



**T.C.
AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**SÜREKSİZ KATSAYILI ÇOK NOKTALI SINIR DEĞER
PROBLEMİNİN SPEKTRAL ÖZELLİKLERİ**

DOKTORA TEZİ

TEVHİDE BALTÜRK

OCAK

**SÜREKSİZ KATSAYILI ÇOK NOKTALI SINIR DEĞER PROBLEMİNİN
SPEKTRAL ÖZELLİKLERİ**

Tevhide BALTÜRK

**DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

Danışman

Prof. Dr. Mustafa KANDEMİR

**AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

OCAK 2024

Doktora Tezi Kabul ve Onay Sayfası

Tevhide BALTÜRK tarafından hazırlanan “Süreksiz Katsayılı Çok Noktalı Sınır Değer Probleminin Spektral Özellikleri” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında DOKTORA TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Mustafa KANDEMİR

Matematik Eğitimi Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum.

Başkan : Prof. Dr. Hüseyin DEMİR

Yazılım Mühendisliği Anabilim Dalı, Samsun Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum.

Üye : Prof. Dr. Oktay MUHTAROĞLU

Matematik Anabilim Dalı, Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum.

Üye : Prof. Dr. Bülent Nafi ÖRNEK

Bilgisayar Yazılımı Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum.

Üye : Prof. Dr. Kadriye AYDEMİR

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum.

Tez Savunma Tarihi: 26/01/2024

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Doktora Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Doç. Dr. Ümit YILDIRIM

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

(İmza)

Tevhide BALTÜRK

(Tarih)

SÜREKSİZ KATSAYILI ÇOK NOKTALI SINIR DEĞER PROBLEMİNİN SPEKTRAL
ÖZELLİKLERİ
(Doktora Tezi)

Tevhide BALTÜRK

AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Ocak 2024

ÖZET

Bu doktora tez çalışmasında ikinci mertebeden süreksiz katsayılı bir diferensiyel denklem ve sınır şartlarından oluşan bir sınır değer problemi göz önüne alınmıştır. Problemin diferensiyel denklemi özdeğer parametresine sahip olup denklemdeki katsayılar tanım aralığının iki iç noktasında süreksiz olan fonksiyonlardır. Problemin tanım aralığı iki tane süreksizlik noktasına sahip olduğundan problem üç aralıklı bir sınır değer problemidir. Bu nedenle problem tanım aralığının uç noktalarındaki sınır şartları ile süreksizlik noktalarındaki geçiş şartları adı verilen sınır şartlarıyla birlikte altı tane sınır şartlarından oluşan bir problemdir. Ayrıca bütün sınır şartları aralıkların iç noktalarına ait şartlar da bulundurmaktadır. Dolayısıyla çözülebilirliğini araştırdığımız problem; süreksiz katsayılı, çok noktalı, özdeğer parametrelili ve geçiş şartları bulunduran bir sınır değer problemidir. Tez kapsamında özelliklerini yukarıda ifade ettiğimiz bu problemin araştırılmasının temel ağırlığı, problemin ürettiği diferensiyel operatörün özellikleri üzerine yaptığımız çalışmalardır. Bu diferensiyel operatör aralıklara ait Sobolev uzaylarının direkt toplam uzayında tanımlıdır. Bu operatör aynı direkt toplam uzayına, sınır şartlarının değerlendirildiği altı boyutlu kompleks uzayların da ilave edilmesiyle elde edilen Sobolev uzaylarının direkt toplam uzayında değerlendirilmektedir. Bu tez üç ana bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde literatür özeti, ikinci bölümde genel kavramlar ve tanımlar, üçüncü bölümde ise göz önüne aldığımız bu yeni problemin çalışma aşamaları ve diferensiyel operatörün koersitivliğinin ve Fredholm operatörü olması ile ilgili teoremler ve ispatları yer almaktadır.

Sayfa Adedi : 91
Anahtar Kelimeler : Sınır Değer Problemi, Süreksiz Problem, İzomorfizm,
Koersitivlik, Fredholm Operatörü
Danışman : Prof. Dr. Mustafa KANDEMİR

SPECTRAL PROPERTIES OF MANY POINT BOUNDARY VALUE PROBLEM
WITH DISCONTINUOUS COEFFICIENT
(PhD Thesis)

Tevhide BALTÜRK

AMASYA UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
January 2024

ABSTRACT

In this PhD thesis, a boundary value problem consisting of a second-order differential equation with discontinuous coefficients and boundary conditions is considered. The differential equation of the problem has an eigenvalue parameter and the coefficients in the equation are the functions that are discontinuous at two internal points of the domain. Therefore, the under consideration problem which has six boundary conditions with transmission conditions of discontinuity points in the domain and the endpoints of the domain becomes three-interval boundary value problem. In addition, all boundary conditions also contain conditions for the interior points of intervals. Therefore, the problem solvability of which is being investigated is a boundary value problem with discontinuous coefficients, multiple points, eigenvalue parameters and transmission conditions. The properties of the differential operator which is produced by the problem and whose properties have mentioned above are the main focus of the this thesis. Furthermore, the differential operator that considered is defined on the direct sum space of the Sobolev spaces of the intervals. It is evaluated in the direct sum space of Sobolev spaces, which is obtained by adding six-dimensional complex spaces where boundary conditions are evaluated to the same direct sum space. This thesis consists of three main parts. In the first part the literature research is given. In the second part general concepts and definitions are given. In the third part the working stages of considered new problem and the proofs of the theorems about the coercivity of the differential operator and the Fredholm operator are given.

Number of pages : 91
Keywords : Boundary Value Problem, Discontinuous Problem, Isomorphism,
Coerciveness, Fredholm Operator
Supervisor : Prof. Dr. Mustafa KANDEMİR

ÖN SÖZ ve TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasının her aşamasında bilgisini, tecrübesini, yardımlarını esirgemeyen ve şahsıma karşı her zaman sabırlı olan saygıdeğer danışman hocam Prof. Dr. Mustafa KANDEMİR'e saygı ve şükranlarımı sunarım.

Tez çalışmam boyunca karşılaştığım sorunlarda bilgilerini ve fikirlerini benimle paylaşan kıymetli hocam Prof. Dr. Oktay MUHTAROĞLU'na saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca tez çalışmam sürecinde önerilerini ve desteklerini esirgemeyen değerli hocalarım Prof. Dr. Bülent Nafi ÖRNEK'e ve Prof. Dr. Kadriye AYDEMİR'e teşekkürlerimi sunarım.

Desteklerini hayatım boyunca yanımda hissettiğim babam Galip GÖKTÜRK'e ve annem Emine GÖKTÜRK'e teşekkür ederim.

Lisansüstü eğitimim boyunca karşılaştığım her zorlukta yardımını ve desteğini esirgemeyen eşim Yücel BALTÜRK'e, varlığı ve sevgisiyle bana her zaman yaşama sevinci veren biricik kızım Begüm Nil BALTÜRK'e sonsuz sevgilerimi sunar teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
ÖN SÖZ VE TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	viii
1. GİRİŞ VE LİTERATÜR ÖZETİ	1
2. GENEL BİLGİLER	12
2.1. Vektör Uzayları ve Normlu Uzaylar.....	12
2.2. Ölçülebilir Uzaylar	18
2.3. Sobolev Uzayları	26
2.4. İnterpolasyon Uzayları.....	34
2.5. Sturm-Liouville Sınır Değer Problemi.....	44
3. SÜREKSİZ KATSAYILI ÇOK NOKTALI SINIR DEĞER PROBLEMİNİN SPEKTRAL ÖZELLİKLERİ	63
3.1. Süreksiz Katsayılı Sınır Değer Probleminin İfadesi	63
3.2. Problemin Tanımlı Olduğu Sobolev Uzayı.....	64
3.3. Homojen Denkleme ve Homojen Olmayan Geçiş Şartlarına Sahip Sınır Değer Probleminin Çözülebilirliği ve Koersitivliği.....	65
3.4. Ana Problemin Fredholm Operatörü Olma Özelliği.....	74
3.5. Problemin Esas Kısımının İzomorfizmi ve Koersitivliği.....	77
3.6. Ana Problemin İzomorfizmi ve Koersitivliği.....	81
4. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	86
KAYNAKLAR	88
ÖZGEÇMİŞ	91

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, yanda açıklamaları verilmek üzere aşağıda listelenmiştir.

Simgeler	Açıklama
$\mathbb{N}$	doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	karmaşık sayılar kümesi
$\mathbb{F}$	cisim ($\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$)
$\ x\ $	x 'in normu
$\langle x, y \rangle$	x ile y 'nin iç çarpımı
$P(X)$	X kümesinin kuvvet kümesi
$\bar{E}$	E kümesinin kapanışı
X^*	X uzayının cebirsel dual uzayı
X'	X uzayının topolojik dual uzayı
$g _A$	g fonksiyonunun A kümesine kısıtlanması
$\mathcal{L}(X, Y)$	X 'den Y 'ye bütün lineer operatörlerin kümesi
$\mathcal{B}(X, Y)$	X 'den Y 'ye bütün sınırlı lineer operatörlerin kümesi
L^*	eşlenik problemin ürettiği diferensiyel operatör
$L^1(E)$	E üzerinde integrallenebilen fonksiyonlar sınıfı
$L^1_{loc}(\Omega)$	Ω 'da lokal integrallenebilen fonksiyonlar sınıfı
$L^p_{loc}(\Omega)$	Ω 'da tanımlı bütün ölçülebilir fonksiyonlar uzayı
$L^p(\Omega)$	Ω 'da tanımlı tüm ölçülebilir fonksiyonlar sınıfı

$L^\infty(\Omega)$	Ω bölgesinde h.h.h.y. sınırlı fonksiyonlar uzayı
$\operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} g(x) $	Ω üzerinde $ g $ fonksiyonunun esas supremumu
$\subseteq$	kompakt alt küme
$\operatorname{supp}(g)$	g fonksiyonunun support kümesi
μ	ölçü fonksiyonu
μ^*	dış ölçü fonksiyonu
$C_0^\infty(\Omega) = D(\Omega)$	Ω kümesindeki test fonksiyonlarının uzayı
$D^\alpha(g)$	g fonksiyonunun α . mertebeden zayıf türevi
$W_p^k(\Omega)$	Sobolev uzayı
$E \hookrightarrow F$	E normlu uzayının F normlu uzayına gömülüğü
$\ker(T)$	T operatörünün çekirdeği
$\operatorname{coker}(T)$	T operatörünün kokerneli
$(X, Y)_\theta$	reel interpolasyon uzayı
$B_{p,q}^s(\Omega)$	Besov uzayı
$C(\Omega)$	$\{g \mid g, \Omega \subset \mathbb{R}^n \text{ açık bölgesinde sürekli}\}$
$C_0(\Omega)$	$\{g \in C(\Omega) \mid \Omega \subset \mathbb{R}^n \text{ açık, } \operatorname{supp} g \subset \Omega, \operatorname{supp} g \text{ kompakt}\}$
$C^k(\Omega)$	$\{g \in C(\Omega) \mid g, k \text{ kez sürekli diferensiyellenebilir}\}$
C^∞	$\bigcap_{k=1}^{\infty} C^k(\Omega) = \text{smooth fonksiyon}$

1. GİRİŞ VE LİTERATÜR ÖZETİ

Bilindiği üzere fiziksel olayların yorumlanması neticesinde hareketten kaynaklı olarak türevli denklemlere sahip matematiksel modeller elde edilir. Bu modeller, adi türevli veya kısmi türevli diferensiyel denklemler için başlangıç değer problemleri veya sınır değer problemleri şeklinde ortaya çıkmaktadır. Burada bahsi geçen ve ileride sıklıkla sözü edilecek olan adi diferensiyel denklemlerin, başlangıç değer problemlerinin ve sınır değer problemlerinin tanımları aşağıda kısaca verilmiştir.

$\mathbb{F}$ sembolü ile $\mathbb{R}$ ya da $\mathbb{C}$ kümesi ifade edilsin. $\mathbb{F}^m$ üzerindeki norm Euclid normu olmak üzere

$$g : D \subseteq \mathbb{R} \times (\mathbb{F}^m)^{n+1} \rightarrow \mathbb{F}^m, \quad m \geq 1, \quad n \geq 1 \quad (m, n \in \mathbb{N})$$

fonksiyonu aracılığıyla tanımlanan

$$g(x, y(x), y'(x), y''(x), y'''(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$$

denklemine *adi (basit) diferensiyel denklem* adı verilir. g fonksiyonu ikinci, üçüncü ve $(n+2)$. değişkenlerine göre lineer ise

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = g(x)$$

denklemini ile ifade edilebilir. Bu denklem a_i ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) katsayılarının sabit ya da x e bağlı bir fonksiyon olup olmaması durumuna göre sabit katsayılı ya da değişken katsayılı diferensiyel denklem olarak ifade edilir. Ayrıca bu denkleme $g(x) = 0$ olduğunda *homojen diferensiyel denklem*, $g(x) \neq 0$ olduğunda *homojen olmayan diferensiyel denklem* adı verilir.

$$g(x, y(x), y'(x), y''(x), y'''(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$$

denkleminde x in belli bir x_0 değeri için y nin ve $(n-1)$ -inci mertebeye kadar türevlerinin değerleri

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad y''(x_0) = y_2, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

olarak verilen ifadelere *başlangıç şartları* adı verilir.

Başlangıç şartları ile oluşturulan

$$g(x, y, y', y'', y''', \dots, y^{(n)}) = 0$$

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad y''(x_0) = y_2, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

biçimindeki problemlere *başlangıç değer problemi* adı verilir.

$a_1, a_2, \dots, a_n$ ($a_n \neq 0$) sabit reel sayılar olsun. Bir $[\alpha, \beta]$ aralığında tanımlı

$$L(y) = a_n y^{(n)} + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y$$

diferensiyel ifadesi verilsin. Burada

$$L(y) = 0$$

sabit katsayılı lineer homojen diferensiyel denklemini dikkate alırsak y fonksiyonu $[\alpha, \beta]$ aralığında n -yinci mertebeye kadar sürekli türevlenebilen ($y \in \mathbb{C}^{(n)}$) bir fonksiyondur.

$y_1, y_2, \dots, y_n$ fonksiyonları $L(y) = 0$ denkleminin lineer bağımsız çözümleri olsun.

$$c_1, c_2, \dots, c_n$$

keyfi sabitler olmak üzere $L(y) = 0$ denkleminin genel çözümü

$L(y)$ diferensiyel ifadesinin tanım bölgesinde bulunan her bir y fonksiyonuna $L(y) = u$ olacak biçimde değer bölgesinde bir u değerinin var olduğu kabul edilirse homojen sınır değer problemi $\mathcal{L}$ ile ifade edilen bir lineer operatör aracılığıyla

$$\mathcal{L}y = u$$

şeklinde ifade edilir. Burada

$$\mathcal{L}y = (L(y), L_1(y), L_2(y), \dots, L_m(y)) = u$$

olarak yazılır.

λ reel veya kompleks bir parametre olsun.

$$\begin{cases} L(y) = \lambda y \\ L_k(y) = 0, k = 1, 2, \dots, m \end{cases}$$

problemine *özdeğer parametrelili sınır değer problemi* adı verilir. Bu sınır değer probleminin ürettiği $\mathcal{L}$ diferensiyel operatörüne göre homojen problem

$$\mathcal{L}y = \lambda y \text{ ya da } (\mathcal{L} - \lambda I)y = 0$$

biçiminde ifade edilir. Burada $(\mathcal{L} - \lambda I)y = 0$ denkleminin sıfırdan farklı bir çözümünün olmasını sağlayan λ sayısı $\mathcal{L}$ operatörünün *özdeğeri* olarak adlandırılır. λ özdeğerine karşılık gelen sıfırdan farklı y fonksiyonları ise problemin *özfonksiyonları* olarak ifade edilir (Kandemir, 2021).

İsviçreli matematikçi Jacques Sturm (1803-1855) ve Fransız matematikçi Joseph Liouville (1809-1882) isimleriyle bütünleşen ve yaygın olarak Sturm-Liouville sınır değer problemleri olarak bilinen problemler uygun sınır şartlarında ikinci mertebeden lineer diferansiyel denklemlerin çözümleri olarak ortaya çıkmaktadır. Burada ele alınan diferansiyel denklemler Newton yasasına bağlı matematiksel hareket modelleri olarak ortaya çıkmış olsa da bu denklemlerin çoğunlukla Laplace denklemi, ısı denklemi ve dalga denklemi gibi fizik

alanındaki bazı problemleri çözmek için değişkenlerine ayırma yönteminin kullanılmasının bir sonucu olarak ortaya çıktığı görülmektedir (Al-Gawiz, 2008).

Sturm tarafından yapılan çalışmaların matematiğe en büyük katkılarından birincisi, 1829'da Paris Bilimler Akademisi'ne sunduğu ve daha sonra 1835 tarihli bir çalışmasında detaylandığı, gerçek bir polinomun belirli bir aralıktaki kök sayısını belirleme problemine ilişkin dikkate değer çözümüydü. Sturm, on yedinci yüzyıldan beri açık olan bu soruna tam bir çözüm buldu. Sturm tarafından yapılan polinomların sıfırları üzerine olan çalışması daha sonra gerçekleştireceği diferansiyel denklemlerin çözümleri ile ilgili problemler üzerindeki çalışmasını etkilemiştir.

İkinci büyük matematiksel katkısı ise ikinci mertebeden lineer adi diferansiyel denklemler teorisi alanında olmuştur. Bu alanda yaptığı çalışma Sturm adını taşıyacak olan salınım, karşılaştırma ve ayırma teoremlerinin ilk tam incelemesini içeriyordu. Devamında Liouville ile işbirliği içinde dikkat çekici kısa bir makale yayınlandı. Bu makale Sturm-Liouville teorisi olarak bilinecekti. Bu çalışmada ele alınan problemler, bugün sonlu bir aralıkta, belirlenmiş sınır şartları ile Sturm-Liouville sınır değer problemleri (ikinci mertebeden özdeğer parametrelili lineer diferansiyel denklemler) olarak tanımlanacaktır. Sturm ve Liouville arasındaki işbirliği, açılım teoremini, yani geniş bir fonksiyon sınıfının, sınır değer probleminin çözüm sistemi açısından Fourier tipi bir seri ile temsil edilebileceğini ispatlayarak teoriyi ileriye götürmüştür. Bu çözümler daha sonra özfonksiyonlar olarak ve bu çözümlere karşılık gelen parametre değerleri de özdeğerler olarak bilinecektir. Sturm-Liouville teorisi, modern analizin büyük bir bölümünün merkezinde yer almaktadır. Ayrıca bu teori, matematiksel fizik ve modern bilimin diğer dallarına yapılan uygulamalarla, çeşitli yönlerde art arda genelleştirilmiştir. Sturm-Liouville teorisi, ikinci mertebeden adi diferansiyel operatörler sınıfı için bir spektral teoremin geliştirilmesine yönelik ilk adım olarak görülebilir (Amrein, Andeas and David B. 2005).

İkinci mertebeden lineer kısmi diferansiyel denklemler değişkenlerine ayırma yöntemi ile çözüldüğünde, çoğunlukla spektral parametre içeren Sturm-Liouville problemleri ile karşılaşılmaktadır. Değişkenlerine ayırma yöntemi olarak da bilinen Fourier yöntemiyle mühendislik, jeofizik, mekanik gibi farklı bilim dallarında bulunan birçok problem düz spektral problemlere indirgenebilmektedir. Örneğin elektrik devre problemleri, olasılık teorisi problemleri, fizik alanındaki dalga ve titreşim problemleri, bir katı ve bir akışkan ile

ilişkili difüzyon problemlerinin ısı denklemleri aracılığıyla çözülmesi, ısı ve kütle transfer problemleri düz spektral problemlerin uygulama alanlarıdır (Ed. Orhan ve Seven, Bölüm 8: Muhtaroglu ve Olgar, 2022).

Sturm-Liouville problemleri regüler Sturm-Liouville problemleri ve singüler Sturm-Liouville problemleri şeklinde sınıflandırılmaktadır. İkinci mertebeden olup Sturm-Liouville denklemi biçiminde yazılabilen denklem örnekleri aşağıda verilmiştir.

1) m bir sabit olmak üzere

$$x^2 y'' + xy' + (\beta^2 x^2 - m^2) y = 0, \quad 0 < x \leq a$$

Bessel denklemi

$$x^2 y'' + y' + \beta^2 xy - \frac{m^2}{x} y = 0$$

$$\frac{d}{dx} \left(x \frac{dy}{dx} \right) - \frac{m^2}{x} y + \beta^2 xy = 0$$

şeklinde alınırsa bir Sturm-Liouville denklemi haline gelir. Ayrıca sınır şartları $x = a$ ve $x = +0$ için yazılır. Bessel denklemi $x = 0$ noktasında singülerdir.

2)

$$(1 - x^2) y'' - 2xy' + m(m+1)y = 0, \quad -1 < x < 1$$

Legendre denklemi

$$((1 - x^2) y')' + \lambda y = 0$$

biçiminde alınırsa bir Sturm- Liouville denklemi haline gelir. Legendre denklemi $x = \mp 1$ noktalarında singülerdir. Legendre denklemi için sınır şartları $x \rightarrow -1^+$ ve $x \rightarrow 1^-$ değerlerine göre yazılır.

3)

$$(1-x^2)y'' - xy' + \beta^2 y = 0, \quad -1 < x < 1$$

Chebyshev denklemi $\sqrt{1-x^2}$ ile bölüldüğünde

$$\sqrt{1-x^2}y'' - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}y' + \frac{\beta^2}{\sqrt{1-x^2}}y = 0$$

ya da

$$\left(\sqrt{1-x^2}y'\right)' + \frac{\beta^2}{\sqrt{1-x^2}}y = 0$$

Sturm-Liouville denklemi haline gelir. Chebyshev denkleminin $x = \mp 1$ ve $x = \infty$ singüler noktaları mevcuttur (Kandemir, 2021).

Bazı matematiksel fizik problemlerinin çözümü, uygun Sturm-Liouville problemlerinin özdeğerleri ve özfonksiyonları yardımıyla seri biçiminde elde edilebilir. Dolayısıyla on dokuzuncu yüzyılın ortalarından başlamak suretiyle Sturm-Liouville problemleri ile ilgili çalışmalar yoğunluk kazanmıştır. Bu nedenle doğal olarak bazı yeni tip problemler ortaya çıkmıştır. Sturm Liouville teorisi temelinde oluşan teorilere örnek olarak; Green fonksiyonu teorisi, Laplace dönüşümü, özel fonksiyonlar teorisi, Fourier serileri, lineer diferensiyel operatörlerin spektral teorisi, asimptotik teori gibi teoriler verilebilir. Dolayısıyla fizik ve diğer bilimlerde oluşan yeni tip problemleri çözmek için Sturm-Liouville teorisi daha da ileriye taşınmıştır. Örneğin farklı fiziksel ortamları ve kimyasal oluşumları olan maddeler arasındaki iletim problemleri çoğunlukla iki veya daha çok aralığa sahip süreksizlik noktası ya da süreksizlik noktaları ve geçiş şartları içeren Sturm-Liouville problemleriyle ifade

edilebilmektedir. Görüldüğü üzere sınır değer problemleri ısı iletimi, kütle transferi, dalga denklemleri gibi bilimin birçok alanında araştırmacıların ilgisini çeken ve oldukça fazla makale üretilen diferensiyel denklem tipleri olarak literatürde yer almaktadır.

Sürekli Sturm-Liouville problemleri ile ilgili literatürde oldukça fazla sayıda kitap ve makaleler bulunmasına rağmen, süreksiz problemlerle ilgili literatürde daha az sayıda çalışma bulunmaktadır. Süreksiz Sturm-Liouville teorisinin klasik yöntemlerinin geçiş şartları bulunduran klasik olmayan problemlere de uygulanabilecek şekilde nasıl geliştirileceği belirgin değildir. Klasik olmayan problemler genellikle ısı ve kütle transfer problemlerinde, kırınım problemlerinde, titreşim problemlerinde ve fiziksel transfer problemlerinde karşımıza çıkmaktadır. Literatürde yer alan başka bir yöntem de sınır değer probleminin Hilbert uzaylarında tanımlı olan diferensiyel operatör denklem şeklinde ifade edilmesidir. Ayrıca geçiş şartları bulunduran klasik olmayan Sturm-Liouville problemi olarak ifade edilen çok aralıklı süreksiz problemler, Hilbert uzaylarının direkt toplam uzayında integral denklem haline geldikten sonra, bu problemin genelleştirilmiş çözümü elde edilmiştir.

Spektral teorisinin düz spektral teori ve ters spektral teori olmak üzere iki temel dalı mevcuttur. Diferensiyel operatörler için düz spektral teoride yer alan özdeğerler ve bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonların varlığı, karmaşık düzlemde özdeğerlerin dağılımı, asimptotik davranışları, özfonksiyonların oluşturduğu sistemin tamlik ve taban oluşturma koşulları, seri açılımlarının yakınsaklık durumları önemli konu başlıkları olarak verilebilir. Ters spektral teorisinin temel konusu ise spektral özelliklerine göre sınır değer probleminin ürettiği diferensiyel operatörün kurulmasıdır (Ed. Orhan ve Seven, Bölüm 8: Muhtaroglu ve Olgar, 2022).

