

YILDIZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DEĞİŞMELİ HALKALAR

VE

MODÜLLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ARŞ.GÖR.AYTEN USTAMEHMETOĞLU

İSTANBUL-1991

İÇİNDEKİLER

Sayfa

1.	MODÜLLER	1
	Tanım 1 Alt Modül Tanımı	3
1.2.	BÖLÜM MODÜLÜ	4
	Tanım 1 R-Modül Homomorfizmi Tanımı	6
	Örnek 1	6
	Örnek 2	7
	Teorem 1	7
	Örnek 3	7
2.	ZİNCİR KOŞULLARI	8
	Tanım 1 Ç.Z.K ve ve A.Z.K Tanımı	9
	Tanım 2 Noetherian Halka ve Artinian Tanımı	9
	Örnek 1	9
	Tanım 3 İncelenmiş Dizi Tanımı	10
	Tanım 4 Kompozisyon Dizisi Tanımı	10
	Tanım 5 Noetherian Modül ve Artinian Modül	10
	Teorem 1	11
2.1.	HOMOMORFİ İLE İLGİLİ SONUÇLAR	12
3.	BİR TAMLIK BÖLGESİNİN KESİRLER CİSMİ	14
	Sonuç 1	18
	Tanım 1 Tam tanımı	19
	Tanım 2 Tam A-Cebir Tanımı	19
	Önerme 1	20
	Önerme 2	22
	Teorem 1	22
	Tanım 3 Polinom Halkası Tanımı	23
	Önerme 3	23
	Sonuç 2	23
	Önerme 4	24
	Tanım 4 Halka Genişlemesi Tanımı	26
	Örnek 1	26
	Tanım 5 Tam Genişleme Tanımı	26
4.	PRIMARY İDEALLER VE RADİKALLER	28
	Tanım 1 Radikal Tanımı	28
	Teorem 1	29
	Teorem 2	31
	Tanım 2 Primary İdeal Tanımı	32
	Örnek 1	32
	Teorem 3	32

Teorem 4	33
Teorem 5	34
Sonuç 1	34
Tanım 3 En Küçük Asal İdeal Tanımı	35
Tanım 4 Nilpotent İdeal Tanımı	35
Teorem 6	36
Teorem 7	37
Tanım 5 Primary Ayrışım Tanımı	38
Tanım 6	39
Tanım 7 Jacobson Radikali Tanımı	39
Teorem 8	40
Sonuç 2	40
Sonuç 3	40
Teorem 9	41
Teorem 10	41
Teorem 11	42
Tanım 8 Asal Radikal Tanımı	43
5. BOOLE HALKALARI	44
Tanım 1 Boole Halkası Tanımı	44
Teorem 2	45

TEŐEKKÜR

Çalıőmalarımnda hiçbir zaman yardımını esirgemeyen
Sayın Hocam Prof.Dr.Erol BALKANAY'a teőekkür ederim.

Arş.Gör.Ayten USTAMEHMETOĞLU

ÖZET

Bu çalışmada değişmeli birim elemanlı halkalar ve modüller incelenmiştir.

Beş bölümden meydana gelen çalışmanın ilk iki bölümünde konu ile ilgili temel tanımlar, teoremler verilmiştir. Halka ve modüllere, daha ileri kavram ve teoremler elde edebilmek için, bazı sonluluk koşulları eklemek gerekmektedir. Bunların en uygunu "Zincir koşulları" dır. Zincir koşulları halka ve modüllerin her ikisine de uygulanır.

Üçüncü bölümde tamlık bölgesi, her ne kadar cisim değilse de onun bir cisme gömülebileceğini göreceğiz. Tamsayılar cümlesi ile rasyonel sayılar cümlesi buna bir örnektir.

Dördüncü bölümde radikal, asal radikal ve jacobson radikali incelenmiştir.

Son bölüm ise Boole halkalarının incelenmesine ayrılmıştır.

