	0.23454	0.09204	0.06153	0.16711	0.10277
	ADE	-0.28314	-0.15357	-0.02653	0.35121	0.11633	0.05625	0.23947	0.20618
250	EÇO	-0.21808	-0.16684	0.01640	0.18197	0.08095	0.06031	0.11480	0.06843
	EKK	-0.24281	-0.13116	-0.08838	0.26619	0.11075	0.06333	0.20424	0.13449
	AEKK	-0.24005	-0.16742	-0.05158	0.20347	0.08805	0.06509	0.13894	0.08683
	CvM	-0.23587	-0.16003	-0.04570	0.19951	0.08367	0.06093	0.13661	0.07838
	ADE	-0.26466	-0.15044	-0.03014	0.29777	0.10647	0.05633	0.19496	0.15350
500	EÇO	-0.16942	-0.12682	-0.01680	0.11043	0.05671	0.04660	0.06194	0.02733
	EKK	-0.21021	-0.11818	-0.07219	0.18232	0.08936	0.05816	0.11738	0.06389
	AEKK	-0.20490	-0.14241	-0.04973	0.13510	0.06498	0.05245	0.07519	0.03752
	CvM	-0.19878	-0.13533	-0.05032	0.13111	0.06162	0.05004	0.07483	0.03419
	ADE	-0.22698	-0.13412	-0.04145	0.19813	0.08290	0.05187	0.11233	0.07027
750	EÇO	-0.14770	-0.10984	-0.01937	0.08707	0.04666	0.04131	0.04115	0.01616
	EKK	-0.20142	-0.11769	-0.05432	0.15270	0.07162	0.05238	0.08127	0.04145
	AEKK	-0.18389	-0.12805	-0.04020	0.10953	0.05453	0.04688	0.05070	0.02266
	CvM	-0.17827	-0.12248	-0.04130	0.10610	0.05171	0.04519	0.05080	0.02100
	ADE	-0.21514	-0.13144	-0.03313	0.16314	0.07093	0.05017	0.07837	0.04497
1000	EÇO	-0.13367	-0.10333	-0.01148	0.07330	0.04124	0.03964	0.03309	0.01146
	EKK	-0.18694	-0.11393	-0.03964	0.13289	0.06514	0.05035	0.06399	0.03101
	AEKK	-0.17228	-0.12460	-0.02598	0.09604	0.04921	0.04407	0.04057	0.01645
	CvM	-0.16716	-0.11969	-0.02762	0.09281	0.04670	0.04286	0.04062	0.01522
	ADE	-0.19835	-0.12500	-0.02329	0.14128	0.06489	0.04897	0.06266	0.03342

Tablo 3.3 $\alpha = 0.2, \lambda = 0.5, \theta = 2$ ve $\beta = 0.75$ için ortalama yan ve HKO sonuçları

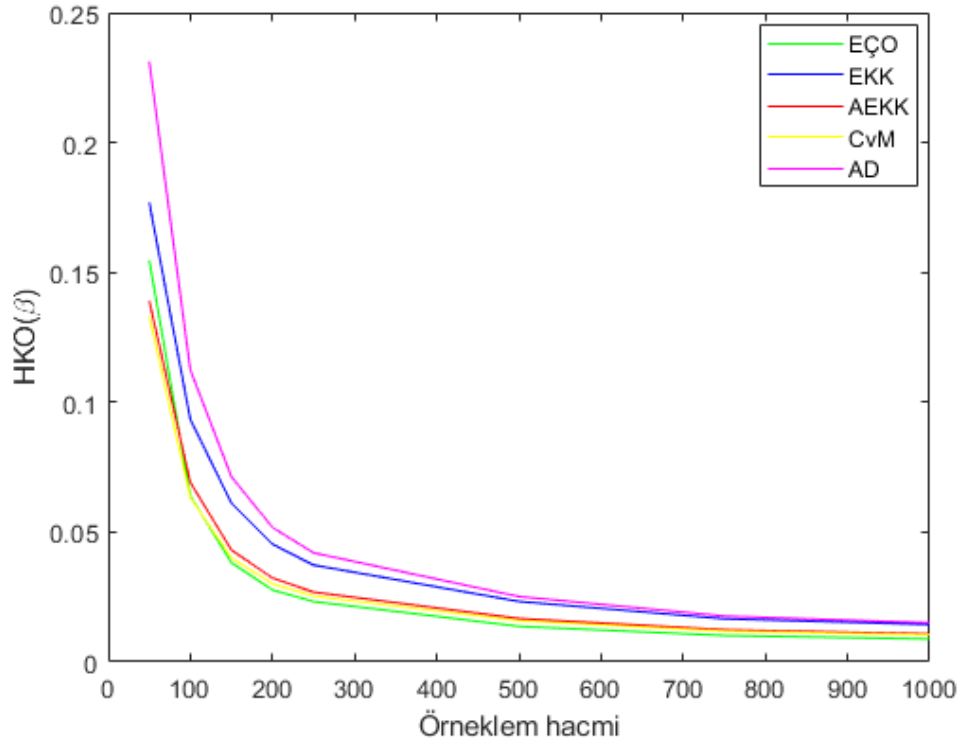
n		Ortalama Yan				HKO			
		$\hat{\alpha}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\theta}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\theta}$	$\hat{\beta}$
50	EÇO	-0.08729	0.01898	0.06158	0.36224	0.02545	0.02719	0.26641	0.22555
	EKK	-0.09775	0.07515	-0.18820	0.39060	0.02577	0.04029	0.40202	0.26906
	AEKK	-0.08453	0.05805	-0.16352	0.32183	0.02326	0.04197	0.32152	0.20409
	CvM	-0.08320	0.05372	-0.09287	0.32664	0.02219	0.03589	0.28176	0.18923
	AD	-0.11314	0.05729	-0.01105	0.48436	0.02573	0.03096	0.39782	0.36162
100	EÇO	-0.05482	0.00727	0.00484	0.19660	0.01878	0.02785	0.11746	0.07994
	EKK	-0.07591	0.04537	-0.11243	0.25280	0.01872	0.03788	0.22379	0.11937
	AEKK	-0.06138	0.02784	-0.09547	0.19628	0.01690	0.03660	0.15953	0.08326
	CvM	-0.05925	0.02783	-0.07337	0.19329	0.01579	0.03382	0.14257	0.07503
	AD	-0.08993	0.03053	-0.01675	0.30082	0.01796	0.03083	0.21762	0.14846
150	EÇO	-0.03255	0.01638	-0.01078	0.13770	0.01746	0.02615	0.08852	0.04673
	EKK	-0.05002	0.04803	-0.09206	0.18964	0.01894	0.03558	0.16853	0.07596
	AEKK	-0.03658	0.02644	-0.07694	0.13960	0.01807	0.03464	0.11689	0.05285
	CvM	-0.03600	0.02797	-0.06664	0.13653	0.01558	0.03286	0.10896	0.04735
	AD	-0.06368	0.03457	-0.02606	0.22200	0.01731	0.02940	0.16288	0.09017
200	EÇO	-0.01876	0.02062	-0.01745	0.09919	0.01621	0.02487	0.07138	0.02987
	EKK	-0.03499	0.04582	-0.07871	0.14420	0.01806	0.03398	0.13723	0.05132
	AEKK	-0.02926	0.02911	-0.06376	0.10774	0.01480	0.03118	0.09454	0.03308
	CvM	-0.02537	0.02579	-0.05854	0.10002	0.01422	0.03164	0.08905	0.03149
	AD	-0.04763	0.03382	-0.02807	0.16861	0.01623	0.02885	0.13262	0.05949
250	EÇO	-0.01282	0.04530	-0.05548	0.09095	0.01272	0.02384	0.05741	0.02368
	EKK	-0.02781	0.06725	-0.10518	0.13197	0.01536	0.03326	0.11498	0.04029
	AEKK	-0.01963	0.05475	-0.09250	0.09967	0.01224	0.02719	0.07711	0.02585
	CvM	-0.01780	0.05535	-0.08908	0.09583	0.01120	0.02712	0.07295	0.02402
	AD	-0.03935	0.05507	-0.06304	0.15147	0.01342	0.02807	0.10843	0.04612
500	EÇO	0.00548	0.03977	-0.04660	0.04903	0.01109	0.01865	0.03068	0.00990
	EKK	-0.00483	0.05370	-0.07235	0.07718	0.01422	0.02782	0.06090	0.01871
	AEKK	-0.00283	0.03980	-0.06184	0.05719	0.01037	0.01990	0.03834	0.01155
	CvM	0.00045	0.04337	-0.06272	0.05454	0.00998	0.02000	0.03778	0.01073
	AD	-0.01283	0.04572	-0.05074	0.08724	0.01260	0.02468	0.05817	0.02042
750	EÇO	0.01770	0.03929	-0.03921	0.02770	0.01046	0.01695	0.02225	0.00589
	EKK	0.01468	0.05417	-0.05972	0.04588	0.01489	0.02595	0.04175	0.01088
	AEKK	0.01253	0.03944	-0.05029	0.03267	0.01044	0.01873	0.02693	0.00698
	CvM	0.01544	0.04246	-0.05143	0.03065	0.01034	0.01905	0.02663	0.00664
	AD	0.00809	0.04769	-0.04504	0.05266	0.01333	0.02354	0.04005	0.01158
1000	EÇO	0.00945	0.01460	0.01799	0.00427	0.00945	0.01460	0.01799	0.00427
	EKK	0.01469	0.02370	0.03341	0.00768	0.01469	0.02370	0.03341	0.00768
	AEKK	0.00948	0.01559	0.02147	0.00480	0.00948	0.01559	0.02147	0.00480
	CvM	0.00978	0.01704	0.02150	0.00493	0.00978	0.01704	0.02150	0.00493
	AD	0.01322	0.02169	0.03224	0.00800	0.01322	0.02169	0.03224	0.00800



