

T.C.
SİİRT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DİKEY BULAŞMA İLE İKİ FARKLI SALGININ YAYILIMINI TEMSİL EDEN
KESİRLİ BİR MATEMATİKSEL MODEL

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Süphan ÇELİKBAŞ
(223114020)

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Seda İĞRET ARAZ

Ocak-2024
SİİRT

TEZ KABUL VE ONAYI

Süphan ÇELİKBAŞ tarafından hazırlanan “Dikey Bulaşma ile İki Farklı Salgının Yayılımını Temsil Eden Kesirli Bir Matematiksel Model” adlı tez çalışması 12/01/2024 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği ile Siirt Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Başkan

Prof. Dr. Ali AKGÜL

Danışman

Doç. Dr. Seda İĞRET ARAZ

Üye

Doç. Dr. Mahmut MODANLI

İmza

.....

.....

.....

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Doç. Dr. Harun BEKTAŞ
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖN SÖZ

Yüksek lisans eğitimim ve tez çalışmamın her aşamasında desteğini, tecrübesini ve ilgisini esirgemeyen, bilgi ve deneyimleriyle beni sürekli aydınlatan, hoşgörüsü, güler yüzü ve sabrı ile her daim tam desteğini üzerimde hissettiren değerli tez danışmanım ve hocam Doç. Dr. Seda İĞRET ARAZ'a, Siirt Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı hocalarına, desteğini sürekli hissettiren eşime, hayatım boyunca koşulsuz sevgilerini esirgemeyen, tüm eğitim hayatım boyunca maddi ve manevi her türlü desteklerini seferber eden canım aileme sonsuz teşekkür ederim.

Süphan ÇELİKBAŞ
SİİRT-2024



İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖN SÖZ	iii
İÇİNDEKİLER	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ	v
KISALTMALAR VE SİMGELER LİSTESİ.....	vi
ÖZET	vii
ABSTRACT.....	viii
1. GİRİŞ	1
2. KURAMSAL TEMELLER	8
2.1. Bazı Özel Fonksiyonlar	8
2.2. Kesirli türev ve İntegral Tanımları	10
3. MATERYAL VE YÖNTEM.....	16
3.1. Adams-Bashforth Metodu.....	16
3.1.1. Uygulamalar.....	17
3.2. Kesirli diferansiyel denklemler için Lagrange Polinomuna Dayalı Nümerik Metot.....	18
3.2.1. Atangana-Baleanu kesirli türevli Cauchy problemi için nümerik algoritma	18
3.2.2. Caputo-Fabrizio kesirli türevli Cauchy problemi için nümerik algoritma ...	20
3.2.3. Caputo kesirli türevli Cauchy problemi için nümerik algoritma	22
3.2.4. Uygulamalar.....	23
3.3. Parçalı diferansiyel denklemler	28
4. BULGULAR VE TARTIŞMA.....	34
4.1. Dikey bulaş modeli	34
4.2. Dikey bulaş modelinin çözümü için bir nümerik metot	35
4.2.1. Dikey bulaş modelinin çözümü	36
4.2.2. Atangana-Baleanu türevli dikey bulaş modelinin çözümü	39
4.2.3. Caputo türevli dikey bulaş modelinin çözümü	45
4.2.4. Caputo-Fabrizio türevli dikey bulaş modelinin çözümü.....	50
4.3. İki hastalığın dikey bulaşını temsil eden bir parçalı diferansiyel denklem.....	54
4.3.1. Uygulamalar.....	64
5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	73
6. KAYNAKLAR	74
ÖZGEÇMİŞ	76

ŞEKİLLER DİZİNİ

	Sayfa
Şekil 2.1. Gama Fonksiyonu.....	9
Şekil 2.2. Mittag Leffler	10
Şekil 3.1. Birinci mertebeden Cauchy problemi için simülasyon	18
Şekil 3.2. Farklı mertebeden AB türevli Cauchy problemi için simülasyon	25
Şekil 3.3. Farklı mertebeden α değerleri için Caputo türevli Cauchy problemi için simülasyon.....	26
Şekil 3.4. Farklı mertebeden α değerleri için CF türevli Cauchy problemi için simülasyon.....	28
Şekil 4.1. Klasik türevli dikey bulaş modeli sistemi için simülasyon	38
Şekil 4.2. Klasik türevli dikey bulaş modeli sistemi için simülasyon	38
Şekil 4.3. Klasik türevli dikey bulaş modeli sistemi için simülasyon	39
Şekil 4.4. Klasik türevli dikey bulaş modeli sistemi için simülasyon	39
Şekil 4.5. Atangana-Baleanu türevli dikey bulaş modeli sistemi için simülasyon.....	43
Şekil 4.6. Atangana-Baleanu türevli dikey bulaş modeli sistemi için simülasyon.....	44
Şekil 4.7. Atangana-Baleanu türevli dikey bulaş modeli sistemi için simülasyon.....	44
Şekil 4.8. Atangana-Baleanu türevli dikey bulaş modeli sistemi için simülasyon.....	45
Şekil 4.9. Caputo türevli dikey bulaş modeli sistemi için simülasyon	48
Şekil 4.10. Caputo türevli dikey bulaş modeli sistemi için simülasyon	48
Şekil 4.11. Caputo türevli dikey bulaş modeli sistemi için simülasyon	49
Şekil 4.12. Caputo türevli dikey bulaş modeli sistemi için simülasyon	49
Şekil 4.13. Caputo-Fabrizio türevli dikey bulaş modeli sistemi için simülasyon	52
Şekil 4.14. Caputo-Fabrizio türevli dikey bulaş modeli sistemi için simülasyon	52
Şekil 4.15. Caputo-Fabrizio türevli dikey bulaş modeli sistemi için simülasyon	53
Şekil 4.16. Caputo-Fabrizio türevli dikey bulaş modeli sistemi için simülasyon	53
Şekil 4.17. $s(t)$ fonksiyonu için nümerik simülasyon	65
Şekil 4.18. $i_1(t)$ fonksiyonu için nümerik simülasyon	66
Şekil 4.19. $i_2(t)$ fonksiyonu için nümerik simülasyon	66
Şekil 4.20. $r(t)$ fonksiyonu için nümerik simülasyon	67
Şekil 4.21. $s(t)$ fonksiyonu için nümerik simülasyon	68
Şekil 4.22. $i_1(t)$ fonksiyonu için nümerik simülasyon	68
Şekil 4.23. $i_2(t)$ fonksiyonu için nümerik simülasyon	69
Şekil 4.24. $r(t)$ fonksiyonu için nümerik simülasyon	69
Şekil 4.25. $s(t)$ fonksiyonu için nümerik simülasyon	71
Şekil 4.26. $i_1(t)$ fonksiyonu için nümerik simülasyon	71
Şekil 4.27. $i_2(t)$ fonksiyonu için nümerik simülasyon	71
Şekil 4.28. $r(t)$ fonksiyonu için nümerik simülasyon	72

KISALTMALAR VE SİMGELER LİSTESİ

Kısaltma

Açıklama

AB	: Atangana-Baleanu kesirli türevi
C	: Caputo kesirli türevi
CF	: Caputo-Fabrizio kesirli türevi
ML	: Mittag-Leffler fonksiyonu
RL	: Riemann-Liouville kesirli türevi

Simge

Açıklama

$AB(\alpha)$	: Normalizasyon fonksiyonu
$E_\alpha(z)$	: Mittag-Leffler fonksiyonu
${}^{RL}_0D_t^\alpha$	: Riemann-Liouville kesirli türev operatörü
${}^{CF}_0D_t^\alpha$	: Caputo-Fabrizio kesirli türev operatörü
${}^{CF}_0I_t^\alpha$	: Caputo-Fabrizio kesirli integral operatörü
${}_0^CD_t^\alpha$	: Caputo kesirli türev operatörü
${}_0^CI_t^\alpha$	: Caputo kesirli integral operatörü
${}^{AB}_0D_t^\alpha$	: Atangana-Baleanu kesirli türev operatörü
${}^{AB}_0I_t^\alpha$	: Atangana-Baleanu kesirli integral operatörü
$H^1(0,1)$	: Kendisi ve birinci mertebeden türevleri $L_2(0,1)$ uzayına ait olan fonksiyonlar uzayı
$L_2(0,1)$	: $(0,1)$ aralığında ölçülebilir ve karesi integrallenebilir fonksiyonların oluşturduğu Hilbert uzayı.

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DİKEY BULAŞMA İLE İKİ FARKLI SALGININ YAYILIMINI TEMSİL EDEN KESİRLİ BİR MATEMATİKSEL MODEL

Süphan ÇELİKBAŞ

Siirt Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Seda İĞRET ARAZ

2024, 76+VIII

Bu tez çalışmasında, dikey bulaşın olduğu epidemik hastalıklar ve bu hastalığı hesaba katan bir dikey bulaş modeli dikkate alınmıştır. Bu dikey bulaş modelinde klasik türevin Caputo, Caputo-Fabrizio ve Atangana-Baleanu gibi kesirli türevler ile değiştirilerek böyle modellerin davranışları incelenmiştir. Lagrange polinomuna dayalı bir metot kullanılarak kesirli türevlere sahip dikey bulaş modeli nümerik olarak çözülür. Dahası yeni tanıtılan parçalı diferansiyel denklemler kavramından faydalanılarak öncelikle sadece bir dikey bulaşın olduğu bir popülasyona bir süre sonra başka bir dikey bulaşın dahil olduğu yeni bir model oluşturulmuştur. Farklı kalıpları sunulan bu modellerin çeşitli durumları dikkate alınır ve bu kalıplar için elde edilen nümerik simülasyonları grafiksel gösterimlerle sergilenir.

Anahtar Kelimeler: Dikey bulaş modeli, kesirli türev ve integral, nümerik metot, parçalı diferansiyel denklemler

ABSTRACT

MS THESIS

A FRACTIONAL MATHEMATICAL MODEL TO REPRESENT THE SPREAD OF TWO DIFFERENT EPIDEMICS BY VERTICAL TRANSMISSION

**The Graduate School of Natural and Applied Science of Siirt University
The Degree of Master of Science in Mathematics**

Süphan ÇELİKBAŞ

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Seda İĞRET ARAZ

2024, 76+VIII

In this thesis, epidemic diseases with vertical transmission and a vertical transmission model that takes this disease into account are considered. In this vertical transmission model, the behaviour of such models has been studied by replacing the classical derivative with fractional derivatives such as Caputo, Caputo-Fabrizio and Atangana-Baleanu. The vertical transmission model with fractional derivatives is solved numerically using a method based on the Lagrange polynomial. Moreover, by using the newly introduced concept of piecewise differential equations, a new model has been created in which another vertical transmission is included in a population where, after a while, there is vertical transmission. Different situations of these models, whose different patterns are presented, are considered and the numerical simulations obtained for these patterns are presented with graphical representations.

Keywords: Vertical transmission model, fractional derivative and integral, numerical method, piecewise differential equations

1. GİRİŞ

Bir değişkene bağlı fonksiyonun ve türevlerini içeren denklemler diferansiyel denklemler olarak adlandırılırlar. Diferansiyel denklemler adi ve kısmi diferansiyel denklemler olmak üzere iki ayrı sınıfa ayrılırlar. Bir diferansiyel denklem, bir fonksiyonun bir bağımsız değişkene veya birden fazla değişkene türevlerini içeriyorsa bu denklemler sırasıyla adi veya kısmi diferansiyel denklemler olarak adlandırılırlar. Atmosferdeki bir ışık veya ses dalgalarının modellenmesi için kısmi diferansiyel denklemler (örneğin dalga denklemi) kullanılabilirken, bir virüsün bir popülasyondaki yayılımı için adi diferansiyel denklemlerden (örneğin SIR modeli) faydalanılabilir.

Doğada birçok fiziksel veya bilimsel teoremin diferansiyel denklemler ile ifade edilebileceğini biliyoruz. Newton mekaniğinde hareket denklemleri ve salınımlar, kimyada reaksiyonların kinetiği, ekonomide ekonomik büyüme süreçleri, sismolojide deprem ile ilgili kayıpların tahmini, matematiksel biyolojide tümör hacmindeki değişim, elektrik mühendisliğinde elektrik devreleri ve davranışları gibi birçok olay diferansiyel denklemler ile temsil edilir. Bu olayları temsil eden diferansiyel denklemlere matematiksel model denir. Matematiksel modelleme yaparken, değişkenlerin doğru şekilde belirlenmesine ve modellenen olaya uygun varsayımların göz önüne alınmasına dikkat edilmesi gerekir.

Şimdi bir matematiksel modelde, ilgili değişkenleri belirleme ve ilgili modeli inşa etmenin nasıl yapılacağını vurgulamak için bir binanın ısıtılması veya soğutulması ile ilgili bir model sunalım. Burada yapmak istediğimiz herhangi bir binanın bina dışı sıcaklığı, bina içerisinde üretilen kalorifer veya klimanın fonksiyonunu açıklayan bir model formüle etmektir.

Bu model ile aşağıdaki soruları yanıtlamayı hedefliyoruz;

- 1) Binada büyük bir sıcaklık değişimi yapmak için gereken süre nedir?
- 2) Bina içi ısı üreticilerinin (kalorifer-klima) çalışmadığı bahar veya güz aylarında bina sıcaklığında nasıl bir değişim meydana gelir?
- 3) Kaloriferin ve klimanın yoğun kullanıldığı yaz ve kış aylarında bina sıcaklığında nasıl bir değişim meydana gelir?

Bina içerisindeki sıcaklığı modellemek için doğal bir yaklaşım, kompartıman analizi kullanmaktır. $I(t)$; t zamanında binadaki sıcaklığı ifade eder. Tüm binanın bir kompartıman olduğunu varsayalım. Böylece sıcaklıktaki değişim oranı tüm üretilen veya harcanan ısı faktörleri tarafından belirlenir.

Bina içi sıcaklığı etkileyen 3 temel faktörü ele alalım. İlki bina içerisindeki insanlar, lambalar ve makineler tarafından üretilen ısıdır. Bu ısı içeride ısı artışına neden olmaktadır. $M(t)$ ile ifade edelim. İkincisi kalorifer ya da klima ile ısıtma veya soğutma, ısıdaki artış ya da azalış oranı $S(t)$ ile ifade edilir. Genel olarak ısınma $M(t)$ ve kalorifer-klima oranı $S(t)$ birim zamandaki enerji cinsinden ifade edilir.

$M(t)$ ve $S(t)$ miktarlarını birim zamandaki sıcaklık cinsinden ifade edebiliriz. Üçüncüsü dış sıcaklık $D(t)$ nin bina içerisindeki sıcaklığa etkisidir. Deneysel kanıtlar göstermiştir ki bu faktör Newton'un soğutma kanunu kullanılarak modellenenabilir. Bu kanun bina sıcaklığındaki değişim oranının, dış sıcaklık olan $D(t)$ ile iç sıcaklık olan $I(t)$ arasındaki fark ile orantılı olduğunu gösterir. $D(t)$ 'den kaynaklanan bina sıcaklığındaki değişim oranı

$$K[D(t) - I(t)] \quad (1.1)$$

K pozitif sabiti, kapı ve pencere sayısı, yalıtım gibi binanın fiziksel özelliklerine bağlıdır. Ancak $D(t)$ veya t 'ye bağlı değildir. Bu sebepten dış sıcaklık iç sıcaklıktan küçük olduğu zaman $D(t) - I(t) < 0$ olup, bina sıcaklığı düşer.

Özetle;

$$\frac{dI}{dt} = K[D(t) - I(t)] + M(t) + U(t) \quad (1.2)$$

buluruz. Burada $M(t)$, ekstra ısı artış oranı daima pozitif ve $S(t)$ ise kalorifer ısıtması için pozitif, klima soğutması için negatiftir. Binanın sıcaklık dinamiklerinin daha detaylı modeli, farklı odalar ve bölgelerdeki sıcaklıkları temsil etmek için daha fazla değişken içerebilir. Böyle bir yaklaşımda odalar farklı kompartımanlar gibi ifade edilir ve kompartıman analizi kullanılır.

(1.2) denklemi lineerdir. (1.2) denklemi sade halde yazılırsa

$$\frac{d}{dt}I(t) + P(t)I(t) = Q(t) \quad (1.3)$$

olup, burada

$$\left\{ \begin{array}{l} P(t) = K \\ Q(t) = K \cdot D(t) + M(t) + S(t) \end{array} \right\}$$

(1.4)

biçimindedir.

$$\frac{d}{dt}I(t) + K.I(t) = K.D(t) + M(t) + S(t)$$

(1.5)

integral çarpanı ise,

$$M(t) = \exp\left(\int K dt\right) = e^{Kt}$$

(1.6)

olur. (1.5) denklemini çözmek için her iki yanı e^{Kt} ile çarpıp integralini alırsak,

$$e^{Kt} \frac{d}{dt}I(t) + K e^{Kt} = e^{Kt} T(t) = \int e^{Kt} Q(t) dt + c$$

(1.7)

elde edilir. Böylece $I(t)$ nin çözümü

$$\begin{aligned} I(t) &= e^{-Kt} \int e^{Kt} Q(t) dt + c e^{-Kt} \\ &= e^{-Kt} \left\{ \int e^{Kt} [KD(t) + M(t) + S(t)] dt + c \right\} \end{aligned}$$

(1.8)

şeklindedir.

Matematiksel modellerin yoğun olarak karşılaşıldığı uygulama alanlarından biri de bulaşıcı hastalıklardır. Biyoloji ve tıp bilim dallarında bulaş kelimesi, bulaşıcı olabilen bir hastalığın, hastalığa sahip olan kişiden çeşitli yollarla başka bireylere geçmesi olarak bilinmektedir. Hasta olmayan bir kişi bazı durumlarda hastalığı bulaştırabilir ve buna örnek olarak subklinik enfeksiyon verilebilir. Bulaşıcı hastalıkların ne şekilde yayıldığını anlamak, bulaşıcı hastalığın önlenmesi açısından büyük öneme sahiptir.

Bir hastalığı hiçbir semptom göstermeden bulaştırabilen kişiye taşıyıcı adı verilir. Pasif taşıyıcı patojenle kontamine olup bunu başka yeni konakçıya aktarabilir; fakat pasif bir taşıyıcıya hastalık bulaşmaz. Bununla birlikte aktif taşıyıcı, hastalığı bir başkasına bulaştırabilen enfekte kişilere denir. Aktif taşıyıcı, enfeksiyon belirtileri gösterebilir veya göstermeyebilir. Asemptomatik taşıyıcı enfekte olmasına rağmen belirti göstermeyen taşıyıcılara denir. Hepatit B ve HIV gibi virüsler çoğunlukla asemptomatik taşıyıcılar ile bulaşır.

Hastalığın bulaşması,

- ❖ Damlacık teması örneğin öksürme ile veya hapşıрма ile
- ❖ Doğrudan fiziksel temas aktarımı kişiden kişiye bulaşma ile örneğin hasta bireye dokunma, öpme veya cinsel temas yoluyla
- ❖ Dolaylı fiziksel temas ile örneğin toprak kirliliği ya da kirli yüzeyler ile mikroorganizmalar belirli bir süre havada asılı kalması ile
- ❖ Gelişmekte olan ülkelerde sanitasyon ve hijyen sorunu nedeni ile kirlenmiş gıda ve su kaynakları tüketimi ile

gerçekleşebilir. Birkaç bulaşıcı hastalığın aynı kişide görülebilmesi bulunulan ortam, şüpheli nüfus ve kişinin bağışıklığı ile bağlantılıdır. Örneğin, bulunulan ortamda kanalizasyon, dışkı, hayvan ve bitki artıkları, sivrisinekler ve fareler varsa, bulaşıcı hastalığın çeşitliliği kaçınılmaz olabilmektedir.

Bulaş, insandan insana gerçekleşebildiği gibi başka bir organizma veya bir vektörle ile de bulaşabilir. Örneğin, sıtma hastalığı sivrisinek aracılığıyla insanlara bulaşabilir. Hastalıklar yatay ve dikey hastalık geçişi olmak üzere doğrudan iki şekilde bulaşabilirler. Yatay hastalık geçişi bir bireyden, aynı ortamdaki başka bireylere bulaşması olarak adlandırılır. Bu hastalık geçişi öpme, kişisel temas, ısırma, yalama veya öksürme veya hapşıрма ile gerçekleşebilir. Dikey hastalık geçişi, doğum öncesi hastalık geçişi gibi hastalığın anneden veya babadan çocuğa geçmesi olarak tanımlanmaktadır. Dikey hastalık geçişi doğum öncesi (doğumdan önce), perinatal (gebeliğin son haftası ile doğumdan sonraki bir aylık dönem) veya doğum sonrası gerçekleşebilir. HIV, SARS-CoV-2, Hepatit B, frengi, Zika, Dang humması gibi hastalıkların gebelik, emzirme dönemi veya doğum esnasında anneden bebeğe geçmesi dikey bulaş örnek olarak verilebilir. Zika virüsünün bebeklerde mikrosefali ve konjenital anomalilere sebep olması hastalığın doğum öncesi dönemdeki bulaşların önemini göstermektedir (Arora ve ark., 2017). Hastalığın bebeğe anne karnında iken bulaşması sonucu, bebeğin enfekte olarak doğması da dikey bulaş örnek olabilir. Karaciğerde enfeksiyona neden olan bilinen ciddi hastalıklardan biri de Hepatit B virüsüdür. Hepatit Hepadnaviridae ailesine üyedir ve karaciğerde enfeksiyona neden olur. Hepatit B hastalığı, bir ilacın damar yolundan verilmesi veya vücudun ihtiyacı olan enfekte vücut sıvıları(kan, vitamin, mineral gibi) ile veya cinsel ilişki yolu ile bulaşır. Dikey bulaş (anne-bebek) virüsün yayılımında önemli bir etkidir. Çoğunlukla gebeliğin sonunda gerçekleşmekte olup, bulaşın gebeliğin son haftalarında

oluşması en riskli durumdur. Dünyada yaklaşık olarak 400 milyon, Ülkemizde ise yaklaşık 3 milyon kişi Hepatit B virüsü taşıyıcısı olabilmektedir.

HIV insan bağışıklık sistemini hedef alarak ve AIDS'e sebep olur. HIV in bulaş yollarına baktığımızda ise kan, cinsel temas ve anneden bebeğe geçiş ile olduğu görülür. HIV epidemiyolojide dinamikleri sebebiyle, HIV kesirli dereceli modeller için araştırmacıların sürekli tartıştığı bir konu olmuştur (Akram ve ark., 2022). WHO verilerine göre 2022 yılında HIV ile yaşayan insan sayısı 39 milyonu bulmuştur (WHO, 2022). Dikey bulaş için örnek verilebilecek bir diğer hastalık frengi olup, frengi hastalığına sahip kadınlarda gebelik esnasında veya sonrasında hastalığın bebeğe bulaşması mümkündür. 2019 yılında Çin'in Wuhan kentinden dünyaya yayılıp pandemiye sebep olan Covid-19 çeşitli yollarla insandan insana bulaşabilmekteydi. Karantina, sosyal mesafe gibi kavramlar matematiksel modellemede yine karşımıza gelmektedir (Farman ve ark., 2021). Bununla birlikte Covid-19'un bulaş yollarından birisi olan; anneden bebeğe geçişi dikey bulaşa örnek verilebilir. Yapılan çalışmada doğumu yakın dönemdeki gebe ve yeni doğan bebeklerde Covid-19 için, anneden bebeğe dikey geçiş araştırılmış olup, SARS-CoV-2 pozitif olduğu saptanan yeni doğanda bulaşın doğum sonrasında çevresel faktörlerin etkisiyle bulaştığı düşünülmektedir. Dikey geçişin anneden bebeğe bulaş olasılığını değerlendirmek için enfekte olan annelerden doğan bebeklerin bazı numunelerinin doğum sırasında veya doğumdan hemen sonra alınarak Covid-19 açısından değerlendirilmesi sonucunda; Covid-19 PCR pozitif olan bir annenin dikey bulaş yoluyla bebeğine SARS-CoV-2 geçişi olduğunu çalışmalar göstermektedir (Ünal ve ark. 2021). Sivrisinek kaynaklı bir enfeksiyonu olan Dang humması genellikle Güneydoğu Asya'da görülür. Yapılan çalışmada dang humması virüsünün dikey iletimine nadir rastlansa da enfekte yeni doğanda ölümcül sonuçları olduğunu göstermektedir (Chye ve ark., 1997).

Dikey bulaşa farklı bir örnek olarak; Batı Nil Virüsü bir viral enfeksiyondur. Burada ana konak vahşi kuşlar olup culex cinsi sivrisinek sokması ile bulaşır. Doğum esnasında veya emzirme ile anneden bebeğe geçtiği de bilinmektedir. Göçmen kuşlar ile dünya geneline yayılan Batı Nil Virüsü insanlara, sivrisinek sokması ile bulaşır. Kişiden kişiye direkt olarak bulaşmayan hastalık, ancak doğum ve emzirme ile anneden bebeğe geçebilir. Bunun dışında, çok nadir de olsa kan ve organ nakli ile bulaştığı bilinmektedir. Hastalık, enfekte olan diğer memeli hayvanlardan insanlara bulaşmaz. Culex cinsi sivrisineklerin kış aylarında aktif olmadığı bölgelerde, virüs dikey bulaşma yani virüsün dişi ebeveyninden doğrudan yavrulara geçmesi ve kanla beslenmemiş

enfekte dişi Culex'in Batı Nil virüsünü yatay bulaşma yoluyla bulaştırma yeteneği yoluyla hayatta kalır. Culex türleri Batı Nil virüsünün birincil vektörleri olarak kabul edilse de da insanlar ve atlar için bir vektör olarak önemli olabilir. Bu tür son derece bol olabilir ve insanları, vahşi ve evcil memelileri kolayca ısırır. Bir eklem bacaklı, viremik bir konakçıyla beslendiğinde, eklem bacaklının virüsü mekanik veya biyolojik olarak iletme potansiyeli vardır. İlk durumda, vektörün viral enfeksiyona duyarlı olması gerekmez; ikincisinde ise, virüsün bulaşmadan önce vektörde çoğalması gerekir. Vektörde çoğaldıktan sonra, virüs ya ısırma yoluyla bir omurgalıya yatay olarak ya da transovaryal iletim yoluyla vektörün soyuna dikey olarak bulaşabilir. Transovaryal olarak enfekte olmuş bireyler daha sonra virüsü dikey olarak yavrularına yeniden aktarma veya yatay olarak bir omurgalıyı ısırarak veya çiftleşme sırasında zührevi olarak iletme potansiyeline sahiptir (Anderson ve ark., 2020).

Literatür incelendiğinde birçok bilim dalında matematiksel modellere rastlanabilir. Örneğin, bir virüsün yayılımı veya bir hastalığın gerçekleşme süreci ilgili matematiksel modeller geliştirilmiş ve hastalıkların bulaşması ile ilgili sonuçlar tartışılmıştır. Bununla birlikte son yıllarda çeşitli virüslerin yayılımı ile epidemiyolojiye olan ilgi oldukça artmış ve iki çeşit bulaşıcı hastalığın yayılımı üzerine yapılan çalışmalar, birçok matematikçiler de dâhil olmak üzere birçok bilim adamının dikkatini çekmiştir.

Bu tez çalışmasında ise bir popülasyonda iki farklı hastalığın dikey bulaş altındaki yayılımını temsil eden bir matematiksel modeli ve nümerik çözümünü araştıracağız. Daha sonra, bu modeli parçalı diferansiyel denklemler kavramını kullanarak önce bir dikey bulaş hastalığının olduğu bir popülasyona bir süre sonra birinci dikey bulaşın yanı sıra ikinci bir dikey bulaşın da dahil olduğu bulaşmayı ele alacak şekilde yeniden ele alacağız. Farklı senaryolar ile ele alınan bu modeller nümerik çözümleri elde edilecek ve nümerik simülasyonlar sunulacaktır.

