

T.C.  
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BİR SINIF EKSİK TAHRİKLİ DOĞRUSAL  
OLMAYAN SİSTEMİN KONTROLÜ İÇİN  
KOORDİNAT DÖNÜŞÜMÜ TABANLI AYRIK  
ZAMANLI KAYAN KIPLI KONTROLÇÜ  
TASARIMI

Serdar ÖZEN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği Anabilim Dalı  
Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği Programı

Danışman  
Dr. Öğr. Üyesi Fatih ADIGÜZEL

Mart, 2024

**T.C.**  
**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**BİR SINIF EKSİK TAHRİKLİ DOĞRUSAL OLMAYAN**  
**SİSTEMİN KONTROLÜ İÇİN KOORDİNAT DÖNÜŞÜMÜ**  
**TABANLI AYRIK ZAMANLI KAYAN KIPLI KONTROLÇÜ**  
**TASARIMI**

Serdar ÖZEN tarafından hazırlanan tez çalışması 08.03.2024 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği Anabilim Dalı Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği Programı **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Dr. Öğr. Üyesi Fatih ADIGÜZEL  
Yıldız Teknik Üniversitesi  
Danışman

**Jüri Üyeleri**

Dr. Öğr. Üyesi Fatih ADIGÜZEL, Danışman  
Yıldız Teknik Üniversitesi

\_\_\_\_\_

Dr. Öğr. Üyesi Onur AKBATI, Üye  
Yıldız Teknik Üniversitesi

\_\_\_\_\_

Dr. Öğr. Üyesi Tarık Veli MUMCU, Üye  
İstanbul Üniversitesi - Cerrahpaşa

\_\_\_\_\_

Danışmanım Dr. Öğr. Üyesi Fatih ADIGÜZEL sorumluluğunda tarafımda hazırlanan BİR SINIF EKSİK TAHRİKLİ DOĞRUSAL OLMAYAN SİSTEMİN KONTROLÜ İÇİN KOORDİNAT DÖNÜŞÜMÜ TABANLI AYRIK ZAMANLI KAYAN KİPLİ KONTROLCÜ TASARIMI başlıklı çalışmada veri toplama ve veri kullanımında gerekli yasal izinleri aldığımı, diğer kaynaklardan aldığım bilgileri ana metin ve referanslarda eksiksiz gösterdiğimi, araştırma verilerine ve sonuçlarına ilişkin çarpıtma ve/veya sahtecilik yapmadığımı, çalışmam süresince bilimsel araştırma ve etik ilkelerine uygun davrandığımı beyan ederim. Beyanımın aksinin ispatı halinde her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Serdar ÖZEN

İmza

*Sevgili anneme*

*ve*

*babama*



## TEŞEKKÜR

---

Bu tezin hazırlanma aşamasında yaptığı öneri, katkı ve yardımlarından dolayı tez danışmanım Dr. Öğr. Üyesi Fatih ADIGÜZEL'e çok teşekkür ediyorum. Tüm hayatım boyunca desteklerini esirgemeyen aileme de teşekkür ederim.

Serdar ÖZEN



# İÇİNDEKİLER

<b>SİMGE LİSTESİ</b>	<b>vii</b>
<b>KISALTMA LİSTESİ</b>	<b>ix</b>
<b>ŞEKİL LİSTESİ</b>	<b>x</b>
<b>ÖZET</b>	<b>xii</b>
<b>ABSTRACT</b>	<b>xiv</b>
<b>1 GİRİŞ</b>	<b>1</b>
1.1 Tezin Amacı . . . . .	1
1.2 Literatür Özeti . . . . .	2
1.3 Hipotez . . . . .	5
<b>2 EKSİK TAHRİKLİ MEKANİK SİSTEMLERİN MODELLENMESİ</b>	<b>6</b>
2.1 Mekanik Sistemlerin Euler Lagrange Matematiği İle Tanıtılması . .	6
2.2 Eksik Tahrikli Mekanik Sistemlerin Modellenmesi . . . . .	8
<b>3 KISMİ GERİBESLEME İLE DOĞRUSALLAŞTIRMA VE AYRIK ZAMANLI KAYAN KIPLİ KONTROLÇÜ TASARIMI</b>	<b>10</b>
3.1 Kısmi Geribesleme ile Doğrusallaştırma . . . . .	10
3.2 Kayan Kipli Kontrolcü Tasarımı . . . . .	12
3.2.1 Kayan Kipli Kontrol Yaklaşımı . . . . .	12
3.2.2 Kayan Kipli Kontrolde Kayma Yüzeyi . . . . .	13
3.2.3 Kontrol Kuralı . . . . .	14
3.2.4 Kararlılık Analizi . . . . .	15
<b>4 KOORDİNAT DÖNÜŞÜMÜ</b>	<b>18</b>
4.1 Genel Koordinat Dönüşümü . . . . .	18
4.2 İki Serbestlik Dereceli Eksik Tahrikli Sistemlerde Koordinat Dönüşümü . . . . .	19
<b>5 ARABA SARKAÇ SİSTEM UYGULAMASI</b>	<b>22</b>

5.1	Araba Sarkaç Sisteminin Denklemlerinin Elde Edilmesi . . . . .	22
5.2	Koordinat Dönüşümü . . . . .	24
5.3	Araba Sarkaç Sisteminin Kayan Kipli Kontrolü . . . . .	25
5.4	Araba Sarkaç Sisteminin Benzetim Çalışmaları . . . . .	27
<b>6</b>	<b>ATALET DİSKLİ SARKAÇ SİSTEMİ UYGULAMASI</b>	<b>35</b>
6.1	Atalet Diskli Sarkaç Sisteminin Denklemlerinin Elde Edilmesi . . .	35
6.2	Koordinat Dönüşümü . . . . .	37
6.3	Atalet Diskli Sarkaç Sisteminin Kayan Kipli Kontrolü . . . . .	38
6.4	Atalet Diskli Sarkaç Sisteminin Benzetim Çalışmaları . . . . .	40
<b>7</b>	<b>SONUÇ</b>	<b>47</b>
	<b>KAYNAKÇA</b>	<b>49</b>
	<b>TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR</b>	<b>53</b>

## SİMGE LİSTESİ

---

$V$	Aday Fonksiyonu
$\mathcal{V}(h)$	Aday Lyapunov Fonksiyonu
$m_2$	Aracın Kütlesi
$\mathcal{M}$	Atalet Matrisi
$\mathcal{C}$	Coriolis Kuvveti
$\phi$	Dönüşüm Durum Vektörü
$T$	Dönüşüm Fonksiyonu
$m$	Eyleyici Sayısı
$\chi$	Genel Durum Vektörü
$\mathcal{F}$	Giriş Matrisi
$u$	Giriş Sinyali
$sgn$	İşaret Fonksiyonu
$S$	Kayma Yüzeyi
$K$	Kazanç Matrisi
$\mathcal{K}$	Kinetik Enerji
$z$	Kontrol Sinyali
$\tau$	Kuvvet Vektörü
$Q$	Konfigurasyon Vektörü
$\mathcal{L}$	Lagrange Fonksiyonu
$s(h)$	Örnekleme Kayma Yüzeyi Fonksiyonu
$h$	Örnekleme Sinyali
$\mathcal{V}$	Potansiyel Enerji
$\epsilon$	Pozitif Kontrolcü Tasarım Kazancı

$\theta$	Sarkaç Açısı
$l$	Sarkaçın Uzunluğu
$m_1$	Sarkaçın Kütlesi
$\alpha$	Sarkaç Açısı Sabiti
$q_1$	Sarkaç Açısı
$\dot{q}_1$	Sarkaç Açısız Hızı
$q_2$	Sistem Konumu
$\dot{q}_2$	Sistemin Hızı
$n$	Sistemin Serbestlik Derecesi
$C$	Tasarım Matrisi
$g$	Yerçekimi İvmesi
$\mathcal{G}$	Yerçekimi Vektörü

## KISALTMA LİSTESİ

---

ASS	Araba Sarkaç Sistemi
ADS	Atalet Diskli Sarkaç Sistemi
DC	Doğru Akım



## ŞEKİL LİSTESİ

- Şekil 5.1** Bir araba sarkaç sisteminin gösterimi . . . . . 23
- Şekil 5.2** Kararlı kılma problemi: Sarkaç açısının değişimi ve sisteminin konum değişimi,  $[q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2] = [\pi/2 - \pi/12, 0, 0, 0]$  (Benzetim 1),  $[q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2] = [\pi/2 - \pi/12, 0.1, 0, 0]$  (Benzetim 2),  $[q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2] = [0, 0.1, 0, 0]$  (Benzetim 3). . . . . 28
- Şekil 5.3** Kararlı kılma problemi: Sarkaç hızının değişimi ve sisteminin hızının değişimi,  $[q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2] = [\pi/2 - \pi/12, 0, 0, 0]$  (Benzetim 1),  $[q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2] = [\pi/2 - \pi/12, 0.1, 0, 0]$  (Benzetim 2),  $[q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2] = [0, 0.1, 0, 0]$  (Benzetim 3). . . . . 29
- Şekil 5.4** Kararlı kılma problemi: Kontrol sinyali ve  $(q_r, p_r)$  koordinatlarının değişimi,  $[q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2] = [\pi/2 - \pi/12, 0, 0, 0]$  (Benzetim 1),  $[q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2] = [\pi/2 - \pi/12, 0.1, 0, 0]$  (Benzetim 2),  $[q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2] = [0, 0.1, 0, 0]$  (Benzetim 3). . . . . 30
- Şekil 5.5** Yukarı yükseltme problemi: Sarkaç açısının değişimi ve sisteminin konum değişimi. . . . . 32
- Şekil 5.6** Yukarı yükseltme problemi: Sarkaç hızının değişimi ve sisteminin hızının değişimi. . . . . 33
- Şekil 5.7** Yukarı yükseltme problemi: Kontrol sinyali ve  $(q_r, p_r)$  koordinatlarının değişimi. . . . . 34
- Şekil 6.1** Atalet diskli sarkaç sisteminin gösterimi. . . . . 36
- Şekil 6.2** Kararlı kılma problemi: Sarkaç açısının değişimi ve disk açısının değişimi,  $[q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2] = [\pi/2 - \pi/12, 0, 0, 0]$  (Benzetim 1),  $[q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2] = [\pi/2 - \pi/12, 0.5, 0, 0]$  (Benzetim 2),  $[q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2] = [0, 0.5, 0, 0]$  (Benzetim 3). . . . . 41
- Şekil 6.3** Kararlı kılma problemi: Sarkaç hızının değişimi ve disk hızının değişimi,  $[q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2] = [\pi/2 - \pi/12, 0, 0, 0]$  (Benzetim 1),  $[q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2] = [\pi/2 - \pi/12, 0.5, 0, 0]$  (Benzetim 2),  $[q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2] = [0, 0.5, 0, 0]$  (Benzetim 3). . . . . 42
- Şekil 6.4** Kararlı kılma problemi: Kontrol sinyali ve  $(q_r, p_r)$  koordinatlarının değişimi,  $[q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2] = [\pi/2 - \pi/12, 0, 0, 0]$  (Benzetim 1),  $[q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2] = [\pi/2 - \pi/12, 0.5, 0, 0]$  (Benzetim 2),  $[q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2] = [0, 0.5, 0, 0]$  (Benzetim 3). . . . . 43

<b>Şekil 6.5</b>	Yukarı yükseltme problemi: Sarkaç açısının değişimi ve disk konum değişimi. . . . .	44
<b>Şekil 6.6</b>	Yukarı yükseltme problemi: Sarkaç hızının değişimi ve disk hızının değişimi. . . . .	45
<b>Şekil 6.7</b>	Yukarı yükseltme problemi: Kontrol sinyali ve $(q_r, p_r)$ koordinatlarının değişimi. . . . .	46



# BİR SINIF EKSİK TAHRIKLİ DOĞRUSAL OLMAYAN SİSTEMİN KONTROLÜ İÇİN KOORDİNAT DÖNÜŞÜMÜ TABANLI AYRIK ZAMANLI KAYAN KIPLI KONTROLÇÜ TASARIMI

Serdar ÖZEN

Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği Anabilim Dalı  
Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği Programı  
Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Fatih ADIGÜZEL

Bu çalışmada, bir sınıf eksik tahrikli doğrusal olmayan mekanik sistem için ayrik zamanlı koordinat dönüşümü tabanlı kayan kipli kontrol tasarımı, kararsız denge noktasının kararlılaştırılması için gerçekleştirilmektedir. Araba sarkaç sistemi ve atalet diskli sarkaç sistemi için ayrik zamanlı doğrusal olmayan kayan kipli kontrol yapısı, ayrik zamanlı doğrusal olmayan bir koordinat dönüşümüyle tasarlanmıştır. Ayriklaştırılmış sistem dinamiği literatürde oldukça fazla kullanılan ileri Euler yöntemi ile elde edilmiş ve kayan kipli kontrol yapısı öncesinde sistem kısmi geri besleme ile kısmi olarak doğrusallaştırılmıştır. Sistemin asimptotik kararlılığı uygun bir aday Lyapunov fonksiyonu ile gösterilmiştir. Literatürdeki diğer yayınlardan farklı olarak, üzerinde çalışılan sistemler için tasarlanan kayan kipli kontrolcü yapısı doğrudan ayrik zamanda elde edilmiştir. Literatürdeki birçok çalışmada, kısmi geri besleme kontrolcüsü sonrasında ortaya çıkan sistem dinamiğine doğrudan ayrik zamanlı kayan kipli kontrol yapısı uygulanmaktadır. Kısmi geri besleme sonrasında kontrol işareti, hem doğrudan sistemde aktif olarak kontrol edilebilen dinamiği hem de aktif olarak sistem dinamiğini üzerinden kontrol edilebilen eksik tahrikli sistem dinamiğini etkilemektedir. Ancak, bu çalışmada koordinat dönüşümü sonrasında sadece aktif kontrol edilen sistem dinamiğini etkileyen kontrol işareti üzerinden kayan kipli kontrolcü inşa edilmektedir. Önerilen

ayrık zamanlı koordinat dönüşümü ile bir sınıf eksik tahrikli ikinci dereceden doğrusal olmayan mekanik sistemin dinamik modeli geri beslemeli formda özel bir kaskat doğrusal olmayan sisteme dönüşmüş olmaktadır. Bahsedilen ayrık zamanlı koordinat dönüşümü ile önerilen kontrol yönteminin inşası kolaylaşmaktadır ve ileri seviyeli ayrık zamanlı kontrol yöntemlerin uygulanabilirliğini arttırmaktadır. Önerilen kontrol yapısı araba sarkaç ve atalet diskli sarkaç sistemi üzerinde çeşitli benzetim çalışmaları ile test edilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Eksik tahrikli mekanik sistemler, kayan kipli kontrol, koordinat dönüşümü, ayrık zamanlı kontrol, araba sarkaç sistemi, atalet diskli sarkaç sistemi.



## ABSTRACT

---

# DESIGN OF A DISCRETE TIME SLIDING MODE CONTROLLER BASED ON COORDINATE TRANSFORMATION FOR THE CONTROL OF A CLASS OF UNDERACTUATED NONLINEAR SYSTEM

Serdar ÖZEN

Department of Control and Automation Engineering  
Master of Science Thesis

Supervisor: Asst. Prof. Fatih ADIGÜZEL

In this study, a discrete-time coordinate transformation-based sliding mode control design is conducted for a class of underactuated nonlinear mechanical systems, aimed at stabilizing an unstable equilibrium point. The discrete-time nonlinear sliding mode control structure for the cart pendulum system and the inertial disk pendulum system has been designed with a discrete-time nonlinear coordinate transformation. The discretized system dynamics have been obtained using the widely used forward Euler method in the literature, and the system has been partially linearized with partial feedback before the sliding mode control structure. The asymptotic stability of the system is demonstrated with a suitable candidate Lyapunov function. Unlike other publications in the literature, the sliding mode control structure designed for the systems studied is obtained directly in discrete time. In many studies in the literature, a discrete-time sliding mode control structure is directly adapted to the system dynamics emerging after the partial feedback controller. After partial feedback, the control signal directly affects both the vehicle and the pendulum dynamics. However, in this study, the sliding mode controller is constructed over the control signal affecting only the vehicle dynamics after the coordinate transformation. The proposed discrete-time coordinate transformation turns the dynamic model of a second-order underactuated class of nonlinear mechanical systems into a special kind of cascaded nonlinear

system in feedback form. The construction of the proposed control method with the mentioned discrete-time coordinate transformation becomes easier and increases the applicability of advanced discrete-time control methods. The proposed control structure has been tested with various simulation studies on the cart pendulum system and the disk pendulum system.

**Keywords:** Underactuated mechanical systems, sliding mode control, coordinate transformation, discrete-time control, cart pendulum system, inertia wheel pendulum system



## 1.1 Tezin Amacı

Bu tez çalışması, ikinci mertebeden bir sınıf eksik tahrikli doğrusal olmayan sistemin kontrolü için yeni bir koordinat dönüşümü tabanlı ayrık zamanlı kayan kipli kontrolcü tasarımını ele almaktadır. Çalışmanın odak noktası, özellikle iki serbestlik derecesine ve eksik tahrikliğe sahip doğrusal olmayan sistemlerin kontrolü üzerinedir. Bu tür sistemler, araba sarkaç sistemi ve atalet diskli sarkaç sistemi gibi, mühendislik ve robotik alanlarında sıkça karşılaşılan karmaşık yapıdaki sistemlerdir. Bu sistemlerin kontrolü, esnek eklemli robotlar [1–3], mobil robotlar [4–6] ve su altı araçları [3, 7, 8] gibi birçok farklı alanda kritik öneme sahiptir.

Literatürde, bu tür sistemlerin kontrolü için çeşitli yöntemler geliştirilmiş olup, bunlar arasında pasif tabanlı kontrol, geri adımlamalı kontrol, uyarlamalı kontrol, dayanıklı kontrol, uyarlamalı bulanık kayan kipli ve hata toleranslı kontrol gibi yöntemler bulunmaktadır. Bu yöntemlerin her biri, sürekli ve ayrık zamanlı, doğrusal ve doğrusal olmayan kontrol stratejilerini kapsamaktadır. Ancak, eksik tahrikli sistemlerin kontrolünde kayan kipli kontrol yöntemi, özellikle parametrik ve dış bozuculara karşı gösterdiği dayanıklılık nedeniyle dikkat çekmektedir. Bu yöntemlerin çoğu sürekli zamanda tasarlanmış olup, ayrık zamanlı sistemler için de uyarlama gerektirmektedir.

Tez çalışmasında, ilk olarak araba sarkaç sistemi ve devamında da atalet diskli sarkaç için ayrık zamanlı doğrusal olmayan kayan kipli kontrol yapısının geliştirilmesi ele alınmaktadır. Bu yapı, ileri Euler yöntemi ile elde edilen ayrıklaştırılmış sistem dinamiği ve kısmi geri besleme ile kısmi olarak doğrusallaştırılmış sistem üzerine kurulmuştur. Ayrık zamanlı kontrolcü tasarımı, sürekli zamanlı kontrolcülerin aksine, mikrodenetleyici veya bilgisayar tabanlı uygulamalarda daha uygundur ve çatırdama problemini azaltma potansiyeline sahiptir. Bu yaklaşım, kontrol sinyallerinin hem araç ve disk hem de

sarkaç dinamiğini etkilemesini sağlamak ve bu sayede daha etkili bir kontrol mekanizması sunmaktadır.

Ayrıca, [9, 10] çalışmalarında, kısmi geri besleme kontrolcüsü sonrasında ortaya çıkan sistem dinamiğine doğrudan ayrık zamanlı kayan kipli kontrol yapısı uygulanmaktadır. Kısmi geri besleme sonrasında kontrol işareti doğrudan hem araç hem de sarkaç dinamiğini etkilemektedir. Ancak, bu çalışmada koordinat dönüşümü sonrasında sadece araç dinamiğini etkileyen kontrol işareti üzerinden kayan kipli kontrolcü inşa edilmektedir. Önerilen ayrık zamanlı koordinat dönüşümü ile eksik tahrikli araba sarkaç sistemi dinamik modeli geri beslemeli formda özel bir kaskat doğrusal olmayan sisteme dönüşmüş olmaktadır. Bu dönüşüm, kontrol yönteminin inşasını kolaylaştırmakta ve ileri seviyeli ayrık zamanlı kontrol yöntemlerinin uygulanabilirliğini arttırmaktadır. Sistemin asimptotik kararlılığı, uygun bir aday Lyapunov fonksiyonu ile ispatlanmış ve bu kontrolcünün etkinliğini ve güvenilirliğini arttırmaktadır.

Çalışmanın ilerleyen bölümlerinde, araba sarkaç sisteminin ve atalet diskli sarkaç sisteminin Euler-Lagrangian formülasyonu ile sistem dinamiğinin elde edilmesi, Euler yaklaşıklığı ile elde edilmiş sistem dinamiğinin türetilmesi, ayrık zamanlı kısmi geri beslemeli kontrolcü tasarımı ve ayrık zamanlı koordinat dönüşümü ile kayan kipli kontrolcü yapısının detaylı bir şekilde incelenmesi yer almaktadır. Bu bölümler, teorik çalışmaları pratik uygulamalarla bütünleştirmeyi amaçlayan sayısal benzetim çalışmaları ile desteklenmektedir. Sonuç bölümünde ise, çalışmanın bulguları özetlenmekte ve gelecekteki akademik çalışmalar için öneriler sunulmaktadır. Bu tez çalışması, kontrol sistemleri alanında önemli bir katkı sunmakta ve eksik tahrikli doğrusal olmayan sistemlerin kontrolü konusunda yeni perspektifler açmaktadır.

