

T.C.
MUĞLA SITKI KOÇMAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DOĞRUSAL VE DOĞRUSAL OLMAYAN KESİRLİ
DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN NÜMERİK
YAKLAŞIMLAR ÜZERİNE

AYSUN CEZAYİRLİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

OCAK 2024

MUĞLA

MUĞLA SITKI KOÇMAN ÜNİVERSİTESİ

Fen Bilimleri Enstitüsü

TEZ ONAYI

AYSUN CEZAYİRLİ tarafından hazırlanan **DOĞRUSAL VE DOĞRUSAL OLMAYAN KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN NÜMERİK YAKLAŞIMLAR ÜZERİNE** başlıklı tezinin, 17/01/2024 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans derecesi için gerekli şartları sağladığı oybirliği/oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

TEZ SINAV JÜRİSİ

Prof. Dr. Mustafa GÜLSU (**Jüri Başkanı, Danışman**)

İmza:

Matematik Anabilim Dalı,
Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi, Muğla

Doç. Dr. Yalçın ÖZTÜRK (**Üye**)

İmza:

Matematik Anabilim Dalı,
Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi, Muğla

Dr. Öğr. Üyesi Hatice YALMAN KOŞUNALP (**Üye**)

İmza:

Matematik Anabilim Dalı,
Bandırma Onyedi Eylül Üniversitesi, Bandırma

ANA BİLİM DALI BAŞKANLIĞI ONAYI

Prof. Dr. Mustafa GÜLSU

İmza:

Matematik Anabilim Dalı Başkanı,
Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi, Muğla

Prof. Dr. Mustafa GÜLSU

İmza:

Danışman, Matematik Anabilim Dalı,
Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi, Muğla

Savunma Tarihi: 17/01/2024

Tez çalışmalarım sırasında elde ettiğim ve sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgelerin tarafımdan bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde edildiğini; akademik ve bilimsel etik kurallarına uygun olduğunu beyan ederim. Ayrıca, akademik ve bilimsel etik kuralları gereği bu tez çalışması sırasında elde edilmemiş başkalarına ait tüm orijinal bilgi ve sonuçlara atıf yapıldığını da beyan ederim.

Aysun Cezayirli

17/01/2024



ÖZET

DOĞRUSAL VE DOĞRUSAL OLMAYAN KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN NÜMERİK YAKLAŞIMLAR ÜZERİNE

Aysun CEZAYİRLİ

Yüksek Lisans Tezi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Mustafa GÜLSU

Ocak 2024, 46 sayfa

Bu tez çalışmasında, doğrusal ve doğrusal olmayan kesirli diferansiyel denklemlerin sayısal çözümleri için kesirli sonlu fark yöntemi kullanılmıştır. Kesirli mertebeye sahip diferansiyel denklem en genel halde,

$$D_*^\alpha y(t) + a_m y^{(m)}(t) + a_{m-1} y^{(m-1)}(t) + \dots + a_0 y(t) + N(y(t), y'(t)) = f(t),$$
$$t \geq 0, \quad m - 1 < \alpha \leq m$$

$$y^{(i)}(0) = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, m - 1$$

şeklinde tanımlanır. Burada D_*^α , Caputo anlamında $y(t)$ bilinmeyen fonksiyonun α . mertebeden türevidir ve N doğrusal olmayan bir operatördür. Kesirli sonlu fark yönteminin etkinliği, bazı doğrusal kesirli diferansiyel denklemler için elde edilen yaklaşık çözümlerin kesin yöntemlerle ve literatürde bulunan diğer yöntemlerle elde edilen yaklaşık çözümlerin karşılaştırılmasıyla gösterilmiştir. Yöntemin etkinliğini göstermek için örnek problemler verilmiştir. Tüm hesaplamalarda Maple13 ve Matlab paket programı kullanılmıştır. Küçük mertebeden yaklaşımların yeteri kadar doğrulukta olduğu görülmüş, sonuçlar tablo ve grafiklerle desteklenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Kesirli Sonlu Fark Yöntemi, Caputo Kesirli Türevi,

Kesirli Lineer Ve Lineer Olmayan Diferansiyel Denklemler

ABSTRACT
ON NUMERICAL APPROACHES FOR LINEAR AND NONLINEAR
FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Aysun CEZAYİRLİ

Master of Science (M.Sc.)
Graduate School of Natural and
Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Mustafa GÜLSU

January 2024, 46 pages

In this study, fractional finite difference method is used for numerical solutions of linear and nonlinear fractional differential equations. A differential equation of fractional order is defined as

$$D_*^\alpha y(t) + a_m y^{(m)}(t) + a_{m-1} y^{(m-1)}(t) + \dots + a_0 y(t) + N(y(t), y'(t)) = f(t),$$
$$t \geq 0, m - 1 < \alpha \leq m$$
$$y^{(i)}(0) = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, m - 1$$

Here D_*^α is the order derivative of the unknown function $y(t)$ in the Caputo sense and N is a nonlinear operator. The efficiency of the fractional finite difference method has been demonstrated by comparing the approximate solutions obtained for some linear fractional differential equations with exact methods and other methods found in the literature. Sample problems are given to demonstrate the effectiveness of the method. Maple13 and Matlab package program were used in all calculations. It has been seen that the small-order approximations are sufficiently accurate, and the results are supported by tables and graphs.

Keywords: Fractional Finite Difference Method, Caputo Fractional Derivative,
Linear And Nonlinear Fractional Differential Equations

ÖNSÖZ

Yüksek lisans çalışması olarak sunulan bu tezin konusunun seçiminde ve hazırlanmasında beni yönlendirip, değerli bilgilerini benimle paylaşan, katkılarını benden esirgemeyen sayın danışman hocam Prof. Dr. Mustafa GÜLSU'ya sonsuz teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım. Çalışmam boyunca yapmış oldukları katkılarından dolayı Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi Matematik Bölümü'ndeki tüm hocalarıma teşekkür eder saygılarımı sunarım. Ayrıca bugünlere gelmem de maddi ve manevi tüm desteklerini esirgemeyen, sevgili annem ve babama çok teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ.....	iii
İÇİNDEKİLER	iv
ÇİZELGELER DİZİNİ	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	viii
SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ	ix
1. GİRİŞ.....	1
1.1. Tarihi Gelişim.....	1
1.2. Problemin Tanıtılması.....	2
2. KAYNAK ÖZETLERİ.....	4
2.1. Temel Tanımlar ve Teoremler	4
2.1.1. Gamma fonksiyonu	4
2.1.2. Riemann liouville kesirli türevi	4
2.1.3. Caputo kesirli türevi	4
2.1.4. Bileşik yamuk kuralı.....	5
2.2. Sonlu Fark Formülleri	5
3. MATERYAL VE YÖNTEM.....	9
3.1. Kesirli Fark Yöntemi	9
3.2. Kesirli Mertebeden Lineer Ve Lineer Olmayan Diferansiyel Denklemlerin Çözümleri İçin Kesirli Fark Yöntemi	9
3.2.1. Kesirli mertebeden lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklemler için caputo kesirli türev yöntemi	9
3.3. Çözümün Kontrolü ve Hata Analizi.....	14
4. BULGULAR VE İRDELEME.....	16
4.1. Kesirli Mertebeden Lineer Ve Lineer Olmayan Diferansiyel Denklemler İçin Caputo Kesirli Türev Uygulamaları.....	16

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	42
KAYNAKLAR	43
ÖZGEÇMİŞ.....	46



ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 4.1. $h=0.01$ ve $\alpha=0.5$ için Örnek 4.1.1.'in türev değerleri, tam türev değerleri ve hataları.....	23
Çizelge 4.2. $h=0.01$ ve $\alpha=0.5$ için Örnek 4.1.2.'nin türev değerleri, tam türev değerleri ve hataları.....	26
Çizelge 4.3. $h=0.01$ ve $\alpha=0.5$ için Örnek 4.1.3.'ün yaklaşık çözümleri, tam çözümleri ve hataları.....	27
Çizelge 4.4. $h=0.01$ ve $\alpha=0.45$ için Örnek 4.1.3.'ün yaklaşık çözümleri, tam çözümleri ve hataları	28
Çizelge 4.5. $h=0.01$ ve $\alpha=0.5$ için Örnek 4.1.4.'ün yaklaşık çözümleri, tam çözümleri ve hataları.....	29
Çizelge 4.6. $h=0.01$ ve $\alpha=0.3$ için Örnek 4.1.4.'ün yaklaşık çözümleri, tam çözümleri ve hataları.....	30
Çizelge 4.7. $h=0.01$ ve $\alpha=0.2$ için Örnek 4.1.5.'in yaklaşık çözümleri, tam çözümleri ve hataları.....	31
Çizelge 4.8. $h=0.01$ ve $\alpha=0.5$ için Örnek 4.1.5.'in yaklaşık çözümleri, tam çözümleri ve hataları.....	32
Çizelge 4.9. $h=0.1$ ve $\alpha=1.5$ için Örnek 4.1.6.'nın yaklaşık çözümleri, tam çözümleri ve hataları.....	33
Çizelge 4.10. $h=0.1$ ve $\alpha_1=1.5$, $\alpha_2=2$ için Örnek 4.1.7.'nin yaklaşık çözümleri, tam çözümleri ve hataları.....	34
Çizelge 4.11. $h=0.01$ ve $\alpha=2.5$ için Örnek 4.1.8.'in yaklaşık çözümleri, tam çözümleri ve hataları.....	35
Çizelge 4.12. $h=0.01$ ve $\alpha=0.5$ için Örnek 4.1.9.'un yaklaşık çözümleri, tam çözümleri ve hataları.....	37
Çizelge 4.13. $h=0.01$ ve $\alpha=0.8$ için Örnek 4.1.9.'un yaklaşık çözümleri, tam çözümleri ve hataları.....	38
Çizelge 4.14. $h=0.01$ ve $\alpha=1.2$ için Örnek 4.1.9.'un yaklaşık çözümleri, tam çözümleri ve hataları.....	38
Çizelge 4.15. $h=0.01$ ve $\alpha=1.5$ için Örnek 4.1.9.'un yaklaşık çözümleri, tam çözümleri ve hataları.....	39
Çizelge 4.16. $h=0.01$ ve $\alpha=2.5$ için Örnek 4.1.9.'un yaklaşık çözümleri, tam çözümleri ve hataları.....	39

çözümleri ve hataları.....	39
Çizelge 4.17. $h=0.01$ ve $\alpha=2.9$ için Örnek 4.1.9.'un yaklaşık çözümleri, tam çözümleri ve hataları.....	40



ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 4.1. Örnek 4.1.1.'in $\alpha =0.9$ için türev değerleri.....	20
Şekil 4.2. Örnek 4.1.1.'in $\alpha =0.5$ için türev değerleri.....	21
Şekil 4.3. Örnek 4.1.1.'in $\alpha=0.5$ için hataları.....	22
Şekil 4.4. Örnek 4.1.3.'ün $\alpha=0.5$ için yaklaşık ve tam çözümleri.....	27
Şekil 4.5. Örnek 4.1.4.'ün $\alpha=0.5$ için yaklaşık çözümleri.....	29
Şekil 4.6. Örnek 4.1.4.'ün $\alpha=0.5$ için hataları.....	30
Şekil 4.7. Örnek 4.1.8.'un $\alpha =2.5$ için yaklaşık çözümleri.....	35
Şekil 4.8. Örnek 4.1.8.'un $\alpha =2.5$ için tam çözümleri.....	36
Şekil 4.9. Örnek 4.1.8.'un $\alpha =2.5$ için hataları.....	36
Şekil 4.10. Örnek 4.1.9.'un $\alpha=0.5$, $\alpha=0.8$ ve $\alpha=1.2$ için hataları.....	40
Şekil 4.11. Örnek 4.1.9.'un $\alpha=1.5$, $\alpha=2.5$ ve $\alpha=2.9$ için hataları.....	41

SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\Gamma(x)$	Gama Fonksiyonu
$D_t^\alpha f(x)$	Riemann Liouville1 Kesirli Türevi
$D_*^\alpha f(x)$	Caputo Kesirli Türevi
K.F.Y.	Kesirli Fark Yöntemi
D_t	Kesirli Fark Yöntemi İçin Tam Çözüm
D_y	Kesirli Fark Yöntemi İçin Yaklaşık Çözüm
$E(t)$	Hata Fonksiyonu



1.GİRİŞ

1.1 Tarihi Gelişim

Kesirli analiz kavramı temel olarak, L'Hôpital tarafından Leibniz'e yazılan mektupta sorduğu türevin mertebesinin $1/2$ olması durumu ve Leibniz'in L'Hôpital'e 30 Eylül 1695 tarihli cevabında "Bu, bir gün yararlı sonuçların alınacağı faydalı bir paradokstur." cevabı ile birlikte 1695 yılında başlamıştır(M. Rehman, R. A. Khan,2011). Kesirli analiz, son otuz yıl boyunca bilim ve mühendisliğin bir çok alanında, sinyal işleme, kontrol mühendisliği (F.B.M. Duarte, J.A. Tenreiro Machado,2002 ve O.P. Agrawal,2004), elektromanyetizma (N. Engheta,1996), biyobilim (R.L. Magin,2010), elektrokimya (K.B. Oldham,2010), difüzyon süreçleri (V. Ga.ychuk,2008), akışkanlar mekaniği (F. Mainardi,1997) ve küresel alevlerin yayılmasında (F.C. Meral,2010) araştırılan gerçel veya karmaşık integral ve türev hesabıdır.

Kesirli diferansiyel denklemlerin analitik çözümleri denklemlerin yapısına göre değişmekle birlikte birçok modele karşı gelen denklemler analitik olarak çözülememektedir. Özellikle analitik olarak çözülemeyen denklemler için geliştirilen nümerik yöntemler bilgisayar teknolojilerinin gelişmesiyle birlikte büyük bir ivme kazanmış ve bir çok araştırmacının ilgi alanı haline gelmiştir. Bu amaçla kesirli diferansiyel denklemlerin nümerik ve yarı analitik çözümlerini bulmak için yöntemler geliştirilmeye çalışılmaktadır. Bu nedenle klasik diferansiyel denklemlere yaklaşık çözümler için uygulanan çeşitli yöntemler, kesirli mertebeden diferansiyel ve kısmi denklemleri sayısal olarak çözmek için genişletilir.