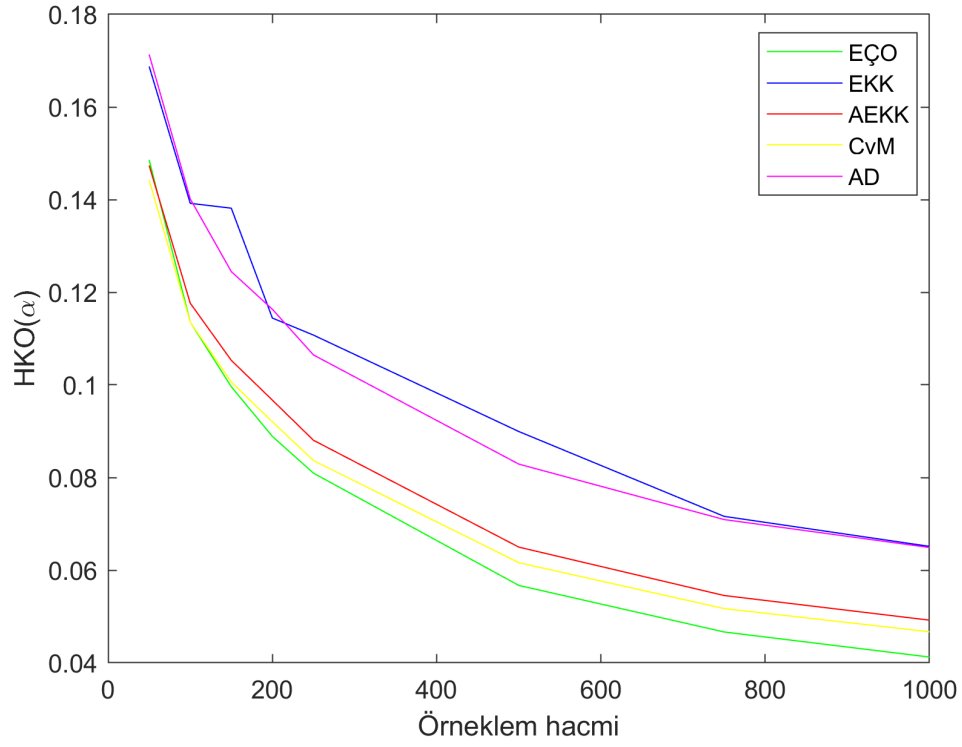
Şekil 3.10 $\eta_1 = (0.4, 0.8, 1, 0.5)$ durumunda λ parametresi için HKO



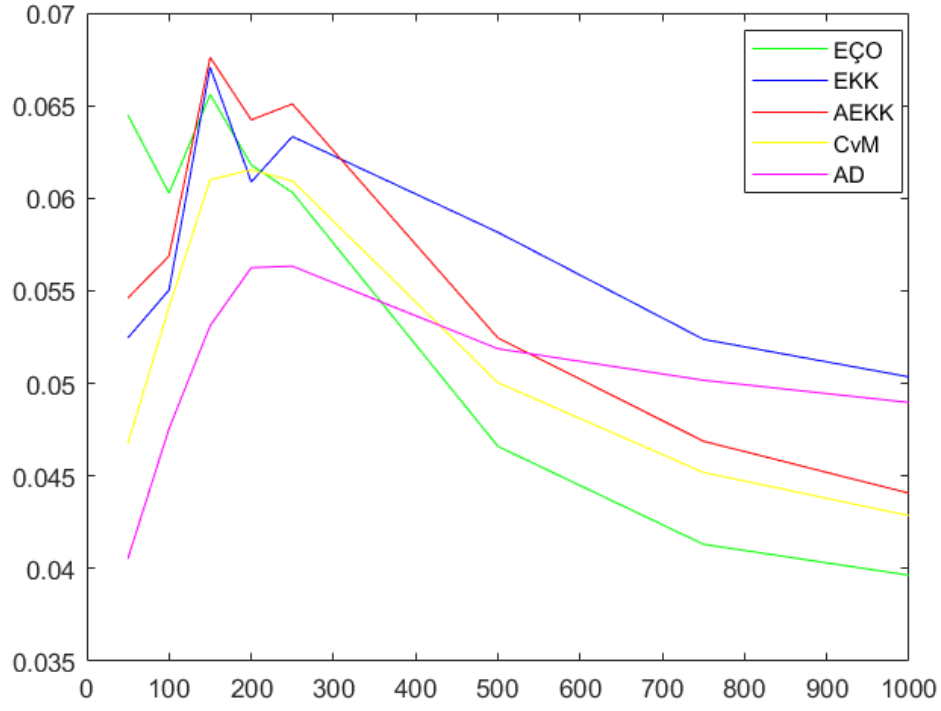
Şekil 3.11 $\eta_1 = (0.4, 0.8, 1, 0.5)$ durumunda θ parametresi için HKO



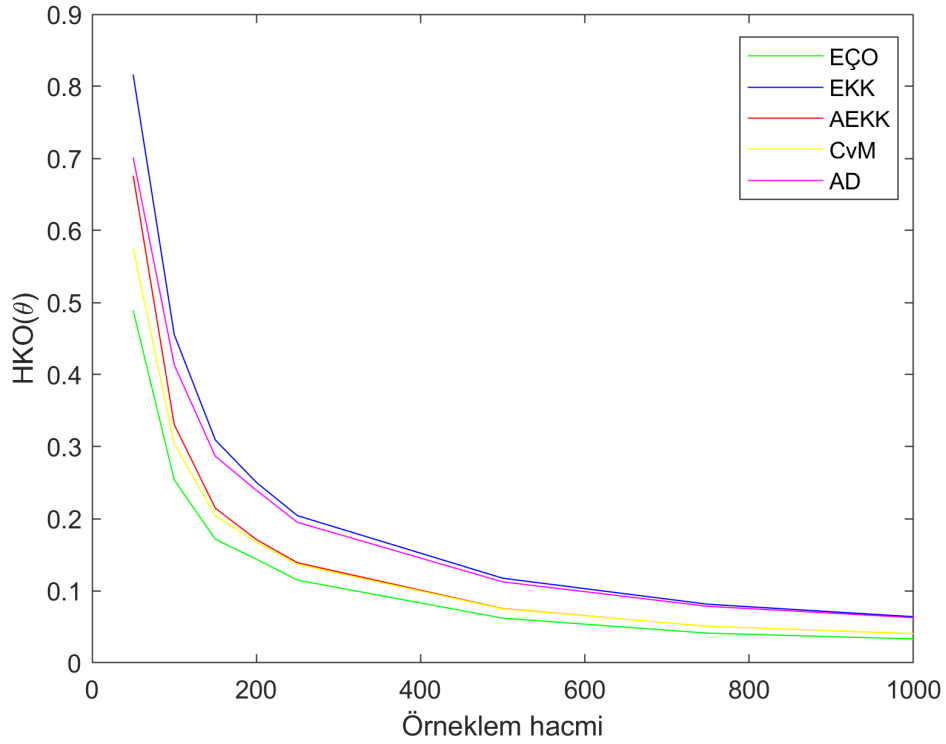
Şekil 3.12 $\eta_1 = (0.4, 0.8, 1, 0.5)$ durumunda β parametresi için HKO



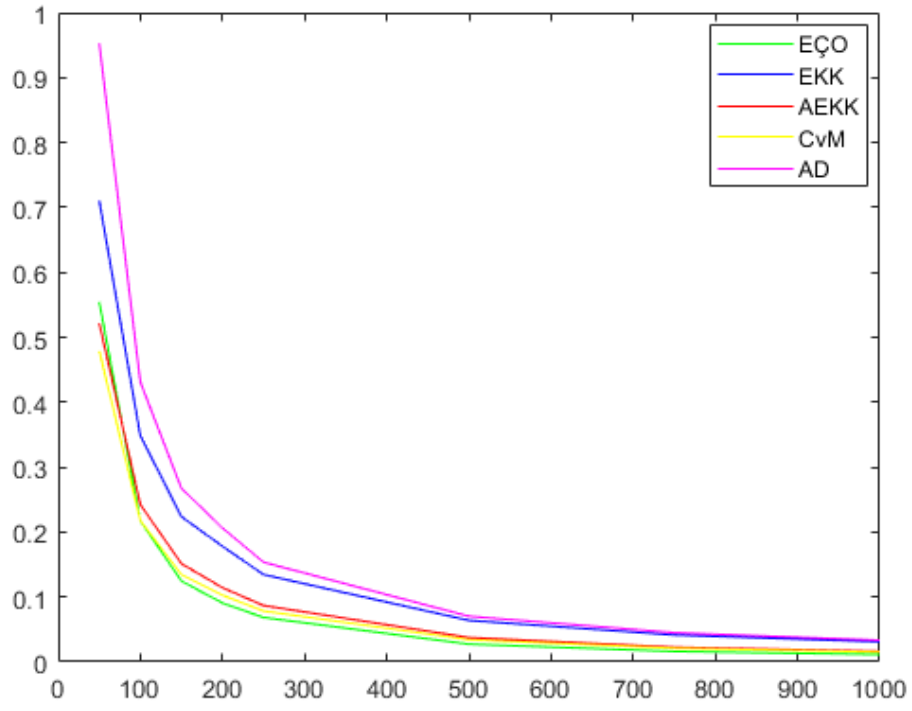
Şekil 3.13 $\eta_2 = (0.5, 0.7, 3, 0.9)$ durumunda α parametresi için HKO



