

T.C.
TRAKYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER VE RIEMANN YAPISI

AYŞE TURHAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Tuna BAYRAKDAR

EDİRNE-2024

AYŞE TURHAN 'ın hazırladığı “**ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER VE RI-EMANN YAPISI**” başlıklı bu tez, tarafımızca okunmuş, kapsam ve niteliği açısından Program Adı Anabilim Dalında bir **Yüksek Lisans tezi** olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

İmza

Doç. Dr. Tuna BAYRAKDAR

.....

Dr. Öğr. Üyesi Pelin TEKİN

.....

Prof. Dr. Osman Zeki OKUYUCU

.....

Tez Savunma Tarihi: 22.01.2024

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylarım.

İmza

Tez Danışmanı

Doç. Dr. Tuna BAYRAKDAR

.....

Trakya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü onayı

.....

Prof. Dr. Özlem Çetin ERDOĞAN
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

T.Ü. FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
PROGRAM ADI YÜKSEK LİSANS PROGRAMI
DOĞRULUK BEYANI

Trakya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada, tüm verilerin bilimsel ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini, kullanılan verilerde tahrifat yapılmadığını, tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını, kullanılan tüm literatür bilgilerinin bilimsel normlara uygun bir şekilde kaynak gösterilerek ilgili tezde yer aldığını ve bu tezin tamamı ya da herhangi bir bölümünün daha önceden Trakya Üniversitesi ya da farklı bir üniversitede tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

22.01.2024

AYŞE TURHAN

İmza

Yüksek Lisans Tezi

ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER VE RIEMANN YAPISI

T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

ÖZET

Bu tez çalışmasında birinci ve ikinci mertebeden adi differansiyel denklemlerin tanımladığı manifoldların eğrilik özellikleri Riemann geometrisi anlamında incelenmiş ve adi diferansiyel denklemlerin eşdeğerlik problemi denklemlerin tanımladığı Riemann manifoldları üzerinde denklemleri temsil eden eşçatıların $O(n, \mathbb{R})$ -değerli eşdeğerlik problemi olarak ele alınmıştır. Bu amaçla birinci ve ikinci mertebeden adi diferansiyel denklemler sırasıyla $J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ve $J^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ jet uzayları içinde birer manifold olarak ele alınarak denklemleri temsil eden dış diferansiyel sistemlerin elemanları ile bu manifoldlar üzerinde Riemann metrikleri tanımlanmıştır. Sonrasında ∇ Levi-Civita bağlantısının bağlantı formu θ inşaa edilerek bazı özel denklem sınıflarının sabit eğrilikli manifoldlar tanımladığı gösterilmiştir. Bu anlamda bir nokta dönüşümü altında eşdeğer olduklarının bilinen tüm birinci mertebeden adi diferansiyel denklemler ve ikinci mertebeden lineer adi diferansiyel denklemler eğrilik özellikleri itibariyle birbirinden ayırt edilebilir duruma gelmiştir. Buradan hareketle birinci ve ikinci mertebeden adi diferansiyel denklemlerin eşdeğerlik problemi, Riemann metriğini ve kontakt ideali koruyan bir difeomorfizma sınıfı altındaki eşdeğerlik problemi olarak tanımlanıp problemin çözümü ortaya konulmuştur. Buna göre birinci ve ikinci mertebeden adi diferansiyel denklemlerin ancak $(x, y) \mapsto (x + c_0, y + y_0(x))$ formunda bir difeomorfizm sınıfı altında eşdeğer olabilmektedir.

Yıl : 2024

Sayfa Sayısı : 58

Anahtar Kelimeler : Adi diferansiyel denklemler, jet uzayı, Riemann manifoldu, bağlantı formu, eğrilik 2-formu, Riemann eğrilik tensörü, sabit eğrilikli uzaylar, metrik eşdeğerlik problemi.

Master of Science Thesis
Ordinary Diferantial Equations and Riemann Structures
Trakya University Institute of Natural Sciences
Department of Mathematics

ABSTRACT

The aim of this thesis is to examine the curvature properties of manifolds, defined by first and second order ordinary differential equations, in terms of Riemannian geometry and the equivalent problem of differential equations, defined on Riemannian manifolds, is treated as the $O(n, \mathbb{R})$ -valued equivalence problem formed by canonical contact forms representing equations and their equivalence classes constructed with the independence condition. For this purpose, first and second-order ordinary differential equations are respectively considered as manifolds within the jet spaces $J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ve $J^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Riemannian metrics have been defined along with elements of exterior differential systems representing the equations within these manifolds. Subsequently, by constructing the connection form θ of the ∇ Levi-Civita connection, it has been demonstrated that certain specific classes of equations define constant curvature manifolds. In this context, all known first-order ordinary differential equations and second-order linear ordinary differential equations have become distinguishable from each other in terms of their curvature properties under a point transformation, even though they are equivalent. From this standpoint, the equivalence problem of first and second-order ordinary differential equations has been defined as an equivalence problem under a class of diffeomorphisms that preserve the Riemann metric and the contact ideal, and the solution to this problem has been presented. Accordingly, first and second-order ordinary differential equations can only be equivalent under a diffeomorphism class of the form $(x, y) \mapsto (x + c_0, y + y_0(x))$

Year : 2024

Number of Pages : 58

Keywords : Ordinary differential equations, jet space, Riemannian manifolds, connection form, curvature 2-form, space of constant curvature, metric equivalence problem.

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam boyunca kendisiyle çalışmaktan onur duyduğum; desteklerinden ve yardımlarından dolayı, çok kıymetli danışman hocam Doç. Dr. Tuna BAYRAKDAR’a saygılarımı ve teşekkürlerimi sunarım. Her serüvenim de olduğu gibi bu süreçte de maddi ve manevi destekleriyle yanımda olan sevgili aileme ve tabi ki her zorluğu aşarken birlikte savaşmanın verdiği güçle daha da kıymetlenen sevgili dostlarıma çok teşekkür ederim.

AYŞE TURHAN

İÇİNDEKİLER

ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vi
SİMGELER DİZİNİ	ix
	x
1 GİRİŞ	1
2 ÖN BİLGİLER	4
2.1 C^∞ manifoldlar	4
2.2 C^∞ sınıfından dönüşümler. Difeomorfizmalar	7
2.3 Lie Grupları	8
2.4 Kısmi Türevler	9
2.5 Tanjant uzay. Bir dönüşümün diferansiyeli	10
2.6 Altmanifoldlar	14
2.7 Vektör Demetleri	15
2.8 Riemann manifoldu	20
2.9 Bir vektör demeti üzerinde bağlantı formu	21
3 JET UZAYLARI	24
3.1 ADDlerin Jet Uzay Formülasyonu: $\mathcal{E}_k$	24
3.2 Birinci mertebeden ADDler: $\mathcal{E}_1$	27
3.3 İkinci mertebeden ADDler: $\mathcal{E}_2$	28
4 ADDlerin EĞRİLİK ÖZELLİKLERİ	29
4.1 $\mathcal{E}_1$ üzerinde Riemann yapısı	29

4.1.1	Sabit Eğrilikli Uzaylar	31
4.2	$\mathcal{E}_2$ üzerinde Riemann yapısı	33
4.2.1	Sabit pozitif eğrilikli uzaylar	35
5	ADDlerin METRİK EŞDEĞERLİĞİ	39
5.1	Birinci Mertebeden ADDlerin Metrik Eşdeğerliği	39
5.2	İkinci Mertebeden ADDlerin Metrik Eşdeğerliği	41
6	SONUÇLAR	45
	KAYNAKLAR	47
	EKLER	49
	ÖZGEÇMİŞ	49

SİMGELER DİZİNİ

$\pi : E \rightarrow M$	Vektör demeti
$C^\infty(M)$	M üzerindeki tüm diferansiyellenebilir fonksiyonların kümesi
$\mathfrak{X}(M)$	M üzerindeki tüm diferansiyellenebilir vektör alanlarının kümesi
$\Gamma(E)$	E vektör demetinin tüm diferansiyellenebilir kesitlerinin kümesi
Xf	M üzerinde bir diferansiyellenebilir f fonksiyonunun Lie türevi
$GL(n, \mathbb{R})$	Genel lineer grup
δ_j^i	Kronecker delta fonksiyonu
$\Gamma(E)$	E vektör demetinin tüm kesitlerinin kümesi
σ	Kesitsel eğrilik
J^k	k -jet uzayı
$\otimes$	Tensör çarpımı
TM	Teğet demeti
T^*M	Kotanjant demeti
R_{jkl}^i	Riemannian eğrilik tensörü
$\wedge$	Dış çarpım
$O(n)$	Ortogonal grup
$\mathfrak{so}(n, \mathbb{R})$	Ortogonal grubun Lie cebiri
∇	Vektör demeti üzerinde bağlantı
(M, g)	Rieamann manifoldu
e_k	k . mertedebeden bir ADD'ye karşılık gelen manifold
θ_j^i	Vektör demeti üzerinde eğrilik 2-formu

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Geometrik olarak, bir adi diferansiyel denklem (ADD) uygun bir jet uzayı içinde bir manifold olarak değerlendirilebilir (Arnold, 2012; Bocharov vd., 1999; Kushner, Lycha-
gin & Rubtsov, 2007; Saunders, 1989; Vassiliou & Lisle, 2000). Tabi olduğu dönüşümler
ile birlikte denklemin formu bu manifold üzerinde bir geometrik yapı tanımlar. Genel
itibariyle, ADDlerin geometrik olarak ele alınması, verilen iki diferansiyel denklemi bir-
birine dönüştürecek yani denklemlerin belirlediği geometrik yapıları birbirine taşıyacak
bir kısmi türevli diferansiyel denklem sisteminin çözümü olarak ortaya çıkan bir difeomor-
fizma sınıfının olup olmadığına karar verme problemidir. Başka bir ifadeyle, bir geometrik
nesnenin taşıdığı geometrik invariantların belirlenmesi olarak değerlendirilir (Gardner,
1989; Olver, 1995). E. Cartan, geometrik nesnelerin birinci mertebeden kısmi türevli
diferansiyel denklem sistemleri ile tanımlanan bir pseudogrup altındaki invariantlarını
bulmanın bir prosedürünü formüle ve tarif etmiştir (E. Cartan, 1908). Kabaca konuşmak
gerekirse, (birinci mertebeden) bir geometrik nesne, onu temsil eden bir eşçatı ve bu
eşçatının tabi olduğu dönüşümler olarak değerlendirilebilir. Bilindiği kadarıyla ADDlerin
eşdeğerlik problemi konusundaki ilk sistematik çalışmalar S. Lie ve M.A. Tresse tarafın-
dan yapılmıştır (Lie, 1888; Tresse, 1900; Tresse, 1896). Daha sonra E. Cartan, Tresse'nin
bulduğu invariantların, Cartan normal projectif bağlantı olarak adlandırılan bir bağlantı
formunun eğrilik 2-formunun bileşenleri olarak yazılabileceğini ve bu bağlantının je-
odezik eğrilerinin söz konusu ADDnin çözüm eğrilerine karşılık geldiğini göstermiştir
(É. Cartan, 1924). İkinci mertebeden bir ADD bir 2-boyutlu sprayin projektif eşdeğerlik
sınıfını belirler ve bu spray için Douglas tensörünün tüm bileşenleri Tresse'nin invariant-
larından bir tanesinin katları olarak ortaya çıkar. Bu invariantın sıfıra eşit olması durumunda
Berwald invariantı Tresse'nin ikinci invariantına indirgenir ve söz konusu ikinci merte-
beden ADD bir afin spraye projektif olarak eşdeğerdir (Crampin, 2004). Bununla birlikte

eğer ikinci mertebeden bir ADDnin çözüm eğrileri bir Levi-Civita bağlantısının geodezik eğrileri ise bu durumda da Tresse'nin ilk invaryantı sıfıra eşit olacaktır (Bryant, Dunajski & Eastwood, 2009).

Cartan'ın geliştirdiği yöntem günümüzde G -değerli eşdeğerlik metodu olarak adlandırılır. Burada G , genel lineer grup $GL(n, \mathbb{R})$ 'nin bir alt grubudur ve bu grup iki ADDyi temsil eden eşçatıların bir difeomorfizma sınıfı altında birbirine dönüşebilmesi için söz konusu difeomorfizma sınıfının Jacobian matrislerinin içinde bulunmak zorunda olduğu gruptur. Belirli invaryant operasyonlarla G grubu, aşıkır gruba indirgenebiliyorsa o zaman invaryant eşçatı elde edilmiş olur ve problem, çözümünü bildiğimiz, eşçatıların eşdeğerlik problemine dönüştürülmüş olur. Örneğin, Riemann metriklerinin eşdeğerlik problemi, metrikleri köşegen hale getiren eşçatıların $O(n, \mathbb{R})$ -değerli eşdeğerlik problemi olarak tanımlanır. Bir ADDyi temsil eden eşçatının tabi olduğu dönüşümler, kimi durumlarda uygunsuz ya da ilişkisiz olarak nitelenebilse dahi, $GL(n, \mathbb{R})$ 'nin herhangi bir alt grubu olan G -değerli eşdeğerlik problemi olarak tanımlanabilir.

Bu bağlamda, bu tez çalışması, ADDlerin eşdeğerlik problemini, denklemleri temsil eden eşçatıların $O(n, \mathbb{R})$ -değerli eşdeğerlik problemi olarak ele almaktadır. Bunun temel sebebi birinci mertebeden herhangi iki ADDnin yerel olarak eşdeğer olmasıdır (Arnold, 1992; Olver, 1995). Bir diğer ifade ile bir denklemi diğerine taşıyacak bir yerel difeomorfizma vardır. Bu aynı zamanda ikinci mertebeden lineer ADDler için de geçerlidir. Yani herhangi iki lineer ADDyi birbirine taşıyacak bir nokta dönüşümü vardır (Grissom, Thompson & Wilkens, 1989; Kamran, Lamb & Shadwick, 1985; Olver, 1995). Özetle, bahsi geçen diferansiyel denklemleri difeomorfizma sınıfını daraltmadan ayırt etmek mümkün değildir. Eşdeğerliğin tanımlandığı difeomorfizma sınıfı bir Riemann metriği ve bu metriği koruyan difeomorfizmlerin sınıfına daraltılırsa, üzerindeki Riemann yapısı vasıtasıyla söz konusu diferansiyel denklemleri temsil eden manifoldlar eğrilikleri itibarıyla ayırt edilebilir. Örneğin, birinci mertebeden bir lineer ADDnin tanımladığı yüzey sabit eğrilikli bir yüzey olabilir (Ok Bayrakdar & Bayrakdar, 2018). Bununla birlikte iki harmonik salıncı denklemi yalnızca açısız frekanslarına bakılarak ayırt edilebilir (Ok Bayrakdar & Bayrakdar, 2019).

Bu itibarla bu tez çalışmasında birinci ve ikinci mertebeden ADDlerin jet uzay formulasyonu verildikten sonra denklemlere karşılık gelen manifoldlar üzerinde tanımlanan bir Riemann metriğine göre bir ortonormal çatı alanına dual olan eşçatı alanının tanımladığı Riemann bağlantısına göre söz konusu denklemlerin eğrilik özellikleri incelenmiştir. Buradan hareketle birinci mertebeden ADDlerin sabit eğrilikli olabileceği görülmüştür. Bununla birlikte bazı ikinci mertebeden ADD sınıflarının düz ve sabit pozitif eğrilikli olabileceği gösterilmiştir. Sonrasında birinci ve ikinci mertebeden ADDlerin

metrik eşdeğerlik problemi tanımlanarak bu problemin bir çözümü verilmiştir.