## 1.2 Literatür Özeti

Eksik tahrikli sistemlerin incelenmesi, dinamik sistemler teorisinin ve kontrol mühendisliğinin karmaşık yönlerini kapsamaktadır. Bu sistemlerin analizi için daha karmaşık matematiksel modellerin ve kontrol stratejilerinin geliştirilmesi gerekmektedir. Sistemlerin doğrusal olmayan dinamiklerinin anlaşılması ve modellenmesi, bu alanda yapılan araştırmaların önemli bir noktası olduğu literatürde de çokça görülmektedir.

Araba sarkaç sistemi (ASS) ve atalet diskli sarkaç sistemi (ADS) iki serbestlik derecesine sahip eksik tahrikli doğrusal olmayan ve literatürde oldukça fazla ilgi görmüş olan sistemlerdir. Bu sistemlerde üzerinde fazlaca çalışmalar yapılmış

olması, araba sarkaç sisteminin, esnek eklemlı robotlar [11], mobil robotlar ve su altı araçlar [6, 12] gibi sistemlerin tasarlanması sürecinde alt sistemler olarak kullanılarak test edilebilir önemli sistemler olmasıdır. Diğer taraftan atalet diskli sarkaç sistemi, eksik tahrikli robot sistemlerine benzetilebilmektedir [13]. Bu sistemler, çeşitli sürekli zamanlı/ayrık zamanlı ve doğrusal/doğrusal olmayan kontrol yöntemlerinin uygulandığı sistemlerdir. Ayrıca, bu sistemler farklı yöntemlerin performansının ölçüldüğü açık problemlere sahip doğrusal olmayan sistemler olarak tanımlanmaktadır. Literatürde araba sarkaç sistemleri üzerine gerçekleştirilmiş bazı kontrol yöntemleri olarak pasiflik tabanlı kontrol [14], [15], geri adımlamalı kontrol [16], [17], [18], uyarlamalı kontrol [19], kayan kipli kontrol [20], uyarlamalı bulanık kayan kipli kontrol [21], hata toleranslı kayan kipli kontrol [22] şeklinde sıralanmaktadır. Benzer şekilde, literatürden atalet diskli sarkaç sistemine uygulanan bazı kontrol yöntemleri olarak doğrusal olmayan geri besleme tabanlı anahtarlamalı kontrol [13], pasiflik tabanlı kontrol [23, 24], sürekli zamanlı ikinci mertebeden kayan kipli kontrol [25], doğrusal olmayan yöntemler ile optimal kontrol [26], geri adımlamalı kontrol [27], dual uyarlamalı yapay sinir ağı kontrol [28], dayanıklı kontrol [29] şeklinde sıralanmaktadır. Günümüzde hızla ilerleyen robotik ve mobilite uygulamaları için bu tür karmaşık sistemlerin modellenmesi ve kontrolü, ilerleyen teknoloji ve artan ihtiyaçlarla birlikte, her geçen gün daha da önemli hale gelmektedir. Yapılan çalışmalar hem akademik araştırmalar hem de endüstriyel çalışmalar için önemli ve ilgi çekici bir alan olarak güncelliğini devam ettirmektedir.

Bu çalışmada, ikinci mertebeden bir sınıf eksik tahrikli doğrusal olmayan sistemlerin kontrolü için araba sarkaç sistemi ve atalet diskli sarkaç sistemi üzerinde kullanılan kayan kipli kontrol, kontrol teorisindeki güçlü ve esnek yöntemler arasındadır ve özellikle doğrusal olmayan ve karmaşık sistemlerde kullanılır. Bu yöntemin amacı, sistem dinamiğini önceden belirlenmiş bir kayan yüzey üzerinde sürdürmektir. Bu sayede, sistem davranışının belirli bir dinamik yol boyunca sabit tutulmasına imkan verir. Üzerinde yapılan çalışmalar neticesinde, kayan kipli kontrol teorisinin geliştirilmesi, sistemlerin daha etkili bir şekilde kontrol edilmesini sağlamıştır. Özellikle endüstriyel robotik ve otomasyon sistemlerinde bu kontrol yöntemi, geniş uygulama alanlarında sıklıkla kullanılarak yer edinmiştir.

Eksik tahrikli sistemlerin kontrolünde kayan kipli kontrol yöntemi literatürde özellikle ilgilenilmiştir [30–33], çünkü bu yöntem hem doğrusal olmayan sistemler için uygulanabilir hem de parametrik bozuculara ve dış bozuculara karşı dayanıklı bir kontrol yöntemidir. Ancak bahsedilen kontrol yöntemleri ağırlıklı olarak sürekli zamanda tasarlanmış kontrol yöntemleridir. Diğer taraftan, bu yöntemlerin uygulanmasında mikrodenetleyici veya bilgisayar kullanılmaktadır.

Ayrıca, ayrık zamanlı kayan kipli kontrolcüde sınırlı anahtarlama frekansı sayesinde ayrık zamanlı kayan kipli kontrol yöntemi, sürekli zamanlı kayan kipli kontrolcüde anahtarlama yüzeyinde kontrol işaretinin tutulmasından kaynaklanan çatırdama problemini ortadan kaldırmaktadır. Bunlar göz önünde bulundurulduğunda, kontrol yönteminin doğrudan ayrık zamanda tasarlanması daha uygun görünmektedir. Bir sınıf eksik tahrikli doğrusal olmayan mekanik sistem için ayrık zamanlı enerjinin şekillendirilmesi tabanlı kontrol [34, 35], ayrık zamanlı geri adımlamalı kontrol [27, 36] ve kararsız denge noktasında doğrusallaştırılmış sistem dinamiği ile ayrık zamanlı kayan kipli kontrol [37, 38] literatürde mevcuttur. Bu noktada belirtmelidir ki ayrık zamanlı kontrolcü tasarımı ile elde edilen kararlılık koşulları ve kontrolcü kazanç değerleri, sürekli zamanlı kontrolcü tasarımları sonrasında elde edilen kararlılık koşulları ve kontrolcü kazançları ile farklılıklar göstermektedir. Kayan kipli kontrolcü tasarımı yanlış yapılandırıldığında fazla çatırdama ve hatta kararsızlık meydana gelebilmektedir [39].

Kontrol teorisinde sıklıkla karşılaşılan kayan kipli kontrol, dayanıklılığı ve doğrusal olmayan sistemlere uyumluluğu ile ön plana çıkmaktadır. Bu yöntem, sürekli ve ayrık zamanlı versiyonlarıyla, sistem parametrelerindeki belirsizliklerle başa çıkma ve kontrol performansını optimize etme yetenekleriyle tanınmaktadır. Koordinat dönüşümleri ve sistem doğrusallaştırması, kontrol teorisinde sistemi daha yönetilebilir bir forma dönüştürmeye yardımcı olmaktadır. Özellikle, karmaşık doğrusal olmayan sistemlerde bu yaklaşımlar, kontrolcü tasarımını kolaylaştırmakta beraber ve sistem performansını da arttırmaktadır.

Bu çalışmanın ilerleyen bölümlerinde, iki serbestlik derecesine sahip eksik tahrikli doğrusal olmayan bir sistemin kontrolü ele alınmıştır. Yeni bir koordinat dönüşümüne dayalı ayrık zamanlı kayan kipli kontrolcü tasarımı benimsenmiş, araba sarkaç sistemi ve disk sarkaç sistemi dinamikleri üzerinde yoğunlaşmıştır. Her iki sistem için Euler yaklaşımı kullanılarak ayrıklaştırılmış modeller elde edilmiş ve ardından kısmi geri besleme kontrolcü yapısı detaylandırılmıştır. Takip eden aşamada, kayan kipli kontrolcü yapısı, doğrusal olmayan ayrık zamanlı bir koordinat dönüşümü ile tasarlanmıştır. Önerilen kontrol algoritmasının etkinliği ve uygulanabilirliği, benzetim çalışmaları ile gözlemlenmiştir. Bu çalışmalar, sistemin denge noktasında kararlı kılınmasını sağlayacak yöntemlerin geliştirilmesine odaklanmıştır. Bu şekilde, tez, hem araba sarkaç sistemi hem de atalet diskli sarkaç sistemi üzerine kapsamlı bir çalışma sunmakta ve bu sistemlerin dinamiklerini, yeni koordinat dönüşümleri ve ayrık zamanlı kayan kipli kontrolcü tasarımları ile derinlemesine analiz etmektedir. Böylece, eksik tahrikli doğrusal olmayan sistemlerin kontrolüne yönelik literatürde bir katkı sağlamakta ve bu alanın gelecekteki araştırmalarına yön vermeye çalışmaktadır.

### 1.3 Hipotez

Bu çalışma, iki serbestlik derecesine sahip bir sınıf eksik tahrikli doğrusal olmayan sistem olan araba sarkaç sistemi ve atalet diskli sarkaç sistemi üzerine yoğunlaşırken, her iki sistemin de karmaşık dinamikleri ve çeşitli kontrol stratejilerinin uygulanabilirliği açısından sağladığı önemli araştırma alanlarına odaklanmaktadır. Bu sistemler, kontrol teorisinde yaygın olarak kullanılan modellerdir ve özellikle robotik ve otomatik kontrol sistemleri gibi alanlarda etkili bir şekilde kullanılmıştır. Her ikisi de, dinamik dengesi ve kontrol stratejileri açısından benzersiz zorluklar sunarak, doğrusal olmayan kontrol teorisinde önemli bir yer tutmaktadır. Her iki sistem için de yeni bir koordinat dönüşümüne dayalı ayrık zamanlı kayan kipli kontrolcü tasarımı sunar. Bu yenilikçi yaklaşım, sistemlerin kısmi doğrusallaştırılmasını sağlayarak, kontrolcülerin daha etkin bir şekilde tasarlanmasına imkan tanımaktadır. Özellikle, ayrık zamanlı kontrolcülerin geliştirilmesinde bu yöntem, mevcut kontrol stratejilerinin sınırlarını zorlayarak önemli bir adım temsil etmektedir.

Çalışmanın bir diğer önemli noktası, her iki sistemin ayrık zamanlı kontrolünde sürekli zamanlı kontrol yöntemlerine kıyasla mikrodenetleyici ve bilgisayar tabanlı uygulamalar için sunulan daha pratik ve etkili çözümlerdir. Ayrık zamanlı kayan kipli kontrol yöntemi, çatırdama sorununu azaltır ve daha kararlı kontrol sağlar. Bu çalışma kapsamında, ileri Euler yöntemiyle ayrıklaştırılan sistem dinamiğine dayalı olarak her iki sistem için ayrık zamanlı kayan kipli kontrolcü yapısı geliştirilmiştir.

Sonuç olarak, bu tez, eksik tahrikli doğrusal olmayan sistemlerin kontrolüne yönelik literatüre yeni bir bakış açısı getirmekte ve gelecek çalışmalar için sağlam bir temel oluşturmaktadır. Araba sarkaç ve atalet diskli sarkaç sistemlerinin dinamiklerinin bu yeni koordinat dönüşümleriyle analizi, mevcut yaklaşımları zenginleştirmekte ve daha etkili kontrol stratejilerinin geliştirilmesine imkan tanımaktadır. Bu çalışma, her iki sistem için ayrıntılı dinamik analiz, kontrol tasarımı ve sayısal benzetim çalışmalarını kapsamlı bir şekilde içermektedir.

# 2

## EKSİK TAHRIKLİ MEKANİK SİSTEMLERİN MODELLENMESİ

---

### 2.1 Mekanik Sistemlerin Euler Lagrange Matematiği İle Tanıtılması

Eksik tahrikli mekanik sistemler, serbestlik dereceleri ile karşılaştırıldığında daha az kontrol girişine sahip olan doğrusal olmayan sistemler olarak tanımlanmaktadır. Bu sistemlerin kullanıldığı uygulama alanları deniz, hava ve uzay araçları, hareketli robotlar ve robotik manipülatörler gibi çeşitli alanları kapsamaktadır [40].

Eksik tahrikli mekanik sistemlerin modellenmesi için Euler-Lagrange yöntemi, bu tür sistemlerde dinamik davranışlarının gözlemlenebilmesi için kullanılan araçlardan biridir. Bu yöntem, sistemin enerji fonksiyonunu (Lagrangian) tanımlayarak ve bu fonksiyonun varyasyonunu hesaplaması sonucunda oluşmaktadır. Elde edilen Euler-Lagrange denklemleri, sistemin nasıl hareket edeceğini ifade etmektedir[41].

Bu bölümde, Euler-Lagrange denklemlerinin kullanımıyla mekanik sistemlerde hareket denklemlerinin nasıl türetildiği açıklanmaktadır. Sistemlerin hareket denklemleri, Euler-Lagrange denklemleri sayesinde, sistemin toplam enerji profiline bakılarak elde edilmektedir. Basit mekanik sistemler için, Lagrange fonksiyonu kinetik ve potansiyel enerjiler arasındaki fark olarak (pozitif yarı tanımlı bir şekilde) ifade edilmektedir. Lagrange fonksiyonu nasıl ifade edildiği aşağıdaki denklemle gösterilmiştir:

$$\mathcal{L} = K(q, \dot{q}) - V(q) = \frac{1}{2} \dot{q}^T \mathcal{M}(q) \dot{q} - V(q). \quad (2.1)$$

Burada,  $q = (q_1, q_2, q_3, \dots, q_n) \in Q$ , ifadesi, sistemin n boyutlu konfigürasyon manifoldu ( $Q$ ) içindeki serbestlik derecesini temsil eden vektörünü ifade etmektedir.  $K(q, \dot{q})$  mekanik yapının kinetik enerjisini ifade eden fonksiyon,

$V(q)$  mekanik yapının potansiyel enerjisi ve  $\mathcal{M}(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  atalet matrisi olarak tanımlanmaktadır. Bu bağlamda, mekanik sistemin hareket denklemlerini türetmek için Euler-Lagrange denklemleri şu şekilde formüle edilmektedir:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = \tau_i, \quad i = \{1, 2, 3, \dots, n\}. \quad (2.2)$$

Denklem (2.2) içerisinde  $\tau \in \mathbb{R}^n$  terimi, sistem üzerine etki eden kontrol girişlerini, ya da başka bir deyişle, sisteme dışarıdan uygulanan girişleri temsil etmektedir. Bu  $\tau$  vektörü, genellikle genelleştirilmiş kuvvet vektörü olarak adlandırılır. Bu tanımlamalara dayanarak, mekanik kontrol sisteminin matris formülasyonu aşağıda sunulmuştur:

$$\mathcal{M}(q)\ddot{q} + \mathcal{C}(q, \dot{q})\dot{q} + \mathcal{G}(q) = \mathcal{F}(\tau). \quad (2.3)$$

Denklem (2.3)'te,  $\mathcal{M}(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  atalet matrisini ifade etmektedir.  $\mathcal{C}(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ise, Coriolis ve merkezci kuvvetlerini ifade eden matrisi,  $\mathcal{G}(q) \in \mathbb{R}^n$  vektörü ise yerçekimini gösteren vektörü temsil etmektedir. Burada,  $\tau$  terimi  $m$  boyutunda kontrol girişlerini,  $\mathcal{F} \in \mathbb{R}^{n \times m}$   $m \leq n$ , ise giriş matrisini belirtmektedir.  $\mathcal{M}$  ve  $\mathcal{C}$  matrisleri arasında,  $\dot{\mathcal{M}}(q) - 2\mathcal{C}(q, \dot{q})$  matrisinin ters simetrik yapıda olması nedeniyle kaynaklanmış bir bağıntı bulunmaktadır. Diğer bir ifadeyle,  $\mathcal{M}$  matrisi simetrik olduğundan  $\dot{\mathcal{M}}(q) = \mathcal{C}(q, \dot{q}) + \mathcal{C}^T(q, \dot{q})$  ilişkisi geçerlidir. Bir diğer husus da  $\mathcal{M}(q)$ 'nin en küçük özdeğeri  $\lambda_1$ , en büyük özdeğeri  $\lambda_2$  ise,  $I_{n \times n}$ ,  $n \times n$  boyutunda bir birim matris olacak şekilde,

$$\lambda_1 I_{n \times n} \leq \mathcal{M}(q) \leq \lambda_2 I_{n \times n} \quad (2.4)$$

ifadesini verilen koşul altında tüm  $q \in \mathbb{R}^n$  garanti etmektedir.

Euler-Lagrange denklemleri, mekanik sistemlerin analizinde ve kontrolünde önemli bir yere sahiptir ve bu sistemlerin tasarımı ve analizinde anlaşılmasına yardımcı olmaktadır. Bu denklemler, temel olarak enerji prensibine dayanır ve Newton mekaniğine bir alternatif olarak, daha çok Lagrange mekaniği temelinde oluşturulmaktadır. Özellikle yüksek dereceli sistemlerde, hareket denklemlerini yazmak için kullanılmaktadır. Mekanik sistemlerin kontrolünde, Euler-Lagrange denklemleri sistemin davranışını ve kontrol girişlerine nasıl tepki vereceğini anlamak için kullanılmaktadır. Bu sistemlerde, tüm serbestlik dereceleri üzerinde doğrudan kontrol sağlamak mümkün olmadığından, gelişmiş matematiksel ve fiziksel modellerin kullanımı gereklidir. Bu bağlamda, Euler-Lagrange denklemleri, sistemlerin dinamik davranışlarını açıklayarak bu sistemlerin modellenmesinde temel bir rol oynar. Sistemlerin fiziksel prensiplerine dayalı dinamik modelleri sağlayarak, karmaşık sistemlerin analiz ve kontrolünde etkin çözümler sunar.

Bu durum, robotik ve otomatik kontrol sistemleri gibi alanlarda büyük önem taşımaktadır.

## 2.2 Eksik Tahrikli Mekanik Sistemlerin Modellenmesi

Eksik tahrikli doğrusal olmayan sistemlerde, bazı serbestlik dereceleri üzerinde doğrudan kontrol sağlanamaz. Bu durum, sistemin davranışını karmaşılaştırarak ve kontrol stratejilerinin geliştirilmesini zorunlu kılar. Euler-Lagrange denklemleri, bu tür sistemlerin doğrusal olmayan dinamiklerini anlamak ve modellemek için kullanılır. Özellikle, sistemdeki eksik kontrol mekanizmalarının etkilerini ve sistemin doğal dinamiklerini detaylı bir şekilde incelemek için yararlıdır. Bu yaklaşım, eksik tahrikli sistemlerin daha etkin bir şekilde kontrol edilmesine ve yönetilmesine olanak tanır. Mekanik sistemin hareket denklemlerini türetmek için oluşturulan Euler-Lagrange denklem matrisine bakıldığında, eğer (2.3) numaralı sistemde  $\mathcal{F}$  matrisinin rütbesi  $\text{rank}(\mathcal{F}) = m$  ve bu değer  $m < n = \dim(Q)$ 'den küçükse, bu durumda sistem, eksik tahrikli olarak adlandırılmaktadır. Eksik tahrikli sistemlerde, eyleyici sayısı  $m$ , sistemin serbestlik derecesi olan  $n$ 'den azdır. Bu tür sistemlerin geri besleme yoluyla tamamen doğrusallaştırılması mümkün olmamaktadır.

Eksik tahrikli mekanik sistemlerde,  $F = (0, I_m)^T$  şeklinde bir giriş matrisi belirlendiğinde,  $n - m$  adet denklem eksik tahrikli alt sistemi, kalan  $m$  adet denklem ise tahrikli alt sistemi oluşturmaktadır. Eksik tahrikli sistemlerin, tam geri besleme ile doğrusallaştırılması gerçekleşmez, ancak kısmi doğrusallaştırma mümkündür. Buna rağmen, sistem doğrusal olmayan terimler içermeye devam etmektedir.