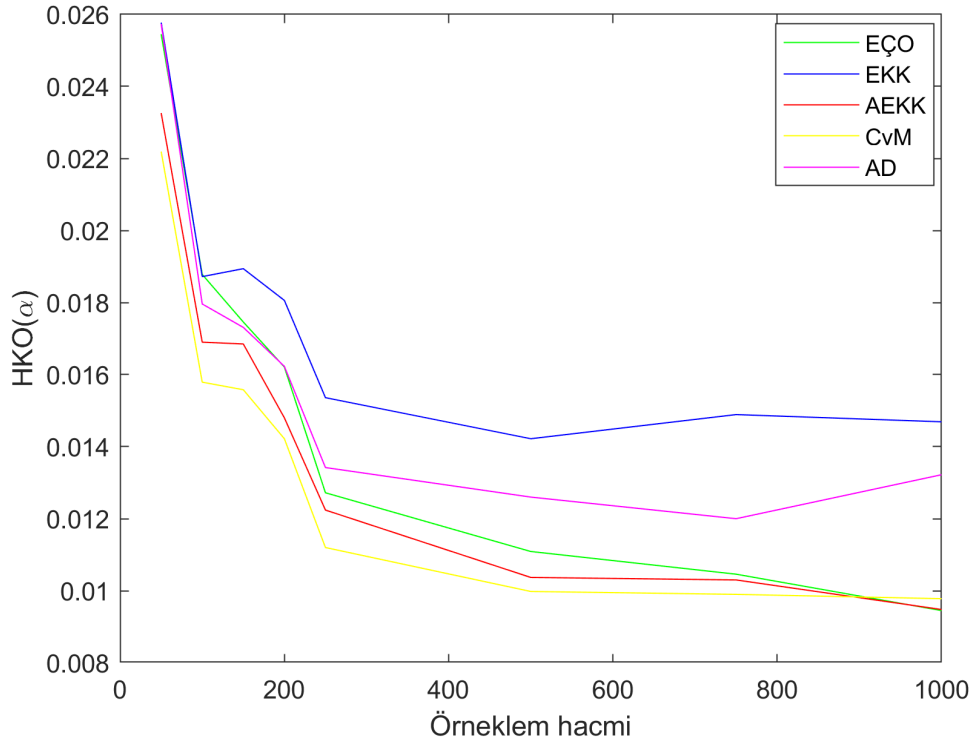
Şekil 3.14 $\eta_2 = (0.5, 0.7, 3, 0.9)$ durumunda λ parametresi için HKO



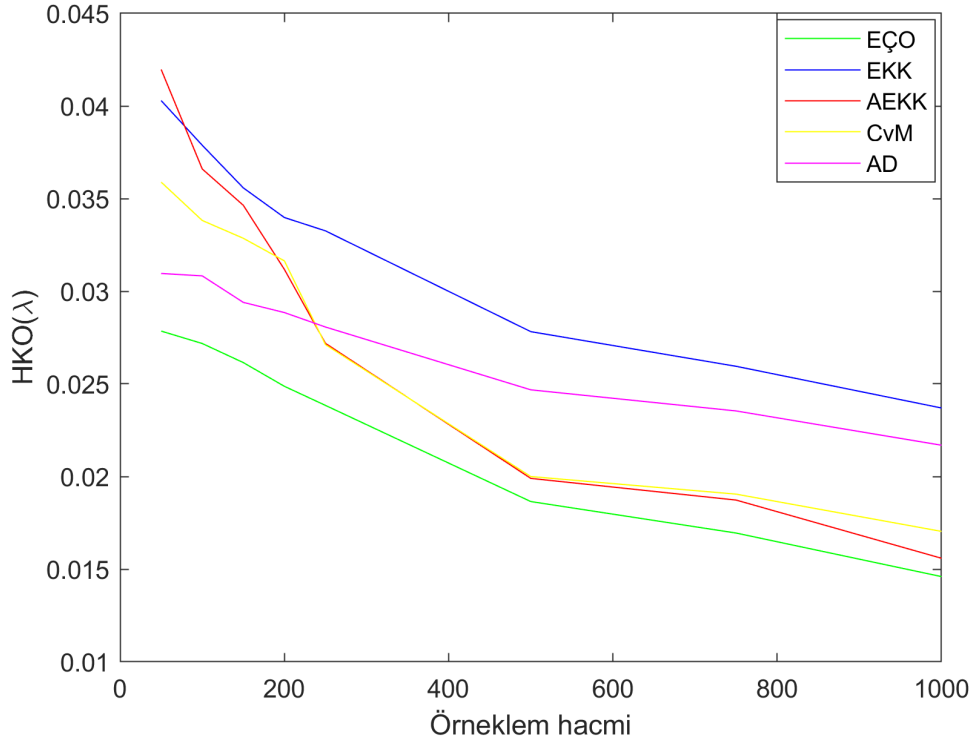
Şekil 3.15 $\eta_2 = (0.5, 0.7, 3, 0.9)$ durumunda θ parametresi için HKO



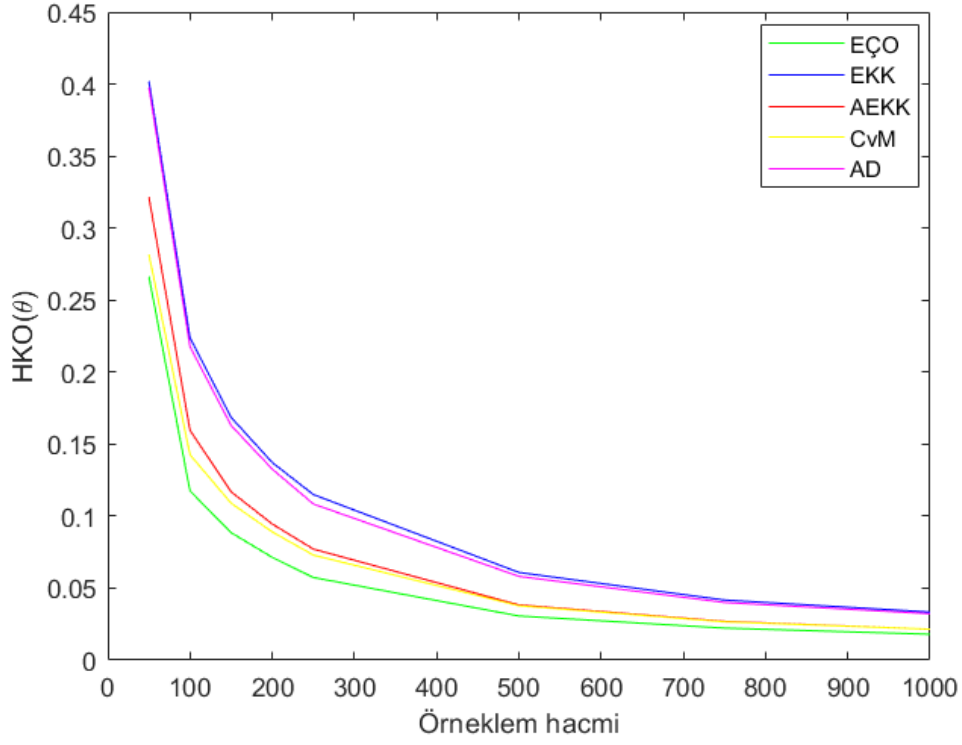
Şekil 3.16 $\eta_2 = (0.5, 0.7, 3, 0.9)$ durumunda β parametresi için HKO



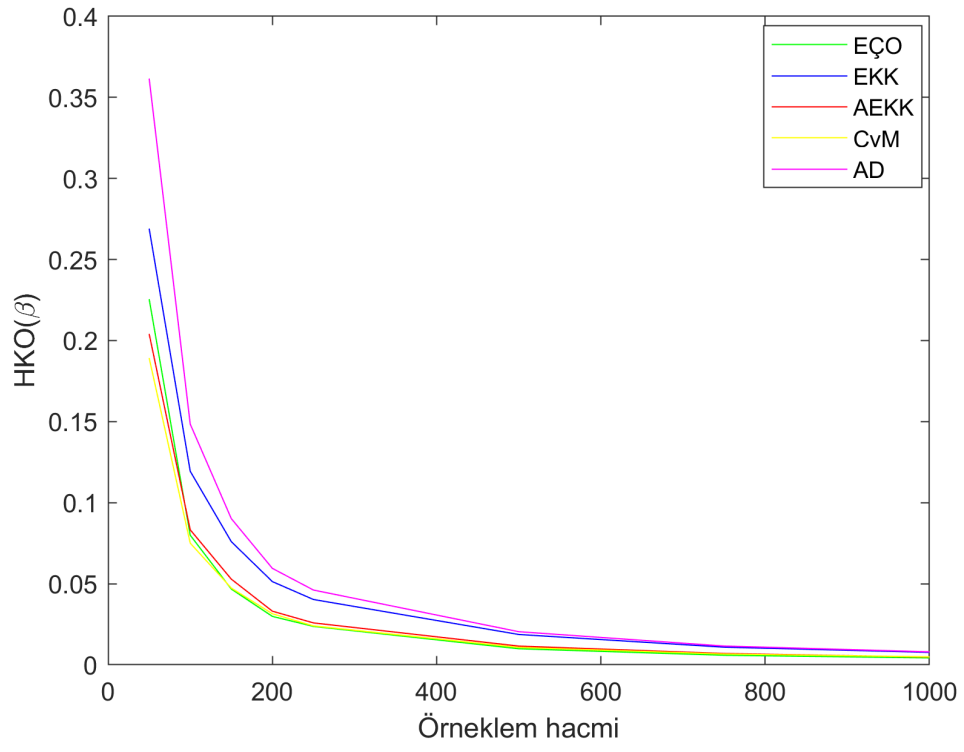
Şekil 3.17 $\eta_3 = (0.2, 0.5, 2, 0.75)$ durumunda α parametresi için HKO