Bu tez çalışması aşağıdaki gibi düzenlenmiştir:

Tezin 2. bölümünde, bu çalışmada kullanılacak olan kesirli diferansiyel ve integral operatörler ve bazı özel fonksiyonların tanımları ve özellikleri verilmiştir.

Tezin 3. bölümünde, klasik ve bazı kesirli diferansiyel denklemler için Lagrange interpolasyon polinomlu nümerik metot tanıtılmıştır. Bu denklemlerin çözümleri için nümerik simülasyonlar, grafiksel gösterimler ile sunulmuştur.

Tezin 4. bölümünde, bir popölasyonda iki hastalığın dikey olarak bulaşmasını ele alan bir dikey bulaş modeli ve model parametrelerinin açıklamaları sunulmuştur. Söz konusu modelin nümerik çözümü için Lagrange polinomuna dayalı bir nümerik metot kullanılmıştır. Daha sonra model, parçalı diferansiyel denklemler kavramı kullanılarak modifiye edilerek oluşan modelin çıktıları sunulmuştur.

Son bölümde ise, elde edilen sonuçlar tartışılmıştır.



2. KURAMSAL TEMELLER

Kesirli türev tanımlarını vermeden önce bu türevin hesaplanmasında kullanılan bazı tanımlara yer verelim (Oldham ve Spanier, 1974; Podlubny, 1999; Cansız, 2010; Atangana ve Baleanu, 2016).

2.1. Bazı Özel Fonksiyonlar

Bu bölümde bazı özel fonksiyonlar, bu fonksiyonların özellikleri ve bu fonksiyonlar ile ilgili simülasyonlar verilecektir.

Gama fonksiyonu

Gama fonksiyonu, kesirli analizdeki temel fonksiyonlardan biri olup, kesirli türev tanımlarında da sıklıkla karşımıza çıkmaktadır. Bu fonksiyon, faktöriyel kavramının kompleks ya da tamsayı olmayan reel sayılara genellemesidir. $\Gamma(n)$ sembolü ile gösterilen Gama fonksiyonu

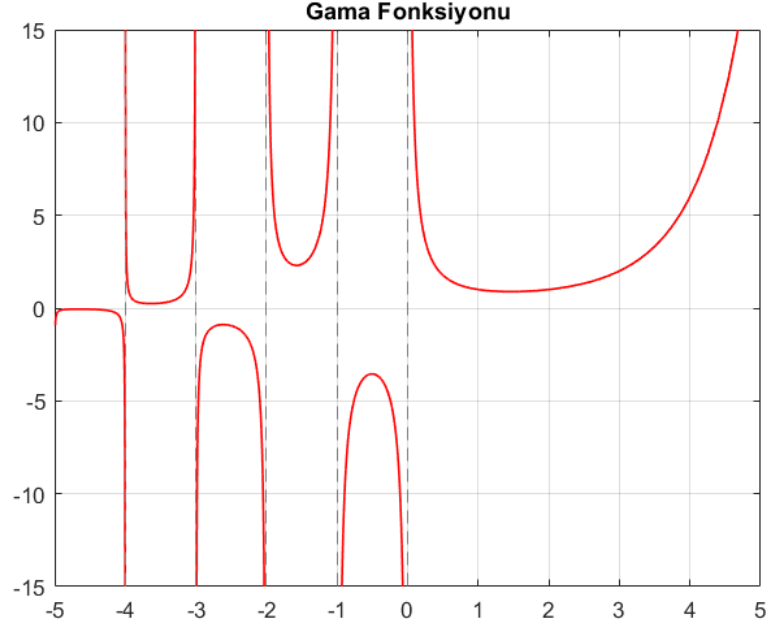
$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{n-1} dt \quad (2.1)$$

şeklinde tanımlanır ve $Re(n) > 0$ için yakınsaktır (Podlubny, 1999).

Gama fonksiyonu aşağıdaki bazı temel özelliklere sahiptir:

- (i) $\Gamma(n + 1) = n\Gamma(n)$
 - (ii) $\Gamma(0) = \infty, \Gamma(\infty) = 0$
 - (iii) $\Gamma(1) = 1, \Gamma(2) = 1, \Gamma(3) = 2, \dots, \Gamma(n + 1) = n!$,
 - (iv) $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.
- (2.2)

Gama fonksiyonu ile ilgili simülasyon Şekil 2.1 'de görülebilir.



Şekil 2.1. Gama Fonksiyonu

Mittag-Leffler fonksiyonu

Mittag-Leffler fonksiyonu, e^z üstel fonksiyonunun genellemesi olup, kesirli mertebeye sahip diferansiyel ve integral denklemlerin, çeşitli fiziksel, kimyasal, ekonomik matematiksel modellerinin çözümleri olarak ortaya çıkmaktadır (Mittag-Leffler, 1903).

$\alpha > 0$ olmak üzere, bir parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + 1)} \quad (2.3)$$

şeklinde ifade edilir ve $E_{\alpha}(z)$ sembolü ile gösterilir. İki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu ise $\alpha > 0$ ve $\beta > 0$ olmak üzere

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)} \quad (2.4)$$

şeklinde yazılabilir. Bu tanımlar yardımı ile

$$\begin{cases} E_{1,1}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z, \\ E_{1,2}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(n+2)} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{e^z - 1}{z} \end{cases}$$

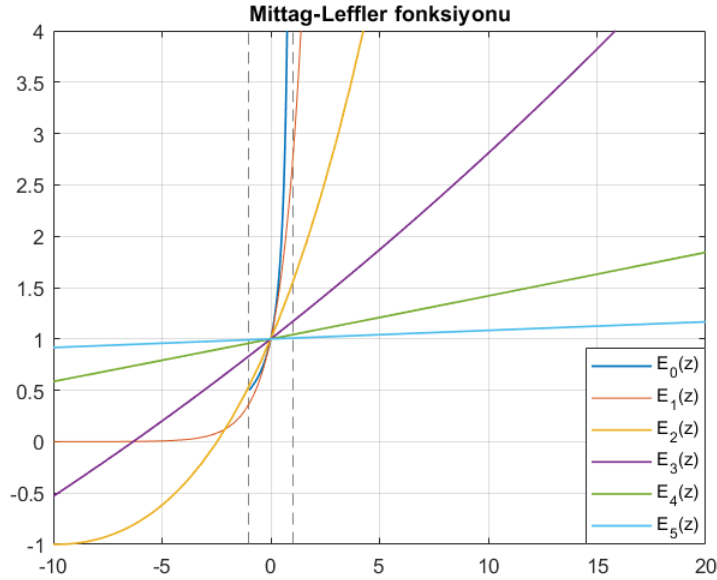
(2.5)

eşitlikleri mevcuttur. Mittag-Leffler fonksiyonunun özel bir hali hiperbolik sinüs ve kosinüs fonksiyonları cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilebilir (Podlubny, 1999; Cansız, 2010).

$$E_{2,1}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{\Gamma(2n+1)} = \cosh z.$$

(2.6)

$E_{\alpha}(z)$, $\alpha = 0,1,2,3,4,5$ olmak üzere Mittag-Leffler fonksiyonu ile ilgili simülasyon Şekil 2.2 'de sunulmuştur.



Şekil 2.2. Mittag Leffler

2.2. Kesirli türev ve İntegral Tanımları

Bu alt bölümde, tezin ilerleyen bölümlerinde kullanılacak olan bazı kesirli türev ve integral tanımlarına yer verelim.

Tanım 2.3.1. (Euler Kesirli Türev Tanımı):

Euler, polinom fonksiyonlarının kesirli türevini $n = 1$ için,

$$\frac{d^k t^n}{dt^k} = n(n-1) \dots (n-k+1)t^{n-k}$$

(2.7)

formülünden yararlanarak

$$\frac{d^k t^n}{dt^k} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-k+1)} t^{n-k} \quad (2.8)$$

şeklinde genelleştirmiştir (Podlubny, 1998).

2.3.1. Örnek: Euler türev formülünü kullanarak t^5 fonksiyonunun $\frac{1}{2}$. türevini bulalım:

$$D^{\frac{1}{2}} t^5 = \frac{\Gamma(5+1)}{\Gamma(5-\frac{1}{2}+1)} t^{5-\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma(6)}{\Gamma(\frac{11}{2})} t^{\frac{9}{2}} = \frac{5!}{\frac{1.3.5.7.9\sqrt{\pi}}{2^5}} t^{\frac{9}{2}} = \frac{256}{63\sqrt{\pi}} t^{\frac{9}{2}}. \quad (2.9)$$

Tanım 2.3.3. (Riemann-Liouville Kesirli Türevi):

$n-1 \leq \alpha < n$ olmak üzere, Riemann-Liouville kesirli türevi

$${}^{RL}_0 D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} f(s) ds \quad (2.10)$$

şeklinde tanımlanır (Podlubny, 1999).

2.3.3. Örnek:

$\alpha = \frac{1}{2}$, için $f(t) = 7$ fonksiyonunun Riemann-Liouville kesirli türevi

$${}^{RL}_0 D_t^{\frac{1}{2}} f(t) = \frac{7}{\Gamma(\frac{1}{2})} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} ds = \frac{7}{\sqrt{\pi t}} \quad (2.11)$$

şeklinde elde edilir.

Tanım 2.3.4. (Caputo Kesirli Türev Tanımı) :

$f(t)$, diferansiyellenebilir fonksiyon olmak üzere, Caputo kesirli türevi

$${}_0^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t f'(s) (t-s)^{-\alpha} ds \quad (2.12)$$

eşitliği ile ifade edilir (Podlubny, 1999).

2.3.4. Örnek:

$n = 1, f(t) = 5t, \alpha = \frac{1}{2}$ için Caputo kesirli türevi

$${}_0^C D_t^{\frac{1}{2}} f(t) = \frac{5}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^t \frac{df(s)}{ds} (t-s)^{-\frac{1}{2}} ds = \frac{10\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}$$

(2.13)

şeklinde elde edilir.

Tanım 2.3.5. (Caputo kesirli İntegral Tanımı):

Bir $f(t)$ fonksiyonunun Caputo kesirli integrali

$${}_0^C I_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t f(s)(t-s)^{\alpha-1} ds$$

(2.14)

şeklinde ifade edilir (Podlubny, 1999). Burada $0 < \alpha \leq 1$ dir.

2.3.5. Örnek: $\alpha = \frac{1}{2}$ için $f(t) = 1$ fonksiyonunun Caputo kesirli integrali

$${}_0^C I_t^{\frac{1}{2}} f(t) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} ds = \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}$$

(2.15)

şeklinde bulunur.

Tanım 2.3.6. (Caputo-Fabrizio Kesirli Türev Tanımı):

$f \in H^1(a, b)$, $b > a$, $\alpha \in (0, 1]$ olsun. $f(t)$ fonksiyonunun Caputo-Fabrizio kesirli türevi aşağıdaki gibi verilir (Caputo ve Fabrizio, 2015):

$${}_0^{CF} D_t^\alpha f(t) = \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \int_0^t f'(s) \exp\left[-\alpha \frac{(t-s)}{1-\alpha}\right] ds.$$

(2.16)

Burada $M(\alpha)$ normalizasyon fonksiyonu olup, $M(0) = M(1) = 1$ dir.

2.3.6. Örnek: $\alpha = \frac{1}{2}$ için $f(t) = t$ fonksiyonunun Caputo-Fabrizio kesirli türevi

$$\begin{aligned} {}_0^{CF} D_t^{\frac{1}{2}}(t) &= \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \int_0^t f'(s) \exp\left[-\alpha \frac{(t-s)}{1-\alpha}\right] ds \\ &= \frac{8}{3} \int_0^t \exp\left[-\alpha \frac{(t-s)}{1-\alpha}\right] ds \\ &= \frac{8}{3} (1 - \exp(-t)) \end{aligned}$$

(2.17)

olarak elde edilir.

Tanım 2.3.7. (Caputo-Fabrizio Kesirli İntegral Tanımı):

Bir $f(t)$ fonksiyonunun Caputo-Fabrizio kesirli integrali aşağıdaki gibi verilir (Caputo ve Fabrizio, 2015):

$${}^{CF}_0 I_t^\alpha f(t) = \frac{1-\alpha}{M(\alpha)} f(t) + \frac{\alpha}{M(\alpha)} \int_0^t f(s) ds. \quad (2.18)$$

2.3.7. Örnek: $\alpha = \frac{1}{2}$ için $f(t) = 5$ fonksiyonunun Caputo-Fabrizio kesirli integrali hesaplanırsa

$$\begin{aligned} {}^{CF}_0 I_t^\alpha (1) &= \frac{\frac{1}{2}}{M\left(\frac{1}{2}\right)} 5 + \frac{\frac{1}{2}}{M\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^t 5 ds \\ &= \frac{15}{8} (1+t) \end{aligned} \quad (2.19)$$

sonucu elde edilir.

Tanım 2.3.8. (Riemann Anlamında Atangana-Baleanu Kesirli Türev Tanımı) :

$f \in H^1(a, b)$, $b > a$, $\alpha \in [0, 1]$ olsun. Riemann anlamında Atangana-Baleanu kesirli türevi aşağıdaki gibi verilir (Atangana ve Baleanu, 2016):

$${}^{ABR}_0 D_t^\alpha f(t) = \frac{AB(\alpha)}{1-\alpha} \frac{d}{dt} \int_0^t f(s) E_\alpha \left[-\alpha \frac{(t-s)^\alpha}{1-\alpha} \right] ds. \quad (2.20)$$

Burada $AB(\alpha) = 1 - \alpha + \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)}$ ve $AB(0) = AB(1) = 1$ olup, normalizasyon fonksiyonu olarak bilinir.

2.3.8. Örnek: $\alpha = \frac{1}{2}$ için $f(t) = 1$ fonksiyonunun Riemann anlamında Atangana-Baleanu kesirli türevi

$${}^{ABR}_0 D_t^\alpha (t) = \frac{AB(\alpha)}{1-\alpha} \frac{d}{dt} \int_0^t f(s) E_\alpha \left[-\alpha \frac{(t-s)^\alpha}{1-\alpha} \right] ds$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\pi}}\right)}{\frac{1}{2}} \frac{d}{dt} \int_0^t E_{\frac{1}{2}} \left[-\frac{1}{2} \frac{(t-s)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right] ds \\
&= \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\right) \frac{d}{dt} \int_0^t E_{\frac{1}{2}} \left[-(t-s)^{\frac{1}{2}} \right] ds \\
&= \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\right) E_{\frac{1}{2}} \left[-t^{\frac{1}{2}} \right]
\end{aligned} \tag{2.21}$$

olarak bulunur (Atangana ve Baleanu, 2016).

Tanım 2.3.9. (Caputo Anlamında Atangana-Baleanu Kesirli Türev Tanımı):

$f \in H^1(a, b), b > a, \alpha \in [0, 1]$ olsun. Caputo anlamında Atangana-Baleanu kesirli türevi aşağıdaki gibi verilir (Atangana ve Baleanu, 2016):

$${}^{ABC}_0 D_t^\alpha f(t) = \frac{AB(\alpha)}{1-\alpha} \int_0^t f'(s) E_\alpha \left[-\alpha \frac{(t-s)^\alpha}{1-\alpha} \right] ds. \tag{2.22}$$

2.3.9. Örnek: $\alpha = \frac{1}{2}$ için $f(t) = t$ fonksiyonunun Caputo anlamında Atangana-Baleanu kesirli türevi

$$\begin{aligned}
{}^{ABR}_0 D_t^\alpha(t) &= \frac{AB(\alpha)}{1-\alpha} \int_0^t f'(s) E_\alpha \left[-\alpha \frac{(t-s)^\alpha}{1-\alpha} \right] ds \\
&= \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\pi}}\right)}{\frac{1}{2}} \int_0^t E_{\frac{1}{2}} \left[-\frac{1}{2} \frac{(t-s)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right] ds \\
&= \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\right) \int_0^t E_{\frac{1}{2}} \left[-\frac{1}{2} \frac{(t-s)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right] ds \\
&= \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\right) \int_0^t E_{\frac{1}{2}} \left[-(t-s)^{\frac{1}{2}} \right] ds \\
&= \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\right) t E_{\frac{1}{2}, 2} \left[-t^{\frac{1}{2}} \right]
\end{aligned} \tag{2.23}$$

olarak bulunur.

Tanım 2.3.10. (Atangana-Baleanu Kesirli İntegral Tanımı):

Atangana-Baleanu kesirli integrali aşağıdaki gibi verilir (Atangana ve Baleanu, 2016):

$${}^{AB}_0I_t^\alpha f(t) = \frac{1-\alpha}{AB(\alpha)} f(t) + \frac{\alpha}{AB(\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_0^t f(s)(t-s)^{\alpha-1} ds. \quad (2.24)$$

2.3.10. Örnek: $\alpha = \frac{1}{2}$ için $f(t) = 1$ fonksiyonunun Atangana-Baleanu kesirli integrali

$${}^{AB}_0I_t^\alpha f(t) = \frac{\frac{1}{2}}{AB\left(\frac{1}{2}\right)} + \frac{\frac{1}{2}}{AB\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} ds = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)} + \frac{2\sqrt{t}}{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)\sqrt{\pi}} \quad (2.25)$$

şeklinde elde edilir.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Önceki bölümde kesirli türev ve integral tanımlarına yer vermiştik. Bu bölümde ise klasik ve kesirli mertebeden türev içeren adi diferansiyel denklemleri çözmek için kullanılan bazı metotlardan bahsedeceğiz (Adams ve Bashforth, 1883; Toufik ve Atangana, 2017; Atangana ve İğret Araz, 2021). Ayrıca her bir metot için simülasyonlar sunacağız.

3.1. Adams-Bashforth Metodu

Bu bölümde, klasik mertebeden diferansiyel denklemleri çözmede kullanılan bir nümerik aloritmadan bahsedeceğiz (Adams ve Bashforth, 1883). Bunun için öncelikle aşağıdaki sunulan genel bir adi diferansiyel denklemi ele alacağız:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(0) = y_0. \end{cases} \quad (3.1)$$

Bu denklemin her iki yanının integralini alırsak,

$$y(t) - y(0) = \int_0^t f(s, y(s)) ds. \quad (3.2)$$

Yukarıdaki denklem, verilen $t = t_k$ ve $t = t_{k+1}$, $k = 0, 1, 2, \dots$ noktalarında yazılıp, bu denklemlerin farkı alınır, aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$y(t_{k+1}) - y(t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(s, y(s)) ds. \quad (3.3)$$

$f(s, y(s))$ fonksiyonu, Lagrange interpolasyon polinomu kullanılarak aşağıdaki şekilde yaklaşık olarak yazılabilir:

$$P_k(s) = \frac{s - t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}} f(t_k, y(t_k)) - \frac{s - t_k}{t_k - t_{k-1}} f(t_{k-1}, y(t_{k-1})) \quad (3.4)$$

ya da

$$\begin{aligned} P_k(s) &= \frac{f(t_k, y(t_k))}{h} (s - t_{k-1}) - \frac{f(t_{k-1}, y(t_{k-1}))}{h} (s - t_k) \\ &\sim \frac{f(t_k, y_k)}{h} (s - t_{k-1}) - \frac{f(t_{k-1}, y_{k-1})}{h} (s - t_k). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Yukarıda verilen bu yaklaşım, (3.3) ifadesinde yerine yazılırsa

$$y_{k+1} = y_k + \frac{f(t_k, y_k)}{h} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (s - t_{k-1}) ds - \frac{f(t_{k-1}, y_{k-1})}{h} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (s - t_k) ds. \quad (3.6)$$

Yukarıda verilen integraller hesaplanırsa, nümerik algoritma

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} [3f(t_k, y_k) - f(t_{k-1}, y_{k-1})], k \geq 1 \quad (3.7)$$

şeklinde yeniden yazılabilir.

(3.7) algoritmasında $k = 1$ alındığında, y^0 ve y^1 değerlerinin hesaplanması gerekecektir. Burada y^0 değerinin başlangıç koşulu olduğu aşikâr olup, y^1 değeri ise Euler metodu kullanılarak aşağıdaki şekilde bulunur:

$$y^1 = y^0 + hf(t_0, y^0). \quad (3.8)$$

3.1.1. Uygulamalar

Bu başlık altında, klasik türevli bir diferansiyel denklemin Adams-Bashforth metodu ile nümerik olarak çözümünü bir örnek ile sunacağız.

3.1.1. Örnek:

Bu örnekte, nonlinear bir adi diferansiyel denklemi ele alacağız.

$$\begin{cases} u'(t) = u^2 + 2t \\ u(0) = 0.1 \end{cases}. \quad (3.9)$$

Bu denklemin her iki yanını integrallersek,

$$u(t) - u(0) = \int_0^t (u^2 + 2s) ds. \quad (3.10)$$

Yukarıdaki denklem, verilen $t = t_k$ ve $t = t_{k+1}$, $k = 0, 1, 2, \dots$ noktalarında yazılıp, bu denklemlerin farkı alınır, aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$u(t_{k+1}) - u(t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} (u^2 + 2s) ds. \quad (3.11)$$

$[t_k, t_{k+1}]$ aralığında, Lagrange interpolasyon polinomu kullanılarak (3.10) eşitliği

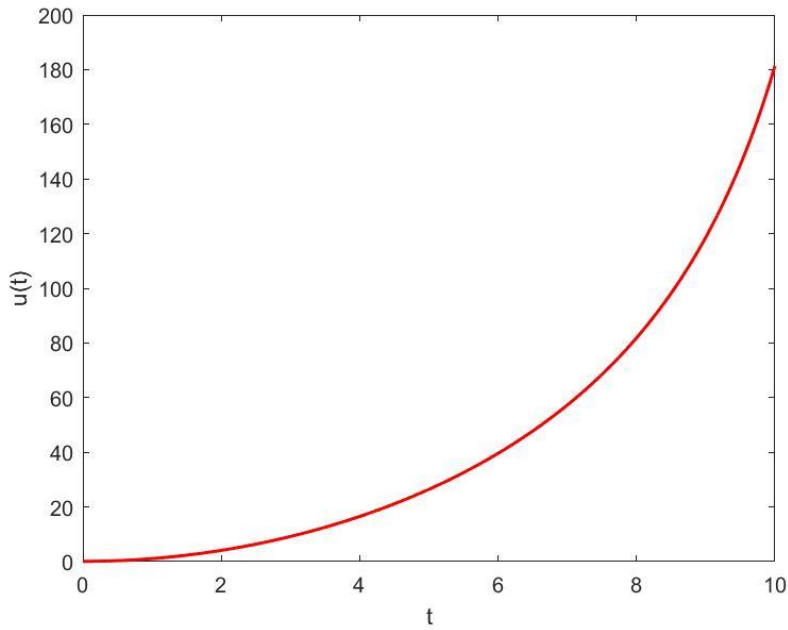
$$u_{k+1} = u_k + \frac{(u_k^2 + 2t_k)}{h} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (s - t_{k-1}) ds - \frac{(u_{k-1}^2 + 2t_{k-1})}{h} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (s - t_k) ds \quad (3.12)$$

şeklinde düzenlenir. (3.11) denkleminin sağ tarafında yer alan integraller hesaplanırsa, ele alınan problem için nümerik algoritma

$$u_{k+1} = u_k + \frac{h}{2} [3(u_k^2 + 2t_k) - (u_{k-1}^2 + 2t_{k-1})] \quad (3.13)$$

şeklinde yeniden yazılabilir.

(3.8) başlangıç değer problemi için nümerik simülasyon Şekil 3.1' de görülebilir.



Şekil 3.1. Birinci mertebeden Cauchy problemi için simülasyon

3.2. Kesirli diferansiyel denklemler için Lagrange Polinomuna Dayalı Nümerik Metot

Bu bölümde, son yıllarda kesirli mertebeden lineer olmayan kesirli diferansiyel denklemleri çözmede kullanılan Lagrange polinomuna dayalı bir nümerik algorithmadan bahsedeceğiz (Toufik ve Atangana, 2017).