Euler-Lagrange denklemleri eksik tahrikli sistemler için

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} = \tau_1, \quad (2.5)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} = \tau_2 \quad (2.6)$$

şeklinde iki bölüm olarak ifade edilmektedir. Burada  $\tau_1 \equiv 0$  olması, sistemin eksik tahrikli oluşunu belirtmektedir. Böyle bir durumda, denklem sistemi

$$m_{11}(q)\ddot{q}_1 + m_{12}(q)\ddot{q}_2 + h_1(q, \dot{q}) = 0, \quad (2.7)$$

$$m_{21}(q)\ddot{q}_1 + m_{22}(q)\ddot{q}_2 + h_2(q, \dot{q}) = \tau_2 \quad (2.8)$$

olarak tanımlanmaktadır. Burada  $h_1$  ve  $h_2$ , Coriolis, merkezkaç ve yerçekimi

etkilerini temsil etmektedir. Genellikle bu sistemlerde, kontrol girişi

$$\tau_2 = \alpha(q)u + \beta(q, \dot{q}) \quad (2.9)$$

şeklinde belirlenmektedir. Burada,  $\alpha(q) = h_2(q, \dot{q}) - m_{21}(q)m_{11}^{-1}(q)h_1(q, \dot{q})$  ve  $\beta(q, \dot{q}) = (m_{22}(q) - m_{21}(q)m_{11}^{-1}(q)m_{12}(q))u$  olarak ifade edilir. Bu durumda, sistem kısmen doğrusal hale getirilir ve denklemler

$$\ddot{q}_1 = -m_{11}^{-1}(q)h_1(q, \dot{q}) - m_{11}^{-1}(q)m_{12}(q)u, \quad (2.10)$$

$$\ddot{q}_2 = u \quad (2.11)$$

şeklinde düzenlenmektedir. Eğer  $z_1 = q_1, z_2 = \dot{q}_1, z_3 = q_2, z_4 = \dot{q}_2$  olarak tanımlanırsa, sistem

$$\dot{z}_1 = z_2, \quad (2.12)$$

$$\dot{z}_2 = f_0(z_1, z_3) + g_0(z_1)u, \quad (2.13)$$

$$\dot{z}_3 = z_4, \quad (2.14)$$

$$\dot{z}_4 = u \quad (2.15)$$

olarak ifade edilmektedir. Burada,  $f_0(z_1, z_3) = -m_{11}^{-1}(z_1)h_1(z_1, z_3)$  ve  $g_0(z_1) = -m_{11}^{-1}(z_1)m_{12}(z_1)$  olarak tanımlanır. Bu ifadelerle, sistemin diferansiyel denklemleri birinci türev seviyesinde elde edilir. Sistemde,  $u$  giriş sinyali hem  $(z_1, z_2)$  alt sistemine hem de  $(z_3, z_4)$  alt sistemine etki eder. Eğer sistem,  $z = (z_1, z_2, z_3, z_4)$  şeklinde tanımlanırsa,

$$\dot{z} = f(z) + g(z)u \quad (2.16)$$

olarak ifade edilebilmektedir. Böylece, dinamik sistem erişilebilir ve kontrol edilebilir bir yapıya dönüşmektedir. Literatürde sıklıkla,  $(z_1, z_2)$  alt sistemine etki eden aynı kontrol işaretinden kaynaklanan problem, bahsedilen koordinat dönüşümü ile ortadan kaldırılır ve sistem diferansiyel eşitliklerinde tek bir kontrol işareti kalmaktadır.

# 3

## KİSMİ GERİBESLEME İLE DOĞRUSALLAŞTIRMA VE AYRIK ZAMANLI KAYAN KIPLİ KONTROLCÜ TASARIMI

---

### 3.1 Kısmi Geribesleme ile Doğrusallaştırma

Ayrık zamanlı kayan kipli kontrolcü yöntemi, özellikle eksik tahrikli ve dinamik yapısı karmaşık sistemler için uygulanan bir doğrusal olmayan kontrol yöntemidir. Bu yöntemde, sistemlerin sadece belirli bölümlerini hedef alarak yapılan kısmi doğrusallaştırma, kontrolcü tasarımını basitleştirir[42]. Kısmi doğrusallaştırma ile yapılan bu işlem, sistemin doğal davranışlarını koruyarak etkili bir kontrol imkanı sunar ve kontrolcünün modelleme ve tasarımında esneklik sağlar. Karmaşıklığı yüksek veya doğrusal olmayan sistemlerde, kontrolcünün performansını artırır. Tasarlanan kontrolcü, sistem durumunu belirli bir kayan yüzey üzerinde tutar ve bu yüzey, sistem dinamiğini istenen bir davranışa yönlendirir. Sadece kontrol etmek istenen yerden geri besleme alınır, bu da kontrolcünün böylece daha etkili çalışmasını sağlar. Kısmi doğrusallaştırma sayesinde, kontrolcü sisteme daha hassas ve etkili bir şekilde müdahale edebilir. Ayrık zamanlı kayan mod kontrolcüleri, dijital kontrol sistemleri için idealdir ve mikrodenetleyici veya bilgisayar tabanlı uygulamalarla entegrasyonu kolaydır, bu da gerçek zamanlı kontrol uygulamaları için büyük bir avantajdır.

Bu yöntemin temel amacı, karmaşık doğrusal olmayan sistemleri, belirli yönlerden yönetilebilir ve analiz edilebilir hale getirmektir. Doğrusal olmayan sistemlerin karmaşıklığı, girdi ve çıktı arasındaki ilişkilerin doğrusal olmamasından kaynaklanır. Kısmi geri besleme doğrusallaştırma, bu zorluğu aşarak, kontrol ve analiz süreçlerini kolaylaştırmaktadır.

Kısmi geri besleme doğrusallaştırma süreci, sistemin matematiksel modelinin tanımlanmasını, doğrusallaştırılacak çıktıların seçimini, geri besleme kontrol kuralının tasarımını ve sistemin doğrusallaştırılmasını içermektedir.

Örnek olarak, ilerleyen bölümlerde incelenecek araba sarkaç sistemi ve atalet diskli sarkaç sistemi üzerinde uygulanmış bu yaklaşım, sistemin doğrusallaştırılmasını sağlar. Bu yöntem ile araba sarkaç sistemi ve atalet diskli sarkaç sistemi üzerinde uygulayarak sistemin doğrusallaştırılması yapılacaktır.

Araba sarkaç sistemini durum uzay gösterimine geçirmek için  $z_1 = q_1, z_2 = \dot{q}_1, z_3 = q_2, z_4 = \dot{q}_2$  olarak tanımlanırsa,

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ m_{11}\dot{z}_2 + m_{12}\dot{z}_4 + h_1 &= 0 \\ \dot{z}_3 &= z_4 \\ m_{21}\dot{z}_2 + m_{22}\dot{z}_4 + h_2 &= \tau_2 \end{aligned} \quad (3.1)$$

denklem sistemi elde edilmektedir. Sistem (3.1)'e (3.2) ile verilen ileri Euler metodu

$$\dot{z}_i \cong \frac{z_i(h+1) - z_i(h)}{T} \quad i = \{1, 2, 3, 4\} \quad (3.2)$$

burada  $h$  örnekleme indeksi olmak üzere uygulanırsa

$$\begin{aligned} z_1(h+1) &= z_1(h) + Tz_2(h) \\ z_3(h+1) &= z_3(h) + Tz_4(h) \end{aligned} \quad (3.3)$$

ve

$$\begin{aligned} m_{11}(h) \frac{z_2(h+1) - z_2(h)}{T} + m_{12}(h) \frac{z_4(h+1) - z_4(h)}{T} \\ + h_1(h) &= 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} m_{21}(h) \frac{z_2(h+1) - z_2(h)}{T} + m_{22}(h) \frac{z_4(h+1) - z_4(h)}{T} \\ + h_2(h) &= \tau_2 \end{aligned} \quad (3.5)$$

elde edilmektedir. (3.4) eşitliği,  $(z_2(h+1) - z_2(h))/T$  ile düzenlenirse ve

$$\begin{aligned} \tau_2(h) &= -m_{21}(h)m_{11}^{-1}(h)h_1(h) + h_2(h) + (m_{22}(h) \\ &- m_{21}(h)m_{11}^{-1}(h)m_{12}(h))(u(h) - z_4(h)) \end{aligned} \quad (3.6)$$

olarak verilirse,

$$z_1(h+1) = z_1(h) + Tz_2(h), \quad (3.7)$$

$$z_2(h+1) = z_2(h) - Tm_{11}^{-1}m_{12}(u - z_4(h)) - Tm_{11}^{-1}h_1, \quad (3.8)$$

$$z_3(h+1) = z_3(h) + Tz_4(h), \quad (3.9)$$

$$z_4(h+1) = (1 - T)z_4(h) + Tu(h) \quad (3.10)$$

biçiminde kısmi doğrusallaştırılmış ayrıık zamanlı sistem dinamiği elde edilmektedir. Eksik tahrikli dinamik sistemler kısmi olarak doğrusal hale getirilebilmektedirler. Ancak, tasarlanan kontrol girişi  $u(h)$  birden fazla sistem diferansiyel denklemde görülmektedir. Bu çalışmada, bu problemin üstesinden gelebilmek için bir sonraki başlıkta ayrıık zamanlı koordinat dönüşümü önerilmektedir.

## 3.2 Kayan Kipli Kontrolcü Tasarımı

### 3.2.1 Kayan Kipli Kontrol Yaklaşımı

Bu kontrolcü yönteminde, tasarım süreci sistemin dinamiğinin arzu edilen belirlenmiş bir kayma yüzeyine getirilerek istenilen durumlarda tutulmaya çalışılması üzerinedir. Doğrusal olmayan sistemlerde kullanılacak olan kayan kipli kontrol tasarımının amacı, istenilen yörüngeye vararak bozucu etkilerin azalması ve devamında belirli bir yörüngede aynı davranışı tekrar etmesi olarak ifade edilmektedir. Bu çalışmanın, literatürde incelenmiş ve bu konu üzerinde yapılmış çalışmalardan farkı, tabanlı ayrıık zamanlı kayan kipli kontrol tasarımında koordinat dönüşümü yaklaşımının kullanılmasıdır. Bu yaklaşımla genellikle bu kontrolcünün uygulama alanlarında sıkça görülen çatırdama probleminin azaltılmasına katkı sağlamaktadır. Bu sayede, çatırdama problemine sebep olan ani değişimlerin engellenmesi ve daha uygun kontrol yüzeyinin belirlenmesi sağlanır. Kontrolcü tasarımında kullanılan koordinat dönüşümü yaklaşımı, sistemin davranışlarını doğrusallaştırmasına ve kontrol edilebilir hale getirmesine katkıda bulunmaktadır. Bu da, istenmeyen çatırtı etkilerinin azalmasına yardımcı olmaktadır.

Çalışmanın bir sonraki bölümünde yer alan koordinat dönüşümü yaklaşımı, doğrusal olmayan sistemlerin dinamiklerini daha anlaşılır hale getirmekte ve uygulanan kontrol yapısına uyumlu olmasını sağlamaktadır. Sistemlerin yüksek dereceli ve karmaşık yapılarına karşın, bu yaklaşımla kontrolcü etkinliğinin ve sistem modellemesinin daha başarılı olmasına yardımcı olmaktadır.

Sistemlerin durum geri besleme kontrol yönteminin daha başarılı olması, durum

değişkenlerinin dönüştürülmesiyle olur. Hızlı tepki veren ve hassas kontrol gerektiren mekanik sistemlerde kontrolcü tasarımı için kontrol sinyallerini arzu edilen etkinlikte oluşturur.

Koordinat dönüşümüyle tasarlanmış kayan kipli kontrolcünün etkinliği, alt sistemler olarak kullanılan araç sarkaç ve atalet diskli sarkaç sistemleri üzerinde uygulanmış ve bu sistemlerin gürbüzlük özelliğini artırırken, çatırdama probleminin etkilerini azaltmaktadır. Her kontrol sistemi benzersiz olduğu için, bu yönetimin sistemlere uygulanabilirliği ve başarısı, kontrol ihtiyaçlarına ve sistem özelliklerine göre değişiklik gösterebilmektedir.

Kontrol sistemlerinde kullanılan kayan kipli kontrol, sistemi istenilen durumda tutmak için sık ve ani kontrol işaretleri üretir. Bu yöntem, sistemin durumlarını belirli bir kayma yüzeyi üzerinde tutmayı hedefler. Ancak, sistemin durumları bu yüzeyden sapma eğiliminde olduğunda, kontrol sistemi hızlı ve ani tepkiler vererek durumları tekrar yüzeye çekmeye çalışır. Bu süreç, "çatırtı" (chattering) olarak adlandırılır ve sınırsız frekanslı, ani yön değişimleri içermektedir.

Özellikle hızlı hareket eden mekanik sistemlerde, çatırdama probleminin ortadan kaldırılması kontrol tasarımı başarısını ortaya koymaktadır. Bu tür sistemlerde kontrolcü, ani kontrol işaretleri üreterek mekanik sistemlerin hareketli parçalarına zarar verebilmekte ve bu yüzden bu tür sistemlerde uygun bir kontrol yöntemi olmayabilmektedir. Mekanik sistemlerde çatırdama problemini ortadan kaldırmak için filtreleme, süreksiz yaklaşım, doyma fonksiyonu ve bulanık kontrol gibi bazı yöntemler kullanılabilir. Bu yöntemler, kontrolcünün etkinliğini azaltarak kayan kipli kontrol sisteminin gürbüzlük özelliğini azaltabilmektedir. Bu özellik, genellikle kontrol sisteminin çeşitli dış etkenler ve belirsizliklerden etkilenmesini engelleme yeteneğidir. Bu nedenle, kayan kipli kontrol uygulanan mekanik sistemler için çatırdamayı azaltmak için dengeli bir yaklaşım gerekmektedir. Bu yaklaşımın amacı, sistemin gürbüzlüğünü ve performansını korurken aynı zamanda çatırdama probleminin olumsuz etkilerini de azaltmayı amaçlamaktadır.

### 3.2.2 Kayan Kipli Kontrolde Kayma Yüzeyi

Kayan kipli kontrol tasarımında, sistemin arzu edilen dinamik davranışı, kayma yüzeyi  $S(h)$  olarak tanımlanan bir matematiksel gösterim ile ifade edilir. Kayma yüzeyi, durum değişkenlerinin bir fonksiyonu olarak tanımlanır. Bir ayrık zamanlı sistem için kayma yüzeyi şu şekilde gösterilir:

$$S(h) = Cx(h). \quad (3.11)$$

Burada  $C$  bir tasarım matrisini temsil eder ve  $x(h)$  sistem durumunu gösterir.

Bu yaklaşımda, hedeflenen kontrol etkinliğini sağlamak için sistem davranışı, yönlendirilen durum değişkeni fonksiyonudur. Sistemde hata dinamiklerinin temel amacı, hedeflenen durumla gerçek durum arasındaki farkın zamanla minimum değere getirilmesidir. Bu, kayma yüzeyi tanımıyla uyumlu olarak, sistem performansını optimize etmek ve istenen kontrol etkinliğine ulaşmak için kullanılmaktadır.

Kayan kipli kontrol yönteminde, sistem dinamikleri kayma yüzeyine ulaştığında kayma yüzeyi üzerinde kayma hareketi yaparak hedeflenen davranışı sergiler. Tasarlanan kontrolcü, sistemi bu yüzey üzerinde tutmak için sürekli sinyal üretir. Sürekli tekrarlanan bu süreç, sistemdeki belirsizlikleri ve dış etkileri ortadan kaldırarak kontrol sistemini gürbüz hale getirir ve sistemin kayma yüzeyinde, bozucu etkilere karşı dayanıklı bir davranış göstermektedir.

### 3.2.3 Kontrol Kuralı

Kayan kipli kontrol yönteminde, kontrol sinyali sistemin davranışını kayma yüzeyinde tutmak için kullanılmaktadır. Kontrol kuralı aşağıdaki denklemle ifade edilir:

$$u(h) = -K \operatorname{sgn}(S(h)). \quad (3.12)$$

$K$  ifadesi, kazanç matrisi olarak tanımlanır ve  $\operatorname{sgn}$  işareti ise, sistemin kayma yüzeyindeki durumuna göre kontrol işaretinin yönünü belirlemek için kullanılmaktadır. Ayrık zamanlı kayan kipli kontrol sisteminde kontrol kuralı, sistem kontrol sinyallerini belirli aralıklarda uygulayarak kayma yüzeyine ulaşmayı amaçlamaktadır. Kayma yüzeyine ulaştıktan sonra bu yüzey üzerinde kalarak sistemi stabil hale getirir. Ayrık zamanlı sistemlerde kontrol kuralı, genellikle sistem dinamiğine ve kayma yüzeyine bağlı olarak belirlenir ve her döngüde bu tekrarlanmaya devam eder. Bu da, sürekli zamanlı sistemlerden farklı olarak, belirli zaman aralıklarında kontrol sinyali üreterek gerçekleşmektedir.

Ayrık zamanlı kayan kipli kontrol tasarımında kontrol sinyallerinin üretilmesi sıklığı, sistem performansında değişiklikler gösterir. Üretilen kontrol sinyali sıklığı daha iyi kontrolcü etkinliği sağlar. Ayrık zamanlı kayan kipli kontrolde, kontrol kuralının tasarımı ve etkinliği mikrodenetleyiciler ve dijital kontrol cihazlarının yetkinliğine bağlıdır.

Sonuç olarak, bu tip kontrol tasarımlarında kontrol kuralının etkin tasarlanması ve sistem dinamiklerinin davranışlarının iyi analiz edilmesi gerekir. Bu tür sistemler,

modern kontrol uygulamalarında yaygın olarak görülmekte olup, kontrol kuralının doğru belirlenmesi, sistem performansı açısından kritik öneme sahiptir.

### **3.2.4 Kararlılık Analizi**

#### **3.2.4.1 Asimptotik Kararlılık**

Ayrık zamanlı kayan kipli kontrol tasarımında asimptotik kararlılık durumunun incelenmesi, kontrol tasarımının performansını değerlendirme açısından önemli arz etmektedir. Eğer sistem asimptotik kararlı ise, zamanla kayma yüzeyine yakınsayacağını gösteren parametrelerden biridir. Sistemin asimptotik kararlı olup olmadığının bakılması, bir kontrol sisteminin genel davranışını gösteren kavram olması nedeniyle önemlidir. Ayrık zamanlı kayan kipli kontrol sistemlerinin kararlılık analizinde asimptotik kararlılık, sistem durumlarının zaman içerisinde belirli istenilen optimum yere yakınsamasını göstermektedir. Böylece sistemin hatalarının zamanla sifira yaklaşacağı manasına gelir ve ideal olarak dinamik sistemin kalıcı denge noktasında kalarak kontrol tasarımı istikrarlı bir duruma ulaştırır.

Asimptotik kararlılık değerlendirmesi, genellikle Lyapunov'un doğrudan metodunda yapılmaktadır. Burada için seçilen Lyapunov fonksiyonu ve bu fonksiyonun türevi incelenir. Eğer bu fonksiyonun türevi belirli bir denge noktası etrafında sürekli olarak negatif ise, sistemin o noktada asimptotik kararlı olduğu söylenir. Bu da, sistem durumlarının o noktaya yakınsamadığını ve kalıcı olduğunu ifade eden bir yöntemdir.

Ayrık zamanlı kayan kipli kontrol tasarımında Lyapunov yöntemi kullanıldığında, sistem analizini yapılmasında, asimptotik kararlılık için yeterli koşulların olup olmadığını kontrol etmek, bu yöntemin başarısı için temel noktadır. Bu nedenle, Lyapunov fonksiyonunun ve onun türevinin uygun şekilde tanımlanması gerekmektedir. Sürekli zamanlı sistemlerden farklı olarak, ayrık zamanlı sistemlerde uygun Lyapunov fonksiyonu seçimi önemli yer tutar.

Asimptotik kararlılık, ayrık zamanlı kayan kipli kontrol sistemlerinin tasarımı ve analizi sırasında, sistemin uzun süreli performansını ve güvenilirliğini değerlendirmede kritik bir rol oynar. Bu analiz, sistemin belirli bir kontrol stratejisi altında istenen davranışları sergileyip sergilemeyeceğini ve bu davranışların zaman içinde korunup korunmayacağını anlamak için kullanılır. Bu nedenle, asimptotik kararlılık, hem teorik modelleme hem de pratik uygulamalarda temel bir odak noktasıdır.

### 3.2.4.2 Lyapunov Yöntemi

Kararlılık analizi genellikle Lyapunov yöntemi kullanılarak yapılır. Bir Lyapunov aday fonksiyonu  $V(h)$  seçilir ve bu fonksiyonun zamanla azaldığını göstermek gerekir. Tipik olarak,  $V(h)$  fonksiyonu şu şekilde seçilir:

$$V(h) = S(h)^2. \quad (3.13)$$

Eğer  $V(h + 1) - V(h) < 0$  ise, sistem kararlıdır. Lyapunov'un doğrudan metodu, kararlılık analizinde en yaygın kullanılan yöntemlerden biridir. Bu yöntem, bir Lyapunov fonksiyonu seçilerek sistemin enerjisini veya performansını temsil eden bir skalar fonksiyon üzerinden sistem kararlılığını analiz eder. Eğer bu fonksiyonun türevi, zaman içinde negatif ya da sıfır kalıyorsa, sistem kararlı kabul edilir.

### 3.2.4.3 Tasarım

Kayan kipli kontrol tasarımı, doğrusal olmayan ve belirsizlik içeren sistemler için kullanılan gürbüz bir kontrol metodudur. Bu metod, sistemin durumunu önceden belirlenmiş bir kayan yüzey üzerinde tutarak, istenilen yörüngeye zorlama prensibine dayanır. Tasarım süreci, kayma yüzeyinin ve kontrolcünün tasarımını içerir. Tasarım aşamasında kullanılan kayma yüzeyi kavramı, sistemin hedeflenen kapalı sistem cevabına göre, durum uzayında kök yerleştirme metodu kullanılarak tasarlanır. Bir diğer aşama ise, Lyapunov kararlılık teoremiyle kontrol sinyali elde edilmesidir. Uygulanan sistemi yüzeye ulaştırmaya çalışır ve yüzey üzerinde tutması, Lyapunov kayma koşulu aracılığıyla oluşur. Sistemin kararlılık durumu seçilen kararlı yüzey ve kayma koşulu yani Lyapunov kararlılık teoremi ile gerçekleşmiş olur. Ulaşma kipi temel olarak, kontrol dinamiğinin sistem parametrelerine bağlı olduğu söylenir ve kayma kipi için ise sistemin dinamiği tasarlanan yüzey parametrelerince belirlendiği söylenebilir. Kayan kipli kontrolde gürbüzlük özelliği kayma kipinde geçerli olur. Kayan yüzey, sistem dinamiğini istenilen şekilde yönlendirmek için tasarlanan ve genellikle sistem durum değişkenlerinin bir fonksiyonu olarak ifade edilen bir yüzeydir. Bu yüzey, tipik olarak  $S(x) = Cx$  şeklinde tanımlanır, burada  $C$  matrisi yüzeyin parametrelerini belirler ve  $x$  sistem durum vektörüdür.