Bu yöntemlerden bazıları; Adomian Ayrıştırma Yöntemi (V. Daftardar-Gejji,2007), Perturbation Yöntemi (O. Abdulaziz,2008), Homotopy Analiz Yöntemi (I. Hashim,2009), Varyasyonel Yineleme Yöntemi (G. Wu, E.W.M. Lee,2010), Extrapolation Yöntemi (K. Diethelm, G. Walz,1997) ve Genelleştirilmiş Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi (Z. Odibat, S. Momani, V. Suat Erturk,2008) şeklinde verilebilir.

$\alpha > 0$ mertebeden kesirli türevleri literatürde birçok araştırmacı tarafından farklı şekillerde tanımlanmış ve araştırmacının adı ile anılmaya başlanmıştır. Bu tanımlardan en çok kullanılanları Riemann-Liouville ve Caputo anlamında kesirli türev tanımlarıdır. Diferansiyel denklemlerinin sayısal seri çözümlerini elde etmek için genellikle kesilmiş Taylor serisi kullanılır. Taylor serisini kullanarak geliştirilen yöntemlerde türevler için geri fark yöntemi, ileri fark yöntemi ve merkezi fark yöntemleri kullanılmaktadır (J. H. Mathews, K. K. Fink, 2004 ve R. B. Albadarneh, N. T. Shawagfeh, Z. S. Abo Hammour, 2012). Sonlu fark formülleri, adi ve kısmi diferansiyel denklemleri sayısal olarak çözmek için kullanılan en yaygın formüllerdir (J. H. Mathews, K. K. Fink, 2004). Bu denklemlerdeki türevler, ayırık bir alanda uygun sonlu fark yaklaşımları ile değiştirilebilir. Çözümün hassasiyeti grid noktalarının sayısına bağlıdır, böylece grid noktalarının sayısı arttıkça çözümün daha hassas olacağı beklenmektedir.

1.2. Problemin Tanıtılması

Kesirli mertebeye sahip diferansiyel denklem,

$$D_*^\alpha y(t) + a_m y^{(m)}(t) + a_{m-1} y^{(m-1)}(t) + \dots + a_0 y(t) + N(y(t), y'(t)) = f(t) \quad (1.1)$$

$$t \geq 0, \quad m - 1 < \alpha \leq m$$

$$y^{(i)}(0) = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, m - 1 \quad (1.2)$$

şeklinde tanımlanır. Burada D_*^α , Caputo anlamında $y(t)$ bilinmeyen fonksiyonun α mertebeden türevidir ve N doğrusal olmayan bir operatördür. Kesirli sonlu fark yönteminin etkinliği, bazı doğrusal ve doğrusal olmayan kesirli diferansiyel denklemler için elde edilen yaklaşık çözümlerin kesin yöntemlerle ve literatürde bulunan diğer yöntemlerle elde edilen yaklaşık çözümlerin karşılaştırılmasıyla gösterilmiştir.

Bu çalışmada, kesirli sonlu fark yöntemleri kullanılarak doğrusal ve doğrusal olmayan kesirli diferansiyel denklemler için sayısal çözümler sunulmaktadır.

Önerilen kesirli sonlu fark yönteminde, türevlere ard arda sonlu fark formülleri ile yaklaşma prensibi kullanılmıştır. Caputo anlamında kesirli türev tanımı bu yöntemde kullanılarak tanımdaki integral terimi için paralel kenar yöntemi, Caputo'nun tanımındaki integral terimini yaklaşık değerleri sunmak için üç tipte (geri, ileri, merkezi) sonlu fark formülleri kullanılmıştır. Ayrıca, formülün genel kesirli diferansiyel denkleme doğru yaklaşık çözümler bulmak için kesirli sonlu fark yönteminin uygulanabilirliğinin ve etkinliğini gösteren uygulamalar verilmiştir. Kesirli mertebeden lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklemlerin tam çözümlerini bulmak her zaman mümkün olmadığından yaklaşık sayısal sonuçlar bulunup farklı α değerleri için karşılaştırılmaları yapılmıştır. Elde edilen bulgular tablo ve grafiklerle değerlendirilmiştir.

Bu çalışmada temel amaç hassasiyeti yüksek sonlu fark yaklaşımlarından yararlanarak uygulamalı matematikte çokça karşılaşılan kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri için bir yöntem geliştirmektir.

2. KAYNAK ÖZETLERİ

2.1. Temel Tanımlar ve Teoremler

2.1.1. Gamma fonksiyonu

$\Gamma(x)$ ile gösterilen gamma fonksiyonu

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \quad (2.1)$$

genelleştirilmiş integrali ile tanımlanır. Aynı zamanda, Gamma fonksiyonu

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad (2.2)$$

koşulunu gerçekler(Podlubny, I. 1999).

2.1.2. Riemann liouville kesirli türevi

f , $[a, b]$ üzerinde integrallenebilir bir fonksiyon ve $m-1 < \alpha \leq m$ ($m \in N^+$) olmak üzere α . mertebeden Riemann Liouville kesirli türevi

$$D_t^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dx^m} \left(\int_a^x (x-t)^{m-\alpha-1} f(t) dt \right) \quad (2.3)$$

şeklinde tanımlanır (Momani, Odibat, 2005).

2.1.3. Caputo kesirli türevi

f , $[a, b]$ üzerinde integrallenebilir bir fonksiyon ve $m-1 < \alpha \leq m$ ($m \in N^+$) olmak üzere α . mertebeden Caputo kesirli türevi

$$D_*^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^x \frac{f^{(m)}(x)}{(t-x)^{\alpha-m+1}} dx \quad (2.4)$$

şeklinde verilir(Momani, Odibat, 2005).

2.1.4. Bileşik yamuk kuralı

[a, b] aralığının, eşit aralıklı $x_k = a + kh$, $k=0, 1, \dots, s$ noktaları kullanılarak, $h=(b-a)/s$ genişliğinde s eşit aralıklı $[x_k, x_{k+1}]$ aralıklarına bölündüğünü varsayalım. s alt aralıkları için bileşik yamuk kuralı,

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2} \sum_{k=0}^{s-1} (f(x_k) + f(x_{k+1})) \quad (2.5)$$

şeklinde verilir (Young, 2018).

2.2. Sonlu Fark Formülleri

Diferansiyel denklemlerde yer alan türevlerin bilgisayarda sayısal hesabı için yaklaşık formda yazılması gerekir. Bu tip ayrıştırma işlemlerine genel olarak sonlu fark formülasyonu adı verilir. Sonlu fark formülleri genellikle Taylor seri açılımı yardımı ile elde edilir.

Birinci mertebeden türevler için, Taylor seri açılımı yardımı ile

$$\begin{aligned} u(x+h) &= u(x) + hu'(x) + \dots \\ u'(x) &= \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + O(h) \\ u'(x) &= \frac{u_{i+1} - u_i}{h} \end{aligned} \quad (2.6)$$

ileri fark yaklaşımı elde edilir.

İkinci mertebeden türevler için;

$$\begin{aligned} u(x+2h) &= u(x) + (2h)u'(x) + \frac{(2h)^2}{2!}u''(x) + \frac{(2h)^3}{3!}u'''(x) + \dots \\ -2 \left(u(x+h) &= u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2!}u''(x) + \frac{h^3}{3!}u'''(x) + \dots \right) \\ u''(x) &= \frac{u(x+2h) - 2u(x+h) + u(x)}{h^2} + O(h) \\ u''(x) &= \frac{u_{i+2} - 2u_{i+1} + u_i}{h^2} \end{aligned} \quad (2.7)$$

ileri fark yaklaşımı elde edilir.

Üçüncü mertebeden türev için;

$$\begin{aligned}
u(x+3h) &= u(x) + (3h)u'(x) + \frac{(3h)^2}{2!}u''(x) + \frac{(3h)^3}{3!}u'''(x) + \dots \\
-3 \left(u(x+2h) &= u(x) + (2h)u'(x) + \frac{(2h)^2}{2!}u''(x) + \frac{(2h)^3}{3!}u'''(x) + \dots \right) \\
3 \left(u(x+h) &= u(x) + (h)u'(x) + \frac{(h)^2}{2!}u''(x) + \frac{(h)^3}{3!}u'''(x) + \dots \right) \\
u'''(x) &= \frac{u(x+3h) - 3u(x+2h) + 3u(x+h) - u(x)}{h^3} \quad (2.8)
\end{aligned}$$

ileri fark yaklaşımı elde edilir.

Dördüncü mertebeden türev için;

$$\begin{aligned}
u(x+4h) &= u(x) + (4h)u'(x) + \frac{(4h)^2}{2!}u''(x) + \frac{(4h)^3}{3!}u'''(x) + \\
&\frac{(4h)^4}{4!}u^{(iv)}(x) + \dots \\
-4 \left(u(x+h) &= u(x) + (h)u'(x) + \frac{(h)^2}{2!}u''(x) + \frac{(h)^3}{3!}u'''(x) + \frac{h^4}{4!}u^{(iv)}(x) + \dots \right) \\
6 \left(u(x+2h) &= u(x) + (2h)u'(x) + \frac{(2h)^2}{2!}u''(x) + \frac{(2h)^3}{3!}u'''(x) \right. \\
&\left. + \frac{(2h)^4}{4!}u^{(iv)}(x) + \dots \right) \\
-4 \left(u(x+3h) \right. \\
&= u(x) + (3h)u'(x) + \frac{(3h)^2}{2!}u''(x) + \frac{(3h)^3}{3!}u'''(x) \\
&\left. + \frac{(3h)^4}{4!}u^{(iv)}(x) + \dots \right) \\
u^{(iv)}(x) &= \frac{u(x+4h) - 4u(x+3h) + 6u(x+2h) - 4u(x+h) + u(x)}{h^4} \quad (2.9)
\end{aligned}$$

ileri fark formülü elde edilir.

Birinci mertebeden türev kullanılarak, Taylor serisi yardımıyla,

$$\begin{aligned}
u(x-h) &= u(x) - (h)u'(x) + \dots \\
u'(x) &= \frac{u(x) - u(x-h)}{h} \quad (2.10)
\end{aligned}$$

geri fark formülü elde edilir.

2. mertebeden türev için,

$$\begin{aligned} u(x-2h) &= u(x) - (2h)u'(x) + \frac{(2h)^2}{2!}u''(x) + \dots \\ -2 \left(u(x-h) &= u(x) - (h)u'(x) + \frac{(h)^2}{2!}u''(x) + \dots \right) \\ u''(x) &= \frac{u(x-2h) - 2u(x-h) + u(x)}{h^2} \end{aligned} \quad (2.11)$$

geri fark formülü elde edilir.

3. mertebeden türev için,

$$\begin{aligned} u(x-3h) &= u(x) - (3h)u'(x) + \frac{(3h)^2}{2!}u''(x) - \frac{(3h)^3}{3!}u'''(x) + \dots \\ -3 \left(u(x-h) &= u(x) - hu'(x) + \frac{h^2}{2!}u''(x) - \frac{h^3}{3!}u'''(x) + \dots \right) \\ 3 \left(u(x-2h) &= u(x) - (2h)u'(x) + \frac{(2h)^2}{2!}u''(x) - \frac{(2h)^3}{3!}u'''(x) + \dots \right) \\ u'''(x) &= \frac{-u(x-3h) + 3u(x-2h) - 3u(x-h) + u(x)}{h^3} \end{aligned} \quad (2.12)$$

geri fark formülü elde edilir.

4. mertebeden türev için,

$$\begin{aligned} u(x-4h) &= u(x) - (4h)u'(x) + \frac{(4h)^2}{2!}u''(x) - \frac{(4h)^3}{3!}u'''(x) + \\ &\frac{(4h)^4}{4!}u^{(iv)}(x) + \dots \end{aligned}$$

ve 1.,2. ve 3. mertebeden geri fark formüllerini yukarıda yerine yazılarak

$$u^{iv}(x) = \frac{3u(x-4h) - 32u(x-3h) + 72u(x-2h) - 60u(x-h) + 51u(x)}{32h^4} \quad (2.13)$$

geri fark formülü elde edilir.

Birinci mertebeden türev için Taylor serisi yardımıyla,

$$\begin{aligned} u(x+h) &= u(x) + (h)u'(x) + \dots \\ u(x-h) &= u(x) - (h)u'(x) + \dots \\ u(x+h) - u(x-h) &= u(x) + (h)u'(x) - [u(x) - (h)u'(x)] \\ u'(x) &= \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} \end{aligned} \quad (2.14)$$

merkezi fark formülü elde edilir.

2. mertebeden türev için,

$$\begin{aligned}
 u(x+h) &= u(x) + (h)u'(x) + \frac{h^2}{2!}u''(x) + \dots \\
 u(x-h) &= u(x) - (h)u'(x) + \frac{h^2}{2!}u''(x) + \dots \\
 u(x+h) + u(x-h) &= 2u(x) + 2\frac{h^2}{2!}u''(x) \\
 u''(x) &= \frac{u(x+h)-2u(x)+u(x-h)}{h^2}
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

merkezi fark formülü şeklinde verilir.

3. mertebeden türev için,

$$\begin{aligned}
 u(x+2h) &= u(x) + (2h)u'(x) + \frac{(2h)^2}{2!}u''(x) + \frac{(2h)^3}{3!}u'''(x) + \dots \\
 -1 \left(u(x-2h) &= u(x) - (2h)u'(x) + \frac{(2h)^2}{2!}u''(x) - \frac{(2h)^3}{3!}u'''(x) + \dots \right) \\
 2 \left(u(x-h) &= u(x) - (h)u'(x) + \frac{(h)^2}{2!}u''(x) - \frac{(h)^3}{3!}u'''(x) + \dots \right) \\
 -2 \left(u(x+h) &= u(x) + (h)u'(x) + \frac{(h)^2}{2!}u''(x) + \frac{(h)^3}{3!}u'''(x) + \dots \right) \\
 u'''(x) &= \frac{u(x+2h)-u(x-2h)+2u(x-h)-2u(x+h)}{2h^3}
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

merkezi fark formülü elde edilir.