3.2.1. Atangana-Baleanu kesirli türevli Cauchy problemi için nümerik algoritma

Atangana-Baleanu kesirli türeve sahip genel bir Cauchy problemini ele alalım (Atangana ve Baleanu, 2016):

$$\begin{cases} {}^{ABC}_0D_t^\alpha y(t) = f(t, y(t)) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (3.14)$$

Bu denklemin her iki yanına Atangana-Baleanu kesirli integralini uygularsak,

$$y(t) - y(0) = \frac{(1-\alpha)}{AB(a)} f(t, y(t)) + \frac{\alpha}{\Gamma(a)AB(a)} \int_0^t f(s, y(s))(t-s)^{a-1} ds. \quad (3.15)$$

Verilen bir $t = t_{k+1}, k = 0, 1, 2, \dots$ noktasında, yukarıdaki denklem aşağıdaki şekilde yeniden düzenlenir:

$$\begin{aligned} y(t_{k+1}) - y(0) &= \frac{(1-\alpha)}{AB(a)} f(t_k, y(t_k)) + \frac{\alpha}{\Gamma(a)AB(a)} \int_0^{t_{k+1}} f(s, y(s))(t_{k+1} - s)^{a-1} ds \\ &= \frac{(1-\alpha)}{AB(a)} f(t_k, y(t_k)) + \frac{\alpha}{\Gamma(a)AB(a)} \sum_{n=0}^k \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(s, y(s))(t_{k+1} - s)^{a-1} ds. \end{aligned} \quad (3.16)$$

$[t_n, t_{n+1}]$ aralığında, Lagrange interpolasyon polinomu kullanılarak $f(s, y(s))$ fonksiyonu aşağıdaki şekilde yaklaşık olarak yazılabilir:

$$P_n(s) \sim \frac{f(t_n, y_n)}{h} (s - t_{n-1}) - \frac{f(t_{n-1}, y_{n-1})}{h} (s - t_n), \quad n \geq 1. \quad (3.17)$$

Yukarıda verilen bu yaklaşım, (3.15) integral ifadesinde yerine yazılırsa, aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_0 + \frac{(1-\alpha)}{AB(a)} f(t_k, y_k) \\ &+ \frac{\alpha}{\Gamma(a)AB(a)} \sum_{n=1}^k \frac{f(t_n, y_n)}{h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} (s - t_{n-1})(t_{k+1} - s)^{a-1} ds \\ &- \frac{\alpha}{\Gamma(a)AB(a)} \sum_{n=1}^k \frac{f(t_{n-1}, y_{n-1})}{h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} (s - t_n)(t_{k+1} - s)^{a-1} ds. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Denklemin sağ tarafında yer alan integralleri

$$A_{a,n,1} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} (s - t_{n-1})(t_{k+1} - s)^{a-1} ds \quad (3.19)$$

ve

$$A_{a,n,2} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} (s - t_n)(t_{k+1} - s)^{a-1} ds \quad (3.20)$$

şeklinde alarak daha sade hale getirelim. O halde, bu integral

$$\begin{aligned} y_{k+1} = y_0 &+ \frac{(1-\alpha)}{AB(a)} f(t_k, y_k) + \frac{\alpha}{\Gamma(a)AB(a)} \sum_{n=1}^k \frac{f(t_n, y_n)}{h} A_{a,n,1} \\ &- \frac{\alpha}{\Gamma(a)AB(a)} \sum_{n=1}^k \frac{f(t_{n-1}, y_{n-1})}{h} A_{a,n,2} \end{aligned} \quad (3.21)$$

şeklinde yeniden yazılabilir. $A_{a,n,1}$ ve $A_{a,n,2}$ integralleri

$$A_{a,n,1} = h^{a+1} \frac{(k-n+1)^a (k-n+2+a) (k-n)^a (k-n+2+2a)}{a(a+1)} \quad (3.22)$$

ve

$$A_{a,n,2} = h^{a+1} \frac{(k-n+1)^{a+1} - (k-n)^a (k-n+1+a)}{a(a+1)} \quad (3.23)$$

şeklinde hesaplanır (Toufik ve Atangana, 2017). Bu işlemleri integralde yerine yazarsak, elde edilen yaklaşım aşağıdaki şekilde olacaktır:

$$\begin{aligned} y_{k+1} = & \frac{(1-\alpha)}{AB(\alpha)} f(t_k, y_k) \\ & + \frac{\alpha h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)AB(\alpha)} \sum_{n=1}^k f(t_n, y_n) \left[\begin{aligned} & (k-n+1)^a (k-n+2+a) \\ & - (k-n)^a (k-n+2+2a) \end{aligned} \right] \\ & - \frac{\alpha h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)AB(\alpha)} \sum_{n=1}^k f(t_{n-1}, y_{n-1}) \left[\begin{aligned} & (k-n+1)^{a+1} (k-n+2+a) \\ & - (k-n)^a (k-n+1+a) \end{aligned} \right]. \end{aligned} \quad (3.24)$$

3.2.2. Caputo-Fabrizio kesirli türevli Cauchy problemi için nümerik algoritma

İlgili metodu kesirli türevlere genişletmek için, genel bir adi diferansiyel denklemi ele alalım. Klasik türevin Caputo-Fabrizio kesirli türevi ile değiştirildiği problem aşağıdaki gibi sunulur:

$$\begin{cases} {}^{CF}D_t^\alpha y(t) = f(t, y(t)) \\ y(0) = y_0 \end{cases}. \quad (3.25)$$

Bu denklemin her iki yanına Caputo-Fabrizio kesirli integralini uygularsak,

$$y(t) - y(0) = \frac{1-\alpha}{M(\alpha)} f(t, y(t)) + \frac{\alpha}{M(\alpha)} \int_0^t f(s, y(s)) ds. \quad (3.26)$$

Yukarıdaki denklem, verilen $t = t_k$ ve $t = t_{k+1}$ noktalarında yazılıp, bu denklemlerin farkı alınır, aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\begin{aligned} y(t_{k+1}) - y(t_k) &= \frac{1-\alpha}{M(\alpha)} [f(t_k, y(t_k)) - f(t_{k-1}, y(t_{k-1}))] \\ &+ \frac{\alpha}{M(\alpha)} \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(s, y(s)) ds. \end{aligned} \quad (3.27)$$

(3.26) eşitliğinin sağ tarafında yer alan $f(s, y(s))$ fonksiyonu Lagrange interpolasyon polinomu ile yaklaşıtırlırsa, yukarıdaki eşitlik aşağıdaki gibi düzenlenir:

$$\begin{aligned} y_{k+1} = y_k &+ \frac{1-\alpha}{M(\alpha)} [f(t_k, y(t_k)) - f(t_{k-1}, y(t_{k-1}))] \\ &+ \frac{\alpha}{M(\alpha)} \frac{f(t_k, y_k)}{h} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (s - t_{k-1}) ds \\ &- \frac{\alpha}{M(\alpha)} \frac{f(t_{k-1}, y_{k-1})}{h} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (s - t_k) ds. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Yukarıda verilen denklemdeki integraller için aşağıdaki hesaplamalar geçerlidir:

$$\begin{aligned} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (s - t_{k-1}) ds &= \frac{3h^2}{2} \\ \int_{t_k}^{t_{k+1}} (s - t_k) ds &= \frac{h^2}{2} \end{aligned} \quad (3.29)$$

Yukarıda verilen integraller hesaplandığında, nümerik algoritma

$$\begin{aligned} y_{k+1} = y_k &+ \frac{1-\alpha}{M(\alpha)} [f(t_k, y(t_k)) - f(t_{k-1}, y(t_{k-1}))] \\ &+ \frac{\alpha h}{2M(\alpha)} [3f(t_k, y_k) - f(t_{k-1}, y_{k-1})] \end{aligned} \quad (3.30)$$

şeklinde yeniden yazılabilir (Toufik ve Atangana, 2017).

3.2.3. Caputo kesirli türevli Cauchy problemi için nümerik algoritma

Bu alt bölümde, Caputo kesirli türevli genel bir adi diferansiyel denklemi göz önüne alalım.

$$\begin{cases} {}^C_0D_t^\alpha y(t) = f(t, y(t)) \\ y(0) = y_0 \end{cases}. \quad (3.31)$$

Bu denklemin her iki yanına Caputo kesirli integrali uygularsak,

$$y(t) - y(0) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^t f(s, y(s))(t-s)^{a-1} ds \quad (3.32)$$

eşitliği elde edilir. Verilen bir $t = t_{k+1}, k = 0, 1, 2, \dots$ noktasında, yukarıdaki denklem aşağıdaki şekilde yeniden düzenlenir:

$$\begin{aligned} y(t_{k+1}) - y(0) &= \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^{t_{k+1}} f(s, y(s))(t_{k+1} - s)^{a-1} ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(a)} \sum_{n=1}^k \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(s, y(s))(t_{k+1} - s)^{a-1} ds. \end{aligned} \quad (3.33)$$

$[t_n, t_{n+1}]$ aralığında, Lagrange interpolasyon polinomu kullanılarak (3.32) eşitliği aşağıdaki şekilde düzenlenir:

$$\begin{aligned} y_{k+1} = y_0 &+ \frac{1}{\Gamma(a)} \sum_{n=1}^k \frac{f(t_n, y_n)}{h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} (s - t_{n-1})(t_{k+1} - s)^{a-1} ds \\ &- \frac{1}{\Gamma(a)} \sum_{n=1}^n \frac{f(t_{n-1}, y_{n-1})}{h} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (s - t_n)(t_{k+1} - s)^{a-1} ds. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Yukarıda verilen ifadeyi

$$\begin{aligned} A_{a,n,1} &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} (s - t_{n-1})(t_{k+1} - s)^{a-1} ds, \\ A_{a,n,2} &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} (s - t_n)(t_{k+1} - s)^{a-1} ds, \end{aligned} \quad (3.35)$$

şeklinde alarak daha sade hale getirelim. O halde bu integral

$$y_{k+1} = y_0 + \frac{1}{\Gamma(a)} \sum_{n=1}^k \frac{f(t_n, y_n)}{h} A_{a,n,1} - \frac{1}{\Gamma(a)} \sum_{n=1}^k \frac{f(t_{n-1}, y_{n-1})}{h} A_{a,n,2} \quad (3.36)$$

şeklinde yeniden yazılabilir (Toufik ve Atangana, 2017).

Bu işlemleri integralde yerine yazarsak, elde edilen yaklaşım aşağıdaki şekilde olacaktır:

$$y_{k+1} = y_0 + \frac{h^\alpha}{\Gamma(a+2)} \sum_{n=1}^k f(t_n, y_n) \begin{bmatrix} (k-n+1)^a (k-n+2+a) \\ -(k-n)^a (k-n+2+2a) \end{bmatrix} - \frac{h^\alpha}{\Gamma(a+2)} \sum_{n=1}^k f(t_{n-1}, y_{n-1}) \begin{bmatrix} (k-n+1)^{a+1} (k-n+2+a) \\ -(k-n)^a (k-n+1+a) \end{bmatrix}. \quad (3.37)$$

3.2.4. Uygulamalar

Bu bölümde bahsedilen metodu kullanarak bazı diferansiyel denklemlerin çözümleri ile ilgili örnekler vereceğiz.

3.2.1. Örnek:

Aşağıdaki Atangana-Baleanu türevine sahip nonlineer bir adi diferansiyel denklemi ele alacağız.

$$\begin{cases} {}^{ABC}_0 D_t^\alpha y(t) = \exp(0.05y) \\ y(0) = 0.2 \end{cases}. \quad (3.38)$$

Bu denklemin her iki yanını integrallersek,

$$y(t) - y(0) = \frac{(1-\alpha)}{AB(a)} \exp(0.05y) + \frac{\alpha}{\Gamma(a)AB(a)} \int_0^t \exp(0.05y) (t-s)^{a-1} ds. \quad (3.39)$$

Verilen bir $t = t_{k+1}, k = 0, 1, 2, \dots$ noktasında, yukarıdaki denklem aşağıdaki şekilde yeniden düzenlenir:

$$y(t_{k+1}) = y(0) + \frac{(1-\alpha)}{AB(a)} \exp(0.05y^k) + \frac{\alpha}{\Gamma(a)AB(a)} \int_0^{t_{k+1}} \exp(0.05y) (t_{k+1} - s)^{a-1} ds$$

$$= y_0 + \frac{(1-\alpha)}{AB(a)} \exp(0.05y^k) + \frac{\alpha}{\Gamma(a)AB(a)} \sum_{n=0}^k \int_{t_n}^{t_{n+1}} \exp(0.05y) (t_{k+1} - s)^{a-1} ds. \quad (3.40)$$

$[t_n, t_{n+1}]$ aralığında, Lagrange interpolasyon polinomu kullanılarak $f(s, y(s))$ fonksiyonunun yaklaşımı (3.39) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} y_{k+1} = & y_0 + \frac{(1-\alpha)}{AB(a)} \exp(0.05y^k) \\ & + \frac{\alpha}{\Gamma(a)AB(a)} \sum_{n=1}^k \frac{\exp(0.05y_n)}{h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} (s - t_{n-1})(t_{k+1} - s)^{a-1} ds \\ & - \frac{\alpha}{\Gamma(a)AB(a)} \sum_{n=1}^k \frac{\exp(0.05y_{n-1})}{h} \int_{t_n}^{t_{n+1}} (s - t_n)(t_{k+1} - s)^{a-1} ds. \end{aligned} \quad (3.41)$$

O halde bu integral

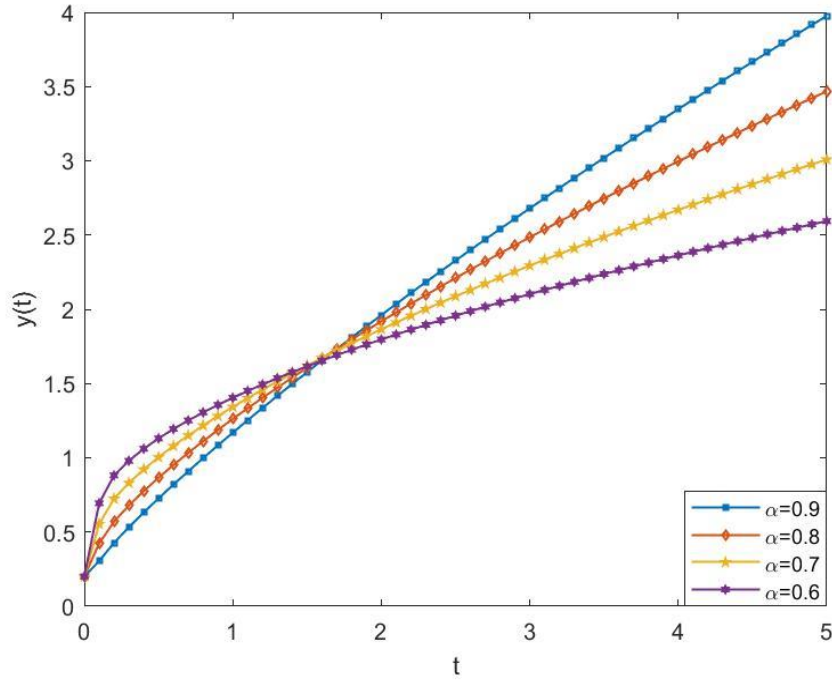
$$\begin{aligned} y_{k+1} = & y_0 + \frac{(1-\alpha)}{AB(a)} \exp(0.05y^k) + \frac{\alpha}{\Gamma(a)AB(a)} \sum_{n=1}^k \frac{\exp(0.05y_n)}{h} A_{a,n,1} \\ & - \frac{\alpha}{\Gamma(a)AB(a)} \sum_{n=1}^k \frac{\exp(0.05y_{n-1})}{h} A_{a,n,2} \end{aligned} \quad (3.42)$$

şeklinde yeniden yazılabilir (Toufik ve Atangana, 2017). (3.41) denklemi açık halde

$$\begin{aligned} y_{k+1} = & y_0 + \frac{(1-\alpha)}{AB(\alpha)} \exp(0.05y_k) \\ & + \frac{\alpha h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)AB(\alpha)} \sum_{n=1}^k \exp(0.05y_n) \left[\frac{(k-n+1)^a(k-n+2+a)}{-(k-n)^a(k-n+2+2a)} \right] \\ & - \frac{\alpha h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)AB(\alpha)} \sum_{n=1}^k \exp(0.05y_{n-1}) \left[\frac{(k-n+1)^{a+1}(k-n+2+a)}{-(k-n)^a(k-n+1+a)} \right] \end{aligned} \quad (3.43)$$

şeklinde yazılır.

Bu problemin farklı mertebeden kesirli türevleri için nümerik simülasyon Şekil 3.2' de görülebilir.



Şekil 3.2. Farklı mertebeden AB türevli Cauchy problemi için simülasyon

3.2.2. Örnek:

Bunun için aşağıdaki Caputo türevine sahip lineer bir adi diferansiyel denklemi ele alacağız.

$$\begin{cases} {}^C_0D_t^\alpha y(t) = 2y \\ y(0) = 0.02 \end{cases} \quad (3.44)$$

Bu denklemin her iki yanına Caputo kesirli integralini uygularsak,

$$y(t) - y(0) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^t (2y)(t-s)^{a-1} ds. \quad (3.45)$$

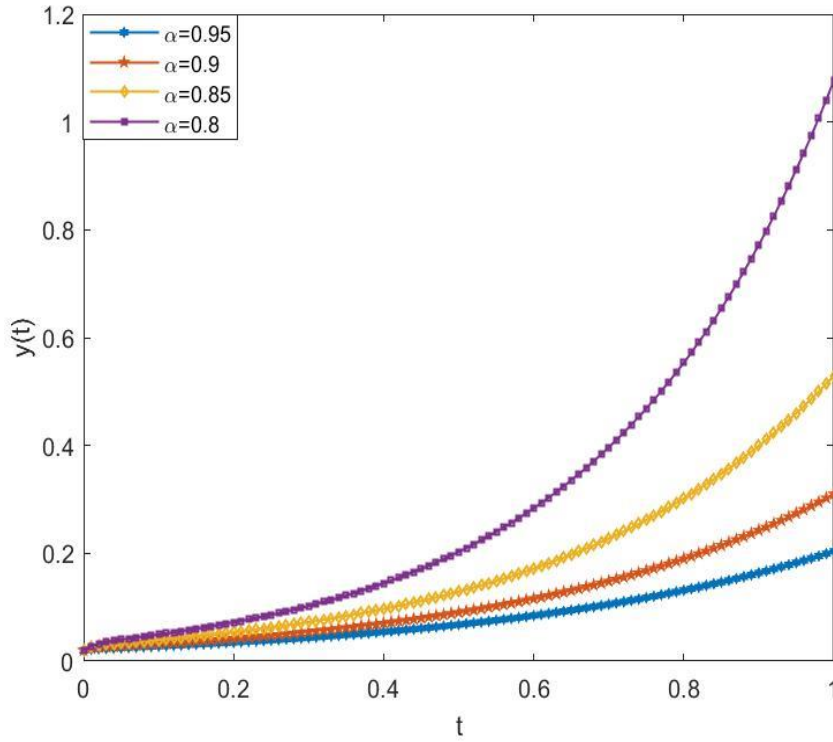
Verilen bir $t = t_{k+1}, k = 0, 1, 2, \dots$ noktasında, yukarıdaki denklem aşağıdaki şekilde yeniden düzenlenir:

$$\begin{aligned} y(t_{k+1}) - y(0) &= \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^{t_{k+1}} (2y)(t_{k+1} - s)^{a-1} ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(a)} \sum_{n=0}^k \int_{t_n}^{t_{n+1}} (2y)(t_{k+1} - s)^{a-1} ds. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Yukarıdaki integraller hesaplanırsa, elde edilen yaklaşım aşağıdaki şekilde olacaktır:

$$y_{k+1} = y_0 + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha + 2)} \sum_{n=1}^k (2y_n) \left[\begin{matrix} (k-n+1)^a(k-n+2+a) \\ -(k-n)^a(k-n+2+2a) \end{matrix} \right] - \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha + 2)} \sum_{n=1}^k (2y_{n-1}) \left[\begin{matrix} (k-n+1)^{a+1}(k-n+2+a) \\ -(k-n)^a(k-n+1+a) \end{matrix} \right]. \quad (3.47)$$

Bu problemin farklı mertebeden kesirli türevleri için nümerik simülasyon Şekil 3.3' de görülebilir.



Şekil 3. 3. Farklı mertebeden α değerleri için Caputo türevli Cauchy problemi için simülasyon

3.2.3. Örnek

Bu örnekte Caputo-Fabrizio kesirli türeve sahip lineer bir adi diferansiyel denklemi ele alacağız.

$$\begin{cases} {}^{CF}D_t^\alpha y(t) = 2t - 1 \\ y(0) = 0.5 \end{cases}. \quad (3.48)$$

Bu denklemin her iki yanına Caputo-Fabrizio kesirli integralini uygularsak,

$$y(t) - y(0) = \frac{1-\alpha}{M(\alpha)} f(t, y(t)) + \frac{\alpha}{M(\alpha)} \int_0^t f(s, y(s)) ds. \quad (3.49)$$

Yukarıdaki denklem, verilen $t = t_k$ ve $t = t_{k+1}$, $k = 0, 1, 2, \dots$ noktalarında yazılıp, bu denklemlerin farkı alınır, aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$y(t_{k+1}) - y(t_k) = \frac{1-\alpha}{M(\alpha)} [f(t_k, y(t_k)) - f(t_{k-1}, y(t_{k-1}))] + \frac{\alpha}{M(\alpha)} \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(s, y(s)) ds. \quad (3.50)$$

$[t_k, t_{k+1}]$ aralığında, Lagrange interpolasyon polinomu (Toufik ve Atangana, 2017) kullanılarak $f(s, y(s))$ fonksiyonunun yaklaşımı integral ifadesinde yerine yazılırsa

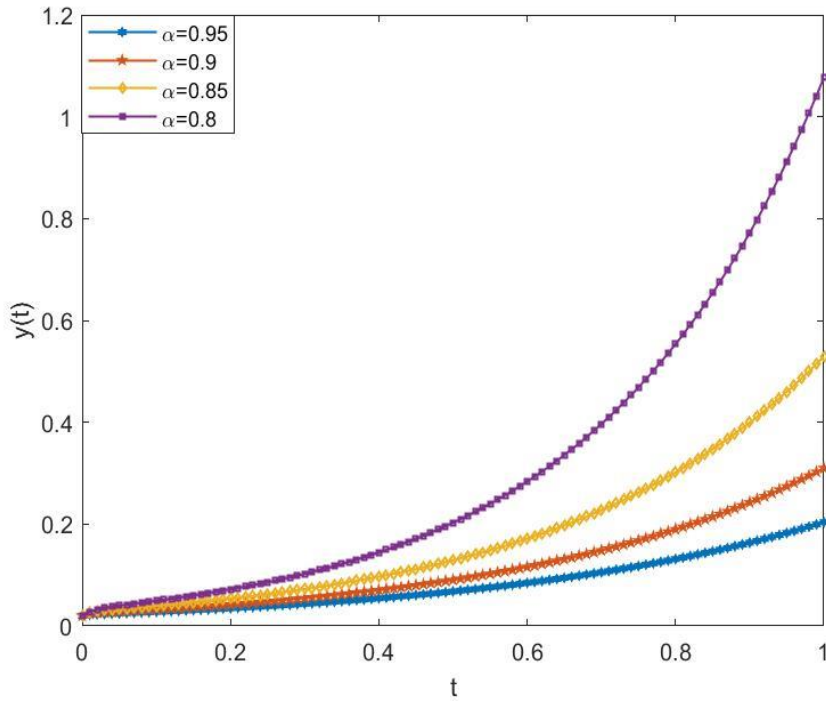
$$y_{k+1} = y_k + \frac{1-\alpha}{M(\alpha)} [f(t_k, y(t_k)) - f(t_{k-1}, y(t_{k-1}))] + \frac{\alpha}{M(\alpha)} \frac{f(t_k, y_k)}{h} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (s - t_{k-1}) ds - \frac{\alpha}{M(\alpha)} \frac{f(t_{k-1}, y_{k-1})}{h} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (s - t_k) ds. \quad (3.51)$$

Yukarıda verilen integraller hesaplanırsa, nümerik algoritma

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1-\alpha}{M(\alpha)} [(2t_k - 1) - (2t_{k-1} - 1)] + \frac{\alpha h}{2M(\alpha)} [3(2t_k - 1) - (2t_{k-1} - 1)] \quad (3.52)$$

şeklinde yeniden yazılabilir.

Bu problemin farklı mertebeden kesirli türevleri için nümerik simülasyon Şekil 3.4' te görülebilir.



Şekil 3.4. Farklı mertebeden α değerleri için CF türevli Cauchy problemi için simülasyon

3.3. Parçalı diferansiyel denklemler

Gözlemlenebilir gerçeklerin matematiksel modellere dönüştürülmesi, bu gerçekleri anlamada ve yorumlamada yol gösterecektir. İyi bir matematiksel model kapsamlı olmalı ve problem ile ilgili bilgilerin neredeyse tamamını içermelidir. Bu özelliklerden bazıları matematikçi tarafından sıklıkla matematiksel formülasyonların dışında bırakılmıştır ve sonuç olarak bu modellerin sonuçları her zaman görülen verilerle eşleşmemektedir. Klasik, kesirli veya parçalı türev almanın bu incelikleri yakalayamaması nedeniyle, yeni bir adi ve kısmi diferansiyel denklemler sınıfına ihtiyaç vardır (Atangana ve İğret Araz, 2023). Bu bölümde birkaç parçalı diferansiyel denklemi çözümleri ile birlikte verelim. Öncelikle aşağıdaki klasik türeve sahip parçalı diferansiyel denklemi sunalım:

$$\frac{dy}{dt} = \begin{cases} 3 \cos t - 5y \cos t, & t \in [0,3], \\ \frac{1}{(3t^2 + 4)^2} - \frac{12ty}{3t^2 + 4}, & t \in [3,30] \end{cases}, \quad y(0) = 0, \quad (3.53)$$

Böyle bir diferansiyel denklemin tam çözümünün olduğu görülür:

$$y(t) = \begin{cases} \begin{cases} \frac{3}{5} + ce^{(-5 \sin t)}, & t \in [0,3] \\ y(0) = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{c+t}{(3t^2+4)^2}, & t \in [3,30] \\ y(3) = \frac{3}{5} - \frac{3}{5}e^{(-5 \sin 3)} \end{cases} \end{cases} \quad (3.54)$$

olduğu görülür. Atangana ve İğret Araz (2023)'ün çalışmasından Caputo kesirli türeve sahip bir diferansiyel denklemin çözümü (Atangana ve İğret Araz, 2023):

$${}_0^C D_t^\alpha y(t) = \begin{cases} -5y(t), & t \in [0,1] \\ \exp(-4t), & t \in [1,t] \end{cases} \quad (3.55)$$

şeklinde dir. Böyle bir parçalı diferansiyel denklemin tam çözümü

$$y(t) = \begin{cases} y(0)E_\alpha(-5t^\alpha), & t \in [0,1] \\ y(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t e^{-4\tau} (t-\tau)^{\alpha-1} d\tau, & t \in [1,t] \end{cases}$$

veya

$$y(t) \begin{cases} y(0)E_\alpha(-5t^\alpha), & t \in [0,1] \\ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-4)^j}{j!} \left[\begin{matrix} t^{j+\alpha} B(j+1, \alpha) \\ -t^{j+\alpha} B(\frac{1}{t}, j+1, \alpha) \end{matrix} \right], & t \in [1,t] \end{cases} \quad (3.56)$$

şeklinde olacaktır. Şimdi, Lagrange interpolasyon polinomlu nümerik metodu kullanarak parçalı diferansiyel denklemlerin sayısal çözümlerini elde edeceğiz. Klasik durumda parçalı Cauchy problemiyle başlayacağız.

$$\frac{d}{dt}u(t) = \begin{cases} f_1(t, u(t)), & 0 \leq t \leq t_1 \\ \vdots \\ f_n(t, u(t)), & t_{k-1} 0 \leq t \leq t_1 \end{cases} \quad (3.57)$$

Klasik integralin her iki tarafa da uygulanması ile aşağıdaki denklem elde edilir:

$$u(t) = \begin{cases} u(0) + \int_0^t f_1(\tau, u(\tau)) d\tau, & 0 \leq t \leq t_1 \\ \vdots \\ u(t_{k-1}) + \int_{t_{k-1}}^t f_n(\tau, u(\tau)) d\tau, & t_{k-1} \leq t \leq t_k \end{cases} \quad (3.58)$$

Yukarıdaki denklemdeki integrali alınan fonksiyonlar, Lagrange polinomu ile yaklaşık olarak elde edilirse aşağıdaki nümerik algoritme elde edilir (Toufik ve Atangana, 2017):

$$u(t_{k+1}) = \begin{cases} u(t_k) + \frac{h}{2} [3f_1(t_k, u(t_k)) - f_1(t_{k-1}, u(t_{k-1}))] \\ \vdots \\ u(t_k) + \frac{h}{2} [3f_n(t_k, u(t_k)) - f_n(t_{k-1}, u(t_{k-1}))] \end{cases} \quad (3.59)$$

Şimdi Atangana-Baleanu kesirli türevi ile parçalı doğrusal olmayan adi diferansiyel denklem durumunu ele alalım (Atangana ve İğret Araz, 2023):

$${}^{ABC}_0 D_t^\alpha u(t) = \begin{cases} f_1(t, u(t)), & 0 \leq t \leq t_1 \\ \vdots \\ f_n(t, u(t)), & t_{k-1} \leq t \leq t_k \end{cases} \quad (3.60)$$

Atangana-Baleanu integrali (3.59) denkleminin her iki tarafına da uygulanırsa

$$u(t) = \begin{cases} u(0) + (1 - \alpha)f_1(t, u(t)) + \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t f_1(\tau, u(\tau))(t - \tau)^{\alpha-1} d\tau, & 0 \leq t \leq t_1 \\ \vdots \\ u(t_{k-1}) + (1 - \alpha)f_n(t, u(t)) + \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_{k-1}}^t f_n(\tau, u(\tau))(t - \tau)^{\alpha-1} d\tau, & t_{k-1} \leq t \leq t_k \end{cases} \quad (3.61)$$

olduğu görülür. ABC türevine sahip parçalı sistem için Lagrange polinomlarına (Toufik ve Atangana, 2017) dayanan aşağıdaki sayısal şema oluşturulabilir:

$$u(t_{k+1}) = \begin{cases} \begin{cases} u(0) + (1 - \alpha)f_1(t_k, u(t_k)) \\ + \frac{\alpha(\Delta t)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 2)} \sum_{m_1=1}^{l_1} f_1(t_{m_1}, u^{m_1}) \\ \times \left\{ \begin{aligned} &(l_1 - m_1 + 1)^\alpha (l_1 - m_1 + 2 + \alpha) \\ &-(l_1 - m_1)^\alpha (l_1 - m_1 + 2 + \alpha) \end{aligned} \right\} \\ - \frac{\alpha(\Delta t)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 2)} \sum_{m_1=1}^{l_1} [f_1(t_{m_1-1}, u^{m_1-1})] \\ \times \left\{ \begin{aligned} &(l_1 - m_1 + 1)^\alpha \\ &-(l_1 - m_1)^\alpha (l_1 - m_1 + 1 + \alpha) \end{aligned} \right\} \end{cases} \\ 0 \leq t \leq t_1 \\ \vdots \\ \begin{cases} u(t_{k-1}) + (1 - \alpha)f_n(t_k, u(t_k)) \\ + \frac{\alpha(\Delta t)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 2)} \sum_{m_k=l_{(k-1)}+1}^{l_k} f_n(t_{m_k}, u^{m_k}) \\ \times \left\{ \begin{aligned} &(l_k - m_k + 1)^\alpha (l_k - m_k + 2 + \alpha) \\ &-(l_k - m_k)^\alpha (l_k - m_k + 2 + 2\alpha) \end{aligned} \right\} \\ - \frac{\alpha(\Delta t)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 2)} \sum_{m_k=l_{(k-1)}+1}^{l_k} f_n(t_{m_{k-1}}, u^{m_{k-1}}) \\ \times \left\{ \begin{aligned} &(l_k - m_k + 1)^\alpha \\ &-(l_k - m_k)^\alpha (l_k - m_k + 2 + 2\alpha) \end{aligned} \right\} \end{cases} \\ t_{k-1} \leq t \leq t_k \end{cases} \end{cases} \quad (3.62)$$