Kontrolcü tasarımında ana hedef, sistemi kayma yüzeyine çekmek ve bu yüzeyde tutmaktır. Kontrol sinyali, genellikle  $u = -K \cdot \text{sgn}(S(x))$  formunda tasarlanır, burada  $K$  kontrol kazancını temsil eder ve  $\text{sgn}$  işaret fonksiyonudur. Bu fonksiyon, sistem durumunu hızla kayma yüzeyine getirir.

Kontrolcünün tasarlandığı bu süreçte, sistem dinamiği kayma yüzeyine ulaştığında

incelenir ve bu modda, sistem davranışı yalnızca kayma yüzeyi tarafından belirlenir. Sistemin kararlılığı, genellikle Lyapunov teorisine dayalı bir yaklaşımla analiz edilir. Seçilen bir Lyapunov fonksiyonunun sürekli azalması veya sabit kalması, sistemin kayma yüzeyi üzerinde kalacağını ve böylece kararlı olacağını kanıtlar.

Tasarlanan kontrol stratejisinin etkinliği ve uygulanabilirliği, simülasyonlar ve gerçek zamanlı olarak fiziki sistem testleri ile değerlendirilir. Bu yöntem, belirsizliklerin ve doğrusal olmayan etkilerin baskın olduğu sistemlerde etkili olup, kontrolcünün gürbüz yapısı sayesinde dış etkilere ve sistem parametrelerindeki değişikliklere karşı dayanıklı bir kontrol sağlar. Bu yaklaşım, sistem performansını ve kararlılığını optimize ederken kontrolcünün etkinliğini ve sağlamlığını da artırır.



# 4

## KOORDİNAT DÖNÜŞÜMÜ

---

### 4.1 Genel Koordinat Dönüşümü

İki serbestlik dereceli eksik tahrikli sistemler için koordinat dönüşümünün kullanılmasındaki temel amaç, sistemin dinamiklerini daha yönetilebilir bir hale dönüştürmeye yardımcı olmasıdır.

Bu tez çalışmasında kullanılan modellerden, araba sarkaç sistemi, bir araç üzerinde bulunan bir sarkaçtan oluşur. Bu sistem, aracı konumu kontrol edilebilirken, sarkacın konumu doğrudan kontrol edilemez ve aracın hareketi sarkacı etkilemektedir. Atalet diskli sarkaç sistemi, ucuna bir disk takılmış bir sarkaçtan oluşur. Diskin dönüşü kontrol edilebilirken, sarkacın pozisyonu doğrudan kontrol edilemez. Her iki sistem için koordinat dönüşümü, kontrol edilebilir ve kontrol edilemeyen bileşenleri daha net bir şekilde ayırmaya fayda sağlar ve bu da kontrol stratejisinin geliştirilmesine yardımcı olmaktadır. Özellikle, atalet diskli sarkaç sisteminde, disk tarafından uygulanan torkun sarkacın hareketini nasıl etkilediğini daha iyi anlamamıza olanak tanır. Araba sarkaç sisteminde ise, aracın hareketinin sarkacın dinamiğine nasıl etki ettiği daha açık hale gelmektedir. Bu dönüşümler, kontrol stratejisinin tasarımı ve uygulanmasını kolaylaştırmaktadır[27, 43].

Koordinat dönüşümü yaklaşımı, ayrık zamanlı sistemlerde, sürekli zamanlı sistemlere uygulanan koordinat dönüşümüne benzer bir yaklaşımı temel almaktadır. Ancak zamana bağlı olarak gerçekleşen değişimler ayrık zaman adımlarına göre oluşturulur. Sürekli zamanlı sistemlere uygulanan koordinat dönüşümü yaklaşımı, sistem dinamiklerini yeni bir durum uzayına dönüştürmek için kullanılırken, ayrık zamanlı sistemlerde ayrık adımlar şeklinde bu dönüşüm gerçekleşmektedir.

## 4.2 İki Serbestlik Dereceli Eksik Tahrikli Sistemlerde Koordinat Dönüşümü

İki serbestlik dereceli eksik tahrikli doğrusal olmayan sistemlerin koordinat dönüşümü tabanlı kontrolcü tasarımı yapılırken sistemin dinamiklerini daha basit bir formda ifade etmek, daha etkili bir sonuç almada ve karmaşıklığı azaltmaya yardımcı olmaktadır. Bu tür sistemlerde, tüm durum değişkenleri doğrudan kontrol edilemez ve bu nedenle, dönüşüm fonksiyonu  $T$  bu kısıtlamaları dikkate alacak şekilde tasarlanmalıdır.

Sürekli zamanlı ve ayrık zamanlı sistemlerde koordinat dönüşümü yaklaşımlarına bakıldığında; sürekli zamanlı bir sistemde koordinat dönüşümleri aşağıdaki gibi ifade edilmektedir:

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (4.1)$$

$$z = T(x) \quad (4.2)$$

$$\dot{z} = \frac{d}{dt}T(x) = T'(x)\dot{x} = T'(x)f(x, u). \quad (4.3)$$

Burada,  $x$  sistem durumunu,  $u$  kontrol girişini,  $f(\cdot)$  sistem dinamiklerini, ve  $T(\cdot)$  koordinat dönüşüm fonksiyonunu göstermektedir.

Ayrık zamanlı sistemlere bakıldığında sisteme ait koordinat dönüşümü aşağıdaki şekilde ifade edilmektedir.

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k) \quad (4.4)$$

$$z_k = T(x_k) \quad (4.5)$$

$$z_{k+1} = T(x_{k+1}) = T(f(x_k, u_k)). \quad (4.6)$$

Sürekli zamanın sürekli bir değişim sürecini ifade etmesi ve ayrık zamanın ise belirli zaman adımlarında durum değişikliklerini ele alması olarak tanımlanmaktadır. Ayrık zamanlı sistemlerde, özellikle dijital kontrol uygulamalarında veya sayısal simülasyonlarda kullanılırken, sürekli zaman daha çok analitik çalışmalarda ve sürekli sistemlerin modellenmesinde tercih edilmektedir. Ayrık zamanlı koordinat dönüşümü, zaman adımları arasındaki durum geçişlerini modellemek için tasarlanmaktadır. Ayrık zamanlı sistemlerde, koordinat dönüşümü her adımda uygulanmaktadır ve sistem durumu bu dönüşüm üzerinden bir sonraki adıma

taşınmaktadır. Bu, sürekli zamanlı sistemlerdeki anlık türev yerine, ayrık adımlarda güncellenen bir durum manasına gelmektedir. Sürekli zamanlı dönüşüm, zamanın sürekli bir akışı içindeki durum değişimlerini anlamak için kullanılmaktadır. Bu temel fark, ayrık zamanlı sistemlerin analizi ve kontrolü için özel yöntemlerin geliştirilmesini gerektirmektedir.

Koordinat dönüşümü, eksik tahrikli mekanik sistemlerin analizinde ve kontrolünde kullanılan önemli bir araçtır. Bu dönüşüm, sistemin dinamiklerini daha anlaşılır ve kontrol edilebilir bir forma dönüştürmeyi amaçlar. Kontrolcü tasarımını ve sistem analizini kolaylaştırır. Sistem dinamiklerinin daha derinlemesine anlaşılmasını sağlar ve kontrol stratejilerinin etkin bir şekilde geliştirilmesine olanak tanır. Koordinat dönüşümü, mekanik sistemlerin analizi ve kontrolü için özellikle eksik tahrikli sistemler üzerinde, bu dönüşümlerin yeniden tasarlanması ve optimize edilmesiyle sistemin performansını maksimize etmekte kullanılan bir yaklaşımdır. Çalışmada, bir sınıf eksik tahrikli doğrusal olmayan mekanik sistem için ayrık zamanlı koordinat dönüşümü tabanlı kayan kipli kontrol tasarım yapılırken yapılan yeni koordinat dönüşümü;

$(q_r, p_r)$  yeni koordinatları temsil etmek üzere

$$q_r(h) = m_{11}(h-1)z_1(h) + m_{12}(h-1)z_4(h-1) \quad (4.7)$$

$$p_r(h) = m_{11}(h)z_2(h) + m_{12}(h)z_4(h) + Th_1(h-1) \quad (4.8)$$

şeklinde ayrık zamanlı bir koordinat dönüşümü önerilmektedir. Burada önerilen doğrusal olmayan koordinat dönüşümü [27] çalışmasında önerilen koordinat dönüşümünün oldukça basitleştirilmiş halidir.  $\phi_1(h) = -m_{12}(h-1)z_4(h-1)$ ,  $\phi_2(h) = -Th_1(h-1)$  olmak üzere, (4.7)-(4.8) denklemlerinin bir örnekleme zamanı sonrasındaki dinamiği

$$q_r(h+1) = q_r(h) + p_r(h) + \phi_1(h) \quad (4.9)$$

$$p_r(h+1) = p_r(h) + \phi_2(h) \quad (4.10)$$

olarak hesaplanmaktadır. Bu dönüşüm sonrasında, (3.7)-(3.10) denklem grubu

$$q_r(h+1) = q_r(h) + p_r(h) + \phi_1(h) \quad (4.11)$$

$$p_r(h+1) = p_r(h) + \phi_2(h) \quad (4.12)$$

$$z_3(h+1) = z_3(h) + Tz_4(h) \quad (4.13)$$

$$z_4(h+1) = (1-T)z_4(h) + Tu(h) \quad (4.14)$$

halini almaktadır.

Literatürdeki çalışmalarda, kısmi geri besleme sonrasında kontrol işareti doğrudan hem araç ve disk hem de sarkaç dinamiğini etkilemektedir. Ancak, bu çalışmada koordinat dönüşümü sonrasında sadece araç ve disk dinamiğini etkileyen kontrol işareti üzerinden kayan kipli kontrolcü inşa edilmektedir. Önerilen ayrık zamanlı koordinat dönüşümü ile eksik tahrikli sistem, dinamik modeli geri beslemeli formda özel bir kaskat doğrusal olmayan sisteme dönüşmüş olmaktadır. Bu dönüşüm, kontrol yönteminin inşasını kolaylaştırmakta ve ileri seviyeli ayrık zamanlı kontrol yöntemlerinin uygulanabilirliğini arttırmaktadır. Bahsedilen avantajlar ilerleyen başlıklarda verilen bölümlerde incelenmektedir.



### 5.1 Araba Sarkaç Sisteminin Denklemlerinin Elde Edilmesi

Araba sarkaç sisteminde, araba ile yatay kuvvetler elde edilerek, sarkacı üst noktada kararlı kılınmasını veya yukarı kaldırılmasını hedeflemektedir. Şekil 5.1 ile araba sarkaç sistemi gösterilmektedir. Şekil 5.1 üzerinde  $q_1$  sarkaç açısını ve  $q_2$  sistem konumunu,  $\dot{q}_1$  sarkacın açısal hızını,  $\dot{q}_2$  sistemin hızını,  $m_1$  ve  $m_2$  sarkaç ve araç kütlelerini,  $l$  sarkacın uzunluğunu,  $\tau$  kontrol işaretini,  $g$  yerçekimi ivmesini ifade etmektedir. Sisteme ait hareket denklemlerinin elde edilmesi için araba sarkaç sisteminin kinetik enerjisine ait ifade şu şekildedir:

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2}m_1\dot{A}_1^2 + \frac{1}{2}m_1\dot{B}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{A}_2^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{B}_2^2. \quad (5.1)$$

Burada  $A_1 = q_2, A_2 = 0, B_1 = q_2 + l\sin(q_1), B_2 = l\cos(q_1)$  olmak üzere elde edilmektedir. Böylece araba sarkaç eksik tahrikli dinamik sistem için ayrı ayrı enerji denklemleri

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2}m_1l^2\dot{q}_1^2 - m_1l\cos(q_1)\dot{q}_1\dot{q}_2 + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{q}_2^2 \quad (5.2)$$

ve

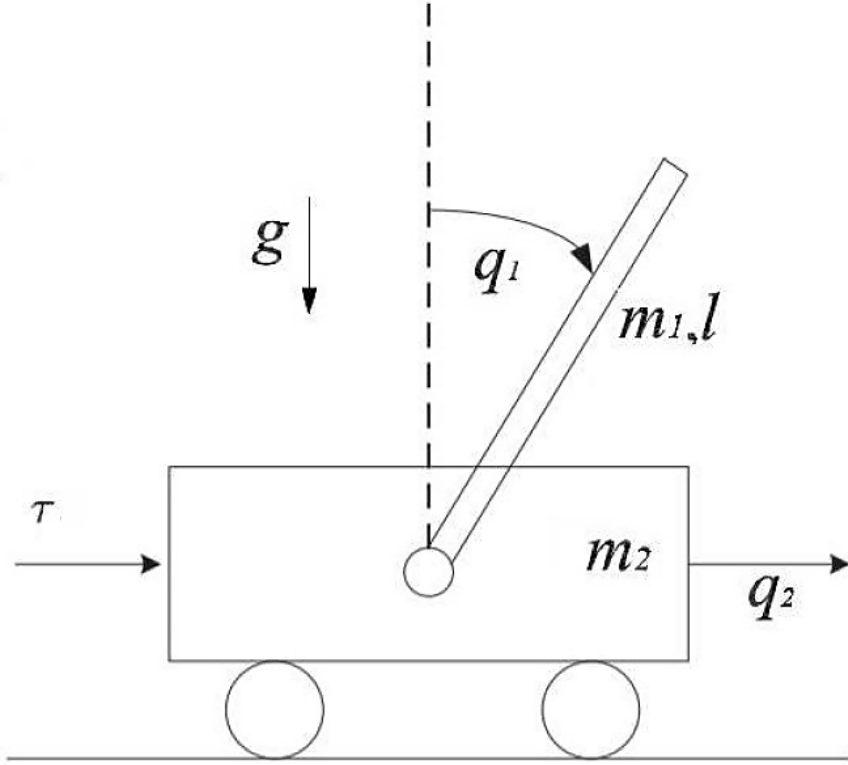
$$\mathcal{V} = m_1gl\cos(q_1) \quad (5.3)$$

olarak elde edilmektedir. Sonrasında, Lagrangian ifadesi (5.4) ile oluşturulmaktadır.

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{K} - \mathcal{V} \\ &= \frac{1}{2}m_1l^2\dot{q}_1^2 - m_1l\cos(q_1)\dot{q}_1\dot{q}_2 \\ &\quad + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{q}_2^2 - m_1gl\cos(q_1). \end{aligned} \quad (5.4)$$

Devamında,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \tau_i, \quad i = \{1, 2\} \quad (5.5)$$



**Şekil 5.1** Bir araba sarkaç sisteminin gösterimi

tekrar yazılarak,  $m_{11}(z_1) = m_1 l^2$ ,  $m_{12}(z_1) = m_{21}(z_1) = m_1 l \cos(q_1)$ ,  $m_{22}(z_1) = m_1 + m_2$ ,  $h_1(z_1) = -m_1 l g \sin(q_1)$ ,  $h_2(z_1, z_2) = m_1 l \sin(q_1) \dot{q}_1^2$  ve  $\tau = \tau_2$  atamaları ile

$$m_{11}\ddot{q}_1 + m_{12}\ddot{q}_2 + h_1 = 0 \quad (5.6)$$

$$m_{21}\ddot{q}_1 + m_{22}\ddot{q}_2 + h_2 = \tau_2 \quad (5.7)$$

olarak dinamik denklemler elde edilmektedir. Burada  $\tau = [\tau_1 \ \tau_2]^T$  ile tanımlanmaktadır. Eksik tahrikli bir yapıda olan sistem için  $\tau_1 = 0$  alınmaktadır [36].

Araba sarkaç sistemini durum uzay gösterimine geçirmek için  $z_1 = q_1, z_2 = \dot{q}_1, z_3 = q_2, z_4 = \dot{q}_2$  olarak tanımlanırsa,

$$\dot{z}_1 = z_2 \quad (5.8)$$

$$m_{11}\dot{z}_2 + m_{12}\dot{z}_4 + h_1 = 0 \quad (5.9)$$

$$\dot{z}_3 = z_4 \quad (5.10)$$

$$m_{21}\dot{z}_2 + m_{22}\dot{z}_4 + h_2 = \tau_2 \quad (5.11)$$

denklem sistemi elde edilmektedir. Sistem (5.8)-(5.11)'e (5.12) ile verilen ileri

Euler metodu

$$\dot{z}_i \cong \frac{z_i(h+1) - z_i(h)}{T} \quad i = \{1, 2, 3, 4\} \quad (5.12)$$

uygulanırsa

$$\begin{aligned} z_1(h+1) &= z_1(h) + Tz_2(h) \\ z_3(h+1) &= z_3(h) + Tz_4(h) \end{aligned} \quad (5.13)$$

ve

$$\begin{aligned} m_{11}(h) \frac{z_2(h+1) - z_2(h)}{T} + m_{12}(h) \frac{z_4(h+1) - z_4(h)}{T} \\ + h_1(h) = 0 \end{aligned} \quad (5.14)$$

$$\begin{aligned} m_{21}(h) \frac{z_2(h+1) - z_2(h)}{T} + m_{22}(h) \frac{z_4(h+1) - z_4(h)}{T} \\ + h_2(h) = \tau_2 \end{aligned} \quad (5.15)$$

ifadesi elde edilmektedir. (5.14) denkleminde  $(z_2(h+1) - z_2(h))/T$  çekilip diğerk denklem ile beraber düzenlenirse ve

$$\begin{aligned} \tau_2(h) &= -m_{21}(h)m_{11}^{-1}(h)h_1(h) + h_2(h) + (m_{22}(h) \\ &- m_{21}(h)m_{11}^{-1}(h)m_{12}(h))(u(h) - z_4(h)) \end{aligned} \quad (5.16)$$

olarak verilirse,

$$z_1(h+1) = z_1(h) + Tz_2(h) \quad (5.17)$$

$$z_2(h+1) = z_2(h) - Tm_{11}^{-1}m_{12}(u - z_4(h)) - Tm_{11}^{-1}h_1 \quad (5.18)$$

$$z_3(h+1) = z_3(h) + Tz_4(h) \quad (5.19)$$

$$z_4(h+1) = (1 - T)z_4(h) + Tu(h) \quad (5.20)$$

denklem sistemi elde edilmektedir.

## 5.2 Koordinat Dönüşümü

Kısmi olarak doğrusallaştırılmış araba sarkaç sistem dinamiği, doğrusal olmayan bir koordinat dönüşümü sayesinde dördüncü mertebeden ayrık zamanlı bir dinamiğe dönüştürülmektedir. Ayrıca, elde edilen sistem dinamiğine kolaylıkla kayan kipli kontrol yöntemi uygulanmaktadır.

$(q_r, p_r)$  yeni koordinatları temsil etmek üzere;

$$q_r(h) = m_{11}(h-1)z_1(h) + m_{12}(h-1)z_4(h-1) \quad (5.21)$$

$$p_r(h) = m_{11}(h)z_2(h) + m_{12}(h)z_4(h) + Th_1(h-1) \quad (5.22)$$

şeklinde ayrık zamanlı bir koordinat dönüşümü önerilmektedir. Burada önerilen doğrusal olmayan koordinat dönüşümü, [27] çalışmasında önerilen koordinat dönüşümünün oldukça basitleştirilmiş halidir.  $\phi_1(h) = -m_{12}(h-1)x_4(h-1)$ ,  $\phi_2(h) = -Th_1(h-1)$  olmak üzere, (5.21)-(5.22) denklemlerinin bir örnekleme zamanı sonrasındaki dinamiği

$$q_r(h+1) = q_r(h) + p_r(h) + \phi_1(h) \quad (5.23)$$

$$p_r(h+1) = p_r(h) + \phi_2(h) \quad (5.24)$$

olarak hesaplanmaktadır. Bu dönüşüm sonrasında, (5.17)-(3.10) denklem grubu

$$q_r(h+1) = q_r(h) + p_r(h) + \phi_1(h) \quad (5.25)$$

$$p_r(h+1) = p_r(h) + \phi_2(h) \quad (5.26)$$

$$x_3(h+1) = x_3(h) + Tx_4(h) \quad (5.27)$$

$$x_4(h+1) = (1-T)x_4(h) + Tu(h) \quad (5.28)$$

halini almaktadır.