Bu tez çalışması altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmında bu tez çalışmasının amacından bahsedilmiştir. İkinci bölümde tezde geçen kavramlara altyapı oluşturması amacıyla bazı temel ön bilgiler verilmiştir. Üçüncü bölümde ADDlerin jet uzay formülasyonu verilmiştir. Dördüncü bölümde birinci ve ikinci mertebeden ADDlerin tanımladığı manifoldların eğrilik özellikleri incelenmiştir. Beşinci bölümde ADDlerin metrik eşdeğerlik problemi ele alınmıştır. Altıncı bölümde ise tezden elde edilen sonuçların bir özeti verilmiştir.



BÖLÜM 2

ÖN BİLGİLER

2.1 C^∞ manifoldlar

Tanım 2.1. k negatif olmayan bir tamsayı ve $U \subset \mathbb{R}^n$ bir açık küme olsun. $j \leq k$ olmak üzere bir $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun $p \in U$ noktasında j . mertebeden tüm

$$\frac{\partial^j f}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_j}} \quad (2.1)$$

kısmi türevleri var ve sürekli ise o zaman f fonksiyonu p noktasında C^k sınıfındandır denir. Eğer bu koşul her $k \geq 0$ için doğruysa o zaman f fonksiyonu p noktasında C^∞ sınıfındandır denir (Tu, 2011).

Tanım 2.2. Vektör-değerli bir $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$; $f = (f^1, \dots, f^m)$ fonksiyonunun bileşenlerinin tamamı bir $p \in U$ noktasında C^∞ sınıfından ise f fonksiyonu p noktasında C^∞ sınıfındandır denir. Eğer bu koşul her $p \in U$ için doğruysa o zaman f fonksiyonu U üzerinde C^∞ sınıfındandır denir (Tu, 2011).

Tanım 2.3. M bir topolojik uzay olsun. Eğer aşağıdaki koşul sağlanıyorsa o zaman M yerel olarak (n -boyutlu) Euclidyendir denir:

M 'nin her p noktası bir U açık komşuluğuna sahiptir öyle ki U 'dan $\mathbb{R}^n$ 'nin bir açık altkümesine giden bir ϕ homeomorfizması vardır. Buradaki $(U, \phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n)$ ikilisine bir yama, U 'ya bir koordinat komşuluğu ya da koordinat açık kümesi ve ϕ 'ye de U üzerinde bir koordinat sistemi denir. Eğer $\phi(p) = 0$ ise o zaman (U, ϕ) , $p \in U$ merkezlidir denir (Tu, 2011).

Tanım 2.4. Hausdorff, ikinci sayılabilir ve yerel olarak Euclidyen olan bir topolojik uzaya bir topolojik manifold denir. Eğer bir topolojik manifold yerel olarak n -boyutlu Euclidyen ise o zaman n -boyutludur denir (Tu, 2011).

Tanım 2.5. $(U, \phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n)$ ve $(V, \psi : V \rightarrow \mathbb{R}^n)$ bir topolojik manifoldun iki yaması olsun. Eğer

$$\phi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \rightarrow \phi(U \cap V) \quad \text{ve} \quad \psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V) \quad (2.2)$$

C^∞ sınıfından ise o zaman söz konusu yamalar C^∞ -uyumludur denir.

$\phi \circ \psi^{-1}$ ve $\psi \circ \phi^{-1}$ dönüşümlerine $(U, \phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n)$ ve $(V, \psi : V \rightarrow \mathbb{R}^n)$ yamaları arasındaki *geçiş fonksiyonları* denir. Eğer $U \cap V = \emptyset$ ise o zaman iki yama otomatik olarak C^∞ -uyumludur (Tu, 2011).

Tanım 2.6. M bir yerel olarak Euclidyen uzay olsun. Her bir elemanı bir diğeri ile C^∞ -uyumlu olan bir $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ yama ailesi M 'yi örtüyorsa yani $M = \bigcup_{\alpha} U_\alpha$ ise o zaman $\mathcal{U}$ 'ya M üzerinde bir C^∞ atlas ya da kısaca atlas denir (Tu, 2011).

Tanım 2.7. Eğer bir (V, ψ) yaması bir $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ atlasındaki her (U_α, ϕ_α) yaması ile uyumlu ise o zaman (V, ψ) yaması $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ atlası ile uyumludur denir (Tu, 2011).

Lemma 2.1. $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$, bir yerel olarak Euclidyen uzay üzerinde bir atlas olsun. Eğer (V, ψ) ve (W, σ) yamalarının her ikisi de $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ atlası ile uyumlu ise o zaman bu yamalar birbiri ile uyumludur (Tu, 2011).

Tanım 2.8. Bir yerel olarak Euclidyen uzay üzerindeki bir $\mathfrak{M}$ atlası daha büyük bir atlas tarafından içerilmiyorsa $\mathfrak{M}$ atlasına *maksimaldir* denir. Bir diğer ifadeyle, $\mathcal{U}$ atlası $\mathfrak{M}$ atlasını içeren bir diğer atlas ise o zaman $\mathfrak{M}$ atlası maksimaldir ancak ve ancak $\mathcal{U} = \mathfrak{M}$ (Tu, 2011).

Tanım 2.9. Üzerindeki bir maksimal atlas ile birlikte bir M topolojik manifolduna bir *düzgün* ya da C^∞ manifold denir. Buradaki maksimal atlası M üzerinde bir *diferansiyellenebilir yapı* denir (Tu, 2011).

Önerme 2.1. Bir yerel olarak Euclidyen uzay üzerindeki herhangi bir $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ atlasını içeren tek bir maksimal atlas vardır (Tu, 2011).

Özetle bir M topolojik uzayının bir C^∞ manifold olduğunu göstermek için aşağıdakileri kontrol etmek yeterlidir:

1. M bir Hausdorff ve ikinci sayılabilir uzaydır.
2. M 'nin (maksimal olması gerekmeyen) bir C^∞ atlası vardır (Tu, 2011).

Açıklama 2.1. Şu andan itibaren bir C^∞ manifold yerine kimi zaman yalnızca manifold denilecek ve bu ikisi aynı anlamda kullanılacaktır. Eğer $(U, \phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n)$ bir M manifoldunun bir yaması ise o zaman ϕ dönüşümünün bileşenleri olan $x^i : U \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları

$$x^i = r^i \circ \phi \quad (2.3)$$

ile belirlenir. Burada $r^1, r^2, \dots, r^n$, $\mathbb{R}^n$ üzerindeki standart koordinatlardır. Bu durumda $\phi = (x^1, \dots, x^n)$ ve $(U, \phi) = (U, x^1, \dots, x^n)$ yazılır. Dolayısıyla $p \in U$ ise o zaman $(x^1(p), \dots, x^n(p))$, $\mathbb{R}^n$ 'de bir noktadır. $x^1, \dots, x^n$ fonksiyonlarına *koordinatlar* ya da U üzerinde *yerel koordinatlar* adı verilir. M içinde bir p noktasını içeren bir (U, ϕ) yaması denildiğinde M üzerindeki diferansiyellenebilir yapı içindeki $p \in U$ olacak şekilde (U, ϕ) yaması kastedilecektir.

Örnek 2.1. (Euclid uzayı) $\mathbb{R}^n$ Euclid uzayı tek bir $(\mathbb{R}^n, r^1, \dots, r^n)$ koordinat yaması ile birlikte bir manifolddur. (Tu, 2011).

Örnek 2.2. (Manifoldun açık altkümesi). Bir M manifoldunun herhangi bir V açık altkümesi de aynı zamanda bir manifolddur. Eğer $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$, M için bir atlas ise o zaman $\{U_\alpha \cap V, \phi_\alpha|_{U_\alpha \cap V}\}$ ailesi de V için bir atlas oluşturur. Burada $\phi_\alpha|_{U_\alpha \cap V} : U_\alpha \cap V \rightarrow \mathbb{R}^n$ ϕ_α 'nın $U_\alpha \cap V$ altkümesine kısıtlanışını gösterir (Tu, 2011).

Örnek 2.3. (Bir düzgün fonksiyonun grafiği) A , $\mathbb{R}^n$ 'nin bir altkümesi olmak üzere bir $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ fonksiyonunun grafiği

$$\Gamma(f) = \{(x, f(x)) \in A \times \mathbb{R}^m\} \quad (2.4)$$

şekilde tanımlanır. Eğer U , $\mathbb{R}^n$ 'nin açık bir altkümesi ve $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ C^∞ sınıfından ise o zaman

$$\phi : \Gamma(f) \rightarrow U, \quad (x, f(x)) \mapsto x \quad (2.5)$$

ve

$$(1, f) : U \rightarrow \Gamma(f), \quad x \mapsto (x, f(x)) \quad (2.6)$$

dönüşümleri süreklidir ve birbirlerinin tersidir. Dolayısıyla bu dönüşümler homeomorfizmalardır. C^∞ sınıfından bir $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ fonksiyonunun grafiği $\Gamma(f)$, tek bir $(\Gamma(f), \phi)$ yaması içeren bir atlasla sahiptir ve dolayısıyla bir C^∞ manifolddur (Tu, 2011).

Örnek 2.4. (Genel lineer gruplar) Herhangi iki pozitif m ve n tamsayısı için tüm $m \times n$ tipindeki matrislerin vektör uzayı $\mathbb{R}^{m \times n}$ ile gösterilsin. $\mathbb{R}^{m \times n}$ uzayı $\mathbb{R}^{mn}$ uzayına izomorf olduğundan bu uzaya $\mathbb{R}^{mn}$ 'nin topolojisi aktarılabilir.

$$\text{GL}(n, \mathbb{R}) := \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det(A) \neq 0\} = \det^{-1}(\mathbb{R} - \{0\}) \quad (2.7)$$

şeklinde tanımlı gruba *Genel lineer grup* adı verilir. Determinant fonksiyonu

$$\det : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.8)$$

sürekli olduğundan $\text{GL}(n, \mathbb{R})$, $\mathbb{R}^{n \times n} \simeq \mathbb{R}^{n^2}$ 'nin bir açık altkümesidir ve dolayısıyla bir manifolddur (Tu, 2011).

Örnek 2.5. (Çarpım manifoldu) Eğer (U_α, ϕ_α) ve (V_i, ψ_i) sırasıyla m ve n -boyutlu M ve N manifoldları için C^∞ atlaslar ise o zaman

$$\{(U_\alpha \times V_i, \phi_\alpha \times \psi_i : U_\alpha \times V_i \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)\} \quad (2.9)$$

kolleksiyonu da (üzerindeki çarpım topolojisine göre) $M \times N$ kartezyen çarpımı üzerinde bir C^∞ atlas oluşturur. $M \times N$, $(m+n)$ -boyutlu bir C^∞ manifolddur. Burada $(\phi_\alpha \times \psi_i)(p, q) = (\phi_\alpha(p), \psi_i(q))$ şeklinde tanımlıdır (Tu, 2011).

2.2 C^∞ sınıftan dönüşümler. Difeomorfizmalar

Tanım 2.10. M , n -boyutlu bir düzgün manifold ve f , M üzerinde tanımlı reel değerli bir fonksiyon yani $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ olsun. Eğer bir $p \in M$ için $f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\phi(p)$ noktasında C^∞ sınıftan olacak şekilde p noktasını içeren M içinde bir (U, ϕ) yaması var ise o zaman f fonksiyonu p noktasında C^∞ sınıftandır denir. Eğer f fonksiyonu M 'nin her noktasında C^∞ sınıftan ise o zaman f 'ye M üzerinde C^∞ sınıftandır denir (Tu, 2011).

Açıklama 2.2. Bir f fonksiyonunun düzgünlüğü tanımı (U, ϕ) yamasından bağımsızdır; eğer $f \circ \phi^{-1}$, $\phi(p)$ noktasında C^∞ sınıftan ve (V, ψ) , $p \in M$ noktasını içeren bir diğer yama ise o zaman $\psi(U \cap V)$ üzerinde

$$f \circ \psi^{-1} = (f \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ \psi^{-1}) \quad (2.10)$$

fonksiyonu $\psi(p)$ noktasında C^∞ sınıftandır (Tu, 2011).

Bir düzgün M manifoldu üzerinde C^∞ sınıftan olan tüm fonksiyonların kümesi $C^\infty(M)$ ile gösterilir. Herhangi $p \in M$ ve herhangi $a \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{cases} (f+g)(p) &= f(p) + g(p) \\ (fg)(p) &= f(p)g(p) \\ (af)(p) &= af(p) \end{cases} \quad (2.11)$$

operasyonları ile birlikte $C^\infty(M)$ kümesi $\mathbb{R}$ üzerinde bir cebir oluşturur.

Tanım 2.11. N ve M sırasıyla n ve m boyutlu manifoldlar olsun. Eğer aşağıdaki koşul sağlanıyorsa o zaman sürekli bir $F : N \rightarrow M$ dönüşümüne bir $p \in N$ noktasında C^∞ sınıftandır denir:

$$\psi \circ F \circ \phi^{-1} : \phi(F^{-1}(V) \cap U) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \quad (2.12)$$

dönüşümü $\phi(p)$ noktasında C^∞ sınıftan olacak şekilde M 'nin $F(p)$ noktasını içeren bir (V, ψ) yaması ve N 'nin p noktasını içeren bir (U, ϕ) yaması vardır. Eğer $F : N \rightarrow$

M dönüşümü her $p \in N$ noktasında C^∞ sınıfından ise o zaman F dönüşümüne C^∞ sınıfındandır denir (Tu, 2011).

Aşağıdaki önerme C^∞ sınıfından olma tanımının (V, ψ) ve (U, ϕ) yamalarının seçiminden bağımsız olduğunu söyler.

Önerme 2.2. $F : N \rightarrow M$ dönüşümü $p \in N$ noktasında C^∞ sınıfından olsun. Eğer (U, ϕ) , N içinde p noktasını içeren herhangi bir yama ve (V, ψ) , M içinde $F(p)$ noktasını içeren herhangi bir yama ise o zaman $\psi \circ F \circ \phi^{-1}$ dönüşümü $\phi(p)$ noktasında C^∞ sınıfındandır (Tu, 2011).

Aşağıdaki önerme iki manifold arasındaki bir dönüşümün C^∞ sınıfından olmasının bileşenlerle belirlenebileceğini söyler.

Önerme 2.3. $F : N \rightarrow M$ dönüşümü sırasıyla n ve m boyutlu N ve M manifoldları arasında sürekli bir dönüşüm olsun. O zaman aşağıdakiler eşdeğerdir:

(i) $F : N \rightarrow M$ dönüşümü C^∞ sınıfındandır.

(ii) M manifoldu bir atlası sahiptir öyleki bu atlasdaki her $(V, \psi) = (V, y^1, \dots, y^m)$ yaması için F 'nin (V, ψ) yamasına göre bileşenleri olan $y^i \circ F : F^{-1}(V) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlarının tamamı C^∞ sınıfındandır.

(iii) M üzerindeki her $(V, \psi) = (V, y^1, \dots, y^m)$ yaması için F 'nin (V, ψ) yamasına göre bileşenleri olan $y^i \circ F : F^{-1}(V) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlarının tamamı C^∞ sınıfındandır. (Tu, 2011).