4. mertebeden türev için,

$$\begin{aligned}
 u(x-2h) &= u(x) - (2h)u'(x) + \frac{(2h)^2}{2!}u''(x) - \frac{(2h)^3}{3!}u'''(x) + \frac{(2h)^4}{4!}u^{iv}(x) + \dots \\
 u(x+2h) &= u(x) + (2h)u'(x) + \frac{(2h)^2}{2!}u''(x) + \frac{(2h)^3}{3!}u'''(x) + \frac{(2h)^4}{4!}u^{iv}(x) + \dots \\
 -4 \left(u(x+h) &= u(x) + (h)u'(x) + \frac{(h)^2}{2!}u''(x) + \frac{(h)^3}{3!}u'''(x) + \frac{(h)^4}{4!}u^{iv}(x) + \dots \right) \\
 -4 \left(u(x-h) &= u(x) - (h)u'(x) + \frac{(h)^2}{2!}u''(x) - \frac{(h)^3}{3!}u'''(x) + \frac{(h)^4}{4!}u^{iv}(x) + \dots \right) \\
 u^{iv}(x) &= \frac{u(x+2h)+u(x-2h)-4u(x-h)-4u(x+h)+6u(x)}{h^4}
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

merkezi fark formülü şeklinde elde edilir.

3.MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. Kesirli Fark Yöntemi

Caputo anlamında

$$D_*^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^t \frac{f^{(m)}(x)}{(t-x)^{\alpha-m+1}} dx \quad (3.1)$$

kesirli türev tanımı (1.1) ile verilen

$$D_*^\alpha y(t) + a_m y^{(m)}(t) + a_{m-1} y^{(m-1)}(t) + \dots + a_0 y(t) + N(y(t), y'(t)) = f(t)$$

kesirli mertebeden lineer diferansiyel denklemlerine uygulanmış ve yaklaşık çözümler için gerekli algoritmalar oluşturulmuştur.

3.2. Kesirli Mertebeden Lineer Ve Lineer Olmayan Diferansiyel Denklemlerin Çözümleri İçin Kesirli Fark Yöntemi

3.2.1. Kesirli mertebeden lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklemler için caputo kesirli türev yöntemi

Caputo anlamında

$$D_*^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^t \frac{f^{(m)}(x)}{(t-x)^{\alpha-m+1}} dx \quad (3.2)$$

kesirli türev tanımı kullanılarak ve $m-1 < \alpha \leq m$ olmak üzere, $m=1$, $m=2$ ve $m=3$ için lineer ve lineer olmayan kesirli diferansiyel denklemlerinin yaklaşık çözümlerini araştıralım.

Caputo anlamında türev, $m=1$, $0 < \alpha \leq 1$, $t \geq 0$ ve $\alpha \in \mathbb{R}^+$ için

$$D^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{f'(x)}{(t-x)^\alpha} dx \quad (3.3)$$

şeklinde elde edilir. Bu denklemin sağ tarafındaki integrale kısmi entegrasyon yöntemi uygulanırsa,

$$u = f'(x) \quad dv = (t-x)^{-\alpha} dx$$

$$du = f''(x) \quad \int dv = \int (t-x)^{-\alpha} dx \quad v = -\frac{(t-x)^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

ifadeleri elde edilir. Buna göre (3.3) ifadesi yeniden düzenlenirse,

$$D^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\frac{f'(x)(t-x)^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \int_0^t \frac{(t-x)^{1-\alpha} f''(x) dx}{1-\alpha} \right] \quad (3.4)$$

ve

$$D^\alpha f(t) = \frac{1}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)} (f'(0)t^{1-\alpha} + \int_0^t (t-x)^{1-\alpha} f''(x) dx) \quad (3.5)$$

ifadesi elde edilir. Bu ifadedeki son integral bileşik yamuk kuralı kullanılarak,

$h = \frac{b-a}{n}$ ve $j=0,1,\dots,n-1$ için $x_j = a + jh$ olmak üzere,

$$\int_0^t (t-x)^{1-\alpha} f''(x) dx \approx \frac{h}{2} [t^{1-\alpha} f''(0) + 2 \sum_{j=1}^{n-1} (t-x_j)^{1-\alpha} f''(x_j) + (t-b)^{1-\alpha} f''(b)] \quad (3.6)$$

şeklinde verilir.

Bileşik yamuk kuralı kullanılarak bulunan (3.6) ifadesi (3.5)'te yerine yazılırsa,

$$D^\alpha f(t) = \frac{1}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \times \left\{ \frac{h}{2} [t^{1-\alpha} f''(0) + (t-b)^{1-\alpha} f''(b) + 2 \sum_{j=1}^{n-1} (t-x_j)^{1-\alpha} f''(x_j)] + f'(0)t^{1-\alpha} \right\} \quad (3.7)$$

ifadesi elde edilir. Yukarıdaki denklem de, $f'(0)$ ve $f''(0)$ değerlerine ileri fark yaklaşımını, $f''(x_j)$ değerine merkezi fark yaklaşımını, $f''(b)$ değerine ise geri fark yaklaşımını uygulayalım.

Yani,

$$f'(0) = \frac{-3f(0)+4f(h)-f(2h)}{2h}$$

$$f''(0) = \frac{f(0)-2f(h)+f(2h)}{h^2}$$

$$f''(x_j) = \frac{f(x_j-h)-2f(x_j)+f(x_j+h)}{h^2}$$

$$f''(b) = \frac{f(b)-2f(b-h)+f(b-2h)}{h^2}$$

ifadelerini denklemde yerine koyarak denklem düzenlenirse,

$$D^\alpha f(t) = \frac{1}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \times \left\{ \frac{-3f(0)+4f(h)-f(2h)}{2h} t^{1-\alpha} + \frac{h}{2} \left[\frac{f(0)-2f(h)+f(2h)}{h^2} t^{1-\alpha} + \frac{f(b)-2f(b-h)+f(b-2h)}{h^2} (t-b)^{1-\alpha} + 2 \sum_{j=1}^{n-1} \frac{f(x_j-h)-2f(x_j)+f(x_j+h)}{h^2} (t-x_j)^{1-\alpha} \right] \right\} \quad (3.8)$$

ifadesi elde edilir.

Caputo anlamında türev, $m=2$, $1 < \alpha \leq 2$, $t \geq 0$ ve $\alpha \in \mathbb{R}^+$ için düzenlenirse

$$D^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^t \frac{f''(x)}{(t-x)^{\alpha-1}} dx \quad (3.9)$$

denklemini elde edilir. Bu denklemin sağ tarafındaki integrale kısmi entegrasyon yöntemi uygulanırsa,

$$u = f''(x) \quad dv = (t-x)^{1-\alpha} dx$$

$$du = f'''(x) \quad \int dv = \int (t-x)^{1-\alpha} dx \quad v = -\frac{(t-x)^{2-\alpha}}{2-\alpha}$$

ifadeleri elde edilir. Buna göre (3.9) düzenlenirse,

$$D^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \left[\frac{f''(x)(t-x)^{2-\alpha}}{2-\alpha} + \int_0^t \frac{(t-x)^{2-\alpha} f'''(x) dx}{2-\alpha} \right] \quad (3.10)$$

ve

$$D^\alpha f(t) = \frac{1}{(2-\alpha)\Gamma(2-\alpha)} (f''(0)t^{2-\alpha} + \int_0^t (t-x)^{2-\alpha} f'''(x) dx) \quad (3.11)$$

ifadesi elde edilir. Bu ifadedeki son integral bileşik yamuk kuralı kullanılarak,

$h = \frac{b-a}{n}$ ve $j=0,1,\dots,n-1$ için $x_j = a + jh$ olmak üzere,

$$\int_0^t (t-x)^{2-\alpha} f'''(x) dx \approx \frac{h}{2} [t^{2-\alpha} f'''(0) + 2 \sum_{j=1}^{n-1} (t-x_j)^{2-\alpha} f'''(x_j) + (t-b)^{2-\alpha} f'''(b)] \quad (3.12)$$

ifadesi elde edilir. Bu ifade (3.11)'de yerine yazılırsa,

$$D^\alpha f(t) = \frac{1}{(2-\alpha)\Gamma(2-\alpha)} \times \left\{ \frac{h}{2} [t^{2-\alpha} f'''(0) + (t-b)^{2-\alpha} f'''(b) + 2 \sum_{j=1}^{n-1} (t-x_j)^{2-\alpha} f'''(x_j)] + f''(0)t^{2-\alpha} \right\} \quad (3.13)$$

denklemini elde edilir. Yukarıdaki denklem de, $f''(0)$ ve $f'''(0)$ değerlerine ileri fark yaklaşımını, $f'''(x_j)$ değerine merkezi fark yaklaşımını, $f'''(b)$ değerine ise geri fark yaklaşımını uygulayalım.

Yani,

$$\begin{aligned} f''(0) &= \frac{f(0)-2f(h)+f(2h)}{h^2} \\ f'''(0) &= \frac{-f(0)+3f(h)-3f(2h)+f(3h)}{h^3} \\ f'''(x_j) &= \frac{-f(x_j-2h)+2f(x_j-h)-2f(x_j+h)+f(x_j+2h)}{2h^3} \\ f'''(b) &= \frac{f(b)-3f(b-h)+3f(b-2h)-f(b-3h)}{h^3} \end{aligned}$$

ifadeleri yerine konarak (3.13) denklemi düzenlenirse,

$$\begin{aligned} D^\alpha f(t) &= \\ &= \frac{1}{(2-\alpha)\Gamma(2-\alpha)} \times \left\{ \frac{f(0)-2f(h)+f(2h)}{h^2} t^{2-\alpha} + \frac{h}{2} \left[\frac{-f(0)+3f(h)-3f(2h)+f(3h)}{h^3} t^{2-\alpha} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{f(b)-3f(b-h)+3f(b-2h)-f(b-3h)}{h^3} (t-b)^{2-\alpha} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. 2 \sum_{j=1}^{n-1} \frac{-f(x_j-2h)+2f(x_j-h)-2f(x_j+h)+f(x_j+2h)}{2h^3} (t-x_j)^{2-\alpha} \right] \right\} \quad (3.14) \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir.

Caputo türevi. $m=3$, $2 < \alpha \leq 3$ aralığı $t \geq 0$ ve $\alpha \in \mathbb{R}^+$ için düzenlenirse

$$D^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(3-\alpha)} \int_0^t \frac{f'''(x)}{(t-x)^{\alpha-2}} dx \quad (3.15)$$

denklemini elde edilir. Bu denklemin sağ tarafındaki integrale kısmi entegrasyon yöntemi uygulanırsa,

$$\begin{aligned} u &= f'''(x) & dv &= (t-x)^{2-\alpha} dx \\ du &= f^{iv}(x) & \int dv &= \int (t-x)^{2-\alpha} dx & v &= -\frac{(t-x)^{3-\alpha}}{3-\alpha} \end{aligned}$$

ifadeleri elde edilir. Buna göre (3.15) düzenlenirse,

$$D^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(3-\alpha)} \left[\frac{f'''(x)(t-x)^{3-\alpha}}{3-\alpha} + \int_0^t \frac{(t-x)^{3-\alpha} f^{iv}(x) dx}{3-\alpha} \right] \quad (3.16)$$

ve

$$D^\alpha f(t) = \frac{1}{(3-\alpha)\Gamma(3-\alpha)} (f'''(0)t^{3-\alpha} + \int_0^t (t-x)^{3-\alpha} f^{iv}(x) dx) \quad (3.17)$$

denklemini elde edilir. Bu denklemden son integral için bileşik yamuk kuralı kullanılarak,

$$h = \frac{b-a}{n} \quad \text{ve } j=0,1,\dots,n-1 \text{ için } x_j = a + jh \text{ olmak üzere,}$$

$$\begin{aligned} \int_0^t (t-x)^{3-\alpha} f^{iv}(x) dx &\approx \frac{h}{2} [t^{3-\alpha} f^{iv}(0) + 2 \sum_{j=1}^{n-1} (t-x_j)^{3-\alpha} f^{iv}(x_j) + \\ &(t-b)^{3-\alpha} f^{iv}(b)] \end{aligned} \quad (3.18)$$

ifadesi elde edilir. Bu ifade bir önceki denkleminde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} D^\alpha f(t) &= \frac{1}{(3-\alpha)\Gamma(3-\alpha)} \times \left\{ \frac{h}{2} [t^{3-\alpha} f^{iv}(0) + (t-b)^{3-\alpha} f^{iv}(b) + 2 \sum_{j=1}^{n-1} (t-x_j)^{3-\alpha} f^{iv}(x_j)] \right. \\ &\left. + f'''(0)t^{3-\alpha} \right\} \end{aligned} \quad (3.19)$$

denklemleri elde edilir. Yukarıdaki denklemler de, $f'''(0)$ ve $f^{(iv)}(0)$ yerlerine ileri fark formülünü, $f^{(iv)}(x_j)$ yerine merkezi fark formülünü, $f^{(iv)}(b)$ yerine ise geri fark formülünü uygulayalım. Yani,

$$f'''(0) = \frac{-f(0)+3f(h)-3f(2h)+f(3h)}{h^3}$$

$$f^{iv}(0) = \frac{f(0)+f(4h)+6f(2h)-4f(3h)-4f(h)}{h^4}$$

$$f^{iv}(x_j) = \frac{f(x_j-2h)-4f(x_j-h)+6f(x_j)-4f(x_j+h)+f(x_j+2h)}{h^4}$$

$$f^{iv}(b) = \frac{51f(b)-60f(b-h)+72f(b-2h)-32f(b-3h)+3f(b-4h)}{32h^4}$$

ifadeleri denklemlerde yerine konur ve denklemler düzenlenirse,

$$D^\alpha f(t) = \frac{1}{(3-\alpha)\Gamma(3-\alpha)} \times \left\{ \frac{-f(0)+3f(h)-3f(2h)+f(3h)}{h^3} t^{3-\alpha} + \frac{h}{2} \left[\frac{f(0)+f(4h)+6f(2h)-4f(3h)-4f(h)}{h^4} t^{3-\alpha} + \frac{51f(b)-60f(b-h)+72f(b-2h)-32f(b-3h)+3f(b-4h)}{32h^4} (t-b)^{3-\alpha} + 2 \sum_{j=1}^{n-1} \frac{f(x_j-2h)-4f(x_j-h)+6f(x_j)-4f(x_j+h)+f(x_j+2h)}{h^4} (t-x_j)^{3-\alpha} \right] \right\} \quad (3.20)$$

ifadesi elde edilir.