Sobolev uzayları, elemanları $\mathbb{R}^n$ deki bölgelerde tanımlı fonksiyonlar olan normlu uzaylardır (Adams and Fournier, 2003). Sergei Sobolev, 1930'lu yılların ortalarında, farklı fiziksel problemlerin modeli olarak ortaya çıkan kısmi diferansiyel denklemlerin incelenmesi için oldukça önemli olan bazı fonksiyon uzaylarını tanımladı. Kısa bir süre sonra benzer bir çalışma fikri Jean Leray tarafından Navier-Stokes denklemlerinin zayıf çözümleri üzerine yapıldı.

Kısmi türevli denklemlerin çözümlerinin bulunması üzerine sistematik araştırmaların devam ettirilmesi bakımından Sobolev uzaylarının çok önemli katkıları olmuştur. Buna göre

Sobolev uzayları, $L_p(\Omega)$ Lebesgue uzaylarından alınan herhangi mertebeden genelleştirilmiş türevlere sahip fonksiyonların uzayları olup

$$W_p^k(\Omega) = \left\{ u \in L_p(\Omega) \mid D^\alpha u \in L_p(\Omega), |\alpha| \leq k, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, 1 \leq p \leq \infty \right\}$$

şeklinde tanımlıdır. Bu uzayların normu

$$\|u\|_{W_p^k(\Omega)}^p = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L_p(\Omega)}^p$$

eşitliği ile verilmektedir.

Sobolev uzayı tanımlamanın ardındaki temel düşünce genelleştirilmiş türevleri kullanmaktır. Çalışmalarını dağılımlar (distributions) olarak isimlendiren Laurent Schwartz, bu teoriyi Sobolev'den daha ileriye taşımıştır. Dağılımlar tanımlandıktan ve temel özellikleri ortaya koyulduktan sonra $\Omega, \mathbb{R}^n$ 'de bir açık küme olmak üzere $k \in \mathbb{Z}^+$ ve $1 \leq p \leq \infty$ için $W_p^k(\Omega)$ uzayı tanımlanmıştır (Tartar, 2007).

İnterpolasyon uzayları, teorisi interpolasyon uzayı olan Banach uzaylarının kuruluşu ve özelliklerini incelemektedir. Bu konuda tarihte ilk aşama olarak 1923 yılında verilen Riesz-Hausdorff-Young teoreminin 1926 yılında interpolasyon anlamında ispatının M. Riesz tarafından verilmesidir. Ardından 1939 yılında Thorin ve Marcinkiewicz tarafından bu sonucun genelleştirilmesi yapılmıştır. Günümüzde modern analizde bu sonuçlar yaygın olarak kullanılmaktadır (Brudiyi and Krugljak, 1991).

Çok noktalı ve süreksiz katsayılı sınır değer problemlerinin spektral özelliklerini inceleyen bu tez çalışması konusunda geçmişte yapılan önemli çalışmaların bazılarında bahsedecek olursak Kato (1966) kitabında lineer operatörler için perturbasyon teorisini sistematik bir sunumla vermiştir. Luikov and Mikhailov (1965) kitabında çok sayıda temel çözümlere ve parametrik tablolara yer vermiştir. M. A. Naimark (1967) Lineer Diferensiyel Operatörler kitabında bu operatörlerin elemanter teorisini incelemiştir. Rasulov (1967) iki ana bölüme ayırdığı kitabının ilk bölümünde kendisi tarafından geliştirilen sınır değer ve karma

problemlerin hesaplamalı çözümüne sistematik bir açıklama getirmiştir. Ayrıca yine bu bölümde süresiz katsayılı adi diferansiyel denklem sistemleri için sınır değer problemlerinin çözümleri incelenmiştir. Krein (1971) kitabında sınırlı olmayan operatör katsayılı lineer diferansiyel denklemlerin teorisini incelemiştir. Bu bağlamda, Banach uzayındaki diferansiyel denklemler için problemin doğru ifadesini ve bunları çözmek için belirli asimptotik ve yaklaşık çözüm yöntemlerini ele almıştır. Triebel (1978) kitabında farklı konuları interpolasyon teorisine açısından incelemiştir. Ayrıca Sobolev-Slobodeckij uzaylarını, Lebesgue (Bessel potansiyel) uzaylarını ve Besov uzaylarını incelemiştir. Krein (1982) kitabında verilen denklemin özellikleri ve onun adjoint denkleminin özellikleri arasındaki ilişkilere ve Fredholm denklemleri teorisine değinmiştir.

Yakubov S. ve Yakubov Ya. matematiksel fizik problemlerinin temel çözümlerinin tamlığı ile bağlantılı problemlerin sistematik yaklaşımını ortaya koymuşlar ve eliptik, parabolik, hiperbolik operatörler gibi farklı operatörler bulunduran sürekli ve öz değer parametrelili sınır değer problemlerinin çözülebilirliği ve problemlere ait $\mathcal{L}$ diferansiyel operatörlerinin Fredholm operatörü olması, koersitivlik ve problemlerin spektral özellikleri gibi çeşitli konu ve kavramlar üzerine oldukça fazla sayıda makale çalışmaları yapmışlardır (Yakubov, 1994; Yakubov and Yakubov, 1999).

Bu çalışmalardan elde edilen soyut sonuçlar, polinom spektral parametresi ile hem adi hem de kısmi diferansiyel denklemler için temel olarak sınır değer problemlerinin incelenmesine imkan vermektedir. Titeux ve Yakubov (1997) makalelerinde ince bir plakadaki sürekli ısı transferine dair sınır tabaka problemini Dirichlet ve Neumann sınır koşulları ile ele almışlardır (Titeux and Yakubov, 1997)

Shakhmurov (2004) makalesinde sınır şartları dejenere fonksiyon içeren eliptik diferansiyel operatör denklemler için lokal olmayan sınır değer problemini incelemiş ve ele alınan problemin koersitivlik ve Fredholmlik özelliklerini araştırmıştır (Shakhmurov, 2004).

Shakhmurov (2011) çalışmasında eliptik türden değişken katsayılı diferansiyel-operatör denklemleri için bağımsız sınır değer problemini ele almış ve bu problemin Fredholm operatörü olması özelliğini incelemiştir (Shakhmurov, 2011).

O. Muhtaroglu ve S. Yakubov (2002) makalelerinde ağırlıklı Sobolev uzaylarında adi diferansiyel operatör denklemi için geçiş şartlı bir sınır-fonksiyonel problemini incelemişler

ve problemin kök fonksiyonlarının oluşturduğu sisteme ait izomorfizimliği ve koersitivliği ispatlamışlardır (Muhtarov and Yakubov, 2002).

O. Muhtaroglu sınır değer problemleri, diferensiyel denkleminde operator bulunduran sınır değer problemleri, Sturm-Liouville sınır değer problemleri gibi çok çeşitli sınır değer problemleri üzerine çalışmalar yapmıştır. Muhtaroglu süreksiz katsayılı sınır değer problemlerinin sınır şartlarına, süreksizlik noktasında geçiş şartları ilave etmek suretiyle süreksiz katsayılı geçiş şartları bulunduran sınır değer problemlerinin spektral özellikleri üzerine çok sayıda yeni problemler kurmuş ve bu problemlerin çözülebilirliği üzerine sonuçlar elde etmiştir (Mukhtarov, 1994).

O. Muhtaroglu ve H. Demir 1999 yılında yayınlanan “Coerciveness of the discontinuous initial boundary value problem for parabolic equation” isimli makalelerinde parabolik türden süreksiz katsayılı başlangıç değer problemlerinin koersitivliğini incelemişlerdir (Mukhtarov and Demir, 1999).

O. Muhtaroglu ve M. Kandemir, Süreksiz katsayılı sınır değer problemlerinin ürettiği ve Sobolev uzaylarının direkt toplamaları üzerinde tanımlanan ve değerlendirilen

$$\mathcal{L} : W_q^l(-1,0) \dot{+} W_q^l(0,1) \rightarrow W_q^l(-1,0) \dot{+} W_q^l(0,1) \dot{+} \mathbb{C}^4$$

veya

$$\mathcal{L} : W_q^l(-1,d_1) \dot{+} W_q^l(d_1,d_2) \dot{+} W_q^l(d_2,1) \rightarrow W_q^l(-1,d_1) \dot{+} W_q^l(d_1,d_2) \dot{+} W_q^l(d_2,1) \dot{+} \mathbb{C}^6$$

gibi diferensiyel operatörlerin çeşitli spektral özellikleri, özdeğerlerinin asimptotiği, koersitivliği ve Fredholm operatörü olma özellikleri ile ilgili çalışmalar yapmışlardır (Kandemir, 2017; Kandemir and Muhtarov, 2018; Kandemir, Muhtarov and Yakubov, 2009).

O. Muhtaroglu ve K. Aydemir (2016) çalışmalarında bir iç tekil noktaya sahip olan bir Sturm-Liouville probleminin özdeğerlerini ve bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlara ait çeşitli özellikleri araştırmışlardır (Aydemir and Mukhtarov, 2016).

2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde tezde kullanılan bazı temel kavram ve uzaylar hakkında bilgi verilecektir.

2.1. Vektör Uzayları ve Normlu Uzaylar

2.1.1 Tanım $(\mathbb{F}, +, \cdot)$ bir cisim ve $V \neq \emptyset$ bir küme olsun. V üzerinde toplama işlemi

$$\begin{aligned}\oplus : V \times V &\rightarrow V \\ (u, v) &\rightarrow u \oplus v\end{aligned}$$

ve skalerle çarpma işlemi

$$\begin{aligned}\odot : \mathbb{F} \times V &\rightarrow V \\ (k, u) &\rightarrow k \odot u\end{aligned}$$

olarak tanımlansın. Bu iki işleme göre aşağıdaki özellikleri sağlayan V kümesine $\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir *vektör uzayı*, V kümesinin elemanlarına ise birer *vektör* adı verilir.

T1) $\forall u, v \in V$ için bir tek $u \oplus v \in V$ vektörü vardır.

T2) $\forall u, v, w \in V$ için $(u \oplus v) \oplus w = u \oplus (v \oplus w)$ olur.

T3) $\forall u \in V$ için $u \oplus \theta = u$ olacak biçimde bir θ sıfır vektörü vardır.

T4) $\forall u \in V$ için $u \oplus (-u) = \theta$ olacak biçimde bir $-u$ vektörü vardır.

T5) $\forall u, v \in V$ için $u \oplus v = v \oplus u$ olur.

Ç1) $\forall k \in \mathbb{F}$ ve $\forall u \in V$ için bir $k \odot u \in V$ vektörü vardır.

Ç2) $\forall k, l \in \mathbb{F}$ ve $\forall u \in V$ için $k \odot (l \odot u) = (k \cdot l) \odot u$ olur.

Ç3) $\forall k \in \mathbb{F}$ ve $\forall u, v \in V$ için $k \odot (u \oplus v) = (k \odot u) \oplus (k \odot v)$ olur.

Ç4) $\forall k, l \in \mathbb{F}$ ve $\forall u \in V$ için $(k + l) \odot u = (k \odot u) \oplus (l \odot u)$ olur.

Ç5) $\forall u \in V$ için $1 \odot u = u$ olacak biçimde bir $1 \in \mathbb{F}$ vardır (Kreyszig, 1978).

2.1.2 Tanım A , $\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olmak üzere $\forall u, v \in A$ ve $\forall k \in \mathbb{F}$ için

$$\|\cdot\|: A \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu

1. $\|u\| \geq 0$
2. $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$
3. $\|ku\| = |k|\|u\|$
4. $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$

özelliklerini sağlıyorsa $\|\cdot\|$ fonksiyonuna A üzerinde bir normdur denir. Eğer $\|\cdot\|$ fonksiyonu A vektör uzayı üzerinde bir norm tanımlıyor ise A vektör uzayına *normlu vektör uzayı* ya da *normlu uzay* adı verilir ve $(A, \|\cdot\|)$ biçiminde gösterilir (Rudin, 1991).

2.1.3 Tanım X boş olmayan herhangi bir küme olmak üzere

$$d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu $\forall u, v, w \in X$ için

1. $d(u, v) \geq 0$
2. $d(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$
3. $d(u, v) = d(v, u)$
4. $d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$

özelliklerini sağlıyorsa d fonksiyonuna X kümesi üzerinde bir *metrik* ve (X, d) ikilisine *metrik uzay* adı verilir (Kreyszig, 1978).

2.1.4 Tanım (X, d) metrik uzayından alınan bir (u_s) dizisi verilmiş olsun. $\forall \varepsilon > 0$ ve $\forall k, s \geq n_0$ için $d(u_k, u_s) < \varepsilon$ olacak biçimde bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{Z}^+$ var ise (u_s) dizisine bir *Cauchy dizisi* denir (Rudin, 1991).

2.1.5. Tanım $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu vektör uzayı olsun. $d(u, v) = \|u - v\|$ şeklinde tanımlı d metriğine X normlu uzayı üzerinde $\|\cdot\|$ normu tarafından *indirgenen (üretilen) metrik* denir (Royden, 2010).

2.1.6 Tanım (X, d) metrik uzayında yer alan her Cauchy dizisi yakınsak ise (X, d) metrik uzayına *tam uzay* adı verilir (Kreyszig, 1978).

2.1.7 Tanım B bir normlu vektör uzayı olsun. Eğer B uzayı normdan üretilen metriğe göre tam ise B uzayına *Banach uzayı* denir (Kreyszig, 1978).

2.1.8 Tanım X bir kompleks vektör uzayı olsun. Eğer

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$$

fonksiyonu $\forall u, v, w \in X$ ve $\forall k, l \in \mathbb{C}$ için

1. $\langle u, u \rangle \geq 0$ ve $\langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$
2. $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$
3. $\langle ku + lv, w \rangle = k \langle u, w \rangle + l \langle v, w \rangle$

özelliklerini sağlarsa bir *iç çarpım* olarak adlandırılır. Eğer X vektör uzayı üzerinde bir iç çarpım tanımlı ise bu uzaya bir *iç çarpım uzayı* denir ve $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ şeklinde gösterilir (Royden, 2010).

2.1.9 Tanım H bir iç çarpım uzayı olmak üzere eğer H uzayı $d(\alpha, \beta) = \|\alpha - \beta\| = \sqrt{\langle \alpha - \beta, \alpha - \beta \rangle}$ ile tanımlanan d metriğine göre tam ise bu uzaya bir *Hilbert uzayı* adı verilir (Royden, 2010).

2.1.10 Tanım E ve F iki Banach uzayı olsunlar.

$D \subset E$ olmak üzere $\forall x_1, x_2 \in D$ ve $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ için $T : D(T) \subset E \rightarrow R(T) \subset F$ operatörü

$$T(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 T x_1 + \lambda_2 T x_2$$

şartını sağlarsa T operatörüne bir *lineer operatör* adı verilir. $T : E \rightarrow F$ bütün lineer operatörlerin kümesi $\mathcal{L}(E, F)$ ile gösterilir. İlaveten $\mathcal{L}(E, E) = \mathcal{L}(E)$ ile gösterilir.

Burada ifade edilen D kümesi T operatörünün *tanım kümesi* olarak isimlendirilir ve $D(T)$ ile gösterilir. T operatörünün *değer kümesi* ise F uzayıdır.

$$R(T) = \{y \in F \mid y = T(x), x \in D(T)\}$$

kümesine T operatörünün *görüntü kümesi* denir.

$T^{-1} : F \rightarrow E$ operatörüne T operatörünün *tersi* denir ve yalnızca T operatörü bire-bir iken tanımlıdır (Titeux and Yakubov, 2003).

2.1.11 Tanım Bir $T : E \rightarrow F$ lineer operatörü göz önüne alınsın. Eğer $D(T) = E$ için $u_n \in E$, $\|u_n - u_0\|_E \rightarrow 0$ iken $\|Tu_n - Tu_0\|_F \rightarrow 0$ oluyorsa T operatörü *bir $u_0 \in E$ noktasında süreklidir* denir (Titeux and Yakubov, 2003).

2.1.12 Tanım Bir $T : E \rightarrow F$ lineer operatörü ve $D(T) = E$ olmak üzere herhangi $M > 0$ sayısı ve $\forall x \in E$ için $\|Tx\|_F \leq M \|x\|_E$ oluyorsa T operatörü *sınırlıdır* denir. Ayrıca E uzayından F uzayına tanımlı *sınırlı lineer operatörlerin kümesi* $B(E, F)$ ile gösterilir.

T operatörünün normu

$$\|T\|_{B(E,F)} := \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E}$$

biçiminde tanımlıdır. İlaveten $B(E, E) = B(E)$ ile gösterilir (Titeux and Yakubov, 2003).

Not $T : E \rightarrow F$ operatörü sürekli $\Leftrightarrow T : E \rightarrow F$ operatörü sınırlıdır (Titeux and Yakubov, 2003).

2.1.13 Tanım Eğer $D(T) = E$ olmak üzere E uzayındaki her sınırlı kümeyi F uzayındaki bir prekompakt kümeye eşleyen $T : E \rightarrow F$ operatörüne *kompakt operatör* adı verilir (Titeux and Yakubov, 2003).

2.1.14 Tanım Eğer $T^{-1} : F \rightarrow E$ sınırlı ise $T : E \rightarrow F$ operatörüne *terslenebilirdir* denir (Titeux and Yakubov, 2003).

2.1.15 Tanım Eğer $T : E \rightarrow F$ ve $T^{-1} : F \rightarrow E$ operatörleri sınırlı ise $T : E \rightarrow F$ operatörüne *izomorfizm* adı verilir (Titeux and Yakubov, 2003).

2.1.16 Tanım Eğer $x \in D(T)$ için $\|Tx\|_F = \|x\|_E$ koşulu sağlanıyorsa $T : D(T) \rightarrow R(T)$ operatörüne *izometrik operatör* adı verilir (Titeux and Yakubov, 2003).

2.1.17 Tanım V bir vektör uzayı olmak üzere V üzerinde *bir lineer fonksiyonel*, $V \rightarrow \mathbb{R}$ skaler değerli bir lineer operatördür. V vektör uzayındaki sürekli lineer fonksiyonellerin oluşturduğu uzaya ise V vektör uzayının *topolojik dual uzayı* adı verilir ve V' ile gösterilir (Hunter and Nachtergaele, 2001).

2.1.18 Tanım E ve F Banach uzayları olsunlar. $T : E \rightarrow F$ operatörü sınırlı olsun. Eğer

$\forall u \in E$ ve $v \in F'$ için $T^* : F' \rightarrow E'$ operatörü varsa ve

$$v(Tu) = (T^*v)(u)$$

eşitliği sağlanıyorsa $T^*: F' \rightarrow E'$ sınırlı operatörüne T sınırlı operatörünün *adjointidir* denir. Bazen $v(Tu)$ yerine $\langle Tu, v \rangle$ yazılabilir (Yakubov, 1994).

2.1.19 Tanım E ve F Banach uzayları olmak üzere $T: E \rightarrow F$ sınırlı operatörü verilsin.

$$Tu = 0$$

homojen denklemin çözüm kümesi T operatörünün çekirdeği (*kernel*) olarak adlandırılır ve $\ker T$ ile gösterilir. Dolayısıyla,

$$\ker T = \{u \mid u \in E, Tu = 0\}$$

şeklinde yazılır. Burada $\ker T = T^{-1}(0)$ olduğu açıktır.

$T: D(T) \subset E \rightarrow R(T) \subset F$ sınırlı operatörü verilsin. F' , F nin eşlenik uzayı olmak üzere

$$\operatorname{coker} T = \{v \mid v \in F', v(Tu) = 0, u \in D(T)\}$$

kümesi T operatörünün *cokernel* i olarak adlandırılır ve $\operatorname{coker} T$ ile gösterilir.

Eğer $T: E \rightarrow F$ sınırlı lineer operatörü aşağıdaki şartları sağlarsa T operatörüne *Fredholm operatörü* denir.

1. $R(T)$, F içinde kapalıdır.
2. $\ker T$ ve $\operatorname{coker} T$, sırasıyla E ve F' nün sonlu boyutlu altuzaylarıdır.
3. $\dim \ker T = \dim \operatorname{coker} T$ (Yakubov, 1994).

Lemma E, F ve G Banach uzayı olmak üzere

1. E Banach uzayı G Banach uzayına kompakt gömülüdür.

2. $T : E \rightarrow F$ operatörü sınırlıdır ve $\forall \gamma > 0$ için

$$\|Tx\|_F \leq \gamma \|x\|_E + M(\gamma) \|x\|_G \quad x \in E.$$

şartları sağlanıyorsa $T : E \rightarrow F$ operatörü kompaktır (Titeux and Yakubov, 2003).

2.2. Ölçülebilir Uzaylar

2.2.1 Tanım I herhangi bir küme olsun. I kümesinin her bir elemanı için bir A_i kümesi varsa $\{A_i\}_{i \in I}$ kümesine *kümeler ailesi* denir (Piotr Hajlasz). Yani elemanları kümelerden oluşan kümeye *kümeler ailesi* adı verilir.

2.2.2 Tanım $X \neq \emptyset$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \{A \mid A \subset X\} \\ &= \{A_n \mid n \in I \subset \mathbb{Z}^+\} \\ &= \{A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots\} \end{aligned}$$

olsun. Bu aile $P(X)$ kuvvet kümesinin bir alt ailesidir. Bu aileye kümeler dizisi denir.

2.2.3 Tanım $A = \{A_n \mid n \in I\}$ ailesi ve $G \subset \mathbb{R}^m$ kümesi verilsin. Eğer

1. $G \subset \bigcup_{n \in I} A_n$ oluyorsa A ailesine G kümesinin bir *örtüsü* denir.
2. A ailesi G kümesinin bir örtüsü ve her $n \in I$ için A_n açık oluyorsa A ailesine G kümesinin bir *açık örtüsü* denir.
3. $I_0 \subset I$ sonlu bir alt küme ve A ailesi G kümesinin bir örtüsü iken $A_0 = \{A_n \mid n \in I_0\}$ ailesi G kümesinin bir örtüsü ise A ailesinin bir *sonlu alt örtüsü* vardır denir.

2.2.4 Tanım $G \subset \mathbb{R}^m$ olmak üzere G kümesinin her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü mevcutsa G kümesine *kompakt küme* adı verilir (Zorich, 2004).

2.2.5 Tanım X herhangi bir küme, $\mathcal{F}$ ise X in alt kümelerinin bir ailesi olsun. Eğer

1. $X \in \mathcal{F}$
2. $\forall A \in \mathcal{F}$ için $A^c \in \mathcal{F}$
3. Her $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ için $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{F}$
4. Her $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ için $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{F}$

özellikleri sağlanıyorsa $\mathcal{F}$ ailesine X üzerinde bir *cebiri* denir (Cohn, 2013).

2.2.6 Tanım X herhangi bir küme, $\mathcal{F}$ ise X in alt kümelerinin bir ailesi olsun. Eğer

1. $X \in \mathcal{F}$
2. $\forall A \in \mathcal{F}$ için $A^c \in \mathcal{F}$
3. Her $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ için $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$
4. Her $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ için $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

özellikleri sağlanıyorsa $\mathcal{F}$ ailesine X üzerinde bir σ - *cebiri* denir (Cohn, 2013).

2.2.7 Tanım $\mathcal{F}$ ailesi bir X kümesi üzerinde bir σ - *cebri* olsun. Bu durumda $(X, \mathcal{F})$ çiftine *ölçülebilir uzay*, $\mathcal{F}$ ailesinde yer alan her bir kümeye de *ölçülebilir küme* denir (Cohn, 2013).

2.2.8 Tanım $(X, \mathcal{F})$ bir ölçülebilir uzay olsun.

$$\mu : \mathcal{F} \rightarrow [0, +\infty]$$

olarak tanımlı μ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlarsa μ fonksiyonuna $\mathcal{F}$ üzerinde bir *ölçü* denir.

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. $\mathcal{F}$ ailesinin ikişer ikişer ayrık bir (E_i) dizisi için $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$

Ayrıca $E \in \mathcal{F}$ için $\mu(E)$ sayısına da E kümesinin *ölçüsü* adı verilir. μ fonksiyonu $\mathcal{F}$ üzerinde bir ölçü olmak üzere $(X, \mathcal{F}, \mu)$ 'ye bir *ölçü uzayı* denir (Cohn, 2013).

2.2.9 Tanım X kümesine ait kuvvet kümesi $P(X)$ olsun. $\mu^*: P(X) \rightarrow [0, \infty]$ şeklinde tanımlanan μ^* fonksiyonu

1. $\mu^*(\emptyset) = 0$
2. $F \subseteq E \subseteq X$ için $\mu^*(F) \leq \mu^*(E)$
3. $\forall i \in \mathbb{Z}^+$ için $E_i \in P(X)$ ise $\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i)$

şartlarını sağlarsa μ^* fonksiyonuna X kümesi üzerinde bir *dış ölçü* denir (Cohn, 2013).