Tanım 2.12. (Difeomorfizma) $F : N \rightarrow M$ dönüşümü C^∞ sınıfından bir dönüşüm olsun. Eğer F , 1-1, örten ve F 'nin tersi F^{-1} dönüşümü de C^∞ sınıfından ise o zaman F 'ye bir difeomorfizma denir (Tu, 2011).

Önerme 2.4. Eğer (U, ϕ) , n -boyutlu bir M manifoldu üzerinde bir yama ise o zaman $\phi : U \rightarrow \phi(U)$ koordinat sistemi bir difeomorfizmadır (Tu, 2011).

2.3 Lie Grupları

Tanım 2.13. G , grup yapısına sahip bir C^∞ manifold olmak üzere

$$\mu : G \times G \rightarrow G \quad (2.13)$$

çarpma dönüşümü

$$\iota : G \rightarrow G, \quad \iota(x) = x^{-1} \quad (2.14)$$

ters dönüşümünün her ikisi de C^∞ sınıfından ise o zaman G 'ye bir Lie grubu denir (Tu, 2011).

Örnek 2.6. $\mathbb{R}^n$ Euclid uzayı toplama işlemi altında bir Lie grubudur.

Örnek 2.7. Sıfırdan farklı olan karmaşık sayıların kümesi $\mathbb{C}^\times$, çarpma işlemi altında bir Lie grubudur.

Örnek 2.8. $\mathbb{C}^\times$ 'deki $\mathbb{S}^1$ birim çemberi çarpma işlemi altında bir Lie grubudur.

Örnek 2.9. (G_1, μ_1) ve (G_2, μ_2) Lie gruplarının kartezyen çarpımı $G_1 \times G_2$ karşılıklı bileşenlerin çarpımıyla tanımlanan çarpma işlemine göre bir Lie grubudur.

Örnek 2.10. (Genel lineer grup) Örnek (2.4)'e göre

$$GL(n, \mathbb{R}) = \left\{ A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det A \neq 0 \right\} \quad (2.15)$$

genel lineer grubunun bir manifolddur. $A, B \in GL(n, \mathbb{R})$ olmak üzere A ve B matrislerinin çarpımının (i, j) -elamanı

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \quad (2.16)$$

A ve B 'nin koordinatlarına göre bir polinom fonksiyonu olduğundan

$$\mu : GL(n, \mathbb{R}) \times GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow GL(n, \mathbb{R}) \quad (2.17)$$

çarpım fonksiyonu C^∞ sınıfındandır. $A \in GL(n, \mathbb{R})$ olmak üzere A^{-1} matrisinin (i, j) -elamanı

$$(A^{-1})_{ij} = \frac{1}{\det A} (-1)^{i+j} \text{adj}(A)_{ji} \quad (2.18)$$

a_{ij} koordinatlarının bir C^∞ fonksiyonu olduğundan $\iota : GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$ ters dönüşümü de C^∞ sınıfındandır. O halde $GL(n, \mathbb{R})$ bir Lie grubudur.

2.4 Kısmi Türevler

Tanım 2.14. M, n -boyutlu bir manifold, $(U, \phi) = (U, x^1, \dots, x^n)$ bir yama ve $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, C^∞ sınıfından bir fonksiyon olsun. f 'nin bir $p \in U$ noktasında x^i koordinatına göre $\partial f / \partial x^i$ kısmi türevi

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p f = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) = \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial r^i}(\phi(p)) = \left. \frac{\partial}{\partial r^i} \right|_{\phi(p)} (f \circ \phi^{-1}) \quad (2.19)$$

şekilde tanımlanır (Tu, 2011).

$p = \phi^{-1}(\phi(p))$ olduğundan yukarıdaki eşitlik

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(\phi^{-1}(\phi(p))) = \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial r^i}(\phi(p)) \quad (2.20)$$

şeklinde yazılırsa $\phi(U)$ üzerinde

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} \circ \phi^{-1} = \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial r^i} \quad (2.21)$$

fonksiyonu elde edilir. $(\partial f / \partial x^i) \circ \phi^{-1}$, $\phi(U)$ üzerinde C^∞ sınıfından olduğundan $(\partial f / \partial x^i)$ fonksiyonu da U üzerinde C^∞ sınıfındandır. Tanım gereği, herhangi $p \in U$ için

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^j}(p) = \frac{\partial(x^i \circ \phi^{-1})}{\partial r^j}(\phi(p)) \frac{\partial(r^i \circ \phi \circ \phi^{-1})}{\partial r^j}(\phi(p)) = \frac{\partial r^i}{\partial r^j}(\phi(p)) = \delta_j^i \quad (2.22)$$

olduğundan

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta_j^i \quad (2.23)$$

elde edilir. Burada

$$\delta_j^i = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (2.24)$$

şeklinde tanımlı Kronecker delta fonksiyonudur.

2.5 Tanjant uzay. Bir dönüşümün diferansiyeli

U , bir $p \in M$ noktasının bir açık komşuluğu ve $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, C^∞ sınıfından bir fonksiyon olmak üzere tüm (f, U) ikililerinin kümesi göz önüne alınsın. Eğer

$$f|_W = g|_W \quad (2.25)$$

olacak şekilde p noktasını içeren bir $W \subset U \cap V$ açık kümesi varsa o zaman f ve g fonksiyonları eşdeğerdir denir ve $(f, U) \sim (g, V)$ yazılır. Bu eşdeğerlik bağıntısının (f, U) ikilisini içeren $[f]$ eşdeğerlik sınıfına f 'nin $p \in M$ noktasındaki *tohumu* (germ) denir. $C_p^\infty(M)$ kümesi M üzerinde C^∞ fonksiyonların $p \in M$ noktasındaki tohumlarının kümesini gösterebilir. Aşağıdaki toplama ve çarpma operasyonlarına göre $C_p^\infty(M)$ bir halka teşkil eder: Her $[f], [g] \in C_p^\infty(M)$

$$\begin{cases} [f] + [g] &= [f|_W + g|_W] \\ [f][g] &= [f|_W g|_W]. \end{cases} \quad (2.26)$$

Her $[f] \in C_p^\infty(M)$ ve her $a \in \mathbb{R}$ için

$$a[f] = [af|_W] \quad (2.27)$$

şeklinde tanımlı skaler ile çarpma operasyonu ile $C_p^\infty(M)$ halkası $\mathbb{R}$ üzerinde bir cebir oluşturur (Ozan, 2016; Tu, 2011). Tanım gereği bir tohumun bir noktadaki değeri iyi

tanımlıdır, yani eşdeğerlik sınıfından seçilen bir temsilciden bağımsızdır: $p \in M$ ve $[f] \in C_p^\infty(M)$ olmak üzere

$$[f](p) = f(p) \quad (2.28)$$

ile belirlenir.

Tanım 2.15. M bir düzgün manifold ve $p \in M$ olsun.

$$D([f][g]) = (D[f])g(p) + f(p)D[g] \quad (2.29)$$

özelliğini sağlayan bir $D : C_p^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ lineer dönüşümüne p noktasında bir *derivasyon* denir (Tu, 2011).

Tanım 2.16. (Tanjant vektör) Bir $p \in M$ noktasındaki bir derivasyona p noktasında bir *tanjant vektör* denir (Tu, 2011).

Bir $p \in M$ noktasındaki bir tanjant vektör v_p ile gösterilir. p noktasındaki tüm tanjant vektörlerin kümesi $T_p M$ her $v_p, w_p \in T_p M$ ve her $a \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{cases} (v_p + w_p)[f] &= v_p[f] + w_p[f] \\ (av_p)[f] &= av_p[f] \end{cases} \quad (2.30)$$

şeklinde tanımlı toplama işlemi ve skaler ile çarpma operasyonuna göre bir vektör uzayı oluşturur. $T_p M$ uzayına p noktasındaki *tanjant uzay* denir.

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p [f] = \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p f = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) \quad (2.31)$$

tanımlanırsa o zaman (2.19) denkleminde

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p (fg) &= \frac{\partial}{\partial r^i} \Big|_{\phi(p)} ((fg) \circ \phi^{-1}) \\ &= \frac{\partial}{\partial r^i} \Big|_{\phi(p)} ((f \circ \phi^{-1})(g \circ \phi^{-1})) \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial r^i} \Big|_{\phi(p)} (f \circ \phi^{-1}) \right] g(p) + f(p) \frac{\partial}{\partial r^i} \Big|_{\phi(p)} (g \circ \phi^{-1}) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) g(p) + f(p) \frac{\partial g}{\partial x^i}(p) \end{aligned} \quad (2.32)$$

elde edilir. Buradan $\partial/\partial x^i|_p$ 'nin (2.29) derivasyon özelliğini sağladığı görülür. O halde her $i = 1, 2, \dots, n$ için

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \in T_p M \quad (2.33)$$

olduğu sonucu ortaya çıkar.

Tanım 2.17. (Bir dönüşümün diferansiyeli) M ve N birer manifold ve $F : N \rightarrow M, C^\infty$ sınıfından bir dönüşüm olsun. $X_p \in T_p N$ ve $[f] \in C_{F(p)}^\infty M$ olmak üzere

$$F_*(X_p)[f] = X_p[f \circ F] \in \mathbb{R} \quad (2.34)$$

şeklinde tanımlı $F_* : T_p N \rightarrow T_{F(p)} M$ lineer dönüşümüne F 'nin p noktasındaki diferansiyeli denir (Tu, 2011).

Açıklama 2.3. Kimi zaman F 'nin p noktasındaki diferansiyeli dF ile gösterilir. Tanımın p noktasına bağımlılığı açıkça vurgulanmak istenildiğinde $(dF)_p$ ya da $F_{*,p}$ gösterimleri kullanılır.

Teorem 2.1. $F : N \rightarrow M$ ve $G : M \rightarrow P$ dönüşümleri C^∞ sınıfından ve $p \in N$ ise o zaman

$$(G \circ F)_{*,p} = G_{*,F(p)} \circ F_{*,p} \quad (2.35)$$

eşitliği doğrudur.

Sonuç 2.1. Eğer $F : N \rightarrow M$ dönüşümü bir difeomorfizma ve $p \in N$ ise o zaman $F_* : T_p N \rightarrow T_{F(p)} M$ lineer dönüşümü bir lineer izomorfizmadır.

Açıklama 2.4. (U, ϕ) bir M manifoldunda bir p noktasını içeren bir yama olsun. Önerme 2.4 ve Sonuç 2.1'e göre

$$\phi_* : T_p M \rightarrow T_{\phi(p)} \mathbb{R}^n \quad (2.36)$$

diferansiyeli bir vektör uzayı izomorfizmasıdır ve $\dim T_p M = \dim M = n$.

Önerme 2.5. M bir manifold ve $(U, \phi) = (U, x^1, \dots, x^n)$ bir p noktasını içeren bir yama olsun. O zaman aşağıdaki doğrudur (Tu, 2011):

$$\phi_* \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) = \frac{\partial}{\partial r^i} \Big|_{\phi(p)}. \quad (2.37)$$

Önerme 2.6. Eğer $(U, \phi) = (U, x^1, \dots, x^n)$ p noktasını içeren bir yama ise o zaman

$$\frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_p \quad (2.38)$$

tanjant vektörleri $T_p M$ için bir taban (baz) oluşturur (Tu, 2011).

Sonuç 2.2. Bir $v_p \in T_p M$ tanjant vektörü

$$v_p = \sum_i v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \quad (2.39)$$

şeklinde tek türlü yazılır.

Buradan hareketle bir $(U, x^1, \dots, x^n)$ yaması üzerinde

$$v_p[f] = \sum_i v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) \quad (2.40)$$

yazılabilir.

Tanım 2.18. M bir manifold olsun. $T_p M$ 'nin dual uzayına yani

$$T_p^* M = \{\omega_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R} \mid \omega_p \text{ lineer}\} \quad (2.41)$$

vektör uzayına M 'nin p noktasındaki *kotanjant uzayı* denir (Tu, 2011).

Önerme 2.7. M bir manifold ve $(U, x^1, \dots, x^n)$ bir yama olsun. x^i koordinatlarının p noktasındaki diferansiyelleri olan $(dx^i)_p$ 'ler

$$(dx^i)_p(\partial/\partial x^j|_p) = \delta_j^i \quad (2.42)$$

eşitliklerini sağlarlar (Tu, 2011).

Sonuç 2.3.

$$\{(dx^1)_p, \dots, (dx^n)_p\} \quad (2.43)$$

kümesi $T_p^* M$ için bir tabandır. Bu tabana (2.38) tabanının dual tabanı denir.

Önerme 2.8. N ve M birer manifold, $F : N \rightarrow M$, C^∞ sınıfından bir dönüşüm olmak üzere $(U, x^1, \dots, x^n)$ ve $(V, y^1, \dots, y^m)$ sırasıyla $p \in N$ ve $F(p) \in M$ noktalarını içeren N ve M içinde koordinat yamaları olsunlar. O zaman $F_* : T_p N \rightarrow T_{F(p)} M$ diferansiyelinin sırasıyla $T_p N$ ve $T_{F(p)} M$ tanjant uzaylarının $\{\partial/\partial x^j|_p\}$ ve $\{\partial/\partial y^i|_{F(p)}\}$ bazlarına göre matris temsili

$$\left[\frac{\partial F^i}{\partial x^j}(p) \right] \quad (2.44)$$

Jacobian matrisidir. Burada $F^i = y^i \circ F$, F dönüşümünün i . bileşenidir (Tu, 2011).

Tanım 2.19. C^∞ sınıfından bir $F : N \rightarrow M$ dönüşümünün rankı $F_* : T_p N \rightarrow T_{F(p)} M$ diferansiyelinin rankı olarak tanımlanır ve $\text{rk} F(p)$ ile gösterilir (Tu, 2011).

Açıklama 2.5. Tanım 2.17'ye göre bir F dönüşümün diferansiyeli koordinat yamalarından bağımsız olduğu için

$$\text{rk} F(p) = \text{rk} \left[\frac{\partial F^i}{\partial x^j}(p) \right] \quad (2.45)$$

şeklinde tanımlanabilir.

2.6 Altmanifoldlar

Tanım 2.20. N , n -boyutlu bir manifold ve S , N 'nin bir altkümesi olsun. Eğer aşağıdaki koşul sağlanıyorsa o zaman S 'ye N manifoldunun k -boyutlu bir regüler altmanifoldu denir.

Her $p \in S$ için, p noktasının N 'nin bir maksimal atlası içinde kalan bir $(U, \phi) = (U, x^1, x^2, \dots, x^n)$ koordinat komşuluğu vardır öyle ki $U \cap S$, $n - k$ koordinat fonksiyonunun sıfıra eşit olması ile tanımlanır. Yeniden numaralandırma ile $n - k$ koordinat fonksiyonlarının $x^{k+1}, \dots, x^n$ olduğunu varsayılabilir (Tu, 2011).

Bu tanımlı sağlayan N içindeki bir (U, ϕ) yamasına, S 'ye göre adapte edilmiş bir yama denir. $U \cap S$ üzerinde,

$$\phi = (x^1, \dots, x^k, 0, \dots, 0) \quad (2.46)$$

olarak ifade edilir.

$$\phi_S : U \cap S \rightarrow \mathbb{R}^k$$

dönüşümü ϕ 'nin ilk k bileşeninin $U \cap S$ üzerine kısıtlanması olsun yani $\phi_S = (x^1, \dots, x^k)$ olsun. Bu durumda $(U \cup S, \phi_S)$, üzerindeki altuzay topolojisine göre S için bir yama olur.