Şekil 3.18 $\eta_3 = (0.2, 0.5, 2, 0.75)$ durumunda λ parametresi için HKO



Şekil 3.19 $\eta_3 = (0.2, 0.5, 2, 0.75)$ durumunda θ parametresi için HKO



Şekil 3.20 $\eta_3 = (0.2, 0.5, 2, 0.75)$ durumunda β parametresi için HKO

4

GERÇEK VERİ UYGULAMASI

Bu bölümde, $GMO-\ddot{U}\ddot{U}(x, \eta)$ dağılımının gerçek hayattaki verileri modelleyebildiğini göstermek amacıyla farklı alanlardan elde edilen dört adet gerçek veri seti ile çalışılmıştır. Bu veri setleri $GMO-\ddot{U}\ddot{U}(x, \eta)$ dağılımına rakip olan dağılımlarla da analiz edilmiş ve dağılımlara uyumları incelenmiştir. Her bir dağılıma ilişkin EÇO tahmin edileri ve bu tahminlere ait standart hatalar verilmiştir. Ayrıca dağılımları kıyaslamak amacıyla her bir dağılım için; $-2 * \log - olabilirlik$ değeri, AIC, KS, AD, KS test istatistikleri ve bu test istatistiklerine ilişkin p değerleri hesaplanmıştır.

4.1 Gerçek Veri Çalışması I

İlk veri seti bir jet uçağı filosunun 13 üyesinin klima sistemlerinin ardışık arıza sayısından elde edilmiştir. Veri seti ilk olarak Proschan [56] tarafından analiz edilmiştir. Daha sonra bu veri seti Gleser [57] ve Habibi ve Asgharzadeh [58] tarafından da kullanılmıştır. Veri seti 194, 413, 90, 74, 55, 23, 97, 50, 359, 50, 130, 487, 102, 15, 14, 10, 57, 320, 261, 51, 44, 9, 254, 493, 18, 209, 41, 58, 60, 48, 56, 87, 11, 102, 12, 5, 100, 14, 29, 37, 186, 29, 104, 7, 4, 72, 270, 283, 7, 57, 33, 100, 61, 502, 220, 120, 141, 22, 603, 35, 98, 54, 181, 65, 49, 12, 239, 14, 18, 39, 3, 12, 5, 32, 9, 14, 70, 47, 62, 142, 3, 104, 85, 67, 169, 24, 21, 246, 47, 68, 15, 2, 91, 59, 447, 56, 29, 176, 225, 77, 197, 438, 43, 134, 184, 20, 386, 182, 71, 80, 188, 230, 152, 36, 79, 59, 33, 246, 1, 79, 3, 27, 201, 84, 27, 21, 16, 88, 130, 14, 118, 44, 15, 42, 106, 46, 230, 59, 153, 104, 20, 206, 5, 66, 34, 29, 26, 35, 5, 82, 5, 61, 31, 118, 326, 12, 54, 36, 34, 18, 25, 120, 31, 22, 18, 156, 11, 216, 139, 67, 310, 3, 46, 210, 57, 76, 14, 111, 97, 62, 26, 71, 39, 30, 7, 44, 11, 63, 23, 22, 23, 14, 18, 13, 34, 62, 11, 191, 14, 16, 18, 130, 90, 163, 208, 1, 24, 70, 16, 101, 52, 208 ve 95 değerlerinden oluşmaktadır. Veri seti $GMO-\ddot{U}\ddot{U}$, W , $\ddot{U}\ddot{U}$, $MO\ddot{U}BXII$, $GB\ddot{U}-II$, $GTW\ddot{U}$, $\ddot{U}WP$ ve üstel dağılım ile analiz edilmiştir. Ardışık arıza verisini modelleyen bu dağılımların EÇO tahminleri (standart hataları) Tablo 4.1’de ve kıyaslamada kullanılan test istatistikleri ise Tablo 4.2’de yer almaktadır.

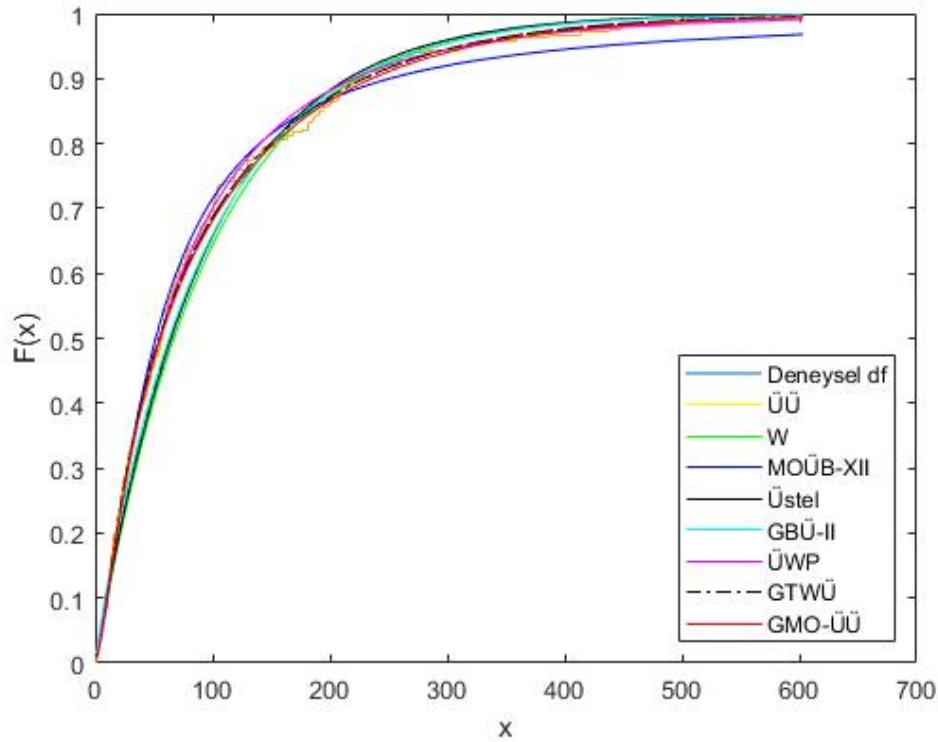
Ayrıca veriye uydurulan dağılımların, df grafikleri de Şekil 4.1’de sunulmaktadır.

Tablo 4.1 Arıza sayısı verisi için parametre tahminleri (standart hataları)

	$\hat{\alpha}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\theta}$	$\hat{\beta}$
GMO-ÜÜ	0.1744 (0.1105)	0.7161(0.1834)	0.008(0.0014)	1.412(0.2170)
ÜWP	0.0076(1.4384)	0.0390(0.0543)	0.5561(0.1947)	2.8174(1.8256)
GTWÜ	1.3954(0.2185)	0.0209(0.0052)	3.4321(1.3457)	-
MOÜBXII	239.17(196.7109)	1.4003(4.0277)	0.9921(2.9693)	-
GBÜ-II	0.9267(0.0827)	0.0102(0.0017)	0.0056(0.2852)	-
ÜÜ	0.0100 (0.0009)	0.9275(0.0827)	-	-
W	0.9245 (0.0482)	89.5575(7.0175)	-	-
Üstel	0.0107(0.0008)	-	-	-

Tablo 4.2 Arıza sayısı verileri için uyum iyiliği istatistikleri

Dağılım	-2log	AIC	AD*	CvM*	K-S	p(AD*)	p(CvM*)	p(K-S)
GMO-ÜÜ	2347.32	2355.32	0.2030	0.0286	0.0307	0.9896	0.9805	0.9878
ÜWP	2349.26	2357.26	0.2596	0.0345	0.0390	0.9650	0.9593	0.9009
GTWÜ	2347.37	2353.38	0.2136	0.0308	0.0390	0.9862	0.9736	0.9602
MOEBXII	2361.12	2367.12	0.6385	0.0710	0.0420	0.6122	0.7459	0.8470
GBÜ-II	2356.81	2362.81	11.881	0.2138	0.0641	0.2721	0.2423	0.3457
ÜÜ	2356.81	2360.81	11.978	0.2165	0.0644	0.2684	0.2377	0.3396
W	2355.17	2359.17	0.8246	0.1275	0.0520	0.4635	0.4663	0.6113
Üstel	2357.53	2359.53	16.919	0.1157	0.0726	0.1367	0.1157	0.2112



Şekil 4.1 Ardışık arıza sayısı verisi için uydurulan df’ler

Tablo 4.2’de yer alan sonuçlardan, tüm karşılaştırma kriterleri dikkate alındığında $GMO-ÜÜ(x, \eta)$ dağılımının diğer rakip dağılımlara göre veriyi daha iyi modellediği sonucuna varılmıştır.