### 5.3 Araba Sarkaç Sisteminin Kayan Kipli Kontrolü

Eşitlik kontrol tabanlı ayrık zamanlı kayan kipli kontrolcü için daha sonra önerilecek kayma yüzeyinin  $(s(h))$  bir örnekleme zamanı boyunca farkı, farklı bir ifadeyle exponansiyel erişim kuralı

$$s(h+1) - s(h) = -qTs(h) - \epsilon T \text{sign}(s(h)) \quad (5.29)$$

biçiminde yazılabilmektedir [44, 45] ki burada  $q > 0$  ve  $\epsilon > 0$  kontrolcü tasarım kazançlarıdır ve  $1 - qT > 0$  eşitsizliğini sağlayacak şekilde seçilmektedir. Kayma yüzeyi  $s(h)$

$$s(h) = k_1q_r + k_2p_r + k_3z_3 + z_4 \quad (5.30)$$

biçiminde seçilirse, (5.17)- (5.20) kullanılarak  $s(h + 1)$

$$\begin{aligned}
s(h + 1) &= k_1 q_r(h + 1) + k_2 p_r(h + 1) \\
&+ k_3 z_3(h + 1) + z_4(h + 1) \\
&= k_1(q_r + p_r + \phi_1) + k_2(p_r + \phi_2) \\
&+ k_3(z_3 + Tz_4) + (1 - T)z_4 + Tu
\end{aligned} \tag{5.31}$$

şeklinde elde edilmektedir. (5.29) eşitliğini elde etmek için sisteme uygulanması gereken kontrol sinyali

$$\begin{aligned}
u(h) &= \\
&- \left( \frac{k_1(p_r + \phi_1) + k_2\phi_2}{T} + (k_3 - 1)z_4 + qs + \epsilon \text{sign}(s) \right)
\end{aligned} \tag{5.32}$$

şeklinde tasarlanmaktadır. Bu noktada, erişim kuralının yakınsama analizi için aday Lyapunov fonksiyonu  $\mathcal{V}(h)$

$$\mathcal{V}(h) = s^2(h) \tag{5.33}$$

olarak seçilirse ve

$$\begin{aligned}
\Delta \mathcal{V} &= \mathcal{V}(h + 1) - \mathcal{V}(h) \\
&= s^2(h + 1) - s^2(h) < 0, \quad s(h) \neq 0
\end{aligned} \tag{5.34}$$

sağlanması durumunda ayrık zamanlı doğrusal olmayan sistem (5.17-5.20) asimptotik olarak kararlı olmaktadır. Örnekleme zamanının yeterince küçük ve  $q$  kontrolcü değişkeni  $(2 - qT) > 0$  eşitsizliğini sağlayacak şekilde seçilmek üzere, (5.34) eşitsizliğini,

$$s(h + 1) - s(h) = -(qT|s| + \epsilon T) \text{sign}(s) \tag{5.35}$$

$$s(h + 1) + s(h) = ((2 - qT)|s| - \epsilon T) \text{sign}(s) \tag{5.36}$$

eşitlikleri ve

$$\text{Eğer } s > 0 \text{ ise } (5.35) < 0 \text{ \& } (5.36) > 0$$

$$\text{Eğer } s < 0 \text{ ise } (5.35) > 0 \text{ \& } (5.36) < 0$$

durumları göz önünde bulundurularak

$$\begin{aligned}
& s^2(h+1) - s^2(h) \\
&= (s(h+1) - s(h))(s(h+1) + s(h)) \\
&= - (qT|s| + \epsilon T) ((2 - qT)|s| - \epsilon T) (\text{sign}(s))^2 \\
&= - (qT|s| + \epsilon T) ((2 - qT)|s| - \epsilon T) < 0 \tag{5.37}
\end{aligned}$$

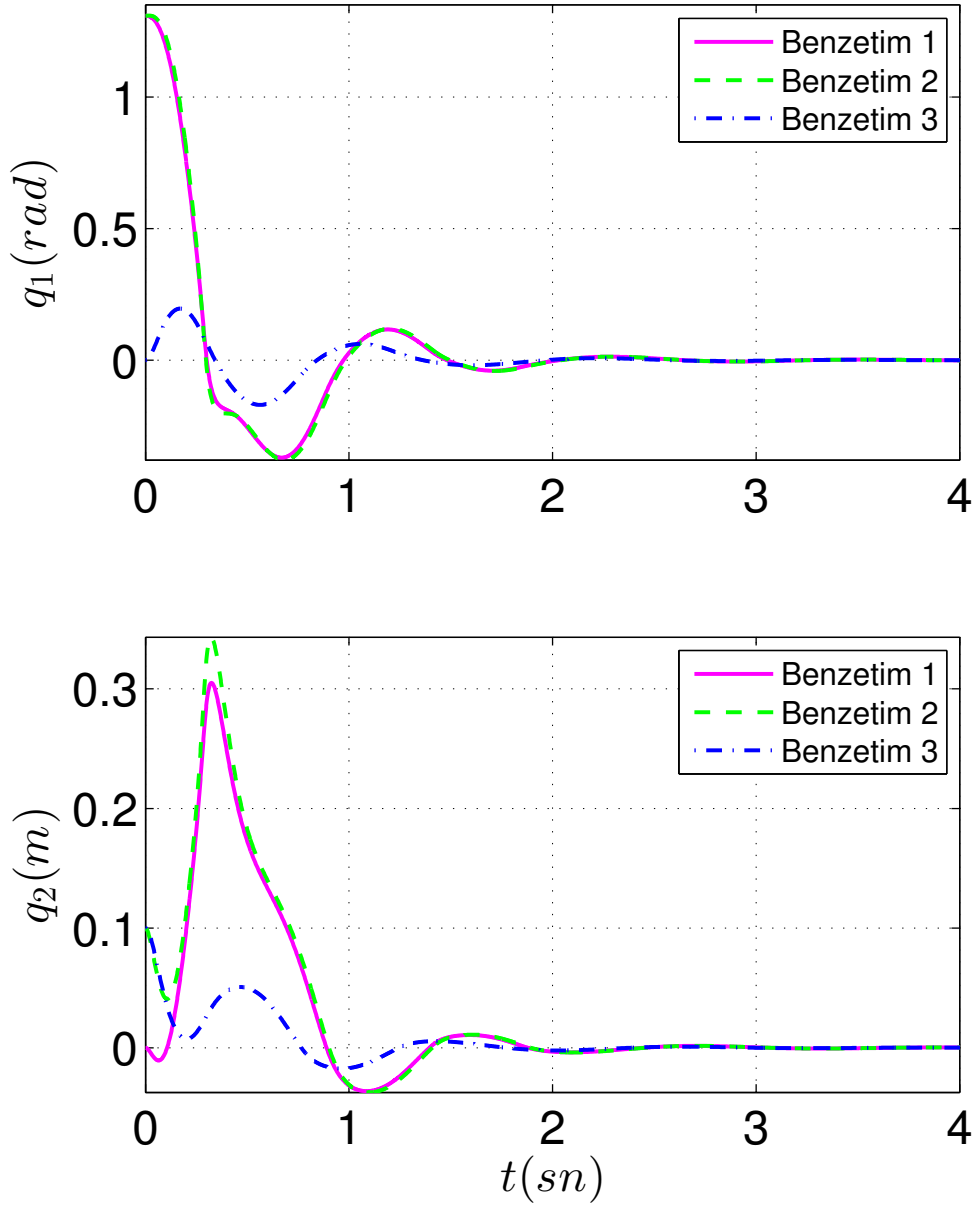
şeklinde gösterilmektedir. Böylece tasarlanan kontrol kuralı (5.32), (5.17-5.20) sistemini asimptotik olarak kararlı kılmaktadır [46]. Ayrıca, (5.17) ve (5.18) denklemlerine uygulanan koordinat dönüşümü (4.9) ve (4.10),  $z_4$  durumunun sıfıra sürülmesi durumunda  $z_1$  ve  $z_2$  durumlarının denge noktasına sürülmesini garanti etmektedir.

#### 5.4 Araba Sarkaç Sisteminin Benzetim Çalışmaları

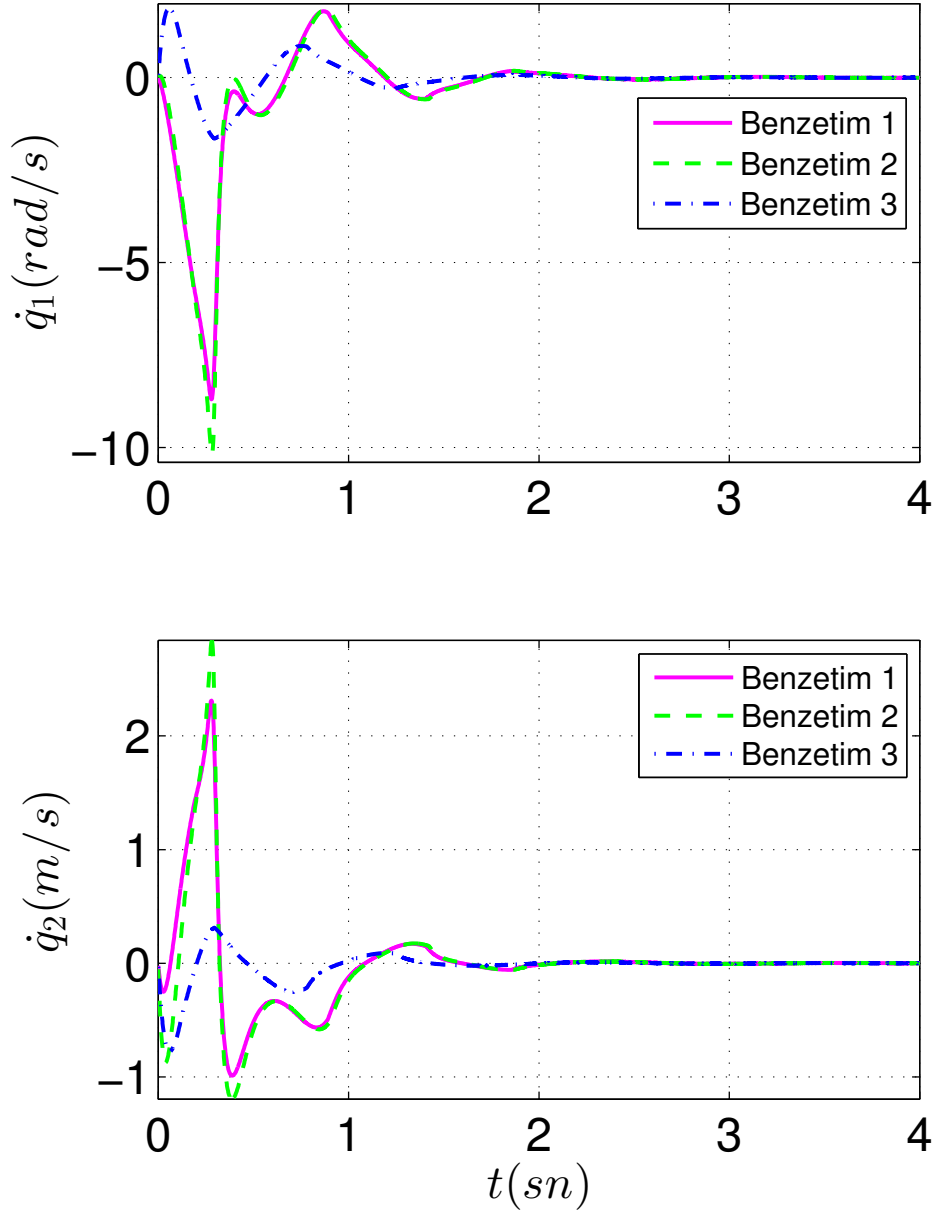
Eksik tahrikli araba sarkaç sistemi için önerilen ayrık zamanlı kontrol yapısının etkinliğinin gösterilmesi, MATLAB ortamında yapılan benzetim çalışmaları ile gerçekleştirilmiştir. Benzetim çalışmalarında çözücü adım süresi  $100 \mu s$ , kontrolcü örnekleme süresi ise  $50 ms$  olarak ayarlanmıştır. Benzetimlerde kullanılan sistem parametre değerleri [47] çalışmasından  $m_1 = 1.12 kg$ ,  $m_2 = 0.11 kg$ ,  $l = 0.1407 m$  ve  $g = 9.8 m/s^2$  olarak alınmıştır. Kontrolcü kazançları  $k_1 = 0.2$ ,  $k_2 = 5$ ,  $k_3 = 20$  ve  $q = 15$ ,  $\epsilon = 0.1$  olarak atanmıştır. Önerilen yöntemin etkinliği üç farklı başlangıç değerlerinde test edilmiştir. Her bir başlangıç noktası sırasıyla  $[q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2] = [\pi/2 - \pi/12, 0, 0, 0]$  (Benzetim 1),  $[q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2] = [\pi/2 - \pi/12, 0.1, 0, 0]$  (Benzetim 2),  $[q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2] = [0, 0.1, 0, 0]$  (Benzetim 3) olarak seçilmiştir.

Farklı başlangıç noktalarından başlatılan araba sarkaç sisteminin önerilen ayrık zamanlı kontrolcü altındaki davranışı, sarkaç açısının değişimi ve sisteminin konum değişimi, Şekil 5.2’de sarkaç hızının değişimi ve sisteminin hızının değişimi, Şekil 5.3’de ve kontrol sinyalinin değişimi ve  $(q_r, p_r)$  koordinatlarının değişimi, Şekil 5.4’de sunulmaktadır. Elde edilen sonuçlar neticesinde, hem sarkaç açısı hem de araba pozisyonunun denge noktasına yaklaşık 2 sn’de oturduğu görülmektedir. Bunun yanında koordinat dönüşümü değişkenlerinin  $(q_r, p_r)$  kontrolcü tarafından kararlı kılındığı gözlemlenmektedir. Teorik analizlerin ışığında, benzetim sonuçlarından anlaşılmaktadır ki kısmi geri beslemeli kontrolcü sonrasında daha basit bir dinamik yapıya uygulanan koordinat dönüşümü tabanlı kayan kipli kontrolcünün başarısı görülmektedir.

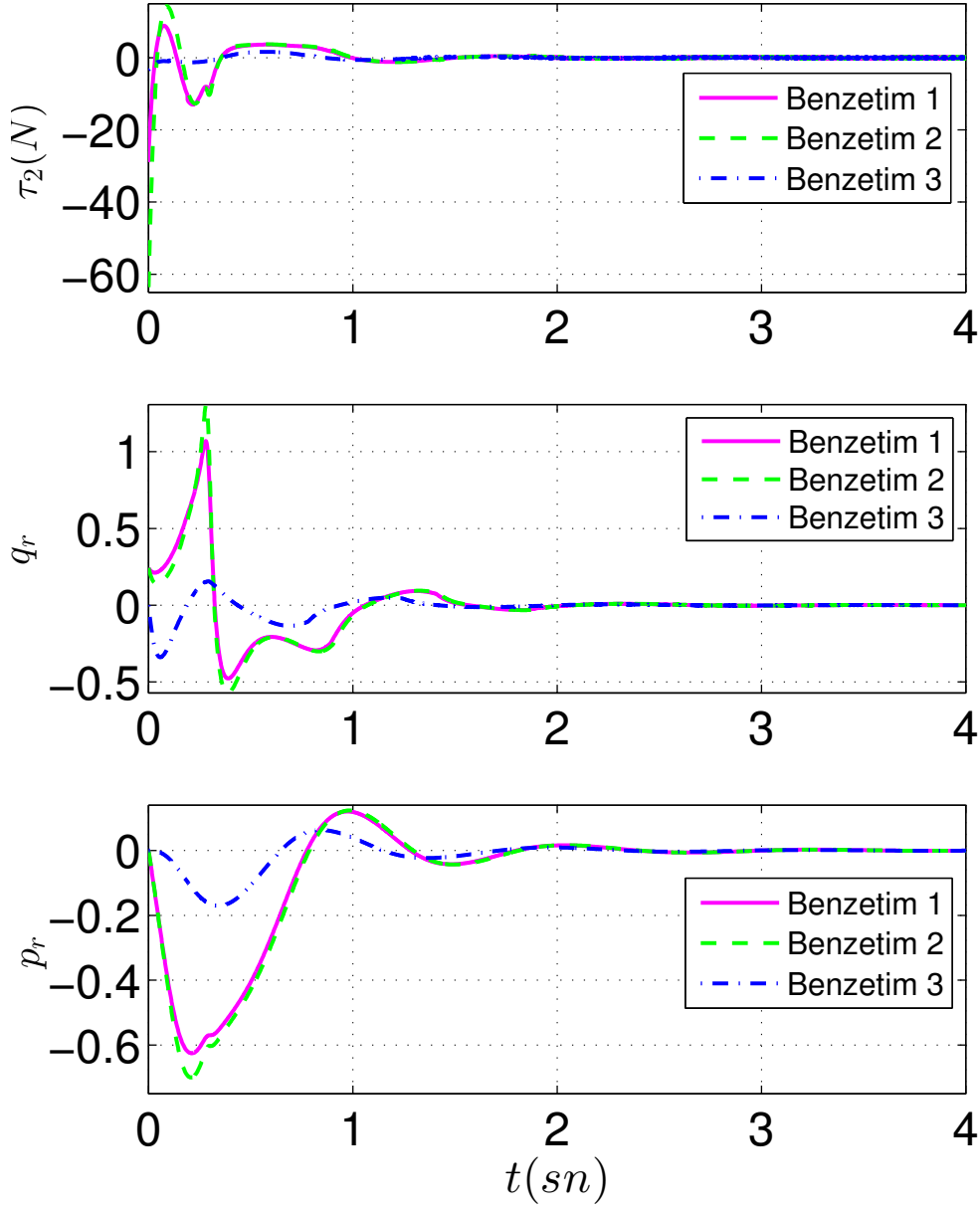
Bu benzetim çalışmalarının yanında araba ters sarkaç üzerinde yukarı yükseltme



**Şekil 5.2** Kararlı kılma problemi: Sarkaç açısının değişimi ve sisteminin konum değişimi,  $[q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2] = [\pi/2 - \pi/12, 0, 0, 0]$  (Benzetim 1),  
 $[q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2] = [\pi/2 - \pi/12, 0.1, 0, 0]$  (Benzetim 2),  
 $[q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2] = [0, 0.1, 0, 0]$  (Benzetim 3).



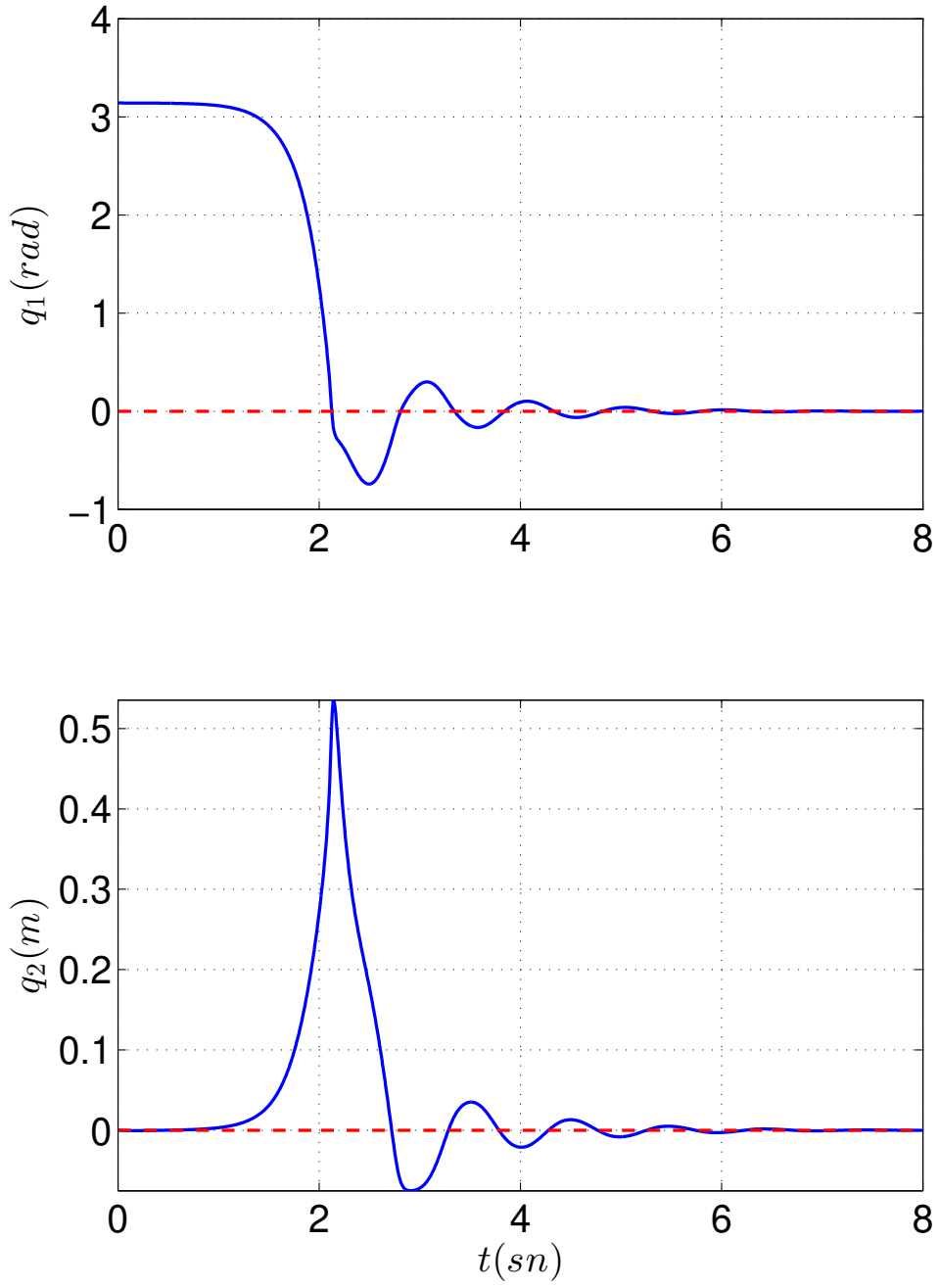
**Şekil 5.3** Kararlı kılma problemi: Sarkaç hızının değişimi ve sisteminin hızının değişimi,  $[q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2] = [\pi/2 - \pi/12, 0, 0, 0]$  (Benzetim 1),  
 $[q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2] = [\pi/2 - \pi/12, 0.1, 0, 0]$  (Benzetim 2),  
 $[q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2] = [0, 0.1, 0, 0]$  (Benzetim 3).