3.3. Çözümün Kontrolü ve Hata Analizi

(1.1) ile verilen kesirli mertebeye sahip diferansiyel denklemin $m=1$ için elde edilen yaklaşık çözümü (3.8), $m=2$ için elde edilen yaklaşık çözümü (3.14) ve $m=3$ için elde edilen yaklaşık çözümü (3.20) ile verilmektedir.

Bu durumda (3.8), (3.14) ve (3.20) ile verilen yaklaşık çözümler (1.1) denklemini yaklaşık olarak sağlamalıdır.

$$E(t) = |[D_*^\alpha y(t) + a_m y^{(m)}(t) + a_{m-1} y^{(m-1)}(t) + \dots + a_0 y(t) + N(y(t), y'(t))] - f(t)| \cong 0 \quad (3.21)$$

şeklindedir. Hata fonksiyonu, bileşik yamuk kuralına göre düzenlenirse,

$$-\frac{b-a}{12} h^2 \left(\frac{d^2}{dx^2} [(t-x)^{1-\alpha} f''(x)] \right)$$

$0 < \alpha < 1$ için elde edilir. a ve b aralığındaki herhangi bir $x=\mu$ için ve h , 0 'a yaklaştıkça hata sifira yaklaşır (R. B. Albadarneh, M. Zerqat, I. M. Batiha, 2016).



4. BULGULAR VE İRDELEME

Bu bölümde kesirli mertebeden lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklemlerine farklı α ve h değerleri için yaklaşık çözümleri farklı örnekler üzerinde incelenmiştir. Sunulan örnekler ile yöntemin kullanılabilirliği ve tutarlılığı gösterilmiştir. Örneklerde bulunan sonuçlar farklı yöntemler ile karşılaştırılmıştır. Bulunan sonuçlar tablolar ve grafikler ile analiz edilmiştir. Yöntemin uygulandığı örneklerde yaklaşık çözümler bulunurken Maple ve Matlab programları kullanılmıştır.

4.1. Kesirli Mertebeden Lineer Ve Lineer Olmayan Diferansiyel Denklemler İçin Caputo Kesirli Türev Uygulamaları

Örnek 4.1.1.: (Albadarneh R. B., Zerqat, Batiha, 2016)

$$y(t) = \sin(t^2) + e^t + 1$$

fonksiyonunu $0 < \alpha < 1$ aralığındaki α değerleri için, h 'nin 0.1 ve 0.01 için Caputo anlamında türevlerini araştıralım. Burada (3.8) ile verilen türev yaklaşımının son hali

$$\begin{aligned} D^\alpha y(t) = & \frac{1}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \times \left\{ \frac{-3f(0) + 4f(h) - f(2h)}{2h} t^{1-\alpha} \right. \\ & + \frac{h}{2} \left[\frac{f(0) - 2f(h) + f(2h)}{h^2} t^{1-\alpha} \right. \\ & + \frac{f(b) - 2f(b-h) + f(b-2h)}{h^2} (t-b)^{1-\alpha} \\ & \left. \left. + 2 \sum_{j=1}^{n-1} \frac{f(x_j - h) - 2f(x_j) + f(x_j + h)}{h^2} (t - x_j)^{1-\alpha} \right] \right\} \end{aligned}$$

göz önüne alındığında, $\alpha=0.9$, $n=10$ ve $h=0.1$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
D^\alpha (\sin(t^2) + e^t + 1) &= \frac{1}{(1-0.9)\Gamma(1-0.9)} \times \left\{ \frac{-3f(0) + 4f(0.1) - f(0.2)}{2 * 0.1} t^{1-0.9} \right. \\
&+ \frac{0.1}{2} \left[\frac{f(0) - 2f(h) + f(2h)}{(0.1)^2} t^{1-\alpha} \right. \\
&+ \frac{f(1) - 2f(1-0.1) + f(1-0.2)}{(0.1)^2} (t-1)^{1-0.9} \\
&\left. \left. + 2 \sum_{j=1}^{10-1} \frac{f(x_j - 0.1) - 2f(x_j) + f(x_j + 0.1)}{(0.1)^2} (t-x_j)^{1-0.9} \right] \right\}
\end{aligned}$$

biçiminde yazılabilir.

t=0.1 için;

$$\begin{aligned}
D_1^{0.9} &= \frac{1}{(0.1)\Gamma(0.1)} \times \left\{ \frac{-3f(0) + 4f(0.1) - f(0.2)}{0.2} 0.1^{0.1} \right. \\
&+ \frac{0.1}{2} \left[\frac{f(0) - 2f(h) + f(2h)}{(0.1)^2} 0.1^{0.1} \right. \\
&+ \frac{f(1) - 2f(1-0.1) + f(1-0.2)}{(0.1)^2} (-0.9)^{0.1} \\
&\left. \left. + 2 \sum_{j=1}^9 \frac{f(x_j - 0.1) - 2f(x_j) + f(x_j + 0.1)}{(0.1)^2} (0.1 - x_j)^{0.1} \right] \right\} \\
&= 3.101087186
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Benzer şekilde,

t=0.2 için,

$$\begin{aligned}
D_2^{0.9} &= \frac{1}{(0.1)\Gamma(0.1)} \times \left\{ \frac{-3f(0) + 4f(0.1) - f(0.2)}{0.2} 0.2^{0.1} \right. \\
&+ \frac{0.1}{2} \left[\frac{f(0) - 2f(h) + f(2h)}{(0.1)^2} 0.2^{0.1} \right. \\
&+ \frac{f(1) - 2f(1-0.1) + f(1-0.2)}{(0.1)^2} (-0.8)^{0.1} \\
&\left. \left. + 2 \sum_{j=1}^9 \frac{f(x_j - 0.1) - 2f(x_j) + f(x_j + 0.1)}{(0.1)^2} (0.2 - x_j)^{0.1} \right] \right\} \\
&= 3.117473310
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer işlemler tekrar edildiğinde sırası ile

t=0.3 için,

$$\begin{aligned}
 D_3^{0.9} &= \frac{1}{(0.1)\Gamma(0.1)} \times \left\{ \frac{-3f(0) + 4f(0.1) - f(0.2)}{0.2} 0.3^{0.1} \right. \\
 &\quad + \frac{0.1}{2} \left[\frac{f(0) - 2f(h) + f(2h)}{(0.1)^2} 0.3^{0.1} \right. \\
 &\quad + \frac{f(1) - 2f(1 - 0.1) + f(1 - 0.2)}{(0.1)^2} (-0.7)^{0.1} \\
 &\quad \left. \left. + 2 \sum_{j=1}^9 \frac{f(x_j - 0.1) - 2f(x_j) + f(x_j + 0.1)}{(0.1)^2} (0.3 - x_j)^{0.1} \right] \right\} \\
 &= 3.132480624
 \end{aligned}$$

t=0.4 için,

$$\begin{aligned}
 D_4^{0.9} &= \frac{1}{(0.1)\Gamma(0.1)} \times \left\{ \frac{-3f(0) + 4f(0.1) - f(0.2)}{0.2} 0.4^{0.1} \right. \\
 &\quad + \frac{0.1}{2} \left[\frac{f(0) - 2f(h) + f(2h)}{(0.1)^2} 0.4^{0.1} \right. \\
 &\quad + \frac{f(1) - 2f(1 - 0.1) + f(1 - 0.2)}{(0.1)^2} (-0.6)^{0.1} \\
 &\quad \left. \left. + 2 \sum_{j=1}^9 \frac{f(x_j - 0.1) - 2f(x_j) + f(x_j + 0.1)}{(0.1)^2} (0.4 - x_j)^{0.1} \right] \right\} \\
 &= 3.158181386
 \end{aligned}$$

t=0.5 için,

$$\begin{aligned}
 D_5^{0.9} &= \frac{1}{(0.1)\Gamma(0.1)} \times \left\{ \frac{-3f(0) + 4f(0.1) - f(0.2)}{0.2} 0.5^{0.1} \right. \\
 &\quad + \frac{0.1}{2} \left[\frac{f(0) - 2f(h) + f(2h)}{(0.1)^2} 0.5^{0.1} \right. \\
 &\quad + \frac{f(1) - 2f(1 - 0.1) + f(1 - 0.2)}{(0.1)^2} (-0.5)^{0.1} \\
 &\quad \left. \left. + 2 \sum_{j=1}^9 \frac{f(x_j - 0.1) - 2f(x_j) + f(x_j + 0.1)}{(0.1)^2} (0.5 - x_j)^{0.1} \right] \right\} \\
 &= 3.201038628
 \end{aligned}$$

t=0.6 için,

$$\begin{aligned}
D_6^{0.9} &= \frac{1}{(0.1)\Gamma(0.1)} \times \left\{ \frac{-3f(0) + 4f(0.1) - f(0.2)}{0.2} 0.6^{0.1} \right. \\
&\quad + \frac{0.1}{2} \left[\frac{f(0) - 2f(h) + f(2h)}{(0.1)^2} 0.6^{0.1} \right. \\
&\quad + \frac{f(1) - 2f(1 - 0.1) + f(1 - 0.2)}{(0.1)^2} (-0.4)^{0.1} \\
&\quad \left. \left. + 2 \sum_{j=1}^9 \frac{f(x_j - 0.1) - 2f(x_j) + f(x_j + 0.1)}{(0.1)^2} (0.6 - x_j)^{0.1} \right] \right\} \\
&= 3.266176380
\end{aligned}$$

t=0.7 için,

$$\begin{aligned}
D_7^{0.9} &= \frac{1}{(0.1)\Gamma(0.1)} \times \left\{ \frac{-3f(0) + 4f(0.1) - f(0.2)}{0.2} 0.7^{0.1} \right. \\
&\quad + \frac{0.1}{2} \left[\frac{f(0) - 2f(h) + f(2h)}{(0.1)^2} 0.7^{0.1} \right. \\
&\quad + \frac{f(1) - 2f(1 - 0.1) + f(1 - 0.2)}{(0.1)^2} (-0.3)^{0.1} \\
&\quad \left. \left. + 2 \sum_{j=1}^9 \frac{f(x_j - 0.1) - 2f(x_j) + f(x_j + 0.1)}{(0.1)^2} (0.7 - x_j)^{0.1} \right] \right\} \\
&= 3.357426897
\end{aligned}$$

t=0.8 için,

$$\begin{aligned}
D_8^{0.9} &= \frac{1}{(0.1)\Gamma(0.1)} \times \left\{ \frac{-3f(0) + 4f(0.1) - f(0.2)}{0.2} 0.8^{0.1} \right. \\
&\quad + \frac{0.1}{2} \left[\frac{f(0) - 2f(h) + f(2h)}{(0.1)^2} 0.8^{0.1} \right. \\
&\quad + \frac{f(1) - 2f(1 - 0.1) + f(1 - 0.2)}{(0.1)^2} (-0.2)^{0.1} \\
&\quad \left. \left. + 2 \sum_{j=1}^9 \frac{f(x_j - 0.1) - 2f(x_j) + f(x_j + 0.1)}{(0.1)^2} (0.8 - x_j)^{0.1} \right] \right\} \\
&= 3.476265365
\end{aligned}$$

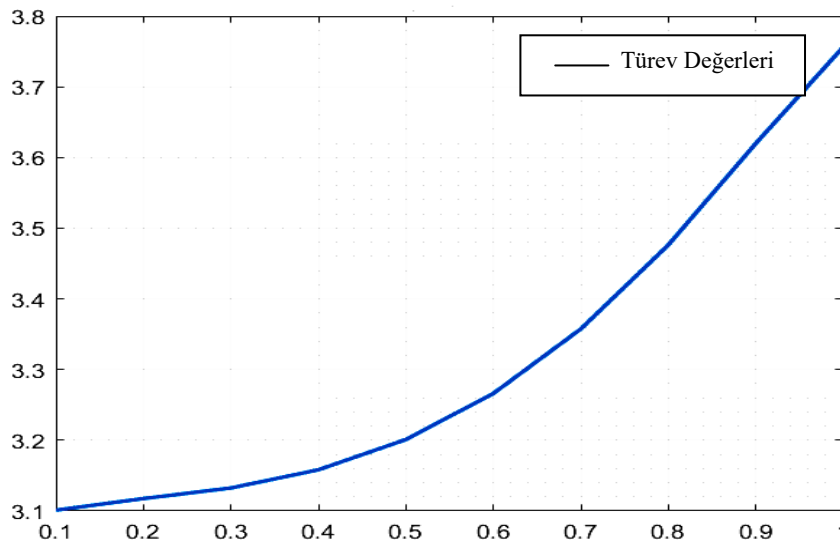
t=0.9 için,

$$\begin{aligned}
 D_9^{0.9} &= \frac{1}{(0.1)\Gamma(0.1)} \times \left\{ \frac{-3f(0) + 4f(0.1) - f(0.2)}{0.2} 0.9^{0.1} \right. \\
 &\quad + \frac{0.1}{2} \left[\frac{f(0) - 2f(h) + f(2h)}{(0.1)^2} 0.9^{0.1} \right. \\
 &\quad + \frac{f(1) - 2f(1 - 0.1) + f(1 - 0.2)}{(0.1)^2} (-0.1)^{0.1} \\
 &\quad \left. \left. + 2 \sum_{j=1}^9 \frac{f(x_j - 0.1) - 2f(x_j) + f(x_j + 0.1)}{(0.1)^2} (0.9 - x_j)^{0.1} \right] \right\} \\
 &= 3.619889217
 \end{aligned}$$

t=1.0 için,

$$\begin{aligned}
 D_{10}^{0.9} &= \frac{1}{(0.1)\Gamma(0.1)} \times \left\{ \frac{-3f(0) + 4f(0.1) - f(0.2)}{0.2} 1.0^{0.1} \right. \\
 &\quad + \frac{0.1}{2} \left[\frac{f(0) - 2f(h) + f(2h)}{(0.1)^2} 1.0^{0.1} \right. \\
 &\quad + \frac{f(1) - 2f(1 - 0.1) + f(1 - 0.2)}{(0.1)^2} (0)^{0.1} \\
 &\quad \left. \left. + 2 \sum_{j=1}^9 \frac{f(x_j - 0.1) - 2f(x_j) + f(x_j + 0.1)}{(0.1)^2} (1.0 - x_j)^{0.1} \right] \right\} \\
 &= 3.756335193
 \end{aligned}$$