4.2 Gerçek Veri Çalışması II

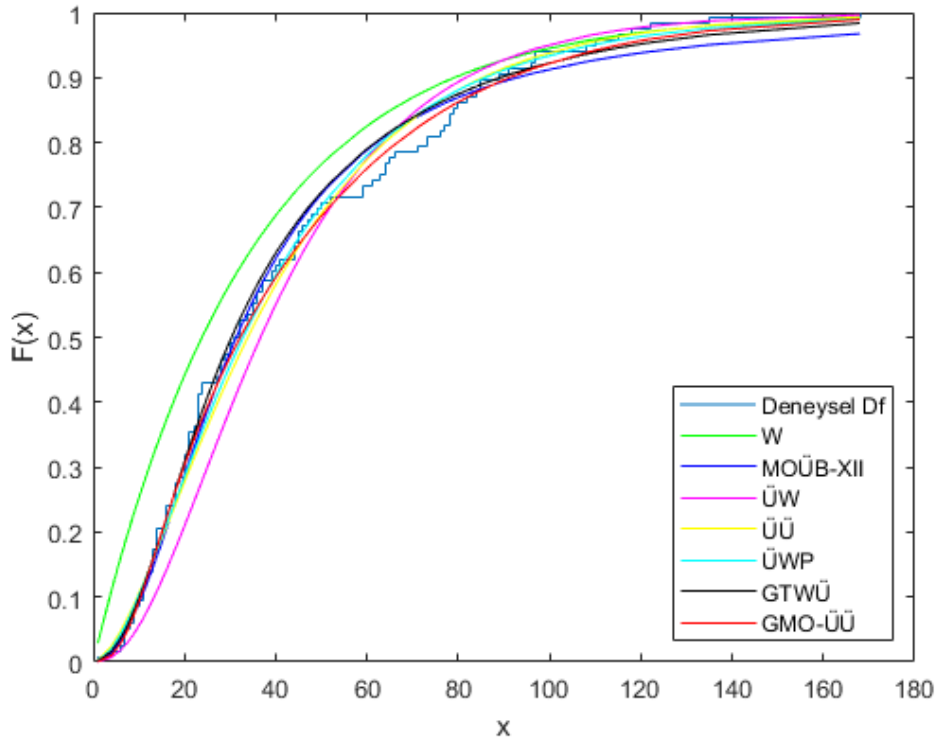
İkinci geri veri seti çalışması, mayıs ayından eylül ayına kadar New York’ta yapılan günlük ozon seviyesi ölçümlerini içermektedir. Veri seti ilk olarak Nadarajah [59] tarafından analiz edilmiş olup ayrıca Leiva vd. [60] tarafından da kullanılmıştır. Veri seti 41, 36, 12, 18, 28, 23, 19, 8, 7, 16, 11, 14, 18, 14, 34, 6, 30, 11, 1, 11, 4, 32, 23, 45, 115, 37, 29, 71, 39, 23, 21, 37, 20, 12, 13, 135, 49, 32, 64, 40, 77, 97, 97, 85, 10, 27, 7, 48, 35, 61, 79, 63, 16, 80, 108, 20, 52, 82, 50, 64, 59, 39, 9, 16, 78, 35, 66, 122, 89, 110, 44, 28, 65, 22, 59, 23, 31, 44, 21, 9, 45, 168, 73, 76, 118, 84, 85, 96, 78, 73, 91, 47, 32, 20, 23, 21, 24, 44, 21, 28, 9, 13, 46, 18, 13, 24, 16, 13, 23, 36, 7, 14, 30, 14, 18 ve 20 olmak üzere 116 gözlemden oluşmaktadır. Ozon seviyeleri ölçümünden oluşan veri seti $GMO-ÜÜ, W, MOGB-XII, ÜÜ, GBÜ-II, GTWÜ, ÜWP$ ve $ÜW$ dağılımları ile analiz edilmiştir. Ozon seviyesi verilerini modelleyen dağılımların EÇÖ tahminleri (standart hataları) Tablo 4.3’de ve kıyaslamada kullanılan test istatistikleri ise Tablo 4.4’te yer almaktadır. Veriye uydurulan dağılımların df fonksiyonu grafikleri ise Şekil 4.2’de gösterilmektedir.

Tablo 4.3 Ozon seviyeleri verisi için parametre tahminleri (standart hataları)

	$\hat{\alpha}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\theta}$	$\hat{\beta}$
GMO-ÜÜ	0.1121(0.0958)	0.5427(0.1571)	0.030(0.0044)	2.8284(0.6450)
ÜWP	70.6413(159.4820)	0.0516(0.0324)	0.8054(0.2253)	0.0404(0.0982)
GTWÜ	1.9237(0.4617)	0.0283(0.0063)	2.4251(1.2859)	-
MOÜB-XII	1062.58(606.767)	34.4062(38.9027)	0.0588(0.0665)	-
GBÜ-II	1.7962(0.2460)	0.0338(0.0197)	0.0082(1.1555)	-
ÜW	0.8350(0.2429)	21.1821(13.1199)	2.5804(1.6124)	-
ÜÜ	0.0336(0.0035)	1.7960(0.2455)	-	-
W	1.3402(0.0954)	46.0803(3.3754)	-	-

Tablo 4.4 Ozon seviyeleri verisi için uyum iyiliği istatistikleri

Dağılım	-2log	AIC	AD*	CvM*	K-S	p(AD*)	p(CvM*)	p(K-S)
GMO-ÜÜ	1079.69	1087.69	0.2521	0.0338	0.0468	0.9692	0.9628	0.9615
ÜWP	1082.47	1090.47	0.5490	0.0875	0.0748	0.6971	0.6508	0.5354
GTWÜ	1082.68	1088.68	0.4902	0.0694	0.0691	0.7564	0.7557	0.6372
MOÜBXII	1090.12	1096.12	0.6516	0.0824	0.0677	0.0600	0.6786	0.6616
GBÜ-II	1082.79	1088.79	0.6850	0.1173	0.0846	0.5712	0.5081	0.3785
ÜW	1082.41	1088.41	0.5480	0.0878	0.0750	0.6980	0.6496	0.5310
ÜÜ	1082.79	1086.79	0.6844	0.1170	0.3788	0.5716	0.5081	0.3787
W	1085.22	1089.22	0.9028	0.1546	0.0900	0.4123	0.3764	0.3050



Şekil 4.2 Ozon seviyesi ölçümü verisi için uydurulan df'ler

Tablo 4.4'e göre ele alınan tüm uyum iyiliği kriterleri bakımından $GMO-ÜÜ(x, \eta)$ dağılımının, veriyi modelleyen diğer dağılımlara kıyasla veriyi daha iyi modellediği görülmüştür.

4.3 Gerçek Veri Çalışması III

Üçüncü gerçek veri seti, Kanada'nın Yukon Bölgesi'nde, Carcross yakınındaki Wheaton Nehri'nin taşkın zirvelerine ait aşım miktarlarını (m^3/s cinsinden) içermektedir. Veri seti ilk olarak Choulakian ve Stephens [61] tarafından analiz edilmiş olup ayrıca Lemonte [62] tarafından da kullanılmıştır. Veri seti 41, 36, 12, 18, 28, 23, 19, 8, 7, 16, 11, 14, 18, 14, 34, 6, 30, 11, 1, 11, 4, 32, 23, 45, 115, 37, 29, 71, 39, 23, 21, 37, 20, 12, 13, 135, 49, 32, 64, 40, 77, 97, 97, 85, 10, 27, 7, 48, 35, 61, 79, 63, 16, 80, 108, 20, 52, 82, 50, 64, 59, 39, 9, 16, 78, 35, 66, 122, 89, 110, 44, 28, 65, 22, 59, 23, 31, 44, 21, 9, 45, 168, 73, 76, 118, 84, 85, 96, 78, 73, 91, 47, 32, 20, 23, 21, 24, 44, 21, 28, 9, 13, 46, 18, 13, 24, 16, 13, 23, 36, 7, 14, 30, 14, 18 ve 20 değerlerinden oluşmaktadır. Taşkın verisi $GMO-ÜÜ$ dağılımı ve diğer rakip dağılımlar olan W , $MOGB-XII$, $ÜÜ$, $GBÜ-II$, $GTWÜ$, $ÜWP$ ve $ÜW$ dağılımları ile analiz edilmiştir. Analiz edilen dağılımlara ait EÇO tahminleri (standart hataları) Tablo 4.5'te ve kıyaslamak için kullanılan test istatistikleri ve bilgi kriterleri ise Tablo 4.6'da yer almaktadır. Ayrıca analiz edilen