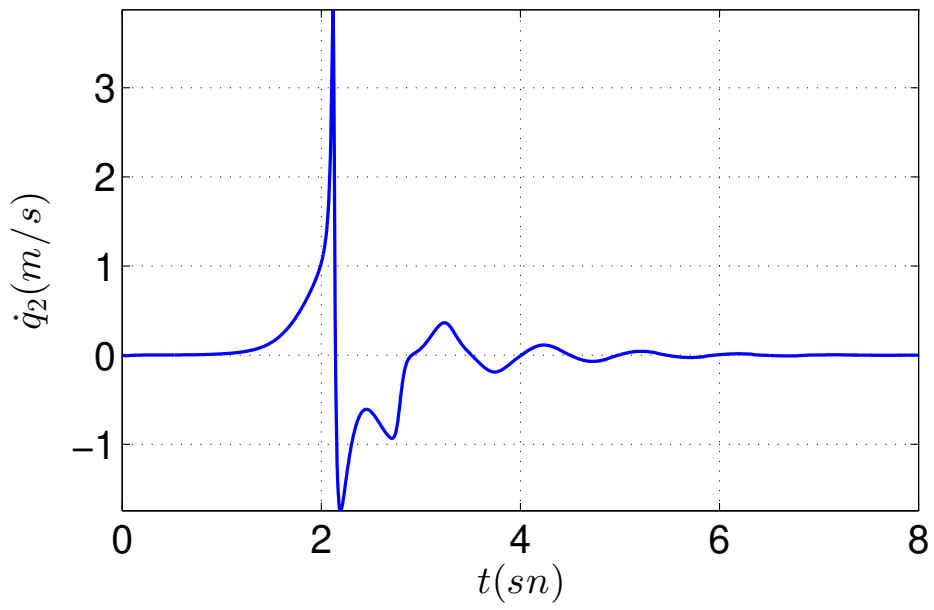
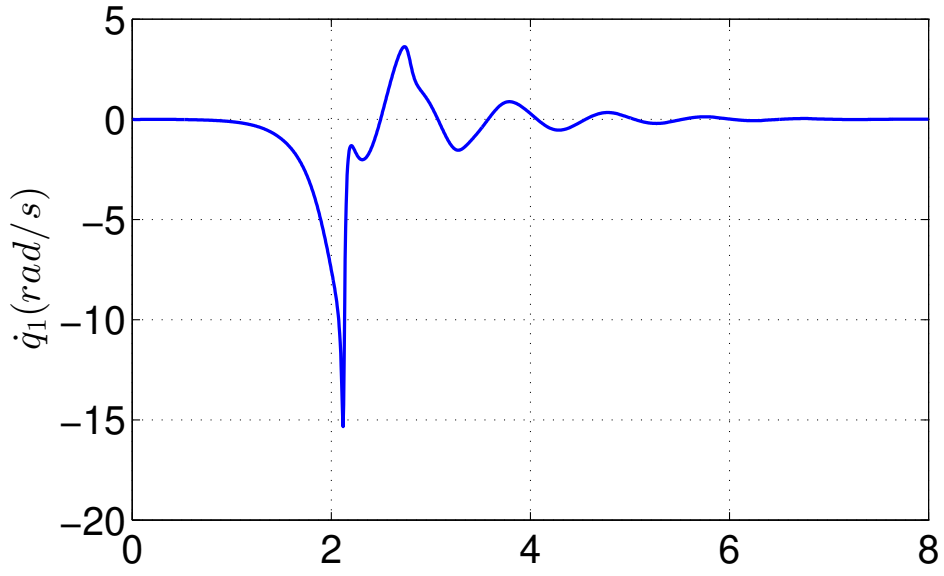
**Şekil 5.4** Kararlı kılma problemi: Kontrol sinyali ve  $(q_r, p_r)$  koordinatlarının değişimi,  $[q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2] = [\pi/2 - \pi/12, 0, 0, 0]$  (Benzetim 1),  
 $[q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2] = [\pi/2 - \pi/12, 0.1, 0, 0]$  (Benzetim 2),  
 $[q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2] = [0, 0.1, 0, 0]$  (Benzetim 3).

problemi de önerilen kontrol yöntemi ile ele alınmıştır. Aynı kontrol tasarım parametreleri atamaları ile sarkaç konumu kararlı denge noktasından ve araç konumu ise sıfır noktasından başlatılarak benzetimler tekrar edilmiştir. Şekil 5.5, 5.6 ve 5.7’de sarkaç açısının değişimi ve sisteminin konum değişimi, sarkaç hızının değişimi ve sisteminin hızının değişimi ve kontrol sinyali ve  $(q_r, p_r)$  koordinatlarının değişimi sunulmaktadır. Benzetim çalışmaları sonucunda ters sarkaç sisteminin yukarı yükseltme problemi başarı ile çözüldüğü görülmektedir.

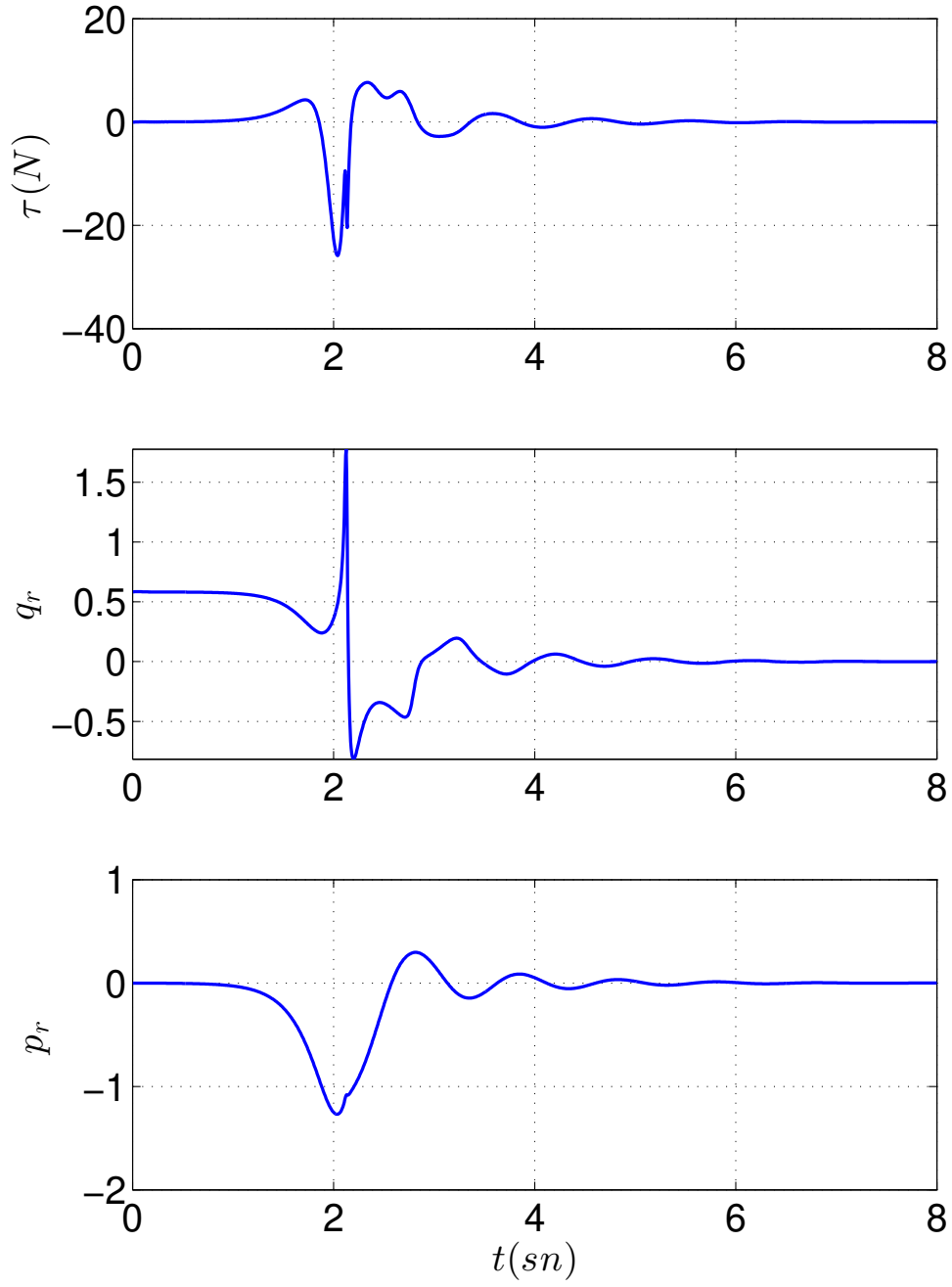




**Şekil 5.5** Yukarı yükseltme problemi: Sarkaç açısının değişimi ve sisteminin konum değişimi.



**Şekil 5.6** Yukarı yükseltme problemi: Sarkaç hızının değişimi ve sisteminin hızının değişimi.



**Şekil 5.7** Yukarı yükseltme problemi: Kontrol sinyali ve  $(q_r, p_r)$  koordinatlarının değişimi.

# 6

## ATALET DİSKLİ SARKAÇ SİSTEMİ

### UYGULAMASI

---

#### 6.1 Atalet Diskli Sarkaç Sisteminin Denklemlerinin Elde Edilmesi

Bu çalışmada ele alınan atalet diskli sarkaç (ADS), ucuna simetrik bir disk takılı olan ve özel bir eksik tahrikli mekanik sistem örneği olan bir sarkaçtan oluşmaktadır. Disk ile sarkaç paralel düzlemlerde dönerler. Sarkacın dönme eksenini pasiftir, yani sarkacın konumuna doğrudan bir tahrik uygulanmaz. Bunun yerine, bir DC motor, dönme ekseninde serbestçe dönebilen tekerleğe doğrudan tork uygular. Bu nedenle, sarkaç tahriksizdir ve sistem, dönen tekerleğin momenti aracılığıyla kontrol edilmektedir. Atalet diskli sarkaç sisteminin temsili gösterimi Şekil 6.1’de gösterilmektedir.

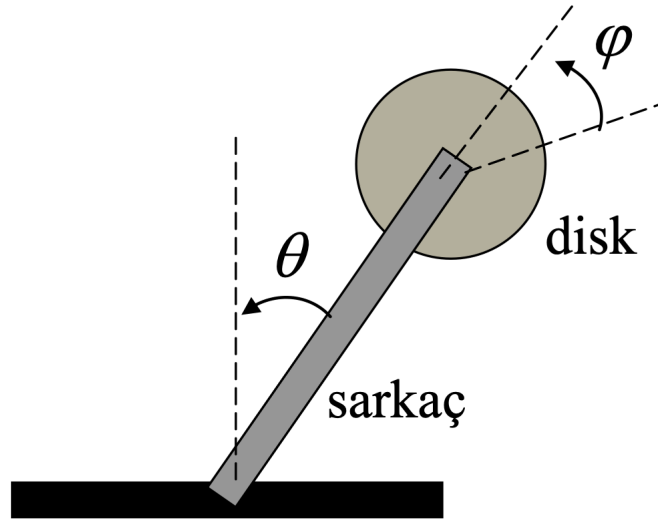
ADS’ nin dinamik modeli, Euler-Lagrange yaklaşımı ile elde edilir. Sistemin kinetik enerjisi  $K$  ve potansiyel enerjisi  $V$  şu şekilde ifade edilir:

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2}m_1l^2\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{q}_2^2 \quad (6.1)$$

$$V = m_1gl \cos(q_1). \quad (6.2)$$

Burada  $m_1$  ve  $m_2$  sarkaç ve disk kütlesi,  $l$  sarkaç uzunluğu,  $g$  yerçekimi ivmesi,  $q_1 = \theta$  sarkaç açısı ve  $q_2 = \varphi$  disk açısıdır.

Lagrangian  $\mathcal{L} = \mathcal{K} - V$  olarak tanımlanır ve Euler-Lagrange denklemleri kullanılarak dinamik denklemler elde edilir:



**Şekil 6.1** Atalet diskli sarkaç sisteminin gösterimi.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \tau_i, \quad i = \{1, 2\} \quad (6.3)$$

Sistem eksik tahrikli olduğu için  $\tau_1 = 0$  alınır ve denklemler aşağıdaki gibi yazılır:

$$m_{11}\ddot{q}_1 + m_{21}\ddot{q}_1 + h_1 = 0 \quad (6.4)$$

$$m_{12}\ddot{q}_1 + m_{22}\ddot{q}_2 + h_2 = \tau_2. \quad (6.5)$$

Burada  $m_{11} = I_1 + I_2$ ,  $m_{22} = I_2$ ,  $m_{21} = m_{12} = I_2$ ,  $h_1 = -m_1gl \sin(q_1)$ ,  $h_2 = 0$  ve  $\tau = \tau_2$  olarak tanımlanmıştır.

Burada  $\tau = [\tau_1 \quad \tau_2]^T$  ile tanımlanmaktadır. Eksik tahrikli bir yapıda olan sistem için  $\tau_1 = 0$  alınmaktadır.

Atalet diskli sarkaç sistemini durum uzay gösterimine geçirmek için  $z_1 = q_1$ ,  $z_2 = \dot{q}_1$ ,  $z_3 = q_2$ ,  $z_4 = \dot{q}_2$  olarak tanımlanırsa,

$$\dot{z}_1 = z_2 \quad (6.6)$$

$$m_{11}\dot{z}_2 + m_{12}\dot{z}_4 + h_1 = 0 \quad (6.7)$$

$$\dot{z}_3 = z_4 \quad (6.8)$$

$$m_{21}\dot{z}_2 + m_{22}\dot{z}_4 + h_2 = \tau_2 \quad (6.9)$$

ifadesi elde edilmektedir. Sistem (6.6)-(6.9)'e (6.10) ile verilen ileri Euler metodu

$$\dot{z}_i \cong \frac{z_i(h+1) - z_i(h)}{T} \quad i = \{1, 2, 3, 4\} \quad (6.10)$$

uygulanırsa

$$\begin{aligned} z_1(h+1) &= z_1(h) + Tz_2(h) \\ z_3(h+1) &= z_3(h) + Tz_4(h) \end{aligned} \quad (6.11)$$

ve

$$\begin{aligned} m_{11}(h) \frac{z_2(h+1) - z_2(h)}{T} + m_{12}(h) \frac{z_4(h+1) - z_4(h)}{T} \\ + h_1(h) = 0 \end{aligned} \quad (6.12)$$

$$\begin{aligned} m_{21}(h) \frac{z_2(h+1) - z_2(h)}{T} + m_{22}(h) \frac{z_4(h+1) - z_4(h)}{T} \\ + h_2(h) = \tau_2 \end{aligned} \quad (6.13)$$

ifadesi elde edilmektedir.  $(z_2(h+1) - z_2(h))/T$  çekilip diğer denklemde yerine yazıldığında ve

$$\begin{aligned} \tau_2(h) &= -m_{21}(h)m_{11}^{-1}(h)h_1(h) + h_2(h) + (m_{22}(h) \\ &- m_{21}(h)m_{11}^{-1}(h)m_{12}(h))(u(h) - z_4(h)) \end{aligned} \quad (6.14)$$

olarak verilirse,

$$z_1(h+1) = z_1(h) + Tz_2(h) \quad (6.15)$$

$$z_2(h+1) = z_2(h) - Tm_{11}^{-1}m_{12}(u - z_4(h)) - Tm_{11}^{-1}h_1 \quad (6.16)$$

$$z_3(h+1) = z_3(h) + Tz_4(h) \quad (6.17)$$

$$z_4(h+1) = (1 - T)z_4(h) + Tu(h) \quad (6.18)$$

ifadesi elde edilmektedir.

## 6.2 Koordinat Dönüşümü

Kısmi olarak doğrusallaştırılmış atalet diskli sarkaç sistem dinamiği, doğrusal olmayan bir koordinat dönüşümü sayesinde dördüncü mertebeden ayrık zamanlı bir dinamiğe dönüştürülmektedir. Ayrıca, elde edilen sistem dinamiğine kolaylıkla kayan kipli kontrol yöntemi uygulanmaktadır.

$(q_r, p_r)$  yeni koordinatları temsil etmek üzere;

$$q_r(h) = m_{11}(h-1)z_1(h) + m_{12}(h-1)z_4(h-1) \quad (6.19)$$

$$p_r(h) = m_{11}(h)z_2(h) + m_{12}(h)z_4(h) + Th_1(h-1) \quad (6.20)$$

şeklinde ayrık zamanlı bir koordinat dönüşümü önerilmektedir. Burada önerilen doğrusal olmayan koordinat dönüşümü [27] çalışmasında önerilen koordinat dönüşümünün oldukça basitleştirilmiş halidir.  $\phi_1(h) = -m_{12}(h-1)x_4(h-1)$ ,  $\phi_2(h) = -Th_1(h-1)$  olmak üzere, (6.19)- (6.20) denklemlerinin bir örnekleme zamanı sonrasındaki dinamiği

$$q_r(h+1) = q_r(h) + p_r(h) + \phi_1(h) \quad (6.21)$$

$$p_r(h+1) = p_r(h) + \phi_2(h) \quad (6.22)$$

olarak hesaplanmaktadır. Bu dönüşüm sonrasında, (6.15)-(6.18) denklem grubu

$$q_r(h+1) = q_r(h) + p_r(h) + \phi_1(h) \quad (6.23)$$

$$p_r(h+1) = p_r(h) + \phi_2(h) \quad (6.24)$$

$$x_3(h+1) = x_3(h) + Tx_4(h) \quad (6.25)$$

$$x_4(h+1) = (1-T)x_4(h) + Tu(h) \quad (6.26)$$

halini almaktadır.

### 6.3 Atalet Diskli Sarkaç Sisteminin Kayan Kipli Kontrolü

Eşitlik kontrol tabanlı ayrık zamanlı kayan kipli kontrolcü için daha sonra önerilecek kayma yüzeyinin ( $s(h)$ ) bir örnekleme zamanı boyunca farkı, farklı bir ifadeyle exponansiyel erişim kuralı

$$s(h+1) - s(h) = -qTs(h) - \epsilon T \text{sign}(s(h)) \quad (6.27)$$

biçiminde yazılabilmektedir [44, 45] ki burada  $q > 0$  ve  $\epsilon > 0$  kontrolcü tasarım kazançlarıdır ve  $1 - qT > 0$  eşitsizliğini sağlayacak şekilde seçilmektedir. Kayma yüzeyi  $s(h)$

$$s(h) = k_1q_r + k_2p_r + k_3z_3 + z_4 \quad (6.28)$$

biçiminde seçilirse, (6.15)- (6.18) kullanılarak  $s(h + 1)$

$$\begin{aligned}
s(h + 1) &= k_1 q_r(h + 1) + k_2 p_r(h + 1) \\
&+ k_3 z_3(h + 1) + z_4(h + 1) \\
&= k_1(q_r + p_r + \phi_1) + k_2(p_r + \phi_2) \\
&+ k_3(z_3 + Tz_4) + (1 - T)z_4 + Tu
\end{aligned} \tag{6.29}$$

şeklinde elde edilmektedir. (6.27) eşitliğini elde etmek için sisteme uygulanması gereken kontrol sinyali

$$\begin{aligned}
u(h) &= \\
&- \left( \frac{k_1(p_r + \phi_1) + k_2\phi_2}{T} + (k_3 - 1)z_4 + qs + \epsilon \text{sign}(s) \right)
\end{aligned} \tag{6.30}$$

şeklinde tasarlanmaktadır. Bu noktada, erişim kuralının yakınsama analizi için aday Lyapunov fonksiyonu  $\mathcal{V}(h)$

$$\mathcal{V}(h) = s^2(h) \tag{6.31}$$

olarak seçilirse ve

$$\begin{aligned}
\Delta \mathcal{V} &= \mathcal{V}(h + 1) - \mathcal{V}(h) \\
&= s^2(h + 1) - s^2(h) < 0, \quad s(h) \neq 0
\end{aligned} \tag{6.32}$$

sağlanması durumunda ayrık zamanlı doğrusal olmayan sistem (6.15-6.18) asimptotik olarak kararlı olmaktadır. Örnekleme zamanının yeterince küçük ve  $q$  kontrolcü değişkeni  $(2 - qT) > 0$  eşitsizliğini sağlayacak şekilde seçilmek üzere, (6.32) eşitsizliğini,

$$s(h + 1) - s(h) = -(qT|s| + \epsilon T) \text{sign}(s) \tag{6.33}$$

$$s(h + 1) + s(h) = ((2 - qT)|s| - \epsilon T) \text{sign}(s) \tag{6.34}$$

eşitlikleri ve

$$\text{Eğer } s > 0 \text{ ise } (6.33) < 0 \text{ \& } (6.34) > 0$$

$$\text{Eğer } s < 0 \text{ ise } (6.33) > 0 \text{ \& } (6.34) < 0$$

durumları göz önünde bulundurularak

$$\begin{aligned}
& s^2(h+1) - s^2(h) \\
&= (s(h+1) - s(h))(s(h+1) + s(h)) \\
&= - (qT|s| + \epsilon T) ((2 - qT)|s| - \epsilon T) (\text{sign}(s))^2 \\
&= - (qT|s| + \epsilon T) ((2 - qT)|s| - \epsilon T) < 0 \quad (6.35)
\end{aligned}$$