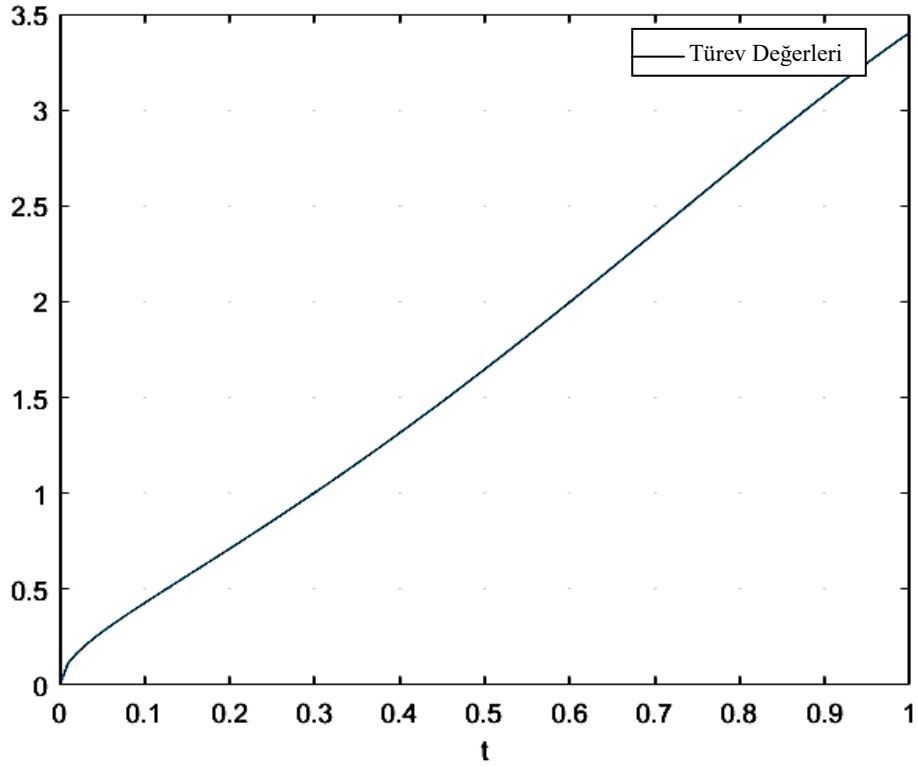
değerleri bulunur.



Şekil 4.1. Örneğin α=0.9 için türev değerleri

Aynı fonksiyonun $\alpha=0.5$, $n=100$ ve $h=0.01$ için türev değerlerini araştıralım. Caputo türevi kullanılarak (3.1) ile verilen tanımı farklı noktalardaki türev değerleri aşağıdaki Şekilde verilir.

t=0.01 için $D_Y(0.01)=0.15323698$
t=0.02 için $D_Y(0.02)=0.1653697196$
t=0.03 için $D_Y(0.03)=0.2065871866$
....
t=0.6 için $D_Y(0.6)=1.997692928$
...
t=1.00 için $D_Y(1.00)=3.404176594$



Şekil 4.2. Örnek 4.1.1.'in $\alpha =0.5$ için türev değerleri

Fonksiyonun tam türev değerleri ise $\alpha=0.5$ ve $n=100$, ($t=0.01, 0.02, 0.03, \dots, 1.00$) için Caputo'nun kesirli türev tanımında yerine yazılarak

$$D^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{f'(x)}{(t-x)^\alpha} dx$$

aşağıdaki Şekilde bulunur.

$t=0.01$ için $D_T(0.01)=0.1150976927$

$t=0.02$ için $D_T(0.02)=0.1659771077$

$t=0.03$ için $D_T(0.03)=0.2072147738$

....

$t=0.6$ için $D_T(0.6)=1.998425834$

..

$t=1.00$ için $D_T(1.00)=3.40431753$

Fonksiyonun bulunan türev değerleri ile tam türev değerleri karşılaştırılarak bulunan hatalar aşağıda tablo ve grafikler ile verilmiştir.

$Hata_1=0.0005653229$

$Hata_2=0.0006073881$

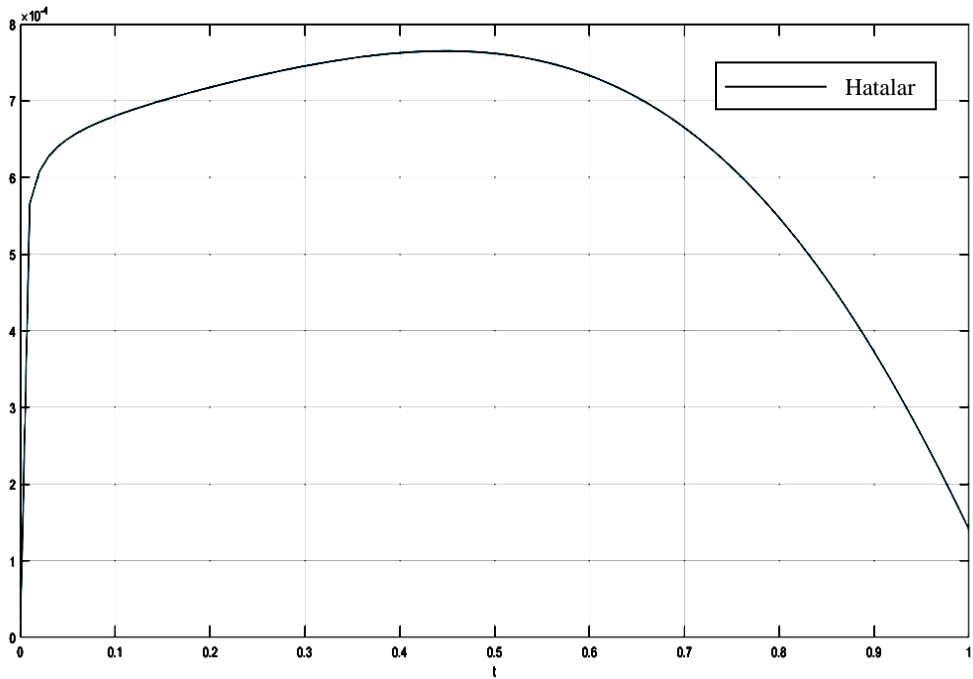
$Hata_3=0.0006275872$

...

$Hata_{60}=0.000732906$

..

$Hata_{100}=0.000140759$



Şekil 4.3. Örnek 4.1.1.'in $\alpha =0.5$ için hataları

Çizelge 4.1. h=0.01 ve $\alpha=0.5$ için Örnek 4.1.1.'in türev değerleri, tam türev değerleri ve hataları

t	$\alpha = 0.5$		
	Türev Değerleri	Tam Türev Değerleri	Hatalar
0.1	0.4284875860	0.4291678045	6.80×10^{-4}
0.2	0.7114044663	0.7121219079	7.17×10^{-4}
0.3	1.003756118	1.004501383	7.45×10^{-4}
0.4	1.315374014	1.316136457	7.62×10^{-4}
0.5	1.647552061	1.648313726	7.61×10^{-4}
0.6	1.997692928	1.998425834	7.32×10^{-4}
0.7	2.359797681	2.360462635	6.64×10^{-4}
0.8	2.724283136	2.724830380	5.47×10^{-4}
0.9	3.077902329	3.078274894	3.72×10^{-4}
1.0	3.404176594	3.404317353	1.40×10^{-4}

Örnek 4.1.2.:

$$y(t) = \cos(t) + e^t$$

fonksiyonunu $0 < \alpha < 1$ aralığındaki α değerleri için, $h=0.01$ için Caputo anlamında türevlerini araştıralım. Burada (3.8) ile verilen türev yaklaşımının son hali

$$D^\alpha y(t) = \frac{1}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \times \left\{ \frac{-3f(0) + 4f(h) - f(2h)}{2h} t^{1-\alpha} + \frac{h}{2} \left[\frac{f(0) - 2f(h) + f(2h)}{h^2} t^{1-\alpha} + \frac{f(b) - 2f(b-h) + f(b-2h)}{h^2} (t-b)^{1-\alpha} + 2 \sum_{j=1}^{n-1} \frac{f(x_j - h) - 2f(x_j) + f(x_j + h)}{h^2} (t-x_j)^{1-\alpha} \right] \right\}$$

göz önüne alındığında, $\alpha=0.5$ $n=100$ ve $h=0.01$ olmak üzere,

$$D^\alpha (\cos(t) + e^t) = \frac{1}{(1-0.5)\Gamma(1-0.5)} \times \left\{ \frac{-3f(0)+4f(0.01)-f(0.02)}{2*0.01} t^{1-0.5} + \right. \\ \left. \frac{0.1}{2} \left[\frac{f(0)-2f(0.01)+f(0.02)}{(0.01)^2} t^{1-0.5} + \frac{f(1)-2f(1-0.1)+f(1-0.2)}{(0.01)^2} (t-1)^{1-0.5} + \right. \right. \\ \left. \left. 2 \sum_{j=1}^{100-1} \frac{f(x_j-0.01)-2f(x_j)+f(x_j+0.01)}{(0.01)^2} (t-x_j)^{1-0.5} \right] \right\}$$

biçiminde yazılabilir.

t=0.01 için;

$$D_1^{0.5} = \frac{1}{(0.5)\Gamma(0.5)} \times \left\{ \frac{-3f(0)+4f(0.01)-f(0.02)}{0.02} 0.01^{0.5} + \right. \\ \left. \frac{0.01}{2} \left[\frac{f(0)-2f(0.01)+f(0.02)}{(0.01)^2} 0.01^{0.5} + \right. \right. \\ \left. \left. \frac{f(1)-2f(1-0.01)+f(1-0.02)}{(0.1)^2} (-0.09)^{0.5} + \right. \right. \\ \left. \left. 2 \sum_{j=1}^{99} \frac{f(x_j-0.01)-2f(x_j)+f(x_j+0.01)}{(0.01)^2} (0.01-x_j)^{0.5} \right] \right\} = 0.1128398011$$

olarak bulunur. Benzer şekilde,

t=0.02 için,

$$D_2^{0.5} = \frac{1}{(0.5)\Gamma(0.5)} \times \left\{ \frac{-3f(0) + 4f(0.01) - f(0.02)}{0.02} 0.02^{0.5} \right. \\ \left. + \frac{0.01}{2} \left[\frac{f(0) - 2f(h) + f(2h)}{(0.01)^2} 0.02^{0.5} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{f(1) - 2f(1 - 0.01) + f(1 - 0.02)}{(0.01)^2} (-0.08)^{0.5} \right. \right. \\ \left. \left. + 2 \sum_{j=1}^{99} \frac{f(x_j - 0.01) - 2f(x_j) + f(x_j + 0.01)}{(0.01)^2} (0.02 \right. \right. \\ \left. \left. - x_j)^{0.5} \right] \right\} = 0.1595910076$$

elde edilir. Benzer işlemler tekrar edildiğinde sırası ile aşağıdaki değerler bulunur.

t=0.03 için,

$$\begin{aligned}
 D_3^{0.5} &= \frac{1}{(0.5)\Gamma(0.5)} \times \left\{ \frac{-3f(0) + 4f(0.01) - f(0.02)}{0.02} 0.03^{0.5} \right. \\
 &\quad + \frac{0.01}{2} \left[\frac{f(0) - 2f(h) + f(2h)}{(0.01)^2} 0.03^{0.5} \right. \\
 &\quad + \frac{f(1) - 2f(1 - 0.01) + f(1 - 0.02)}{(0.01)^2} (-0.07)^{0.5} \\
 &\quad \left. \left. + 2 \sum_{j=1}^{99} \frac{f(x_j - 0.01) - 2f(x_j) + f(x_j + 0.01)}{(0.01)^2} (0.03 - x_j)^{0.5} \right] \right\} \\
 &= 0.1954834640
 \end{aligned}$$

...

t=1.00 için,

$$\begin{aligned}
 D_{100}^{0.5} &= \frac{1}{(0.5)\Gamma(0.5)} \times \left\{ \frac{-3f(0) + 4f(0.01) - f(0.02)}{0.02} 1.00^{0.5} \right. \\
 &\quad + \frac{0.01}{2} \left[\frac{f(0) - 2f(h) + f(2h)}{(0.01)^2} 1.00^{0.5} \right. \\
 &\quad + \frac{f(1) - 2f(1 - 0.01) + f(1 - 0.02)}{(0.01)^2} (0)^{0.5} \\
 &\quad \left. \left. + 2 \sum_{j=1}^{99} \frac{f(x_j - 0.01) - 2f(x_j) + f(x_j + 0.01)}{(0.01)^2} (1.00 - x_j)^{0.5} \right] \right\} \\
 &= 1.620528780
 \end{aligned}$$

Çizelge 4.2. h=0.01 ve $\alpha=0.5$ için Örnek 4.1.2.'nin türev değerleri, tam türev değerleri ve hataları

t	$\alpha = 0.5$		
	Türev Değerleri	Tam Türev Değerleri	Hatalar
0.1	0.3578092067	0.3578313337	0.0000221270
0.2	0.5105872012	0.5106380372	0.0000508360
0.3	0.6354146915	0.6354994305	0.0000847390
0.4	0.7512453681	0.7513693404	0.0001239723
0.5	0.8669569574	0.8671257032	0.0001687458
0.6	0.9884359197	0.9886552284	0.0002193087
0.7	1.120396284	1.120672215	0.000275931
0.8	1.267053409	1.267392309	0.000338900
0.9	1.432431828	1.432840365	0.000408537
1.0	1.620528780	1.621013993	0.000485213