Tanım 2.21. Eğer S , n -boyutlu bir N manifoldunun bir k - boyutlu regüler altmanifoldu ise o zaman $n - k$ sayısına S 'nin N içindeki *eşboyutu* denir (Tu, 2011).

Açıklama 2.6. N 'nin bir regüler altmanifoldu üzerindeki topoloji, altuzay topolojisi olmak durumundadır.

Tanım 2.22. N ve M birer manifold olmak üzere bir $F : N \rightarrow M$ dönüşümü verilsin. Bir $c \in M$ için N 'nin

$$F^{-1}(\{c\}) = \{p \in N \mid F(p) = c\} \quad (2.47)$$

şeklinde tanımlı altkümesine F dönüşümünün bir *seviye kümesi* denir. Buradaki $c \in M$ değerine $F^{-1}(\{c\})$ seviye kümesinin *seviyesi* adı verilir (Tu, 2011).

Tanım 2.23. Eğer $F : N \rightarrow \mathbb{R}^m$ ise o zaman

$$Z(F) = F^{-1}(\{0\}) \quad (2.48)$$

şekilde tanımlı seviye kümesine F 'nin *sıfır kümesi* denir (Tu, 2011).

Tanım 2.24. Eğer bir $c \in M$ noktası bir $F : N \rightarrow M$ dönüşümünün görüntü kümesinde değilse ya da her $p \in F^{-1}(\{c\})$ için $F_{*,p} : T_p N \rightarrow T_{F(p)} M$ diferansiyeli örten ise o zaman c 'ye F dönüşümünün bir *regüler değeri* denir. c regüler değerinin ters görüntüsü $F^{-1}(\{c\})$ seviye kümesine *regüler seviye kümesi* denir (Tu, 2011).

Teorem 2.2. $g : N \rightarrow \mathbb{R}$, N manifoldu üzerinde C^∞ sınıfından bir fonksiyon olsun. O zaman boştan farklı bir $S = g^{-1}(\{c\})$ regüler seviye kümesi N 'nin eşboyutu 1 olan bir regüler altmanifoldudur (Tu, 2011).

Açıklama 2.7. Kimi zaman bir $F : N \rightarrow M$ dönüşümü verildiğinde bir $p \in M$ için $F^{-1}(\{p\})$ ters görüntü kümesini gösterirken basitlik açısından $F^{-1}(p)$ yazılır.

2.7 Vektör Demetleri

Tanım 2.25. E ve M , C^∞ sınıfından manifoldlar olmak üzere aşağıdaki özellikleri sağlayan C^∞ sınıfından örten bir $\pi : E \rightarrow M$ dönüşümüne M üzerinde bir *reel vektör demeti* denir ve $\xi = (E, \pi, M)$ ile gösterilir:

- (i) Her bir $p \in M$ için $\pi^{-1}(p)$ kümesi n -boyutlu bir reel vektör uzayının yapısına sahiptir.
- (ii) Yerel aşıkarcılık: Her bir $p \in M$ için bir U açık komşuluğu ve bir $\varphi_U : \pi^{-1}(U) \cong U \times \mathbb{R}^n$ difeomorfizması vardır öyle ki her bir $q \in U$ için φ_U 'nin $\pi^{-1}(q)$ kümesine kısıtlanması

$$\varphi_U : \pi^{-1}(q) \rightarrow \{q\} \times \mathbb{R}^n \quad (2.49)$$

bir lineer izomorfizmadır (Morita, 2001).

Bir $\xi = (E, \pi, M)$ demetinde, E toplam uzay, π projeksiyon ve M baz uzayı olarak adlandırılır. Ayrıca $\pi^{-1}(p)$ kümesine p üzerindeki lif denir ve genellikle E_p ile gösterilir. Bazen bir ξ vektör demeti, $\pi : E \rightarrow M$ ya da sadece E ile gösterilebilir. M 'nin (bir açık küme olmak zorunda olmayan) bir N alt manifoldu için yerel aşıkarcılık koşulunu sağlayan bir $\varphi_N : \pi^{-1}(N) \cong N \times \mathbb{R}^n$ difeomorfizmasına N üzerinde bir *aşıkarcılaştırma* denir.

Tanım 2.26. Verilen bir $\pi : E \rightarrow M$ vektör demeti için $\pi \circ s = id_M$ şeklinde tanımlı C^∞ sınıfından bir $s : M \rightarrow E$ dönüşümüne bir *kesit* denir. Başka bir ifade ile bir s kesiti her bir p noktasında C^∞ sınıfından olacak şekilde p noktasına $s(p) \in E_p$ noktasını karşılık getiren bir dönüşümdür. Her $p \in M$ için $s(p) = 0 \in E_p$ oluyorsa o zaman s kesitine *sıfır kesit* denir. Her $p \in M$ için $s(p) \neq 0$ koşulunu sağlayan s kesitine *sıfır olmayan kesit* adı verilir (Morita, 2001).

Tanım 2.27. Bir U açık altkümesi üzerinde bir $\varphi : \pi^{-1}(U) \cong U \times \mathbb{R}^n$ aşıkarcılaştırması belirlemek demek her $p \in U$ için $s_1(p), \dots, s_n(p)$ vektörlerinin E_p 'nin bir tabanını oluşturduğu U üzerinde $s_i : U \rightarrow E$ kesitleri seçmek demektir. Bu özelleği sağlayan s_i kesitlerinin kümesine U üzerinde bir *çatı alanı* denir (Morita, 2001).

E vektör demetinin tüm kesitlerinin kümesi $\Gamma(E)$ ile gösterilir. $\Gamma(E)$, aşağıdaki tanımlanan toplama işlemi ve skaler ile çarpma operasyonlarıyla birlikte bir vektör uzayı

oluşturur: Her $s, s' \in \Gamma(E)$ ve $a \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{cases} (s + s')(p) &= s(p) + s'(p) \\ (as)(p) &= as(p). \end{cases} \quad (2.50)$$

$s \in \Gamma(E)$ ve $f \in C^\infty(M)$ için

$$(fs)(p) = f(p)s(p) \quad (2.51)$$

operasyonu ile birlikte $\Gamma(E), C^\infty(M)$ halkası üzerinde bir modül oluşturur (Morita, 2001).

Örnek 2.11. M bir C^∞ manifold olmak üzere $E = M \times \mathbb{R}^n$, $\pi : E \rightarrow M; \pi(p, v) = p$ şeklinde tanımlı vektör demetine *çarpım demeti* denir.

Örnek 2.12. (Bir manifoldun teğet demeti) M bir C^∞ manifold olsun. M 'nin tüm noktalarındaki tüm tanjant uzaylarının kümesi

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_p M \quad (2.52)$$

bir C^∞ manifolddur (Morita, 2001). $v \in T_p M$ olmak üzere

$$\pi : TM \rightarrow M; \pi(v) = p, \pi^{-1}(p) = T_p M \quad (2.53)$$

şeklinde tanımlı projeksiyon ile birlikte TM bir vektör demetidir. Bu vektör demetine M manifoldunun *tanjant demeti* ya da *teğet demeti* adı verilir (Morita, 2001).

Tanım 2.28. $\pi : TM \rightarrow M$ tanjant demetinin bir X kesitine M üzerinde bir *vektör alanı* denir ve TM 'nin tüm kesitlerinin kümesi $\mathfrak{X}(M) = \Gamma(TM)$ ile gösterilir (Morita, 2001).

$(U, x^1, \dots, x^n)$, M manifoldu üzerinde bir yama olmak üzere bir $X \in \mathfrak{X}(M)$ vektör alanının x^i koordinatlarındaki ifadesi

$$X = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (2.54)$$

ile verilir. Burada $X^i : U \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları C^∞ sınıfındandır (Morita, 2001; Tu, 2011). (2.54) vektör alanının bir $p \in M$ noktasındaki değeri

$$X_p = X(p) = \sum_i X^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \quad (2.55)$$

tanjant vektörüdür. Eğer $X \in \mathfrak{X}(M)$ ve $f \in C^\infty(M)$ ise o zaman

$$(fX)(p) = f(p)X(p) \quad (2.56)$$

şeklinde tanımlı fX vektör alanı da C^∞ sınıfındandır yani $fX, \mathfrak{X}(M)$ 'nin bir elemanıdır ve yerel koordinatlarda

$$fX = \sum_i f X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (2.57)$$

ile verilir.

Tanım 2.29. $X \in \mathfrak{X}(M)$ ve $f \in C^\infty(M)$ olsun. Her $p \in M$ için

$$(X[f])(p) = X(p)[f] = X_p[f] \quad (2.58)$$

şeklinde tanımlı C^∞ sınıfından $X[f]$ fonksiyonuna f 'nin X 'e göre *Lie türevi* denir ve Xf ile gösterilir (Tu, 2011).

Örnek 2.13. (Bir manifoldun kotanjant demeti) M bir C^∞ manifold olsun. M 'nin tüm noktalarındaki tüm kotanjant uzaylarının kümesi

$$T^*M = \bigcup_{p \in M} T_p^*M \quad (2.59)$$

bir C^∞ manifolddur (Morita, 2001; Tu, 2011). $\alpha \in T_p^*M$ olmak üzere

$$\pi : T^*M \rightarrow M; \quad \pi(\alpha) = p, \quad \pi^{-1}(p) = T_p^*M \quad (2.60)$$

şeklinde tanımlı projeksiyon ile birlikte T^*M bir vektör demetidir. Bu vektör demetine M manifoldunun *kotanjant demeti* adı verilir (Morita, 2001; Tu, 2011).

Tanım 2.30. $\pi : T^*M \rightarrow M$ kotanjant demetinin bir ω kesitine M üzerinde bir *diferansiyel 1-form* ya da kısaca *1-form* denir ve T^*M 'nin tüm kesitlerinin kümesi $\Gamma(T^*M)$ ile gösterilir. (Morita, 2001).

$(U, x^1, \dots, x^n)$, M manifoldu üzerinde bir yama olmak üzere bir $\omega \in \Gamma(T^*M)$ 1-formunun x^i koordinatlarındaki ifadesi

$$\omega = \sum_i a_i dx^i \quad (2.61)$$

ile verilir. Burada $a_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları C^∞ sınıfındandır (Morita, 2001; Tu, 2011). (2.72) 1-formunun bir $p \in M$ noktasındaki değeri

$$\omega_p = \omega(p) = \sum_i a^i(p) (dx^i)_p \quad (2.62)$$

kotanjant vektörüdür.

Tanım 2.31. $\omega \in \Gamma(T^*M)$ ve $X \in \mathfrak{X}(M)$ olmak üzere ω 1-formunun X vektör alanına etkisi

$$\omega(X)(p) = \omega_p(X_p) \quad (2.63)$$

şeklinde tanımlıdır (Tu, 2011).

Açıklama 2.8. $(U, x^1, \dots, x^n)$, M manifoldu üzerinde bir yama, $\omega = \sum_i a_i dx^i$ ve $X = \sum_i X^i \partial_{x^i}$ olmak üzere (2.63) tanımı yerel olarak

$$\omega(X) = \sum a_i X^i \quad (2.64)$$

ile verilir.

Tanım 2.32. $f \in C^\infty(M)$ olmak üzere herhangi $p \in M$ ve $X_p \in T_p M$ için

$$(df)_p X_p = X_p[f] \quad (2.65)$$

şeklinde tanımlı 1-forma f 'nin *diferansiyeli* denir.

$(U, x^1, \dots, x^n)$, M manifoldu üzerinde bir yama olmak üzere

$$(df)_p \partial_{x^i}|_p = \partial_{x^i}|_p[f] = \partial_{x^i}|_p f = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) \quad (2.66)$$

olduğundan f 'nin diferansiyeli x^i koordinatlarında

$$df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \quad (2.67)$$

ile verilir.

Tanım 2.33. $\{X_1, \dots, X_n\}$ kümesi bir M manifoldunun bir U açık altkümesi üzerinde bir çatı alanı olsun. U üzerinde

$$\omega^i(X_j) = \delta_j^i \quad (2.68)$$

eşitliğini sağlayan $\omega^i \in \Gamma(T^*M)$, $i = 1, 2, \dots, n$ 1-formlarının kümesine U üzerinde $\{X_1, \dots, X_n\}$ çatı alanına dual olan *eşçatı alanı* denir.

Tanım 2.34. V , n boyutlu bir reel vektör uzayı, $V^k = \underbrace{V \times V \times \dots \times V}_{k \text{ defa}}$, V 'nin kendisiyle k defa kartezyen çarpımı olmak üzere aşağıdaki koşulu sağlayan bir $L : V^k \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna V üzerinde bir *k-lineer form* ya da *k-tensör* denir (Tu, 2011): L fonksiyonu k argümanının her birine göre lineerdir, yani her her $a, b \in \mathbb{R}$ ve $v, w \in V$ için

$$L(\dots, av + bw, \dots) = aL(\dots, v, \dots) + bL(\dots, w, \dots) \quad (2.69)$$

eşitliği vardır.

Açıklama 2.9. Lineer dönüşümler gibi k -lineer formlar da tamamıyla taban vektörleri üzerindeki etkileriyle belirlenirler.

Tanım 2.35. Eğer $L : V^k \rightarrow \mathbb{R}$ k -lineer formu her $\sigma \in S_k$ için

$$L(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = (\text{sgn } \sigma) L(v_1, \dots, v_k) \quad (2.70)$$

eşitliğini sağlıyorsa o zaman L 'ye *alterne k -lineer form* ya da *alterne k -tensör* denir (Tu, 2011). Burada S_k , $\{1, 2, \dots, k\}$ kümesinin tüm permütasyonlarının grubudur.

Tanım 2.36. M bir C^∞ manifold ve $p \in M$ olmak üzere $T_p M$ üzerindeki tüm alterne k -tensörlerin vektör uzayı $\bigwedge^k(T_p^* M)$ ile gösterilsin.

$$\bigwedge^k T^* M = \bigcup_{p \in M} \bigwedge^k(T_p^* M) \quad (2.71)$$

olmak üzere her $\alpha \in \bigwedge^k(T_p^* M)$ için $\pi : \bigwedge^k T^* M \rightarrow M; \pi(\alpha) = p$ şeklinde tanımlı projeksiyon ile birlikte $\bigwedge^k T^* M$ bir vektör demetidir. Bu vektör demetine kotanjant demetin k . dış kuvveti denir (Tu, 2011).

Tanım 2.37. $\bigwedge^k T^* M$ vektör demetinin bir kesitine M üzerinde bir *diferansiyel k -form* ya da kısaca bir k -form denir. $\bigwedge^k T^* M$ vektör demetinin tüm kesitlerinin kümesi $\Omega^k(M) = \Gamma(\bigwedge^k T^* M)$ ile gösterilir (Tu, 2011).

$(U, x^1, \dots, x^n)$, M manifoldu üzerinde bir yama olmak üzere bir $\omega \in \Omega^k(M)$ k -formunun x^i koordinatlarındaki ifadesi

$$\omega = \sum_I a_I dx^I = \sum_{i_1 < \dots < i_k} a_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \quad (2.72)$$

ile verilir. Burada $a_I = a_{i_1 \dots i_k} : U \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları C^∞ sınıfındandır (Tu, 2011). $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ olmak üzere

$$I = (i_1, i_2, \dots, i_k) \quad (2.73)$$

notasyonunaa (artan) *çoklu-indis notasyonu* denir. Çoklu-indis notasyonu ile

$$dx^I = dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \quad (2.74)$$

yazılır. Örneğin 3-boyutlu bir M manifoldu üzerinde bir ω 2-formu x, y, z yerel koordinatlarında

$$\omega = a_{12} dx \wedge dy + a_{13} dx \wedge dz + a_{23} dy \wedge dz \quad (2.75)$$

ile verilir.