2.2.10 Tanım X kümesi üzerinde bir dış ölçü μ^* olsun. $\forall E \subset X$ ve $F \subset X$ için

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap F) + \mu^*(E \cap F^c)$$

oluyorsa F kümesine μ^* *a göre ölçülebilir küme* denir (Cohn, 2013).

2.2.11 Tanım X ölçülebilir bir küme olsun ve g fonksiyonu

$$g: X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

şeklinde tanımlansın. Eğer $\forall k \in \mathbb{R}$ için

$$\{x \mid g(x) > k\}$$

kümesi ölçülebilir ise g fonksiyonu ölçülebilirdir denir (Adams, 1975).

2.2.12 Tanım Eğer $F \subset E \subset \mathbb{R}^n$ ve $\mu(F) = 0$ iken E kümesindeki tüm koşullar $E \setminus F$ kümesinde de sağlanıyor ise *hemen hemen her yerde sağlanıyordur* denir (Adams, 1975).

2.2.13 Tanım $p \in \mathbb{R}^+$ ve $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bir bölge olmak üzere

$$L^p(\Omega) = \left\{ g \mid \int_{\Omega} |g(x)|^p dx < \infty, g \text{ ölçülebilir} \right\}$$

şeklinde tanımlanan $L^p(\Omega)$ ile, Ω da tanımlı olan tüm g ölçülebilir fonksiyonların sınıfı ifade edilecektir (Adams and Fournier, 2003).

2.2.14 Tanım (L_p Normu) $1 \leq p < \infty$ iken

$$\|g\|_p = \left(\int_{\Omega} |g(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

şeklinde ifade edilen $\|\cdot\|_p$ fonksiyoneli $L^p(\Omega)$ üzerinde bir normdur (Adams and Fournier, 2003).

Not $L^p(\Omega)$ uzayında

1. $p = 1$ iken $L^1(\Omega) = L(\Omega)$ integrallenebilir fonksiyonlar uzayı,
2. $p = 2$ iken $L^2(\Omega)$ karesi integrallenebilir fonksiyonlar uzayı olarak adlandırılır.

Lemma (Fatou Lemması) (Ω, A, μ) ölçüm uzayında reel değerli, integrallenebilir ve negatif olmayan fonksiyon dizisi $(g_n), n = 1, 2, \dots$ olsun. Buradan

$$\int_{\Omega} \liminf_{n \rightarrow \infty} g_n(x) dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g_n(x) dx$$

olur (Adams, 1975).

2.2.1 Teorem (Lebesgue Baskınlık Yakınsama Teoremi) $\mathbb{R}^n$ in ölçülebilir bir kümesi Ω ve $(g_i), i = 1, 2, \dots$ reel değerli fonksiyonlar dizisi olmak üzere $\forall x \in \Omega$ ve $\forall i$ için öyle bir $h \in L^1(\Omega)$ fonksiyonu mevcuttur ki $|g_i(x)| \leq h(x)$ olur. Buradan

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g_i(x) dx = \int_{\Omega} \left(\lim_{i \rightarrow \infty} g_i(x) \right) dx$$

elde edilir (Adams, 1975).

2.2.2 Teorem (Riesz-Fischer) $1 \leq p \leq \infty$ iken $L^p(\Omega)$ uzayı Banach uzayıdır.

İspat:

1. durum: $1 \leq p < \infty$ iken,

$L^p(\Omega)$ uzayında (a_n) Cauchy dizisi göz önüne alınsın. $j = 1, 2, \dots$ için

$$\|a_{n_{j+1}} - a_{n_j}\| \leq \frac{1}{2^j}$$

olacak şekilde (a_n) dizisinin bir (a_{n_j}) alt dizisi mevcuttur. Şimdi

$$b_m(x) = \sum_{j=1}^m |a_{n_{j+1}}(x) - a_{n_j}(x)|$$

olsun. Buradan

$$\begin{aligned} \|b_m\| &\leq \sum_{j=1}^m \frac{1}{2^j} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^m} \\ &= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^m \\ &< 1 \end{aligned}$$

elde edilir. $b(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} b_m(x)$ alınarak monoton yakınsaklık teoremi uygulanırsa

$$\int_{\Omega} |b(x)|^p dx = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |b_m(x)|^p dx \leq 1$$

olduğu görülür. Dolayısıyla Ω da hemen hemen her yerde $b(x) < \infty$ olduğu elde edilir.

Ayrıca

$$a_{n_1}(x) + \sum_{j=1}^{\infty} [a_{n_{j+1}}(x) - a_{n_j}(x)]$$

serisinin Ω bölgesinde Lebesgue baskınlık yakınsama teoreminden dolayı hemen hemen her yerde $a(x)$ e yakınsadığı elde edilir. Eğer $a(x) = 0$ alınırsa

$$a_{n_1}(x) + \sum_{j=1}^{\infty} [a_{n_{j+1}}(x) - a_{n_j}(x)]$$

serisinin limiti tanımlı değildir. Öte yandan

$$a_{n_1}(x) + \sum_{j=1}^{\infty} [a_{n_{j+1}}(x) - a_{n_j}(x)]$$

serisi yakınsak olduğunda Ω bölgesinde hemen hemen her yerde

$$\lim_{m \rightarrow \infty} a_{n_m}(x) = a(x)$$

olur. (a_n) bir Cauchy dizisi olduğu için $\forall \varepsilon > 0$ için $m, n > n_0$ mevcuttur öyle ki

$$\|a_m - a_n\| < \varepsilon$$

olur. Fatou lemması gereği

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |a(x) - a_n(x)|^p dx &= \int_{\Omega} \lim_{j \rightarrow \infty} |a_{n_j}(x) - a_n(x)|^p dx \\ &\leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |a_{n_j}(x) - a_n(x)|^p dx \\ &\leq \varepsilon^p \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $n \rightarrow \infty$ için $a = (a - a_n) + a_n \in L^p(\Omega)$ ve $\|a - a_n\|_p \rightarrow 0$ olduğu görülür. Dolayısıyla $L^p(\Omega)$ uzayı tam olduğundan Banach uzayıdır.

2. durum: $p = \infty$ iken,

(a_n) dizisi $L^\infty(\Omega)$ uzayında bir Cauchy dizisi ise ölçümü sıfır olan ve $x \notin A$ şeklinde bir $A \subset \Omega$ kümesi vardır. Buradan her $m, n = 1, 2, \dots$ için

$$\begin{aligned} |a_n(x)| &\leq \sup |a_n(x)| \\ &= \|a_n\|_\infty \end{aligned}$$

ve

$$|a_n(x) - a_m(x)| \leq \|a_n - a_m\|_\infty$$

elde edilir. Bu da (a_n) dizisinin $\Omega \setminus A$ kümesinde a ya düzgün yakınsadığını gösterir. Eğer $x \in A$ için $a(x) = 0$ olarak alınırsa $a \in L^\infty(\Omega)$ ve

$$n \rightarrow \infty \text{ için } \|a_n - a\|_\infty \rightarrow 0$$

olur. Buradan $L^\infty(\Omega)$ uzayının tam olduğu sonucuna varılır (Hunter, 2014).

2.2.15 Tanım E , $\mathbb{R}^n$ nin boş olmayan bir alt kümesi ve $\bar{E}$ ile E kümesinin $\mathbb{R}^n$ deki kapanışı gösterilsin. Eğer $\bar{E} \subset \Omega$ ve $\bar{E}$, $\mathbb{R}^n$ de kompakt yani kapalı ve sınırlı ise bu durum $E \subset\subset \Omega$ veya $E \Subset \Omega$ şeklinde gösterilir (Adams, 1975).

Örnek $\Omega_1 = (0, 8)$ ve $\Omega_2 = (3, 5)$ olsun. Burada $\bar{\Omega}_2 = [3, 5]$ dır.

$$\Omega_2 \subset \Omega_1 \text{ ve } \bar{\Omega}_2 \subset \Omega_1$$

olduğundan

$$\Omega_2 \subset\subset \Omega_1$$

olur.

2.2.16 Tanım ($L^\infty(\Omega)$ Uzayı) Ω üzerinde ölçülebilir bir g fonksiyonu göz önüne alınsın.

Ω üzerinde hemen hemen her yerde $|g(x)| \leq T$ koşulunu sağlayan bir T sabiti varsa g fonksiyonuna Ω üzerinde esas sınırlıdır denir. T sabitlerinin alt sınırlarının en büyüğüne Ω üzerinde $|g|$ fonksiyonunun *esas supremumu* adı verilir ve $\text{ess sup}_{x \in \Omega} |g(x)|$ ile gösterilir.

Ω üzerinde esasen sınırlı olan tüm g fonksiyonlarının vektör uzayına $L^\infty(\Omega)$ *uzayı* adı verilir. Ayrıca

$$\|g\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |g(x)|$$

ile tanımlanan $\|\cdot\|_\infty$ fonksiyoneli $L^\infty(\Omega)$ üzerinde bir normdur (Adams and Fournier, 2003).

2.3. Sobolev Uzayları

2.3.1 Tanım E ölçülebilir kümesi ayrık $E_1, E_2, \dots, E_m$ ölçülebilir kümelerinin birleşimi olsun. Yani

$$E = \bigcup_{j=1}^m E_j \quad i \neq j \Rightarrow E_j \cap E_i = \emptyset$$

olur. Ayrıca

$$h = \sum_{j=1}^m e_j \chi_{E_j}$$

basit fonksiyonu verilsin. Burada e_j -ler reel sayılardır ve

$$\chi(x)_{E_j} = \begin{cases} 1, & x \in E_j \text{ ise} \\ 0, & x \notin E_j \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonu E_j kümesinin karakteristik fonksiyonudur. Bu durumda

$$\sum_{j=1}^m e_j \mu(E_j)$$

reel sayısına h basit fonksiyonunun E kümesi üzerindeki *Lebesgue integrali* denir.

$$\int_E h(x) dx = \sum_{j=1}^m e_j \mu(E_j)$$

biçiminde gösterilir. Eğer g fonksiyonu ölçülebilir fonksiyon ve negatif değer almıyorsa o halde $\sup \int_E h(x)dx$ ifadesine g fonksiyonunun E kümesi üzerindeki *Lebesgue integrali* denir ve

$$\int_E g(x)dx = \sup \int_E h(x)dx$$

şeklinde gösterilir. Burada supremum E kümesinin dışında sifıra eşit olan ve E kümesinin üzerinde $0 \leq h(x) \leq g(x)$ şartını sağlayan tüm ölçülebilir basit $h(x)$ fonksiyonlarının kümesi üzerinden alınmıştır. Eğer g fonksiyonu ölçülebilir, reel değerli ise

$$g^+ = \max(g, 0) \text{ ve } g^- = -\min(g, 0)$$

funksiyonlarının her ikisi de ölçülebilir ve negatif olmayan değerli fonksiyonlardır. Burada

$$g = g^+ - g^-$$

eşitliği sağlanır. Eğer $\int_E g^+(x)dx$ ve $\int_E g^-(x)dx$ integrallerinin en az bir tanesi sonlu ise o halde

$$\int_E g(x)dx = \int_E g^+(x)dx - \int_E g^-(x)dx$$

eşitliği ile tanımlı $\int_E g(x)dx$ ifadesine g fonksiyonun *integrali* denir. Eğer

$$\int_E g^+(x)dx \text{ ve } \int_E g^-(x)dx$$

integrallerinin her ikisi de sonlu ise g fonksiyonu E kümesi üzerinde (*Lebesgue*) *integrallenebilirdir* denir. E üzerinde integrallenebilen fonksiyonlar sınıfı $L^1(E)$ ile gösterilir (Adams, 1975).

2.3.2 Tanım $\Omega, \mathbb{R}^n$ de bir bölge olsun. $E \subset \mathbb{R}^n$ ve E kümesinin $\mathbb{R}^n$ deki kapanışı $\bar{E}$ olmak üzere eğer $\bar{E} \subset \Omega$ ve $\bar{E}, \mathbb{R}^n$ nin kompakt bir alt kümesi ise $E \Subset \Omega$ olur. g, E kümesinde tanımlı bir fonksiyon olsun. Bu durumda g fonksiyonunun support (destek) kümesi

$$\text{supp}(g) = \overline{\{x \in E \mid g(x) \neq 0\}}$$

biçiminde tanımlanır. Şayet $\text{supp}(g) \Subset \Omega$ ise g fonksiyonuna *kompakt supporta sahiptir* adı verilir (Adams, 1975).

2.3.3 Tanım Ω herhangi bir küme olsun. Her mertebeden türeve sahip ve Ω kümesinde supportu kompakt olan fonksiyonlara *test fonksiyonu* denir. Ω kümesindeki test fonksiyonlarının uzayı

$$C_0^\infty(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega) = \{g \in C^\infty(\Omega) \mid \text{supp}(g) \text{ kompakt}\}$$

şeklinde gösterilir (Olver, 2010).

2.3.4 Tanım $\mathcal{D}(\Omega)$ üzerinde tanımlı olan sürekli lineer fonksiyonellerin *uzayına* $\mathcal{D}(\Omega)$ *uzayının dual uzayı* adı verilir ve

$$\mathcal{D}'(\Omega) = \{g \mid g : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathcal{F} \text{ sürekli ve lineer}\}$$

olarak ifade edilir. $\mathcal{D}'(\Omega)$ dual uzayının elemanlarına ise *genelleştirilmiş fonksiyon(distribution)* denir (Griffel, 1981).

2.3.5 Tanım Ω üzerinde hemen hemen her yerde tanımlı olan g fonksiyonu verilsin. Eğer $E \Subset \Omega$ olacak biçimde her ölçülebilir E kümesi için $g \in L^1(E)$ ise o halde g fonksiyonuna, Ω üzerinde *lokal integrallenebilir fonksiyon* denir. Bu durum $g \in L_{loc}^1(\Omega)$ biçiminde gösterilir. Her $g \in L_{loc}^1(\Omega)$ fonksiyonu için

$$T_g(\psi) = \int_{\Omega} g(x)\psi(x)dx, \quad \psi(x) \in \mathcal{D}(\Omega)$$

eşitliği ile tanımlı bir $T_g = \mathcal{D}'(\Omega)$ genelleştirilmiş fonksiyonu (distribution) vardır. Burada T_g dönüşümü $D(\Omega)$ üzerinde tanımlı bir lineer fonksiyoneldir (Adams, 1975).

2.3.6 Tanım $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ olmak üzere $T_{g_\alpha} = D^\alpha(T_f) \in \mathcal{D}'(\Omega)$ olan $g_\alpha \in L^1_{loc}(\Omega)$ varsa g_α fonksiyonuna f fonksiyonunun *zayıf türevi* veya *genelleştirilmiş türevi* denir. Burada $D^\alpha f = g_\alpha$ iken $g_\alpha \in L^1_{loc}(\Omega)$ ve $\forall \psi \in D(\Omega)$ için

$$\int_{\Omega} f(x)D^\alpha \psi(x)dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} g_\alpha(x)\psi(x)dx$$

eşitliği sağlanır (Adams, 1975).

2.3.1 Teorem

1. Klasik türevi mevcut olan bir fonksiyonun zayıf türevi de mevcuttur fakat tersi her zaman geçerli değildir yani zayıf türevi mevcut olan fonksiyonların klasik türevi olmak zorunda değildir (Diening, Harjulehto, Hästö and Ruzicka, 2011).
2. Klasik türev noktasal tanımlı iken zayıf türev integral yardımıyla (bölgesel) tanımlanır (Penteker, 2015).
3. Lineerdir. Yani $g_1, g_2 \in L^1_{loc}(\Omega)$ ve $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ için

$$D^\alpha(k_1 g_1 + k_2 g_2) = k_1 D^\alpha(g_1) + k_2 D^\alpha(g_2)$$

olur (Burenkov, 1998).

4. $D^\alpha f = g$ ve $D^\beta g = h$ ise $D^{\alpha+\beta} f = h$ olur (Burenkov, 1998).

2.3.2 Teorem Ω , $\mathbb{R}^n$ de boş olmayan bir açık küme ve $g \in L^1_{loc}(\Omega)$ olsun. Eğer $\forall \psi \in C_0^\infty(\Omega)$ için

$$\int_{\Omega} g(x) \psi(x) dx = 0$$

oluyorsa Ω üzerinde hemen hemen her yerde $g = 0$ olur (Atkinson and Han, 2005).

Örnek: $\Omega = \mathbb{R}$ olmak üzere $g(t) = |t|$ mutlak değer fonksiyonunun zayıf türevini bulunuz.

Çözüm: $g(t) = |t|$ mutlak değer fonksiyonu $t = 0$ noktasında klasik anlamda diferensiyellenebilir değildir. Buna karşın $g(t) = |t|$ fonksiyonunun $t = 0$ noktasında birinci mertebeden zayıf türevi $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ fonksiyonu için

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |t| \psi'(t) dt &= - \int_{-\infty}^0 t \psi'(t) dt + \int_0^{\infty} t \psi'(t) dt \\ &= - \left(t \psi(t) \Big|_{-\infty}^0 - \int_{-\infty}^0 \psi(t) dt \right) + \left(t \psi(t) \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \psi(t) dt \right) \\ &= \int_{-\infty}^0 \psi(t) dt - \int_0^{\infty} \psi(t) dt \\ &= - \int_{\mathbb{R}} (\text{sgn}(t)) \psi(t) dt \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir (Atkinson and Han, 2005).

Örnek: Sıçramalı süreksizliğe sahip fonksiyonlar zayıf türeve sahip değildir.

Çözüm: $k \in \mathbb{R}$ sabiti için

$$v(x) = \begin{cases} -1, & -1 < x < 0 \\ k, & x = 0 \\ 1, & 0 < x < 1 \end{cases}$$

fonksiyonu göz önüne alınsın. $v(x)$ fonksiyonunun zayıf türevinin olmadığını göstermek için tersi kabul edilsin ve $v(x)$ fonksiyonunun zayıf türevi $t(x) \in L_{loc}^1(-1,1)$ olarak alınsın.

Bu durumda zayıf türevin tanımı gereği $\forall \psi \in C_0^\infty(-1,1)$ için

$$\int_{-1}^1 v(x) \psi'(x) dx = - \int_{-1}^1 t(x) \psi(x) dx$$

yazılır. Buradan

$$\int_{-1}^1 v(x) \psi'(x) dx = - \int_{-1}^0 \psi'(x) dx + \int_0^1 \psi'(x) dx = -\psi(0) - \psi(0) = -2\psi(0)$$

olduğundan $\forall \psi \in C_0^\infty(-1,1)$ için

$$\int_{-1}^1 t(x) \psi(x) dx = 2\psi(0)$$

elde edilir. $\forall \psi \in C_0^\infty(0,1)$ için

$$\int_0^1 t(x) \psi(x) dx = 0$$

olduğundan dolayı Teorem 2.3.2 gereği $(0,1)$ aralığında hemen hemen her yerde $t(x)=0$ olduğu elde edilir. Benzer olarak $(-1,0)$ aralığında hemen hemen her yerde $t(x)=0$ olur. Dolayısıyla $(-1,1)$ aralığında hemen hemen her yerde $t(x)=0$ olur ki bu durumda $\forall \psi \in C_0^\infty(-1,1)$ için $0 = -2\psi(0)$ çelişkisi ortaya çıkar. Yani kabul yanlıştır. $v(x)$ zayıf türe ve sahip değildir (Atkinson and Han, 2005).

2.3.7 Tanım Ω , $\mathbb{R}^n$ de bir açık küme olsun. $1 \leq p \leq \infty$ ve $k \in \mathbb{Z}^+$ için

$$W_p^k(\Omega) = \left\{ g \in L_p \mid D^\alpha g \in L_p(\Omega), |\alpha| \leq k \right\}$$

uzayına *Sobolev uzayı* adı verilir. Diğer bir deyişle Sobolev uzayı, kendisi ve k . mertebeye kadar olan tüm genelleştirilmiş türevleri $L_p(\Omega)$ ya ait olan fonksiyonların oluşturduğu uzaydır (Tartar, 2007). Burada,

1. $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ lokal integrallenebilen fonksiyon
2. α bir multi-indeks olmak üzere $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$,
3. $D^\alpha g = \partial^\alpha g = \partial^{\alpha_1} \partial^{\alpha_2} \dots \partial^{\alpha_n} g = \frac{\partial^{|\alpha|} g}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$
4. g nın α -yıncı mertebeden genelleştirilmiş türevi $D^\alpha g$ olarak ifade edilmiştir.

Not

1. $W_p^k(\Omega)$ Sobolev uzayındaki normlar

$$\|g\|_{k,p} = \left(\int_{\Omega} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha g\|^p \right) dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|g\|_{k,\infty} = \max_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha g\|_{\infty}, \quad p = \infty$$

olarak verilir.

2. $1 \leq p < \infty$ ve $k \geq 0$ için $W_p^k(\Omega)$ Sobolev uzayı bir Banach uzaydır.
3. $p = 2$ için $W_2^k(\Omega)$ uzayı

$$\langle g, h \rangle = \int_{\Omega} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} D^\alpha g \overline{D^\alpha h} \right) dx$$

iç çarpımına göre bir Hilbert uzayı olur (Tartar, 2007).

2.3.8 Tanım $p > 1$ reel sayı, $k \geq 0$ ve $a < \xi < b$ için

$$W_p^k(a, \xi, b) = W_p^k(a, \xi) + W_p^k(\xi, b) = \{u \mid u = u_1 + u_2, u_1 \in W_p^k(a, \xi), u_2 \in W_p^k(\xi, b)\}$$

olarak ifade edilen uzaylara *Sobolev uzaylarının direkt toplamı* denir. Ayrıca bu uzay

$$\|g\|_{p,k} = \|g\|_{W_p^k(a,\xi)} + \|g\|_{W_p^k(\xi,b)}$$

normu ile sırasıyla (a, ξ) ve (ξ, b) aralıklarında $W_p^k(a, \xi)$ ve $W_p^k(\xi, b)$ uzaylarına ait olan ve $[a, \xi) \cup (\xi, b]$ aralığında tanımlı $g = g(x)$ kompleks değerli fonksiyonların Banach uzayı olarak ifade edilir.

2.3.3 Teorem Her Sobolev uzayı bir Banach uzaydır.

İspat: $\{g_n\}$, Sobolev uzayında bir Cauchy dizisi olmak üzere $\{D^\alpha g\}$, $0 \leq |\alpha| \leq m$ için $L^p(\Omega)$ uzayında bir Cauchy dizisidir. $L^p(\Omega)$ tam olduğundan dolayı $L^p(\Omega)$ uzayında $0 \leq |\alpha| \leq m$ için öyle g ve g_α fonksiyonları mevcuttur ki

$$n \rightarrow \infty \text{ iken } g_n \rightarrow g \text{ ve } D^\alpha g_n \rightarrow g_\alpha$$

olur. Şimdi $L^p(\Omega) \subset L_{loc}^1(\Omega)$ olsun. $T_{g_n} \in D'(\Omega)$ ve herhangi $\psi \in D(\Omega)$ için Hölder eşitsizliğinden

$$|T_{g_n}(\psi) - T_g(\psi)| \leq \int_{\Omega} |g_n(x) - g(x)| |\psi(x)| dx \leq \|\psi\|_{p'} \|g_n - g\|_p$$

elde edilir. Burada $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ 'dir. Dolayısıyla her $\psi \in D(\Omega)$ için $n \rightarrow \infty$ iken

$T_{g_n}(\psi) \rightarrow T_g(\psi)$ olduğu elde edilir. Benzer şekilde her $\psi \in D(\Omega)$ için

$T_{D^\alpha g_n}(\psi) \rightarrow T_{g_\alpha}(\psi)$ olur. Buradan her $\psi \in D(\Omega)$ için

$$T_{g_\alpha}(\psi) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_{D^\alpha g_n}(\psi) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{|\alpha|} T_{g_n}(D^\alpha \psi) = (-1)^{|\alpha|} T_g(D^\alpha \psi)$$

elde edilir. Dolayısıyla $0 \leq |\alpha| \leq m$ için $g_\alpha = D^\alpha g$ olur. Buradan da $g \in W_p^k(\Omega)$ elde edilir.

Dolayısıyla $\lim_{n \rightarrow \infty} \|g_n - g\|_{k,p} = 0$ olur ve buradan $W_p^k(\Omega)$ Sobolev uzayının

tam olduğu elde edilir. (Adams and Fournier, 2003).

2.4. İnterpolasyon Uzayları

2.4.1 Tanım E ve F Banach uzayları olmak üzere $T : E \rightarrow F$ birebir ve cebirsel işlemleri koruyan bir dönüşüm mevcutsa E Banach uzayı F Banach uzayına gömülmüştür denir ve $E \hookrightarrow F$ ile gösterilir (Yakubov and Yakubov, 1999).

2.4.2 Tanım E ve F iki reel ya da kompleks Banach uzayı olsun. $E \subset F$ olmak üzere

1. $T : E \rightarrow F$ operatörü sürekli ise $E \hookrightarrow F$ gömülmesi sürekli dir.
2. $T : E \rightarrow F$ operatörü kompakt ise $E \hookrightarrow F$ gömülmesi kompakttır.