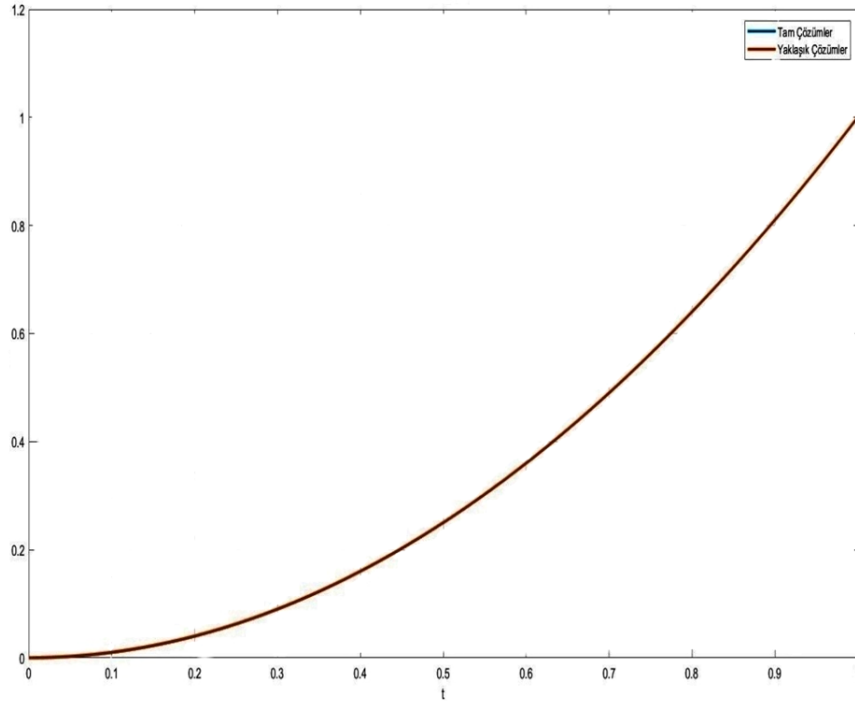
Örnek 4.1.3 : (Irandoust S.,2011) Doğrusal kesirli

$$D^\alpha y(t) = t^2 + \frac{2}{\Gamma(3-\alpha)} \cdot t^{2-\alpha} - y(t)$$

diferansiyel denklemi, $y(0)=0$ başlangıç koşuluyla verilsin. Bu denklemin çözümünü $h=0.01$ ve $\alpha=0.5$ için kesirli diferansiyel fark yöntemi ile araştıralım. Bu problemin tam çözümü ise $y(t)=t^2$ 'dir.

Çizelge 4.3. $h=0.01$ ve $\alpha=0.5$ için Örnek 4.1.3.'ün yaklaşık çözümleri, tam çözümleri ve hataları

t	$\alpha = 0.5$		
	Yaklaşık Çözüm	Tam Çözüm	Hatalar
0.1	0.010116	0.01	1.16×10^{-4}
0.2	0.040156	0.04	1.56×10^{-4}
0.3	0.090181	0.09	1.81×10^{-4}
0.4	0.160200	0.16	2.00×10^{-4}
0.5	0.250215	0.25	2.15×10^{-4}
0.6	0.360227	0.36	2.27×10^{-4}
0.7	0.490237	0.49	2.37×10^{-4}
0.8	0.640246	0.64	2.46×10^{-4}
0.9	0.810254	0.81	2.54×10^{-4}
1.0	1.000261	1.00	2.61×10^{-4}



Şekil 4.4. Örnek 4.1.3.'ün $\alpha=0.5$ için yaklaşık ve tam çözümleri

Benzer şekilde $h=0.01$ ve $\alpha=0.45$ için yaklaşık çözümlerini inceleyelim.

Çizelge 4.4. $h=0.01$ ve $\alpha=0.45$ için Örnek 4.1.3.'ün yaklaşık çözümleri, tam çözümleri ve hataları

t	$\alpha = 0.45$		
	Yaklaşık Çözüm	Tam Çözüm	Hatalar
0.1	0.203131	0.01	0.1931
0.2	0.200955	0.04	0.1609
0.3	0.220917	0.09	0.1309
0.4	0.263153	0.16	0.1031
0.5	0.327828	0.25	0.0778
0.6	0.415153	0.36	0.0551
0.7	0.525412	0.49	0.0354
0.8	0.659020	0.64	0.0190
0.9	0.816681	0.81	0.0066
1.0	1.000330	1.00	0.0003

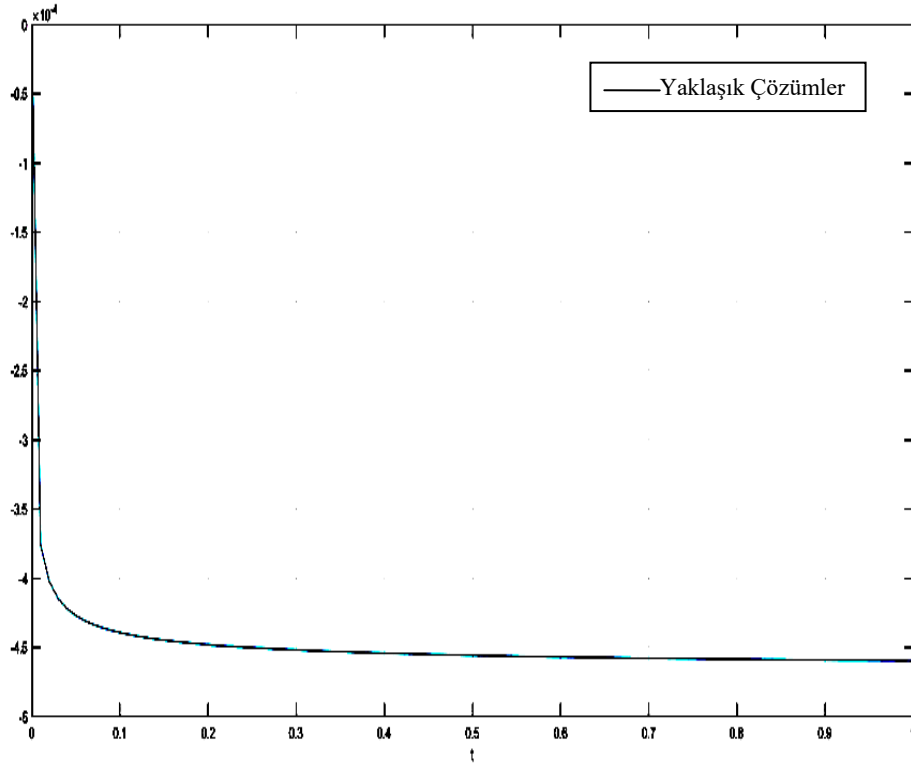
Örnek 4.1.4: (Albadarneh, Zerqat, Batiha, 2016) Doğrusal kesirli

$$D^\alpha y(t) = \frac{8}{3} \sqrt{\frac{t^3}{\pi}} - 2 \sqrt{\frac{t}{\pi}}$$

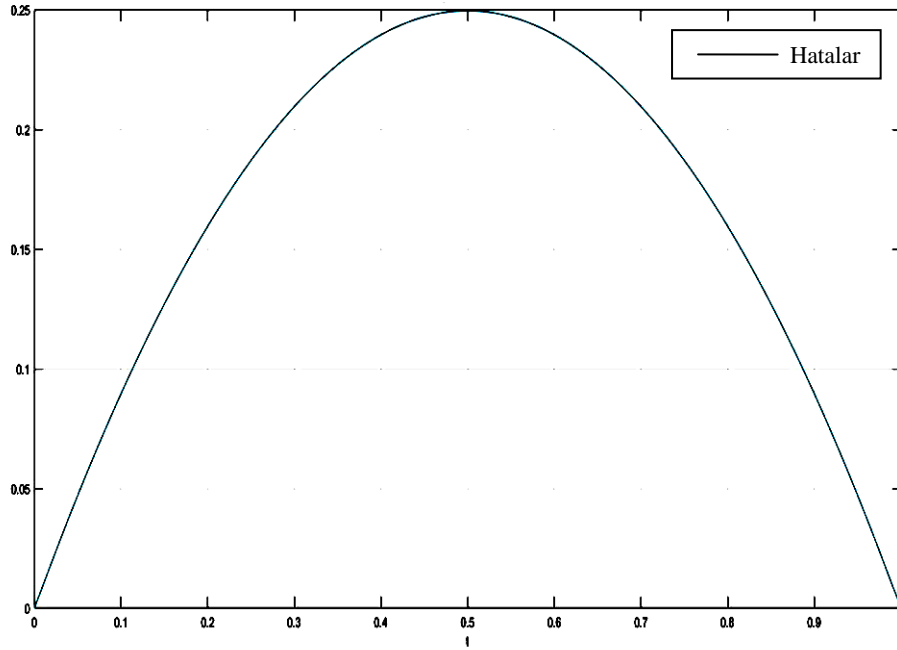
diferansiyel denklem, $y(0)=0$ başlangıç koşulu ile verilsin. Bu denklemin yaklaşık çözümünü kesirli fark yöntemiyle $h=0.01$ ve $\alpha=0.5$ için araştıralım. Bu doğrusal kesirli diferansiyel denklemin tam çözümü ise $y(t)=t^2-t$ 'dir.

Çizelge 4.5. $h=0.01$ ve $\alpha=0.5$ için Örnek 4.1.4.'ün yaklaşık çözümleri, tam çözümleri ve hataları

t	$\alpha = 0.5$		
	Yaklaşık Çözüm	Tam Çözüm	Hatalar
0.1	-0.0004394	-0.09	0.0895
0.2	-0.0004481	-0.16	0.1595
0.3	-0.0004519	-0.21	0.2095
0.4	-0.0004542	-0.24	0.2395
0.5	-0.0004558	-0.25	0.2495
0.6	-0.0004570	-0.24	0.2395
0.7	-0.0004579	-0.21	0.2095
0.8	-0.0004586	-0.16	0.1595
0.9	-0.0004592	-0.09	0.0895
1.0	-0.0004597	0.00	0.00045



Şekil 4.5: Örnek 4.1.4.'ün $\alpha=0.5$ için yaklaşık çözümleri



Şekil 4.6. Örnek 4.1.4.'ün $\alpha=0.5$ için hataları

Benzer şekilde $h=0.01$ ve $\alpha=0.3$ için yaklaşık çözümlerini inceleyelim.

Çizelge 4.6. $h=0.01$ ve $\alpha=0.3$ için Örnek 4.1.4.'ün yaklaşık çözümleri, tam çözümleri ve hataları

$\alpha = 0.3$			
t	Yaklaşık Çözüm	Tam Çözüm	Hatalar
0.1	-0.5207807	-0.09	0.4307
0.2	-0.4235565	-0.16	0.2635
0.3	-0.3508209	-0.21	0.1408
0.4	-0.2931494	-0.24	0.0531
0.5	-0.2472796	-0.25	0.0027
0.6	-0.2119103	-0.24	0.0280
0.7	-0.1867063	-0.21	0.0232
0.8	-0.1720465	-0.16	0.0120
0.9	-0.1691989	-0.09	0.0791
1.0	-0.1820274	0.00	0.1820

Örnek 4.1.5: (Irandoost S., 2011) Doğrusal olmayan kesirli,

$$D^\alpha y(t) = \frac{40320}{\Gamma(9-\alpha)} t^{8-\alpha} - 3 \frac{\Gamma\left(\frac{5+\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5-\alpha}{2}\right)} t^{4-\frac{\alpha}{2}} + \frac{9}{4} \Gamma(\alpha + 1) + \left(\frac{3}{2} t^{\frac{\alpha}{2}} - t^4\right)^3 - y^{\frac{3}{2}}(t)$$

diferansiyel denklemi, $y(0)=0$ başlangıç koşulu ile verilsin. Bu denklemin yaklaşık çözümünü kesirli fark yöntemi ile $h=0.01$, $\alpha=0.2$ ve $\alpha=0.5$ için araştıralım. Bu doğrusal olmayan kesirli diferansiyel denklemin tam çözümü,

$$y(t) = t^8 - 3t^{4+\frac{\alpha}{2}} + \frac{9}{4}t^\alpha \text{ 'dır.}$$

Çizelge 4.7. $h=0.01$ ve $\alpha=0.2$ için Örnek 4.1.5.'in yaklaşık çözümleri, tam çözümleri ve hataları

$\alpha = 0.2$			
t	Yaklaşık Çözüm	Tam Çözüm	Hatalar
0.1	1.414389	1.419416	5.029×10^{-3}
0.2	1.624381	1.626670	2.289×10^{-3}
0.3	1.745556	1.747029	1.473×10^{-3}
0.4	1.802753	1.803824	1.071×10^{-3}
0.5	1.786804	1.787701	8.970×10^{-4}
0.6	1.678080	1.678839	7.590×10^{-4}
0.7	1.457012	1.457674	6.620×10^{-4}
0.8	1.117227	1.117881	6.540×10^{-4}
0.9	0.685292	0.685880	5.880×10^{-4}
1.0	0.249488	0.250000	5.120×10^{-4}

Çizelge 4.8. $h=0.01$ ve $\alpha=0.5$ için Örnek 4.1.5.'in yaklaşık çözümleri, tam çözümleri ve hataları

t	$\alpha = 0.5$		
	Yaklaşık Çözüm	Tam Çözüm	Hatalar
0.1	0.700025	1.711244	0.011319
0.2	0.997030	1.003023	5.999×10^{-3}
0.3	1.210491	1.214457	3.966×10^{-3}
0.4	1.359608	1.362604	2.996×10^{-3}
0.5	1.434719	1.437228	2.509×10^{-3}
0.6	1.434719	1.417451	2.293×10^{-3}
0.7	1.457012	1.281281	2.213×10^{-3}
0.8	1.015963	1.0181062	2.143×10^{-3}
0.9	0.645971	0.647831	1.860×10^{-3}
1.0	0.248838	0.250000	1.162×10^{-3}

Örnek 4.1.6 : (Rostamy D., Alipour M., 2013) Doğrusal kesirli,

$$D^{1.5}y(t) = t^{1.5} \cdot y(t) + 4 \sqrt{\frac{t}{\pi}} - t^{3.5}$$

diferansiyel denklem, $y(0)=0$ başlangıç koşuluyla verilsin. Bu denklemin yaklaşık çözümlerini kesirli fark yöntemiyle $h=0.1$ ve $\alpha=1.5$ için araştıralım. Bu doğrusal kesirli diferansiyel denklemin tam çözümü ise $y(t)=t^2$ dir.