SUMMARY

In this study we will introduce a commutative rings with identity and modules. These thesis consist of five chapters. Chapter I and Chapter II contains an introduction with the basic definition and theorems about subject. Chain conditions applies both of rings and modules.

In the chapter III whether integral domain is not field, we will see that it can embed to a field.

In the chapter IV we will introduce radical, prime radical and jacobson radical.

In the last chapter, Boole rings have been examined.

MODÜLLER

BÖLÜM I

GİRİŞ I.I.

R birimli bir halka ve $(M, +)$ değişmeli grup olsun.
 $r \in R$ ve $a \in M$

1) $ra \in M$

2) $(r+s)a = ra+sa$

3) $(rs)a = r(sa)$

4) $r(a+b) = ra+rb$

5) $1a = a$

ise M ye bir sol R -modül denir.

Burada

$$M \times R \rightarrow M$$

$$\alpha: R \times M \rightarrow M$$

$$\alpha(r, a) = ra \text{ olup}$$

ra elemanı r ve a nın modül çarpımı adını alır.

Eğer $R = F$ ise (F herhangi bir cisim) o taktirde bir sol R -modül, F üzerinde bir vektör uzayıdır.

$(G, +)$ değışmeli grubu doğal bir biçimde bir sol Z -modül gibi düşünülebilir.

Yani,

$$Z \times G \rightarrow G \quad n \in Z \quad a \in G$$

$$(n, a) \rightarrow na \quad na = a + \dots + a$$

için yukarıdaki aksiyomlar sağlanır.

R bir halka ve I, R nin sol ideali olsun.

$$\emptyset : R \times I \rightarrow I$$

$$\emptyset (r, x) \rightarrow rx$$

R deki elemanların çarpımı olarak tarif edilirse, I bir R -modüldür.

Vektör uzaylarında olduğu gibi

$$1) 0_R \cdot a = 0_R \quad (A, +) \text{ nın özdeş elemanı } 0_A$$

$$2) 0_A \cdot r = 0_A \quad (R, +) \text{ nın özdeş elemanı } 0_R$$

$$3) r(-a) = (-r)a = -(ra) \quad \forall r \in R \text{ ve } a \in M \text{ koşulları geçerlidir.}$$

Tanım: 1)

Bir R-modül M'in ⁰ baştan farklı alt kümesi N olsun.

1) $(N, +)$, $(M, +)$ nin alt grubu $n, y \in N$ $n-y \in N$

2) $\forall r \in R$ ve $a \in N$ için $ra \in N$

olması şartıyla N, M in R-alt modülüdür.

R-modül olan M açıkça iki aşikar altmodüle sahiptir.

Bunlar $\{0\}$ ve M dir.

I.2 BÖLÜM MODÜLÜ

N , R -modül olan M in bir altmodülü olsun. M komutatif olduğundan $N \triangleleft M$ dir. M/N bölüm grubundan söz edebiliriz. Bu grubun elemanları $a \in M$ olmak koşulu ile $a+N$ kosetleridir.

$$M/N = \{a+N \mid a \in M\}$$

M/N de toplama işlemi

$$(a+N)+(b+N) = a+b+N \quad \text{dir.}$$

Çarpma işlemi ise

$$r(a+N) = ra+N \quad \text{dir.}$$

Bunun iyi tanımlı olduğu ((.) göre) gösterilmelidir.

$$r(a+N) = r(a'+N)$$

$$r(b+N) = r(b'+N)$$

$$rab+N = ra'b'+N \quad \text{olduğu gösterilmelidir.}$$

$$ra + N = ra' + N$$

$$ra \in ra' + N$$

$$rb + N = rb' + N$$

$$rb \in rb' + N$$

$$ra = ra' + N_1$$

$$rb = rb' + N_2$$

Handwritten notes:
by substituting
both sides
of the equation
into
the other

$$rab = (ra' + N_1)(rb' + N_2)$$

$$rab = ra'b' + ra'N_2 + rb'N_1 + N_1N_2$$

$$rab - ra'b' = ra'N_2 + rb'N_1 + N_1N_2$$

$$rab + N = ra'b' + N \quad \text{dir.}$$

Tanım : 1)

M ve N iki R-modül olsun.