Ayrıca $M \in \mathbb{R}$ olmak üzere $x \in E$ için $E \hookrightarrow F$ gömülmesinin sürekliliği

$$\|x\|_F \leq M \|x\|_E$$

eşitsizliğine denktir (Yakubov and Yakubov, 1999).

Lemma

1. E, F, G Banach uzaylarıdır.
2. $E \hookrightarrow F$ gömülmesi kompakttır.
3. $F \hookrightarrow G$ gömülmesi süreklidir.

koşulları sağlansın. Bu durumda $\forall \gamma > 0$ ve $x \in E$ için $M \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\|x\|_F \leq \gamma \|x\|_E + M(\gamma) \|x\|_G$$

eşitsizliği sağlanır (Yakubov and Yakubov, 1999).

2.4.3 Tanım G_0 ve G_1 , G Banach uzayına gömülmeleri sürekli olan iki Banach uzayı olsun. Yani $G_0 \subset G$ ve $G_1 \subset G$ olmak üzere G_0 ve G_1 uzaylarına *interpolasyon çifti* denir ve $\{G_0, G_1\}$ şeklinde gösterilir. Burada

$$G_0 + G_1 := \left\{ x \mid x \in G, \exists x_j \in G_j, j = 0, 1, x = x_0 + x_1, \|x\|_{G_0 + G_1} := \inf_{\substack{x=x_0+x_1 \\ x_j \in G_j}} \left(\|x_0\|_{G_0} + \|x_1\|_{G_1} \right) \right\}$$

Banach uzayı göz önüne alınırsa

$$K(t, x) := \inf_{\substack{x=x_0+x_1 \\ x_j \in G_j}} \left(\|x_0\|_{G_0} + t \|x_1\|_{G_1} \right), x \in G_0 + G_1$$

fonksiyoneli $(0, \infty)$ da sürekli ve

$$\min \{1, t\} \|x\|_{G_0 + G_1} \leq K(t, x) \leq \max \{1, t\} \|x\|_{G_0 + G_1}$$

eşitsizliği sağlanır (Yakubov and Yakubov, 1999).

2.4.4 Tanım $\{G_0, G_1\}$ interpolasyon çifti için K-metodu yardımıyla $0 < \theta < 1$, $1 \leq p < \infty$ olmak üzere bir *interpolasyon uzayı*,

$$(G_0, G_1)_{\theta, p} := \left\{ x \mid x \in G_0 + G_1, \|x\|_{(G_0, G_1)_{\theta, p}} := \left(\int_0^\infty t^{-1-\theta p} K^p(t, x) dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}$$

$$(G_0, G_1)_{\theta, p} := \left\{ x \mid x \in G_0 + G_1, \|x\|_{(G_0, G_1)_{\theta, p}} := \sup_{x \in (0, \infty)} t^{-\theta} K(t, x) < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanır (Yakubov and Yakubov, 1999).

Lemma $\{G_0, G_1\}$ interpolasyon çifti olsun. $0 < \theta < 1$, $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere

$$1. \quad (G_0, G_1)_{\theta, p} = (G_1, G_0)_{1-\theta, p}$$

2. $\|x\|_{(G_0, G_1)_{\theta, p}} \leq C \|x\|_{G_0}^{1-\theta} \|x\|_{G_1}^{\theta}, x \in G_0 \cap G_1$
3. $G_0 \cap G_1$ ifadesi $(G_0, G_1)_{\theta, p}$ içerisinde yoğundur.
4. Eğer $G_0 = G_1$ ise bu durumda $(G_0, G_1)_{\theta, p} = G_0 = G_1$ olur.

Not (Young Eşitsizliği) $1 < p < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \varepsilon > 0$ ve $m, n > 0$ için

$$mn \leq \frac{1}{p} (\varepsilon m)^p + \frac{1}{q} \left(\frac{n}{\varepsilon} \right)^q$$

eşitsizliği sağlanır (Yakubov and Yakubov, 1999).

Lemma $\{G_0, G_1\}$ interpolasyon çifti olsun. $0 < \theta < 1, 1 \leq p \leq \infty$ için

$$|\lambda|^{\theta} \|x\|_{(G_0, G_1)_{\theta, p}} \leq C \left(\|x\|_{G_0} + |\lambda| \|x\|_{G_1} \right), x \in G_0 \cap G_1, \lambda \in \mathbb{C}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat Yukarıdaki lemma ve Young eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} |\lambda|^{\theta} \|x\|_{(G_0, G_1)_{\theta, p}} &\leq C |\lambda|^{\theta} \|x\|_{G_0}^{1-\theta} \|x\|_{G_1}^{\theta} \\ &\leq C \|x\|_{G_0}^{1-\theta} \left(|\lambda| \|x\|_{G_1} \right)^{\theta} \leq C \left(\|x\|_{G_0} + |\lambda| \|x\|_{G_1} \right) \end{aligned}$$

elde edilir (Yakubov and Yakubov, 1999).

2.4.5 Tanım (G_0, G_1) bir interpolasyon çifti ve

$$G_0 + G_1 = \{x_0 + x_1 : x_0 \in G_0, x_1 \in G_1\}$$

olmak üzere,

$$G_0 \cap G_1 \subset E \subset G_0 + G_1$$

şeklindeki bir E Banach uzayına *ara uzay* adı verilir (Lunardi, 2009).

2.4.6 Tanım (K Fonksiyonu) $\forall x \in G_0 + G_1$ ve $t > 0$ için K fonksiyonu

$$K(t, x, G_0, G_1) = K(t, x) = \inf_{x=x_0+x_1, x_0 \in G_0, x_1 \in G_1} (\|x_0\|_{G_0} + t\|x_1\|_{G_1})$$

olarak tanımlanır (Lunardi, 2009).

2.4.7 Tanım $I \subset (0, +\infty)$ ve $1 \leq p \leq \infty$ için $\frac{dt}{t}$ ölçümüne karşılık gelen I aralığındaki reel veya kompleks değerli L^p fonksiyonlarının uzayı $L^p_*(I)$ ile gösterilir. Ayrıca g fonksiyonunun normu

$$p < \infty \text{ için } \|g\|_{L^p_*(I)} = \left(\int_0^{+\infty} |g(t)|^p \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$p = \infty \text{ için } \|g\|_{L^\infty_*(I)} = \text{ess sup}_{t \in I} |g(t)|$$

olarak tanımlanır (Lunardi, 2009).

2.4.8 Tanım $0 < \theta < 1$, $1 \leq p \leq \infty$ ve $L^p_*(0, +\infty)$ Lebesgue uzayı olsun.

$$\left\{ (G_0, G_1)_{\theta, p} = \left\{ x \in G_0 + G_1 : t \mapsto t^{-\theta} K(t, x, G_0, G_1) \in L^p_*(0, +\infty) \right\} \right. \\ \left. \left\| x \right\|_{(G_0, G_1)_{\theta, p}} = \left\| t^{-\theta} K(t, x, G_0, G_1) \right\|_{L^p_*(0, +\infty)} \right\}$$

olmak üzere

$$(G_0, G_1)_\theta = \left\{ x \in G_0 + G_1 : \lim_{t \rightarrow 0^+} t^{-\theta} K(t, x, G_0, G_1) = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^{-\theta} K(t, x, G_0, G_1) = 0 \right\}$$

şeklindeki uzaylar *reel interpolasyon uzayı* olarak isimlendirilir. Ayrıca $t \mapsto K(t, x)$,

$(0, \infty)$ aralığında sürekli olduğundan dolayı $\forall x \in G_0 + G_1$ için

$$(G_0, G_1)_\theta \subset (G_0, G_1)_{\theta, \infty}$$

olur. $(G_0, G_1)_\theta$ uzayları ayrıca sürekli interpolasyon uzayları olarak da adlandırılırlar.

İlaveten $\|x\|_{(G_0, G_1)_{\theta, p}}$ ifadesi yerine $\|x\|_{\theta, p}$ ifadesi yazılabilir. Ayrıca $\forall t > 0$ için

$$K(t, x, G_0, G_1) = tK(t^{-1}, x, G_1, G_0)$$

ifadesi doğrudur. Buradan $L_*^p(0, \infty)$ Lebesgue uzayını koruyan $\tau = t^{-1}$ dönüşümü ile $0 < \theta < 1$, $1 \leq p \leq \infty$ için

$$(G_0, G_1)_{\theta, p} = (G_1, G_0)_{1-\theta, p}$$

ve

$$(G_0, G_1)_\theta = (G_1, G_0)_{1-\theta}$$

eşitlikleri elde edilir (Lunardi, 2009).

Lemma (Sobolev Uzaylarının İnterpolasyonu) $0 < s < l$, $1 < p < \infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ olsun. Bu durumda

$$|\lambda|^{l-s} \|x\|_{W_p^s(\Omega)} \leq C \left(\|x\|_{W_p^l(\Omega)} + |\lambda|^l \|x\|_{L_p(\Omega)} \right), \quad x \in W_p^l(\Omega), \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat $s \notin \mathbb{Z}$ olsun. Bu durumda

$$W_p^s(\Omega) := B_{p,p}^s(\Omega) := (W_p^{s_0}(\Omega), W_p^{s_1}(\Omega))_{\theta, p}$$

olduğundan

$$W_p^s(\Omega) = (L_p(\Omega), W_p^l(\Omega))_{\frac{s}{l}, p}$$

olur.

$$\|x\|_{(G_0, G_1)_{\theta, p}} \leq C \left(\|x\|_{G_0}^{1-\theta} \|x\|_{G_1}^{\theta} \right), \quad x \in G_0 \cap G_1$$

olduğundan dolayı

$$\|x\|_{W_p^s(\Omega)} \leq C \|x\|_{L_p(\Omega)}^{1-\frac{s}{l}} \|x\|_{W_p^l(\Omega)}^{\frac{s}{l}}, \quad x \in W_p^l(\Omega)$$

elde edilir. Young eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} |\lambda|^{l-s} \|x\|_{W_p^s(\Omega)} &\leq C \left(|\lambda|^l \|x\|_{L_p(\Omega)} \right)^{1-\frac{s}{l}} \|x\|_{W_p^l(\Omega)}^{\frac{s}{l}} \\ &\leq C \left(|\lambda|^l \|x\|_{L_p(\Omega)} + \|x\|_{W_p^l(\Omega)} \right) \end{aligned}$$

olur. Eğer $s \in \mathbb{Z}$ ise

$$W_p^s(\Omega) = (W_p^{s_0}(\Omega), W_p^{s_1}(\Omega))_{\theta}$$

olduğundan

$$W_p^s(\Omega) = (L_p(\Omega), W_p^l(\Omega))_{\frac{s}{l}}$$

elde edilir.

$$\|x\|_{(G_0, G_1)_{\theta, p}} \leq C \|x\|_{G_0}^{1-\theta} \|x\|_{G_1}^{\theta}, \quad x \in G_0 \cap G_1$$

eşitsizliğinden

$$\|x\|_{W_p^s(\Omega)} \leq C \|x\|_{L_p(\Omega)}^{1-\frac{s}{l}} \|x\|_{W_p^l(\Omega)}^{\frac{s}{l}}$$

olur. Buradan da istenilen eşitsizlik bulunur (Yakubov and Yakubov, 1999).

2.4.1 Teorem $0 < \operatorname{Re} z < 1$ açık aralığında $F(z)$ fonksiyonu analitik ve $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$ kapalı aralığında sınırlı ve sürekli olsun. Eğer $-\infty < t < \infty$ ve $0 < \theta < 1$ için

$$|F(it)| \leq M_0, \quad |F(1+it)| \leq M_1$$

ise

$$-\infty < t < \infty \quad \text{için} \quad |F(\theta + it)| \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta$$

sağlanır (Bergh, 1976).

2.4.2 Teorem (Riesz-Thorin) (U, μ) bir ölçü uzayı olsun. $L_p(U, \mu)$ ile U üzerindeki skaler değerli μ -ölçülebilir f fonksiyonlarının Lebesgue uzayı ifade edilecektir. Öyle ki $1 \leq p < \infty$ olmak üzere

$$\|f\|_{L_p} = \left(\int_U |f(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

sonludur. Limit durumunda yani $p = \infty$ için L_p tüm μ -ölçülebilir ve sınırlı fonksiyonları içerecektir. Dolayısıyla

$$\|f\|_{L_\infty} = \sup_U |f(x)|$$

yazılabilir. $L_p = L_p(U, d\mu)$ ve $L_q = L_q(V, dv)$ olmak üzere $T : L_p \rightarrow L_q$ lineer bir dönüşüm olsun. Bununla beraber eğer $T : L_p \rightarrow L_q$ dönüşümü sınırlı ise

$$M = \sup_{f \neq 0} \frac{\|Tf\|_{L_q}}{\|f\|_{L_p}}$$

olarak ifade edilir. M sayısına $T : L_p \rightarrow L_q$ dönüşümünün normu adı verilir.

$p_0 \neq p_1$ ve $q_0 \neq q_1$ olduğu kabul edilsin. $M = \sup_{f \neq 0} \frac{\|Tf\|_{L_q}}{\|f\|_{L_p}}$ olmak üzere M_0 normu ile birlikte

$$T : L_{p_0}(U, d\mu) \rightarrow L_{q_0}(V, dv)$$

ve M_1 normu ile birlikte

$$T : L_{p_1}(U, d\mu) \rightarrow L_{q_1}(V, dv)$$

olduğu kabul edilsin. Bu durumda

$$0 < \theta < 1 \text{ ve } \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$$

olmak üzere

$$T : L_p(U, d\mu) \rightarrow L_q(V, dv)$$

ve

$$M \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta$$

sağlanır.

İspat:

$$\langle h, g \rangle = \int_V h(y)g(y) dv$$

ve

$$\frac{1}{q'} = 1 - \frac{1}{q}$$

olsun. Hölder eşitsizliğinden

$$\|h\|_{L_q} = \sup \left\{ |\langle h, g \rangle| : \|g\|_{L_{q'}} = 1 \right\}$$

ve

$$M = \sup \left\{ |\langle Tf, g \rangle| : \|f\|_{L_p} = \|g\|_{L_{q'}} = 1 \right\}$$

elde edilir. $p < \infty$ ve $q' < \infty$ olduğundan f ve g fonksiyonlarının kompakt support ile sınırlı olduğu görülür. Öte yandan $0 < \operatorname{Re} z < 1$ için

$$\frac{1}{p(z)} = \frac{1-z}{p_0} + \frac{z}{p_1}, \quad \frac{1}{q'(z)} = \frac{1-z}{q'_0} + \frac{z}{q'_1}$$

ve

$$\varphi(z) = \varphi(x, z) = |f(x)|^{\frac{p}{p(z)}} \frac{f(x)}{|f(x)|}, \quad x \in U$$

$$\psi(z) = \psi(y, z) = |g(y)|^{\frac{q'}{q'(z)}} \frac{g(y)}{|g(y)|}, \quad y \in V$$

elde edilir. Ayrıca $\varphi(z) \in L_{p_j}$ ve $\psi(z) \in L_{q_j}$ ve dolayısıyla $T\varphi(z) \in L_{q_j}$, $j = 0, 1$. Buradan

$\varphi'(z) \in L_{p_j}$, $\psi'(z) \in L_{q_j}$ ve dolayısıyla $0 < \operatorname{Re} z < 1$ için $(T\varphi)'(z) \in L_{q_j}$ elde edilir. Bu da

$0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$ için

$$F(z) = \langle T\varphi(z), \psi(z) \rangle$$

ifadesinin varlığını işaret eder. Ayrıca $F(z)$ fonksiyonu $0 < \operatorname{Re} z < 1$ açık aralığında analitiktir ve $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$ kapalı aralığında sınırlı ve süreklidir. Öte yandan

$$\begin{aligned}\|\varphi(it)\|_{L_{p_0}} &= \left\| |f|^{\frac{p}{p_0}} \right\|_{L_{p_0}} = \|f\|_{L_p}^{\frac{p}{p_0}} = 1 \\ \|\varphi(1+it)\|_{L_{p_1}} &= \left\| |f|^{\frac{p}{p_1}} \right\|_{L_{p_1}} = \|f\|_{L_p}^{\frac{p}{p_1}} = 1\end{aligned}$$

ve benzer şekilde

$$\|\psi(it)\|_{L_{q_0}} = \|\psi(1+it)\|_{L_{q_1}} = 1$$

elde edilir. Kabuller gereği,

$$\begin{aligned}\|F(it)\| &\leq \|T\varphi(it)\|_{L_{q_0}} \cdot \|\psi(it)\|_{L_{q_0}} \leq M_0 \\ \|F(1+it)\| &\leq \|T\varphi(1+it)\|_{L_{q_1}} \cdot \|\psi(1+it)\|_{L_{q_1}} \leq M_1\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\varphi(\theta) = f, \quad \psi(\theta) = g$$

ve dolayısıyla

$$F(\theta) = \langle Tf, g \rangle$$

olur. Buradan Teorem 2.4.1 gereği

$$|\langle Tf, g \rangle| \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta$$

veya buna denk olarak

$$M \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta$$

elde edilir (Bergh, 1976).

Önerme $0 < \theta_1 < \theta_2 < 1$ için $G_1 \subset G_0$ olmak üzere $(G_0, G_1)_{\theta_2, \infty} \subset (G_0, G_1)_{\theta_1, 1}$ ise $\forall p, q \in [1, \infty]$ için $(G_0, G_1)_{\theta_2, p} \subset (G_0, G_1)_{\theta_1, q}$ olur (Lunardi, 2009).

İspat: Her $x \in (G_0, G_1)_{\theta_2, \infty}$ ve $t \geq 1$ için

$$K(t, x) \leq \|x\|_{G_0}$$

ve $0 < t \leq 1$ için

$$K(t, x) \leq t^{\theta_2} \|x\|_{\theta_2, \infty}$$

eşitsizlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned} \|x\|_{\theta_1, 1} &= \int_0^1 t^{-\theta_1-1} K(t, x) dt + \int_1^{+\infty} t^{-\theta_1-1} K(t, x) dt \\ &\leq \int_0^1 t^{-\theta_1-1} t^{\theta_2} \|x\|_{\theta_2, \infty} dt + \int_1^{+\infty} t^{-\theta_1-1} \|x\|_{G_0} dt \\ &\leq \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} \|x\|_{\theta_2, \infty} + \frac{1}{\theta_1} \|x\|_{G_0} \end{aligned}$$

elde edilir. $G_1 \subset G_0$ olduğundan $(G_0, G_1)_{\theta_2, \infty} \subset G_0 + G_1 = G_0$ elde edilir (Lunardi, 2009).

2.5. Sturm-Liouville Sınır Değer Problemi

2.5.1 Tanım Bir $[a, b]$ reel aralığında sürekli $m(x)$, $m'(x)$, $n(x)$ ve $s(x)$ fonksiyonlarını ele alalım. $[a, b]$ aralığının her bir noktasında $m(x) > 0$, $s(x) > 0$ iken ve λ , x değişkeninden bağımsız bir parametre olarak verilsin.

$$(m(x)y')' + (n(x) + \lambda s(x))y = 0, \quad a \leq x \leq b$$

$$\theta_1 y(a) + \theta_2 y'(a) = 0, \quad \theta_1^2 + \theta_2^2 > 0,$$

$$\gamma_1 y(b) + \gamma_2 y'(b) = 0, \quad \gamma_1^2 + \gamma_2^2 > 0$$

olarak tanımlanan probleme *regüler Sturm-Liouville sınır değer problemi* adı verilir (Kandemir, 2021)

2.5.2 Tanım $m(x)$, $n(x)$ veya $s(x)$ fonksiyonlarından biri bir $x = x_0$ noktasında singüler ise

$$(m(x)y')' + (n(x) + \lambda s(x))y = 0 \quad a \leq x \leq b$$

denklemine $x = x_0$ noktasında *singüler Sturm-Liouville denklemi*,

$$(m(x)y')' + (n(x) + \lambda s(x))y = 0, \quad a \leq x \leq b$$

$$\theta_1 y(a) + \theta_2 y'(a) = 0, \quad \theta_1^2 + \theta_2^2 > 0,$$

$$\gamma_1 y(b) + \gamma_2 y'(b) = 0, \quad \gamma_1^2 + \gamma_2^2 > 0$$

problemine ise *singüler Sturm-Liouville problemi* adı verilir. Burada,

1. $[a, b]$ aralığındaki herhangi bir x elemanı için $m(x) = 0$ veya $s(x) = 0$ ise
2. $m(x)$, $n(x)$ veya $s(x)$ fonksiyonlarından en az bir tanesi a ve b noktalarının en az birinde sonsuz ise
3. (a, b) aralığı sınırsız yani $(-\infty, b)$, (a, ∞) veya $(-\infty, \infty)$ ise

şartlardan en az biri sağlanırsa bir singüler Sturm-Liouville problemi elde edilir (Kandemir, 2021).

2.5.3 Tanım

$$(m(x)y')' + (n(x) + \lambda s(x))y = 0, \quad a \leq x \leq b$$

$$\theta_1 y(a) + \theta_2 y'(a) = 0, \quad \theta_1^2 + \theta_2^2 > 0,$$

$$\gamma_1 y(b) + \gamma_2 y'(b) = 0, \quad \gamma_1^2 + \gamma_2^2 > 0$$

regüler Sturm-Liouville sınır değer probleminin sıfırdan farklı bir y çözümünün mevcut olmasını sağlayan λ değerine problemin bir özdeğeri, bu λ özdeğeri göre bulunan sıfırdan farklı y çözümüne ise problemin bir özfonksiyonu adı verilir. Bu problemin tüm özdeğerlerinin oluşturduğu kümeye problemin spektrumu denir (Kandemir, 2021).

2.5.1 Teorem m_0, m_1, m_2 ve s_0 bir $[a, b]$ aralığında sürekli $m_2 > 0$ ve $s_0 > 0$ iken

$$m_2 y'' + m_1 y' + m_0 y + \lambda s_0 y = 0$$

denklemini

$$(m(x)y')' + (n(x) + \lambda s(x))y = 0$$

olarak yazılabilir.

İspat:

$$m_2 y'' + m_1 y' + m_0 y + \lambda s_0 y = 0$$

denklemini m_2 ile bölüp $\frac{m_1}{m_2} = a$ ve $\frac{m_0}{m_2} = b$ ve $\frac{s_0}{m_2} = s_1$ alırsak denklem

$$y'' + a(x)y' + b(x)y + \lambda s_1(x)y = 0$$

biçiminde yazılır.

$\gamma'(x) = a(x)$ ve $m(x) = e^{\gamma(x)}$ fonksiyonunu ele alalım. Burada $m(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında pozitiftir. $\gamma'(x) = a(x)$ olduğu için

$$m'(x) = \gamma'(x)e^{\gamma(x)} = m(x)a(x)$$

fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli.

$$y'' + a(x)y' + b(x)y + \lambda s_1(x)y = 0$$

denklemini $m(x)$ ile çarparsak

$$m(x)y'' + m(x)a(x)y' + m(x)b(x)y + \lambda m(x)s_1(x)y = 0$$

denklemini elde edilir. $[a, b]$ aralığında $m(x)$ pozitif olduğu için bu denklem ile

$$m_2 y'' + m_1 y' + m_0 y + \lambda s_0 y = 0$$

denkleminin çözümü aynıdır. $m(x)b(x) = n(x)$ ve $m(x)s_1(x) = s(x)$ alırsak

$$m(x)y'' + m'(x)y' + n(x)y + \lambda s(x)y = 0$$

veya

$$(m(x)y')' + (n(x) + \lambda s(x))y = 0$$

biçiminde yazılabilir (Kandemir, 2021).

2.5.4 Tanım

$\delta_k(x)$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$ fonksiyonları $[a, b]$ aralığında n . mertebeye kadar sürekli türevlenebilen fonksiyonlardır. $\delta_n(x) \neq 0$ iken n . mertebeden lineer

$$L(y) = \delta_n(x)y^{(n)} + \delta_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + \delta_2(x)y'' + \delta_1(x)y' + \delta_0(x)y$$

diferensiyel ifadesini ele alalım. y ve φ fonksiyonları n . mertebeden türevlenebilir olmak üzere $L(y)$ diferensiyel ifadesi $\varphi = \varphi(x)$ fonksiyonunun $\bar{\varphi} = \overline{\varphi(x)}$ karmaşık eşleniği ile çarpılıp a dan b ye kadar integrali alındığında

$$\int_a^b L(y)\bar{\varphi}dx = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} (\delta_k \bar{\varphi})^{(i-1)} y^{(k-i)} \right) \Big|_a^b + \int_a^b \sum_{k=0}^n (-1)^k (\delta_k \bar{\varphi})^k y dx$$

eşitliği elde edilir.

$$P(y, \varphi) = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} (\delta_k \bar{\varphi})^{(i-1)} y^{(k-i)} \right)$$

eşitliği kullanırsa

$$\begin{aligned} \tau &= [y(a), y'(a), \dots, y^{(n-1)}(a), y(b), y'(b), \dots, y^{(n-1)}(b)], \\ \zeta &= [\varphi(a), \varphi'(a), \dots, \varphi^{(n-1)}(a), \varphi(b), \varphi'(b), \dots, \varphi^{(n-1)}(b)] \end{aligned}$$

τ ve ζ değişkenlerinin bilineer formu

$$P(\tau, \zeta) = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} (\delta_k \bar{\varphi})^{(i-1)} y^{(k-i)} \right) \Big|_a^b$$

şeklinde olur.

$$\overline{L^* \varphi} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \left(a_k \overline{\varphi} \right)^{(k)}$$

ve

$$P(\tau, \zeta) = P(y, \varphi) \Big|_a^b$$

eşitlikleri kullanılırsa

$$\int_a^b L(y) \overline{\varphi} dx = P(\tau, \zeta) + \int_a^b y \overline{L^*(\varphi)} dx$$

veya

$$\int_a^b \left(L(y) \overline{\varphi} - y \overline{L^*(\varphi)} \right) dx = P(\tau, \zeta)$$

denklemini elde edilir. Bu denkleme *Green formülü* denir. Burada $b = x$ alınırsa

$$\int_a^x L(y) \overline{\varphi} dx = P(\tau, \zeta) + \int_a^x y \overline{L^*(\varphi)} dx$$

şeklinde yazılır. Bu denklemde x e göre türev alınırsa

$$L(y) \overline{\varphi} - y \overline{L^*(\varphi)} = \frac{d}{dx} P(\tau, \zeta)$$

denklemini bulunur. Bu denkleme *Lagrange formülü* adı verilir (Kandemir, 2021).