Çizelge 4.9. $h=0.1$ ve $\alpha=1.5$ için Örnek 4.1.6.'nın yaklaşık çözümleri, tam çözümleri ve hataları

t	$\alpha = 1.5$		
	Yaklaşık Çözüm	Tam Çözüm	Hatalar
0.1	0.00999999	0.01	2.08167×10^{-17}
0.2	0.03999999	0.04	2.01228×10^{-17}
0.3	0.08999999	0.09	5.96745×10^{-16}
0.4	0.15999999	0.16	9.9201×10^{-16}
0.5	0.24999999	0.25	1.9984×10^{-15}
0.6	0.35999999	0.36	2.9976×10^{-15}
0.7	0.48999999	0.49	2.9976×10^{-15}
0.8	0.63999999	0.64	3.9968×10^{-15}
0.9	0.80999999	0.81	6.10623×10^{-15}
1.0	0.99999999	1.00	6.99441×10^{-15}

Örnek 4.1.7 : (Yang C., Hou J., 2013) Doğrusal kesirli

$$D^2 y(t) + D^{1.5} y(t) + y(t) = t^2 + 2 + 4 \sqrt{\frac{t}{\pi}}$$

diferansiyel denklemi, $y(0)=0$ başlangıç koşuluyla verilsin. Bu denklemin yaklaşık çözümlerini kesirli fark yöntemi ile $h=0.1$, $\alpha_1=1.5$ ve $\alpha_2=2$ için araştıralım. Bu doğrusal kesirli diferansiyel denklemin tam çözümü $y(t)=t^2$ dir.

Çizelge 4.10. $h=0.1$ ve $\alpha_1=1.5$, $\alpha_2=2$ için Örnek 4.1.7.'nin yaklaşık çözümleri, tam çözümleri ve hataları

t	$\alpha_1 = 1.5 \quad \alpha_2 = 2$		
	Yaklaşık Çözüm	Tam Çözüm	Hatalar
0.1	0.010000000000000325	0.01	3.20056×10^{-15}
0.2	0.040000000000000937	0.04	9.29812×10^{-15}
0.3	0.090000000000001489	0.09	1.48076×10^{-14}
0.4	0.160000000000001902	0.16	1.89848×10^{-14}
0.5	0.250000000000002354	0.25	2.29816×10^{-14}
0.6	0.360000000000002824	0.36	2.80331×10^{-14}
0.7	0.490000000000003320	0.49	3.30291×10^{-14}
0.8	0.640000000000003820	0.64	3.79696×10^{-14}
0.9	0.810000000000004320	0.81	4.29656×10^{-14}
1.0	1.000000000000004860	1.00	3.9968×10^{-14}

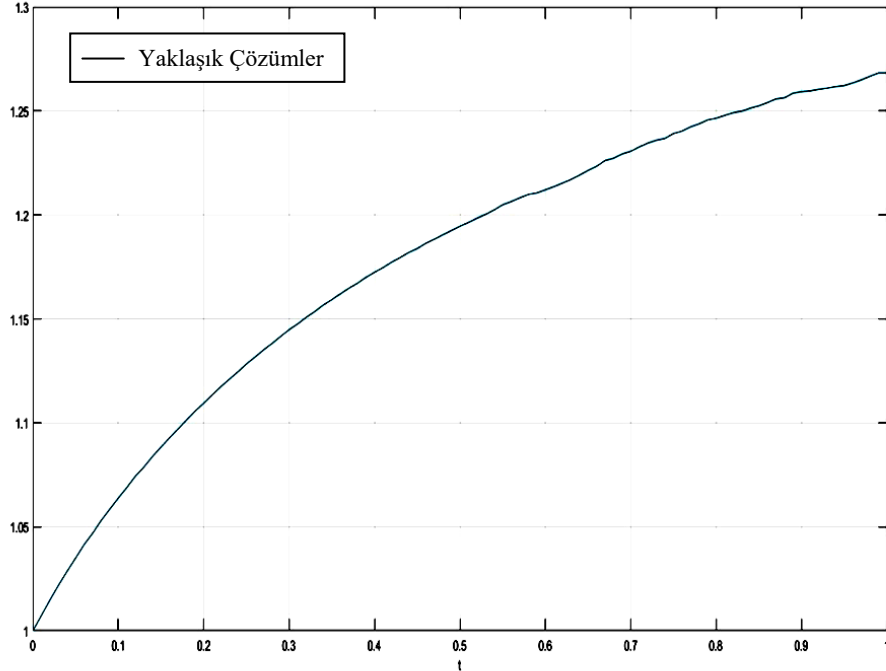
Örnek 4.1.8: Doğrusal kesirli,

$$D^\alpha y(t) + y(t) = \operatorname{erf}(\sqrt{t}) \cdot e^t + e^t$$

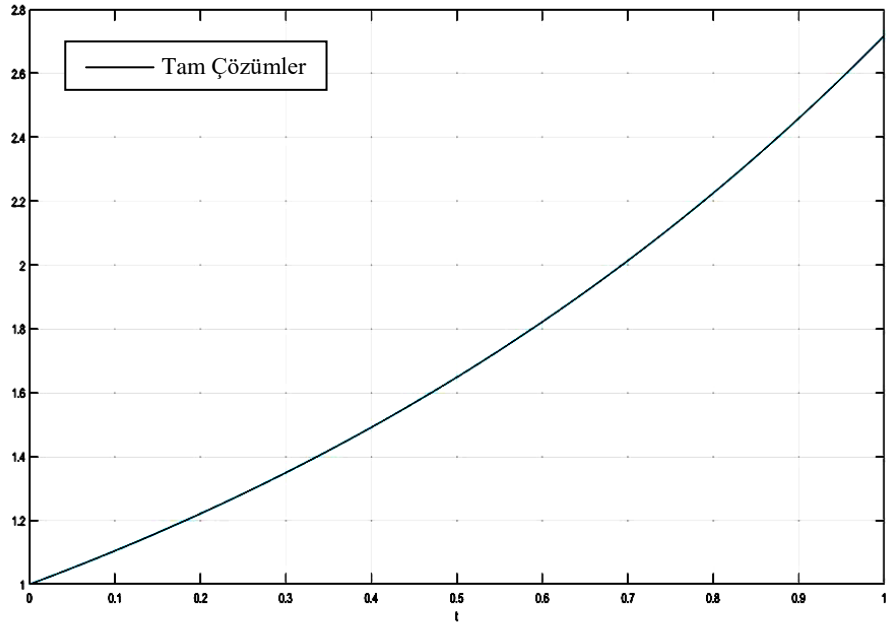
diferansiyel denklemi, $y(0)=1$ başlangıç koşulu ile verilsin. Bu denklemin yaklaşık çözümlerini kesirli fark yöntemi ile $h=0.01$ ve $\alpha=2.5$ için araştıralım. Bu doğrusal kesirli diferansiyel denklemin tam çözümü $y(t)=e^t$ dir.

Çizelge 4.11. $h=0.01$ ve $\alpha=2.5$ için Örnek 4.1.8.'in yaklaşık çözümleri, tam çözümleri ve hataları

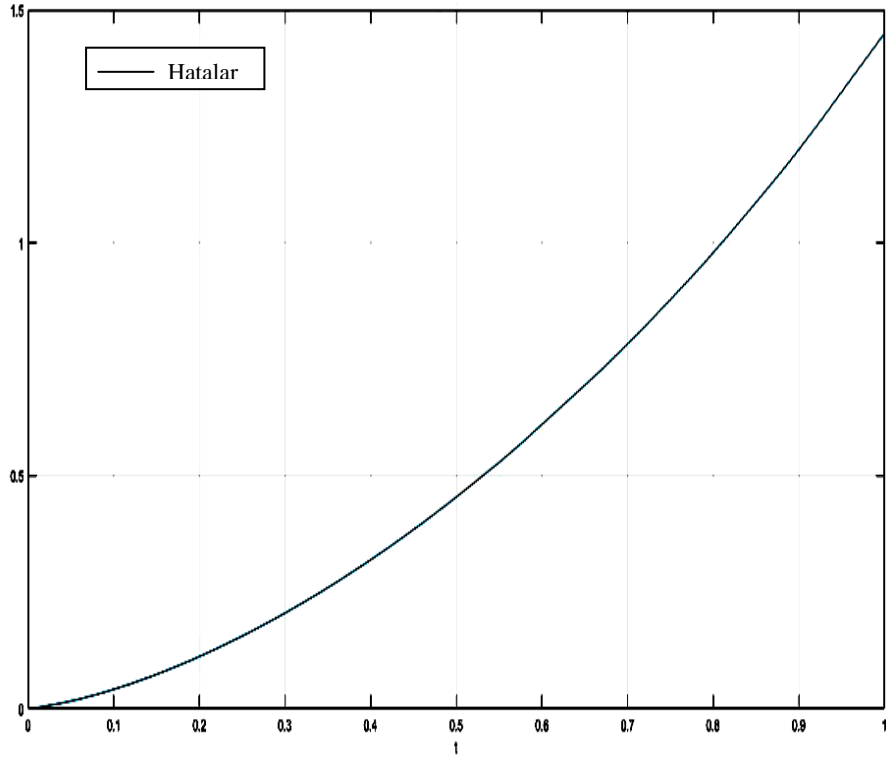
t	$\alpha = 2.5$		
	Yaklaşık Çözüm	Tam Çözüm	Hatalar
0.1	1.063823961	1.10170918	0.041346957
0.2	1.109406492	1.221402758	0.976859770
0.3	1.144777908	1.394858808	0.205080900
0.4	1.172417428	1.491824698	0.319407270
0.5	1.194537586	1.648721271	0.454183685
0.6	1.212040059	1.822118800	0.610078741
0.7	1.230624454	2.013752707	0.783128253
0.8	1.246502468	2.225540928	0.979038460
0.9	1.2592922272	2.459603111	1.200310839
1.0	1.268243473	2.718281828	1.450038355



Şekil 4.7. Örnek 4.1.8.'in $\alpha =2.5$ için yaklaşık çözümleri



Şekil 4.8. Örnek 4.1.8.'in $\alpha = 2.5$ için tam çözümleri



Şekil 4.9. Örnek 4.1.8.'in $\alpha = 2.5$ için hataları

Örnek 4.1.9: Doğrusal olmayan kesirli

$$D^\alpha y(t) = y^2(t) - y(t)$$

diferansiyel denklemi, $y(0)=1/2$ başlangıç koşuluyla verilsin. Bu denklemin yaklaşık çözümlerini kesirli fark yöntemi ile $h=0.01$ ve farklı aralıktaki α değerleri için araştıralım. Bu doğrusal kesirli diferansiyel denklemin tam çözümü,

$$y(t) = \frac{e^{-t}}{e^{-t}+1} \text{ dir.}$$

Çizelge 4.12. $h=0.01$ ve $\alpha=0.5$ için Örnek 4.1.9.'un yaklaşık çözümleri, tam çözümleri ve hataları

t	$\alpha = 0.5$		
	Yaklaşık Çözüm	Tam Çözüm	Hatalar
0.1	0.9886402487	0.4750208125	0.3761567876
0.2	0.1471436896	0.4501660027	0.3030223131
0.3	0.1880455411	0.4255574831	0.2375119420
0.4	0.2255780084	0.4013123399	0.1757343315
0.5	0.2613366878	0.3775406687	0.1162039809
0.6	0.2962742878	0.3543436938	0.0580694060
0.7	0.3312424005	0.3318122278	0.0005698273
0.8	0.3674352113	0.3100255189	0.0574096924
0.9	0.4075138713	0.2890504973	0.1184633740
1.0	0.4649227966	0.2689414214	0.1959813752

Çizelge 4.13. $h=0.01$ ve $\alpha=0.8$ için Örnek 4.1.9.'un yaklaşık çözümleri, tam çözümleri ve hataları

t	$\alpha = 0.8$		
	Yaklaşık Çözüm	Tam Çözüm	Hatalar
0.1	0.1552200320	0.4750208125	0.3198007805
0.2	0.1973376132	0.4501660027	0.2528283895
0.3	0.2289951019	0.4255574831	0.1965623812
0.4	0.2557690599	0.4013123399	0.1455432800
0.5	0.2793859821	0.3775406687	0.0981546866
0.6	0.3004248640	0.3543436938	0.0539188298
0.7	0.3189007029	0.3318122278	0.0129115249
0.8	0.3343932199	0.3100255189	0.0243677010
0.9	0.3459419603	0.2890504973	0.0568914630
1.0	0.3504132890	0.2689414214	0.0814718676

Çizelge 4.14. $h=0.01$ ve $\alpha=1.2$ için Örnek 4.1.9.'un yaklaşık çözümleri, tam çözümleri ve hataları

t	$\alpha = 1.2$		
	Yaklaşık Çözüm	Tam Çözüm	Hatalar
0.1	0.02897964896	0.4750208125	0.4460411635
0.2	0.01858248871	0.4501660027	0.4315835140
0.3	0.07995082950	0.4255574831	0.4175624008
0.4	-0.0258893327	0.4013123399	0.4039012732
0.5	-0.0130301491	0.3775406687	0.3905708178
0.6	-0.0232228052	0.3543436938	0.3775664990
0.7	-0.0330862583	0.3318122278	0.3648984861
0.8	-0.0425595797	0.3100255189	0.3525850986
0.9	-0.0515960741	0.2890504973	0.3406465714
1.0	-0.0601452223	0.2689414214	0.3290866437

Çizelge 4.15. $h=0.01$ ve $\alpha=1.5$ için Örnek 4.1.9.'un yaklaşık çözümleri, tam çözümleri ve hataları