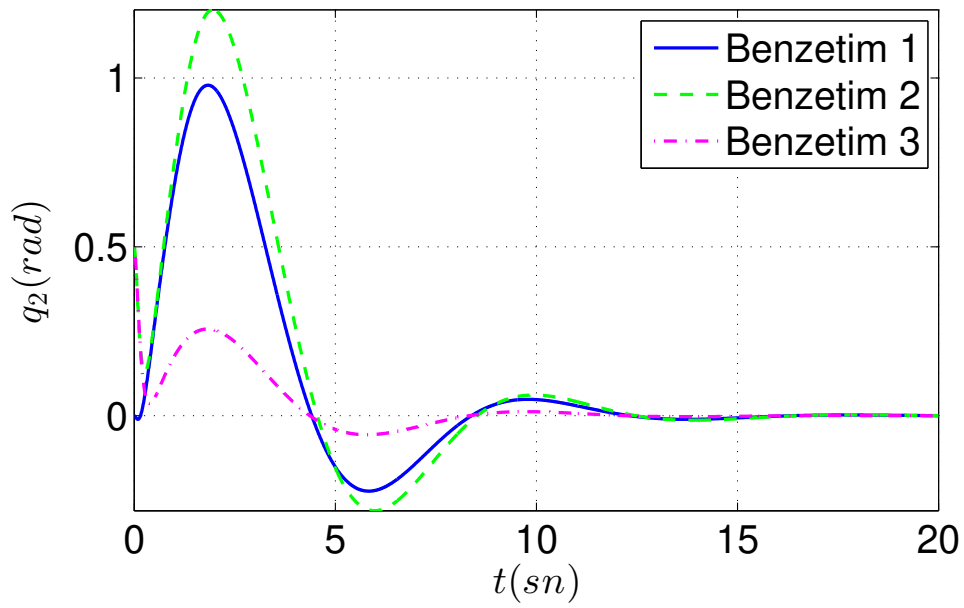
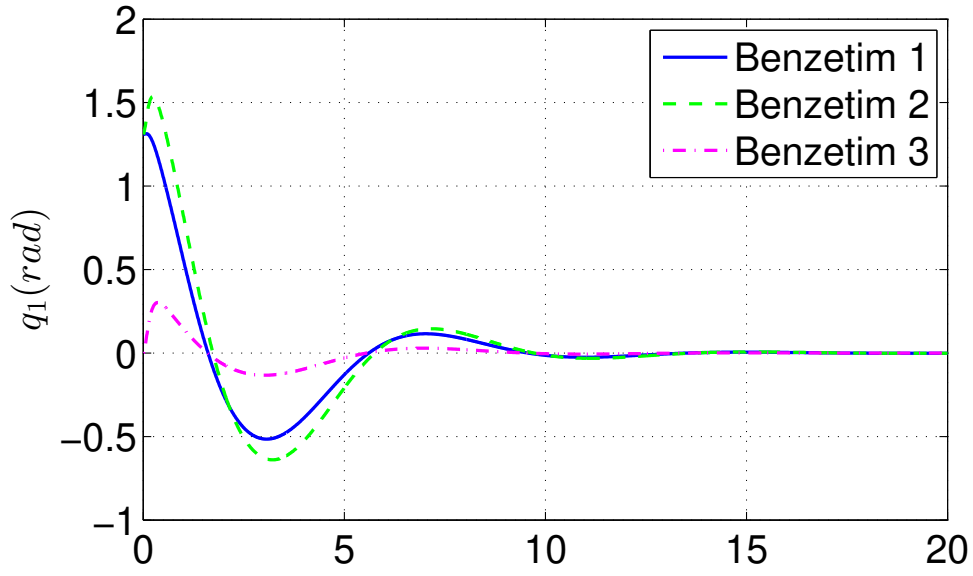
şeklinde gösterilmektedir. Böylece tasarlanan kontrol kuralı (6.30),(6.15-6.18) sistemini asimptotik olarak kararlı kılmaktadır [46]. Ayrıca, (6.15) ve (6.16) denklemlerine uygulanan koordinat dönüşümü (4.9) ve (4.10),  $z_4$  durumunun sıfıra sürülmesi durumunda  $z_1$  ve  $z_2$  durumlarının denge noktasına sürülmesini garanti etmektedir.

#### 6.4 Atalet Diskli Sarkaç Sisteminin Benzetim Çalışmaları

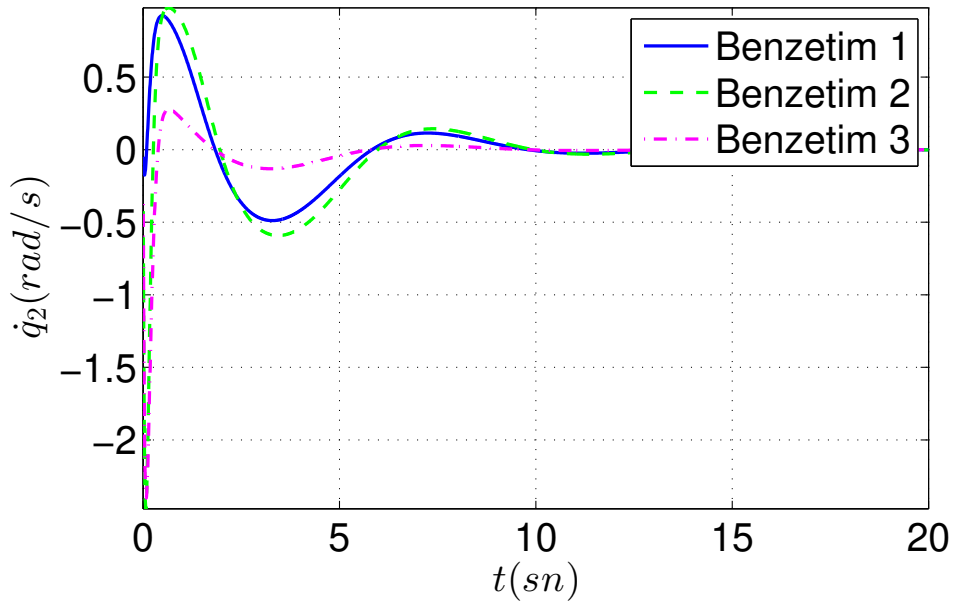
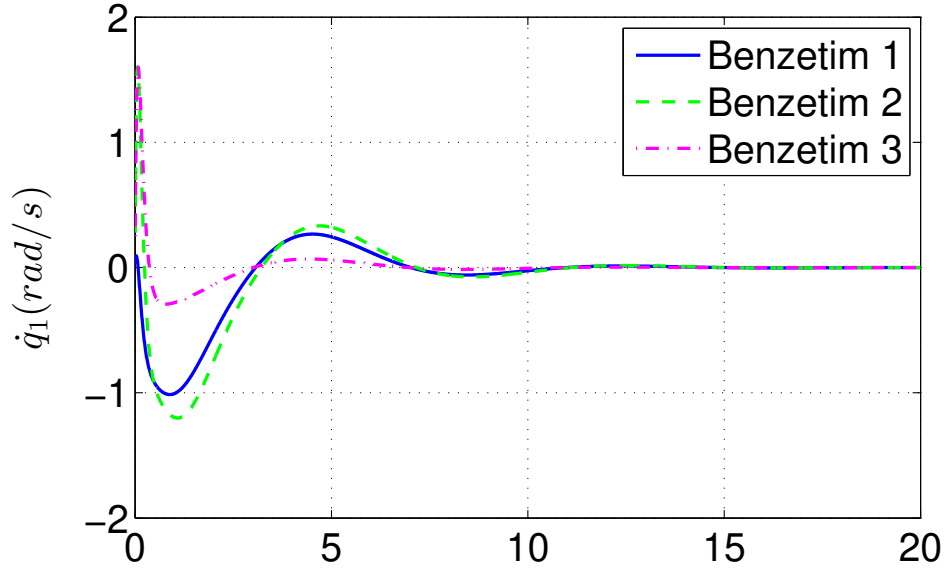
Eksik tahrikli atalet diskli sarkaç sistemi için önerilen ayırık zamanlı kontrol yapısının etkinliğinin gösterilmesi, MATLAB ortamında yapılan benzetim çalışmaları ile gerçekleştirilmiştir. Benzetim çalışmalarında çözücü adım süresi  $100\mu s$ , kontrolcü örnekleme süresi ise  $50ms$  olarak ayarlanmıştır. Benzetimlerde kullanılan sistem parametre değerleri belirtilen çalışmadan  $m_1 = 0.1\text{ kg}$ ,  $m_2 = 0.11\text{ kg}$ ,  $I_1 = 0.1\text{ kg m}^2$ ,  $I_2 = 0.1\text{ kg m}^2$ ,  $l = 0.2\text{ m}$  ve  $g = 9.8\text{ m/s}^2$  olarak alınmıştır. Kontrolcü kazançları  $k_1 = 0.1$ ,  $k_2 = 100$ ,  $k_3 = 20$ ,  $k_4 = 2$ ,  $\nu = 15$  ve  $\epsilon = 0.01$  olarak atanmıştır.

Önerilen yöntemin etkinliği üç farklı başlangıç değerlerinde test edilmiştir. Her bir başlangıç noktası sırasıyla  $[q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2] = [\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}, 0, 0, 0]$  (Benzetim 1),  $[q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2] = [\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}, 0.5, 0, 0]$  (Benzetim 2),  $[q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2] = [0, 0.5, 0, 0]$  (Benzetim 3) olarak seçilmiştir. Farklı başlangıç noktalarından başlatılan atalet diskli sarkaç sisteminin önerilen ayırık zamanlı kontrolcü altındaki davranışı, Şekil 6.2, 6.3 ve 6.4'te sunulmaktadır. Elde edilen sonuçlar neticesinde, hem sarkaç açısı hem de disk pozisyonunun denge noktasına yaklaşık 10 sn'de oturduğu görülmektedir. Teorik analizlerin ışığında, benzetim sonuçlarından anlaşılmaktadır ki kısmi geri beslemeli kontrolcü sonrasında daha basit bir dinamik yapıya uygulanan koordinat dönüşümü tabanlı kayan kipli kontrolcünün başarısı görülmektedir.

Bu benzetim çalışmalarının yanında atalet diskli sarkaç üzerinde yukarı yükseltme problemi de önerilen kontrol yöntemi ile ele alınmaktadır. Aynı kontrol tasarım parametreleri atamaları ile sarkaç konumu kararlı denge noktasından ve disk açısı



**Şekil 6.2** Kararlı kılma problemi: Sarkaç açısının değişimi ve disk açısının değişimi,  $[q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2] = [\pi/2 - \pi/12, 0, 0, 0]$  (Benzetim 1),  
 $[q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2] = [\pi/2 - \pi/12, 0.5, 0, 0]$  (Benzetim 2),  
 $[q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2] = [0, 0.5, 0, 0]$  (Benzetim 3).

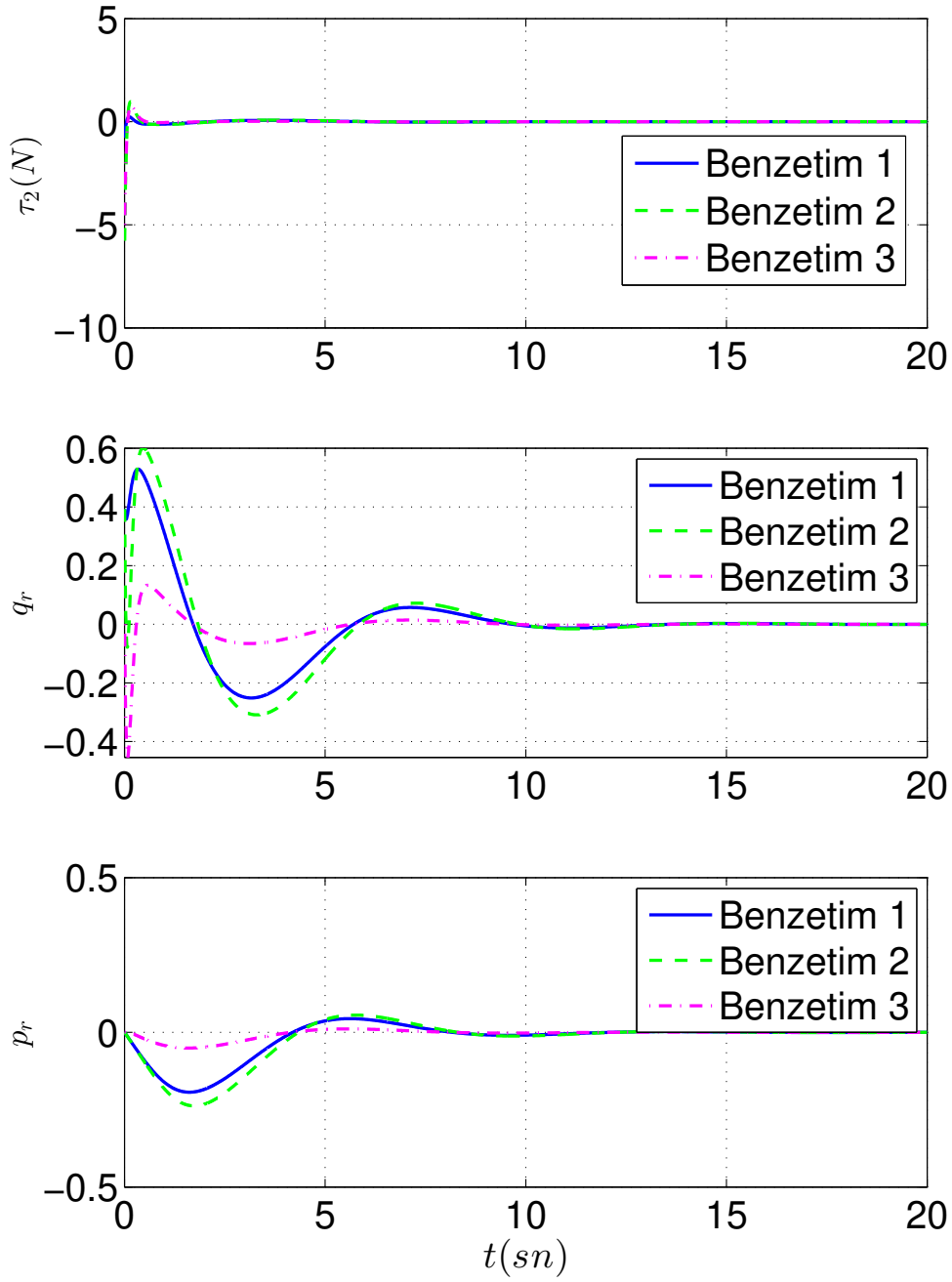


**Şekil 6.3** Kararlı kılma problemi: Sarkaç hızının değişimi ve disk hızının değişimi,

$$[q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2] = [\pi/2 - \pi/12, 0, 0, 0] \text{ (Benzetim 1),}$$

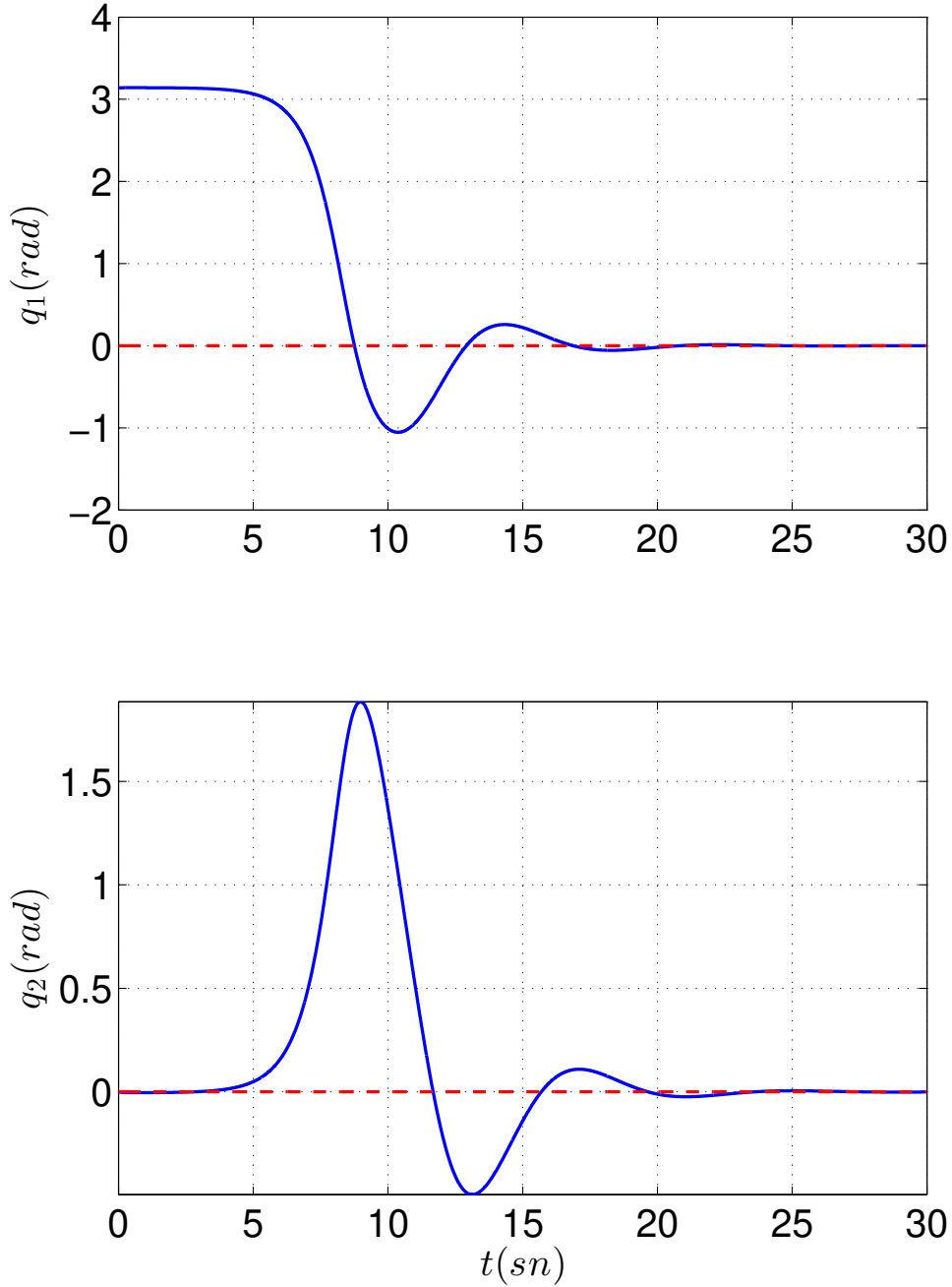
$$[q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2] = [\pi/2 - \pi/12, 0.5, 0, 0] \text{ (Benzetim 2),}$$

$$[q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2] = [0, 0.5, 0, 0] \text{ (Benzetim 3).}$$

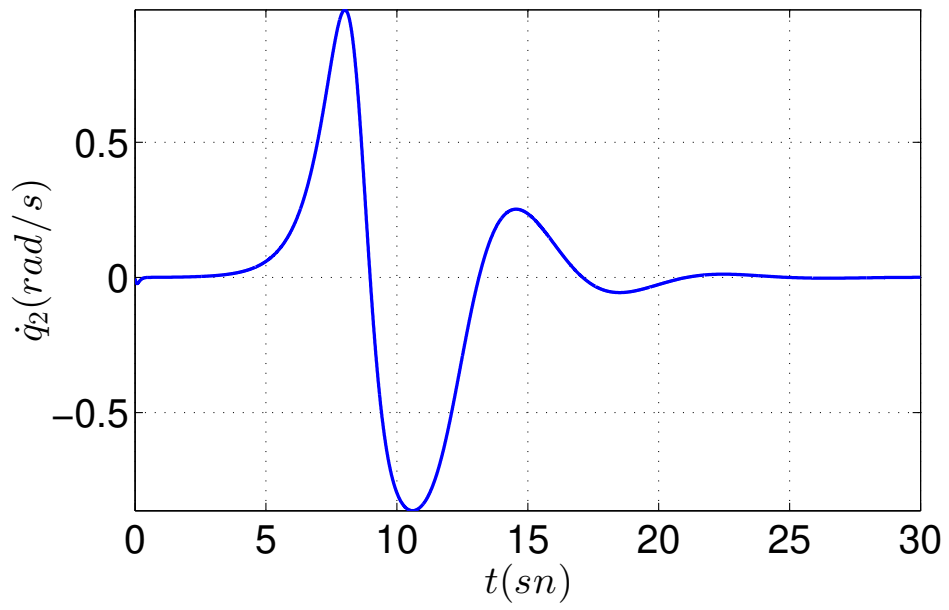
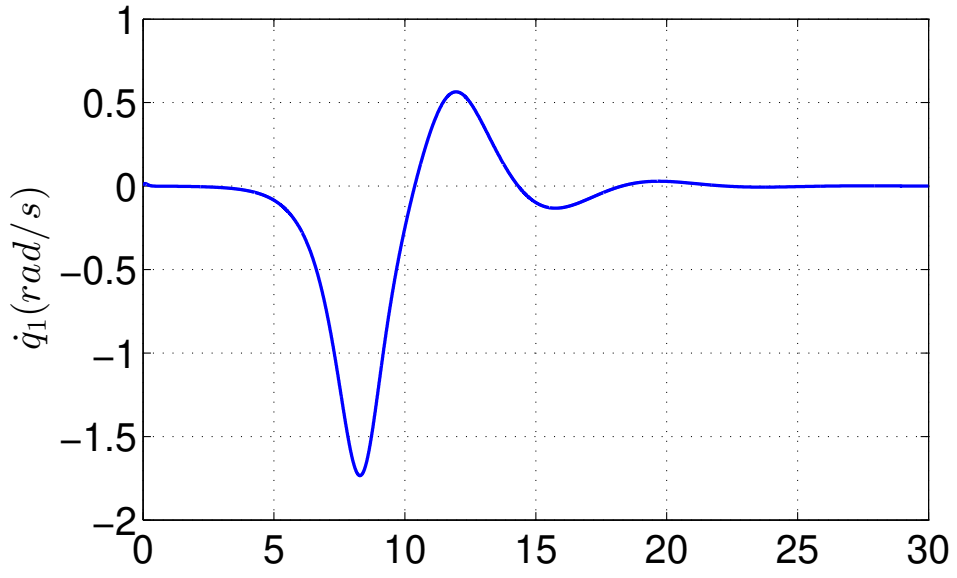


**Şekil 6.4** Kararlı kılma problemi: Kontrol sinyali ve  $(q_r, p_r)$  koordinatlarının değişimi,  $[q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2] = [\pi/2 - \pi/12, 0, 0, 0]$  (Benzetim 1),  
 $[q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2] = [\pi/2 - \pi/12, 0.5, 0, 0]$  (Benzetim 2),  
 $[q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2] = [0, 0.5, 0, 0]$  (Benzetim 3).