2.5.5 Tanım $L(y) = \delta_n(x) y^{(n)} + \delta_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \dots + \delta_2(x) y'' + \delta_1(x) y' + \delta_0(x) y = 0$

diferensiyel denkleminin eşleniği

$$L^*(\varphi) = (-1)^n (\bar{\delta}_n \varphi)^{(n)} + (-1)^{n-1} (\bar{\delta}_{n-1} \varphi)^{(n-1)} + \dots + (\bar{\delta}_2 \varphi)'' - (\bar{\delta}_1 \varphi)' + \bar{\delta}_0 \varphi = 0$$

şeklindedir (Kandemir, 2021).

2.5.2 Teorem

$$L(y) = (m(x)y')' + n(x)y$$

olmak üzere

$$L(y) + \lambda s(x)y = 0, \quad a \leq x \leq b$$

$$L_1(y) = \theta_1 y(a) + \theta_2 y'(a) = 0$$

$$L_2(y) = \gamma_1 y(b) + \gamma_2 y'(b) = 0$$

probleminin sınır şartları kendine eşleniktir (Kandemir, 2021).

İspat:

$$L_1(y) = \theta_1 y(a) + \theta_2 y'(a) = 0$$

$$L_2(y) = \gamma_1 y(b) + \gamma_2 y'(b) = 0$$

sınır şartlarının eşleniğini bulmak için sınır şartlarına

$$L_3(y) = \rho_1 y(a) + \rho_2 y'(a) = 0$$

$$L_4(y) = \eta_1 y(b) + \eta_2 y'(b) = 0$$

sınır şartlarını ilave edelim. Burada L_3 ve L_4 sınır formları L_1 , L_2 , L_3 , L_4 sistemini lineer bağımsız yapacak biçimde alınmaktadır. Buradan bu dört sınır formunun oluşturduğu

$$L_1(y) = \theta_1 y(a) + \theta_2 y'(a) = 0$$

$$L_2(y) = \gamma_1 y(b) + \gamma_2 y'(b) = 0$$

$$L_3(y) = \rho_1 y(a) + \rho_2 y'(a) = 0$$

$$L_4(y) = \eta_1 y(b) + \eta_2 y'(b) = 0$$

$$\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_1 & \theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_1 & \gamma_2 \\ \rho_1 & \rho_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \eta_1 & \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(a) \\ y'(a) \\ y(b) \\ y'(b) \end{pmatrix}$$

sistemi bulunur. Bu sistemden $y(a) = y_a$, $y(b) = y_b$, $y'(a) = y'_a$, $y'(b) = y'_b$ gösterimlerini kullanarak $y(a)$, $y(b)$, $y'(a)$, $y'(b)$ ifadelerini çekelim. Burada L_1 , L_2 , L_3 , L_4 sınır formları lineer bağımsız olduğu için sistemin katsayılar determinanı

$$\Delta = \begin{vmatrix} \theta_1 & \theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_1 & \gamma_2 \\ \rho_1 & \rho_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \eta_1 & \eta_2 \end{vmatrix} = (\theta_1 \rho_2 - \theta_2 \rho_1)(\gamma_2 \eta_1 - \gamma_1 \eta_2) \neq 0$$

$$y_a = \frac{L_1(\gamma_2 \rho_2 \eta_1 - \gamma_1 \rho_2 \eta_2) - \theta_2(\gamma_2 L_3 \eta_1 - \gamma_1 L_3 \eta_2)}{\Delta}$$

$$y'_a = \frac{\theta_1(\gamma_2 L_3 \eta_1 - \gamma_1 L_3 \eta_2) - L_1(\gamma_2 \rho_2 \eta_1 - \gamma_1 \rho_1 \eta_2)}{\Delta}$$

$$y_b = \frac{-L_2(\theta_1 \rho_2 \eta_2 - \theta_2 \rho_1 \eta_2) + \gamma_2(\theta_1 \rho_2 L_4 - \theta_2 \rho_1 L_4)}{\Delta}$$

$$y'_b = \frac{-\gamma_1(\theta_1 \rho_2 L_4 - \theta_2 \rho_1 L_4) + L_2(\theta_1 \rho_2 \eta_1 - \theta_2 \rho_1 \eta_1)}{\Delta}$$

olarak elde edilir.

$$\int_a^b (L(y)\varphi - yL^*(\varphi))dx = P(\tau, \zeta)$$

şeklinde verilen Green formülünde $n = 2$, $a_2(x) = m(x)$, $a_2'(x) = m'(x) = a_1(x)$ alınır ve $\varphi(a) = \varphi_a$, $\varphi(b) = \varphi_b$, $\varphi'(a) = \varphi'_a$, $\varphi'(b) = \varphi'_b$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
 P(\tau, \zeta) &= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} (a_k \bar{\varphi})^{(i-1)} y^{(k-i)} \right) \Big|_a^b \\
 &= \left(\sum_{i=1}^1 (-1)^{i-1} (a_1 \varphi)^{(i-1)} y^{(1-i)} + \sum_{i=1}^2 (-1)^{i-1} (a_2 \varphi)^{(i-1)} y^{(2-i)} \right) \Big|_a^b \\
 &= \left(a_1 \varphi y + a_2 \varphi y' - (a_2 \varphi)' y \right) \Big|_a^b \\
 &= (m' \varphi y + m \varphi y' - m' \varphi y - m \varphi' y) \Big|_a^b \\
 &= m(\varphi y' - \varphi' y) \Big|_a^b \\
 &= m[(\varphi_b y'_b - \varphi'_b y_b) - (\varphi_a y'_a - \varphi'_a y_a)]
 \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
 P(\tau, \zeta) \frac{\Delta}{m} &= \varphi_b (-\gamma_1 (\theta_1 \rho_2 L_4 - \theta_2 \rho_1 L_4) + L_2 (\theta_1 \rho_2 \eta_1 - \theta_2 \rho_1 \eta_1)) \\
 &\quad - \varphi'_b (-L_2 (\theta_1 \rho_2 \eta_2 - \theta_2 \rho_1 \eta_2) + \gamma_2 (\theta_1 \rho_2 L_4 - \theta_2 \rho_1 L_4)) \\
 &\quad - \varphi_a (\theta_1 (\gamma_2 L_3 \eta_1 - \gamma_1 L_3 \eta_2) + L_1 (\gamma_2 \rho_2 \eta_1 - \gamma_1 \rho_1 \eta_2)) \\
 &\quad + \varphi'_a (L_1 (\gamma_2 \rho_2 \eta_1 - \gamma_1 \rho_2 \eta_2) - \theta_2 (\gamma_2 L_3 \eta_1 - \gamma_1 L_3 \eta_2)) \\
 &= L_1 [\varphi_a (\gamma_2 \rho_2 \eta_1 - \gamma_1 \rho_1 \eta_2) + \varphi'_a (\gamma_2 \rho_2 \eta_1 - \gamma_1 \rho_2 \eta_2)] \\
 &\quad + L_2 [\varphi_b (\theta_1 \rho_2 \eta_1 - \theta_2 \rho_1 \eta_1) + \varphi'_b (\theta_1 \rho_2 \eta_2 - \theta_2 \rho_1 \eta_2)] \\
 &\quad + L_3 [\varphi_a (\theta_1 \gamma_1 \eta_2 - \theta_1 \gamma_2 \eta_1) - \varphi'_a (\theta_2 \gamma_2 \eta_1 - \theta_2 \gamma_1 \eta_2)] \\
 &\quad + L_4 [\varphi_b (\theta_2 \gamma_1 \rho_1 - \theta_1 \gamma_2 \rho_2) - \varphi'_b (\theta_1 \gamma_2 \rho_2 - \theta_2 \gamma_2 \rho_1)]
 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}
P(\tau, \zeta) &= L_1 m \left(\frac{\varphi_a (\gamma_2 \rho_2 \eta_1 - \gamma_1 \rho_1 \eta_2) + \varphi'_a (\gamma_2 \rho_2 \eta_1 - \gamma_1 \rho_2 \eta_2)}{\Delta} \right) \\
&= L_2 m \left(\frac{\varphi_b (\theta_1 \rho_2 \eta_1 - \theta_2 \rho_1 \eta_1) + \varphi'_b (\theta_1 \rho_2 \eta_2 - \theta_2 \rho_1 \eta_2)}{\Delta} \right) \\
&= L_3 m \left(\frac{(\gamma_1 \eta_2 - \gamma_2 \eta_1)(\theta_1 \varphi_a - \theta_2 \varphi'_a)}{\Delta} \right) \\
&= L_4 m \left(\frac{(\theta_2 \rho_1 - \theta_1 \rho_2)(\gamma_1 \varphi_b - \gamma_2 \varphi'_b)}{\Delta} \right)
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Dolayısıyla

$$P(\tau, \zeta) = T_4 L_1 + T_3 L_2 + T_2 L_3 + T_1 L_4$$

olduğu için

$$T_1 = 0, T_2 = 0$$

sınır şartları

$$L_1(y) = \theta_1 y(a) + \theta_2 y'(a) = 0$$

$$L_2(y) = \gamma_1 y(b) + \gamma_2 y'(b) = 0$$

sınır şartlarının eşlenik sınır şartlarıdır. Buradan

$$T_1 = m \frac{(\theta_2 \rho_1 - \theta_1 \rho_2)(\gamma_1 \varphi_b + \gamma_2 \varphi'_b)}{\Delta} = 0$$

$$T_2 = m \frac{(\gamma_1 \eta_2 - \gamma_2 \eta_1)(\theta_1 \varphi_a + \theta_2 \varphi'_a)}{\Delta} = 0$$

bulunur. Buradan verilen sınır şartlarının eşleniği

$$\theta_1 \varphi_a + \theta_2 \varphi'_a = 0$$

$$\gamma_1 \varphi_b + \gamma_2 \varphi'_b = 0$$

ya da

$$\begin{aligned}\theta_1\eta_a + \theta_2\eta'_a &= 0 \\ \gamma_1\eta_b + \gamma_2\eta'_b &= 0\end{aligned}$$

olarak bulunur. Böylece teoremin hipotezinde verilen sınır şartlarının kendine eşlenik olduğu ortaya çıkar (Kandemir, 2021).

2.5.3 Teorem $L(y) = (m(x)y')' + n(x)y$ olmak üzere

$$L(y) + \lambda s(x)y = 0, \quad a \leq x \leq b$$

$$L_1(y) = \theta_1 y(a) + \theta_2 y'(a) = 0$$

$$L_2(y) = \gamma_1 y(b) + \gamma_2 y'(b) = 0$$

problemi kendine eşleniktir (Kandemir, 2021).

İspat Yukarıda verilen problemin ürettiği diferansiyel operator $\mathcal{L}$ ve bu probleme ait eşlenik problemin ürettiği diferansiyel operator $\mathcal{L}^*$ iken $\mathcal{L} = \mathcal{L}^*$ olur. Ayrıca sınır şartları da kendine eşlenik olduğundan teoremden verilen regüler Sturm-Liouville problemi kendine eşlenik bir sınır değer problemidir.

2.5.4 Teorem $L(y) = (m(x)y')' + n(x)y$ olmak üzere

$$L(y) + \lambda s(x)y = 0, \quad a \leq x \leq b$$

$$L_1(y) = \theta_1 y(a) + \theta_2 y'(a) = 0$$

$$L_2(y) = \gamma_1 y(b) + \gamma_2 y'(b) = 0$$

şeklinde verilen sınır değer problemi kendine eşleniktir ve bu problemin özdeğerleri reeldir (Kandemir, 2021).

İspat

Verilen sınır değer probleminin bir λ özdeğerine karşılık gelen özfonksiyonu y olsun.

$$L(y) = -\lambda sy$$

denkleminde ait kompleks eşlenik

$$L(\bar{y}) = -\bar{\lambda} s\bar{y}$$

şeklindedir. Sınır şartlarının eşleniği

$$\begin{aligned}\theta_1 \bar{y}(a) + \theta_2 \bar{y}'(a) &= 0 \\ \gamma_1 \bar{y}(b) + \gamma_2 \bar{y}'(b) &= 0\end{aligned}$$

olur. Devamında $L(y) = -\lambda sy$ denklemi $\bar{y}$ ile $L(\bar{y}) = -\bar{\lambda} s\bar{y}$ denklemi y ile çarpılıp birbirinden çıkarılırsa

$$\bar{y}L(y) - yL(\bar{y}) = (\bar{\lambda} - \lambda) sy\bar{y}$$

denklemini elde edilir. Bu denklemin

$$\int_a^b (\bar{y}L(y) - yL(\bar{y})) dx = (\bar{\lambda} - \lambda) \int_a^b sy\bar{y} dx$$

şeklinde integrali alınır ve eşitliğin sol tarafına Green formülü uygulanırsa

$$\left[m(\bar{y}y' - y\bar{y}') \right]_a^b = (\lambda - \bar{\lambda}) \int_a^b sy\bar{y} dx$$

bulunur. Buradan yukarıdaki denklemin sol tarafı

$$\left[m(\bar{y}y' - y\bar{y}') \right]_a^b = m(b)[\bar{y}_b y'_b - y_b \bar{y}'_b] - m(a)[\bar{y}_a y'_a - y_a \bar{y}'_a]$$

şeklinde elde edilir. Sınır şartlarından elde edilen

$$y_a = -\frac{\theta_2}{\theta_1} y'_a \quad \text{ve} \quad y_b = -\frac{\gamma_2}{\gamma_1} y'_b$$

ifadeleri son denklemde yerine yazılırsa

$$\left[m(\bar{y}y' - y\bar{y}') \right]_a^b = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} y'_b m(b)[\gamma_1 \bar{y}_b + \gamma_2 \bar{y}'_b] - \frac{\theta_2}{\theta_1} y'_a m(a)[\bar{y}_a \alpha_1 + \alpha_2 \bar{y}'_a]$$

bulunur. $\theta_1 = \gamma_1 = 0$ alınırsa

$$\left[m(\bar{y}y' - y\bar{y}') \right]_a^b = 0$$

elde edilir. Eğer $\theta_1 \neq 0$ ve $\gamma_1 \neq 0$ ise sınır şartlarının eşleniği formülünden yine

$$\left[m(\bar{y}y' - y\bar{y}') \right]_a^b = 0$$

olur. Buradan

$$(\lambda - \bar{\lambda}) \int_a^b s y \bar{y} dx = (\lambda - \bar{\lambda}) \int_a^b s |y|^2 dx = 0$$

bulunur. $s > 0$ ve $|y|^2 > 0$ olduğu için

$$\lambda - \bar{\lambda} = 0 \Rightarrow \lambda = \bar{\lambda}$$

elde edilir. Buradan λ özdeğerinin reel olduğu sonucu çıkar (Kandemir, 2021).

2.5.5 Teorem $L(y) = (m(x)y')' + n(x)y$ olmak üzere

$$L(y) + \lambda s(x)y = 0, a \leq x \leq b$$

$$L_1(y) = \theta_1 y(a) + \theta_2 y'(a) = 0$$

$$L_2(y) = \gamma_1 y(b) + \gamma_2 y'(b) = 0$$

sınır değer probleminin özdeğerleri basittir (Kandemir, 2021).

İspat Problemin bir λ özdeğerine y ve φ gibi iki tane öz fonksiyonun karşılık geldiği kabul edilsin. Öz fonksiyonlar problemi sağladığı için

$$(m(x)y')' + n(x)y + \lambda s(x)y = 0, a \leq x \leq b$$

$$\theta_1 y_a + \theta_2 y'_a = 0$$

$$\gamma_1 y_b + \gamma_2 y'_b = 0$$

$$(m(x)\varphi')' + n(x)\varphi + \lambda s(x)\varphi = 0, a \leq x \leq b$$

$$\theta_1 \varphi_a + \theta_2 \varphi'_a = 0$$

$$\gamma_1 \varphi_b + \gamma_2 \varphi'_b = 0$$

biçiminde yazılır. Yukarıdaki ilk denklem φ ile ikinci denklem y ile çarpılıp birbirinden taraf tarafa çıkarılırsa

$$(m(y'\varphi - \varphi'y))' = 0$$

elde edilir. y ve φ her iki sınır şartını sağladığı için $x = a$ noktasında

$$\theta_1 y_a + \theta_2 y'_a = 0$$

$$\theta_1 \varphi_a + \theta_2 \varphi'_a = 0$$

olur. Yani

$$\begin{pmatrix} y_a & y'_a \\ \varphi_a & \varphi'_a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

iken $\theta_1^2 + \theta_2^2 > 0$ koşulundan dolayı katsayılar matrisinin determinanı

$$\begin{vmatrix} y_a & y'_a \\ \varphi_a & \varphi'_a \end{vmatrix} = 0$$

yani

$$y'_a \varphi_a - \varphi'_a y_a = 0$$

bulunur. Buradan $m(x) > 0$ olduğundan

$$y' \varphi - \varphi' y = 0$$

$$\frac{y'}{y} - \frac{\varphi'}{\varphi} = 0$$

$$y = c \varphi$$

bulunur. Burada c bir keyfi sabittir. Yani y ile φ lineer bağımlıdır. Böylece her bir λ öz değeri için çözüm uzayının bir boyutlu olduğu elde edilir (Kandemir, 2021).

2.5.6 Teorem

$$L(y) + \lambda s(x)y = 0, \quad a \leq x \leq b$$

$$L_1(y) = \theta_1 y(a) + \theta_2 y'(a) = 0$$

$$L_2(y) = \gamma_1 y(b) + \gamma_2 y'(b) = 0$$

regüler sınır değer probleminin özdeğerlerinin dizisi (λ_n) olsun. Bu dizi artan ve ıraksak bir dizidir (Kandemir, 2021).

2.5.6 Tanım $y_p(x)$ ve $y_q(x)$ $[a, b]$ aralığında farklı iki özfonksiyon olsun. $x \in [a, b]$ için bu fonksiyonların $k(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre

$$\int_a^b y_p(x) y_q(x) k(x) dx = 0$$

oluyorsa $y_p(x)$ ve $y_q(x)$ öz fonksiyonlarına *birbirine diktir (ortogonal)* denir (Kandemir, 2021).

2.5.7 Teorem Regüler sınır değer probleminin λ_p ve λ_q farklı özdeğerlerine karşılık gelen farklı $y_p(x)$ ve $y_q(x)$ öz fonksiyonları diktir (Kandemir, 2021).

İspat λ_p ve λ_q problemin özdeğerleri $y_p(x)$ ve $y_q(x)$ fonksiyonları da bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar olduğundan

$$(m(x) y_p'(x))' + (n(x) + \lambda_p s(x)) y_p(x) = 0$$

$$(m(x) y_q'(x))' + (n(x) + \lambda_q s(x)) y_q(x) = 0$$

eşitlikleri sağlanır. Birinci denklem $y_q(x)$ ile ikinci denklem de $y_p(x)$ ile çarpılırsa

$$y_q(x) (m(x) y_p'(x))' + (n(x) + \lambda_p s(x)) y_q(x) y_p(x) = 0$$

$$y_p(x) (m(x) y_q'(x))' + (n(x) + \lambda_q s(x)) y_p(x) y_q(x) = 0$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemler birbirinden çıkarılırsa

$$(\lambda_p - \lambda_q) y_p(x) y_q(x) s(x) = [m(x) (y_p(x) y_q'(x) - y_q(x) y_p'(x))]'$$

denklemini elde edilir. Buradan

$$(\lambda_p - \lambda_q) \int_a^b y_p(x) y_q(x) s(x) dx = m(b) (y_p(b) y_q'(b) - y_q(b) y_p'(b)) \\ - m(a) (y_p(a) y_q'(a) - y_q(a) y_p'(a))$$

elde edilir. $y_p(x)$ ve $y_q(x)$ özfonksiyonları verilen problemin sınır şartlarını sağlayacağından dolayı $y_p(x)$ özfonksiyonu için

$$\theta_1 y_p(a) + \theta_2 y_p'(a) = 0 \\ \gamma_1 y_p(b) + \gamma_2 y_p'(b) = 0$$

ifadelerini, $y_q(x)$ özfonksiyonu için

$$\theta_1 y_q(a) + \theta_2 y_q'(a) = 0 \\ \gamma_1 y_q(b) + \gamma_2 y_q'(b) = 0$$

ifadelerini ele alalım. İlk denklemlerden oluşan

$$\theta_1 y_p(a) + \theta_2 y_p'(a) = 0 \\ \theta_1 y_q(a) + \theta_2 y_q'(a) = 0$$

sistemindeki θ_1 ve θ_2 katsayıları aynı anda sıfır olamayacağı için sistemin sıfırdan farklı çözümü vardır. Yani sistemin katsayılar determinantı sıfır olur.

$$\begin{vmatrix} y_p(a) & y_p'(a) \\ y_q(a) & y_q'(a) \end{vmatrix} = 0$$

olur. Benzer şekilde ikinci denklemlerden oluşan

$$\gamma_1 y_p(b) + \gamma_2 y_p'(b) = 0 \\ \gamma_1 y_q(b) + \gamma_2 y_q'(b) = 0$$

sistemindeki γ_1 ve γ_2 katsayıları aynı anda sıfır olamayacağı için sistemin sıfırdan farklı çözümü vardır. Yani sistemin katsayılar determinantı sıfır olur.

$$\begin{vmatrix} y_p(b) & y_p'(b) \\ y_q(b) & y_q'(b) \end{vmatrix} = 0$$

Buradan

$$\begin{aligned} (\lambda_p - \lambda_q) \int_a^b y_p(x) y_q(x) s(x) dx &= m(b) (y_p(b) y_q'(b) - y_q(b) y_p'(b)) \\ &\quad - m(a) (y_p(a) y_q'(a) - y_q(a) y_p'(a)) \end{aligned}$$

denkleminde denklemin sağ tarafı sıfır olur. $\lambda_p \neq \lambda_q$ olduğu için

$$\int_a^b y_p(x) y_q(x) s(x) dx = 0$$

bulunur. Böylece özfonksiyonların birbirine dik olduğu elde edilir (Kandemir, 2021).

2.5.7 Tanım Regüler Sturm-Liouville probleminin özfonksiyonları $y_k(x)$, $k=1,2,3,\dots$ fonksiyonları ve c_k katsayıları bulunması gereken sayılar olsun.

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k y_k(x)$$

serisine $f(x)$ fonksiyonunun $a \leq x \leq b$ aralığında regüler Sturm-Liouville problemine ait özfonksiyonların serisi adı verilir (Kandemir, 2021).

2.5.8 Teorem Regüler Sturm-Liouville probleminin özfonksiyonları $[a,b]$ aralığında $y_k(x)$, $k=1,2,3,\dots$ fonksiyonları ve f fonksiyonu $a < x < b$ aralığında parçalı düzgün olsun.

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k y_k(x)$$

özfonksiyon serisi f fonksiyonunun sürekli olduğu her x noktasında $f(x)$ fonksiyonuna yakınsar. f fonksiyonunun süreksiz olduğu her $x = x_k$ noktasında

$$\frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow x_k^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_k^+} f(x) \right)$$

ifadesine yakınsar (Kandemir, 2021).

2.5.9 Teorem Regüler Sturm-Liouville probleminin λ_k , $k = 1, 2, 3, \dots$, özdeğerlerine karşılık gelen her bir y_k özfonksiyonunun $a < x < b$ aralığında $(k-1)$ tane sıfırı (özfonksiyonu sıfır yapan nokta) mevcuttur (Kandemir, 2021).

3. SÜREKSİZ KATSAYILI ÇOK NOKTALI SINIR DEĞER PROBLEMİNİN SPEKTRAL ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde tezin esas konusu olan sınır değer probleminin ifadesi verilecektir. Ayrıca bu problemin spektral özellikleri, koersitivliği, izomorfizimliği ve Fredholm operatörü olma özellikleri araştırılacaktır.