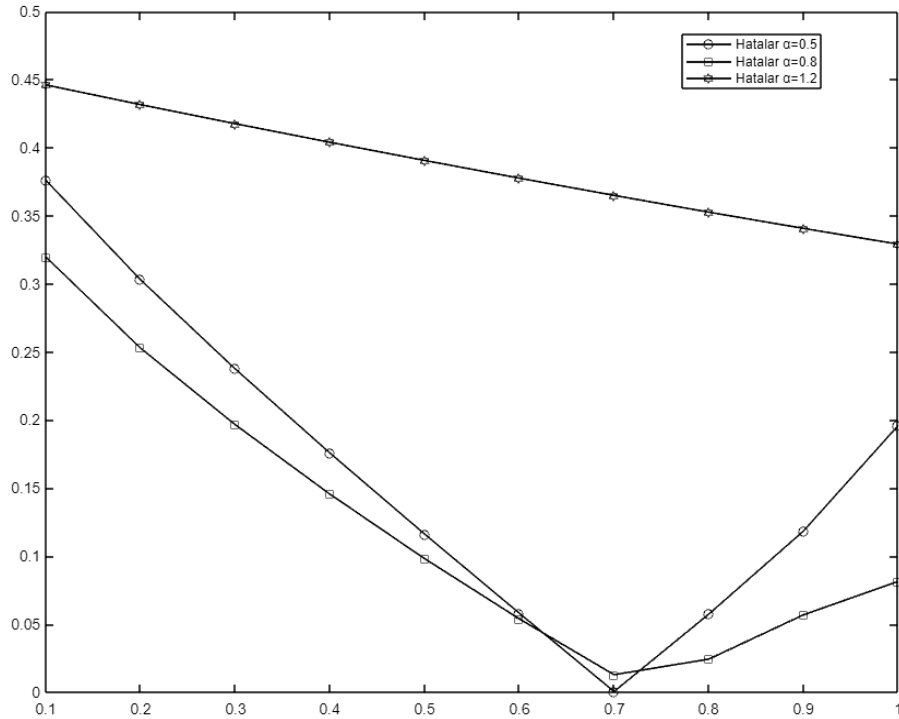
t	$\alpha = 1.5$		
	Yaklaşık Çözüm	Tam Çözüm	Hatalar
0.1	-0.003373717777	0.4750208125	0.4783945303
0.2	-0.008858637617	0.4501660027	0.4590246403
0.3	-0.01563894526	0.4255574831	0.4411964284
0.4	-0.02326659626	0.4013123399	0.4245789362
0.5	-0.03141070117	0.3775406687	0.4089513699
0.6	-0.03980313915	0.3543436938	0.3941468330
0.7	-0.04822128013	0.3318122278	0.3800335079
0.8	-0.05648170219	0.3100255189	0.3665072211
0.9	-0.064443526101	0.2890504973	0.3534857583
1.0	-0.07196430219	0.2689414214	0.3409057236

Çizelge 4.16. $h=0.01$ ve $\alpha=2.5$ için Örnek 4.1.9.'un yaklaşık çözümleri, tam çözümleri ve hataları

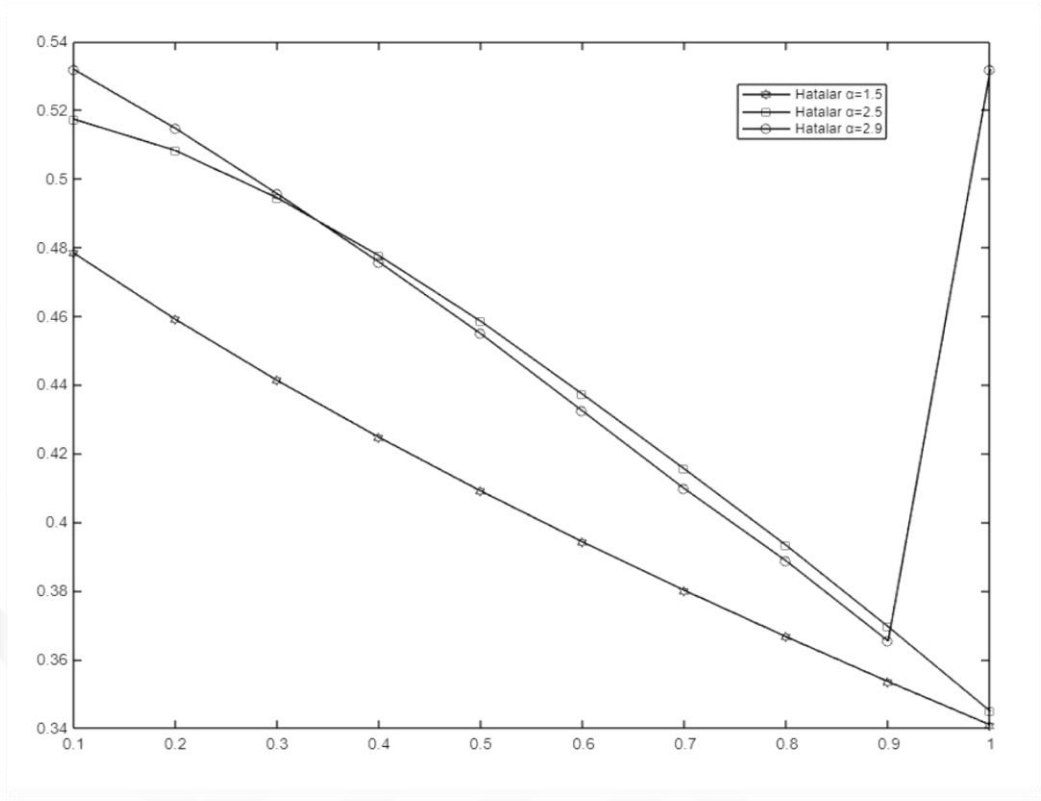
t	$\alpha = 2.5$		
	Yaklaşık Çözüm	Tam Çözüm	Hatalar
0.1	-0.04234441654	0.4750208125	0.5173652290
0.2	-0.05800953642	0.4501660027	0.5081755391
0.3	-0.06884732767	0.4255574831	0.4944048108
0.4	-0.07621938056	0.4013123399	0.4775317205
0.5	-0.08083469146	0.3775406687	0.4583753602
0.6	-0.08285134234	0.3543436938	0.4371950361
0.7	-0.08361588490	0.3318122278	0.4154281127
0.8	-0.08314612014	0.3100255189	0.3931716390
0.9	-0.08041406335	0.2890504973	0.3694645606
1.0	-0.07595436768	0.2689414214	0.3448957891

Çizelge 4.17. $h=0.01$ ve $\alpha=2.9$ için Örnek 4.1.9.'un yaklaşık çözümleri, tam çözümleri ve hataları

t	$\alpha = 2.9$		
	Yaklaşık Çözüm	Tam Çözüm	Hatalar
0.1	-0.05685339062	0.4750208125	0.5318742031
0.2	-0.06448731678	0.4501660027	0.5146533195
0.3	-0.07003394923	0.4255574831	0.4955914323
0.4	-0.07435070709	0.4013123399	0.4756630470
0.5	-0.07721376532	0.3775406687	0.4547544340
0.6	-0.07794314488	0.3543436938	0.4322868387
0.7	-0.07784723847	0.3318122278	0.4096594663
0.8	-0.07857644447	0.3100255189	0.3886019634
0.9	-0.07625868130	0.2890504973	0.3653091786
1.0	-0.05685339062	0.4750208125	0.5318742031



Şekil 4.10. Örnek 4.1.9.'un $\alpha=0.5$, $\alpha=0.8$ ve $\alpha=1.2$ için hataları



Şekil 4.11. Örnek 4.1.9.'un $\alpha=1.5$, $\alpha=2.5$ ve $\alpha=2.9$ için hataları

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada kesirli mertebeden lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümleri için kesirli fark yöntemi incelenmiştir. Caputo Kesirli Türevi doğrusal ve doğrusal olmayan kesirli diferansiyel denklemlere uygulanmıştır.

Birinci bölümde kesirli türevin tarihçesi hakkında genel bilgi, ikinci bölümde kesirli mertebeden türev tanımları ile ilgili kaynak özetleri verilmiştir. Üçüncü bölümde yöntem analizi yapılmıştır. $0 < \alpha < 1$ aralığı, $1 < \alpha < 2$ aralığı ve $2 < \alpha < 3$ aralığı için yöntem tek tek düzenlenmiştir. Dördüncü bölümde ise doğrusal ve doğrusal olmayan kesirli diferansiyel denklemler için örnekler incelenmiştir. Bu amaçla örneklerde, özel denklemler de kullanılmıştır. Farklı α değerleri için çözümlerde kullanılan bileşik yamuk kuralı ve Caputo türev tanımı kullanılarak ve sonlu fark formülleri kullanılarak elde edilmiştir. Farklı α aralıkları için yöntem düzenlenmiştir. Yöntemin kullanılabilirliğini göstermek için farklı α ve h değerleri için yaklaşık çözümler ve farklı α ve h değerleri için tam çözümler elde edilmiş ve hatalar bulunmuştur. Elde edilen yaklaşık çözümler, tam çözümler ve hatalar, çizelgeler ve grafiklerle değerlendirilmiştir. Hassasiyeti yüksek çözümler için Maple ve Matlab bilgisayar programlarından yararlanılmıştır.

Önerilen yöntemin bu tip denklemlerin sayısal çözümlerinin bulunmasında güçlü ve etkili olduğu gösterilmiştir. Yöntemin çözümleri, kesin çözümlerle ve uygulamalı matematikteki diğer yöntemlerle ve çözümlerle karşılaştırılabilir. Bu yöntemin uygulamalı matematikte farklı modellere karşı gelen denklem sistemlerine de uygulanabileceği düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

- Abdulaziz O. , Hashim I. , Momani S. , Solving systems of fractional differential equations by homotopy- perturbation method, Phys. Lett., Vol. 372, 2008, p.p. 451-459.
- Agrawal O.P. , A general formulation and solution scheme for fractional optimal control problems, Nonlinear Dyn., Vol. 38, 2004, p.p. 323-337.
- Albadarneh R.B. , Shawagfeh N.T. , Abo Hammour Z.S. , General (n+1)-Explicit Finite Difference Formulas with Proof, Applied Mathematical Sciences, Vol. 6, No. 20, 2012, p.p. 995–1009.
- Alipour M., Rostamy D., Solving nonlinear fractional differential equations by bernstein polynomials operational matrices, J. Math. Comput. Sci., 5 (2012), 185{196.
- Burden R.L., J. Douglas Faires. Numerical Analysis. 3th ed., PWS Publishers, USA, 1986.
- Caputo M., Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent II, Geophys. J. Royal astr. Soc., Vol. 13, 1967, p.p. 529-539.
- Daftardar-Gejji V., Jafari H., Solving a multi-order fractional differential equation using adomian decomposition, Appl. Math. Comput., Vol. 189, 2007, p.p. 541-548.
- Diethelm K., Walz G., Numerical solution of fractional order differential equations by extrapolation, Numer. Algor., Vol. 16, No. 2, 1997, p.p. 231-253.

- Duarte F.B.M., Tenreiro Machado J.A., Chaotic phenomena and fractional order dynamics in the trajectory control of redundant manipulators, *Nonlinear Dyn.* Vol. 29, No. 3, 2002, p.p. 342- 362.
- Engheta N., On fractional calculus and fractional multipoles in electromagnetism, *IEEE T. Antenn. Propag.* Vol. 44, 1996, p.p. 554-566.
- Ga.ychuk V., Datsko B., Meleshko V., Mathematical modeling of time fractional reaction diffusion systems, *J. Comput. Appl. Math.*, Vol. 220, 2008, p.p. 215-225.
- Hashim I., Abdulaziz O., Momani S., Homotopy analysis method for fractional IVPs, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* Vol. 14, 2009, p.p. 674-684.
- Keskin Y., Karaoglu O., Servi S., Oturanc G., The approximate solution of high-order linear fractional differential equations with variable coefficients in terms of generalized Taylor polynomials, *Math. Comput. Appl.*, 16 (2011), 617-629.
- Magin R.L., Fractional calculus models of complex dynamics in biological tissues, *Comput. Math. Appl.*, Vol. 59, 2010, p.p. 1586-1593.
- Mainardi F., Fractional calculus: some basic problems in continuum and statistical mechanics, *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics.*, Springer-Verlag, New York, 1997, p.p. 291-348.
- Mathews J.H., Fink K.K., *Numerical Methods Using Matlab.* 4th ed., Prentice-Hall Inc., New Jersey, 2004, p.p. 255-265.
- Meral F.C., Royston T.J., Magin R., Fractional calculus in viscoelasticity: an experimental study, *Commun. Nonl. Sci. Num. Sim.* Vol. 15, No. 1, 2010, p.p. 939-945.

Odibat Z., Momani S., Erturk V.S., Generalized differential transform method:
application to differential equations of fractional order, Appl.
Math.Comput., Vol. 197, 2008, p.p. 467-477.

Oldham K.B., Fractional differential equations in electrochemistry, Adv. Eng. Soft.,
Vol. 41, No. 2, 2010, p.p. 9-12.

Raja M. A. Z., Khan J. A., Qureshi I. M., A new stochastic approach for solution of
Riccati differential equation of fractional order, Ann Math Artif Intell. Vol.
60, 2011, p.p. 229-250.

Rehman M., Khan R. A., A numerical method for solving boundary value problems
for fractional differential equations, Applied Mathematical Modeling. Vol.
61, No. 9, 2011, p.p. 2630-2637.

Rudin W., Principles of mathematical analysis, McGraw-Hill Book Company, New
York-Toronto-London, (1953)

Salas S. L., Etgen G. j., Einar H., Calculus: one and several variables, John Wiley
and Sons, New York, (1995).

Wu G., Lee E.W.M., Fractional variational iteration method and its application,
Phys. Lett. Vol. 374, No. 1, 2010, p.p. 2506-2509.

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad :Aysun Cezayirli
Uyruk : T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi: **.**.1993 Muğla
Medeni Hali :Bekar
Telefon : 0 541 3*****
E-posta : a*****i@posta.mu.edu.tr

Eğitim

Alınan Derece	Aldığı Kurum/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Lise	Muğla Turgut Reis Lisesi	2011
Lisans	Hacettepe Üniversitesi	2016

Yabancı Dil(ler)

Dil (İngilizce, vs)	Başlangıç	Orta	İleri
Yazma		X	
Konuşma	X		
Anlama	X		
Okuma		X	

Bilimsel Faaliyetler

1. XIII. Fen Bilimleri Araştırma E-Sempozyumu, Muğla, 24 Aralık 2021
2. Uluslararası Bilimsel Gelişmeler Kongresi-(International Congress on Scientific Advances-ICONSAD'21)- Online, 21-24 Aralık 2021