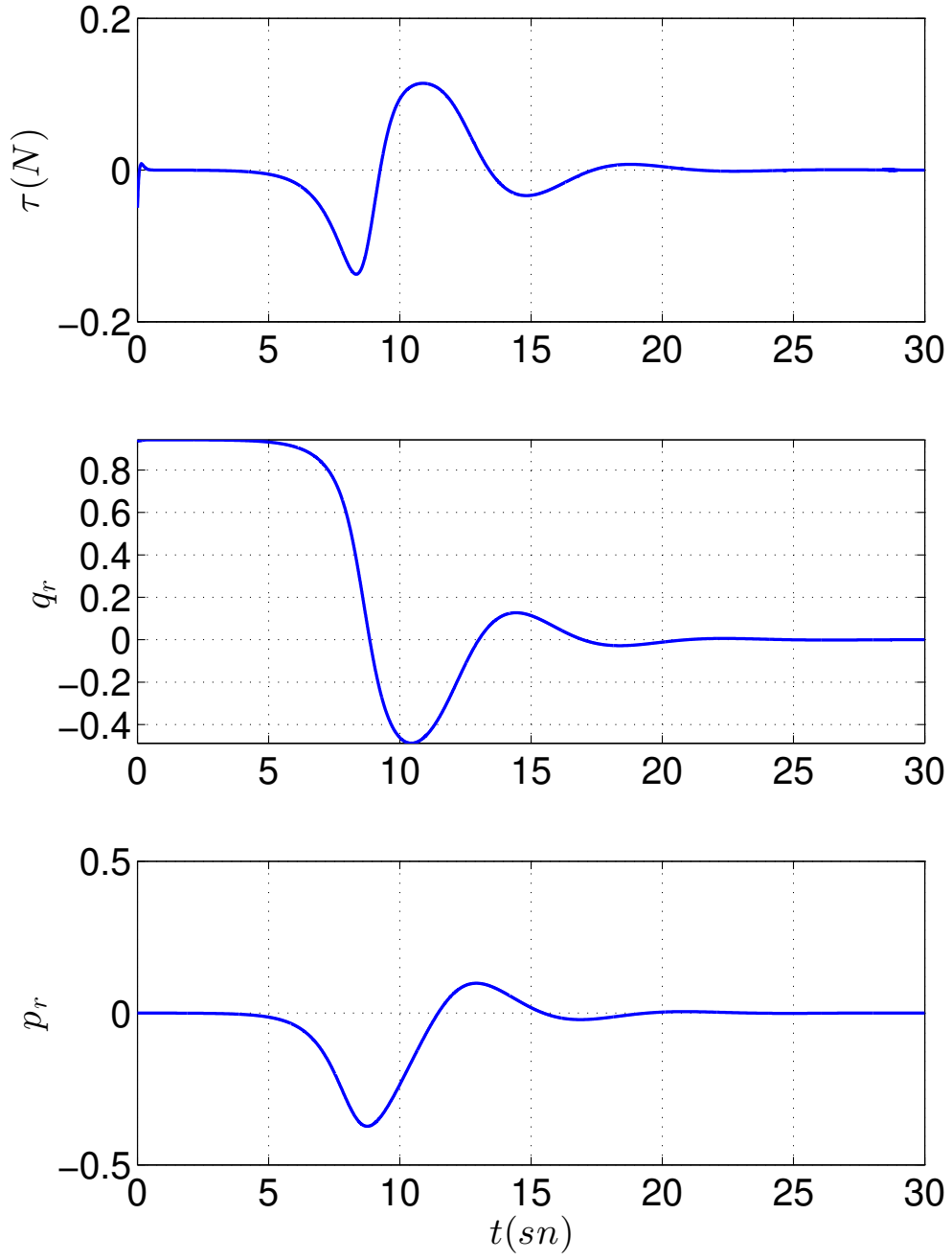
ise sıfır noktasından başlatılarak benzetimler tekrar edilmiştir. Şekil 6.5, 6.6 ve 6.7’de sarkaç açısının değişimi ve disk konum değişimi, sarkaç hızının değişimi ve disk hızının değişimi ve kontrol sinyali ve  $(q_r, p_r)$  koordinatlarının değişimi sunulmaktadır. Benzetim çalışmaları sonucunda atalet diskli sarkaç sisteminin yukarı yükseltme problemi başarı ile çözüldüğü görülmektedir.



**Şekil 6.5** Yukarı yükseltme problemi: Sarkaç açısının değişimi ve disk konum değişimi.



**Şekil 6.6** Yukarı yükseltme problemi: Sarkaç hızının değişimi ve disk hızının değişimi.



**Şekil 6.7** Yukarı yükseltme problemi: Kontrol sinyali ve  $(q_r, p_r)$  koordinatlarının değişimi.

# 7

## SONUÇ

---

Bu çalışmada, bir sınıf eksik tahrikli doğrusal olmayan mekanik sistem için ayrık zamanlı koordinat dönüşümü tabanlı kayan kipli kontrol tasarımı, kararsız denge noktasının kararlılaştırılması için gerçekleştirilmiştir. Bahsedilen doğrusal olmayan eksik tahrikli doğrusal olmayan sistem sınıfından iki örnek sistem üzerinde önerilen kontrol yapısı test edilmiştir. Araba sarkaç ve atalet diskli sarkaç sistemi için ayrık zamanlı kayan kipli bir kontrolcü yapısı önerilmiştir. Sistemlerin asimptotik kararlılığı uygun bir aday Lyapunov fonksiyonu ile gösterilmiştir. Ayrık zamanlı kontrolcü öncesinde kısmi geri beslemeli bir iç döngü kontrolcü verilmiştir. Sonrasında, geri besleme ile kısmi doğrusallaştırılmış sisteme uygulanacak kontrol tasarımını basitleştirmek amaçlı doğrusal olmayan sistemlerde ayrık zamanlı bir koordinat dönüşümü uygulanmıştır. Ardından, kayan kipli kontrol yöntemi ile sistemin kararsız denge noktasında kararlılığı sağlanmaktadır. Kapalı çevrim sistemin asimptotik kararlılığından bahsedildikten sonra farklı başlangıç noktalarından başlatılan sistemleri benzetim çalışmaları gerçekleştirilmiştir.

Sistemlerin benzetim sonrası sonuçlarına bakıldığında araba sarkaç sistemi için hem sarkaç açısı kararsız denge noktasına hem de araba pozisyonunu sıfır denge noktasına yaklaşık 2 sn'de, atalet diskli sarkaç modelinde ise, sarkaç açısı ve disk pozisyonunun denge noktasına yaklaşık 10 sn'de oturduğu görülmektedir. Bunun yanında koordinat dönüşümü değişkenlerinin  $(q_r, p_r)$  kontrolcü tarafından kararlı kılındığı gözlemlenmektedir. Benzetim çalışmalarından 3 farklı başlangıç durumlarıyla kontrolcü test edilmiş olup, ikinci dereceden eksik tahrikli sistemlerin alt sistemi olarak hem araba sarkaç hem de atalet diskli sarkaç sistemleri, kısmi geri beslemeli kontrolcü sonrasında daha basit bir dinamik yapıya uygulanan koordinat dönüşümü tabanlı ayrık zamanlı kayan kipli kontrolcü yapısının başarısını göstermektedir. Ayrıca sistemlerin yukarı kaldırma problemleri de incelenmiş olup, benzetim çalışmalarında bu problemin çözümünde de başarılı olduğu görülmektedir.

Bu çalışma sonrasında, önerilen kontrolcü yapısının sistem belirsizlikleri ve dış

bozucuların varlığında geliştirilmesi, bilinen kontrol yapıları ile karşılaştırılması ve farklı eksik tahrikli doğrusal olmayan sistemlere uygulanması hedeflenmektedir. Kontrolcünün etkinliği, gerçekleştirilecek deneysel çalışmalarla teorik bulgular desteklenecektir. Bu çalışmaların sonucunda, önerilen kontrol yönteminin geniş bir uygulama alanına sahip olduğu ve çeşitli mekanik sistemlerin kontrolünde ayrık zamanlı koordinat dönüşümü tabanlı kayan kipli kontrol tasarımı etkili bir araç olarak kullanılabileceği öngörülmektedir.



- [1] K. Rsetam, Z. Cao, Z. Man, “Design of robust terminal sliding mode control for underactuated flexible joint robot,” *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, vol. 52, no. 7, pp. 4272–4285, 2021.
- [2] K. Rsetam, Z. Cao, Z. Man, “Cascaded-extended-state-observer-based sliding-mode control for underactuated flexible joint robot,” *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 67, no. 12, pp. 10 822–10 832, 2019.
- [3] B. He, S. Wang, Y. Liu, “Underactuated robotics: A review,” *International Journal of Advanced Robotic Systems*, vol. 16, no. 4, p. 1 729 881 419 862 164, 2019.
- [4] J.-X. Xu, Z.-Q. Guo, T. H. Lee, “Design and implementation of integral sliding-mode control on an underactuated two-wheeled mobile robot,” *IEEE Transactions on industrial electronics*, vol. 61, no. 7, pp. 3671–3681, 2013.
- [5] P. Oryschuk, A. Salerno, A. M. Al-Husseini, J. Angeles, “Experimental validation of an underactuated two-wheeled mobile robot,” *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, vol. 14, no. 2, pp. 252–257, 2009.
- [6] R. Olfati-Saber, “Nonlinear control of underactuated mechanical systems with application to robotics and aerospace vehicles,” Ph.D. dissertation, Massachusetts Institute of Technology, 2001.
- [7] C. Yang, Z. Li, R. Cui, B. Xu, “Neural network-based motion control of an underactuated wheeled inverted pendulum model,” *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, vol. 25, no. 11, pp. 2004–2016, 2014.
- [8] Y. Liu, H. Yu, “A survey of underactuated mechanical systems,” *IET Control Theory & Applications*, vol. 7, no. 7, pp. 921–935, 2013.
- [9] I. Bsili, J. Ghabi, H. Messaoud, “Discrete sliding mode control of inverted pendulum,” in *2015 World Symposium on Mechatronics Engineering & Applied Physics (WSMEAP)*, IEEE, 2015, pp. 1–6.
- [10] M. KALAYCI, İ. YİĞİT, “Pratikte kullanılan bazı kayan kipli kontrol tekniklerinin teorik ve deneysel incelenmesi,” *Gazi Üniversitesi Mühendislik Mimarlık Fakültesi Dergisi*, vol. 30, no. 1, 2015.
- [11] S. Zaare, M. R. Soltanpour, “Adaptive fuzzy global coupled nonsingular fast terminal sliding mode control of n-rigid-link elastic-joint robot manipulators in presence of uncertainties,” *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 163, p. 108 165, 2022.
- [12] I. Fantoni, R. Lozano, R. Lozano, *Non-linear control for underactuated mechanical systems*. Springer Science & Business Media, 2002.

- [13] M. W. Spong, P. Corke, R. Lozano, “Nonlinear control of the reaction wheel pendulum,” *Automatica*, vol. 37, no. 11, pp. 1845–1851, 2001.
- [14] J. G. Romero, A. Donaire, R. Ortega, P. Borja, “Global stabilisation of underactuated mechanical systems via pid passivity-based control,” *IFAC-PapersOnLine*, vol. 50, no. 1, pp. 9577–9582, 2017.
- [15] R. Ortega, E. Garcia-Canseco, “Interconnection and damping assignment passivity-based control: A survey,” *European Journal of control*, vol. 10, no. 5, pp. 432–450, 2004.
- [16] W.-S. Man, J.-S. Lin, “Nonlinear control design for a class of underactuated systems,” in *Control Applications (CCA), 2010 IEEE International Conference on*, IEEE, 2010, pp. 1439–1444.
- [17] A. Choukchou-Braham, B. Cherki, M. Djemai, “A backstepping procedure for a class of underactuated system with tree structure,” in *Communications, Computing and Control Applications (CCCA), 2011 International Conference on*, IEEE, 2011, pp. 1–6.
- [18] S. Rudra, R. K. Barai, M. Maitra, “Nonlinear state feedback controller design for underactuated mechanical system: A modified block backstepping approach,” *ISA transactions*, vol. 53, no. 2, pp. 317–326, 2014.
- [19] A.-C. Huang, Y.-F. Chen, C.-Y. Kai, *Adaptive Control of Underactuated Mechanical Systems*. World Scientific, 2015.
- [20] W. Wang, J. Yi, D. Zhao, D. Liu, “Design of a stable sliding-mode controller for a class of second-order underactuated systems,” *IEE Proceedings-Control Theory and Applications*, vol. 151, no. 6, pp. 683–690, 2004.
- [21] C.-C. Kung, T.-H. Chen, L.-C. Huang, “Adaptive fuzzy sliding mode control for a class of underactuated systems,” in *Fuzzy Systems, 2009. FUZZ-IEEE 2009. IEEE International Conference on*, IEEE, 2009, pp. 1791–1796.
- [22] R. Hmidi, A. Ben Brahim, S. Dhahri, F. Ben Hmida, A. Sellami, “Sliding mode fault-tolerant control for takagi-sugeno fuzzy systems with local nonlinear models: Application to inverted pendulum and cart system,” *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, vol. 43, no. 4, pp. 975–990, 2021.
- [23] K. Srinivas, L. Behera, “Swing-up control strategies for a reaction wheel pendulum,” *International Journal of Systems Science*, vol. 39, no. 12, pp. 1165–1177, 2008.
- [24] H. Gritli, N. Khraief, A. Chemori, S. Belghith, “Self-generated limit cycle tracking of the underactuated inertia wheel inverted pendulum under ida-abc,” *Nonlinear Dynamics*, vol. 89, pp. 2195–2226, 2017.
- [25] Y. Rizal, R. Mantala, S. Rachman, N. Nurmahaludin, “Balance control of reaction wheel pendulum based on second-order sliding mode control,” in *2018 International Conference on Applied Science and Technology (iCAST)*, IEEE, 2018, pp. 51–56.
- [26] I. Siradjuddin, E. Pradani, E. Rohadi, S. Adhisuwignjo, M. Kusumawardani, I. Fitriani, “Designing, implementing and analysing optimal controllers on a non-linear reaction wheel pendulum,” in *Journal of Physics: Conference Series*, IOP Publishing, vol. 1402, 2019, p. 044 025.

- [27] F. Adıgüzel, Y. Yalçın, “Backstepping control for a class of underactuated nonlinear mechanical systems with a novel coordinate transformation in the discrete-time setting,” *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering*, vol. 236, no. 6, pp. 1211–1223, 2022.
- [28] S. H. Zabihifar, H. Navvabi, A. S. Yushchenko, “Dual adaptive neural network controller for underactuated systems,” *Robotica*, vol. 39, no. 7, pp. 1281–1298, 2021.
- [29] D. Gutiérrez-Oribio, J. A. Mercado-Urbe, J. A. Moreno, L. Fridman, “Robust global stabilization of a class of underactuated mechanical systems of two degrees of freedom,” *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 31, no. 9, pp. 3908–3928, 2021.
- [30] S. Riachy, Y. Orlov, T. Floquet, R. Santiesteban, J.-P. Richard, “Second-order sliding mode control of underactuated mechanical systems i: Local stabilization with application to an inverted pendulum,” *International Journal of Robust and Nonlinear Control: IFAC-Affiliated Journal*, vol. 18, no. 4-5, pp. 529–543, 2008.
- [31] W. Wang, X. Liu, J. Yi, “Structure design of two types of sliding-mode controllers for a class of under-actuated mechanical systems,” *IET Control Theory & Applications*, vol. 1, no. 1, pp. 163–172, 2007.
- [32] I. Shah, F. U. Rehman, “Smooth second order sliding mode control of a class of underactuated mechanical systems,” *IEEE Access*, vol. 6, pp. 7759–7771, 2018.
- [33] M. Idrees, S. Ullah, S. Muhammad, “Sliding mode control design for stabilization of underactuated mechanical systems,” *Advances in Mechanical Engineering*, vol. 11, no. 5, p. 1 687 814 019 842 712, 2019.
- [34] L. G. Sümer, Y. Yalçın, “A direct discrete-time ida-pbc design method for a class of underactuated hamiltonian systems,” *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 44, no. 1, pp. 13 456–13 461, 2011.
- [35] E. Franco, “Discrete-time ida-pbc for underactuated mechanical systems with input-delay and matched disturbances,” in *2018 26th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED)*, IEEE, 2018, pp. 1–9.
- [36] F. Adıgüzel, Y. Yalçın, “Discrete-time backstepping control with nonlinear adaptive disturbance attenuation for the inverted-pendulum system,” *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, vol. 43, no. 5, pp. 1068–1076, 2021.
- [37] J. Garcia, J. Ribeiro, J. Silva, E. Martins, “Continuous-time and discrete-time sliding mode control accomplished using a computer,” *IEE Proceedings-Control Theory and Applications*, vol. 152, no. 2, pp. 220–228, 2005.
- [38] R. Ngadengon, Y. Sam, J. Osman, R. Ghazali, “Controller design for inverted pendulum system using discrete sliding mode control,” in *2011 2nd International Conference on Instrumentation Control and Automation*, IEEE, 2011, pp. 130–133.
- [39] V. I. Utkin, “Sliding mode control in discrete-time and difference systems,” *Variable structure and Lyapunov control*, pp. 87–107, 1994.

- [40] L. Menini, *Non-linear control for underactuated mechanical systems: Isabelle Fantoni and Rogelio Lozano; Springer, London, 2002, ISBN 1-85233-423-1*. 2002, vol. 38, pp. 3–10.
- [41] A. Choukchou-Braham, C. Brahim, M. Djemai, K. Busawon, *Analysis and Control of Underactuated Mechanical Systems*. 2014, pp. 15–17.
- [42] M. Spong, “Partial feedback linearization of underactuated mechanical systems,” in *Proceedings of IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS’94)*, vol. 1, 1994, 314–321 vol.1.
- [43] F. Adigüzel, Y. Yalçın, “Discrete-time backstepping control for cart-pendulum system with disturbance attenuation via i&i disturbance estimation,” in *2018 2nd International Symposium on Multidisciplinary Studies and Innovative Technologies (ISMSIT)*, IEEE, 2018, pp. 1–6.
- [44] W. Gao, Y. Wang, A. Homaifa, “Discrete-time variable structure control systems,” *IEEE transactions on Industrial Electronics*, vol. 42, no. 2, pp. 117–122, 1995.
- [45] J.-J. Xiong, G. Zhang, “Discrete-time sliding mode control for a quadrotor uav,” *Optik*, vol. 127, no. 8, pp. 3718–3722, 2016.
- [46] S. Sarpturk, Y. Istefanopulos, O. Kaynak, “On the stability of discrete-time sliding mode control systems,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 32, no. 10, pp. 930–932, 1987.
- [47] N. Adhikary, C. Mahanta, “Integral backstepping sliding mode control for underactuated systems: Swing-up and stabilization of the cart–pendulum system,” *ISA Transactions*, vol. 52, no. 6, pp. 870–880, 2013.

## TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR

---

### **Konferans Bildirisi**

1. Özen S., Adıgüzel F., Koordinat Dönüşümü Tabanlı Ayrık Zamanlı Kayan Kipli Kontrolcü ile Araba Sarkaç Sisteminin Kontrolü, Otomatik Kontrol Ulusal Toplantısı (TOK'2023), İstanbul, Türkiye, 14 - 16 Eylül 2023, ss.1-6