3.1. Süreksiz Katsayılı Sınır Değer Probleminin İfadesi

Bu tez çalışmasında $[-1,1]$ aralığının iki iç noktasında süreksizliğe sahip üç aralıklı, aşağıda tanımlanan sınır değer problemi göz önüne alınacaktır. Problemin diferensiyel denklemi

$$L(\lambda)u := t(x)u''(x) + (k(x) - \lambda^2)u(x) = f(x), \quad x \in [-1, d_1) \cup (d_1, d_2) \cup (d_2, 1]$$

şeklinde tanımlıdır. Burada d_1 ve d_2 iç noktaları denklemdeki katsayı fonksiyonlarının süreksiz olduğu noktalarlardır. Probleme ait sınır şartları da

$$\begin{aligned} L_1 u &:= \alpha_1 u^{(m_1)}(-1) + \beta_1 u^{(m_1)}(d_1 - 0) + \sum_{s=1}^{n_1} \gamma_{1s} u^{(m_1)}(x_{1s}) = h_1 \\ L_2 u &:= \alpha_2 u^{(m_2)}(d_2 + 0) + \beta_2 u^{(m_2)}(1) + \sum_{s=1}^{n_2} \gamma_{2s} u^{(m_2)}(x_{2s}) = h_2 \\ L_3 u &:= \alpha_3 u^{(m_3)}(d_1 - 0) + \beta_3 u^{(m_3)}(d_1 + 0) + \sum_{s=1}^{n_3} \gamma_{3s} u^{(m_3)}(x_{3s}) = h_3 \\ L_4 u &:= \alpha_4 u^{(m_4)}(d_1 - 0) + \beta_4 u^{(m_4)}(d_1 + 0) + \sum_{s=1}^{n_4} \gamma_{4s} u^{(m_4)}(x_{4s}) = h_4 \\ L_5 u &:= \alpha_5 u^{(m_5)}(d_2 - 0) + \beta_5 u^{(m_5)}(d_2 + 0) + \sum_{s=1}^{n_5} \gamma_{5s} u^{(m_5)}(x_{5s}) = h_5 \\ L_6 u &:= \alpha_6 u^{(m_6)}(d_2 - 0) + \beta_6 u^{(m_6)}(d_2 + 0) + \sum_{s=1}^{n_6} \gamma_{6s} u^{(m_6)}(x_{6s}) = h_6 \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanmaktadır. d_1 ve d_2 noktalarına göre yazılan şartlar geçiş şartları olarak ifade edilmektedir. Burada, $-1 < d_1 < 0 < d_2 < 1$, $\alpha_j, \beta_j, \gamma_{js}, h_j$ kompleks sayılar; $f(x)$ verilen reel değerli fonksiyon ve $|\alpha_i| + |\beta_i| \neq 0$ olmak üzere

$$t(x) = \begin{cases} t_1 & x \in [-1, d_1) \\ t_2 & x \in (d_1, d_2) \\ t_3 & x \in (d_2, 1] \end{cases}$$

şeklinde tanımlıdır. Ayrıca $x_{js} \in [-1, d_1) \cup (d_1, d_2) \cup (d_2, 1]$ iç noktalar; $k(x)$, $[-1, d_1) \cup (d_1, d_2) \cup (d_2, 1]$ üzerinde integrallenebilir bir fonksiyondur.

3.2. Problemin Tanımlı Olduğu Sobolev Uzayı

Bu kısımda çalıştığımız problemin Sobolev Uzayı tanıtılacaktır.

$$0 \leq s_0, s_1 < \infty, s_0 \neq s_1, \Omega \subset \mathbb{R}^n \text{ için } (W_p^{s_0}(\Omega), W_p^{s_1}(\Omega))_{\theta, q} = B_{p, q}^s(\Omega)$$

olmak üzere aşağıdaki uzaylar göz önüne alınacaktır:

Eğer,

$$0 \leq s_0, s_1 < \infty, s_0 \neq s_1, 1 < p < \infty, 1 \leq q \leq \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, 0 < \theta < 1, s = (1 - \theta)s_0 + \theta s_1 \text{ ve } \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

ise

$$B_{p, q}^s(\Omega) = (W_p^{s_0}(\Omega), W_p^{s_1}(\Omega))_{\theta, q}$$

olur. Bu uzaylar Sobolev uzaylarının interpolasyonu ile tanımlanan Besov uzaylarıdır (Triebel, 1978).

$W_p^m(\Omega)$ Sobolev uzayı, $\|u\|_{W_p^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L_p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$ normu ile birlikte $u \in L_p(\Omega)$ lerden

oluşan Banach uzayıdır. $W_p^0(\Omega) = L_p(\Omega)$ olur.

Eğer $0 \leq s_0, s_1$ tamsayılar, $s_0 \neq s_1, 1 < p < \infty$ ve $0 < \theta < 1, s = (1 - \theta)s_0 + \theta s_1$ ise

$$B_p^s(\Omega) = W_p^s(\Omega) = \left(W_p^{s_0}(\Omega), W_p^{s_1}(\Omega) \right)_\theta$$

ve $1 < p_0, p_1 < \infty$ için

$$L_p(\Omega) = \left(L_{p_0}(\Omega), L_{p_1}(\Omega) \right)_{\theta, p}$$

(Triebel, 1978).

$$\|u\|_{B_p^s(\Omega)} \leq c \left(\|u\|_{B_p^{s_0}(\Omega)}^{1-\theta} \|u\|_{B_p^{s_1}(\Omega)}^\theta, \quad u \in B_p^{s_0}(\Omega) \cap B_p^{s_1}(\Omega) \right) \text{ ve } 0 \leq s \leq l, 1 < p < \infty \text{ ve } \lambda \in \mathbb{C} \text{ için}$$

$$|\lambda|^{l-s} \|u\|_{W_p^s(\Omega)} \leq C \left(\|u\|_{W_p^l(\Omega)} + |\lambda|^l \|u\|_{L_p(\Omega)} \right)$$

olur (Yakubov and Yakubov, 1999).

3.3. Homojen Denkleme ve Homojen Olmayan Geçiş Şartlarına Sahip Sınır Değer Probleminin Çözülebilirliği ve Koersitivliği

Öncelikle

$$L_0(\lambda)u := t(x)u''(x) - \lambda^2 u(x) = 0 \quad (1)$$

şeklinde homojen diferensiyel denklemi olmak üzere

$$L_{10}u := \alpha_1 u^{(m_1)}(-1) + \beta_1 u^{(m_1)}(d_1 - 0) = h_1 \quad (2)$$

$$L_{20}u := \alpha_2 u^{(m_2)}(d_2 + 0) + \beta_2 u^{(m_2)}(1) = h_2 \quad (3)$$

$$L_{j0}u := \alpha_j u^{(m_j)}(d_k - 0) + \beta_j u^{(m_j)}(d_k + 0) = h_j \quad (4)$$

$j = 3, 4$ için $k = 1$; $j = 5, 6$ için $k = 2$ homojen olmayan geçiş şartlarını içeren sınır değer problemi göz önüne alınacaktır. Kullanılacak olan notasyon ve tanımlar aşağıda verilmiştir.

$$\varphi_{jk} = (-1)^k \frac{1}{\sqrt{t_j}}, j = 1, 2, 3, \quad k = 1, 2; \quad \underline{\varphi} := \min \{ \arg t_1, \arg t_2, \arg t_3 \}, \quad \bar{\varphi} := \max \{ \arg t_1, \arg t_2, \arg t_3 \};$$

$$\theta = \begin{vmatrix} \alpha_1 \varphi_{11}^{m_1} & \beta_1 \varphi_{12}^{m_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_2 \varphi_{31}^{m_2} & \beta_2 \varphi_{32}^{m_2} \\ 0 & \alpha_3 \varphi_{12}^{m_3} & \beta_3 \varphi_{21}^{m_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_4 \varphi_{12}^{m_4} & \beta_4 \varphi_{21}^{m_4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_5 \varphi_{22}^{m_5} & \beta_5 \varphi_{31}^{m_5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_6 \varphi_{22}^{m_6} & \beta_6 \varphi_{31}^{m_6} & 0 \end{vmatrix}$$

$$D(\varepsilon, \lambda) := \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \pi + \bar{\varphi} < \arg \lambda < 3\pi + \underline{\varphi} - \varepsilon \}.$$

Sobolev uzaylarının direkt toplamı $(-1, d_1), (d_1, d_2)$ ve $(d_2, 1)$ aralıklarına göre tanımlanan

$$W_q^k(-1, d_1), W_q^k(d_1, d_2) \text{ ve } W_q^k(d_2, 1)$$

Sobolev uzayları dikkate alınarak

$$W_q^k(-1, d_1) \dot{+} W_q^k(d_1, d_2) \dot{+} W_q^k(d_2, 1) \quad (k \geq 0, q > 1, k \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{R})$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Bu direkt toplam uzayının normu

$$\|u\|_{W_q^k(-1,1)} = \|u\|_{W_q^k(-1,d_1)} + \|u\|_{W_q^k(d_1,d_2)} + \|u\|_{W_q^k(d_2,1)}$$

eşitliği ile verilmektedir. Bilindiği üzere $W_q^k(a,b)$ Sobolev uzayı bir Banach uzayıdır. Tüm ölçülebilir $u(x)$ fonksiyonlarının (a,b) aralığında k . merteye dahil bu mertebeye kadar olan genelleştirilmiş türevleri göz önüne alınmak üzere $W_q^k(a,b)$ Sobolev uzayının normu

$$\|u\|_{W_q^k(a,b)} = \sum_{i=0}^k \left(\int_a^b |u^{(i)}(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}, k \geq 0 \text{ ve } q > 1$$

şeklinde tanımlıdır.

3.3.1 Teorem Eğer $\theta \neq 0$ ise herhangi $\varepsilon > 0$ için öyle bir $\gamma_\varepsilon > 0$ vardır öyle ki her $\lambda \in D(\varepsilon, \lambda)$, $|\lambda| > \gamma_\varepsilon$ kompleks sayıları için (1)-(4) problemi

$$n \geq \max \{2, \max \{m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6\} + 1\}$$

olmak üzere $W_q^k(-1, d_1) \dot{+} W_q^k(d_1, d_2) \dot{+} W_q^k(d_2, 1)$ uzayına ait olan bir tek $u(\lambda, x)$ çözümüne sahiptir ve bu çözüm için

$$\sum_{k=0}^n |\lambda|^{n-k} \|u\|_{W_q^k(-1,1)} \leq C(\varepsilon) \sum_{j=1}^6 |\lambda|^{n-m_j-\frac{1}{q}} |h_j| \quad (5)$$

koersitiv eşitsizliği sağlanır.

İspat $\xi_{11} = -1, \xi_{12} = \xi_{21} = d_1, \xi_{22} = \xi_{31} = d_2, \xi_{32} = 1; I_1 = [-1, d_1), I_2 = (d_1, d_2), I_3 = (d_2, 1]$

olmak üzere (1) homojen diferensiyel denkleminin 6 tane $u_{jk} = u_{jk}(x, \lambda)$ temel çözümü

$$u_{jk} := \begin{cases} e^{\varphi_{jk}\lambda(x-\xi_{jk})} & x \in I_j \text{ için} \\ 0 & x \notin I_j \text{ için} \end{cases} \quad j = 1, 2, 3 \quad k = 1, 2$$

şeklinde tanımlanacaktır. Yani çözümler $x \in [-1, d_1)$ için

$$u_{11} = e^{\varphi_{11}\lambda(x-\xi_{11})}$$

$$u_{12} = e^{\varphi_{12}\lambda(x-\xi_{12})}$$

$x \in (d_1, d_2)$ için

$$u_{21} = e^{\varphi_{21}\lambda(x-\xi_{21})}$$

$$u_{22} = e^{\varphi_{22}\lambda(x-\xi_{22})}$$

$x \in (d_2, 1]$ için

$$u_{31} = e^{\varphi_{31}\lambda(x-\xi_{31})}$$

$$u_{32} = e^{\varphi_{32}\lambda(x-\xi_{32})}$$

şeklinde göz önüne alınacaktır. $C_{11}, C_{12}, C_{21}, C_{22}, C_{31}, C_{32}$ keyfi sabitler olmak üzere (1) denkleminin genel çözümü

$$\begin{aligned} u(x, \lambda) &= \sum_{j=1}^3 (C_{j1}u_{j1}(x, \lambda) + C_{j2}u_{j2}(x, \lambda)) = \\ &= C_{11}e^{\varphi_{11}\lambda(x+1)} + C_{12}e^{\varphi_{12}\lambda(x-d_1)} + C_{21}e^{\varphi_{21}\lambda(x-d_1)} + C_{22}e^{\varphi_{22}\lambda(x-d_2)} + C_{31}e^{\varphi_{31}\lambda(x-d_2)} + C_{32}e^{\varphi_{32}\lambda(x-1)} \end{aligned} \quad (6)$$

biçiminde yazılır. (6) eşitliği sınır geçiş şartlarında yerine yazılırsa aşağıdaki sistem elde edilir

$$L_{10}u = \alpha_1 u^{(m_1)}(-1) + \beta_1 u^{(m_1)}(d_1 - 0) = h_1$$

$$\begin{aligned} L_{10}u &= \alpha_1 \left(C_{11}e^{\varphi_{11}\lambda(x+1)} + C_{12}e^{\varphi_{12}\lambda(x-d_1)} + C_{21}e^{\varphi_{21}\lambda(x-d_1)} \right)^{(m_1)} (-1) \\ &\quad + \beta_1 \left(C_{11}e^{\varphi_{11}\lambda(x+1)} + C_{12}e^{\varphi_{12}\lambda(x-d_1)} + C_{21}e^{\varphi_{21}\lambda(x-d_1)} \right)^{(m_1)} (d_1 - 0) = h_1 \\ L_{10}u &= C_{11}(\varphi_{11}\lambda)^{m_1} (\alpha_1 + \beta_1 e^{\varphi_{11}\lambda(d_1+1)}) + C_{12}(\varphi_{12}\lambda)^{m_1} (\alpha_1 e^{\varphi_{12}\lambda(-1-d_1)} + \beta_1) \\ &\quad + C_{21} \cdot 0 + C_{22} \cdot 0 + C_{31} \cdot 0 + C_{32} \cdot 0 = h_1 \end{aligned}$$

$$L_{20}u = \alpha_2 u^{(m_2)}(d_2 + 0) + \beta_2 u^{(m_2)}(1) = h_2$$

$$\begin{aligned} L_{20}u &= \alpha_2 \left(C_{11}e^{\varphi_{11}\lambda(x+1)} + C_{12}e^{\varphi_{12}\lambda(x-d_1)} + C_{21}e^{\varphi_{21}\lambda(x-d_1)} \right. \\ &\quad \left. + C_{22}e^{\varphi_{22}\lambda(x-d_2)} + C_{31}e^{\varphi_{31}\lambda(x-d_2)} + C_{32}e^{\varphi_{32}\lambda(x-1)} \right)^{(m_2)} (d_2 + 0) \\ &\quad + \beta_2 \left(C_{11}e^{\varphi_{11}\lambda(x+1)} + C_{12}e^{\varphi_{12}\lambda(x-d_1)} + C_{21}e^{\varphi_{21}\lambda(x-d_1)} \right. \\ &\quad \left. + C_{22}e^{\varphi_{22}\lambda(x-d_2)} + C_{31}e^{\varphi_{31}\lambda(x-d_2)} + C_{32}e^{\varphi_{32}\lambda(x-1)} \right)^{(m_2)} (1) = h_2 \\ L_{20}u &= C_{11} \cdot 0 + C_{12} \cdot 0 + C_{21} \cdot 0 + C_{22} \cdot 0 + C_{31} (\varphi_{31}\lambda)^{m_2} (\alpha_2 + \beta_2 e^{\varphi_{31}\lambda(1-d_2)}) \\ &\quad + C_{32} (\varphi_{32}\lambda)^{m_2} (\alpha_2 e^{\varphi_{32}\lambda(d_2-1)} + \beta_2) = h_2 \end{aligned}$$

$$L_{30}u = \alpha_3 u^{(m_3)}(d_1 - 0) + \beta_3 u^{(m_3)}(d_1 + 0) = h_3$$

$$\begin{aligned} L_{30}u &= \alpha_3 \left(C_{11}e^{\varphi_{11}\lambda(x+1)} + C_{12}e^{\varphi_{12}\lambda(x-d_1)} + C_{21}e^{\varphi_{21}\lambda(x-d_1)} \right. \\ &\quad \left. + C_{22}e^{\varphi_{22}\lambda(x-d_2)} + C_{31}e^{\varphi_{31}\lambda(x-d_2)} + C_{32}e^{\varphi_{32}\lambda(x-1)} \right)^{(m_3)} (d_1 - 0) \\ &\quad + \beta_3 \left(C_{11}e^{\varphi_{11}\lambda(x+1)} + C_{12}e^{\varphi_{12}\lambda(x-d_1)} + C_{21}e^{\varphi_{21}\lambda(x-d_1)} \right. \\ &\quad \left. + C_{22}e^{\varphi_{22}\lambda(x-d_2)} + C_{31}e^{\varphi_{31}\lambda(x-d_2)} + C_{32}e^{\varphi_{32}\lambda(x-1)} \right)^{(m_3)} (d_1 + 0) = h_3 \\ L_{30}u &= C_{11} (\varphi_{11}\lambda)^{m_3} \alpha_3 e^{\varphi_{11}\lambda(d_1+1)} + C_{12} (\varphi_{12}\lambda)^{m_3} \alpha_3 \\ &\quad + C_{21} (\varphi_{21}\lambda)^{m_3} \beta_3 + C_{22} (\varphi_{22}\lambda)^{m_3} \beta_3 e^{\varphi_{22}\lambda(d_1-d_2)} + C_{31} \cdot 0 + C_{32} \cdot 0 = h_3 \end{aligned}$$

$$L_{40}u = \alpha_4 u^{(m_4)}(d_1 - 0) + \beta_4 u^{(m_4)}(d_1 + 0) = h_4$$

$$\begin{aligned} L_{40}u &= \alpha_4 \left(C_{11}e^{\varphi_{11}\lambda(x+1)} + C_{12}e^{\varphi_{12}\lambda(x-d_1)} + C_{21}e^{\varphi_{21}\lambda(x-d_1)} \right. \\ &\quad \left. + C_{22}e^{\varphi_{22}\lambda(x-d_2)} + C_{31}e^{\varphi_{31}\lambda(x-d_2)} + C_{32}e^{\varphi_{32}\lambda(x-1)} \right)^{(m_4)} (d_1 - 0) \\ &\quad + \beta_4 \left(C_{11}e^{\varphi_{11}\lambda(x+1)} + C_{12}e^{\varphi_{12}\lambda(x-d_1)} + C_{21}e^{\varphi_{21}\lambda(x-d_1)} \right. \\ &\quad \left. + C_{22}e^{\varphi_{22}\lambda(x-d_2)} + C_{31}e^{\varphi_{31}\lambda(x-d_2)} + C_{32}e^{\varphi_{32}\lambda(x-1)} \right)^{(m_4)} (d_1 + 0) = h_4 \\ L_{40}u &= C_{11} (\varphi_{11}\lambda)^{m_4} \alpha_4 e^{\varphi_{11}\lambda(d_1+1)} + C_{12} (\varphi_{12}\lambda)^{m_4} \alpha_4 \\ &\quad + C_{21} (\varphi_{21}\lambda)^{m_4} \beta_4 + C_{22} (\varphi_{22}\lambda)^{m_4} \beta_4 e^{\varphi_{22}\lambda(d_1-d_2)} + C_{31} \cdot 0 + C_{32} \cdot 0 = h_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_{50}u &= \alpha_5 u^{(m_5)}(d_2 - 0) + \beta_5 u^{(m_5)}(d_2 + 0) = h_5 \\
L_{50}u &= \alpha_5 \left(C_{11}e^{\varphi_{11}\lambda(x+1)} + C_{12}e^{\varphi_{12}\lambda(x-d_1)} + C_{21}e^{\varphi_{21}\lambda(x-d_1)} \right. \\
&\quad \left. + C_{22}e^{\varphi_{22}\lambda(x-d_2)} + C_{31}e^{\varphi_{31}\lambda(x-d_2)} + C_{32}e^{\varphi_{32}\lambda(x-1)} \right)^{(m_5)} (d_2 - 0) \\
&\quad + \beta_5 \left(C_{11}e^{\varphi_{11}\lambda(x+1)} + C_{12}e^{\varphi_{12}\lambda(x-d_1)} + C_{21}e^{\varphi_{21}\lambda(x-d_1)} \right. \\
&\quad \left. + C_{22}e^{\varphi_{22}\lambda(x-d_2)} + C_{31}e^{\varphi_{31}\lambda(x-d_2)} + C_{32}e^{\varphi_{32}\lambda(x-1)} \right)^{(m_5)} (d_2 + 0) = h_5 \\
L_{50}u &= C_{11} \cdot 0 + C_{12} \cdot 0 + C_{21} (\varphi_{21}\lambda)^{m_5} \alpha_5 e^{\varphi_{21}\lambda(d_2-d_1)} + C_{22} (\varphi_{22}\lambda)^{m_5} \alpha_5 \\
&\quad + C_{31} (\varphi_{31}\lambda)^{m_5} \beta_5 + C_{32} (\varphi_{32}\lambda)^{m_5} \beta_5 e^{\varphi_{32}\lambda(d_2-1)} = h_5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_{60}u &= \alpha_6 u^{(m_6)}(d_2 - 0) + \beta_6 u^{(m_6)}(d_2 + 0) = h_6 \\
L_{60}u &= \alpha_6 \left(C_{11}e^{\varphi_{11}\lambda(x+1)} + C_{12}e^{\varphi_{12}\lambda(x-d_1)} + C_{21}e^{\varphi_{21}\lambda(x-d_1)} \right. \\
&\quad \left. + C_{22}e^{\varphi_{22}\lambda(x-d_2)} + C_{31}e^{\varphi_{31}\lambda(x-d_2)} + C_{32}e^{\varphi_{32}\lambda(x-1)} \right)^{(m_6)} (d_2 - 0) \\
&\quad + \beta_6 \left(C_{11}e^{\varphi_{11}\lambda(x+1)} + C_{12}e^{\varphi_{12}\lambda(x-d_1)} + C_{21}e^{\varphi_{21}\lambda(x-d_1)} \right. \\
&\quad \left. + C_{22}e^{\varphi_{22}\lambda(x-d_2)} + C_{31}e^{\varphi_{31}\lambda(x-d_2)} + C_{32}e^{\varphi_{32}\lambda(x-1)} \right)^{(m_6)} (d_2 + 0) = h_6 \\
L_{60}u &= C_{11} \cdot 0 + C_{12} \cdot 0 + C_{21} (\varphi_{21}\lambda)^{m_6} \alpha_6 e^{\varphi_{21}\lambda(d_2-d_1)} + C_{22} (\varphi_{22}\lambda)^{m_6} \alpha_6 \\
&\quad + C_{31} (\varphi_{31}\lambda)^{m_6} \beta_6 + C_{32} (\varphi_{32}\lambda)^{m_6} \beta_6 e^{\varphi_{32}\lambda(d_2-1)} = h_6.
\end{aligned}$$

Bu sistem $C_{11}, C_{12}, C_{21}, C_{22}, C_{31}, C_{32}$ katsayılarına göre yeniden düzenlenirse

$$\begin{aligned}
C_{11}(\alpha_1 + \beta_1 e^{\varphi_{11}\lambda(d_1+1)}) (\varphi_{11}\lambda)^{m_1} + C_{12}(\alpha_1 e^{\varphi_{12}\lambda(-1-d_1)} + \beta_1) (\varphi_{12}\lambda)^{m_1} &= h_1 \\
C_{31}(\alpha_2 + \beta_2 e^{\varphi_{31}\lambda(1-d_2)}) (\varphi_{31}\lambda)^{m_2} + C_{32}(\alpha_2 e^{\varphi_{32}\lambda(d_2-1)} + \beta_2) (\varphi_{32}\lambda)^{m_2} &= h_2 \\
C_{11}\alpha_3 e^{\varphi_{11}\lambda(d_1+1)} (\varphi_{11}\lambda)^{m_3} + C_{12}\alpha_3 (\varphi_{12}\lambda)^{m_3} + C_{21}\beta_3 (\varphi_{21}\lambda)^{m_3} + C_{22}\beta_3 e^{\varphi_{22}\lambda(d_1-d_2)} (\varphi_{22}\lambda)^{m_3} &= h_3 \\
C_{11}\alpha_4 e^{\varphi_{11}\lambda(d_1+1)} (\varphi_{11}\lambda)^{m_4} + C_{12}\alpha_4 (\varphi_{12}\lambda)^{m_4} + C_{21}\beta_4 (\varphi_{21}\lambda)^{m_4} + C_{22}\beta_4 e^{\varphi_{22}\lambda(d_1-d_2)} (\varphi_{22}\lambda)^{m_4} &= h_4 \\
C_{21}\alpha_5 e^{\varphi_{21}\lambda(d_2-d_1)} (\varphi_{21}\lambda)^{m_5} + C_{22}\alpha_5 (\varphi_{22}\lambda)^{m_5} + C_{31}\beta_5 (\varphi_{31}\lambda)^{m_5} + C_{32}\beta_5 e^{\varphi_{32}\lambda(d_2-1)} (\varphi_{32}\lambda)^{m_5} &= h_5 \\
C_{21}\alpha_6 e^{\varphi_{21}\lambda(d_2-d_1)} (\varphi_{21}\lambda)^{m_6} + C_{22}\alpha_6 (\varphi_{22}\lambda)^{m_6} + C_{31}\beta_6 (\varphi_{31}\lambda)^{m_6} + C_{32}\beta_6 e^{\varphi_{32}\lambda(d_2-1)} (\varphi_{32}\lambda)^{m_6} &= h_6
\end{aligned} \tag{7}$$

sistemi elde edilir. $\lambda \in D(\varepsilon, \lambda)$ olduğundan

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2} + \varepsilon &< \arg \lambda \varphi_{jk} < \frac{3\pi}{2} - \varepsilon, \quad j=1,2,3, k=1 \\ -\frac{\pi}{2} + \varepsilon &< \arg \lambda \varphi_{jk} < \frac{\pi}{2} - \varepsilon, \quad j=1,2,3, k=1\end{aligned}$$

eşitsizlikleri yazılabilir. Sonuç olarak bunlardan dolayı λ ve $\varepsilon > 0$ için

$$(-1)^{k+1} \operatorname{Re} \lambda \varphi_{jk} \leq -|\lambda| |\varphi_{jk}| \sin \varepsilon, \quad j=1,2,3 \quad k=1,2$$

elde edilir.