Tanım 2.38. $\alpha^1, \dots, \alpha^k \in \Omega^1(M)$ ve $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$ olmak üzere

$$\alpha^1 \wedge \dots \wedge \alpha^k(X_1, \dots, X_k) = \det(\alpha^i(X_j)) \quad (2.76)$$

şeklinde tanımlı $\alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^k$ k -formuna $\alpha^1, \dots, \alpha^k$ 1-formlarının *dış çarpımı* denir (Clelland, 2017).

Buradan hareketle

$$dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}(\partial_{x^{j_1}}, \dots, \partial_{x^{j_k}}) = \begin{cases} 1, & i_1 = j_1, i_2 = j_2, \dots, i_k = j_k \text{ ise} \\ 0, & \text{aksi durumda} \end{cases} \quad (2.77)$$

olduğu görülür. Ayrıca $\omega = \sum a_i dx^i$ ve $\eta = \sum b_i dx^i$ olmak üzere ω ve η 1-formlarının dış çarpımı

$$\omega \wedge \eta = \sum_{i < j} (a_i b_j - a_j b_i) dx^i \wedge dx^j \quad (2.78)$$

ile verilir. Buradan hareketle

$$\omega \wedge \eta = -\eta \wedge \omega \quad (2.79)$$

ve

$$\omega \wedge \omega = 0 \quad (2.80)$$

olduğu görülür.

Açıklama 2.10. Eğer iki diferansiyel form herhangi bir $p \in M$ noktasının bir komşuluğunda aynı ise o zaman tüm M manifoldu üzerinde aynıdır. Dolayısıyla bir k -formun dış türevinin tanımı bir $(U, x^1, \dots, x^n)$ yaması üzerinde verilebilir.

Tanım 2.39. Bir M manifoldu üzerindeki ω k -formu bir $(U, x^1, \dots, x^n)$ yaması üzerinde

$$\omega = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} a_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \quad (2.81)$$

ile verilsin.

$$d\omega = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} da_{i_1 \dots i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \quad (2.82)$$

şeklinde tanımlı $(k+1)$ -forma ω 'nın *dış türevi* denir (Morita, 2001).

2.8 Riemann manifoldu

Tanım 2.40. M bir C^∞ manifold olsun. M 'deki her p noktasına $T_p M$ üzerinde bir $g_p = \langle \cdot, \cdot \rangle_p$ iç çarpımını karşılık getiren C^∞ sınıfından $g : p \mapsto g_p$ dönüşümüne M üzerinde bir *Riemann metriği* denir. Burada g dönüşümünün C^∞ sınıfından olmasından kasıt herhangi $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ için

$$p \in M \rightarrow g_p(X_p, Y_p) = \langle X_p, Y_p \rangle_p \in \mathbb{R} \quad (2.83)$$

fonksiyonunun C^∞ sınıfından olmasıdır. Bir g Riemann metriği ile donatılmış bir M manifolduna bir *Riemann manifoldu* denir (Burns & Gidea, 2005).

Açıklama 2.11. Üzerindeki g Riemann metriği ile birlikte bir M Riemann manifoldu (M, g) ile gösterilir.

$(U, x^1, \dots, x^n)$, (M, g) üzerinde bir yama olmak üzere U üzerinde

$$g_{ij}(p) = g_p \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \right) \quad (p \in U) \quad (2.84)$$

şeklinde tanımlı g_{ij} fonksiyonları ile birlikte g 'nin x^i koordinatlarındaki ifadesi

$$g = \sum_{i,j} g_{ij} dx^i \otimes dx^j \quad (2.85)$$

ile verilir. Burada $g_{ij} = g_{ji}$ fonksiyonları U üzerinde C^∞ sınıfındandır ve her $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ için

$$(dx^i \otimes dx^j)(X, Y) = dx^i(X) dx^j(Y) \quad (2.86)$$

şekilde tanımlı çarpıma dx^i ve dx^j 1-formlarının *tensor çarpımı* denir. $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $X = \sum X^i \partial_{x^i}$ ve $Y = \sum Y^i \partial_{x^i}$

$$g(X, Y)(p) = g_p(X_p, Y_p) \quad (2.87)$$

tanımlanırsa o zaman

$$g(X, Y) = \sum_{i,j} g_{ij} X^i Y^j \quad (2.88)$$

elde edilir. Genel olarak ω^1 ve ω^2 1-formlarının tensor çarpımı her $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ için

$$(\omega^1 \otimes \omega^2)(X, Y) = \omega^1(X) \omega^2(Y) \quad (2.89)$$

şeklinde tanımlıdır.

Tanım 2.41. (M, g) bir Riemann manifoldu ve $U \subset M$ bir açık küme olsun. $e_i \in \mathfrak{X}(M)$, $i = 1, 2, \dots, n$ vektör alanlarından oluşan U üzerindeki çatı alanı için

$$g(e_i, e_j) = \delta_{ij} \quad (2.90)$$

oluyorsa o zaman bu çatı alanına U üzerinde bir *ortonormal çatı alanı* denir ve $(e_1, \dots, e_n)$ ile gösterilir.

2.9 Bir vektör demeti üzerinde bağlantı formu

Tanım 2.42. $\pi : E \rightarrow M$, M üzerinde bir vektör demeti olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$$

çift-lineer dönüşümüne $\pi : E \rightarrow M$ vektör demeti üzerinde bir *bağlantı* denir (Morita, 2001): Herhangi $f \in C^\infty(M)$, $X \in \mathfrak{X}(M)$, $s \in \Gamma(E)$ için

(i)

$$\nabla_{fX}s = f\nabla_X s. \quad (2.91)$$

(ii)

$$\nabla_X(fs) = f\nabla_X s + (Xf)s. \quad (2.92)$$

$\nabla_X s$ değerine s kesitinin X vektör alanına göre *kovaryant türevi* denir.

Eğer $E = TM$ ise o zaman $\Gamma(TM) = \mathfrak{X}(M)$ olur. Bu durumda

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M) \quad (2.93)$$

bağlantısına M üzerinde bir *afin bağlantı* denir (Tu, 2017).

Önerme 2.9. M bir Riemann manifoldu ve U bir koordinat komşuluğu olsun. $e = (e_1, \dots, e_n)$, U üzerinde bir ortonormal çatı alanı ve $\omega = (\omega^1, \dots, \omega^n)^t$, e çatı alanına dual olan eşçatı alanı olsun. O zaman U üzerinde aşağıdaki özellikleri sağlayan tek türlü belirli $\theta = (\theta_j^i)$ 1-formları vardır (Morita, 2001):

(i)

$$\theta_j^i = -\theta_i^j, \quad (2.94)$$

(ii)

$$d\omega^i = \sum_j \theta_j^i \wedge \omega^j. \quad (2.95)$$

Açıklama 2.12. $\theta = (\theta_j^i)$ matrisine U üzerinde $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ -değerli 1-form adı verilir. (2.9) önermesinde $\theta = (\theta_j^i)$ matrisi anti-simetrik olduğundan (2.9) önermesindeki θ matrisi $\mathfrak{so}(n, \mathbb{R})$ -değerli bir 1-form olacaktır. Burada $\mathfrak{so}(n, \mathbb{R})$, $O(n)$ ortogonal grubun Lie cebiridir.

Tanım 2.43. $\theta = (\theta_j^i)$, (2.9) önermesindeki $\mathfrak{so}(n, \mathbb{R})$ -değerli 1-form olsun. Bu durumda

$$\nabla e_j = \sum_i \theta_j^i \otimes e_i \quad (2.96)$$

şeklinde tanımlı TM üzerindeki ∇ bağlantısına (söz konusu metrikle uyumlu) *Levi-Civita bağlantısı* ya da *Riemann bağlantısı* denir. $\theta = (\theta_j^i)$ 1-formuna da U üzerinde ∇ 'nın *bağlantı formu* adı verilir (Morita, 2001).

(2.95) yapı denklemlerinin dış türevi alınır

$$0 = (d\theta_j^i + \sum_k \theta_k^i \wedge \theta_j^k) \wedge \omega^j \quad (2.97)$$

elde edilir. Buradan

$$\Omega_j^i = d\theta_j^i + \sum_k \theta_k^i \wedge \theta_j^k, \quad \Omega_j^i = -\Omega_i^j \quad (2.98)$$

yazılır. $\Omega = (\Omega_j^i)$ matrisine ∇ bağlantısının *eğrilik 2-formu* adı verilir. Ω_j^i 2-formları

$$\Omega_j^i = \sum_{k < l} R_{jkl}^i \omega^k \wedge \omega^l \quad (2.99)$$

şeklinde ifade edilirse o zaman buradaki R_{jkl}^i fonksiyonları Bölüm 4.2.1’de tanımlanan Riemannian eğrilik tensörü’nün $e = (e_1, \dots, e_n)$ ortonormal çatı alanına göre bileşenleridir. Eğer M üzerinde R_{jkl}^i fonksiyonları idantik olarak sıfır ise yani $R_{jkl}^i \equiv 0$ ise o zaman M manifolduna *düz uzay* denir. 2-boyutlu bir Riemann manifoldu üzerinde eğrilik 2-formunun tek bir bağımsız bileşeni vardır:

$$\Omega_2^1 = R_{212}^1 \omega^1 \wedge \omega^2. \quad (2.100)$$

Bu durumda R_{212}^1 fonksiyonuna (M, g) Riemann manifoldunun *Gauss eğriliği*’de denir, bkz. (Boothby, 1986).

BÖLÜM 3

JET UZAYLARI

3.1 ADDlerin Jet Uzay Formülasyonu: $\mathcal{E}_k$

Bu bölümdeki amaç bir diferansiyel denklemin jet demet formülasyonunu vermektir. Bu fomulasyon diferansiyel denklemlerin koordinat sisteminden bağımsız olarak ele alınabilmesini sağlamasının yanı sıra geometrik olarak bir diferansiyel denklemin uygun bir jet uzayı içerisinde bir manifold olarak düşünülmesine imkan sağlamaktadır. Bir düzlem eğrisinin k -grafiği bu manifold üzerinde yer alır. Eğer jet demet içerisindeki kanonik kontakt formlar söz konusu düzlem eğrisinin k -grafiği üzerinde sıfır oluyorsa o zaman bu eğri denklemin çözümüdür denir. Diferansiyel denklemlerin jet demet formülasyonu ve kontakt yapılar hakkındaki bilgiler aşağıdaki kaynaklardan derlenmiştir. (Bocharov vd., 1999; Ivey & Landsberg, 2003; Kushner vd., 2007; Saunders, 1989; Vassiliou & Lisle, 2000).

Tanım 3.1.

$$\tau \circ \rho = \text{id} \quad (3.1)$$

olacak şekilde yerel olarak tanımlı C^∞ sınıfından bir

$$\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad (3.2)$$

fonksiyonuna $\tau : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $\tau(x, y) = x$ aşıkâr demetinin bir (düzgün) *yerel kesiti* denir. Burada x ve y sırasıyla $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ çarpımındaki birinci ve ikinci faktörler için yerel koordinatlardır.

Tanım gereği τ 'nin bir ρ yerel kesiti, yerel olarak tanımlı C^∞ sınıfından bir

$$y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \quad y = y(x) \quad (3.3)$$

fonksiyonunun grafiği yani

$$\{(x, y(x)) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad (3.4)$$

olarak düşünülebilir. Grafiği ile fonksiyonun kendisi özdeş kılınarak $y = \rho(x)$ yazılabilir.

Tanım 3.2. ρ_1 ve ρ_2 , τ 'nin iki yerel kesiti olsun. Bir $x_0 \in \mathbb{R}$ noktasında

$$\rho_1(x_0) = \rho_2(x_0), \quad \frac{d\rho_1}{dx}(x_0) = \frac{d\rho_2}{dx}(x_0), \dots, \frac{d^k \rho_1}{dx^k}(x_0) = \frac{d^k \rho_2}{dx^k}(x_0) \quad (3.5)$$

oluyorsa o zaman ρ_1 ve ρ_2 yerel kesitleri k . mertebeden eşdeğerdir denir.

Bir diğer ifadeyle, eğer τ 'nin iki yerel kesitinin x_0 noktasında k . mertebeye kadar tüm Taylor katsayıları aynı ise bu kesitler x_0 noktasında k . mertebeden eşdeğerdir. k . mertebeden eşdeğer olma bir eşdeğerlik bağıntısıdır.

Tanım 3.3. τ 'nin bir ρ yerel kesitini içeren $[\rho]$ eşdeğerlik sınıfına ρ 'nun x_0 noktasındaki k -jet'i denir ve

$$[\rho] = j_{x_0}^k \rho$$

ile gösterilir.

$I \subset \mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere x_0 , I üzerinde değıştikçe τ 'nin tüm yerel kesitlerinin k -jetlerinin kümesi bir düzgün manifold teşkil ve bu manifold $(k+2)$ -boyutlu Euclid uzayıdır. Bu uzaya, yerel olarak tanımlı $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümlerinin k -jetlerinin demeti ya da k -jet uzayı denir ve $J^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ya da kısaca J^k ile gösterilir. J^k uzayındaki bir $j_{x_0}^k \rho$ noktasının koordinatları, $j = 1, 2, \dots, k$ olmak üzere,

$$x(j_{x_0}^k \rho) = x_0, \quad y(j_{x_0}^k \rho) = \rho(x_0), \quad p^j(j_{x_0}^k \rho) = \frac{d^j \rho}{dx^j}(x_0) \quad (3.6)$$

şeklinde tanımlanır. $(x, y, p^1, \dots, p^k)$ koordinat sistemine J^k üzerinde standart koordinat sistemi denir. k . mertebeden

$$\frac{d^k y}{dx^k} = f(x, y, y', \dots, y^{(k-1)}) \quad (3.7)$$

formundaki bir ADD göz önüne alınsın. (3.7) denklemi J^k üzerinde

$$p^k = f(x, y, p^1, \dots, p^{k-1}) \quad (3.8)$$

olarak verilir. Buradaki $f : J^{k-1} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu aksi belirtilmedikçe C^∞ sınıfından kabul edilecektir. J^k üzerinde

$$F(x, y, p^1, \dots, p^k) = p^k - f(x, y, p^1, \dots, p^{k-1}) \quad (3.9)$$

tanımlanırsa o zaman herhangi $\mathbf{x} = j_{x_0}^k \rho \in J^k$ için

$$\text{rk} F(\mathbf{x}) = \text{rk} \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial p^{k-1}}(\mathbf{x}) & 1 \end{bmatrix} = 1 \quad (3.10)$$

olduğundan Teorem 2.2'e göre k . mertebeden bir ADD

$$\mathcal{E}_k = F^{-1}(\{0\}) = \{j_{x_0}^k \rho \in J^k : x_0 \in I, F(j_{x_0}^k \rho) = 0\} \quad (3.11)$$

J^k 'nin bir regüler altmanifoldu olacaktır.

Tanım 3.4. Yerel olarak

$$\begin{aligned} j^k \rho : \mathbb{R} &\rightarrow J^k \\ x &\mapsto (j^k \rho)(x) = j_x^k \rho \end{aligned} \quad (3.12)$$

şeklinde tanımlı dönüşüme τ 'nın bir ρ yerel kesitinin k -grafiği denir.