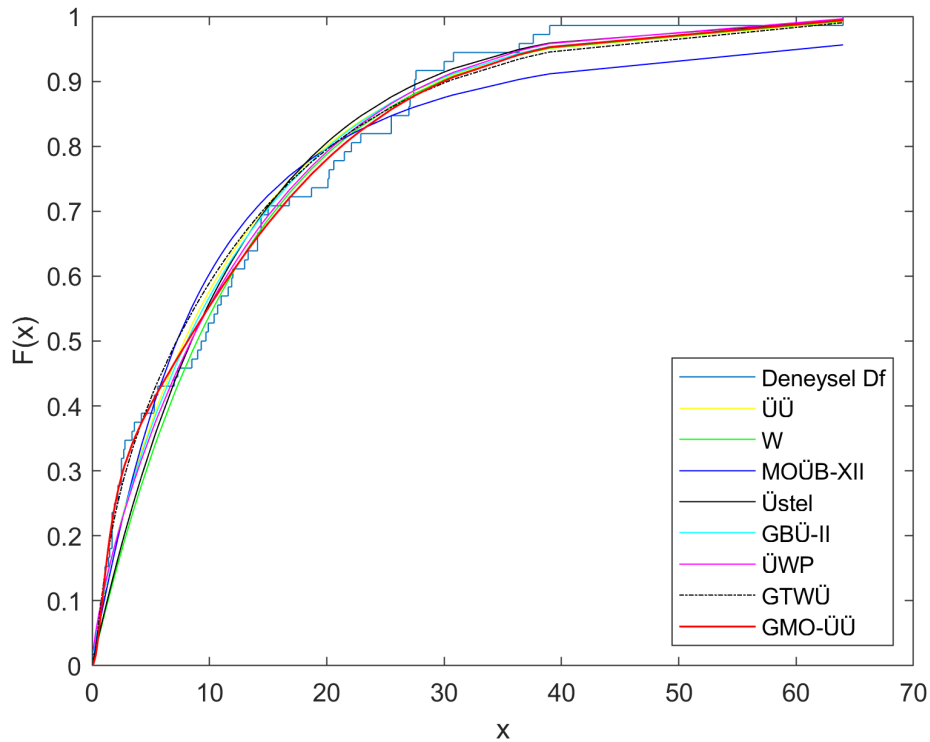
modellerin df grafikleri Şekil 4.3'te gösterilmiştir.

Tablo 4.5 Taşkın verisi için parametre tahminleri (standart hataları)

	$\hat{\alpha}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\theta}$	$\hat{\beta}$
GMO-ÜÜ	0.0112(0.0095)	0.3677(0.0732)	0.0851(0.1238)	2.0726(0.3967)
ÜWP	32.4750(32.2928)	0.0533(0.0226)	1.3215(0.5396)	0.0176(0.0193)
GTWÜ	1.8790(0.5583)	0.4776(0.2163)	12.9329(8.4529)	-
MOÜBXII	482.0154(3063.9710)	0.3355(0.4252)	5.7285(8.8558)	-
GBÜ-II	0.7829(0.1500)	0.0923(0.0217)	0.4838(0.4012)	-
ÜÜ	0.0724(0.0117)	0.8284(0.1231)	-	-
W	0.9012(0.0856)	11.6322(1.6017)	-	-
Üstel	0.0819(0.0097)	-	-	-

Tablo 4.6 Taşkın verisi için uyum iyiliği istatistikleri

Dağılım	-2log	AIC	AD*	CvM*	K-S	p(AD*)	p(CvM*)	p(K-S)
GMO-ÜÜ	494.58	502.58	0.2486	0.0323	0.0529	0.9710	0.9686	0.9876
ÜWP	502.56	510.56	0.6627	0.1080	0.1079	0.5903	0.5481	0.3718
GTWÜ	498.22	504.22	0.4913	0.0891	0.0865	0.7551	0.6424	0.6544
MOÜBXII	513.00	519.00	12.564	0.2045	0.1048	0.2469	0.2593	0.4082
GBÜ-II	502.26	508.26	0.6976	0.1189	0.1044	0.5603	0.5008	0.4127
ÜÜ	506.59	506.59	0.7447	0.1300	0.1017	0.5221	0.4576	0.4462
W	502.99	506.99	0.8445	0.1489	0.1052	0.4496	0.3966	0.4029
Üstel	504.26	506.26	14.587	0.2306	0.1422	0.1867	0.2153	0.1087



Şekil 4.3 Taşkın verisi için uydurulan df'ler

Tablo 4.6'ya göre tüm uyum iyiliği kriterleri dikkate alındığında veriyi en iyi modelleyen dağılımın GMO-ÜÜ(x, η) olduğu görülmektedir.

4.4 Gerçek Veri Çalışması IV

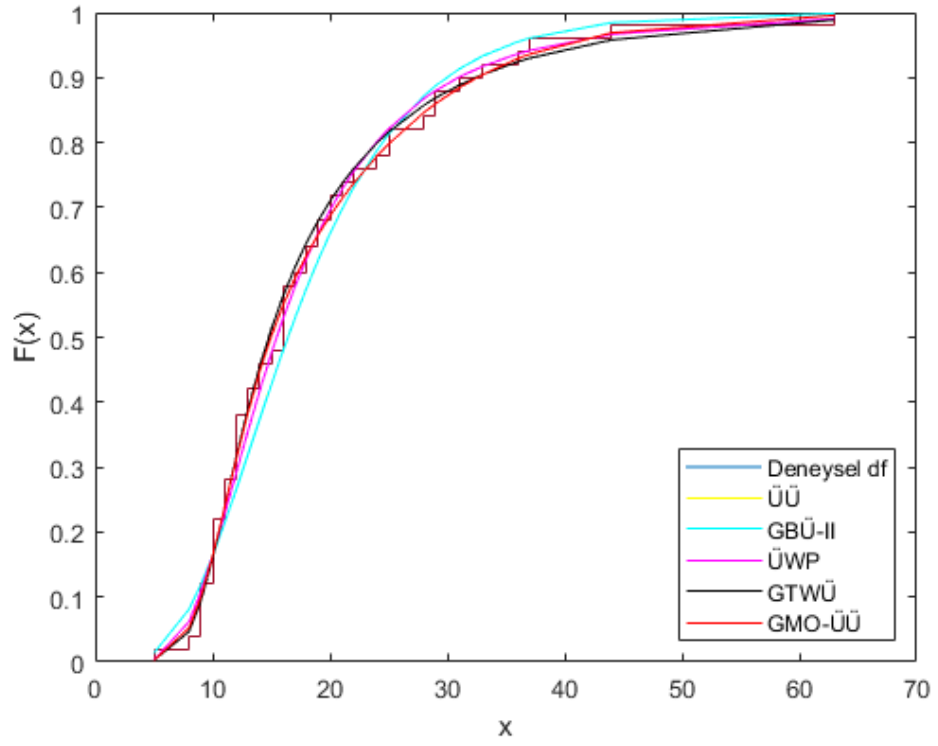
Dördüncü gerçek veri seti, İsrail Sağlık Bakanlığı tarafından yayınlanan anonim verilerden elde edilmiş olup 60 yaş üstü 50 erkek hasta için ilk pozitif COVID-19 PCR testinden ilk negatif teste kadar ölçülen hayatta kalanların iyileşme sürelerini içermektedir [63]. Veri seti : 16, 16, 16, 14, 36, 9,10, 11, 8, 9, 12, 10, 22, 5, 11, 17, 20, 12, 29, 12, 15, 25, 25, 24, 18, 13, 44, 14, 20, 19, 11, 10, 18, 21, 31, 9, 29, 12, 10, 10, 13, 12, 19, 33, 37, 16, 63, 9, 28 ve 16 olmak üzere 50 gözlemden oluşmaktadır. Veri seti GMO-ÜÜ, W, ÜÜ, MOÜBXII, GBÜ-II, GTWÜ, ÜWP ve üstel dağılım ile analiz edilmiştir. Analiz edilen dağılımlara ilişkin EÇO tahminleri (standart hataları) Tablo 4.7'de ve kıyaslamada kullanılan uyum istatistikleri ise Tablo 4.8'de yer almaktadır. Ayrıca veriye uyum gösteren modellerin df grafikleri Şekil 4.4'te gösterilmiştir. Tablo 4.8'den görüldüğü üzere, AIC değeri bakımından GTWÜ dağılımı hariç olmak üzere $-2 * \log$, AD, CvM, K-S, p(AD), p(CvM) ve p(K-S) kriterlerine göre en iyi uyum sağlayan modelin GMO-ÜÜ olduğu sonucuna varılmıştır.

Tablo 4.7 COVID-19 verisi için parametre tahminleri (standart hataları)

	$\hat{\alpha}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\theta}$	$\hat{\beta}$
GMO-ÜÜ	0.0551(0.0547)	0.6796(0.1964)	0.1079(0.0280)	9.8323(3.6896)
ÜWP	16.5628(51.4257)	37.6783(213.0973)	0.3198(0.1848)	90.9496(665.3290)
GTWÜ	5.6545(2.0157)	0.0585(0.0065)	4.9490(2.4912)	-
MOÜBXII	1010.5069(506.7894)	4.5381(18.0703)	0.5637(2.2449)	-
GBÜ-II	6.1158(1.7533)	0.1360(0.0302)	0.00002(0.3456)	-
ÜÜ	0.1360(0.0189)	6.1153(1.7532)	-	-
W	1.8779(0.1860)	20.8508(1.6693)	-	-
Üstel	0.0544(0.0077)	-	-	-

Tablo 4.8 COVID-19 verisi için uyum iyiliği istatistikleri

Dağılım	-2log	AIC	AD*	CvM*	K-S	p(AD*)	p(CvM*)	p(K-S)
GMO-EE	346.78	354.78	0.2113	0.0276	0.0690	0.9870	0.9843	0.9712
EWP	348.21	356.21	0.2972	0.0417	0.0895	0.9400	0.9261	0.8183
EOWEx	346.79	352.79	0.2385	0.0350	0.0833	0.9761	0.9586	0.8787
MOEBXII	357.80	363.80	13.315	0.1816	0.1739	0.2223	0.3069	0.0971
GBE-II	352.10	358.10	0.6886	0.1115	0.1155	0.5677	0.5329	0.5176
EE	352.10	356.10	0.6886	0.1115	0.1155	0.5677	0.5329	0.5176
W	363.40	367.40	14.451	0.2290	0.1465	0.1902	0.2179	0.2333
Exponential	391.13	393.13	63.070	12.118	0.3472	0.0007	0.0007	0.0000