$$\omega_{11} := d_1 + 1, \omega_{12} := -1 - d_1, \omega_{21} := d_2 - d_1, \omega_{22} := d_1 - d_2, \omega_{31} := 1 - d_2, \omega_{32} := d_2 - 1$$

olsun. Dolayısıyla $m = \sum_{j=1}^6 m_j$ olmak üzere (7) sisteminin determinantı ,

$$\begin{aligned}\Delta(\lambda) &= \lambda^{\sum_{j=1}^6 m_j} \begin{vmatrix} \alpha_1 \varphi_{11}^{m_1} & \beta_1 \varphi_{12}^{m_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_2 \varphi_{31}^{m_2} & \beta_2 \varphi_{32}^{m_2} \\ 0 & \alpha_3 \varphi_{12}^{m_3} & \beta_3 \varphi_{21}^{m_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_4 \varphi_{12}^{m_4} & \beta_4 \varphi_{21}^{m_4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_5 \varphi_{22}^{m_5} & \beta_5 \varphi_{31}^{m_5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_6 \varphi_{22}^{m_6} & \beta_6 \varphi_{31}^{m_6} & 0 \end{vmatrix} \\ &+ e^{\sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^2 \lambda \varphi_{jk} \omega_{jk}} \begin{vmatrix} \beta_1 \varphi_{11}^{m_1} & \alpha_1 \varphi_{12}^{m_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_2 \varphi_{31}^{m_2} & \beta_2 \varphi_{32}^{m_2} \\ \alpha_3 \varphi_{11}^{m_3} & 0 & 0 & \beta_3 \varphi_{22}^{m_3} & 0 & 0 \\ \alpha_4 \varphi_{11}^{m_4} & 0 & 0 & \beta_4 \varphi_{22}^{m_4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_5 \varphi_{21}^{m_5} & 0 & 0 & \beta_5 \varphi_{32}^{m_5} \\ 0 & 0 & \alpha_6 \varphi_{21}^{m_6} & 0 & 0 & \beta_6 \varphi_{32}^{m_6} \end{vmatrix} \\ &= \lambda^m (\theta + \sigma(\lambda))\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Her $j=1,2,3$ ve $k=1,2$ için $\varphi_{jk} \omega_{jk} < 0$ olduğundan

$\lambda \in D(\varepsilon, \lambda)$ ve $|\lambda| \rightarrow \infty$ ise $\sigma(\lambda) \rightarrow 0$ olur. Dolayısıyla $\theta \neq 0$ olması nedeniyle öyle bir

$\gamma_\varepsilon > 0$ sayısı vardır ki $\lambda \in D(\varepsilon, \lambda)$ tüm kompleks sayıları için $|\lambda| > \gamma_\varepsilon$ ve $\Delta(\lambda) \neq 0$ olur.

Dolayısıyla (7) sistemi

$$C_{jk}(\lambda) = \frac{1}{\Delta(\lambda)} \sum_{i=1}^6 \Delta_{ijk}(\lambda) h_i, \quad j=1,2,3, k=1,2$$

şeklinde tek bir çözüme sahiptir. Burada θ_{ijk} kompleks sayılar olup $|\lambda| \rightarrow \infty$ iken $\sigma_{ijk} \rightarrow 0$ olacağından $\Delta_{ijk}(\lambda)$ determinantları

$$\Delta_{ijk}(\lambda) = (\theta_{ijk} + \sigma_{ijk}(\lambda)) \lambda^{\sum_{v=1}^6 m_v - m_i} \quad j=1,2,3 \quad k=1,2$$

gösterimine sahiptir. Buradan $c_{jk}(\lambda)$ katsayıları

$$C_{jk}(\lambda) = \sum_{i=1}^6 \lambda^{-m_i} \frac{\theta_{ijk} + \sigma_{ijk}(\lambda)}{\theta + \sigma(\lambda)} h_i \quad j=1,2,3 \quad k=1,2$$

şeklinde elde edilir. Dolayısıyla, (1) - (4) probleminin çözümü

$$\begin{aligned} u(x, \lambda) &= \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^2 C_{jk}(\lambda) u_{jk}(x, \lambda) \\ &= \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^2 \sum_{i=1}^6 \lambda^{-m_i} \frac{\theta_{ijk} + \sigma_{ijk}(\lambda)}{\theta + \sigma(\lambda)} h_i u_{jk}(x, \lambda) \end{aligned}$$

formuna sahiptir.

Bu durumda, her $n \geq 0$ tamsayısı ve $\frac{\pi + \bar{\varphi}}{2} + \varepsilon \leq \arg \lambda \leq \frac{3\pi + \varphi}{2} - \varepsilon, |\lambda| \rightarrow \infty$ için,

$$\|u^{(n)}\|_{L_q(-1,1)} \leq C \sum_{i=1}^6 \left(|\lambda|^{n-m_i} |h_i| \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^2 \|u_{jk}(\cdot, \lambda)\|_{L_q(I_j)} \right) \quad (8)$$

veya

$$\begin{aligned}
\|u^{(n)}\|_{L_q(-1,1)} &\leq C \sum_{i=1}^6 |\lambda|^{n-m_i} |h_i| \left(\|e^{\varphi_{11}\lambda(x+1)}\|_{L_q(-1,d_1)} + \|e^{\varphi_{12}\lambda(x-d_1)}\|_{L_q(-1,d_1)} \right. \\
&\quad + \|e^{\varphi_{21}\lambda(x-d_1)}\|_{L_q(d_1,d_2)} + \|e^{\varphi_{22}\lambda(x-d_2)}\|_{L_q(d_1,d_2)} \\
&\quad \left. + \|e^{\varphi_{31}\lambda(x-d_2)}\|_{L_q(d_2,1)} + \|e^{\varphi_{32}\lambda(x-1)}\|_{L_q(d_2,1)} \right)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Buna göre $\lambda \in D(\varepsilon, \lambda)$ için $|\lambda| \rightarrow \infty$ iken

$$\begin{aligned}
\|u_{11}(\cdot, \lambda)\|_{L_q(-1,d_1)}^q &= \int_{-1}^{d_1} e^{\operatorname{Re} \varphi_{11}\lambda(x+1)} dx \leq \int_{-1}^{d_1} e^{-q|\lambda|\|\varphi_{11}\|\sin\frac{\varepsilon}{2}(x+1)} dx \\
&= \left(-q|\lambda|\|\varphi_{11}\|\sin\frac{\varepsilon}{2} \right)^{-1} \left(e^{-q|\lambda|\|\varphi_{11}\|\sin\frac{\varepsilon}{2}(d_1+1)} - 1 \right) \\
&\leq C(\varepsilon)|\lambda|^{-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|u_{12}(\cdot, \lambda)\|_{L_q(-1,d_1)}^q &= \int_{-1}^{d_1} e^{\operatorname{Re} \varphi_{12}\lambda(x-d_1)} dx \leq \int_{-1}^{d_1} e^{-q|\lambda|\|\varphi_{12}\|\sin\frac{\varepsilon}{2}(x-d_1)} dx \\
&= \left(-q|\lambda|\|\varphi_{12}\|\sin\frac{\varepsilon}{2} \right)^{-1} \left(1 - e^{-q|\lambda|\|\varphi_{12}\|\sin\frac{\varepsilon}{2}(1+d_1)} \right) \\
&\leq C(\varepsilon)|\lambda|^{-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|u_{21}(\cdot, \lambda)\|_{L_q(d_1,d_2)}^q &= \int_{d_1}^{d_2} e^{\operatorname{Re} \varphi_{21}\lambda(x-d_1)} dx \leq \int_{d_1}^{d_2} e^{-q|\lambda|\|\varphi_{21}\|\sin\frac{\varepsilon}{2}(x-d_1)} dx \\
&= \left(-q|\lambda|\|\varphi_{21}\|\sin\frac{\varepsilon}{2} \right)^{-1} \left(e^{-q|\lambda|\|\varphi_{21}\|\sin\frac{\varepsilon}{2}(d_2-d_1)} - 1 \right) \\
&\leq C(\varepsilon)|\lambda|^{-1}
\end{aligned}$$

koersitive eşitsizliği elde edilir. Benzer bir yolla $\lambda \in D(\varepsilon, \lambda)$ için $|\lambda| \rightarrow \infty$ iken

$$\|u_{jk}(\cdot, \lambda)\|_{L_q(I_j)}^q \leq C(\varepsilon)|\lambda|^{-1} \quad j=2,3 \quad k=1,2$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikleri (8) de yerine yazarsak,

$$\|u^{(n)}\|_{L_q(-1,1)} \leq C(\varepsilon) \sum_{i=1}^6 |\lambda|^{n-m_i-\frac{1}{q}} |h_i|$$

olduğu görülür. (5) eşitsizliği elde edilir ve ispat tamamlanır.

3.4. Ana Problemin Fredholm Operatörü Olma Özelliği

3.4.1 Tanım E ve F iki Banach uzayı ve F^* da F in adjointi olsun. $T : E \rightarrow F$ lineer operatörü aşağıdaki şartları sağlarsa *Fredholm operatörü* olarak adlandırılır.

1. $R(T) = \{Tu | u \in D(T)\}$ görüntü kümesi F içinde kapalıdır.
2. $\ker T = \{u | u \in D(T) \text{ ve } Tu = 0\}$ ve
 $\text{coker} T = \{u^* | u^* \in F^* \text{ ve } \forall u \in D(T) \text{ için } u^*(Tu) = 0\}$
 kümeleri sırasıyla E ve F^* içinde sonlu boyutlu alt uzaylardır.
3. $\dim \ker T = \dim \text{coker} T$

Burada $n \geq \max \{2, \max \{m_j : j = 1, 2, \dots, 6\} + 1\}$ olmak üzere Sobolev uzaylarının direkt toplamında tanımlanan ve değerlendirilen, probleme ait lineer diferensiyel operator

$$\mathcal{L} : W_q^n(-1, d_1) \dot{+} W_q^n(d_1, d_2) \dot{+} W_q^n(d_2, 1) \rightarrow W_q^n(-1, d_1) \dot{+} W_q^n(d_1, d_2) \dot{+} W_q^n(d_2, 1) \dot{+} \mathbb{C}^6$$

$$\mathcal{L}u := (L(\lambda)u, L_1u, L_2u, L_3u, L_4u, L_5u, L_6u)$$

şeklinde ifade edilmektedir.

3.4.1 Teorem Aşağıdaki koşulların sağlandığı kabul edilsin.

1. $t_1 \neq 0, t_2 \neq 0, t_3 \neq 0; m_k \geq 0; \theta \neq 0$ olmak üzere

$$x \in [-1, d_1) \text{ için } t(x) = t_1, x \in (d_1, d_2) \text{ için } t(x) = t_2, x \in (d_2, 1] \text{ için } t(x) = t_3$$

2. $k(x), [-1, d_1) \cup (d_1, d_2) \cup (d_2, 1]$ üzerinde ölçülebilir fonksiyondur.

Bu durumda

$$\mathcal{L} : W_q^n(-1, d_1) \dot{+} W_q^n(d_1, d_2) \dot{+} W_q^n(d_2, 1) \rightarrow W_q^{n-2}(-1, d_1) \dot{+} W_q^{n-2}(d_1, d_2) \dot{+} W_q^{n-2}(d_2, 1) \dot{+} \mathbb{C}^6$$

$$\mathcal{L} : u \rightarrow \mathcal{L}u := (t(x)u''(x) + k(x)u, L_1u, L_2u, L_3u, L_4u, L_5u, L_6u)$$

lineer operatörü sınırlı ve Fredholm operatördür.

İspat

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 u = & (t(x)u''(x), u(-1), u'(-1), u(-d_1) - u(+d_1), u'(-d_1) - u'(+d_1), \\ & u(-d_2) - u(+d_2), u'(-d_2) - u'(+d_2)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 u = & (k(x)u, L_1u - u(-1), L_2u - u'(-1), L_3u - u(-d_1) + u(+d_1), \\ & L_4u - u'(-d_1) + u'(+d_1), L_5u - u(-d_2) + u(+d_2), \\ & L_6u - u'(-d_2) + u'(+d_2)) \end{aligned}$$

olmak üzere $\mathcal{L}$ operatörü $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$ formunda tekrar yazılabilir. $f \in L_q(-1, 1)$ olsun.

Buradan teoremin hipotezindeki (1) şartından ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olduğundan dolayı,

$t^{-1}(x)f(x) \in L_1(-1, 1) \cap L_q(-1, 1)$ olur. Gerçekten, Schwartz eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned} \int_{d_2}^1 |t^{-1}(x)f(x)| dx & \leq \left(\int_{d_2}^1 x^{-p}(x)f(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{d_2}^1 x^q(x)|f(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \\ & \leq Cx^{\frac{1}{p}-1} \Big|_{d_2}^1 \left(\int_{d_2}^1 x^q(x)|f(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \\ & \leq C \|f\|_{L_q(d_2, 1)} \end{aligned} \tag{9}$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$\begin{aligned}
t(x)u''(x) &= f(x), x \in (-1, d_1) \cup (d_1, d_2) \cup (d_2, 1), \\
u(-1) &= g_1, u'(-1) = g_2 \\
u(-d_1) - u(+d_1) &= g_3, u'(-d_1) - u'(+d_1) = g_4 \\
u(-d_2) - u(+d_2) &= g_5, u'(-d_2) - u'(+d_2) = g_6
\end{aligned}$$

problemnin bir çözümü

$$u(x) = \int_{-1}^x (x-y)t^{-1}(y)f(y)dy + g_1 + (x+1)g_2, \quad x \in (-1, d_1),$$

$$\begin{aligned}
u(x) &= \int_{d_1}^x (x-y)t^{-1}(y)f(y)dy \\
&+ \int_{-1}^{d_1} (x-y)t^{-1}(y)f(y)dy + g_1 + g_2 - g_3 \\
&+ \left(\int_{-1}^{d_1} t^{-1}(y)f(y)dy + g_2 - g_4 \right) (x-d_1), \quad x \in (d_1, d_2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u(x) &= \int_{d_2}^x (x-y)t^{-1}(y)f(y)dy + \int_{d_1}^{d_2} (x-y)t^{-1}(y)f(y)dy \\
&+ \int_{-1}^{d_1} (x-y)t^{-1}(y)f(y)dy + g_1 + g_2 - g_3 \\
&+ \left(\int_{-1}^{d_1} t^{-1}(y)f(y)dy + g_2 - g_4 \right) (d_2 - d_1) - g_5 \\
&+ \left(\int_{d_1}^{d_2} t^{-1}(y)f(y)dy + 2 \int_{-1}^{d_1} t^{-1}(y)f(y)dy + g_2 - g_4 - g_6 \right) (x-d_2), \quad x \in (d_2, 1)
\end{aligned} \tag{10}$$

formuna sahiptir. Eğer

$$f \in W_q^{l-2}(-1, d_1) + W_q^{l-2}(d_1, d_2) + W_q^{l-2}(d_2, 1)$$

ise (10) denklemini gösterir ki

$$u''(x) = t^{-1}(x)f(x), u^{(p+2)}(x) = t^{-1}(x)f^{(p)}(x) \quad 0 \leq p \leq l-2$$

olur. Dolayısıyla hipotezdeki (1) şartı gereği (9) eşitsizliği ve Teorem 3.3.1 gereği

$$\mathcal{L}_1 : W_q^n(-1, d_1) \dot{+} W_q^n(d_1, d_2) \dot{+} W_q^n(d_2, 1) \rightarrow W_q^{n-2}(-1, d_1) \dot{+} W_q^{n-2}(d_1, d_2) \dot{+} W_q^{n-2}(d_2, 1) \dot{+} \mathbb{C}^6$$

şeklinde tanımlanan $\mathcal{L}_1$ operatörü izomorfizmdir. Ayrıca açıktır ki $\mathcal{L}_2$ lineer operatörü

$$\mathcal{L}_2 : W_q^n(-1, d_1) \dot{+} W_q^n(d_1, d_2) \dot{+} W_q^n(d_2, 1) \rightarrow W_q^{n-2}(-1, d_1) \dot{+} W_q^{n-2}(d_1, d_2) \dot{+} W_q^{n-2}(d_2, 1) \dot{+} \mathbb{C}^6$$

şeklinde tanımlıdır.

Sonuç olarak Fredholm operatör perturbasyon teoremini $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$ operatörüne uygulayabiliriz (Kato, 1966). Buradan $\mathcal{L}$ operatörünün Fredholm olduğu elde edilir. Diğer taraftan $\mathcal{L}$ operatörünün sınırlı olduğu açıktır. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

3.5. Problemin Esas Kısımının İzomorfizmi ve Koersitivliği

Bu kısımda (1) - (4) probleminin iç noktaları bulundurmeyen halini göz önüne alacağız. Buna göre

$$L_0(\lambda)u := t(x)u''(x) - \lambda^2 u(x) = f(x), \quad x \in [-1, d_1) \cup (d_1, d_2) \cup (d_2, 1] \quad (11)$$

$$L_{01}u := \alpha_1 u^{(m_1)}(-1) + \beta_1 u^{(m_1)}(d_1 - 0) = h_1 \quad (12)$$

$$L_{02}u := \alpha_2 u^{(m_2)}(d_2 + 0) + \beta_2 u^{(m_2)}(1) = h_2 \quad (13)$$

$$L_{0j}u := \alpha_j u^{(m_j)}(d_k - 0) + \beta_j u^{(m_j)}(d_k + 0) = h_j, \quad j = 3, 4 \text{ için } k = 1 \text{ ve } j = 5, 6 \text{ için } k = 2 \quad (14)$$

problemini inceleyeceğiz. Bu probleme karşılık gelen diferensiyel operator

$$\tilde{\mathcal{L}}_0 u := (L_0(\lambda)u, L_{01}(\lambda)u, L_{02}, L_{03}, L_{04}, L_{05}, L_{06})$$

şeklindedir.

3.5.1 Teorem Aşağıda verilen şartlar sağlanıyor olsun.

1. $t_1 \neq 0, t_2 \neq 0, t_3 \neq 0; m_k \geq 0; \theta \neq 0$
2. $n \geq \max \{2, \max \{m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6\} + 1\}$

Her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $\rho_\varepsilon > 0$ vardır öyle ki $\lambda \in D(\varepsilon, \lambda), |\lambda| > \rho_\varepsilon$ eşitsizliğini sağlayan tüm λ kompleks sayıları için

$$\tilde{\mathcal{L}}_0(\lambda): W_q^n(-1, d_1) \dot{+} W_q^n(d_1, d_2) \dot{+} W_q^n(d_2, 1) \rightarrow W_q^{n-2}(-1, d_1) \dot{+} W_q^{n-2}(d_1, d_2) \dot{+} W_q^{n-2}(d_2, 1) \dot{+} \mathbb{C}^6$$

şeklinde tanımlanan $\tilde{\mathcal{L}}_0(\lambda)$ operatörü bir izomorfizmdir ve bu λ kompleks sayıları için aşağıdaki koersitiv eşitsizliği (11)-(14) probleminin çözümü için sağlanır.

$$\sum_{k=0}^n |\lambda|^{n-k} \|u\|_{W_q^k} \leq C(\varepsilon) \left(\|f\|_{W_q^{n-2}} + |\lambda|^{n-2} \|f\|_{L_{q,0}} + \sum_{j=1}^6 |\lambda|^{n-m_j-\frac{1}{q}} |h_j| \right). \quad (15)$$

İspat

$$\tilde{\mathcal{L}}_0(\lambda): W_q^n(-1, d_1) \dot{+} W_q^n(d_1, d_2) \dot{+} W_q^n(d_2, 1) \rightarrow W_q^{n-2}(-1, d_1) \dot{+} W_q^{n-2}(d_1, d_2) \dot{+} W_q^{n-2}(d_2, 1) \dot{+} \mathbb{C}^6$$

olarak verilen $\tilde{\mathcal{L}}_0(\lambda)$ operatörünün sürekli olduğu açıktır.

$(f(x), h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6) \in W_q^{n-2}(-1, d_1) \dot{+} W_q^{n-2}(d_1, d_2) \dot{+} W_q^{n-2}(d_2, 1) \dot{+} \mathbb{C}^6$ için herhangi

elemanlar olsunlar. (11)-(14) probleminin bir $u(x, \lambda)$ çözümü

$$u(x, \lambda) = u_1(x, \lambda) + u_2(x, \lambda) + u_3(x, \lambda)$$

şeklinde aranacaktır. Öyle ki burada,

$$\begin{aligned} u_1(x, \lambda) &= u_{11}(x, \lambda) + u_{12}(x, \lambda); \\ u_2(x, \lambda) &= u_{21}(x, \lambda) + u_{22}(x, \lambda); \\ u_3(x, \lambda) &= u_{31}(x, \lambda) + u_{32}(x, \lambda) \end{aligned}$$

şeklindedir. $f_j(x) (j=1,2,3)$ ile $f(x)$ fonksiyonunun $I_j (j=1,2,3)$ aralığındaki kısıtlanması gösterilecektir. $\tilde{f}_j(x) \in W_q^{n-2}(\mathbb{R})$ ise $f_j(x) \in W_q^{n-2}(I_j)$ fonksiyonunun bir genişlemesi olsun. Burada $T_j f_j := \tilde{f}_j : W_q^{n-2}(I_j) \rightarrow W_q^{n-2}(\mathbb{R})$ genişleme operatörü $j=1,2,3$ için sınırlıdır. Öncelikle

$$t(x)u''(x) - \lambda^2 u(x) = \tilde{f}_j(x), x \in \mathbb{R} \quad j=1,2,3$$

denklemlerini göz önüne alacağız. (Yakubov ve Yakubov, 1999) kaynağındaki Teorem 3.2.1 uygulanırsa görülür ki bu denklem $\tilde{u}_{j1}(x, \lambda) \in W_q^n(\mathbb{R})$ şeklinde tek bir çözüme sahiptir ve $u_{j1}(x, \lambda)$ için (yani $\tilde{u}_{j1}(x, \lambda)$ in I_j aralığındaki kısıtlanması)

$$\sum_{k=0}^n |\lambda|^{n-k} \|u_{j1}(x, \lambda)\|_{W_q^k(I_j)} \leq C(\varepsilon) \left(\|f\|_{W_q^{n-2}(I_j)} + |\lambda|^{n-2} \|f\|_{L_q(I_j)} \right), j=1,2,3 \quad (16)$$

eşitsizliği $\lambda \in D(\varepsilon, \lambda)$ olan tüm kompleks sayılar için geçerlidir. Sonuç olarak,

$$u_{10}(x, \lambda) := \begin{cases} u_{11}(x, \lambda), & x \in (-1, d_1) \\ u_{21}(x, \lambda), & x \in (d_1, d_2) \\ u_{31}(x, \lambda), & x \in (d_2, 1) \end{cases}$$

fonksiyonu (11) denklemini sağlar. Çözüm açısından sınır değer problemi

$$L_0(\lambda)u := t(x)u''(x) - \lambda^2 u(x) = f(x), x \in [-1, d_1) \cup (d_1, d_2) \cup (d_2, 1]$$

$$L_{0j}u = h_j - L_j u, \quad j=1,2,3,4,5,6$$

şeklinde kurulur. Teorem 3.3.1 gereği bu problem $u_{20}(x, \lambda) := u_{12}(x, \lambda) + u_{22}(x, \lambda) + u_{32}(x, \lambda)$ şeklinde tek bir çözüme sahiptir ve

$\lambda \in D(\varepsilon, \lambda)$ olan tüm kompleks sayılar için $W_q^n(-1, d_1) \dot{+} W_q^n(d_1, d_2) \dot{+} W_q^n(d_2, 1)$ uzayına aittir ve bu λ kompleks sayıları için

$$\sum_{k=0}^n |\lambda|^{n-k} \|u_{20}(x, \lambda)\|_{q,k} \leq C(\varepsilon) \sum_{j=1}^6 |\lambda|^{n-m_j-\frac{1}{q}} (|h_j| + |L_{0j}u_{10}|) \quad (17)$$

eşitsizliği sağlanır. Teorem 3.3.1 uygulanır ve (Yakubov ve Yakubov, 1999) Teorem 1.7.7/2 göz önüne alınırsa tüm $\lambda \in D(\varepsilon, \lambda)$ kompleks sayıları ve $n \geq \max\{2, \max\{m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6\} + 1\}$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\begin{aligned} |\lambda|^{n-m_j-\frac{1}{q}} |L_{0j}u_{10}| &\leq C |\lambda|^{n-m_j-\frac{1}{q}} \|u_{10}\|_{C^{m_j}[-1, d_1] + C^{m_j}[d_1, d_2] + C^{m_j}[d_2, 1]} \\ &\leq C (|\lambda| \|u_{10}\|_{q,0} + \|u_{10}\|_{q,n}) \\ &\leq C (\|f\|_{q,n-2} + |\lambda|^{n-2} \|f\|_{q,0}) \end{aligned} \quad (18)$$

(16) ve (17) den

$$\sum_{k=0}^n |\lambda|^{n-k} \|u_{20}(x, \lambda)\|_{q,k} \leq C(\varepsilon) \left(\|f\|_{q,n-2} + |\lambda|^{n-2} \|f\|_{q,0} + \sum_{j=1}^6 |\lambda|^{n-m_j-\frac{1}{q}} |h_j| \right) \quad (19)$$

eşitsizliği elde edilir. Kolayca görülür ki

$$u(x, \lambda) = u_{10}(x, \lambda) + u_{20}(x, \lambda) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 u_{ij}(x, \lambda)$$

şeklinde tanımlanan $u(x, \lambda)$ fonksiyonu ele alınan (11)-(14) probleminin çözümüdür. (16) ve (19) eşitsizlikleri göz önüne alındığında gerekli eşitsizlik olan (15) çözüm için geçerlidir. Dolayısıyla (16) eşitsizliğinden dolayı çözümün tekliği açıktır. Burada Teorem 3.4.1 gereği

$$\mathcal{L} : W_q^n(-1, d_1) \dot{+} W_q^n(d_1, d_2) \dot{+} W_q^n(d_2, 1) \rightarrow W_q^{n-2}(-1, d_1) \dot{+} W_q^{n-2}(d_1, d_2) \dot{+} W_q^{n-2}(d_2, 1) \dot{+} \mathbb{C}^6$$

operatörü Fredholm olur. Operatörün izomorfizm olma gerçeği ise Fredholm olmasından dolayı açıktır. Bu da ispatı tamamlar.