Benzer şekilde, Caputo-Fabrizio kesirli türevi için aşağıdaki başlangıç değer problemi ele alınır (Atangana ve İğret Araz, 2023):

$${}^{CF}_0 D_t^\alpha u(t) = \begin{cases} f_1(t, u(t)), & 0 \leq t \leq t_1 \\ \vdots \\ f_n(t, u(t)), & t_{k-1} \leq t \leq t_k \end{cases} \quad (3.63)$$

Lagrange polinomunu ile birlikte kullanarak integrale yaklaşılarak şunu elde ederiz:

$$u(t_{k+1}) = \begin{cases} \begin{cases} u(0) + (1 - \alpha)f_1(t_k, u(t_k)) \\ + \alpha h \sum_{m_1=1}^{l_1} [3f_1(t_{m_1}, u^{m_1}) - f_1(t_{m_1-1}, u^{m_1-1})] \end{cases} \\ 0 \leq t \leq t_1 \\ \vdots \\ \begin{cases} u(t_{k-1}) + (1 - \alpha)f_n(t_k, u(t_k)) \\ + \alpha h \sum_{m_k=1}^{l_k} [3f_n(t_{m_k}, u^{m_k}) - f_n(t_{m_{k-1}}, u^{m_{k-1}})] \end{cases} \end{cases}$$

(3.64)

Son olarak Caputo türevi ile aşağıdaki sistemi ele alıyoruz:

$${}_0^C D_t^\alpha u(t) = \begin{cases} f_1(t, u(t)), & 0 \leq t \leq t_1 \\ \vdots \\ f_n(t, u(t)), & t_{k-1} \leq t \leq t_k \end{cases} \quad (3.65)$$

Bu durumda, Lagrange polinom yaklaşımını kullanarak sayısal çözümü elde ediyoruz.

$$u(t_{k+1}) = \begin{cases} \left\{ u(0) + \begin{cases} \frac{(\Delta t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} \sum_{m_1=1}^{l_1} f_1(t_{m_1}, u^{m_1}) \\ \times \left\{ \begin{aligned} &(l_1 - m_1 + 1)^\alpha (l_1 - m_1 + 2 + \alpha) \\ &-(l_1 - m_1)^\alpha (l_1 - m_1 + 2 + \alpha) \end{aligned} \right\} \\ - \frac{(\Delta t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} \sum_{m_1=1}^{l_1} [f_1(t_{m_1-1}, u^{m_1-1})] \\ \times \left\{ \begin{aligned} &(l_1 - m_1 + 1)^\alpha \\ &-(l_1 - m_1)^\alpha (l_1 - m_1 + 1 + \alpha) \end{aligned} \right\} \end{cases} \right. \\ , 0 \leq t \leq t_1 \\ \vdots \\ \left\{ u(t_{k-1}) + \begin{cases} \frac{(\Delta t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} \sum_{m_k=l_{(k-1)}+1}^{l_k} f_n(t_{m_k}, u^{m_k}) \\ \times \left\{ \begin{aligned} &(l_k - m_k + 1)^\alpha (l_k - m_k + 2 + \alpha) \\ &-(l_k - m_k)^\alpha (l_k - m_k + 2 + 2\alpha) \end{aligned} \right\} \\ - \frac{(\Delta t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} \sum_{m_k=l_{(k-1)}+1}^{l_k} f_n(t_{m_{k-1}}, u^{m_{k-1}}) \\ \times \left\{ \begin{aligned} &(l_k - m_k + 1)^\alpha \\ &-(l_k - m_k)^\alpha (l_k - m_k + 2 + 2\alpha) \end{aligned} \right\} \end{cases} \right. \\ , t_{k-1} \leq t \leq t_k \end{cases} \end{cases} . \quad (3.66)$$

Parçalı diferansiyel denklemler kavramının bir uygulamasını göstermek için bir sonraki başlıkta bir tümör büyüme modelini ele alacağız (Atangana ve İğret Araz, 2023). Meme kanseri olan bir kadını düşünün. Kanser hücrelerinin vücuda yayılmaya daha yatkın olduğu durumlarda cerrahi, kemoterapi ve radyasyonun da kullanıldığını varsayalım. Birinci süreçte kemoterapinin, ikinci süreçte ise kemoterapi ve radyoterapinin uygulandığı iki süreci modelleyen parçalı sistem, bu iki tedavi uygulandığında kanser hücrelerinde meydana gelen değişimi modellemek için aşağıdaki gibi elde edilmektedir. Hastada ardışık olarak uygulanan yöntemleri ifade eden parçalı diferansiyel denklem aşağıdaki sistem ile temsil edilir:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dT}{dt} = aT(1 - bT) - E_c CT \\ \frac{dE_c}{dt} = d_c E_c (1 - E_c) \\ \frac{dC}{dt} = -\gamma C \end{array} \right. , \quad 0 \leq t \leq t_1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dT}{dt} = aT(1 - bT) - E_1(E_r DT + E_c CT) \\ \frac{dE_r}{dt} = d_r E_r (1 - E_r) \\ \frac{dE_c}{dt} = d_c E_c (1 - E_c) \\ \frac{dE_1}{dt} = d_1 E_1 (1 - E_1) \\ \frac{dC}{dt} = -\gamma C \end{array} \right. , \quad t_1 \leq t \leq T.$$

(3.67)

Burada T fonksiyonu tümör hücrelerinin sayısı, a tümör büyüme hızı ve b ise tümör taşıma kapasitesinin tersidir. E_c fonksiyonu kemoterapinin etkinliğini tanımlar, C fonksiyonu kemoterapinin konsantrasyonudur, γ konsantrasyonun bozulma hızı, D radyasyon miktarı, E_r radyoterapinin etkinliği, E_1 kombine radyoterapi ve kemoterapinin etkinliği ve d_c sabitleri; d_r ve d_1 verimliliğin büyüme oranlarıdır.

(3.66) parçalı model ile ameliyat sonrası kemoterapi alan bir hastada bir süre sonra kemoterapinin yetersiz kaldığı durumda kemoterapiye ek olarak radyoterapinin uygulandığı bir hastada kanser hücrelerinde meydana gelen değişimi inceleme olanağı sunulmuştur.

Bir sonraki bölümde, parçalı diferansiyel denklemler kavramının epidemik modellere uygulanması ele alınarak, Wang ve ark. (2022) tarafından sunulan iki dikey bulaşı temsil eden bir model, bir dikey bulaşın olduğu popülasyonda bir süre sonra ikinci bir dikey bulaşın görülmesi şeklinde modifiye edilecektir.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Önceki bölümde, bazı klasik ve kesirli mertebeden türev içeren adi diferansiyel denklemleri çözmek için sunulan Lagrange polinomuna sahip bir nümerik metot, bu bölümde ele alınacak bir dikey bulaş modelinin çözümünde kullanılacaktır.

4.1. Dikey bulaş modeli

Bu başlık altında, parçalı diferansiyel denklemler kavramından faydalanılarak, Naji ve ark. (2016) tarafından sunulan iki dikey bulaşı temsil eden bir model, bir dikey bulaşın olduğu popülasyonda bir süre sonra ikinci bir dikey bulaşın da dahil olduğu senaryoyu dikkate alacak şekilde genişletilecektir. Naji ve ark. (2016) tarafından önerilen ve daha sonra Wang ve ark. (2022) tarafından da çalışılan bu dikey bulaş modelini için önce klasik ve kesirli türevler ile modifiye ederek nümerik olarak çözelim. Söz konusu model aşağıdaki sistem ile ifade edilir (Naji ve ark., 2016; Wang ve ark., 2022):

$$\begin{cases} \frac{ds}{dt} = \Lambda - \left(\frac{\beta_1 i_1}{1 + i_1} + \beta_2 i_2 \right) \frac{s}{N} + (\gamma - p_2) i_2 - \mu s - p_1 i_1 + \eta r, \\ \frac{di_1}{dt} = \frac{\beta_1 i_1}{1 + i_1} \frac{s}{N} - (\mu + \alpha_1 + \delta - p_1) i_1, \\ \frac{di_2}{dt} = \beta_2 i_2 \frac{s}{N} - (\mu + \alpha_2 + \gamma - p_2) i_2, \\ \frac{dr}{dt} = \delta i_1 - (\eta + \mu) r, \end{cases} \quad (4.1)$$

şeklindedir. Bu modelin başlangıç koşulları

$$s(0) = s^0, i_1(0) = i_1^0, i_2(0) = i_2^0, r(0) = r^0 \quad (4.2)$$

şeklindedir.

Model için varsayımlar, ele alınan değişkenler ve parametreler şu şekildedir;

- $s(t)$, t anındaki duyarlı bireylerin sayısını temsil eder.
- $i_1(t)$ ve $i_2(t)$, t anındaki enfekte bireylerin sayısını temsil eder.
- $r(t)$, t zamanında iyileşen bireylerin sayısını temsil eder.
- $s(0) > 0, i_1(0) > 0, i_2(0) > 0, r(0) > 0$ başlangıç koşulu olarak belirtilir.
- $N(t) = s(t) + i_1(t) + i_2(t) + r(t)$ toplam nüfusu belirtir.
- $\Lambda > 0$ deterministik modelle doğum oranı sabit miktarda popülasyonun olduğu varsayılmaktadır.

- Her iki hastalığında dikey aktarımı vardır; spesifik olarak bulaşıcı birey, hastalık
- $i_1(t)$ ve $i_2(t)$ için sırasıyla $0 \leq p_1 \leq 1$ ve $0 \leq p_2 \leq 1$ oranlarında enfekte bir yeni bireyi doğurur.
- Sonuç olarak $p_1 i_1$ ve $p_2 i_2$ birimleri sırasıyla enfekte olmuş sınıflar i_1 ve i_2 sınıfına girecek ve aynı miktarlar duyarlı sınıfta toplanmadan çıkarılacaktır.
- Hastalıkların her ikisi de $s(t)$ sınıfındaki bireyler ile $i_1(t)$ ve $i_2(t)$ sınıfındaki kişiler arasındaki temas yoluyla $i_1(t)$ için $\frac{\beta_1 s i_1}{1+i_1}$ ile tanımlanan doğrusal olmayan görülme oranıyla bulaşır.
- $\beta_1 > 0$ enfeksiyon etkileşim oranını temsil eder ve benzer şekilde $\beta_2 s i_2$ tarafından tanımlanan $i_2(t)$ için doğrusal insidans (Risk altındaki sağlam kişilerin belirli sürede, belirli bir hastalığa yakalanma olasılığını gösteren ölçüt.) oranını temsil eder. Burada, β_2 enfeksiyon oranını temsil eder.
- $i_1(t)$ sınıfındaki bireylerin enfeksiyon ölüm oranı $\alpha_1 > 0$ olan hastalık nedeniyle ölüm yaşanmaktadır.
- Enfekte olan bireyler hastalıktan iyileşecekler ve iyileşme oranı $\delta > 0$ olan bağışıklık kazanacaklardır.
- $i_2(t)$ sınıfındaki bireylerin enfeksiyon ölüm oranı $\alpha_2 \geq 0$ olan hastalık nedeniyle ölümle karşı karşıyadır.
- Enfekte olan bireyler hastalıktan iyileşecekler ve iyileşme oranı $\gamma > 0$ olduğunda duyarlı hale geleceklerdir.
- $r(t)$ sınıfındaki bireyler bağışıklık oranına $0 \leq \eta \leq 1$ sahiptir.
- Toplam popülasyondaki her birey için $\mu > 0$ doğal ölüm oranı vardır.
- Özellikle dikkate değer bir varsayım, her iki hastalığın aynı anda aynı kişiye bulaşamayacağıdır.
- Ayrıca duyarlı sınıftaki Λ popülasyona dahil olan bireylerin her zaman pozitif olmasını sağlamak için aşağıdaki hipotezlerin her zaman geçerli olduğu varsayılır;

$$\delta \geq p_1 \text{ ve } \gamma \geq p_2.$$

(4.3)

4.2. Dikey bulaş modelinin çözümü için bir nümerik metot

Bu başlık altında, bir önceki bölümde sunulan Lagrange interpolasyon polinomuna sahip nümerik algoritma kullanılarak dikey bulaş modeli nümerik olarak çözülecektir.

4.2.1. Dikey bulaş modelinin çözümü

Bu alt başlık altında Naji ve ark. (2016) tarafından tanıtılan dikey bulaş modelinin nümerik olarak çözmeyi amaçlıyoruz. Bunun için Lagrange interpolasyon polinomlu bir nümerik metottan faydalanacağız (Adams ve Bashforth, 1883). Söz konusu model aşağıdaki sistem ile temsil edilir:

$$\begin{cases} \frac{ds}{dt} = \Lambda - \left(\frac{\beta_1 i_1}{1 + i_1} + \beta_2 i_2 \right) \frac{s}{n} + (\gamma - p_2) i_2 - \mu s - p_1 i_1 + \eta r, \\ \frac{di_1}{dt} = \frac{\beta_1 i_1}{1 + i_1} \frac{s}{n} - (\mu + \alpha_1 + \delta - p_1) i_1, \\ \frac{di_2}{dt} = \frac{\beta_2 i_2 s}{n} - (\mu + \alpha_2 + \gamma - p_2) i_2, \\ \frac{dr}{dt} = \delta i_1 - (\eta + \mu) r, \end{cases} \quad (4.4)$$

şeklinde. Bu denklem sisteminin her iki yanını integrallersek,

$$\begin{aligned} s(t) &= s(0) + \int_0^t S(s, i_1, i_2, r, \tau) d\tau, \\ i_1(t) &= i_1(0) + \int_0^t I_1(s, i_1, i_2, r, \tau) d\tau, \\ i_2(t) &= i_2(0) + \int_0^t I_2(s, i_1, i_2, r, \tau) d\tau, \\ r(t) &= r(0) + \int_0^t R(s, i_1, i_2, r, \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Yukarıdaki denklem verilen $t = t_k$ ve $t = t_{k+1}$, $k = 0, 1, 2, \dots$ noktalarında yazılıp elde edilen iki denklemin farkı alınır, aşağıdaki şekilde yeniden düzenlenir:

$$\begin{aligned} s(t_{k+1}) - s(t_k) &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} S(s, i_1, i_2, r, \tau) d\tau, \\ i_1(t_{k+1}) - i_1(t_k) &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} I_1(s, i_1, i_2, r, \tau) d\tau, \\ i_2(t_{k+1}) - i_2(t_k) &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} I_2(s, i_1, i_2, r, \tau) d\tau, \\ r(t_{k+1}) - r(t_k) &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} R(s, i_1, i_2, r, \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (4.6)$$

$[t_k, t_{k+1}]$ aralığında, Lagrange interpolasyon polinomu kullanılarak, bu model için nümerik algoritma

$$\begin{aligned}
s_{k+1} &= s_k + \frac{h}{2} [3S(s^k, i_1^k, i_2^k, r^k, t_k) - S(s^{k-1}, i_1^{k-1}, i_2^{k-1}, r^{k-1}, t_{k-1})] \\
i_{1k+1} &= i_{1k} + \frac{h}{2} [3I_1(s^k, i_1^k, i_2^k, r^k, t_k) - I_1(s^{k-1}, i_1^{k-1}, i_2^{k-1}, r^{k-1}, t_{k-1})] \\
i_{2k+1} &= i_{2k} + \frac{h}{2} [3I_2(s^k, i_1^k, i_2^k, r^k, t_k) - I_2(s^{k-1}, i_1^{k-1}, i_2^{k-1}, r^{k-1}, t_{k-1})] \\
r_{k+1} &= r_k + \frac{h}{2} [3R(s^k, i_1^k, i_2^k, r^k, t_k) - R(s^{k-1}, i_1^{k-1}, i_2^{k-1}, r^{k-1}, t_{k-1})]
\end{aligned}
\tag{4.7}$$

şeklinde elde edilir.

Ele alınan model için nümerik simülasyonlar sunalım. Simülasyonlar sırasında sistemin başlangıç koşulları

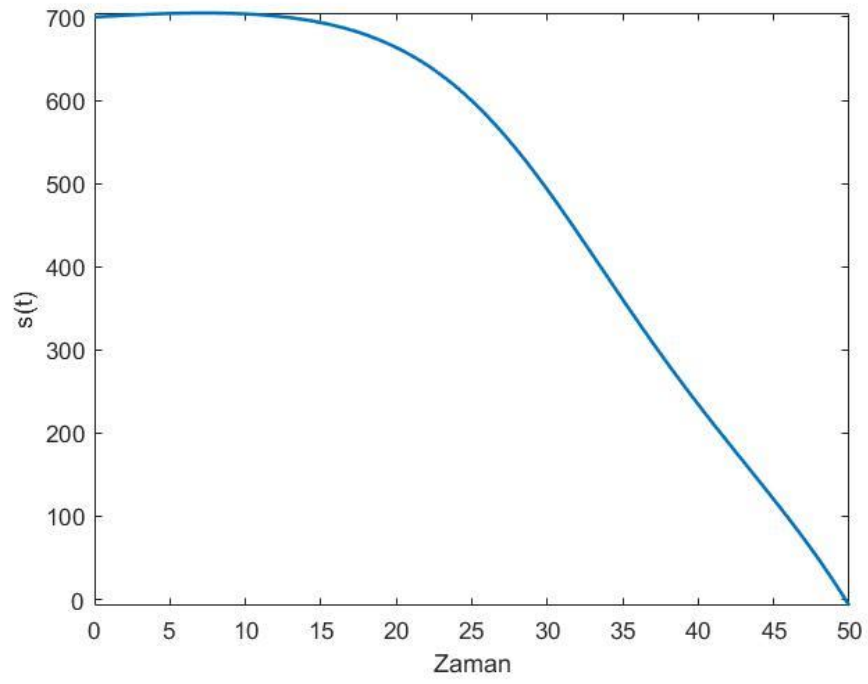
$$s(1) = 700, i_1(1) = 2, i_2(1) = 1, r(1) = 0 \tag{4.8}$$

ve parametreleri

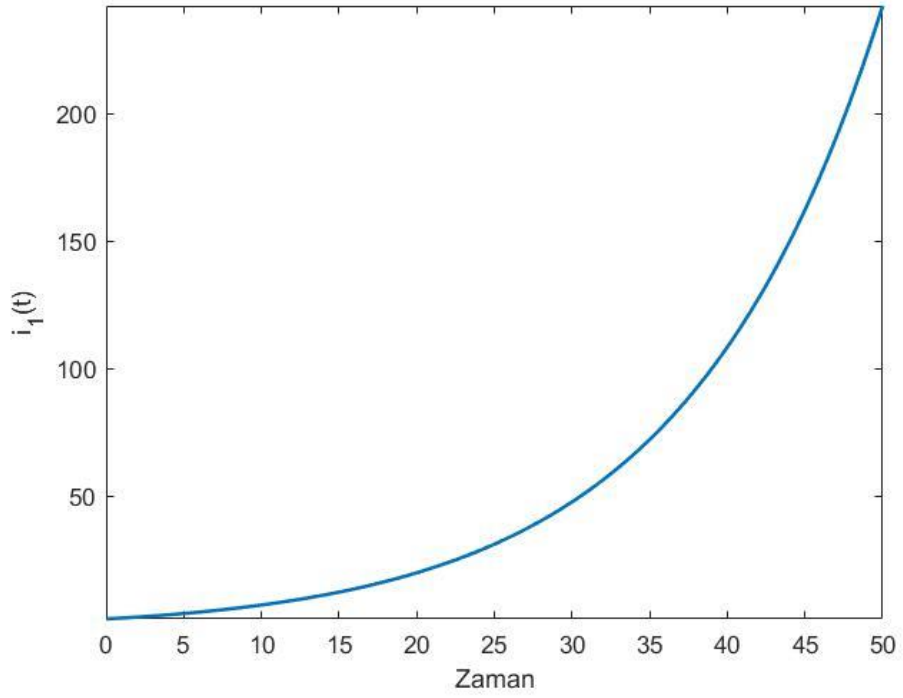
$$\begin{aligned}
\Lambda &= 2, \beta_1 = 0.25, \eta = 0.25, \beta_2 = 0.29, \gamma = 0.05, p_1 = 0.21, n = 700 \\
p_2 &= 0.007, \delta = 0.09, \alpha_1 = 0.01, \alpha_2 = 0.001, \mu = 0.03
\end{aligned}
\tag{4.9}$$

şeklinde seçilmiştir.

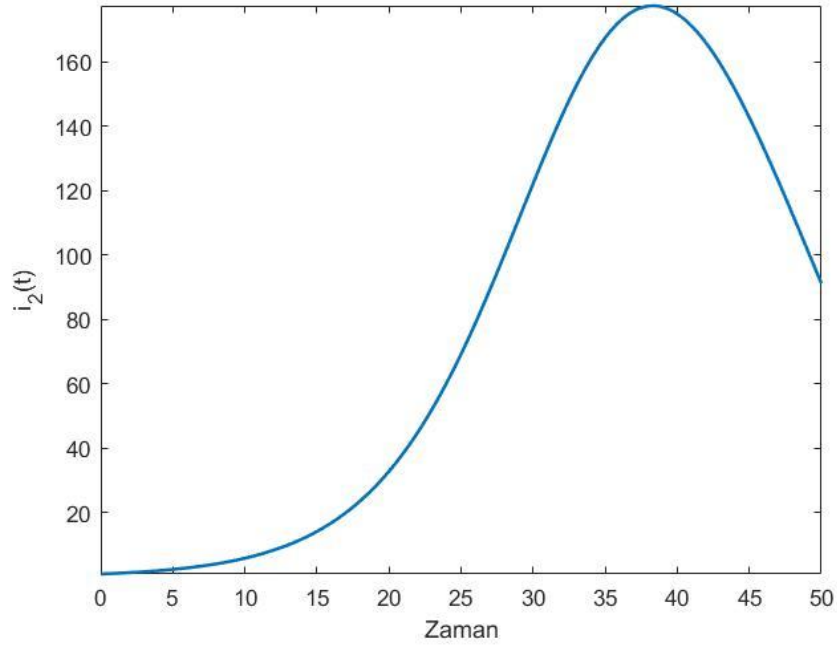
Ele alınan klasik türeve sahip dikey bulaş modeli için grafiksel gösterimler Şekil 4.1-4.4' de sunulmuştur.



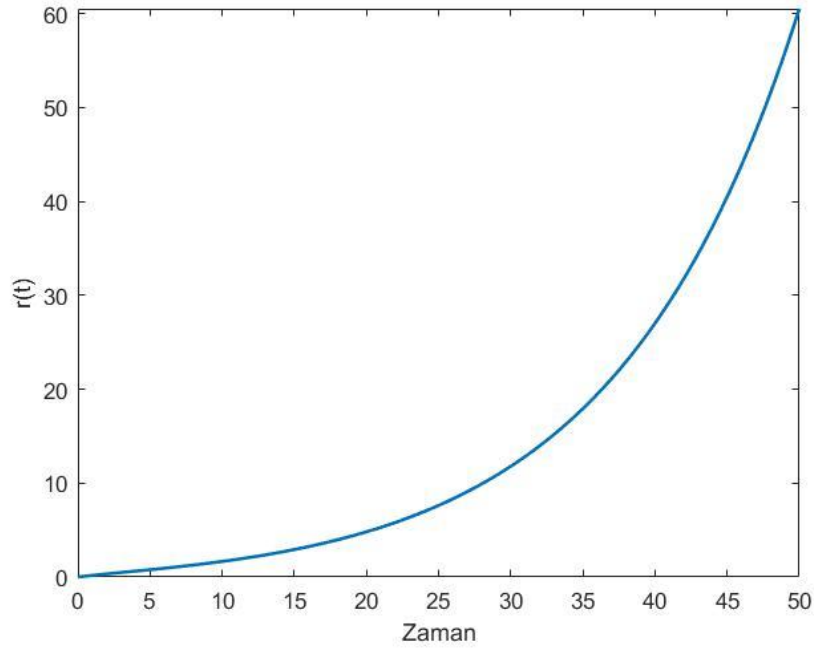
Şekil 4.1. Klasik türevli dikey bulaş modeli sistemi için simülasyon



Şekil 4.2. Klasik türevli dikey bulaş modeli sistemi için simülasyon



Şekil 4.3. Klasik türevli dikey bulaş modeli sistemi için simülasyon



Şekil 4.4. Klasik türevli dikey bulaş modeli sistemi için simülasyon

4.2.2. Atangana-Baleanu türevli dikey bulaş modelinin çözümü

Şimdi dikey bulaş modelini Atangana-Baleanu kesirli türevi ile modifiye edelim ve bu sistemin çözümü için Lagrange polinomlu metodu kullanalım (Atangana ve Baleanu, 2016).

$$\begin{cases} {}^{ABC}_0D_t^\alpha s(t) = \Lambda - \left(\frac{\beta_1 i_1}{1 + i_1} + \beta_2 i_2 \right) s + (\gamma - p_2) i_2 - \mu s - p_1 i_1 + \eta r, \\ {}^{ABC}_0D_t^\alpha i_1(t) = \frac{\beta_1 s i_1}{1 + i_1} - (\mu + \alpha_1 + \delta - p_1) i_1, \\ {}^{ABC}_0D_t^\alpha i_2(t) = \beta_2 s i_2 - (\mu + \alpha_2 + \gamma - p_2) i_2, \\ {}^{ABC}_0D_t^\alpha r(t) = \delta i_1 - (\eta + \mu) r, \end{cases} \quad (4.10)$$

şeklindedir. Burada sistemin başlangıç koşulları

$$s(0) = 700, i_1(0) = 2, i_2(0) = 1, r(0) = 0 \quad (4.11)$$

ve parametreleri

$$\begin{aligned} \Lambda = 2, \beta_1 = 0.25, \eta = 0.25, \beta_2 = 0.29, \gamma = 0.05, p_1 = 0.21, n = 700 \\ p_2 = 0.007, \delta = 0.09, \alpha_1 = 0.01, \alpha_2 = 0.001, \mu = 0.03 \end{aligned} \quad (4.12)$$

şeklindedir. Sistem incelendiğinde, sistemin farklı dinamik davranışlar sergilediği simülasyonlar ile görülecektir.