Şekil 4.4 COVID-19 verisi için uydurulan df'ler

5

SONUÇ

Bu tez çalışmasında, genelleştirilmiş Marshall-Olkin dağılımının bir alt modeli olan genelleştirilmiş Marshall-Olkin üstelleştirilmiş üstel dağılım (GMO-ÜÜ) tanıtılmıştır. Tanıtılan yeni modelin, moment üreten fonksiyonu, momentleri, tam olamayan momentleri, Lorenz ve Bonferroni eğrileri gibi bazı istatistiksel özellikleri elde edilmiştir. Üstelleştirilmiş üstel dağılım artan ve azalan bozulma oranı fonksiyonuna sahip iken yeni elde edilen GMO-ÜÜ modelinin bozulma oranı fonksiyonu grafikleri incelendiğinde artan, azalan, sabit, artan-azalan-artan, ters küvet ve küvet eğrisi şekillerine sahip olduğu için veri modellemede esnek bir dağılım olduğu görülmüştür. Önerilen dağılımın bilinmeyen parametrelerini tahmin etmek için beş farklı tahmin yöntemi kullanılmıştır. Tahmin edicilerin performanslarını değerlendirmek için Monte Carlo simülasyon çalışması yürütülmüştür. Monte Carlo simülasyon çalışması sonuçlarına göre,

- beklendiği gibi tüm tahmin edicilerde örneklem hacmi arttıkça ortalama yan ve HKO değerlerinin sistematik bir biçimde azaldığı ve neredeyse sıfıra yaklaştığı,
- küçük örneklem durumlarında ortalama yan ve HKO değerlerinin büyük olduğu,
- EÇÖ tahmin edicilerinin diğer tahmin edicilere göre daha düşük yan ve HKO değerlerine sahip olduğu fakat genel olarak bütün tahmin edicilerin birbirlerine yakın sonuçlar verdiği

gözlenmiştir. Ayrıca dört gerçek veri seti, model uyumları açısından karşılaştırmak amacı ile GMO-ÜÜ dağılımı ve bu veri setlerini modelleyebilen rakip dağılımlarla analiz edilmiştir. Veri setlerinin modellere uyumunun değerlendirilmesinde $-2 * \log$, AD^* ve onun $p(AD^*)$ değeri, CvM^* ve onun $P(CvM^*)$ değeri, K-S istatistiği ve onun $p(K-S)$ değeri açısından en uygun modelin GMO-ÜÜ dağılımı olduğu görülmüştür. COVID-19 iyileşme süresine ilişkin veriler GMO-ÜÜ dağılımına

uydurulduğunda, 60 yaş üstü erkek hastaların ortalama iyileşme süresinin 18.35 olduğu tahmin edilmiştir. Aynı veri setini kullanarak Tanış [63] ortalama iyileşme süresini yaklaşık 21 gün olarak tahmin ederken, Voinsky vd.[64] 60 yaş üstü erkek COVID-19 hastalarından oluşan başka bir veri seti için ortalama iyileşme süresini yaklaşık 15 gün olarak tahmin etmiş ve Barman vd.[65] başka bir COVID-19 hastası örnekleme dayanarak ortalama iyileşme süresini %95 güven aralığında 16 ile 34 gün olarak elde etmiştir. GMO-ÜÜ dağılımına göre 2 hafta içerisinde iyileşme olasılığı %44.62 olarak hesaplanırken, Tanış [63] bu değeri %45.25 olarak hesaplamıştır. GMO-ÜÜ dağılımından elde edilen sonuçlar böylece daha önceki yapılan çalışmaların bulgularıyla desteklenmektedir. Gerçek veri uygulamalarının tatmin edici sonuçlarından GMO-ÜÜ dağılımının gerçek hayattaki verilere uygulanabilirliği görülmektedir.

Elde ettiğimiz sonuçlar ışığında, önerilen modelin sağ kalım analizi, meteoroloji, ekonomi, biyoloji, hidroloji, yaşam bilimleri ve mühendislik alanlarındaki diğer uygulamalar da dahil olmak üzere çok çeşitli alanlardan elde edilen verileri modelleyebileceği öngörülmektedir. Literatürde daha az parametreye sahip dağılımlar olmasına rağmen, ters kuvvet eğrisi ve kuvvet şeklinde bozulma oranı fonksiyonlarına sahip olması bakımından GMO-ÜÜ dağılımı özellikle biyolojik, klinik ve yaşam verilerinin modellenmesinde etkin bir şekilde kullanılabilir. Ayrıca, önerilen model üstel, Weibull ve Marshall-Olkin dağılımlarının uzantılarına bir alternatif olarak düşünülebilir. Sansürlü verilerin modellenmesi ve yaşam zamanı regresyonu gibi daha ileri konularda GMO-ÜÜ dağılımını temel alan çalışmalar yapılabilir.

- [1] A. W. Marshall, I. Olkin, “A new method for adding a parameter to a family of distributions with application to the exponential and weibull families,” *Biometrika*, vol. 84, no. 3, pp. 641–652, 1997.
- [2] K. Jayakumar, T. Mathew, “On a generalization to marshall-olkin scheme and its application to burr type xii distribution,” *Statistical Papers*, vol. 49, no. 3, p. 421, 2008.
- [3] N. Eugene, C. Lee, F. Famoye, “Beta-normal distribution and its applications,” *Communications in Statistics-Theory and methods*, vol. 31, no. 4, pp. 497–512, 2002.
- [4] G. M. Cordeiro, M. de Castro, “A new family of generalized distributions,” *Journal of statistical computation and simulation*, vol. 81, no. 7, pp. 883–898, 2011.
- [5] C. Alexander, G. M. Cordeiro, E. M. Ortega, J. M. Sarabia, “Generalized beta-generated distributions,” *Computational Statistics & Data Analysis*, vol. 56, no. 6, pp. 1880–1897, 2012.
- [6] K. Zografos, N. Balakrishnan, “On families of beta-and generalized gamma-generated distributions and associated inference,” *Statistical methodology*, vol. 6, no. 4, pp. 344–362, 2009.
- [7] M. Bourguignon, R. B. Silva, G. M. Cordeiro, “The weibull-g family of probability distributions,” *Journal of data science*, vol. 12, no. 1, pp. 53–68, 2014.
- [8] A. Alzaatreh, C. Lee, F. Famoye, “A new method for generating families of continuous distributions,” *Metron*, vol. 71, no. 1, pp. 63–79, 2013.
- [9] M. Ç. Korkmaz, H. M. Yousof, G. Hamedani, M. M. Ali, “Pak. j. statist. 2018 vol. 34 (3), 251-267 the marshall-olkin generalized g poisson family of distributions,” *Pak. J. Statist*, vol. 34, no. 3, pp. 251–267, 2018.
- [10] E. L. Lehmann, *The power of rank tests*. Springer, 2012.
- [11] B. Gompertz, “Xxiv. on the nature of the function expressive of the law of human mortality, and on a new mode of determining the value of life contingencies. in a letter to francis baily, esq. frs &c,” *Philosophical transactions of the Royal Society of London*, no. 115, pp. 513–583, 1825.
- [12] P.-F. Verhulst, “Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement,” *Correspondence mathematique et physique*, vol. 10, pp. 113–129, 1838.

- [13] P.-F. Verhulst, “Recherches mathématiques sur la loi d’accroissement de la population,” *Mémoires de L’Académie royale de Belgique*, vol. 18, no. 1, pp. 1–40, 1845.
- [14] P.-F. Verhulst, *Deuxième mémoire sur la loi d’accroissement de la population*. Hayez, 1847, vol. 269.
- [15] R. C. Gupta, P. L. Gupta, R. D. Gupta, “Modeling failure time data by lehman alternatives,” *Communications in Statistics-Theory and methods*, vol. 27, no. 4, pp. 887–904, 1998.
- [16] S. Nadarajah, “The exponentiated exponential distribution: A survey,” *AStA Advances in Statistical Analysis*, vol. 95, pp. 219–251, 2011.
- [17] S. Nadarajah, S. Kotz, “The exponentiated type distributions,” *Acta Applicandae Mathematica*, vol. 92, pp. 97–111, 2006.
- [18] A. S. Hassan, M. A. Abdelghafar, “Exponentiated lomax geometric distribution: Properties and applications,” *Pakistan Journal of Statistics and Operation Research*, pp. 545–566, 2017.
- [19] M. Adeleke, A. A. Ayodele, A. F. Barnabas, “Exponentiated exponential lomax distribution and its properties,” *Mathematical Theory and Modeling*,
- [20] A. Nasir, H. M. Yousof, F. Jamal, M. Ç. Korkmaz, “The exponentiated burr xii power series distribution: Properties and applications,” *Stats*, vol. 2, no. 1, pp. 15–31, 2018.
- [21] N. L. Johnson, “Systems of frequency curves generated by methods of translation,” *Biometrika*, vol. 36, no. 1/2, pp. 149–176, 1949.
- [22] C. W. Topp, F. C. Leone, “A family of j-shaped frequency functions,” *Journal of the American Statistical Association*, vol. 50, no. 269, pp. 209–219, 1955.
- [23] P. Kumaraswamy, “A generalized probability density function for double-bounded random processes,” *Journal of hydrology*, vol. 46, no. 1-2, pp. 79–88, 1980.
- [24] P. C. Consul, G. C. Jain, “On the log-gamma distribution and its properties,” *Statistische Hefte*, vol. 12, no. 2, pp. 100–106, 1971.
- [25] J. Mazucheli, A. Menezes, M. Ghitany, “The unit-weibull distribution and associated inference,” *J. Appl. Probab. Stat*, vol. 13, no. 2, pp. 1–22, 2018.
- [26] J. Mazucheli, A. F. Menezes, S. Dey, “Unit-gompertz distribution with applications,” *Statistica*, vol. 79, no. 1, pp. 25–43, 2019.
- [27] A. Pekgör, K. Coşkun, K. Karakaya, B. Saraçoğlu, İ. KINACI, “A lifetime regression analysis with unit lindley-weibull distribution,” *Istatistik Journal of The Turkish Statistical Association*, vol. 14, no. 2, pp. 51–73, 2022.
- [28] M. Ç. Korkmaz, Z. S. Korkmaz, “The unit log–log distribution: A new unit distribution with alternative quantile regression modeling and educational measurements applications,” *Journal of Applied Statistics*, vol. 50, no. 4, pp. 889–908, 2023.
- [29] J. Mazucheli, A. F. B. Menezes, S. Chakraborty, “On the one parameter unit-lindley distribution and its associated regression model for proportion data,” *Journal of Applied Statistics*, vol. 46, no. 4, pp. 700–714, 2019.