3.6.Ana Problemin İzomorfizmi ve Koersitivliği

Bu bölümde ana problem olan (1) - (4) problemi ele alınacaktır.

3.6.1 Teorem

1. $t_1 \neq 0, t_2 \neq 0, t_3 \neq 0, m_k \geq 0$ ve $\theta \neq 0$
2. $n \geq \max \{2, \max \{m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6\} + 1\}$

olsun. Buna göre, herhangi $\varepsilon > 0$ için öyle bir $\gamma_\varepsilon > 0$ vardır öyle ki $\lambda \in D(\varepsilon, \lambda)$ olan tüm kompleks sayılar ve $|\lambda| > \gamma_\varepsilon$ için

$$\mathcal{L}u := (L(\lambda)u, L_1(\lambda)u, L_2, L_3, L_4, L_5, L_6)$$

$$\mathcal{L} : W_q^n(-1, d_1) \dot{+} W_q^n(d_1, d_2) \dot{+} W_q^n(d_2, 1) \rightarrow W_q^{n-2}(-1, d_1) \dot{+} W_q^{n-2}(d_1, d_2) \dot{+} W_q^{n-2}(d_2, 1) \dot{+} \mathbb{C}^6$$

operatörü bir izomorfizmdir ve bu λ kompleks sayıları için aşağıdaki koersitiv eşitsizliği (1)-(4) ana problemi için sağlar.

$$\sum_{k=0}^n |\lambda|^{n-k} \|u(x, \lambda)\|_{q,k} \leq C(\varepsilon) \left(\|f\|_{q,n-2} + |\lambda|^{n-2} \|f\|_{q,0} + \sum_{j=1}^6 |\lambda|^{n-m_j-\frac{1}{q}} |h_j| \right) \quad (20)$$

Burada $C(\varepsilon)$ sadece ε değerine bağlı olan bir sabittir.

İspat $(f(x), h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6) \in W_q^{n-2}(-1, d_1) \dot{+} W_q^{n-2}(d_1, d_2) \dot{+} W_q^{n-2}(d_2, 1) \dot{+} \mathbb{C}^6$ olsun.

Kabul edelim ki (1)-(4) probleminin bu elemanlara karşılık gelen $u(x, \lambda)$ şeklinde bir çözümü var olsun. Bu durumda bu çözüm aşağıdaki eşitlikleri sağlar.

$$L_0(\lambda)u = L(\lambda)u - k(x)u$$

$$L_{0j}u = L_ju - A_ju, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

$$A_ju = \sum_{s=1}^{n_j} a_{js} u^{(m_j)}(x_{js})$$

(11) - (14) problemine Teorem 3.5.1 uygulanırsa bu çözüm için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n |\lambda|^{n-k} \|u(x, \lambda)\|_{q,k} &\leq C(\varepsilon) \left(\|L(\lambda)u - k(x)u\|_{q,n-2} + |\lambda|^{n-2} \|L(\lambda)u - k(x)u\|_{q,0} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^6 |\lambda|^{n-m_j-\frac{1}{q}} |L_ju - A_ju| \right) \\ &\leq C(\varepsilon) \left(\|f\|_{q,n-2} + |\lambda|^{n-2} \|f\|_{q,0} + \|k(x)u\|_{q,n-2} + |\lambda|^{n-2} \|k(x)u\|_{q,0} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^6 |\lambda|^{n-m_j-\frac{1}{q}} |h_j| + \sum_{j=1}^6 |\lambda|^{n-m_j-\frac{1}{q}} |A_ju| \right) \end{aligned} \quad (21)$$

Şimdi μ

$$\mu := \min \left\{ \min_{x_{ij} \in (-1, d_1)} \{-1 + x_{ij}, d_1 - x_{ij}\}, \min_{x_{ij} \in (d_1, d_2)} \{d_1 + x_{ij}, d_2 - x_{ij}\}, \min_{x_{ij} \in (d_2, 1)} \{d_2 + x_{ij}, 1 - x_{ij}\} \right\}$$

şartını sağlayan herhangi reel sayı olsun. (Voitovich, Katsenelbaum ve Sivov, 1997)

kaynağındaki eşitsizliği uygulayarak, $\zeta_\mu(x) \in C_0^\infty[-1, 1]$ olan

$$x \in [-1 + \mu, d_1 - \mu] \cup [d_1 + \mu, d_2 - \mu] \cup [d_2 + \mu, 1 - \mu] \text{ için } \zeta_\mu(x) = 1$$

şeklinde bir fonksiyon kurulabilir. O halde

$$x \in \left[-1, -1 + \frac{\mu}{2}\right] \cup \left[d_1 - \frac{\mu}{2}, d_1 + \frac{\mu}{2}\right] \cup \left[d_2 - \frac{\mu}{2}, d_2 + \frac{\mu}{2}\right] \cup \left[1 - \frac{\mu}{2}, 1\right] \text{ için } \zeta_\mu(x) = 0$$

ve her $x \in [-1, 1]$ için $0 \leq \zeta_\mu(x) \leq 1$ olur. Buradan,

$$|A_ju| \leq C \left\| \left(\zeta_\mu u \right)^{(m_j)} \right\|_{C[-1,1]} \quad (22)$$

eşitsizliği yazılabilir. (Kandemir, Mukhtarov ve Yakubov, 2009) kaynağındaki Teorem 3.10.4 gereğince

$$u \in W_q^n(-1, d_1) \dot{+} W_q^n(d_1, d_2) \dot{+} W_q^n(d_2, 1)$$

için

$$|\lambda|^{n-m_j-\frac{1}{q}} \left\| u^{(m_j)} \right\|_{C[-1,1]} \leq C \left(\|u\|_{q,n} + |\lambda|^n \|u\|_{q,0} \right) \quad (23)$$

eşitsizliği sağlanır. Teorem 3.5.1 gereğince (22) ve (23) den $\lambda \in D(\varepsilon, \lambda)$ için

$$\begin{aligned} |\lambda|^{n-m_j-\frac{1}{q}} |A_j u| &\leq C |\lambda|^{n-m_j-\frac{1}{q}} \left\| (\zeta_\mu u)^{m_j} \right\|_{C[-1,1]} \\ &\leq C \left(\|\zeta_\mu u\|_{q,n} + |\lambda|^n \|\zeta_\mu u\|_{q,0} \right) \\ &\leq C(\varepsilon) \left(\|L_0(\lambda)(\zeta_\mu u)\|_{q,n-2} + |\lambda|^{n-2} \|L_0(\lambda)(\zeta_\mu u)\|_{q,0} \right) \\ &\leq C(\varepsilon) \left(\|L_0(\lambda)\|_{q,n-2} + |\lambda|^{n-2} \|L_0(\lambda)\|_{q,0} + \|k(x)u\|_{q,n-2} \right. \\ &\quad \left. + |\lambda|^{n-2} \|k(x)u\|_{q,0} + \sum_{k=0}^{n-1} |\lambda|^{n-1-k} \|u\|_{q,k} \right) \\ &\leq C(\varepsilon) \left(\|f\|_{q,n-2} + |\lambda|^{n-2} \|f\|_{q,0} + \|k(x)u\|_{q,n-2} \right. \\ &\quad \left. + |\lambda|^{n-2} \|k(x)u\|_{q,0} + \sum_{k=0}^{n-1} |\lambda|^{n-1-k} \|u\|_{q,k} \right) \end{aligned} \quad (24)$$

eşitsizliği sağlanmaktadır. Her $u \in W_q^n(-1, d_1) \dot{+} W_q^n(d_1, d_2) \dot{+} W_q^n(d_2, 1)$ ve her $k = 0, 1, \dots, n-1$ için öyle bir pozitif C sabiti vardır ki

$$\|u\|_{q,k} \leq \|u\|_{q,k}^{\frac{k}{k+1}} \|u\|_{q,0}^{\frac{1}{k+1}} \quad (25)$$

eşitsizliği sağlanır.

$$a > 0, b > 0, \gamma > 0, 1 < p, q < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

olmak üzere $a = \|u\|_{q,k}^{\frac{k}{k+1}}, b = \|u\|_{q,0}^{\frac{1}{k+1}}, p = \frac{k+1}{k}$ için

$$ab \leq \frac{1}{p}(\gamma a)^p + \frac{1}{q}\left(\frac{b}{\gamma}\right)^q$$

olarak ifade edilen Young eşitsizliği, (25) eşitsizliğinin sağ tarafı için uygulanırsa

$$\|u\|_{q,k} \leq \left(\frac{k}{k+1} \gamma^{\frac{k+1}{k}} \|u\|_{q,k+1} + \frac{1}{k+1} \gamma^{-(k+1)} \|u\|_{q,0} \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

eşitsizliği elde edilir.

$$M(\gamma) = \max \left(C \frac{k}{k+1} \gamma^{\frac{k+1}{k}}, k = 0, 1, \dots, n-1 \right),$$

$$N(\gamma) = \max \left(C \frac{1}{k+1} \gamma^{-(k+1)}, k = 0, 1, \dots, n-1 \right)$$

gösterimleri kullanılırsa buradan (24) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} |\lambda|^{n-m_j - \frac{1}{q}} |A_j u| &\leq C(\varepsilon) \left(\|f\|_{q,n-2} + |\lambda|^{n-2} \|f\|_{q,0} \right) \\ &\quad + C(\varepsilon) \sum_{k=0}^{n-1} |\lambda|^{n-1-k} \left(M(\gamma) \|u\|_{q,k+1} + N(\gamma) \|u\|_{q,0} \right) \\ &\leq \left(C(\varepsilon) M(\gamma) + T(\gamma, \varepsilon) |\lambda|^{-1} \right) \sum_{k=0}^n |\lambda|^{n-k} \|u\|_{q,k} \end{aligned} \quad (26)$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $T(\gamma, \varepsilon)$ sadece γ ve ε a bağlı olan bir sabittir. (Yakubov ve Yakubov, 1999) kaynağındaki Teorem 1.7.7/2 yi göz önüne alınırsa, herhangi $\tau > 0$ için

$$\|u\|_{q,k} \leq \tau \|u\|_{q,k+1} + C(\tau) \|u\|_{q,0}$$

olduğu elde edilir. (26) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} & \|k(x)u\|_{q,n-2} + |\lambda|^{n-2} \|k(x)u\|_{q,0} + \sum_{j=1}^6 |\lambda|^{n-m_j-\frac{1}{q}} |A_j u| \\ & \leq C(\varepsilon) \left(\|f\|_{q,n-2} + |\lambda|^{n-2} \|f\|_{q,0} \right) + \tau \left(\|u\|_{q,k+1} + |\lambda|^{n-2} \|u\|_{q,0} \right) + C(\tau) |\lambda|^{n-2} \|u\|_{q,0} \\ & + \left(C(\varepsilon) M(\gamma) + T(\gamma, \varepsilon) |\lambda|^{-1} \right) \sum_{k=0}^n |\lambda|^{n-k} \|u\|_{q,k} + C \sum_{j=1}^6 |\lambda|^{n-m_j-\frac{1}{q}} \|u\|_{q,k} \\ & \leq C(\varepsilon) \left(\|f\|_{q,n-2} + |\lambda|^{n-2} \|f\|_{q,0} \right) + \left(C(\varepsilon) M(\gamma) + T(\gamma, \varepsilon) |\lambda|^{\frac{-1}{q}} \right) \sum_{k=0}^n |\lambda|^{n-k} \|u\|_{q,k} \end{aligned} \quad (27)$$

olduğu elde edilir. (27) eşitsizliği (21) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n |\lambda|^{n-k} \|u(x, \lambda)\|_{q,k} & \leq C(\varepsilon) \left(\|f\|_{q,n-2} + |\lambda|^{n-2} \|f\|_{q,0} + \sum_{j=1}^6 |\lambda|^{n-m_j-\frac{1}{q}} |h_j| \right) \\ & + \left(C(\varepsilon) M(\gamma) + T(\gamma, \varepsilon) |\lambda|^{\frac{1}{q}} \right) \sum_{k=0}^n |\lambda|^{n-k} \|u\|_{q,k} \end{aligned}$$

olduğu görülür. Sabit $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$C(\varepsilon) M(\gamma) + T(\gamma, \varepsilon) |\lambda|^{\frac{1}{q}} < 1$$

olacak şekilde $\gamma > 0$ değeri çok küçük ve $|\lambda|$ istenildiği kadar büyük seçilebilir. Bu sebeple, $\lambda \in D(\varepsilon, \lambda)$ için (20) eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikten, (1) - (4) probleminin çözümünün tekliği görülür. Yani $\mathcal{L}$ operatörü birebirdir. Dolayısıyla Teorem 3.4.1 gereğince

$$\mathcal{L} : W_q^n(-1, d_1) \dot{+} W_q^n(d_1, d_2) \dot{+} W_q^n(d_2, 1) \rightarrow W_q^{n-2}(-1, d_1) \dot{+} W_q^{n-2}(d_1, d_2) \dot{+} W_q^{n-2}(d_2, 1) \dot{+} \mathbb{C}^6$$

şeklinde tanımlı $\mathcal{L}$ operatörünün Fredholm operatörü olduğu sonucuna varılır. Böylece ispat tamamlanır.

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde, ikinci mertebeden süreksiz katsayılı diferensiyel denklem ile iki noktada süreksizliğe sahip bir sınır değer probleminin çözülebilirliği araştırılmıştır. İki tane süreksizlik noktası olması nedeniyle sınır şartlarına dört tane geçiş şartları ilave edilmiştir. Ayrıca sınır şartlarında, aralıklara ait sonlu sayıda iç nokta şartları da bulunmaktadır. Bu nedenle göz önüne alınan problem gerek süreksizlik noktaları bulundurması gerek geçiş şartlarına sahip olması ve gerekse iç nokta şartlarını içermesi bakımından ayırt edici, özgün ve yeni bir problemidir.

Araştırılan bu yeni problemin spektral özellikleri açısından çözülebilirliğinin incelenmesi yanında problemin ürettiği diferensiyel operatörün, Sobolev uzaylarının direkt toplamalarında koersitivliği ve Fredholm operatörü olma gibi özelliklere ait teoremler ispat edilmiştir.

Araştırılan bu probleme farklı özellik ve şartların katılmasıyla çeşitli sınır değer problemleri ve dolayısıyla çeşitli diferensiyel operatörler elde etmek mümkündür. Örneğin;

1. Diferensiyel denklem daha yüksek mertebeden alınabilir.
2. Diferensiyel denkleme herhangi lineer operatör, eliptik operatör veya parabolik operatörler ilave edilebilir.
3. Süreksizlik noktaları istenildiği kadar çoğaltılabilir ve dolayısıyla geçiş şartları çoğaltılabilir.
4. Sınır şartlarına lineer fonksiyoneller ilave edilebilir.
5. Problemde göz önüne alınan çalışma uzayları olarak, interpolasyon uzayları gibi farklı analiz uzayları dikkate alınarak çalışmalar çeşitlendirilebilir.
6. Problemdeki fonksiyonların tanım aralığı özelleştirilebilir veya genelleştirilebilir.

Yukarıda ifade edilen farklılıkların herhangi birinin dikkate alınmasıyla kurulabilecek olan sınır değer problemleri farklı, yeni ve özgün problemler olabilecektir. Özellikle farklı

Çalışma uzayları göz önüne alınırsa uzayın özelliklerinden kaynaklı norm yapılarına göre çok önemli özgün problemler kurulabilir. Bu anlamda oluşturulabilecek problemlerin çalışılması suretiyle yeni araştırma alanları, yeni makaleler veya yeni tezler üretilebilecektir.



KAYNAKLAR

- Adams, R. A. (1975). *Sobolev spaces*. New York: Academic Press.
- Adams, R. A. and Fournier, J. J. (2003). *Sobolev spaces*. Elsevier.
- Al-Gwaiz, M. A. (2008). *Sturm-Liouville theory and its applications* (Vol. 264). Berlin: Springer.
- Amrein, W. O., Hinz, A. M., & Pearson, D. B. (Eds.). (2005). *Sturm-Liouville theory: past and present*. Germany: Springer Science & Business Media.
- Atkinson, K. and Han, W. (2005). *Theoretical numerical analysis* (Vol. 39, pp. xviii+-576). Berlin: Springer.
- Aydemir, K. and Mukhtarov, O. S. (2016). Qualitative analysis of eigenvalues and eigenfunctions of one boundary value-transmission problem. *Boundary Value Problems*, 2016, 1-16.
- Bergh, J. and Löfström, J. (1976). *Interpolation Spaces: An Introduction*. Springer Book Archive-Mathematics.
- Brudnyi, Y. A. and Krugljak, N. Y. (1991). *Interpolation Functors and Interpolation Spaces*. Elsevier.
- Burenkov, V. I. (1998). *Sobolev spaces on domains* (Band 137). Leipzig: Teubner Verlagsgesellschaft.
- Cohn, D. L. (2013). *Measure theory* (Vol. 5). New York: Birkhäuser.
- Diening, L., Harjulehto, P., Hästö, P. and Ruzicka, M. (2011). *Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents*. Springer.
- Griffel, D. H. (1981). *Applied Functional Analysis*, Chichester: Halsted Press.
- Hajlasz, P., *Analysis I*, University of Pittsburgh Lecture Notes, USA.
- Hunter, J.K. and Nachtergaele, B. (2001). *Applied Analysis*, USA: World Scientific Publishing Company
- Kandemir, M., Mukhtarov, O. and Yakubov, Y. (2009). Irregular boundary value problems with discontinuous coefficients and the eigenvalue parameter. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 6, 317-338.
- Kandemir, M. (2017). Asymptotic distribution of eigenvalues for fourth-order boundary value problem with discontinuous coefficients and transmission conditions. *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics*, 66(1), 133-152.

- Kandemir M. and Muhtaroglu O., (2018). Solvability Of Fourth-Order Sturm-Liouville Problems With Abstract Linear Functionals In Boundary-Transmission Conditions, *Mathematical Methods In The Applied Sciences*, 41(10), 3643-3652.
- Kandemir, M. (2021). *Diferensiyel denklemler* (2. Baskı). Ankara: Pegem Akademi
- Kato, T. (1966). *Perturbation theory for linear operators* (Vol. 132). Berkeley: Springer Science and Business Media.
- Krein, S. (1971). *Linear Differential Equations in Banach Space*. Rhode Island: American Mathematical Society.
- Kreyszig, E. (1991). *Introductory functional analysis with applications* (Vol. 17). John Wiley and Sons.
- Luikov, A. V., Mikhailov, Y. A. (1965). *Theory of energy and mass transfer*. Oxford: Pergamon Press.
- Lunardi, A. (2009). *Interpolation Theory* (Vol. 9). Pisa: Edizioni della normale.
- Mukhtarov, O. S. (1994). Discontinuous boundary-value problem with spectral parameter in boundary conditions. *Turkish Journal of Mathematics*, 18(2), 183-192.
- Mukhtarov, O. and Demir, H. (1999). Coerciveness of the discontinuous initial boundary value problem for parabolic equation. *Israel Journal of Mathematics*, (114), 239–252.
- Muhtarov, O. and Yakubov, S. (2002). Problems for ordinary differential equations with transmission conditions. *Applicable analysis*, 81(5), 1033-1064.
- Naimark, M. A. (1967) , *Linear Differential Operators, Part 1: Elementary Theory of Linear Differential Operators*, Moscow: Mir Publishers
- Orhan, E. ve Seven, E. (2022). *Teoriden Uygulamaya Fizik ve Matematik Alanında Akademik Çalışmalar II*. Ankara: İksad Yayınevi.
- Olver, F. W. J. (Ed.). (2010). *NIST handbook of mathematical functions*. USA: Cambridge University Press.
- Penteker, J. (2015). *Lecture Notes Sobolev Spaces*. Linz: Johannes Kepler University.
- Rasulov, M. L. (1967). *Methods of contour integration*. Amsterdam: North Holland Publishing Company.
- Royden, H. L. and Fitzpatrick, P. (2010). *Real analysis* (Vol. 4). China Machine Press.
- Rudin, W. (1991). *Functional analysis 2nd ed. International Series in Pure and Applied Mathematics*. McGraw-Hill, Inc., New York.

- Shakhmurov, V. B. (2004). Coercive boundary value problems for regular degenerate differential-operator equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 292(2), 605-620.
- Shakhmurov, V. (2011). Free boundary value problems for abstract elliptic equations and applications. *Chinese Annals of Mathematics Series B* 32, 749–770
- Tartar, L. (2007). *An introduction to Sobolev spaces and interpolation spaces* (Vol. 3). Springer Science and Business Media.
- Titeux, I. and Yakubov, Y. (1997). Completeness of root functions for thermal conduction in a strip with piecewise continuous coefficients. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 7(07), 1035-1050.
- Titeux, I. & Yakubov, Y. (2003). *Application of Abstract Differential Equations to Some Mechanical Problems*. Springer-Science+Business Media, B.V.
- Triebel, H. (1978). *Interpolation theory, Function spaces, Differential Operators*. Amsterdam: North Holland Publishing Company.
- Voitovich, N. N., Katsenelbaum, B. Z. and Sivov, A. N. (1997). *Generalized Method of Eigen-vibration in the Theory of Diffraction*, Nauka, Moscow.
- Yakubov, S. (1994). *Completeness of root functions of regular differential operators* (Vol. 71). England: Longman Scientific and Technical Press.
- Yakubov, Y. and Yakubov, S. (1999). *Differential-operator equations: ordinary and partial differential equations* (Vol. 103). CRC Press.
- Zorich, V. A., & Cooke, R. (2004). *Mathematical Analysis I* Mathematical Analysis

ÖZGEÇMİŞ

Adı-Soyadı : Tevhide BALTÜRK

Bilimsel Faaliyetler (Yayınlar, Bildiriler, Katıldığı Projeler)

1-) Baltürk, T. and Kandemir, M. (2016). Asymptotic Distrubution of Eigenvalues for Fourth-Order Boundary Value Problem with Transmission Conditions, *International Conference on Mathematics and Mathematics Education (ICMME-2016)*, 12-14 May, Elazığ, Türkiye, Book of Abstracts, p. 277-278.

2-) Baltürk, T. and Kandemir, M. (2023). Spectral Properties of Discontinuous Boundary Value Problem with Transmission Conditions and Manypoint Singularities. *Turkish Journal of Mathematics and Computer Science*, 15(2), 258-269.