Yukarıdaki sistemi daha sade halde yazalım.

$$\begin{cases} {}^{ABC}_0D_t^\alpha s(t) = S(s, i_1, i_2, r, t) \\ {}^{ABC}_0D_t^\alpha i_1(t) = I_1(s, i_1, i_2, r, t) \\ {}^{ABC}_0D_t^\alpha i_2(t) = I_2(s, i_1, i_2, r, t) \\ {}^{ABC}_0D_t^\alpha r(t) = R(s, i_1, i_2, r, t) \end{cases} \quad (4.13)$$

Her bir denkleme Atangana-Baleanu integrali uygularsak, aşağıdaki sistemi elde ederiz:

$$\begin{aligned} s(t) &= s(0) + \frac{1 - \alpha}{AB(a)} S(s, i_1, i_2, r, t) + \frac{\alpha}{AB(a)\Gamma(a)} \int_0^t S(s, i_1, i_2, r, \tau) (t - \tau)^{a-1} d\tau \\ i_1(t) &= i_1(0) + \frac{1 - \alpha}{AB(a)} I_1(s, i_1, i_2, r, t) + \frac{\alpha}{AB(a)\Gamma(a)} \int_0^t I_1(s, i_1, i_2, r, \tau) (t - \tau)^{a-1} d\tau \\ i_2(t) &= i_2(0) + \frac{1 - \alpha}{AB(a)} I_2(s, i_1, i_2, r, t) + \frac{\alpha}{AB(a)\Gamma(a)} \int_0^t I_2(s, i_1, i_2, r, \tau) (t - \tau)^{a-1} d\tau \\ r(t) &= r(0) + \frac{1 - \alpha}{AB(a)} R(s, i_1, i_2, r, t) + \frac{\alpha}{AB(a)\Gamma(a)} \int_0^t R(s, i_1, i_2, r, \tau) (t - \tau)^{a-1} d\tau. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Yukarıdaki sistemi $t = t_{k+1}$ noktasında yazıp, denklemlerin sağ tarafında yer alan fonksiyonlar için Lagrange polinomunu kullanarak

$$s(t_{k+1}) = s(0) + \frac{1 - \alpha}{AB(a)} S(s^k, i_1^k, i_2^k, r^k, t_k)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\alpha}{AB(a)\Gamma(a)} \sum_{n=1}^k \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{S(s^n, i_1^n, i_2^n, r^n, t_n)}{h} (\tau - t_{n-1})(t_{k+1} - \tau)^{a-1} d\tau \\
& - \frac{\alpha}{AB(a)\Gamma(a)} \sum_{n=1}^k \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{S(s^{n-1}, i_1^{n-1}, i_2^{n-1}, r^{n-1}, t_{n-1})}{h} (\tau - t_n)(t_{k+1} - \tau)^{a-1} d\tau \\
i_1(t_{k+1}) &= i_1(0) + \frac{1-\alpha}{AB(a)} I_1(s^k, i_1^k, i_2^k, r^k, t_k) \\
& + \frac{\alpha}{AB(a)\Gamma(a)} \sum_{n=1}^k \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{I_1(s^n, i_1^n, i_2^n, r^n, t_n)}{h} (\tau - t_{n-1})(t_{k+1} - \tau)^{a-1} d\tau \\
& - \frac{\alpha}{AB(a)\Gamma(a)} \sum_{n=1}^k \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{I_1(s^{n-1}, i_1^{n-1}, i_2^{n-1}, r^{n-1}, t_{n-1})}{h} (\tau - t_n)(t_{k+1} - \tau)^{a-1} d\tau \\
i_2(t_{k+1}) &= i_2(0) + \frac{1-\alpha}{AB(a)} I_2(s^k, i_1^k, i_2^k, r^k, t_k) \\
& + \frac{\alpha}{AB(a)\Gamma(a)} \sum_{n=1}^k \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{I_2(s^n, i_1^n, i_2^n, r^n, t_n)}{h} (\tau - t_{n-1})(t_{k+1} - \tau)^{a-1} d\tau \\
& - \frac{\alpha}{AB(a)\Gamma(a)} \sum_{n=1}^k \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{I_2(s^{n-1}, i_1^{n-1}, i_2^{n-1}, r^{n-1}, t_{n-1})}{h} (\tau - t_n)(t_{k+1} - \tau)^{a-1} d\tau \\
r(t_{k+1}) &= r(0) + \frac{1-\alpha}{AB(a)} R^k I_1(s^k, i_1^k, i_2^k, r^k, t_k) \\
& + \frac{\alpha}{AB(a)\Gamma(a)} \sum_{n=1}^k \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{R(s^n, i_1^n, i_2^n, r^n, t_n)}{h} (\tau - t_{n-1})(t_{k+1} - \tau)^{a-1} d\tau \\
& - \frac{\alpha}{AB(a)\Gamma(a)} \sum_{n=1}^k \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{R(s^{n-1}, i_1^{n-1}, i_2^{n-1}, r^{n-1}, t_{n-1})}{h} (\tau - t_n)(t_{k+1} - \tau)^{a-1} d\tau
\end{aligned} \tag{4.15}$$

eşitliklerini yazarız. Yukarıda verilen integraller hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
s^{k+1} &= s(0) + \frac{1-\alpha}{AB(a)} S(s^k, i_1^k, i_2^k, r^k, t_k) \\
&+ \frac{\alpha h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)AB(\alpha)} \sum_{n=1}^k S(s^n, i_1^n, i_2^n, r^n, t_n) \begin{bmatrix} (k-n+1)^a(k-n+2+a) \\ -(k-n)^a(k-n+2+2a) \end{bmatrix} \\
&- \frac{\alpha h^\alpha}{\Gamma(a+2)AB(\alpha)} \sum_{n=1}^k S(s^{n-1}, i_1^{n-1}, i_2^{n-1}, r^{n-1}, t_{n-1}) \\
&\quad \times \begin{bmatrix} (k-n+1)^{a+1}(k-n+2+a) \\ -(k-n)^a(k-n+1+a) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

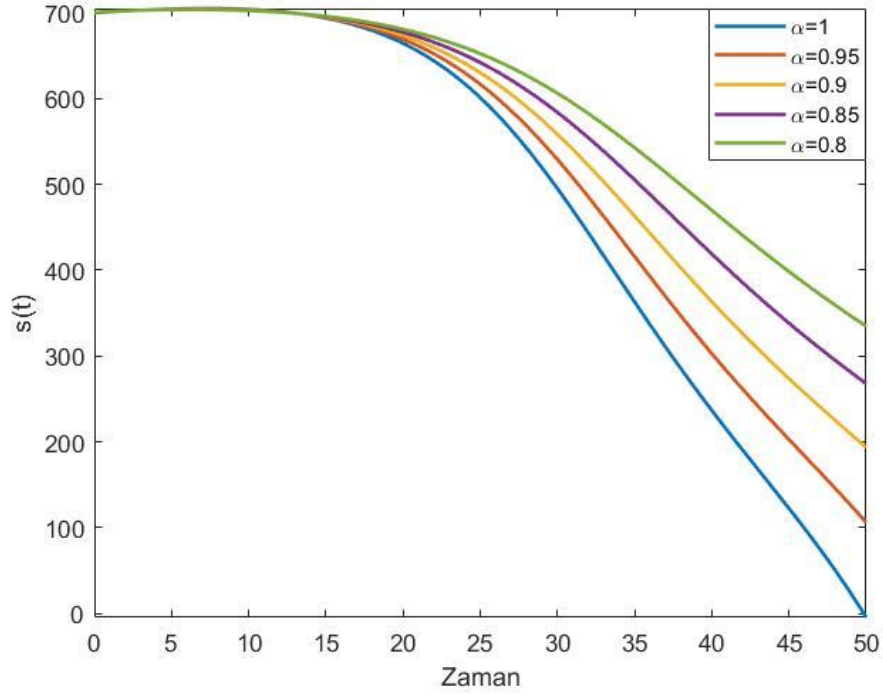
$$\begin{aligned}
i_1^{k+1} &= i_1(0) + \frac{1-\alpha}{AB(a)} I_1(s^k, i_1^k, i_2^k, r^k, t_k) \\
&+ \frac{\alpha h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)AB(\alpha)} \sum_{n=1}^k I_1(s^n, i_1^n, i_2^n, r^n, t_n) \begin{bmatrix} (k-n+1)^a(k-n+2+a) \\ -(k-n)^a(k-n+2+2a) \end{bmatrix} \\
&- \frac{\alpha h^\alpha}{\Gamma(a+2)AB(\alpha)} \sum_{n=1}^k I_1(s^{n-1}, i_1^{n-1}, i_2^{n-1}, r^{n-1}, t_{n-1}) \\
&\quad \times \begin{bmatrix} (k-n+1)^{a+1}(k-n+2+a) \\ -(k-n)^a(k-n+1+a) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
i_2^{k+1} &= i_2(0) + \frac{1-\alpha}{AB(a)} I_2(s^k, i_1^k, i_2^k, r^k, t_k) \\
&+ \frac{\alpha h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)AB(\alpha)} \sum_{n=1}^k I_2(s^n, i_1^n, i_2^n, r^n, t_n) \begin{bmatrix} (k-n+1)^a(k-n+2+a) \\ -(k-n)^a(k-n+2+2a) \end{bmatrix} \\
&- \frac{\alpha h^\alpha}{\Gamma(a+2)AB(\alpha)} \sum_{n=1}^k I_2(s^{n-1}, i_1^{n-1}, i_2^{n-1}, r^{n-1}, t_{n-1}) \\
&\quad \times \begin{bmatrix} (k-n+1)^{a+1}(k-n+2+a) \\ -(k-n)^a(k-n+1+a) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

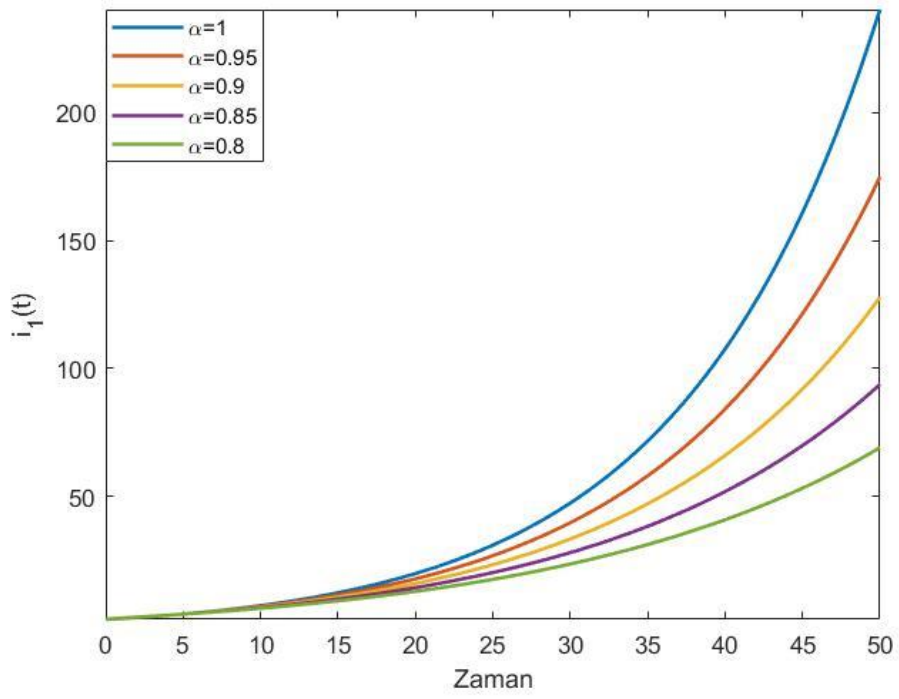
$$r^{k+1} = r(0) + \frac{1-\alpha}{AB(a)} R(s^k, i_1^k, i_2^k, r^k, t_k)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\alpha h^\alpha}{\Gamma(\alpha + 2)AB(\alpha)} \sum_{n=1}^k R(s^n, i_1^n, i_2^n, r^n, t_n) \begin{bmatrix} (k-n+1)^a(k-n+2+a) \\ -(k-n)^a(k-n+2+2a) \end{bmatrix} \\
& - \frac{\alpha h^\alpha}{\Gamma(\alpha + 2)AB(\alpha)} \sum_{n=1}^k R(s^{n-1}, i_1^{n-1}, i_2^{n-1}, r^{n-1}, t_{n-1}) \\
& \quad \times \begin{bmatrix} (k-n+1)^{a+1}(k-n+2+a) \\ -(k-n)^a(k-n+1+a) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.16}$$

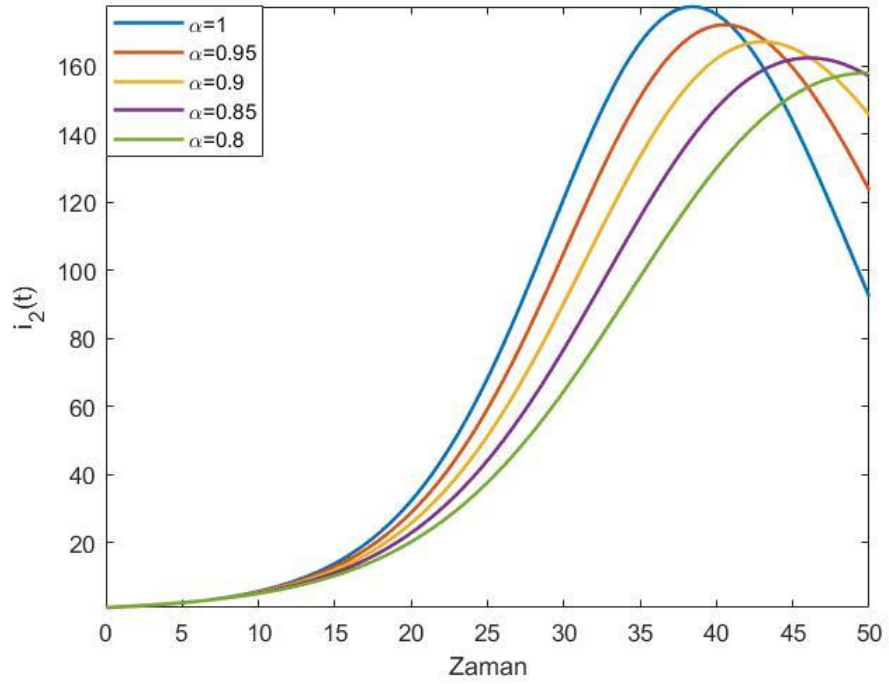
Şekil 4.5-4.8 de, ele alınan Atangana-Baleanu kesirli türevine sahip dikey bulaş modelinin farklı mertebeden kesirli türev değerleri için nümerik simülasyonlar sunulmuştur.



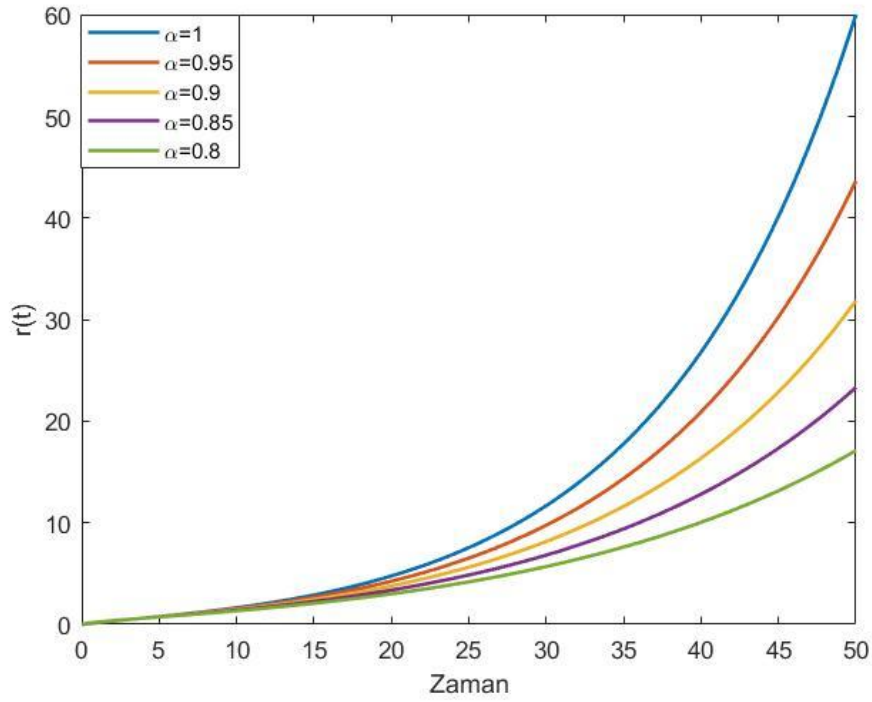
Şekil 4.5. Atangana-Baleanu türevli dikey bulaş modeli sistemi için simülasyon



Şekil 4.6. Atangana-Baleanu türevli dikey bulaş modeli sistemi için simülasyon



Şekil 4.7. Atangana-Baleanu türevli dikey bulaş modeli sistemi için simülasyon



Şekil 4.8. Atangana-Baleanu türevli dikey bulaş modeli sistemi için simülasyon

4.2.3. Caputo türevli dikey bulaş modelinin çözümü

Şimdi dikey bulaş modeli sistemini Caputo kesirli türevi ile modifiye edelim ve bu sistemin çözümü için Lagrange polinomlu metodu kullanalım.

$$\begin{cases} {}^C_0D_t^\alpha s(t) = S(s, i_1, i_2, r, t) \\ {}^C_0D_t^\alpha i_1(t) = I_1(s, i_1, i_2, r, t) \\ {}^C_0D_t^\alpha i_2(t) = I_2(s, i_1, i_2, r, t) \\ {}^C_0D_t^\alpha r(t) = R(s, i_1, i_2, r, t) \end{cases}$$

(4.17)

şeklindedir. Burada sistemin başlangıç koşulları

$$s(0) = 700, i_1(0) = 2, i_2(0) = 1, r(0) = 0$$

(4.18)

ve parametreleri

$$\begin{aligned} \Lambda = 2, \beta_1 = 0.25, \eta = 0.25, \beta_2 = 0.29, \gamma = 0.05, p_1 = 0.21, n = 700 \\ p_2 = 0.007, \delta = 0.09, \alpha_1 = 0.01, \alpha_2 = 0.001, \mu = 0.03 \end{aligned}$$

(4.19)

şeklindedir.

Her bir denkleme Caputo integrali uygularsak, aşağıdaki sistemi elde ederiz:

$$s(t) = s(0) + \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^t S(s, i_1, i_2, r, \tau) (t - \tau)^{a-1} d\tau$$

$$\begin{aligned}
i_1(t) &= i_1(0) + \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^t I_1(s, i_1, i_2, r, \tau)(t - \tau)^{a-1} d\tau \\
i_2(t) &= i_2(0) + \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^t I_2(s, i_1, i_2, r, \tau)(t - \tau)^{a-1} d\tau. \\
r(t) &= r(0) + \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^t R(s, i_1, i_2, r, \tau)(t - \tau)^{a-1} d\tau
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Yukarıdaki sistemi $t = t_{k+1}$ noktasında yazıp, denklemlerin sağ tarafında yer alan fonksiyonlar için Lagrange polinomunu kullanarak

$$\begin{aligned}
s(t_{k+1}) &= s(0) + \frac{1}{\Gamma(a)} \sum_{n=1}^k \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{S(s^n, i_1^n, i_2^n, r^n, t_n)}{h} (\tau - t_{n-1})(t_{k+1} - \tau)^{a-1} d\tau \\
&\quad - \frac{1}{\Gamma(a)} \sum_{n=1}^k \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{S(s^{n-1}, i_1^{n-1}, i_2^{n-1}, r^{n-1}, t_{n-1})}{h} (\tau - t_n)(t_{k+1} - \tau)^{a-1} d\tau \\
i_1(t_{k+1}) &= i_1(0) + \frac{1}{\Gamma(a)} \sum_{n=1}^k \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{I_1(s^n, i_1^n, i_2^n, r^n, t_n)}{h} (\tau - t_{n-1})(t_{k+1} - \tau)^{a-1} d\tau \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(a)} \sum_{n=1}^k \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{I_1(s^{n-1}, i_1^{n-1}, i_2^{n-1}, r^{n-1}, t_{n-1})}{h} (\tau - t_n)(t_{k+1} - \tau)^{a-1} d\tau \\
i_2(t_{k+1}) &= i_2(0) + \frac{1}{\Gamma(a)} \sum_{n=1}^k \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{I_2(s^n, i_1^n, i_2^n, r^n, t_n)}{h} (\tau - t_{n-1})(t_{k+1} - \tau)^{a-1} d\tau \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(a)} \sum_{n=1}^k \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{I_2(s^{n-1}, i_1^{n-1}, i_2^{n-1}, r^{n-1}, t_{n-1})}{h} (\tau - t_n)(t_{k+1} - \tau)^{a-1} d\tau \\
r(t_{k+1}) &= r(0) + \frac{1}{\Gamma(a)} \sum_{n=1}^k \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{R(s^n, i_1^n, i_2^n, r^n, t_n)}{h} (\tau - t_{n-1})(t_{k+1} - \tau)^{a-1} d\tau \\
&\quad - \frac{1}{\Gamma(a)} \sum_{n=1}^k \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{R(s^{n-1}, i_1^{n-1}, i_2^{n-1}, r^{n-1}, t_{n-1})}{h} (\tau - t_n)(t_{k+1} - \tau)^{a-1} d\tau
\end{aligned}$$

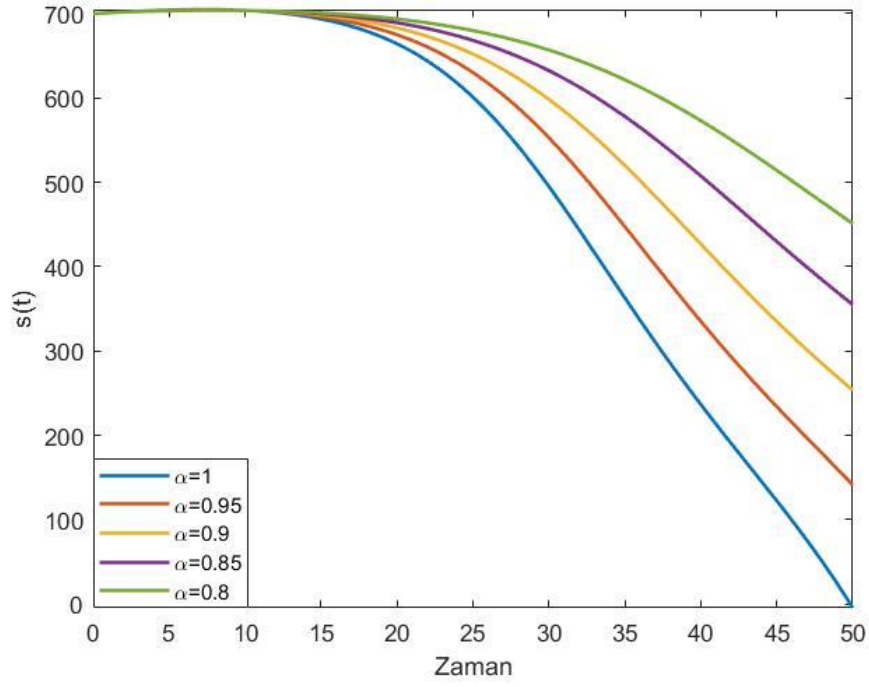
(4.21)

eşitliklerini yazarız. Yukarıda verilen integraller hesaplanırsa

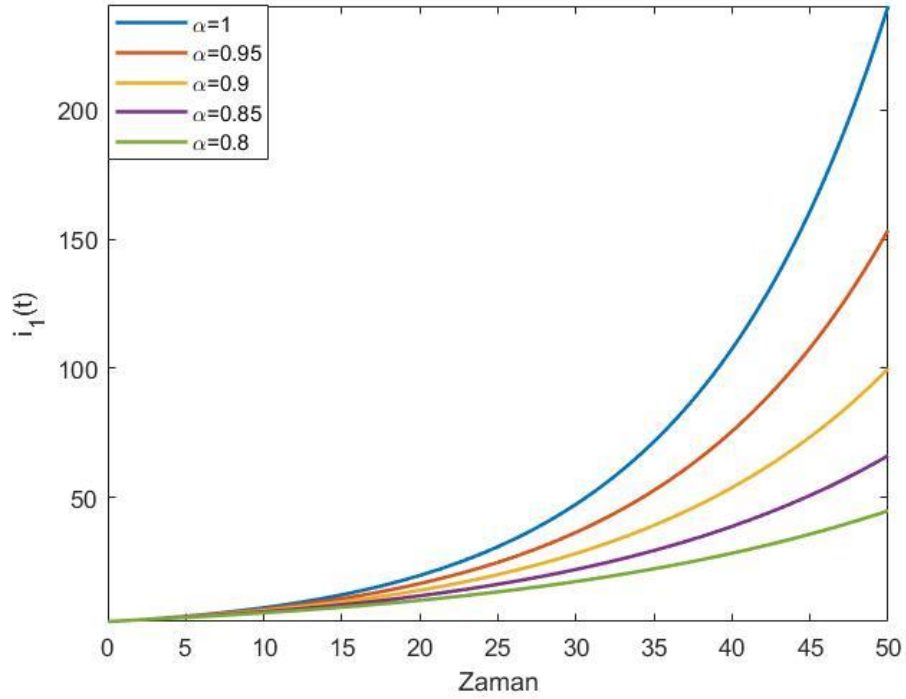
$$\begin{aligned}
s^{k+1} &= s(0) + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} \sum_{n=0}^k S(s^n, i_1^n, i_2^n, r^n, t_n) \begin{bmatrix} (k-n+1)^a(k-n+2+a) \\ -(k-n)^a(k-n+2+2a) \end{bmatrix} \\
&\quad - \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} \sum_{n=0}^k S(s^{n-1}, i_1^{n-1}, i_2^{n-1}, r^{n-1}, t_{n-1}) \begin{bmatrix} (k-n+1)^{a+1}(k-n+2+a) \\ -(k-n)^a(k-n+1+a) \end{bmatrix}. \\
i_1^{k+1} &= i_1(0) + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} \sum_{n=0}^k I_1(s^n, i_1^n, i_2^n, r^n, t_n) \begin{bmatrix} (k-n+1)^a(k-n+2+a) \\ -(k-n)^a(k-n+2+2a) \end{bmatrix} \\
&\quad - \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} \sum_{n=0}^k I_1(s^{n-1}, i_1^{n-1}, i_2^{n-1}, r^{n-1}, t_{n-1}) \begin{bmatrix} (k-n+1)^{a+1}(k-n+2+a) \\ -(k-n)^a(k-n+1+a) \end{bmatrix}. \\
i_2^{k+1} &= i_2(0) + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} \sum_{n=0}^k I_2(s^n, i_1^n, i_2^n, r^n, t_n) \begin{bmatrix} (k-n+1)^a(k-n+2+a) \\ -(k-n)^a(k-n+2+2a) \end{bmatrix} \\
&\quad - \frac{\alpha h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)AB(\alpha)} \sum_{n=0}^k I_2(s^{n-1}, i_1^{n-1}, i_2^{n-1}, r^{n-1}, t_{n-1}) \begin{bmatrix} (k-n+1)^{a+1}(k-n+2+a) \\ -(k-n)^a(k-n+1+a) \end{bmatrix} \\
r(t_{k+1}) &= r(0) + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} \sum_{n=0}^k R(s^n, i_1^n, i_2^n, r^n, t_n) \begin{bmatrix} (k-n+1)^a(k-n+2+a) \\ -(k-n)^a(k-n+2+2a) \end{bmatrix} \\
&\quad - \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} \sum_{n=0}^k R(s^{n-1}, i_1^{n-1}, i_2^{n-1}, r^{n-1}, t_{n-1}) \begin{bmatrix} (k-n+1)^{a+1}(k-n+2+a) \\ -(k-n)^a(k-n+1+a) \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

(4.22)

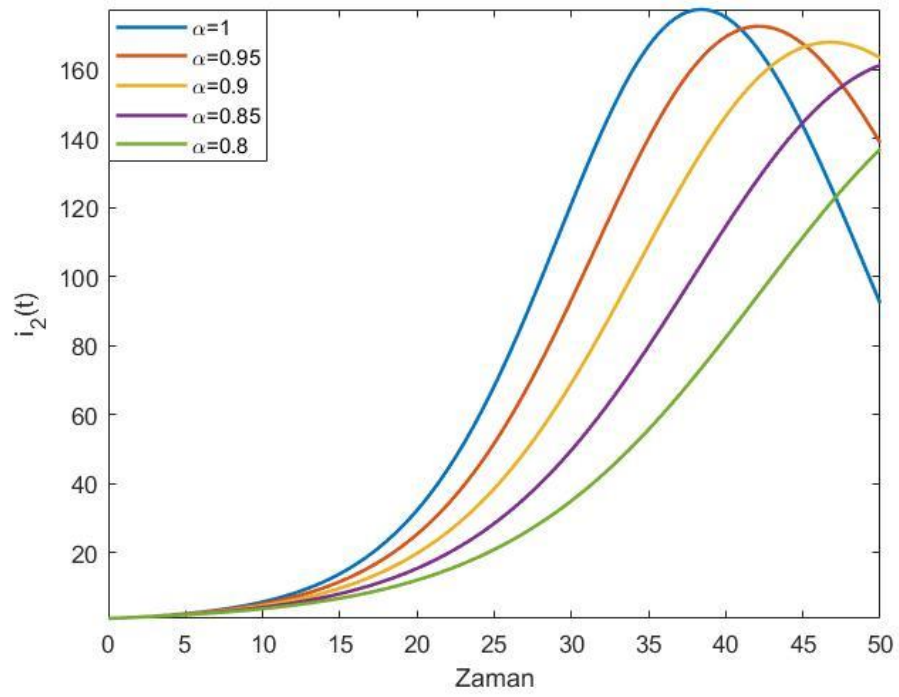
Şekil 4.9-4.12’ de, ele alınan Caputo kesirli türevine sahip dikey bulaş modelinin farklı mertebeden kesirli türev değerleri için nümerik simülasyonlar sunulmuştur.