Bu tanıma göre τ 'nın bir yerel kesitinin k -grafiği J^k üzerinde bir eğri tanımlar ve bir $y = \rho(x)$ kesitinin k -grafiği

$$x \mapsto j_x^k \rho = (x, y(x), y'(x), \dots, y^{(k)}(x)) \quad (3.13)$$

eğrisidir.

Tanım 3.5. Eğer bir $(x, y(x))$ eğrisinin k -grafiği (3.13), $\mathcal{E}_k$ manifoldunun üzerinde kalıyorsa o zaman bu eğriye (3.7) denkleminin bir çözümüdür denir.

Genel olarak $\mathcal{E}_k$ üzerinde bir eğri bir $(x, y(x))$ eğrisinin k -grafiği olmak durumunda değildir. Şimdi bir $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{E}_k \subset J^k$ eğrisi göz önüne alınsın. Standart koordinat sisteminde γ eğrisi

$$\gamma : x \mapsto (x, y(x), p^1(x), \dots, f(x, y(x), p^1(x), \dots, p^{k-1}(x))) \quad (3.14)$$

ile verilir. γ eğrisinin görüntüsü $\mathcal{S}$ ile gösterilsin ve J^k üzerinde

$$\eta^j = dp^{j-1} - p^j dx \quad j = 1, 2, \dots, k \quad (3.15)$$

şeklinde tanımlı 1-formlar göz önüne alınsın. Burada $p^0 = y$ şeklinde tanımlıdır. Bu formların $\mathcal{S}$ üzerine kısıtlanması

$$\eta^j|_{\mathcal{S}} = \left(\frac{dp^{j-1}}{dx}(x) - p^j(x) \right) dx \quad (3.16)$$

ile belirlenir. $j = 1, 2, \dots, k$ olmak üzere

$$\eta^j|_{\mathcal{S}} = 0 \quad (3.17)$$

olması için gerek ve yeter koşul

$$\frac{dp^{j-1}}{dx}(x) - p^j(x) = 0 \quad (3.18)$$

olmasıdır. Bu durumda (3.14) eğrisi bir $(x, y(x))$ eğrisinin k -grafiği olacaktır. Daha formel ifade etmek için $\iota : \mathcal{E}_k \rightarrow J^k$ doğal içermek fonksiyonu göz önüne alınsın. O zaman $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{E}_k$ eğrisinin görüntüsü $\mathcal{S}$ 'nin (3.7) denkleminin bir çözümünü tanımlaması için gerek ve yeter koşul

$$(\iota \circ \gamma)^* \eta^j = 0 \quad (3.19)$$

olmasıdır. Bir başka ifade ile verilen bir ADD'nin çözümleriyle (3.19) Pfaffian sisteminin çözümleri bire bir eşlenmektedir. Bu durumda (3.7) denkleminin bir yerel çözümü,

$$\text{pr} : J^k \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}; \quad \text{pr}(\gamma) = (x, y(x)) \quad (3.20)$$

ile belirlenir.

Tanım 3.6. $p^0 = y$ olmak üzere J^k üzerinde tanımlı (3.15) diferansiyel 1-formlarına *kanonik kontakt formlar* denir. $C^\infty(J^k)$ halkası üzerinde (3.15) tarafından üretilen modüle J^k üzerindeki *kontakt sistem* denir ve $\Omega^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ya da kısaca Ω^k ile gösterilir.

3.2 Birinci mertebeden ADDler: $\mathcal{E}_1$

Yerel olarak $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ üzerinde verilen

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (3.21)$$

formundaki birinci mertebeden bir ADD J^1 uzayında bir yüzey tanımlar:

$$\mathcal{E}_1 = \{(x, y, p) \in J^1 : p - f(x, y) = 0\}. \quad (3.22)$$

$\mathcal{E}_1$ denklemi yerel olarak

$$(x, y) \mapsto (x, y, p = f(x, y)) \quad (3.23)$$

grafiği ile verilir.

$\mathcal{E}_1$ üzerindeki bir γ eğrisinin (3.21) denkleminin bir çözümünü tanımlaması için gerek ve yeter koşul J^1 üzerindeki

$$\eta = dy - p dx \quad (3.24)$$

kanonik kontakt formun

$$\eta|_{\mathcal{S}} = 0 \quad (3.25)$$

Pfaffian denklemini sağlamasıdır. Burada $\mathcal{S}$, γ eğrisinin görüntüsünü göstermektedir.

3.3 İkinci mertebeden ADDler: $\mathcal{E}_2$

Yerel olarak $J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ üzerinde verilen

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y, y') \quad (3.26)$$

formundaki bir ADD $J^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ uzayında 3-boyutlu bir manifold tanımlar:

$$\mathcal{E}_2 = \{(x, y, p, q) \in J^2 : q - f(x, y, p) = 0\}. \quad (3.27)$$

$\mathcal{E}_2$ denklemi yerel olarak

$$(x, y, p) \mapsto (x, y, p, q = f(x, y, p)) \quad (3.28)$$

grafığı ile verilir.

$\mathcal{E}_2$ üzerindeki bir γ eğrisinin (3.26) denkleminin bir çözümünü tanımlaması için gerek ve yeter koşul J^2 üzerindeki

$$\eta^1 = dy - p dx \quad \eta^2 = dp - q dx \quad (3.29)$$

kanonik kontakt formlarının

$$\begin{aligned} \eta^1|_S &= 0 \\ \eta^2|_S &= 0 \end{aligned} \quad (3.30)$$

Pfaffian denklem sistemini sağlamasıdır. Burada S , γ eğrisinin görüntüsünü göstermektedir.

BÖLÜM 4

ADDlerin EĞRİLİK ÖZELLİKLERİ

4.1 $\mathcal{E}_1$ üzerinde Riemann yapısı

$\mathcal{E}_1$ yüzeyinin üzerinde tanımlı

$$\omega^1 = dx, \quad \omega^2 = dy - f dx \quad (4.1)$$

1-formları yerel olarak

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial x} + f \frac{\partial}{\partial y}, \quad e_2 = \frac{\partial}{\partial y} \quad (4.2)$$

vektör alanlarıyla tanımlanan çatı alanına dual olan eşçatı alanı tanımlar:

$$\omega^i(e_j) = \delta_j^i. \quad (4.3)$$

$\mathcal{E}_1$ üzerinde

$$g_1 = \omega^1 \otimes \omega^1 + \omega^2 \otimes \omega^2 \quad (4.4)$$

Riemannian metriği ile birlikte $(\mathcal{E}_1, g_1)$ bir Riemann manifoldu olur ve (4.2) vektör alanları $\mathcal{E}_1$ üzerinde bir ortonormal çatı alanı belirler:

$$g_1(e_i, e_j) = \delta_{ij}. \quad (4.5)$$

Burada $\otimes$ sembolü tensör çarpımını göstermektedir. α, β 1-formlarının tensör çarpımı

$$(\alpha \otimes \beta)(X, Y) = \alpha(X)\beta(Y), \quad X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{E}_1) \quad (4.6)$$

şeklinde tanımlıdır. (x, y) yerel koordinatlarında (4.4) Riemann metriği

$$g_1 = (1 + f^2)dx \otimes dx - f(dx \otimes dy + dy \otimes dx) + dy \otimes dy \quad (4.7)$$

halini alır. ∇ , g ile uyumlu metrik bağlantı ise o zaman

$$\begin{aligned} d\omega^1 &= 0 \\ d\omega^2 &= f_y \omega^1 \wedge \omega^2 \end{aligned}$$

yapı denklemlerinden ∇ bağlantısının $\mathfrak{so}(2, \mathbb{R})$ -değerli

$$\theta = \begin{pmatrix} 0 & -f_y \omega^2 \\ f_y \omega^2 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

bağlantı formu ile

$$\begin{aligned} d\omega^1 &= -\theta_2^1 \wedge \omega^2 \\ d\omega^2 &= -\theta_1^2 \wedge \omega^1, \quad \theta_2^1 = -\theta_1^2 = -f_y \omega^2. \end{aligned} \quad (4.9)$$

yazılır. ∇ bağlantısının Gauss eğriliği

$$d\theta_1^2 = -K \omega^1 \wedge \omega^2, \quad (4.10)$$

ile belirlenir. Burada K fonksiyonu

$$K = -(f_x + f f_y)_y \quad (4.11)$$

şeklinde tanımlıdır (Ok Bayrakdar & Bayrakdar, 2018).

Tanım 4.1. $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{E}_1)$ olsun. Eğer

$$\nabla_X X = 0 \quad (4.12)$$

ise o zaman X vektör alanının bir integral eğrisi $\mathcal{E}_1$ üzerinde bir *jeodezik* eğridir denir.

$i, j = 1, 2$ için $\nabla_{e_i} e_j$ kovaryant türevleri hesaplanırsa

$$\begin{aligned} \nabla_{e_1} e_1 &= 0 \\ \nabla_{e_1} e_2 &= 0 \\ \nabla_{e_2} e_1 &= f_y e_2 \\ \nabla_{e_2} e_2 &= -f_y e_1. \end{aligned} \quad (4.13)$$

elde edilir. (3.21) denkleminin bir çözüm eğrisinin 1-grağı, e_1 vektör alanının bir integral eğrisi olduğundan aşağıdaki doğrudur (Ok Bayrakdar & Bayrakdar, 2018):

Önerme 4.1. Birinci mertebeden bir ADD'in bir çözüm eğrisinin 1-grağı $(\mathcal{E}_1, g_1)$ üzerinde bir jeodezik eğridir.

4.1.1 Sabit Eğrilikli Uzaylar

Sabit eğrilik uzaylar, izometri gruplarının maksimum boyutlu olduğu Riemann manifoldlarıdır. Bu durumda Riemann metriğini tanımlayan eşçatı alanı rankı sıfır olan bir eşçatı alanıdır. Başka bir deyişle, bahsi geçen eşçatı alanının yapı denklemleri belirli 3-boyutlu Lie gruplarının Maurer-Cartan denklemlerini ifade eder, yani söz konusu Riemann manifoldu yerel olarak bir Lie grubudur (Olver, 1995):

$$\begin{aligned}d\omega^1 &= -\theta_2^1 \wedge \omega^2 \\d\omega^2 &= -\theta_1^2 \wedge \omega^1 \\d\theta_2^1 &= K\omega^1 \wedge \omega^2\end{aligned}$$

yapı denklemleri göz önüne alınsın.

$K = 0$ ise o zaman

$$\begin{aligned}d\omega^1 &= -\theta_2^1 \wedge \omega^2 \\d\omega^2 &= -\theta_1^2 \wedge \omega^1 \\d\theta_2^1 &= 0\end{aligned}$$

denklemleri $SE(2)$ Euclidyen grubun Maurer-Cartan denklemlerine karşılık gelir.

$K = -1$ ise o zaman

$$\begin{aligned}d\omega^1 &= -\theta_2^1 \wedge \omega^2 \\d\omega^2 &= -\theta_1^2 \wedge \omega^1 \\d\theta_2^1 &= -\omega^1 \wedge \omega^2\end{aligned}$$

denklemleri $SL(2, \mathbb{R})$ özel lineer grubun Maurer-Cartan denklemlerine karşılık gelir.

$K = 1$ ise o zaman

$$\begin{aligned}d\omega^1 &= -\theta_2^1 \wedge \omega^2 \\d\omega^2 &= -\theta_1^2 \wedge \omega^1 \\d\theta_2^1 &= \omega^1 \wedge \omega^2\end{aligned}$$

denklemleri $SO(3, \mathbb{R})$ özel ortogonal grubun Maurer-Cartan denklemlerine karşılık gelir.

Bu özel durumlar aşağıdaki Burger denklemleriyle elde edilir:

$$\begin{aligned} f_x + f f_y &= \zeta(x) & (K = 0) \\ f_x + f f_y &= y + \zeta(x) & (K = -1) \\ f_x + f f_y &= -y + \zeta(x) & (K = 1) \end{aligned} \quad (4.14)$$

Buradaki kısmi türevli diferansiyel denklemlerin karakteristik eğrileri, sırasıyla $\Xi(x, y) = \zeta(x)$, $\Xi(x, y) = y + \zeta(x)$ ve $\Xi(x, y) = -y + \zeta(x)$ olmak üzere

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad \frac{du}{dx} = \Xi(x, y), \quad (4.15)$$

denklem sistemi ile belirlenir. Bu denklemlerin çözümleri, karakteristikler yöntemiyle her bir denklemin ilk integrallerinin (çözüm eğrisi boyunca türevi sıfır olan fonksiyonların) kapalı fonksiyonları olarak elde edilebilse de, bazı lineer diferansiyel denklemler sabit eğrilikli Riemann manifoldları tanımlarlar (Ok Bayrakdar & Bayrakdar, 2018):

Lemma 4.1.

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x) \quad (4.16)$$

denklemine karşılık gelen Riemann manifoldunun Gauss eğriliğinin sıfır ($K = 0$) olması için gerek ve yeter koşul p 'nin

$$\frac{dp}{dx} = p^2 \quad (4.17)$$

denkleminin bir çözümü olmasıdır. Ayrıca, $\frac{dp}{dx} = p^2$ ve $q(x)$ fonksiyonu (4.16) denkleminin bir integrasyon çarpanı ise o zaman f

$$f_x + f f_y = 0$$

Burger denklemini sağlar.

Lemma 4.2. (4.16) denkleminin karşılık gelen Riemann manifoldunun Gauss eğriliğinin $K = \mp 1$ olması için gerek ve yeter koşul

$$\frac{dp}{dx} = p^2 \pm 1 \quad (4.18)$$

olmasıdır.