- [30] M. Ç. Korkmaz, C. Chesneau, “On the unit burr-xii distribution with the quantile regression modeling and applications,” *Computational and Applied Mathematics*, vol. 40, no. 1, p. 29, 2021.
- [31] M. Ç. Korkmaz, C. Chesneau, Z. S. Korkmaz, “Transmuted unit rayleigh quantile regression model: Alternative to beta and kumaraswamy quantile regression models,” *Univ. Politeh. Buchar. Sci. Bull. Ser. Appl. Math. Phys.*, vol. 83, pp. 149–158, 2021.
- [32] K. Adamidis, S. Loukas, “A lifetime distribution with decreasing failure rate,” *Statistics & Probability Letters*, vol. 39, no. 1, pp. 35–42, 1998.
- [33] C. Kuş, “A new lifetime distribution,” *Computational Statistics & Data Analysis*, vol. 51, no. 9, pp. 4497–4509, 2007.
- [34] R. Tahmasbi, S. Rezaei, “A two-parameter lifetime distribution with decreasing failure rate,” *Computational Statistics & Data Analysis*, vol. 52, no. 8, pp. 3889–3901, 2008.
- [35] A. Asgharzadeh, H. S. Bakouch, M. Habibi, “A generalized binomial exponential 2 distribution: Modeling and applications to hydrologic events,” *Journal of Applied Statistics*, vol. 44, no. 13, pp. 2368–2387, 2017.
- [36] W. Lu, D. Shi, “A new compounding life distribution: The weibull–poisson distribution,” *Journal of applied statistics*, vol. 39, no. 1, pp. 21–38, 2012.
- [37] W. Barreto-Souza, A. L. de Moraes, G. M. Cordeiro, “The weibull-geometric distribution,” *Journal of Statistical computation and Simulation*, vol. 81, no. 5, pp. 645–657, 2011.
- [38] M. Ç. Korkmaz, M. Erisoglu, “The burr xii-geometric distribution,” *Journal of Selcuk University Natural and Applied Science*, vol. 3, no. 4, pp. 75–87, 2014.
- [39] S. Sen, M. Korkmaz, H. M. Yousof, “The quasi xgamma-poisson distribution,” *Theory and Applications of Statistics and Information*, vol. 18, no. 3, pp. 65–76, 2018.
- [40] E. Mahmoudi, A. A. Jafari, “Generalized exponential–power series distributions,” *Computational Statistics & Data Analysis*, vol. 56, no. 12, pp. 4047–4066, 2012.
- [41] P. Sahoo, *Probability and mathematical statistics*, 2013.
- [42] J. F. Lawless, *Statistical models and methods for lifetime data*. John Wiley & Sons, 2011.
- [43] I. Gradshteyn, I. Ryzhik, *Table of integrals, series, and products*. eds. jeffrey a., zwillinger d, 2007.
- [44] G. Casella, R. L. Berger, “Statistical inference duxbury press,” *Pacific Grove, CA.[Google Scholar]*, 2002.
- [45] J. J. Swain, S. Venkatraman, J. R. Wilson, “Least-squares estimation of distribution functions in johnson’s translation system,” *Journal of Statistical Computation and Simulation*, vol. 29, no. 4, pp. 271–297, 1988.
- [46] R. D. Gupta, D. Kundu, “Generalized exponential distribution: Different method of estimations,” *Journal of Statistical Computation and Simulation*, vol. 69, no. 4, pp. 315–337, 2001.

- [47] T. W. Anderson, D. A. Darling, "Asymptotic theory of certain" goodness of fit" criteria based on stochastic processes," *The annals of mathematical statistics*, pp. 193–212, 1952.
- [48] P. Macdonald, "Comments and queries comment on "an estimation procedure for mixtures of distributions" by choi and bulgren," *Journal of the Royal Statistical Society Series B: Statistical Methodology*, vol. 33, no. 2, pp. 326–329, 1971.
- [49] H. Akaike, "A new look at the statistical model identification," *IEEE transactions on automatic control*, vol. 19, no. 6, pp. 716–723, 1974.
- [50] G. S. Mudholkar, D. K. Srivastava, "Exponentiated weibull family for analyzing bathtub failure-rate data," *IEEE transactions on reliability*, vol. 42, no. 2, pp. 299–302, 1993.
- [51] A. J. Lemonte, G. M. Cordeiro, G. Moreno–Arenas, "A new useful three-parameter extension of the exponential distribution," *Statistics*, vol. 50, no. 2, pp. 312–337, 2016.
- [52] A. Z. Afify, O. A. Mohamed, "A new three-parameter exponential distribution with variable shapes for the hazard rate: Estimation and applications," *Mathematics*, vol. 8, no. 1, p. 135, 2020.
- [53] A. Y. Al-Saiari, L. A. Baharith, S. A. Mousa, "Marshall-olkin extended burr type xii distribution," *International Journal of Statistics and probability*, vol. 3, no. 1, pp. 78–84, 2014.
- [54] C. Chesneau, K. Karakaya, H. S. Bakouch, C. Kuş, "An alternative to the marshall-olkin family of distributions: Bootstrap, regression and applications," *Communications on Applied Mathematics and Computation*, pp. 1–29, 2022.
- [55] E. Ozkan, G. Golbasi Simsek, "Generalized marshall-olkin exponentiated exponential distribution: Properties and applications," *PLoS One*, vol. 18, no. 1, e0280349, 2023.
- [56] F. Proschan, "Theoretical explanation of observed decreasing failure rate," *Technometrics*, vol. 5, no. 3, pp. 375–383, 1963.
- [57] L. J. Gleser, "The gamma distribution as a mixture of exponential distributions," *The American Statistician*, vol. 43, no. 2, pp. 115–117, 1989.
- [58] M. Habibi, A. Asgharzadeh, "Power binomial exponential distribution: Modeling, simulation and application," *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, vol. 47, no. 10, pp. 3042–3061, 2018.
- [59] S. Nadarajah, "A truncated inverted beta distribution with application to air pollution data," *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, vol. 22, pp. 285–289, 2008.
- [60] V. Leiva, F. Vilca, N. Balakrishnan, A. Sanhueza, "A skewed sinh-normal distribution and its properties and application to air pollution," *Communications in Statistics—Theory and Methods*, vol. 39, no. 3, pp. 426–443, 2010.
- [61] V. Choulakian, M. A. Stephens, "Goodness-of-fit tests for the generalized pareto distribution," *Technometrics*, vol. 43, no. 4, pp. 478–484, 2001.

- [62] A. J. Lemonte, “A new exponential-type distribution with constant, decreasing, increasing, upside-down bathtub and bathtub-shaped failure rate function,” *Computational Statistics & Data Analysis*, vol. 62, pp. 149–170, 2013.
- [63] C. Tanış, “Transmuted lower record type inverse rayleigh distribution: Estimation, characterizations and applications,” *Ricerche di Matematica*, vol. 71, no. 2, pp. 777–802, 2022.
- [64] I. Voinsky, G. Baristaite, D. Gurwitz, “Effects of age and sex on recovery from covid-19: Analysis of 5769 israeli patients,” *Journal of Infection*, vol. 81, no. 2, e102–e103, 2020.
- [65] M. P. Barman, T. Rahman, K. Bora, C. Borgohain, “Covid-19 pandemic and its recovery time of patients in india: A pilot study,” *Diabetes & Metabolic Syndrome: Clinical Research & Reviews*, vol. 14, no. 5, pp. 1205–1211, 2020.



TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR

Makale

1. E. Ozkan, G. Golbasi Simsek, “Generalized marshall-olkin exponentiated exponential distribution: Properties and applications,” PLoS One, 18(1)

Konferans Bildirisi

1. E. Ozkan, G. Golbasi Simsek, "On Parameter Estimation of The Generalized Marshall-Olkin Exponentiated Exponential Distribution" IRSYSC 2023 7th International Researchers, Statisticians, and Young Statisticians Congress 2-5 November 2023 - İstanbul, TÜRKİYE, ss.83