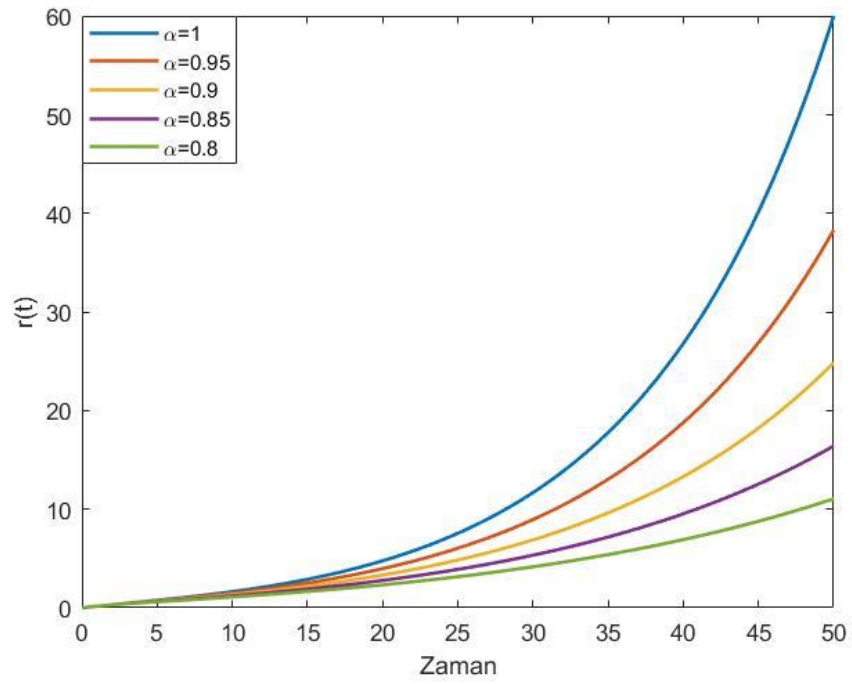
Şekil 4.9. Caputo türevli dikey bulaş modeli sistemi için simülasyon



Şekil 4.10. Caputo türevli dikey bulaş modeli sistemi için simülasyon



Şekil 4.11. Caputo türevli dikey bulaş modeli sistemi için simülasyon



Şekil 4.12. Caputo türevli dikey bulaş modeli sistemi için simülasyon

4.2.4. Caputo-Fabrizio türevli dikey bulaş modelinin çözümü

Son olarak dikey bulaş modeli sistemini Caputo-Fabrizio kesirli türevi ile modifiye edelim ve bu sistemin çözümü için Lagrange polinomlu metodu kullanalım. Söz konusu model

$$\begin{cases} {}^{CF}_0D_t^\alpha s(t) = S(s, i_1, i_2, r, t) \\ {}^{CF}_0D_t^\alpha i_1(t) = I_1(s, i_1, i_2, r, t) \\ {}^{CF}_0D_t^\alpha i_2(t) = I_2(s, i_1, i_2, r, t) \\ {}^{CF}_0D_t^\alpha r(t) = R(s, i_1, i_2, r, t) \end{cases} \quad (4.23)$$

şeklindedir. Burada sistemin başlangıç koşulları

$$s(0) = 700, i_1(0) = 2, i_2(0) = 1, r(0) = 0 \quad (4.24)$$

ve parametreleri

$$\begin{aligned} \Lambda = 2, \beta_1 = 0.25, \eta = 0.25, \beta_2 = 0.29, \gamma = 0.05, p_1 = 0.21, n = 700 \\ p_2 = 0.007, \delta = 0.09, \alpha_1 = 0.01, \alpha_2 = 0.001, \mu = 0.03 \end{aligned} \quad (4.25)$$

şeklindedir.

Her bir denkleme Caputo-Fabrizio integrali uygularsak, aşağıdaki sistemi elde ederiz:

$$\begin{aligned} s(t) &= s(0) + \frac{1-\alpha}{M(a)} S(s, i_1, i_2, r, t) + \frac{\alpha}{M(a)} \int_0^t S(s, i_1, i_2, r, \tau) d\tau \\ i_1(t) &= i_1(0) + \frac{1-\alpha}{M(a)} I_1(s, i_1, i_2, r, t) + \frac{\alpha}{M(a)} \int_0^t I_1(s, i_1, i_2, r, \tau) d\tau \\ i_2(t) &= i_2(0) + \frac{1-\alpha}{M(a)} I_2(s, i_1, i_2, r, t) + \frac{\alpha}{M(a)} \int_0^t I_2(s, i_1, i_2, r, \tau) d\tau \\ r(t) &= r(0) + \frac{1-\alpha}{M(a)} R(s, i_1, i_2, r, t) + \frac{\alpha}{M(a)} \int_0^t R(s, i_1, i_2, r, \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Yukarıdaki denklem verilen $t = t_k$ ve $t = t_{k+1}, k = 0, 1, 2, \dots$ noktalarında yazılıp elde edilen iki denklemin farkı alınır, aşağıdaki şekilde yeniden düzenlenir:

$$\begin{aligned} s(t_{k+1}) &= s(t_k) + \frac{1-\alpha}{M(a)} [S(s^k, i_1^k, i_2^k, r^k, t_k) - S(s^{k-1}, i_1^{k-1}, i_2^{k-1}, r^{k-1}, t_{k-1})] \\ &\quad + \frac{\alpha}{M(a)} \int_{t_k}^{t_{k+1}} S(s, i_1, i_2, r, \tau) d\tau \\ i_1(t_{k+1}) &= i_1(t_k) + \frac{1-\alpha}{M(a)} [I_1(s^k, i_1^k, i_2^k, r^k, t_k) - I_1(s^{k-1}, i_1^{k-1}, i_2^{k-1}, r^{k-1}, t_{k-1})] \end{aligned}$$

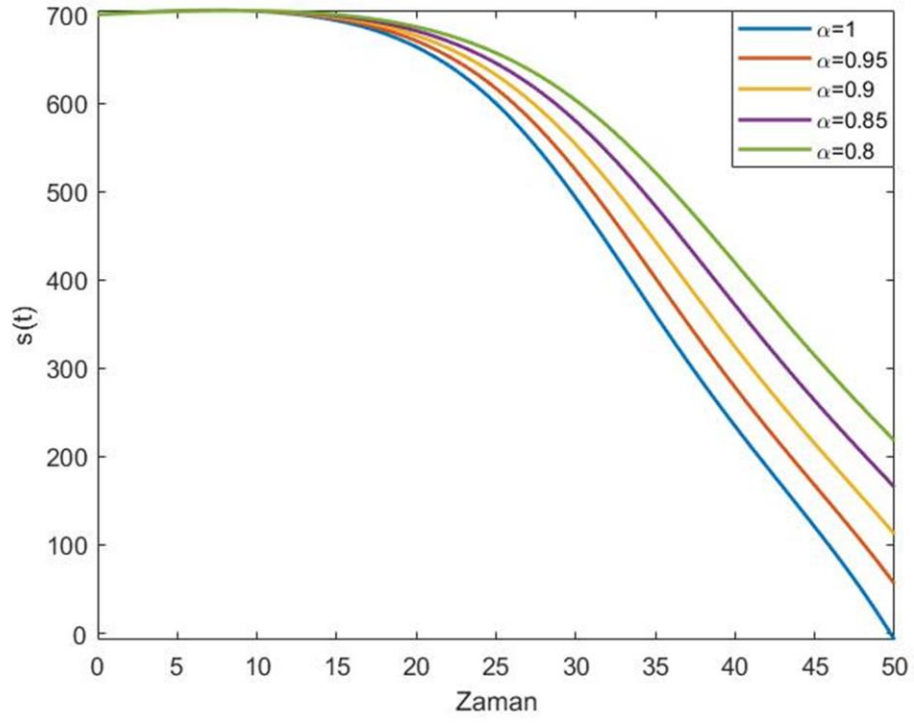
$$\begin{aligned}
& + \frac{\alpha}{M(a)} \int_{t_k}^{t_{k+1}} I_1(s, i_1, i_2, r, \tau) d\tau \\
i_2(t_{k+1}) &= i_2(t_k) + \frac{1-\alpha}{M(a)} [I_2(s^k, i_1^k, i_2^k, r^k, t_k) - I_2(s^{k-1}, i_1^{k-1}, i_2^{k-1}, r^{k-1}, t_{k-1})] \\
& + \frac{\alpha}{M(a)} \int_{t_k}^{t_{k+1}} I_2(s, i_1, i_2, r, \tau) d\tau \\
r(t_{k+1}) &= r(t_k) + \frac{1-\alpha}{M(a)} [R(s^k, i_1^k, i_2^k, r^k, t_k) - R(s^{k-1}, i_1^{k-1}, i_2^{k-1}, r^{k-1}, t_{k-1})] \\
& + \frac{\alpha}{M(a)} \int_{t_k}^{t_{k+1}} R(s, i_1, i_2, r, \tau) d\tau
\end{aligned} \tag{4.27}$$

$[t_k, t_{k+1}]$ aralığında, Lagrange interpolasyon polinomu kullanılarak, bu model için nümerik algoritma

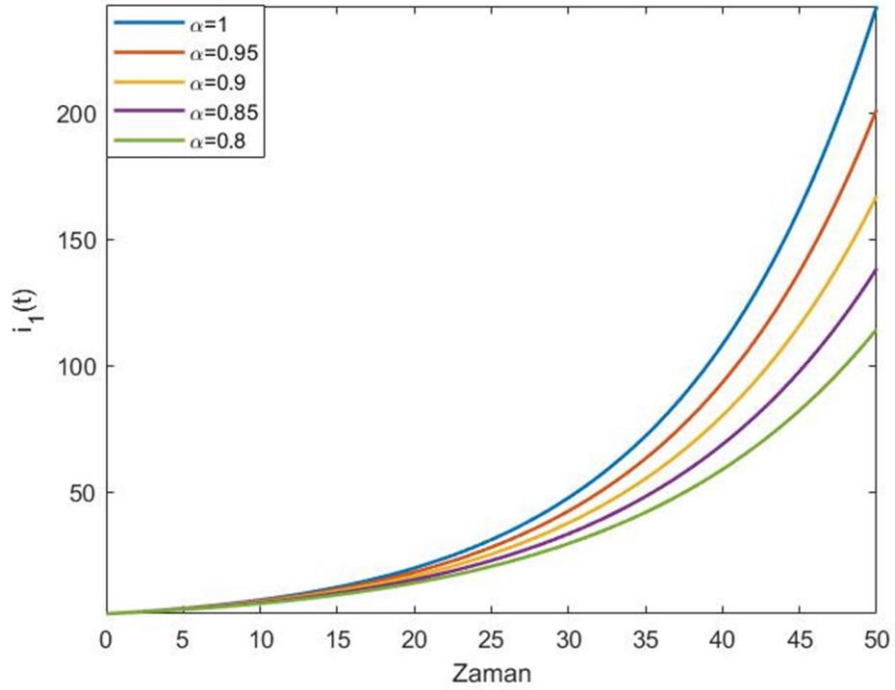
$$\begin{aligned}
s^{k+1} &= s^k + \frac{1-\alpha}{M(a)} [S(s^k, i_1^k, i_2^k, r^k, t_k) - S(s^{k-1}, i_1^{k-1}, i_2^{k-1}, r^{k-1}, t_{k-1})] \\
& + \frac{\alpha}{M(a)} \left[\frac{3h}{2} S(s^k, i_1^k, i_2^k, r^k, t_k) - \frac{h}{2} S(s^{k-1}, i_1^{k-1}, i_2^{k-1}, r^{k-1}, t_{k-1}) \right] \\
i_1^{k+1} &= i_1^k + \frac{1-\alpha}{M(a)} [I_1(s^k, i_1^k, i_2^k, r^k, t_k) - I_1(s^{k-1}, i_1^{k-1}, i_2^{k-1}, r^{k-1}, t_{k-1})] \\
& + \frac{\alpha}{M(a)} \left[\frac{3h}{2} I_1(s^k, i_1^k, i_2^k, r^k, t_k) - \frac{h}{2} I_1(s^{k-1}, i_1^{k-1}, i_2^{k-1}, r^{k-1}, t_{k-1}) \right] \\
i_2^{k+1} &= i_2^k + \frac{1-\alpha}{M(a)} [I_2(s^k, i_1^k, i_2^k, r^k, t_k) - I_2(s^{k-1}, i_1^{k-1}, i_2^{k-1}, r^{k-1}, t_{k-1})] \\
& + \frac{\alpha}{M(a)} \left[\frac{3h}{2} I_2(s^k, i_1^k, i_2^k, r^k, t_k) - \frac{h}{2} I_2(s^{k-1}, i_1^{k-1}, i_2^{k-1}, r^{k-1}, t_{k-1}) \right] \\
r^{k+1} &= r^k + \frac{1-\alpha}{M(a)} [R(s^k, i_1^k, i_2^k, r^k, t_k) - R(s^{k-1}, i_1^{k-1}, i_2^{k-1}, r^{k-1}, t_{k-1})] \\
& + \frac{\alpha}{M(a)} \left[\frac{3h}{2} R(s^k, i_1^k, i_2^k, r^k, t_k) - \frac{h}{2} R(s^{k-1}, i_1^{k-1}, i_2^{k-1}, r^{k-1}, t_{k-1}) \right]
\end{aligned} \tag{4.28}$$

şeklinde elde edilir.

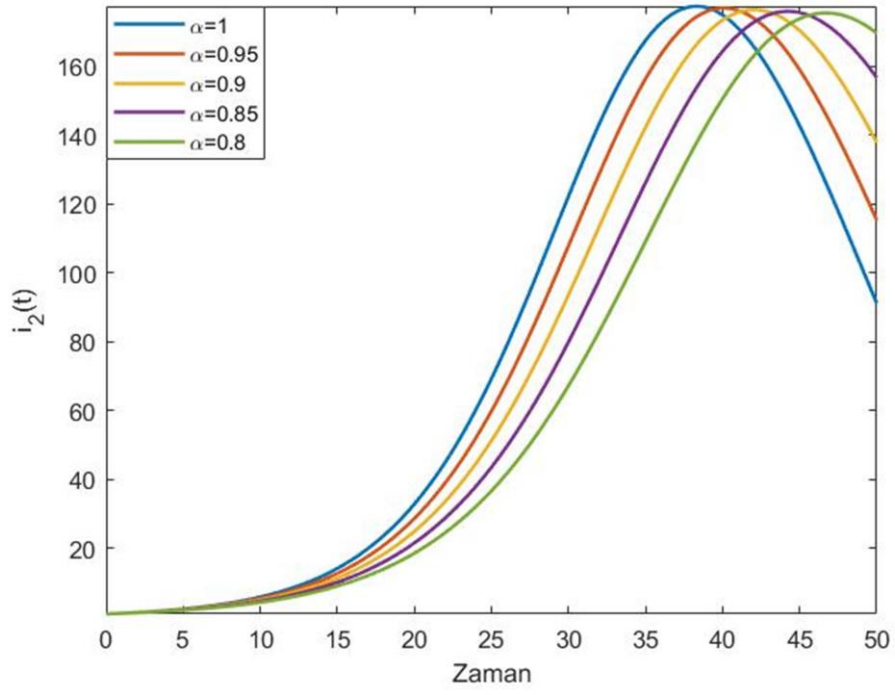
Şekil 4.13-4.16' da, ele alınan modelin farklı α değerleri için nümerik simülasyonlar sunulmuştur.



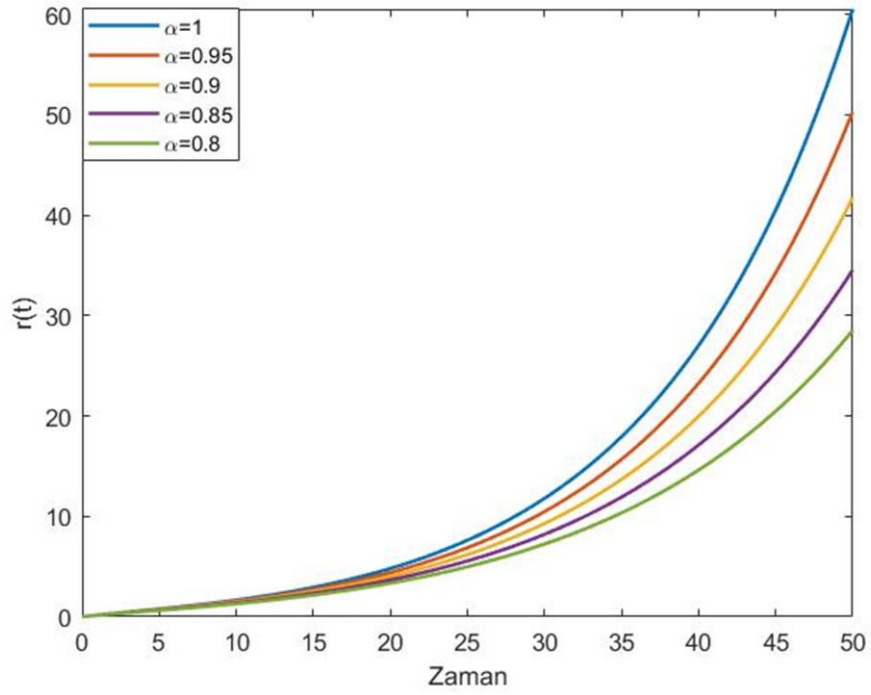
Şekil 4.13. Caputo-Fabrizio türevli dikey bulaş modeli sistemi için simülasyon



Şekil 4.14. Caputo-Fabrizio türevli dikey bulaş modeli sistemi için simülasyon



Şekil 4.15. Caputo-Fabrizio türevli dikey bulaş modeli sistemi için simülasyon



Şekil 4.16. Caputo-Fabrizio türevli dikey bulaş modeli sistemi için simülasyon

4.3. İki hastalığın dikey bulaşını temsil eden bir parçalı diferansiyel denklem

Parçalı diferansiyel denklem kavramı, Atangana ve İğret Araz (2023)'in çalışmasında ele alınmış ve bir olayın değişen süreçlerini modellemede kullanılmıştır. Örneğin, meme kanseri olan bir kadında kanser hücrelerinin vücuda yayılmaya daha yatkın olduğu durumlarda tedavi için cerrahi işlemden sonra, kemoterapinin yetersiz olduğu durumda radyasyonun da kullanılabildiği bilinmektedir. Literatürde sadece kemoterapi ya da kemoterapi ve radyoterapi tedavisi gören bir hastadaki tümör değişimini inceleyen çalışmalar bulunsa da, bu iki süreci belirli zaman aralıklarında tek bir süreç olarak yaşayan bir hastadaki tümör değişimi parçalı diferansiyel denklem kullanılarak modellenenmiştir. Birinci süreçte kemoterapinin, ikinci süreçte ise kemoterapinin yanı sıra radyoterapinin uygulandığı iki süreci modelleyen parçalı sistem, bu iki sürecin kanser hücrelerindeki değişimini araştırmaya olanak sağlamıştır. Böyle farklı süreçleri tek bir süreç olarak birleştiren bu kavramı kullanarak, salgının başladığı zamanda birinci dikey bulaşın olduğu bir popülasyonda bir süre sonra ikinci dikey bulaşın da görülebildiği varsayımını modelleyen bir parçalı diferansiyel denklem ile ilgileneceğiz. Söz konusu model aşağıdaki sistem ile temsil edilir:

$$\begin{cases} \frac{ds}{dt} = \Lambda - \left(\frac{\beta_1 i_1}{1 + i_1} \right) \frac{s}{N} - \mu s - p_1 i_1 + \eta r \\ \frac{di_1}{dt} = \left(\frac{\beta_1 i_1}{1 + i_1} \right) \frac{s}{N} - (\mu + \delta) i_1 \\ \frac{dr}{dt} = \delta i_1 - \mu r, \\ 0 \leq t \leq t_1, \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{ds}{dt} = \Lambda - \left(\frac{\beta_1 i_1}{1 + i_1} + \beta_2 i_2 \right) \frac{s}{N} + (\gamma - p_2) i_2 - \mu s - p_1 i_1 + \eta r, \\ \frac{di_1}{dt} = \left(\frac{\beta_1 i_1}{1 + i_1} \right) \frac{s}{N} - (\mu + \alpha_1 + \delta - p_1) i_1, \\ \frac{di_2}{dt} = \frac{\beta_2 i_2 s}{N} - (\mu + \alpha_2 + \gamma - p_2) i_2, \\ \frac{dr}{dt} = \delta i_1 - (\eta + \mu) r, \end{array} \right. t_1 \leq t \leq T. \end{cases} \quad (4.29)$$

Karmaşıklığı gidermek için aşağıdaki notasyonları sunalım:

$$h_i = (s, i_1, i_2, r) \quad (4.30)$$

ve

$$\begin{aligned}
H_i(t, h_i) &= \begin{bmatrix} \Lambda - \left(\frac{\beta_1 i_1}{1 + i_1} \right) \frac{s}{N} - \mu s - p_1 i_1 + \eta r \\ \frac{\beta_1 s i_1}{N} - (\mu + \delta) i_1 \\ \delta i_1 - \mu r \end{bmatrix}, \\
V_i(t, h_i) &= \begin{bmatrix} \Lambda - \left(\frac{\beta_1 i_1}{1 + i_1} + \beta_2 i_2 \right) \frac{s}{N} + (\gamma - p_2) i_2 - \mu s - p_1 i_1 + \eta r \\ \frac{\beta_1 i_1}{1 + i_1} \frac{s}{N} - (\mu + \alpha_1 + \delta - p_1) i_1 \\ \frac{\beta_2 i_2 s}{N} - (\mu + \alpha_2 + \gamma - p_2) i_2, \\ \delta i_1 - (\eta + \mu) r \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.31}$$

alalım.

Parçalı diferansiyel denklemlerin farklı versiyonlarda kullanılabilmesinden dolayı bu tezde bu kavramın bazı versiyonlarını ele alacağız (Atangana ve İğret Araz, 2023). Bu versiyonlardan bazıları ayrı ayrı incelenerek, sunulan durumlardan bazıları için ise grafiksel gösterimler simüle edilecektir.