4.2 $\mathcal{E}_2$ üzerinde Riemann yapısı

$\mathcal{E}_2$ üzerinde yerel olarak tanımlı

$$\begin{aligned}\omega^1 &= dx \\ \omega^2 &= dy - p dx \\ \omega^3 &= dp - f dx\end{aligned}$$

1-formları

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial y} + f \frac{\partial}{\partial p}, \quad e_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad e_3 = \frac{\partial}{\partial p}, \quad (4.19)$$

vektör alanlarıyla belirlenen (e_1, e_2, e_3) çatı alanına dual olan eşçatı alanıdır. $\mathcal{E}_2$ üzerinde

$$g_2 = \sum_i \omega^i \otimes \omega^i, \quad (4.20)$$

Riemann metriği tanımlanırsa o zaman $\mathcal{E}_2$ bir Riemann manifoldu olur ve $(\mathcal{E}_2, g_2)$ ile gösterilir. Bu durumda (e_1, e_2, e_3) çatı alanı $\mathcal{E}_2$ üzerinde bir ortonormal çatı alanı tanımlar. (x, y, p) yerel koordinatlarında (4.20) Riemann metriği

$$\begin{aligned}g_2 &= (1 + p^2 + f^2)dx \otimes dx - p(dx \otimes dy + dy \otimes dx) \\ &\quad - f(dx \otimes dp + dp \otimes dx) + dy \otimes dy + dp \otimes dp.\end{aligned} \quad (4.21)$$

ile verilir. $(\omega^1, \omega^2, \omega^3)$ eşçatı alanının yapı denklemleri

$$\begin{aligned}d\omega^1 &= 0 \\ d\omega^2 &= \omega^1 \wedge \omega^3 \\ d\omega^3 &= f_y \omega^1 \wedge \omega^2 + f_p \omega^1 \wedge \omega^3\end{aligned} \quad (4.22)$$

olarak elde edilir. $(\mathcal{E}_2, g_2)$ Riemann manifoldu üzerinde ∇ bağlantısının $\mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$ -değerli bağlantı formunu bulmak için

$$\begin{aligned}\alpha \wedge \omega^2 + \beta \wedge \omega^3 &= 0 \\ -\alpha \wedge \omega^1 + \gamma \wedge \omega^3 &= \omega^1 \wedge \omega^3 \\ -\beta \wedge \omega^1 - \gamma \wedge \omega^2 &= f_y \omega^1 \wedge \omega^2 + f_p \omega^1 \wedge \omega^3\end{aligned} \quad (4.23)$$

denklem sistemi Cartan'ın Lemması kullanılarak çözülürse

$$\theta = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & -\beta \\ \alpha & 0 & -\gamma \\ \beta & \gamma & 0 \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

matrisi elde edilir. Burada α, β and γ sırasıyla

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{1}{2}(f_y + 1)\omega^3 \\ \beta &= \frac{1}{2}(f_y + 1)\omega^2 + f_p\omega^3 \\ \gamma &= -\frac{1}{2}(f_y - 1)\omega^1\end{aligned}\tag{4.25}$$

şeklinde tanımlı 1-formlardır (Bayrakdar & Ergin, 2018; Ok Bayrakdar & Bayrakdar, 2019). θ bağlantı formunun eğrilik 2-formu

$$\begin{aligned}\Omega_2^1 &= -\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}f_y^2 + f_y - \frac{1}{2}\right)\omega^1 \wedge \omega^2 - \frac{1}{2}f_{yy}\omega^2 \wedge \omega^3 \\ &\quad - \frac{1}{2}((f_x + ff_p)_y + f_yf_p + pf_{yy})\omega^1 \wedge \omega^3 \\ \Omega_3^1 &= -\frac{1}{2}((f_x + ff_p)_y + f_yf_p + pf_{yy})\omega^1 \wedge \omega^2 - \frac{1}{2}f_{yp}\omega^2 \wedge \omega^3 \\ &\quad - \frac{1}{2}\left(f_y - \frac{1}{2}f_y^2 + \frac{3}{2} + 2pf_{yp} + 2(f_x + ff_p)_p\right)\omega^1 \wedge \omega^3 \\ \Omega_3^2 &= -\frac{1}{2}f_{yy}\omega^1 \wedge \omega^2 - \frac{1}{2}f_{yp}\omega^1 \wedge \omega^3 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(f_y + 1)^2\right)\omega^2 \wedge \omega^3\end{aligned}\tag{4.26}$$

olarak elde edilir. Buna göre R_{jkl}^i , Riemann eğrilik tensörünün bağımsız bileşenleri

$$\begin{aligned}R_{212}^1 &= -\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}f_y^2 + f_y - \frac{1}{2}\right) \\ R_{213}^1 &= -\frac{1}{2}((f_x + ff_p)_y + f_yf_p + pf_{yy}) \\ R_{223}^1 &= -\frac{1}{2}f_{yy} \\ R_{313}^1 &= -\frac{1}{2}\left(f_y - \frac{1}{2}f_y^2 + \frac{3}{2} + 2pf_{yp} + 2(f_x + ff_p)_p\right) \\ R_{323}^1 &= -\frac{1}{2}f_{yp} \\ R_{323}^2 &= \frac{1}{4}(f_y + 1)^2\end{aligned}\tag{4.27}$$

ile belirlenir. Bir noktada, teğet demetin (e_1, e_2) , (e_1, e_3) , (e_2, e_3) ortonormal vektör alan çiftleriyle belirlenen 2-boyutlu altuzaylarının kesitsel eğrilikleri sırasıyla R_{212}^1 , R_{313}^1 ve R_{323}^2 ile belirlenir. Riemann eğrilik tensörünün tüm bileşenlerinin sıfıra eşit olması için gerek ve yeter koşulu bulmak için R_{212}^1 , R_{313}^1 ve R_{323}^2 kesitsel eğriliklerinin sıfıra eşit olması için gerek ve yeter koşulu belirlemek yeterlidir. $R_{212}^1 = R_{313}^1 = R_{323}^2 = 0$ ancak ve

ancak

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}f_y^2 + f_y - \frac{1}{2} &= 0 \\ f_y - \frac{1}{2}f_y^2 + \frac{3}{2} + 2pf_{yp} + 2(f_x + ff_p)_p &= 0 \\ (f_y + 1)^2 &= 0. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Buradaki son denklemden

$$f_y = -1 \quad (4.29)$$

elde edilir. $f_y = -1$ için (4.28) sistemindeki ilk denklem idantik olarak sağlanır. Buradan

$$f = -y + A(x, p), \quad A \in C^\infty(\mathcal{E}_2) \quad (4.30)$$

elde edilir. Bu durumda

$$R_{212}^1 = R_{223}^1 = R_{323}^1 = R_{323}^2 = 0 \quad (4.31)$$

elde edilir. Riemann eğrilik tensörünün geriye kalan bileşenlerinin sıfıra eşit olması için gerek ve yeter koşul A , (4.30) fonksiyonunda yerine yazılırsa

$$A_p = 0 \quad (4.32)$$

yani

$$A(x, p) = A(x) \quad (4.33)$$

olmasıdır. Sonuç olarak aşağıdaki teorem kanıtlanmış olur.

Teorem 4.1.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y - A(x) = 0 \quad (4.34)$$

formundaki bir ADD için Riemann eğrilik tensörünün tüm bileşenleri sıfıra eşittir yani $(\mathcal{E}_2, g_2)$ manifoldu bir düz uzaydır.

4.2.1 Sabit pozitif eğrilikli uzaylar

Tanım 4.2. ∇ bir $\pi : E \rightarrow M$ vektör demeti üzerinde bir bağlantı olsun. Bir $\{X, Y\}$ vektör alanı çiftine

$$R(X, Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]} \quad (4.35)$$

operatörünü karşılık getiren dönüşüme ∇ bağlantısının *eğriliği* denir (Morita, 2001).

$s \in \Gamma(E)$ olmak üzere

$$R(X, Y)(s) = \nabla_X \nabla_Y s - \nabla_Y \nabla_X s - \nabla_{[X, Y]} s \quad (4.36)$$

ile verilir. Bağlantının tamını gereği $R(X, Y)(s)$ 'de $\pi : E \rightarrow M$ vektör demetinin bir kesitidir, yani $R(X, Y)(s) \in \Gamma(E)$. Buna göre ∇ bağlantısının eğriliği

$$R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E) \quad (4.37)$$

$$(X, Y, s) \mapsto R(X, Y)(s)$$

dönüşümü tanımlar. (M, g) bir Riemann manifoldu ve $E = TM$ ise o zaman $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ olmak üzere ∇ Riemann bağlantısının eğriliği

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \quad (4.38)$$

ile verilir.

$$g(R(X, Y)Z, W) \quad (4.39)$$

şeklinde tanımlı tensöre *Riemann eğrilik tensörü* adı verilir. (Boothby, 1986). $e = (e_1, \dots, e_n)$ ortonormal çatı alanı olmak üzere Riemann eğrilik tensörünün bileşenleri¹

$$R(e_j, e_k)e_l = \sum_i R_{j \quad kl}^i e_i \quad (4.40)$$

ile belirlenir.

Tanım 4.3. (M, g) bir Riemann manifoldu ve $\sigma \subset T_p M$ bir $p \in M$ noktasında 2-boyutlu bir altuzay olsun. σ 'nın herhangi bir $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ tabanı için

$$K(\sigma) = K(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{g(R(\mathbf{u}, \mathbf{v})\mathbf{u}, \mathbf{v})}{g(\mathbf{u}, \mathbf{u})g(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - (g(\mathbf{u}, \mathbf{v}))^2} \quad (4.41)$$

şeklinde tanımlı $K(\sigma)$ reel sayısına σ 'nın p noktasındaki *kesitsel eğriliği* denir. Kesitsel eğrilik $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ tabanının seçiminden bağımsızdır (Do Carmo, 1992).

Açıklama 4.1. σ 'nın bir $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ ortonormal tabanı seçilirse o zaman

$$K(\sigma) = g(R(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \quad (4.42)$$

ile hesaplanır.

Tanım 4.4. M bir Riemannian manifoldu olmak üzere tüm kesitsel eğrilikler tüm noktalarda aynı sabit değere eşitse o zaman söz konusu manifolda *sabit eğrilikli uzay* denir (Boothby, 1986).

Bir diğer ifade ile $\sigma \subset T_p M$ düzleminin $K(\sigma)$ kesitsel eğriliği tüm $p \in M$ noktaları ve tüm σ düzlemleri için aynı $K_o = K(\sigma)$ sabit değerine eşitse o zaman M Riemann manifolduna bir sabit eğrilikli uzay denir.

¹Bu tez çalışmasında uygunluk açısından $R_{j \quad kl}^i$ yerine R_{jkl}^i kullanılmıştır.

Bir Riemann manifoldunun bir sabit eğrilikli uzay olup olmadığına karar vermek için Riemann eğrilik tensörünü bir ortonormal çatı alanında belirlemek yeterlidir, bkz. Sonuç 3.5, sayfa 96 (Do Carmo, 1992). Yani, denklemini tanımlayan manifold her $\mathcal{E}_2 \subset T_p M$ için $K_o = K(\mathcal{E}_2)$ olması için gerek ve yeter koşul her $i \neq j$ için

$$R_{ijji} = -R_{ijji} = K_o \quad (4.43)$$

ve diğer tüm durumlarda

$$R_{ijkl} = 0 \quad (4.44)$$

olmasıdır. Bir ortonormal çatı alanına göre

$$R_{ijkl} = \sum_m \delta_{mi} R_{jkl}^m = R_{jkl}^i \quad (4.45)$$

şeklinde tanımlıdır.

$$\begin{aligned} R_{212}^1 &= -\frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} f_y^2 + f_y - \frac{1}{2} \right) \\ R_{313}^1 &= -\frac{1}{2} \left(f_y - \frac{1}{2} f_y^2 + \frac{3}{2} + 2p f_{yp} + 2(f_x + f f_p)_p \right) \\ R_{323}^2 &= \frac{1}{4} (f_y + 1)^2, \end{aligned} \quad (4.46)$$

eşitliklerinden

$$R_{212}^1 = R_{313}^1 = R_{323}^2 = \frac{1}{4} \quad (4.47)$$

olması için gerek ve yeter koşulun

$$f_y = 0 \quad \text{ve} \quad (f_x + f f_p)_p = -1 \quad (4.48)$$

denklemlerinin sağlanması olduğu görülür. Buradaki ikinci denklemden

$$f_x + f f_p = -p + C(x), \quad C \in C^\infty(\mathcal{E}_2) \quad (4.49)$$

elde edilir ve sonuç olarak aşağıdaki kanıtlanmış olur:

Teorem 4.2.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - B(x) \frac{dy}{dx} - C(x) = 0 \quad (4.50)$$

denkleminin karşılık gelen $(\mathcal{E}_2, g)$ Riemann manifoldu üzerinde

$$R_{212}^1 = R_{313}^1 = R_{323}^2 = 1/4 \quad (4.51)$$

olması için gerek ve yeter koşul B 'nin

$$\frac{dB}{dx} = -(1 + B^2) \quad (4.52)$$

denkleminin bir çözümü olmasıdır. Bu durumda, Riemann eğrilik tensörünün diğer tüm bileşenleri sıfıra eşit ve dolayısıyla $(\mathcal{E}_2, g)$ sabit pozitif eğrilikli bir uzaydır.



BÖLÜM 5

ADDlerin METRİK EŞDEĞERLİĞİ

Bu bölümdeki amaç ADDlerin tanımlandığı Riemann metriklerinin eşdeğerlik problemini ele almaktır. Söz konusu problem önce birinci mertebeden ADDler için tanımlanarak problemin çözümü elde edilecektir. Buradaki yaklaşım olduğu gibi ikinci mertebenden ADDlerin eşdeğerlik problemine adapte edilecektir.

5.1 Birinci Mertebeden ADDlerin Metrik Eşdeğerliği

Sırasıyla $\mathbb{R}^2$ 'nin U ve $\bar{U}$ açık kümeleri üzerinde verilen iki

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (5.1)$$

$$\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}, \bar{y}) \quad (5.2)$$

ADDnin bir

$$\Phi : U \rightarrow \bar{U}; (x, y) \mapsto (\phi(x, y), \psi(x, y)) \quad (5.3)$$

yerel difeomorfizma sınıfı (koordinat dönüşümleri) altındaki eşdeğerliğini incelemek için U ve $\bar{U}$ üzerinde

$$\begin{cases} \omega^1 &= dx \\ \omega^2 &= dy - f dx \end{cases} \quad (5.4)$$

$$\begin{cases} \bar{\omega}^1 &= d\bar{x} \\ \bar{\omega}^2 &= d\bar{y} - \bar{f} d\bar{x} \end{cases} \quad (5.5)$$

1-formları göz önüne alınsın. Ele alınan problemi ifade eden aşağıdaki tanımı vermek yerinde olacaktır.

Tanım 5.1. Eğer

$$\Phi^* \bar{\omega}^2 = \lambda \omega^2 \quad (5.6)$$

ve

$$\sum_i \Phi^* \bar{\omega}^i \otimes \Phi^* \bar{\omega}^i = \sum_i \omega^i \otimes \omega^i \quad (5.7)$$

olacak şekilde bir (5.3) difeomorfizma sınıfı varsa o zaman (5.1) ve (5.2) denklemleri metrik olarak eşdeğerdir denir.

Sadelik açısından geri-çekme (pullback) notasyonu bir kenara bırakılıp

$$\Phi^* \bar{\omega}^i = a_1^i \omega^1 + a_2^i \omega^2 \quad (5.8)$$

yerine

$$\bar{\omega}^i = a_1^i \omega^1 + a_2^i \omega^2 \quad (5.9)$$

yazılsın. Burada $a_i^j \in C^\infty(U)$. O zaman açık olarak

$$\begin{aligned} \bar{\omega}^1 &= (\phi_x + f\phi_y)\omega^1 + \phi_y\omega^2 \\ \bar{\omega}^2 &= (\psi_x + f\psi_y - (\bar{f} \circ \Phi)(\phi_x + f\phi_y))\omega^1 + (\psi_y - (\bar{f} \circ \Phi)\phi_y)\omega^2 \end{aligned} \quad (5.10)$$

elde edilir.

$$\bar{f} \circ \Phi = \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = \frac{\psi_x + f\psi_y}{\phi_x + f\phi_y} \quad (5.11)$$

dönüşüm kuralı kullanılarak

$$\begin{aligned} \bar{\omega}^1 &= (\phi_x + f\phi_y)\omega^1 + \phi_y\omega^2 \\ \bar{\omega}^2 &= (\psi_y - (\bar{f} \circ \Phi)\phi_y)\omega^2 \end{aligned} \quad (5.12)$$

bulunur. $\omega^2 = 0$ iken $\bar{\omega}^2 = 0$ olacağından bir (5.3) difeomorfizması çözüm eğrilerini çözüm eğrilerine taşıyacaktır. Bir diğer ifade ile tanımda verilen (5.6) koşulu sağlanacaktır. (5.12) 1-formları

$$\bar{\omega}^1 \otimes \bar{\omega}^1 + \bar{\omega}^2 + \bar{\omega}^2 = \omega^1 \otimes \omega^1 + \omega^2 \otimes \omega^2 \quad (5.13)$$

koşulunda yerine yazılırsa o zaman

$$\begin{aligned} (\phi_x + f\phi_y)^2 &= 1 \\ \phi_y(\phi_x + f\phi_y) &= 0 \\ (\psi_y - (\bar{f} \circ \Phi)\phi_y)^2 &= 1. \end{aligned} \quad (5.14)$$

elde edilir. İlk iki denklemden $\phi_y = 0$ ve $(\phi_x)^2 = 1$ bulunur. Bu denklemler integre edilirse

$$\phi(x, y) = \pm x + c_0 \quad c_0 \in \mathbb{R} \quad (5.15)$$

bulunur. Bu eşitlik üçüncü denklemden yerine yazılırsa

$$\psi(x, y) = \pm y + y_0(x) \quad y_0 \in C^\infty(U) \quad (5.16)$$

bulunur. Ancak (5.3) difeomorfizma sınıfının Jacobian matrislerinin $GL(2, \mathbb{R})$ grubunun bir altgrubunu oluşturması için

$$\begin{aligned} \phi(x, y) &= x + c_0 \\ \psi(x, y) &= y + y_0(x) \end{aligned} \quad (5.17)$$

eşitlikleri sağlanmak zorundadır. Sonuç olarak aşağıdaki teorem kanıtlanmış oldu.