1. durum: (Birinci Bulaş - Birinci+İkinci dikey bulaş):

$0 \leq t \leq t_1$ aralığında sadece birinci dikey bulaşın, $t_1 \leq t \leq T$ aralığında ise birinci dikey ve ikinci dikey bulaşın birlikte olduğu süreci temsil eden klasik türeve sahip model

$$\frac{dh_i}{dt} = \begin{cases} H_i(t, h_i); & 0 \leq t \leq t_1 \\ V_i(t, v_i); & t_1 \leq t \leq T \end{cases} \tag{4.32}$$

şeklindedir. Yukarıda verilen sistemi integrallersek,

$$h_i(t) = \begin{cases} h_i(0) + \int_0^t H_i(s, h_i) ds & ; \quad 0 \leq t \leq t_1 \\ h_i(t_1) + \int_{t_1}^t V_i(s, h_i) ds & ; \quad t_1 \leq t \leq T \end{cases} \tag{4.33}$$

olduğu görülür. Yukarıdaki denklem $t = t_{n+1}$ noktasında aşağıdaki gibi yazılır:

$$h_i(t_{n+1}) = \begin{cases} h_i(0) + \sum_{k=0}^{n_1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} H_i(s, h_i) ds & ; \quad 0 \leq t \leq t_1 \\ h_i(t_1) + \sum_{k=n_1+1}^n \int_{t_k}^{t_{k+1}} V_i(s, h_i) ds & ; \quad t_1 \leq t \leq T \end{cases}$$

İntegralde yer alan $H_i(s, h_i)$ ve $V_i(s, v_i)$ fonksiyonları Lagrange interpolasyon polinomu ile yaklaşırlır:

$$H_i(s, h_i) \approx \frac{s - t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}} H(t_k, h_i(t_k)) - \frac{s - t_k}{t_k - t_{k-1}} H(t_{k-1}, h_i(t_{k-1})) \quad (4.34)$$

ve

$$V_i(s, h_i) \approx \frac{s - t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}} V(t_k, h_i(t_k)) - \frac{s - t_k}{t_k - t_{k-1}} V(t_{k-1}, h_i(t_{k-1})). \quad (4.35)$$

Yukarıdaki yaklaşımlar integral içine yerleştirilirse ve düzenlenirse,

$$h_i^{n+1} = \begin{cases} \begin{cases} h_i(0) + \sum_{k=1}^{n_1} H(t_k, h_i(t_k)) \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{s - t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}} ds \\ - \sum_{k=1}^{n_1} H(t_{k-1}, h_i(t_{k-1})) \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{s - t_k}{t_k - t_{k-1}} ds & ; \quad 0 \leq t \leq t_1 \end{cases} \\ \begin{cases} h_i(t_1) + \sum_{k=n_1+1}^n V(t_k, h_i(t_k)) \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{s - t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}} ds \\ - \sum_{k=n_1+1}^n V(t_{k-1}, h_i(t_{k-1})) \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{s - t_k}{t_k - t_{k-1}} ds & ; \quad t_1 \leq t \leq T \end{cases} \end{cases} \quad (4.36)$$

Burada $h_i(t_{n+1}) \approx h_i^{n+1}$ ve $h_i(t_n) \approx h_i^n$ şeklindedir. Daha önce

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{s - t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}} ds = \frac{3\Delta t}{2}$$

ve

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{s - t_k}{t_k - t_{k-1}} ds = \frac{\Delta t}{2} \quad (4.37)$$

olduğunu biliyoruz. Bu hesaplamalar yukarıdaki eşitlikte yazılırsa

$$h_i^{n+1} = \begin{cases} \left\{ \begin{aligned} &h_i(0) + \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^{n_1} [3H_i(t_k, h_i^k) - H_i(t_{k-1}, h_i^{k-1})] \\ &0 \leq t \leq t_1 \end{aligned} \right. \\ \left\{ \begin{aligned} &h_i(t_1) + \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=n_1+1}^n [3V_i(t_k, h_i^k) - V_i(t_{k-1}, h_i^{k-1})] \\ &t_1 \leq t \leq T \end{aligned} \right. \end{cases} \quad (4.38)$$

2. durum: (Birinci Bulaş-Birinci + İkinci dikey bulaş):

$0 \leq t \leq t_1$ aralığında sadece birinci dikey bulaşın, $t_1 \leq t \leq T$ aralığında ise birinci dikey ve ikinci dikey bulaşın birlikte olduğu süreci temsil eden Caputo-Fabrizio kesirli türeve sahip model

$${}^{CF}_0 D_t^\alpha h_i = \begin{cases} H_i(t, h_i); & 0 \leq t \leq t_1 \\ V_i(t, v_i); & t_1 \leq t \leq T \end{cases} \quad (4.39)$$

şeklindedir Yukarıda verilen sistemi integrallersek,

$$h_i(t) = \begin{cases} \left\{ \begin{aligned} &h_i(0) + (1 - \alpha)H_i(t, h_i) + \alpha \int_0^t H_i(s, h_i) ds ; & 0 \leq t \leq t_1 \end{aligned} \right. \\ \left\{ \begin{aligned} &h_i(t_1) + (1 - \alpha)V_i(t, h_i) + \alpha \int_{t_1}^t V_i(s, h_i) ds ; & t_1 \leq t \leq T \end{aligned} \right. \end{cases} \quad (4.40)$$

olduğu görülür. Yukarıdaki denklem $t = t_{n+1}$ noktasında aşağıdaki gibi yazılır:

$$h_i^{n+1} = \begin{cases} \left\{ \begin{aligned} &h_i(0) + (1 - \alpha)H_i(t_{n+1}, \tilde{h}_i^{n+1}) \\ &+ \alpha \sum_{k=0}^{n_1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} H_i(s, h_i) ds ; & 0 \leq t \leq t_1 \end{aligned} \right. \\ \left\{ \begin{aligned} &h_i(t_1) + (1 - \alpha)H_i(t_{n+1}, \tilde{h}_i^{n+1}) \\ &+ \alpha \sum_{k=n_1+1}^n \int_{t_k}^{t_{k+1}} V_i(s, h_i) ds ; & t_1 \leq t \leq T \end{aligned} \right. \end{cases} \quad (4.41)$$

İntegralde yer alan $H_i(s, h_i)$ ve $V_i(s, v_i)$ fonksiyonları Lagrange interpolasyon polinomu ile yaklaşıtlırsa

$$h_i^{n+1} = \begin{cases} \begin{cases} h_i(0) + (1 - \alpha)H_i(t_{n+1}, \tilde{h}_i^{n+1}) \\ + \frac{\alpha\Delta t}{2} \sum_{j=0}^{n_1} [3H_i(t_k, h_i^k) - H_i(t_{k-1}, h_i^{k-1})] \end{cases} & 0 \leq t \leq t_1 \\ \begin{cases} h_i(t_1) + (1 - \alpha)V_i(t_{n+1}, \tilde{h}_i^{n+1}) \\ + \frac{\alpha\Delta t}{2} \sum_{j=n_1+1}^n [3V_i(t_k, h_i^k) - V_i(t_{k-1}, h_i^{k-1})] \end{cases} & t_1 \leq t \leq T \end{cases} \quad (4.42)$$

Burada $\tilde{h}_i^{n+1}$ kestirici terimi Euler formülü kullanılarak aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$\tilde{h}_i^{n+1} = h_i^n + \Delta t H_i(t_n, h_i^n)$$

ve

$$\tilde{h}_i^{n+1} = h_i^n + \Delta t V_i(t_n, h_i^n). \quad (4.43)$$

3. durum: (Birinci bulaş- Birinci+İkinci dikey bulaş):

$0 \leq t \leq t_1$ aralığında sadece birinci dikey bulaşın, $t_1 \leq t \leq T$ aralığında ise birinci dikey ve ikinci dikey bulaşın birlikte olduğu süreci temsil eden Atangana-Baleanu kesirli türeve sahip model

$${}^{ABC}_0 D_t^\alpha h_i = \begin{cases} H_i(t, h_i); & 0 \leq t \leq t_1 \\ V_i(t, v_i); & t_1 \leq t \leq T \end{cases} \quad (4.44)$$

şeklindedir Yukarıda verilen sistemi integrallersek,

$$h_i(t) = \begin{cases} h_i(0) + (1 - \alpha)H_i(t, h_i) + \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t H_i(s, h_i)(t-s)^{\alpha-1} ds ; & 0 \leq t \leq t_1 \\ h_i(t_1) + (1 - \alpha)V_i(t, h_i) + \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^t V_i(s, h_i)(t-s)^{\alpha-1} ds ; & t_1 \leq t \leq T \end{cases} \quad (4.45)$$

olduğu görülür. Yukarıdaki denklem $t = t_{n+1}$ noktasında aşağıdaki gibi yazılır:

$$h_i^{n+1} = \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} h_i(0) + (1 - \alpha)H_i(t_{n+1}, h_i^{n+1}) \\ + \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{n_1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} H_i(s, h_i)(t_{n+1} - s)^{\alpha-1} ds \quad ; \quad 0 \leq t \leq t_1 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} h_i(t_1) + (1 - \alpha)H_i(t_{n+1}, \tilde{h}_i^{n+1}) \\ + \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=n_1+1}^n \int_{t_k}^{t_{k+1}} V_i(s, h_i)(t_{n+1} - s)^{\alpha-1} ds \quad ; \quad t_1 \leq t \leq T \end{array} \right. \end{array} \right\}. \quad (4.46)$$

İntegralde yer alan $H_i(s, h_i)$ ve $V_i(s, v_i)$ fonksiyonları Lagrange interpolasyon polinomu ile yaklaştırılırsa

$$h_i^{n+1} = \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} h_i(0) + (1 - \alpha)H_i(t_{n+1}, \tilde{h}_i^{n+1}) \\ + \frac{\alpha(\Delta t)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 2)} \sum_{k=1}^{n_1} H_i(t_k, h_i^k) \left[\begin{array}{l} (n_1 - k + 1)^\alpha (n_1 - k + 2 + \alpha) \\ -(n_1 - k)^\alpha (n_1 - k + 2 + 2\alpha) \end{array} \right] \\ + \frac{\alpha(\Delta t)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 2)} \sum_{k=1}^{n_1} H_i(t_{k-1}, h_i^{k-1}) \left[\begin{array}{l} (n_1 - k + 1)^{\alpha+1} \\ -(n_1 - k)^\alpha (n_1 - k + 1 + \alpha) \end{array} \right] \end{array} \right. \\ 0 \leq t \leq t_1 \\ \left\{ \begin{array}{l} h_i(t_1) + (1 - \alpha)V_i(t_{n+1}, \tilde{h}_i^{n+1}) \\ + \frac{\alpha(\Delta t)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 2)} \sum_{k=n_1+1}^n V_i(t_k, h_i^k) \left[\begin{array}{l} (n_1 - k + 1)^\alpha (n_1 - k + 2 + \alpha) \\ -(n_1 - k)^\alpha (n_1 - k + 2 + 2\alpha) \end{array} \right] \\ + \frac{\alpha(\Delta t)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 2)} \sum_{k=n_1+1}^n V_i(t_{k-1}, h_i^{k-1}) \left[\begin{array}{l} (n_1 - k + 1)^{\alpha+1} \\ -(n_1 - k)^\alpha (n_1 - k + 1 + \alpha) \end{array} \right] \end{array} \right. \\ t_1 \leq t \leq T \end{array} \right\} \quad (4.47)$$

Burada $\tilde{h}_i^{n+1}$ kestirici terimi Euler formülü kullanılarak aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$\tilde{h}_i^{n+1} = h_i^0 + (1 - \alpha)H_i(t_n, h_i^n) + \frac{(\Delta t)^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{n_1} H_i(t_k, h_i^k) \left[\begin{array}{l} (n_1 - k + 1)^\alpha \\ -(n_1 - k)^\alpha \end{array} \right] \quad (4.48)$$

ve

$$\tilde{h}_i^{n+1} = h_i^1 + (1 - \alpha)V_i(t_n, h_i^n) + \frac{(\Delta t)^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=n_1+1}^{n_1} V_i(t_k, h_i^k) \left[\begin{array}{l} (n_1 - k + 1)^\alpha \\ -(n_1 - k)^\alpha \end{array} \right]. \quad (4.49)$$

4. durum: (Birinci bulaş-Birinci+İkinci dikey bulaş):

$0 \leq t \leq t_1$ aralığında sadece birinci dikey bulaşın, $t_1 \leq t \leq T$ aralığında ise birinci dikey ve ikinci dikey bulaşın birlikte olduğu süreci temsil eden Caputo kesirli türe ve sahip model

$${}_0^C D_t^\alpha h_i = \begin{cases} H_i(t, h_i); & 0 \leq t \leq t_1 \\ V_i(t, v_i); & t_1 \leq t \leq T \end{cases} \quad (4.50)$$

şeklindedir. Yukarıda verilen sistemi integrallersek,

$$h_i(t) = \begin{cases} h_i(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t H_i(s, h_i)(t-s)^{\alpha-1} ds ; & 0 \leq t \leq t_1 \\ h_i(t_1) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^t V_i(s, h_i)(t-s)^{\alpha-1} ds ; & t_1 \leq t \leq T \end{cases} \quad (4.51)$$

olduğu görülür. Yukarıdaki denklem $t = t_{n+1}$ noktasında aşağıdaki gibi yazılır:

$$h_i^{n+1} = \begin{cases} \left\{ \begin{array}{l} h_i(0) \\ + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{n_1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} H_i(s, h_i)(t_{n+1}-s)^{\alpha-1} ds ; \end{array} \right. & 0 \leq t \leq t_1 \\ \left\{ \begin{array}{l} h_i(t_1) \\ + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=n_1+1}^n \int_{t_k}^{t_{k+1}} V_i(s, h_i)(t_{n+1}-s)^{\alpha-1} ds ; \end{array} \right. & t_1 \leq t \leq T \end{cases} \quad (4.52)$$

İntegralde yer alan $H_i(s, h_i)$ ve $V_i(s, v_i)$ fonksiyonları Lagrange interpolasyon polinomu ile yaklaşırlırsa

$$h_i^{n+1} = \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} h_i(0) \\ + \frac{(\Delta t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} \sum_{k=1}^{n_1} H_i(t_k, h_i^k) \left[\begin{array}{l} (n_1 - k + 1)^\alpha (n_1 - k + 2 + \alpha) \\ -(n_1 - k)^\alpha (n_1 - k + 2 + 2\alpha) \end{array} \right] \\ + \frac{(\Delta t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} \sum_{k=1}^{n_1} H_i(t_{k-1}, h_i^{k-1}) \left[\begin{array}{l} (n_1 - k + 1)^{\alpha+1} \\ -(n_1 - k)^\alpha (n_1 - k + 1 + \alpha) \end{array} \right] \end{array} \right. \\ 0 \leq t \leq t_1 \\ \\ \left\{ \begin{array}{l} h_i(t_1) \\ + \frac{(\Delta t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} \sum_{k=n_1+1}^n V_i(t_k, h_i^k) \left[\begin{array}{l} (n_1 - k + 1)^\alpha (n_1 - k + 2 + \alpha) \\ -(n_1 - k)^\alpha (n_1 - k + 2 + 2\alpha) \end{array} \right] \\ + \frac{(\Delta t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} \sum_{k=n_1+1}^n V_i(t_{k-1}, h_i^{k-1}) \left[\begin{array}{l} (n_1 - k + 1)^{\alpha+1} \\ -(n_1 - k)^\alpha (n_1 - k + 1 + \alpha) \end{array} \right] \end{array} \right. \\ t_1 \leq t \leq T \end{array} \right\} \quad (4.53)$$

Daha genel olarak, Atangana ve ark. (2023) çalışmasında farklı aralıklarda farklı türevlerin kullanılabildiği parçalı diferansiyel denklemlerin tanımlandığını göz önüne alarak, şimdi bu durumların varlığını 3 ayrı durumda inceleyelim.

5. durum: (Birinci bulaş-Birinci +İkinci dikey bulaş):

$0 \leq t \leq t_1$ aralığında sadece birinci dikey bulaşın, $t_1 \leq t \leq T$ aralığında ise birinci dikey ve ikinci dikey bulaşın birlikte olduğu süreci temsil eden klasik türeve ve Caputo-Fabrizio kesirli türeve sahip model

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dh_i}{dt} = H_i(t, h_i); \quad 0 \leq t \leq t_1 \\ {}^{CF}_{t_1} D_t^\alpha h_i = V_i(t, v_i); \quad t_1 \leq t \leq T \end{array} \right\} \quad (4.54)$$

şeklinde dir. Yukarıda verilen sistemi integrallersek,

$$h_i(t) = \left\{ \begin{array}{l} h_i(0) + \int_0^t H_i(s, h_i) ds \quad ; \quad 0 \leq t \leq t_1 \\ h_i(t_1) + (1 - \alpha) V_i(t, h_i) + \alpha \int_{t_1}^t V_i(s, h_i) ds \quad ; \quad t_1 \leq t \leq T \end{array} \right\} \quad (4.55)$$

olduğu görülür. Yukarıdaki denklem $t = t_{n+1}$ noktasında dikkate alınırsa ve integralde yer alan $H_i(s, h_i)$ ve $V_i(s, v_i)$ fonksiyonları Lagrange interpolasyon polinomu ile yaklaşıtırlırsa

$$h_i^{n+1} = \begin{cases} \left\{ h_i(0) + \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=0}^{n_1} [3H_i(t_k, h_i^k) - H_i(t_{k-1}, h_i^{k-1})] \right. \\ \left. 0 \leq t \leq t_1 \right. \\ \left. \begin{cases} h_i(t_1) + (1 - \alpha)V_i(t_{n+1}, \tilde{h}_i^{n+1}) \\ + \frac{\alpha(\Delta t)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 2)} \sum_{k=n_1+1}^n V_i(t_k, h_i^k) \\ \times \left[\begin{matrix} (n_1 - k + 1)^\alpha (n_1 - k + 2 + \alpha) \\ -(n_1 - k)^\alpha (n_1 - k + 2 + 2\alpha) \end{matrix} \right] \\ + \frac{\alpha(\Delta t)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 2)} \sum_{k=n_1+1}^n V_i(t_{k-1}, h_i^{k-1}) \\ \times \left[\begin{matrix} (n_1 - k + 1)^{\alpha+1} \\ -(n_1 - k)^\alpha (n_1 - k + 1 + \alpha) \end{matrix} \right] \end{cases} \right. \\ \left. t_1 \leq t \leq T \right\} \end{cases} \quad (4.59)$$

Euler metodu kullanılarak, kestirici terim

$$\tilde{h}_i^{n+1} = h_i^0 + (1 - \alpha)H_i(t_n, h_i^n) + \frac{(\Delta t)^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{n_1} H_i(t_k, h_i^k) \left[\begin{matrix} (n_1 - k + 1)^\alpha \\ -(n_1 - k)^\alpha \end{matrix} \right] \quad (4.60)$$

ve

$$\tilde{h}_i^{n+1} = h_i^1 + (1 - \alpha)V_i(t_n, h_i^n) + \frac{(\Delta t)^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=n_1+1}^{n_1} V_i(t_k, h_i^k) \left[\begin{matrix} (n_1 - k + 1)^\alpha \\ -(n_1 - k)^\alpha \end{matrix} \right]. \quad (4.61)$$

formülü ile hesaplanır.

7. durum: (Birinci bulaş-Birinci +İkinci dikey bulaş):

$0 \leq t \leq t_1$ aralığında sadece birinci dikey bulaşın, $t_1 \leq t \leq T$ aralığında ise birinci dikey ve ikinci dikey bulaşın birlikte olduğu süreci temsil eden klasik türeve ve Caputo kesirli türeve sahip model

$$\begin{cases} \frac{dh_i}{dt} = H_i(t, h_i); & 0 \leq t \leq t_1 \\ {}^C D_t^\alpha h_i = V_i(t, v_i); & t_1 \leq t \leq T \end{cases} \quad (4.62)$$

şeklindedir. Yukarıda verilen sistemi integrallersek,

$$h_i(t) = \begin{cases} h_i(0) + \sum_{k=0}^{n_1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} H_i(s, h_i) ds ; & 0 \leq t \leq t_1 \\ h_i(t_1) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=n_1+1}^n \int_{t_k}^{t_{k+1}} V_i(s, h_i) (t_{n+1} - s)^{\alpha-1} ds ; & t_1 \leq t \leq T \end{cases} \quad (4.63)$$

olduğu görülür. Yukarıdaki denklem $t = t_{n+1}$ noktasında dikkate alınır ve integralde yer alan $H_i(s, h_i)$ ve $V_i(s, v_i)$ fonksiyonları Lagrange interpolasyon polinomu ile yaklaştırılırsa

$$h_i^{n+1} = \begin{cases} h_i(0) + \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^{n_1} [3H_i(t_k, h_i^k) - H_i(t_{k-1}, h_i^{k-1})] & 0 \leq t \leq t_1 \\ h_i(t_1) + \frac{(\Delta t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} \sum_{k=n_1+1}^n V_i(t_k, h_i^k) \times \left[\frac{(n_1 - k + 1)^\alpha (n_1 - k + 2 + \alpha)}{-(n_1 - k)^\alpha (n_1 - k + 2 + 2\alpha)} \right] + \frac{(\Delta t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} \sum_{k=n_1+1}^n V_i(t_{k-1}, h_i^{k-1}) \times \left[\frac{(n_1 - k + 1)^{\alpha+1}}{-(n_1 - k)^\alpha (n_1 - k + 1 + \alpha)} \right] & t_1 \leq t \leq T \end{cases} \quad (4.64)$$

4.3.1. Uygulamalar

Önceki başlıkta parçalı diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri için 7 farklı durumdan bahsettik. Bu durumlardan 5. 6. ve 7. durum için nümerik simülasyonlar vereceğiz.

Örnek 4.3.1. Aşağıdaki parçalı türevli dikey bulaş modelini ele alalım:

$$\begin{cases} \frac{ds}{dt} = \Lambda - \frac{\beta_1 s i_1}{N} - \mu s - p_1 i_1 + \eta r \\ \frac{di_1}{dt} = \frac{\beta_1 s i_1}{N} - (\mu + \delta) i_1 \\ \frac{dr}{dt} = \delta i_1 - \mu r, \\ 0 \leq t \leq t_1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} {}^{ABC}D_{t_1}^\alpha s(t) = \Lambda - \left(\frac{\beta_1 i_1}{1 + i_1} + \beta_2 i_2 \right) \frac{s}{N} + (\gamma - p_2) i_2 - \mu s - p_1 i_1 + \eta r, \\ {}^{ABC}D_{t_1}^\alpha i_1(t) = \left(\frac{\beta_1 i_1}{1 + i_1} \right) \frac{s}{N} - (\mu + \alpha_1 + \delta - p_1) i_1, \\ {}^{ABC}D_{t_1}^\alpha i_2(t) = \left(\frac{\beta_2 s i_2}{N} \right) - (\mu + \alpha_2 + \gamma - p_2) i_2, \\ {}^{ABC}D_{t_1}^\alpha r(t) = \delta i_1 - (\eta + \mu) r, \end{cases} \quad t_1 \leq t \leq T. \quad (4.65)$$

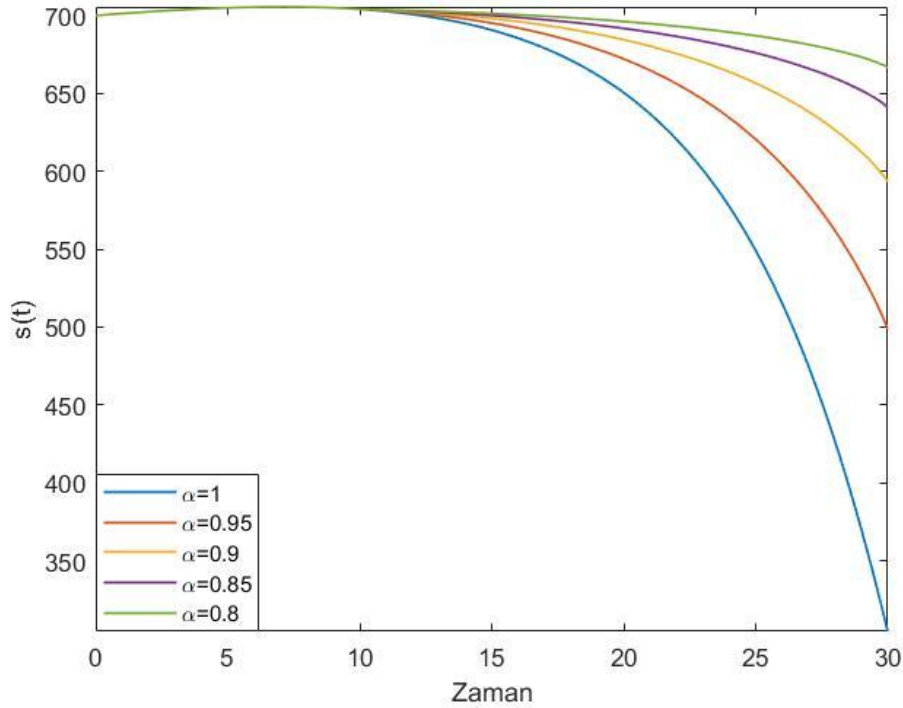
Nümerik simülasyonlar için göz önüne alınan sistemin başlangıç koşulları aşağıdaki gibidir:

$$s(1) = 700, i_1(1) = 2, i_2(1) = 0, r(1) = 0, N = 700 \quad (4.66)$$

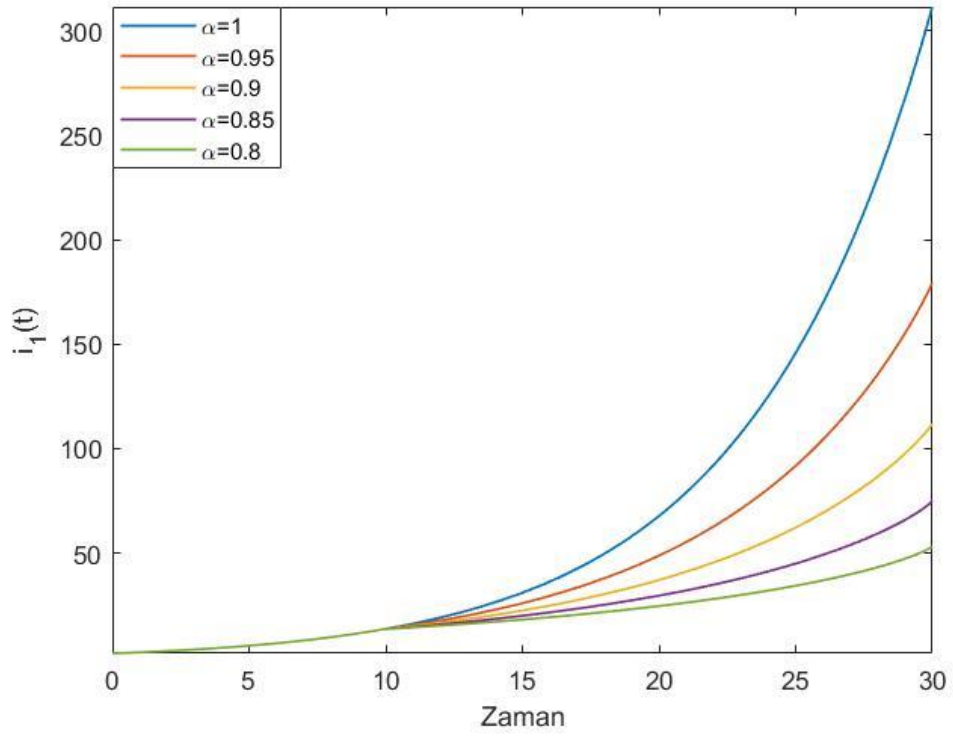
ve parametreleri

$$\begin{aligned} \Lambda = 2, \beta_1 = 0.25, \eta = 0.25, \beta_2 = 0.7, \gamma = 0.05, p_1 = 0.26, \\ p_2 = 0.007, \delta = 0.09, \alpha_1 = 0.01; \alpha_2 = 0.001, \mu = 0.009 \end{aligned} \quad (4.67)$$

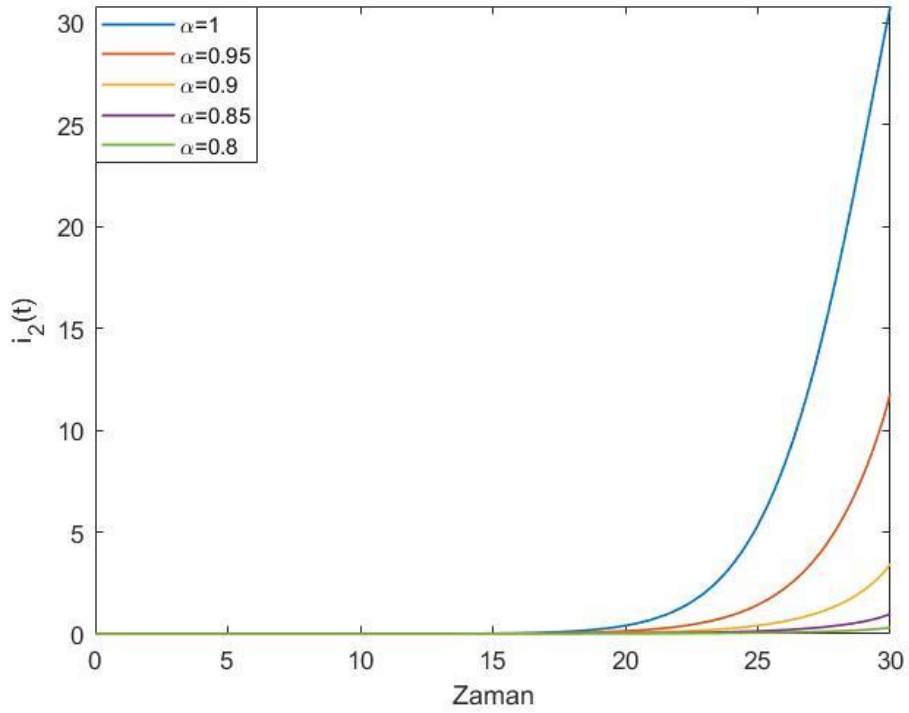
şeklinde.



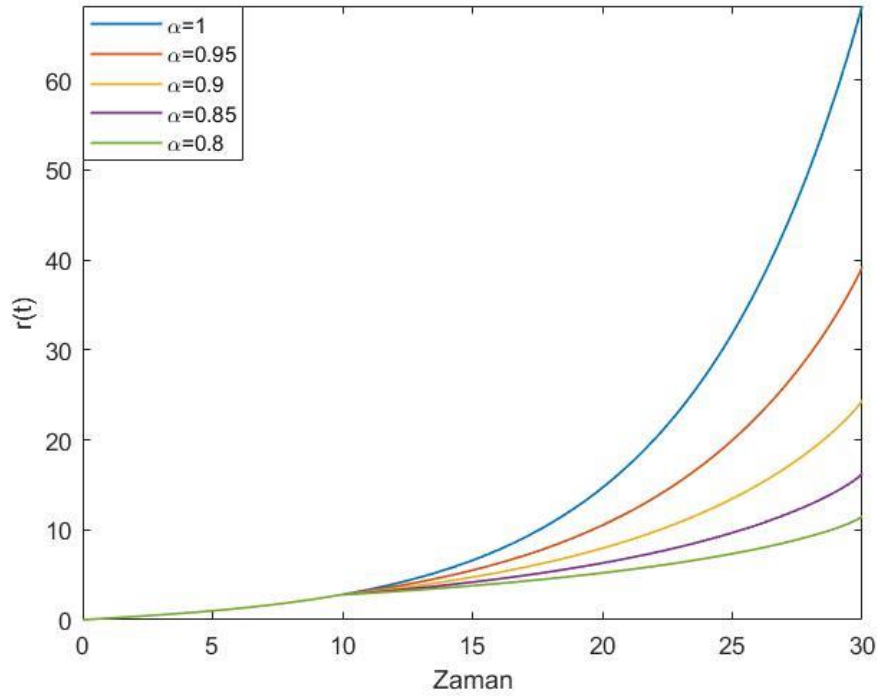
Şekil 4.17. $s(t)$ fonksiyonu için nümerik simülasyon



Şekil 4.18. $i_1(t)$ fonksiyonu için nümerik simülasyon



Şekil 4.19. $i_2(t)$ fonksiyonu için nümerik simülasyon



Şekil 4.20. $r(t)$ fonksiyonu için nümerik simülasyon

Örnek 4.3.2. Aşağıdaki parçalı türevli dikey bulaş modelini ele alalım:

$$\begin{cases} \frac{ds}{dt} = \Lambda - \frac{\beta_1 s i_1}{N} - \mu s - p_1 i_1 + \eta r \\ \frac{di_1}{dt} = \frac{\beta_1 s i_1}{N} - (\mu + \delta) i_1 \\ \frac{dr}{dt} = \delta i_1 - \mu r, \\ 0 \leq t \leq t_1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} {}^{c_1}D_t^\alpha s(t) = \Lambda - \left(\frac{\beta_1 i_1}{1 + i_1} + \beta_2 i_2 \right) \frac{s}{N} + (\gamma - p_2) i_2 - \mu s - p_1 i_1 + \eta r, \\ {}^{c_1}D_t^\alpha i_1(t) = \left(\frac{\beta_1 i_1}{1 + i_1} \right) \frac{s}{N} - (\mu + \alpha_1 + \delta - p_1) i_1, \\ {}^{c_1}D_t^\alpha i_2(t) = \left(\frac{\beta_2 s i_2}{N} \right) - (\mu + \alpha_2 + \gamma - p_2) i_2, \\ {}^{c_1}D_t^\alpha r(t) = \delta i_1 - (\eta + \mu) r, \quad t_1 \leq t \leq T. \end{cases} \quad (4.68)$$

Bu örnekte birinci aralıkta sunulan diferansiyel denklemde klasik türev, ikinci aralıkta sunulan diferansiyel denklemde ise Caputo kesirli türev kullanılmıştır. Nümerik simülasyonlar için göz önüne alınan sistemin başlangıç koşulları aşağıdaki gibidir:

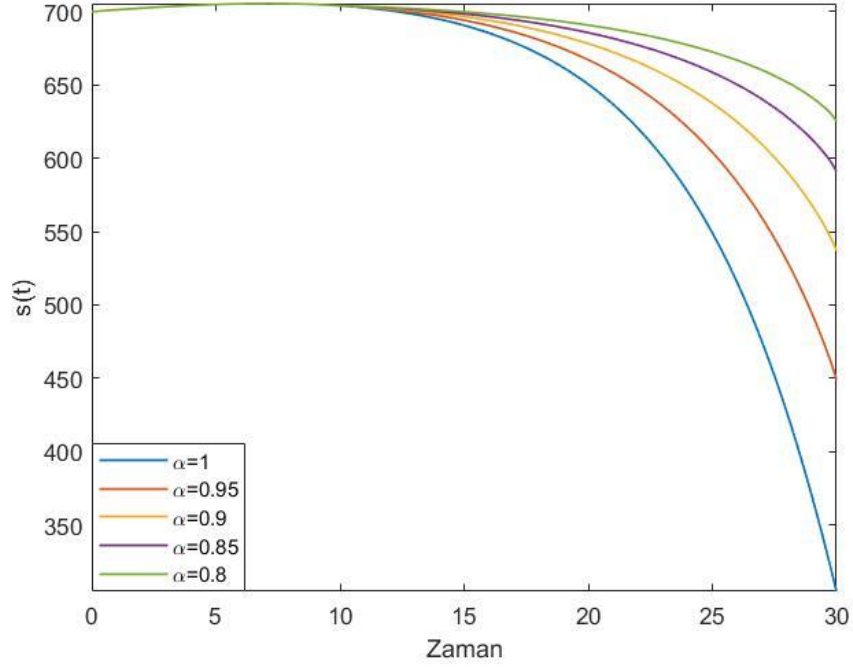
$$s(1) = 700, i_1(1) = 2, i_2(1) = 0, r(1) = 0, N = 700 \quad (4.69)$$

ve parametreleri

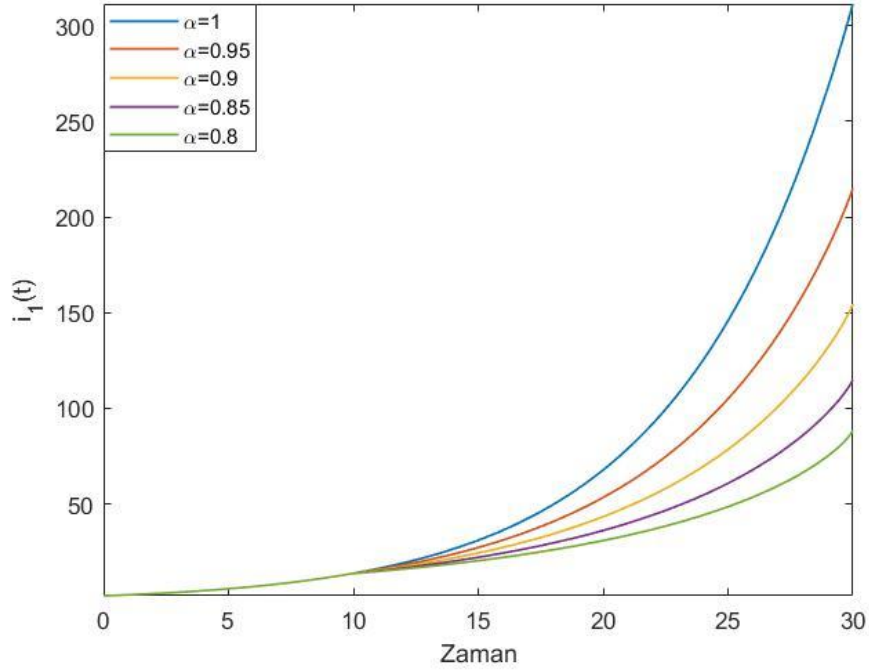
$$\Lambda = 2, \beta_1 = 0.25, \eta = 0.25, \beta_2 = 0.7, \gamma = 0.05, p_1 = 0.26, \\ p_2 = 0.007, \delta = 0.09, \alpha_1 = 0.01; \alpha_2 = 0.001, \mu = 0.009$$

(4.70)

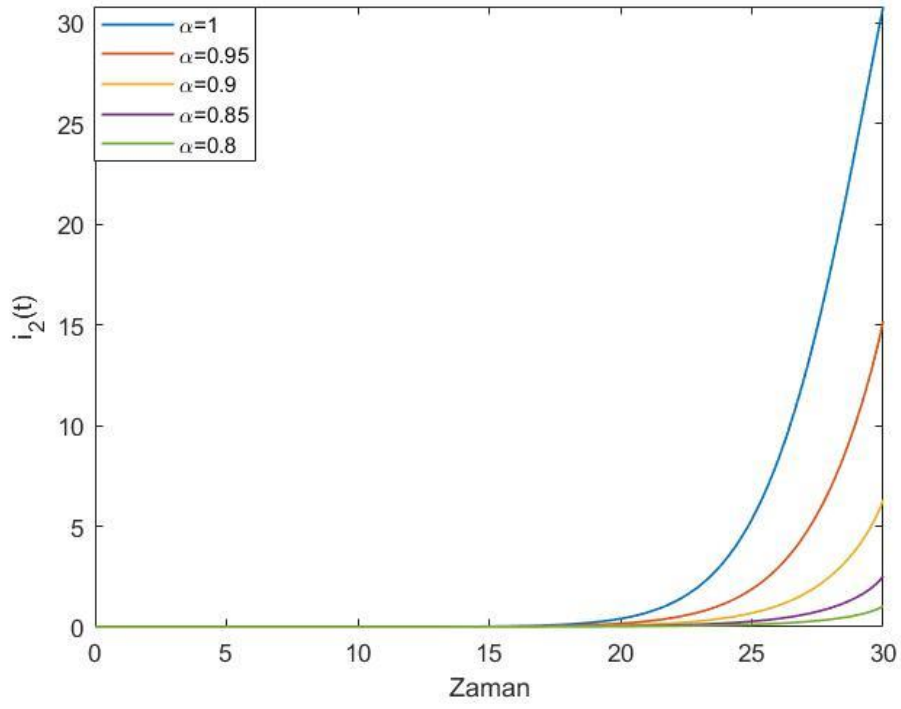
şeklindedir.



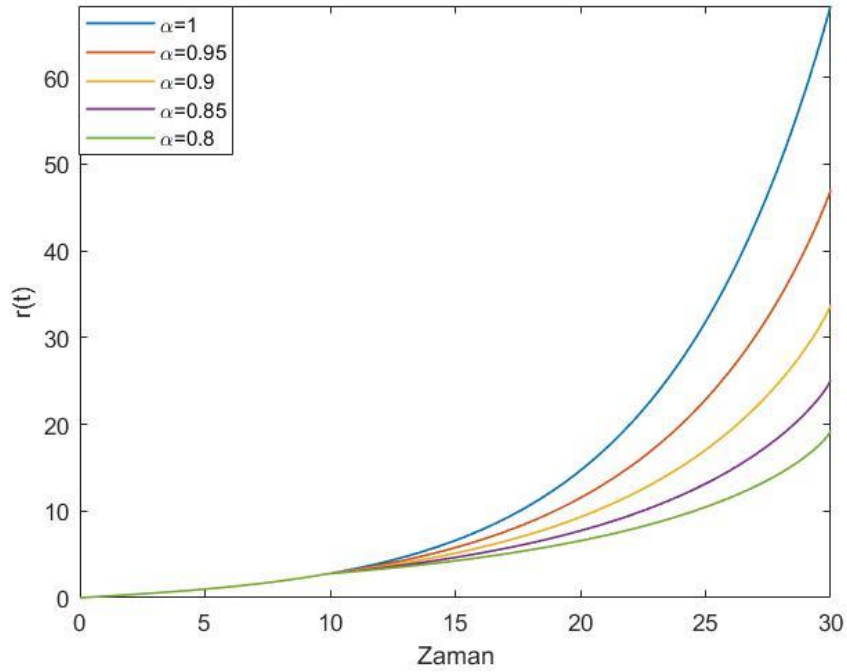
Şekil 4.21. $s(t)$ fonksiyonu için nümerik simülasyon



Şekil 4.22. $i_1(t)$ fonksiyonu için nümerik simülasyon



Şekil 4.23. $i_2(t)$ fonksiyonu için nümerik simülasyon



Şekil 4.24. $r(t)$ fonksiyonu için nümerik simülasyon

Örnek 4.3.3. Aşağıdaki parçalı türevli dikey bulaş modelini ele alalım:

$$\begin{cases} \frac{ds}{dt} = \Lambda - \frac{\beta_1 s i_1}{N} - \mu s - p_1 i_1 + \eta r \\ \frac{di_1}{dt} = \frac{\beta_1 s i_1}{N} - (\mu + \delta) i_1 \\ \frac{dr}{dt} = \delta i_1 - \mu r, \\ 0 \leq t \leq t_1, \\ \left\{ \begin{array}{l} {}^{CF}D_t^\alpha s(t) = \Lambda - \left(\frac{\beta_1 i_1}{1 + i_1} + \beta_2 i_2 \right) \frac{s}{N} + (\gamma - p_2) i_2 - \mu s - p_1 i_1 + \eta r, \\ {}^{CF}D_t^\alpha i_1(t) = \left(\frac{\beta_1 i_1}{1 + i_1} \right) \frac{s}{N} - (\mu + \alpha_1 + \delta - p_1) i_1, \\ {}^{CF}D_t^\alpha i_2(t) = \left(\frac{\beta_2 s i_2}{N} \right) - (\mu + \alpha_2 + \gamma - p_2) i_2, \\ {}^{CF}D_t^\alpha r(t) = \delta i_1 - (\eta + \mu) r, \end{array} \right. \\ t_1 \leq t \leq T. \end{cases} \quad (4.71)$$

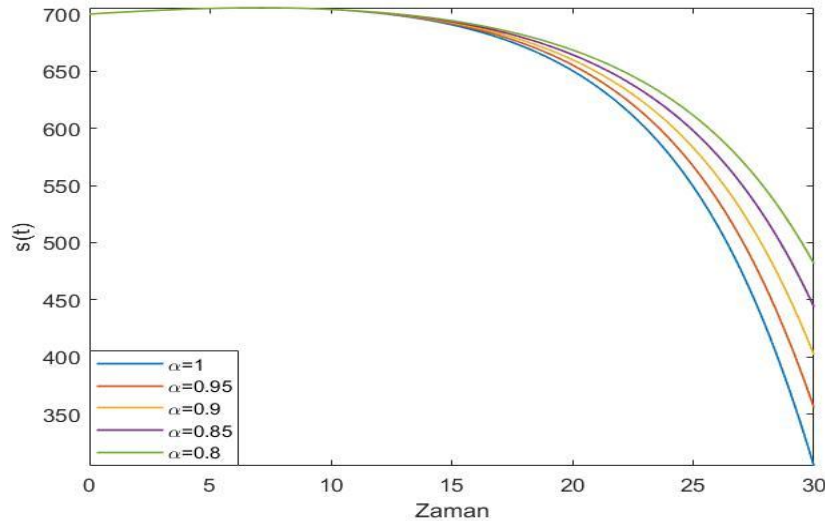
Nümerik simülasyonlar için göz önüne alınan sistemin başlangıç koşulları aşağıdaki gibidir:

$$s(1) = 700, i_1(1) = 2, i_2(1) = 0, r(1) = 0, N = 700 \quad (4.72)$$

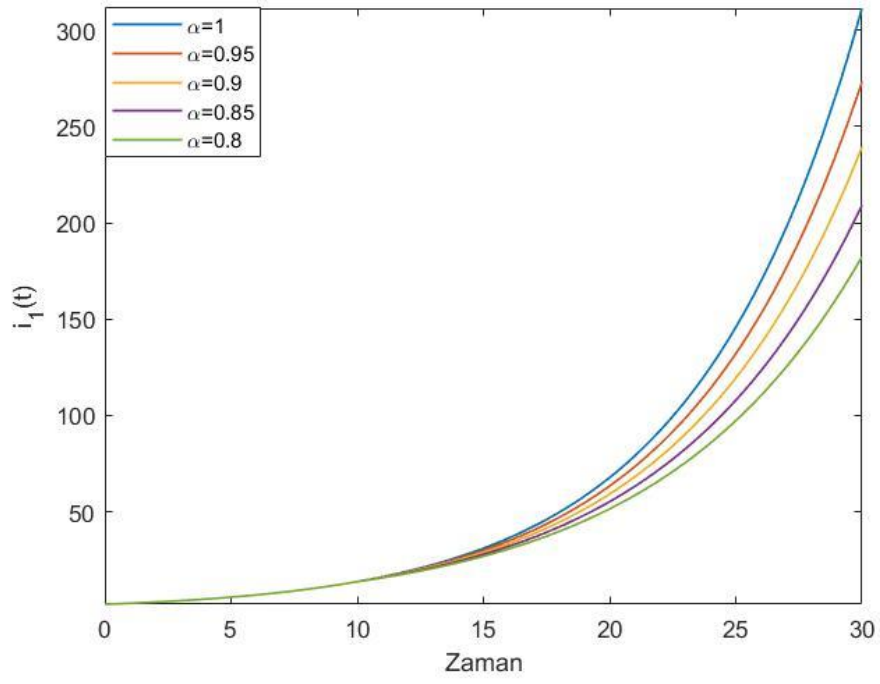
ve parametreleri

$$\begin{aligned} \Lambda = 2, \beta_1 = 0.25, \eta = 0.25, \beta_2 = 0.7, \gamma = 0.05, p_1 = 0.26, \\ p_2 = 0.007, \delta = 0.09, \alpha_1 = 0.01; \alpha_2 = 0.001, \mu = 0.009 \end{aligned} \quad (4.73)$$

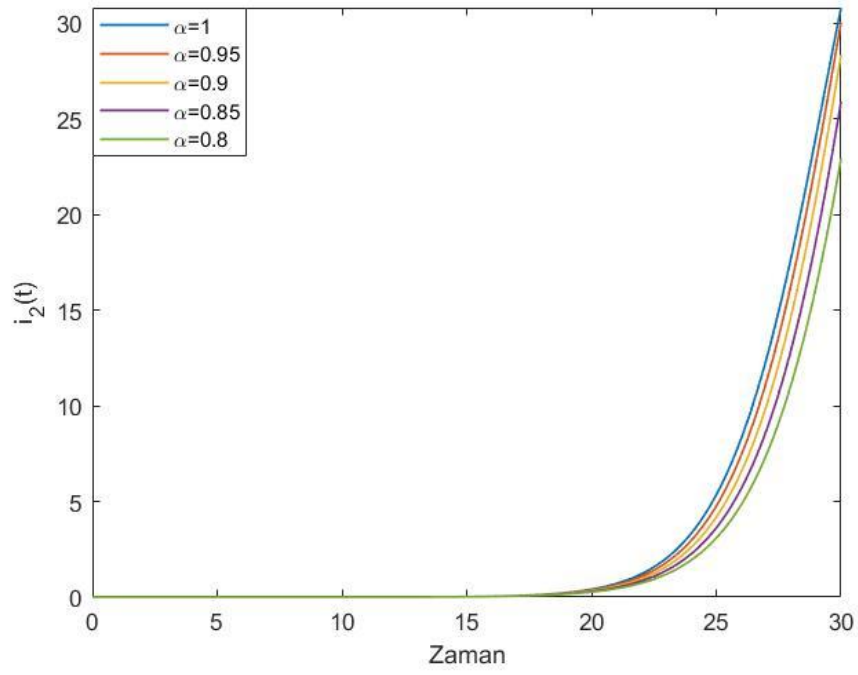
şeklindedir.



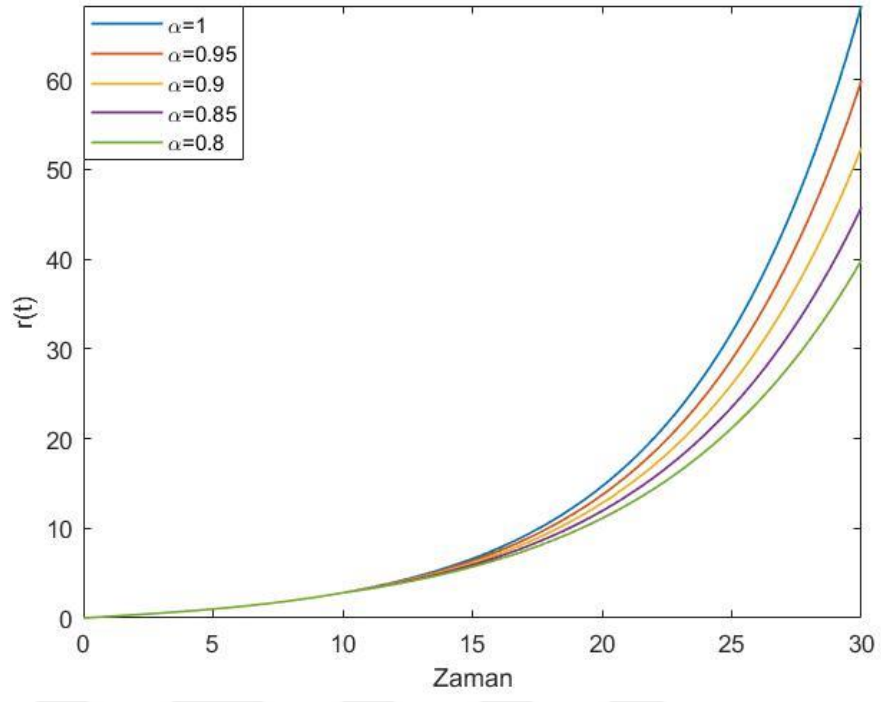
Şekil 4.25. $s(t)$ fonksiyonu için nümerik simülasyon



Şekil 4.26. $i_1(t)$ fonksiyonu için nümerik simülasyon



Şekil 4.27. $i_2(t)$ fonksiyonu için nümerik simülasyon



Şekil 4.28. $r(t)$ fonksiyonu için nümerik simülasyon

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Gerçek dünya problemleri arasında önemli yer tutan bulaşıcı hastalıkların tüm dünyayı olumsuz şekilde etkilediğini biliyoruz. Hastalıkların seyrinin zamanla zayıfladığı algısı var olsa da başka salgınlar ile yüzleşme durumu açısından hastalıkları anlamak ve analiz etmek önemlidir. Bu yüzden, birçok araştırmacı salgın ile ilgili matematiksel modeller geliştirmeye odaklanmıştır. Bunun yanı sıra Leibniz'in L'Hopital'e sorduğu bir soru başlayan kesirli analiz, Riesz, Riemann-Liouville, Grünwald-Letnikov, Caputo, Caputo-Fabrizio ve Atangana- Baleanu gibi birçok kesirli türev ve integral tanımı ile genişlemiştir. Farklı çekirdekler içeren bu türevler (memory), solan geçmiş(fading memory), çaprazlama(crossover) gibi farklı süreçlerin gözlenmesine olanak sağlamıştır.

Bu yüzden, bu tezde, kesirli diferansiyel denklemler ve onların çözümleri ele alınmış olup, bu denklemleri nümerik olarak çözmek için Lagrange polinomuna dayalı bir sayısal metot kullanılmıştır. Sonraki bölümde, Naji ve ark. (2016) tarafından tanıtılan bir dikey bulaş modeli, klasik ve kesirli türevler ile ele alarak, bu model için nümerik algoritma sunulmuştur. Daha sonra bu dikey bulaş modeli, birbiri ardınca gerçekleşebilen iki süreci birlikte ele almayı öneren ve Atangana ve ark. (2023) tarafından tanıtılan parçalı diferansiyel denklemler kullanılarak yeniden ele alınmıştır. Böylece, belirli bir zaman aralığında bir dikey bulaşın diğer zaman aralığında ise ikinci bir dikey bulaşın eklendiği bir süreç modellenmiştir. Böyle bir sistem ile ilgili farklı kalıplar ele alınmış ve parçalı modelin farklı mertebeden kesirli türevleri için nümerik simülasyonlar sunulmuştur.

6. KAYNAKLAR

- Adams, J.C., Bashforth, F., 1883. An attempt to test the theories of capillary action by comparing the theoretical and measured forms of drops of fluid. With an explanation of the method of integration employed in constructing the tables which give the theoretical forms of such drops, *Cambridge University Press*, 1819-1892.
- Akram, M.M., Farman, M., Akgül, A., Saleem, M. U., Ahmad, A., Partohaghigh, M., Jarad, F., 2022. Analysis of HIV/AIDS model with Mittag-Leffler kernel, *AIMS Mathematics*, 7 (7), 13383-13401.
- Anderson, J.F., Main A.J., Ferranino, F.J, 2020. Horizontal and vertical transmission of West Nile virus by aedes vexans (Diptera: Culicidae), *Journal of Medical Entomology*, 57 (5), 1614-1618.
- Arora, N., Sadovsky, Y., Dermody, T.C., Coyne, C.B., 2017. Microbial vertical transmission during human pregnancy, *Cell Host & Microbe*, 21 (5), 561-567.
- Atangana, A. and Baleanu, D., 2016. New fractional derivatives with nonlocal and non-singular kernel: Theory and application to heat transfer model, *Thermal Science*, 20 (2), 763-769.
- Atangana, A. and Gomez-Aguilar, JF., 2018. Decolonization of fractional calculus rules: Breaking commutativity and associativity to capture more natural phenomena, *The European Physical Journal Plus*, 133.
- Atangana, A. and Igret Araz, S., 2020. Mathematical model of Covid-19 spread in Turkey and South Africa: Theory, methods and applications, *Advances in Difference Equations*, 659.
- Atangana, A. and İğret Araz, S., 2023. Piecewise differential equations: theory, methods and applications, *AIMS Mathematics*, 8 (7), 15352-15382.
- Cansız, M., 2010. Kesirli diferansiyel denklemler ve uygulamaları, Yüksek Lisans Tezi, *Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, İzmir, 10-19.
- Caputo, M., Fabrizio, M., 2015. A New Definition of Fractional Derivative Without Singular Kernel, *Progress in Fractional Differentiation and Applications*, 1 (2), 73-85.
- Chye, J. K., Lim, C. T., Ng, K. B., Lim, J. M., George, R., Lam, S. K., 1997. Vertical transmission of dengue, *Clinical Infectious Diseases*, 25 (6), 1374-1377.
- Farman, M., Aslam, M., Akgül, A., Ahmad, A., 2021. Modeling of fractional-order COVID-19 epidemic model with quarantine and social distancing, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 44 (11), 9334-9350.
- Khan, MA. and Atangana, A., 2020. Modeling the dynamics of novel coronavirus (2019-nCov) with fractional derivative, *Alexandria Engineering Journal*, 59 (4), 2379-2389.
- Mekkaoui, T. and Atangana, A., 2017. New numerical approximation of fractional derivative with non-local and non-singular kernel: application to chaotic models, *The European Physical Journal Plus*, 132 (10), 1-16.

- Miller, K.S. and Ross, B., 1993. An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, *John Wiley & Sons*, New York/Singapore.
- Mittag-Leffler G.M., 1903. Sur la nouvelle fonction $E_\alpha(x)$, *C.R. Academie des Sciences*, Paris, 137, 554-558.
- Naji, R. K. and Hussien, R. M., 2016. The dynamics of epidemic model with two types of infectious diseases and vertical transmission, *Journal of Applied Mathematics*, 1-16.
- Oldham, KB. and Spanier, J., 1974. Fractional Calculus: Theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order, 111, *Elsevier*.
- Podlubny, I., 1998. Fractional Differential Equations, An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications, 198. *Elsevier, Academic Press*.
- Ünal Z., Çatak, A.İ., Karaaslan, E., Turan, H., Ünal, M., 2021. A case supporting vertical transmission of SARS CoV-2, *Pediatric Practice and Research*, 9 (3), 144-146.
- Wang, X., Huang, C., Hao, Y., Shi, Q., 2022. A stochastic mathematical model of two different infectious epidemic under vertical transmission, *Mathematical Biosciences and Engineering*, 19 (3), 2179-2192.
- World Health Organization, 2022. Estimated number of people (all ages) living with HIV: Situation Report, 2. <https://www.who.int/data/gho/data/indicators/indicator-details/GHO/estimated-number-of-people--living-with-hiv>. [Ziyaret tarihi: 29 Kasım 2023].

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı Süphan ÇELİKBAŞ

EĞİTİM

Derece	Adı, İlçe, İl	Bitirme Yılı
Lise	: Necip Fazıl Kısakürek Lisesi, İstanbul	2013
Üniversite	: İstanbul Üniversitesi, Fen Fakültesi, İstanbul	2017
Yüksek Lisans	: Siirt Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Siirt	2024
Doktora	: ---	

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	Kurum	Görevi
2019-....	Baykan Veysel Karani Anadolu İmam Hatip Lisesi	Öğretmen