Teorem 5.1. (5.1) ve (5.2) denklemlerinin bir (5.3) difeomorfizma sınıfı altında metrik olarak eşdeğer olabilmesi için gerek ve yeter koşul difeomorfizma sınıfının (5.17) formunda olmasıdır.

5.2 İkinci Mertebeden ADDlerin Metrik Eşdeğerliği

Birinci mertebeden ADDlerin eşdeğerlik probleminde ortaya çıkan difeomorfizma sınıfı lifleri koruyan difeomorfizmalardan yani

$$\Phi : (x, y) \mapsto (\phi(x), \psi(x, y)) \quad (5.18)$$

formundaki difeomorfizmalardan oluştuğu için ikinci mertebeden ADDlerin metrik eşdeğerlik problemi de (5.18) difeomorfizma sınıfı için ele alınacaktır. (5.18), $J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ üzerinde

$$\Phi^1 : J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}); (x, y, p) \mapsto (\bar{x}, \bar{y}, \bar{p}) \quad (5.19)$$

bir difeomorfizma sınıfı tanımlar. Burada

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \phi(x) \\ \bar{y} &= \psi(x, y) \\ \bar{p} &= \frac{\psi_x + \psi_y p}{\phi_x} \end{aligned} \quad (5.20)$$

şeklinde tanımlıdır. (x, y, p) ve $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p})$ koordinatlarında

$$y'' = f(x, y, y') \quad (5.21)$$

$$\bar{y}'' = \bar{f}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{y}') \quad (5.22)$$

denklemlerini temsil eden

$$\begin{cases} \omega^1 &= dx \\ \omega^2 &= dy - p dx \\ \omega^3 &= dp - f dx \end{cases} \quad (5.23)$$

ve

$$\begin{cases} \bar{\omega}^1 &= d\bar{x} \\ \bar{\omega}^2 &= d\bar{y} - \bar{p} d\bar{x} \\ \bar{\omega}^3 &= d\bar{p} - \bar{f} d\bar{x} \end{cases} \quad (5.24)$$

dış diferansiyel sistemleri göz önüne alınsın.

Tanım 5.2. Eğer

$$\Phi^{1*} \bar{\omega}^2 = \alpha \omega^2, \quad \Phi^{1*} \bar{\omega}^3 = \beta \omega^2 + \gamma \omega^3 \quad (5.25)$$

ve

$$\sum_i \Phi^{1*} \bar{\omega}^i \otimes \Phi^{1*} \bar{\omega}^i = \sum_i \omega^i \otimes \omega^i \quad (5.26)$$

olacak şekilde bir (5.18) difeomorfizma sınıfı varsa o zaman (5.21) ve (5.22) denklemleri metrik olarak eşdeğerdir denir.

(5.24) 1-formlarının Φ^1 ile geri çekilmesi, yine geri-çekme notasyonu ihmal edilerek,

$$\begin{aligned} \bar{\omega}^1 &= \phi_x \omega^1 \\ \bar{\omega}^2 &= (\psi_x + p\psi_y - (\bar{p} \circ \Phi^1) \phi_x) \omega^1 + \psi_y \omega^2 \\ \bar{\omega}^3 &= (\bar{p}_x + p\bar{p}_y + f\bar{p}_p - (\bar{f} \circ \Phi^1) \phi_x) \omega^1 + \bar{p}_y \omega^2 + \bar{p}_p \omega^3 \end{aligned} \quad (5.27)$$

şeklinde yazılır.

$$\bar{p} \circ \Phi = \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = \frac{\psi_x + p\psi_y}{\phi_x} \quad (5.28)$$

ve

$$\bar{f} \circ \Phi^1 = \frac{d\bar{p}}{d\bar{x}} = \frac{d\bar{p}}{dx} \frac{dx}{d\bar{x}} = (\bar{p}_x + p\bar{p}_y + f\bar{p}_p) / \phi_x \quad (5.29)$$

olduğundan (5.27) şu hale gelir:

$$\begin{aligned} \bar{\omega}^1 &= \phi_x \omega^1 \\ \bar{\omega}^2 &= \psi_y \omega^2 \\ \bar{\omega}^3 &= \bar{p}_y \omega^2 + \bar{p}_p \omega^3. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Burada

$$\begin{aligned}\bar{p}_y &= \frac{\psi_{xy} + p\psi_{yy}}{\phi_x} \\ \bar{p}_p &= \frac{\psi_y}{\phi_x}\end{aligned}\tag{5.31}$$

şeklinde tanımlıdır.

$$\begin{aligned}a &= \phi_x \\ b &= \psi_y \\ c &= \frac{\psi_{xy} + p\psi_{yy}}{\phi_x}\end{aligned}\tag{5.32}$$

tanımlanırsa o zaman

$$\begin{aligned}\bar{\omega}^1 &= a\omega^1 \\ \bar{\omega}^2 &= b\omega^2 \\ \bar{\omega}^3 &= c\omega^2 + (b/a)\omega^3.\end{aligned}\tag{5.33}$$

elde edilir. (5.33) denklem sisteminden, lifleri koruyan diffeomorfizmaların ω^2 ve ω^3 ile üretilen kontakt ideali koruduğu yani (5.25) koşulunun sağlandığı görülür. Bir diğer ifade ile

$$\omega^2 = 0 \text{ ve } \omega^3 = 0 \implies \bar{\omega}^2 = 0 \text{ ve } \bar{\omega}^3 = 0.\tag{5.34}$$

(5.33) 1-formları (5.26) koşulunda yani

$$\bar{\omega}^1 \otimes \bar{\omega}^1 + \bar{\omega}^2 \otimes \bar{\omega}^2 + \bar{\omega}^3 \otimes \bar{\omega}^3 = \omega^1 \otimes \omega^1 + \omega^2 \otimes \omega^2 + \omega^3 \otimes \omega^3$$

eşitliğinde yerine yazılırsa o zaman

$$\begin{aligned}a^2 &= 1 \\ b^2 + c^2 &= 1 \\ \frac{cb}{a} &= 0 \\ \frac{b^2}{a^2} &= 1\end{aligned}\tag{5.35}$$

elde edilir. Buradan şu söylenir: (5.25) ve (5.26) koşullarının sağlanması için gerek ve yeter koşul (5.35) sisteminin sağlanmasıdır. Buradan

$$a = \pm 1, \quad b = \pm 1, \quad c = 0\tag{5.36}$$

olduğu görülür. Birinci mertebeden ADDlerin eşdeğerlik probleminde ortaya konulduğu

gibi (5.19) diffeomorfizma sınıfının Jacobian matrislerinin kümesinin $GL(3, \mathbb{R})$ grubunun bir altgrubu olması için

$$a = 1, \quad b = 1, \quad c = 0 \quad (5.37)$$

olmak zorundadır. (5.32) sisteminden

$$\begin{aligned} \phi(x) &= x + c_0 \\ \psi(x, y) &= y + y_0(x) \end{aligned} \quad (5.38)$$

elde edilir.

Teorem 5.2. (5.21) ve (5.22) denklemlerinin bir (5.18) diffeomorfizma sınıfı altında metrik olarak eşdeğer olabilmesi için gerek ve yeter koşul diffeomorfizma sınıfının (5.38) formunda olmasıdır.

BÖLÜM 6

SONUÇLAR

k . mertebeden bir ADD $J^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ uzayında

$$\mathcal{E}_k = \{j_{x_0}^k \rho \in J^k : x_0 \in I, F(j_{x_0}^k \rho) = 0\} \quad (6.1)$$

şeklinde bir manifold tanımlar.

$$\eta^j = dp^{j-1} - p^j dx \quad j = 1, 2, \dots, k \quad (6.2)$$

olmak üzere

$$g_k = dx \otimes dx + \sum_{i=1}^k \eta^i \otimes \eta^i \quad (6.3)$$

Riemann metriği ile birlikte bu manifold bir Riemann manifoldu olur. Bu tez çalışması kapsamında birinci ve ikinci mertebeden ADDlerin Riemann geometrisi ele alınmıştır.

Birinci mertebeden

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (6.4)$$

formundaki bir ADDnin Gauss eğriliği

$$K = -(f_x + f f_y)_y \quad (6.5)$$

ile verilir ve

$$\begin{aligned} f_x + f f_y &= \zeta(x) \\ f_x + f f_y &= y + \zeta(x) \\ f_x + f f_y &= -y + \zeta(x) \end{aligned} \quad (6.6)$$

için söz konusu manifoldun Gauss eğriliği sırasıyla $K = 0$, $K = 1$ ve $K = -1$ değerlerine eşittir (Ok Bayrakdar & Bayrakdar, 2018).

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y - A(x) = 0 \quad (6.7)$$

formundaki ikinci mertebeden bir ADDnin tanımladığı Riemann manifoldu üzerindeki eğrilik 2-formun tüm bileşenleri sıfıra eşittir ve dolayısıyla söz konusu manifold bir düz uzaydır.

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \tan x \frac{dy}{dx} - B(x) = 0 \quad (6.8)$$

formundaki ikinci mertebeden bir ADDnin tanımladığı Riemann manifoldu sabit pozitif eğrilikli bir uzaydır. Birinci ve ikinci mertebeden ADDlerin eşdeğerlik problemi, Riemann metriğini ve kontakt ideali koruyan bir difeomorfizma sınıfı altındaki eşdeğerlik problemi olarak tanımlanlandığında söz konusu ADDler ancak

$$(x, y) \mapsto (x + c_0, y + y_0(x)) \quad (6.9)$$

formunda bir difeomorfizm sınıfı altında eşdeğer olabilmektedir.

KAYNAKLAR

- Arnold, V. I. (1992). *Ordinary differential equations*. Springer Science & Business Media.
- Arnold, V. I. (2012). *Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations* (C. 250). Springer Science & Business Media.
- Bayrakdar, T., & Ergin, A. (2018). Minimal surfaces in three-dimensional Riemannian manifold associated with a second-order ODE. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 15, 1–12.
- Bocharov, A., Chetverikov, V., Duzhin, S., Khor'kova, N., Samokhin, A., Torkhov, Y., & Verbovetsky, A. (1999). Symmetries and conservation laws for differential equations of mathematical physics. *Translations of Mathematical Monographs*.
- Boothby, W. M. (1986). *An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry*. Academic press.
- Bryant, R., Dunajski, M., & Eastwood, M. (2009). Metrisability of two-dimensional projective structures. *Journal of Differential Geometry*, 83(3), 465–500.
- Burns, K., & Gidea, M. (2005). *Differential Geometry and Topology: With a view to dynamical systems*. CRC Press.
- Cartan, É. (1924). Sur les variétés à connexion projective. *Bulletin de la Société mathématique de France*, 52, 205–241.
- Cartan, E. (1908). Les sous-groupes des groupes continus de transformations. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 25, 57–194.
- Clelland, J. N. (2017). *From Frenet to Cartan: the method of moving frames* (C. 178). American Mathematical Soc.
- Crampin, M. (2004). The second-order ordinary differential equation Cartan, Douglas, Berwald. *Periodica Mathematica Hungarica*, 48, 151–164.
- Do Carmo, M. P. (1992). *Riemannian geometry (translated by Flaherty Francis, J)* (C. 6). Springer.
- Gardner, R. B. (1989). *The method of equivalence and its applications*. SIAM.
- Grissom, C., Thompson, G., & Wilkens, G. (1989). Linearization of second order ordinary differential equations via Cartan's equivalence method. *Journal of differential equations*, 77(1), 1–15.
- Ivey, T. A., & Landsberg, J. M. (2003). *Cartan for beginners: differential geometry via moving frames and exterior differential systems* (C. 61). American Mathematical Society Providence, RI.

- Kamran, N., Lamb, K., & Shadwick, W. (1985). The local equivalence problem for $d^2y/dx^2 = F(x, y, dy/dx)$ and the Painlevé transcendents. *Journal of differential geometry*, 22(2), 139–150.
- Kushner, A., Lychagin, V., & Rubtsov, V. (2007). *Contact geometry and nonlinear differential equations*. Cambridge University Press.
- Lie, S. (1888). Classification und Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen zwischen xy , die eine Gruppe von Transformationen gestatten: Die nachstehende Arbeit erschien zum ersten Male im Frühling 1883 im norwegischen Archiv. *Mathematische Annalen*, 32, 213–281.
- Morita, S. (2001). *Geometry of differential forms*. American Mathematical Soc.
- Ok Bayrakdar, Z., & Bayrakdar, T. (2018). Burgers' equations in the Riemannian geometry associated with first-order differential equations. *Advances in Mathematical Physics*, 2018, 1–8.
- Ok Bayrakdar, Z., & Bayrakdar, T. (2019). A geometric description for simple and damped harmonic oscillators. *Turkish Journal of Mathematics*, 43(5), 2540–2548.
- Olver, P. J. (1995). *Equivalence, invariants and symmetry*. Cambridge University Press.
- Ozan, Y. (2016). *Türevlenebilir Manifoldlara Giriş*. ODTÜ Basım İşliğı.
- Saunders, D. J. (1989). *The geometry of jet bundles* (C. 142). Cambridge University Press.
- Tresse, A. (1900). Sur les invariants différentiels des groupes continus de transformations. *Acta Mathematica*, 18, 1–88. <https://doi.org/10.1007/BF02418270>
- Tresse, A. (1896). *Détermination des invariants ponctuels de l'équation différentielle ordinaire du second ordre $y'' = w(x, y, y')$* (C. 32). S. Hirzel.
- Tu, L. W. (2011). *An Introduction to Manifolds*. Springer.
- Tu, L. W. (2017). *Differential geometry: connections, curvature, and characteristic classes* (C. 275). Springer.
- Vassiliou, P. J., & Lisle, I. G. (2000). *Geometric approaches to differential equations* (C. 15). Cambridge University Press.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

- Adı Soyadı : AYŞE TURHAN

Yabancı Diller

- İngilizce

Eğitim Bilgileri

- Lise: 80.Yıl Cumhuriyet Anadolu Lisesi, Edirne 2013
- Lisans: Matematik, Dokuz Eylül Üniversitesi, İzmir 2019
- Yüksek Lisans: Matematik, Trakya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü 2024

Makale - Bildiriler

- Turhan Ayse, Özcan Fatma, Tekin Pelin, Bayrakdar Tuna, A Second Order Linear ODE as a Space of Constant Curvature, 19th International Geometry Symposium 27 - 30 June 2022, Trakya University, Edirne-TURKEY.