$f: M \rightarrow N$ dönüşümü $\forall r \in R$ ve $a \in M$ için

1) $f: M \rightarrow N$ bir grup homomorfisi

2) $f(ra) = rf(a)$, $\forall r \in R$ ve $a \in M$ şartlarını sağlıyorsa, f'e R-modül homomorfizmi denir.

Eğer $R = F$ ise (F herhangi bir cisim) o takdirde R homomorfizmalarına M den N'e lineer dönüşümler denir.

$R = F$ ise R-modül homomorfizmasına R-lineer dönüşümü denir.

Örnek: 1)

Bir R-modül olan M in altmodülü N olsun.

$\text{Nat}_N : M \rightarrow M/N$ bir R-homomorfisidir.

1) Nat_N bir grup homomorfisidir.

Gerçekten

$$\begin{aligned}\text{Nat}_N(a+b) &= a+b+N \\ &= a+N+b+N \\ &= \text{Nat}_N(a)+\text{Nat}_N(b)\end{aligned}$$

$$2) \quad f(ra) = rf(a)$$

$$\text{Nat}_N(a) = a+N$$

$$\text{Nat}_N(ra) = ra+N$$

$$= r(a+N)$$

$$= r\text{Nat}_N(a)$$

Örnek: 2)

Tamsayıların $(\mathbb{Z}, +)$ grubu bir \mathbb{Z} -modüldür.

$m\mathbb{Z} = \{mn \mid n \in \mathbb{Z}\}$ cümlesi bir altmodüldür.

Teorem: 1)

M bir R -modül ise ve M in bütün altmodüllerinin cümlesi $\{B_i \mid i \in I\}$ olsun.

Bu takdirde $A = \bigcap_{i \in I} B_i$ de M in bir altmodülüdür.

Gerçekten $x, y \in A$ ise her $i \in I$ için $x, y \in B_i$ olacağından $x - y \in B_i$ dir.

Dolayısıyla $x - y \in A$ dir. Benzer şekilde her $r \in R$ için $rx \in A$ dir.

Örnek: 3)

R halka $f: M \rightarrow N$ bir R -modül homomorfizmi

Çek $f = \{a \in M \mid f(a) = 0\}$ cümlesi M in bir altmodülüdür.

BÖLÜM II

ZİNCİR KOŞULLARI

S boş olmayan kısmı sıralı bir küme olsun. Eğer $x, y \in T$ için $x \leq y$ veya $y \leq x$ oluyorsa S nin bir T alt kümesine zincir denir.

Σ, \leq bağıntısı ile kısmı sıralanmış bir küme olsun. Σ üzerinde aşağıdaki koşullar denktir.

(i) Σ , her $x_1 \leq x_2 \leq \dots$ için artan zinciri durur.

($x_n = x_{n-1} = \dots$ olan bir n vardır.)

(ii) Σ nin boş olmayan alt kümesinin bir maximal elemanı vardır.

Eğer Σ , bir M modülün \subset bağıntısı ile sıralanmış altmodüllerinin kümesi ise o zaman (i) ye artan zincir koşulu denir. (ii) ye maximum koşul denir.

Bu iki denklem koşuldan birini gerçekleyen bir M modülüne artan zincir koşulunu sağlar denir.

Eğer, \supseteq ile sıralanmış ise o zaman (i) azalan zincir koşulunu sağlar (ii) ye minimal koşul denir.

Tanım: 1)

A bir modül olsun. A'nın altmodüllerinin $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ zinciri her $i \geq n$ için $A_i = A_n$ olacak şekilde n tamsayısı varsa A altmodüller üzerinde artan zincir koşulunu sağlar denir.

B bir modül olsun. B'nin altmodüllerinin $B_1 \supset B_2 \supset \dots$ zinciri $\forall i \geq m$ için $B_i = B_m$ olacak şekilde m tamsayısı varsa, B altmodüller üzerinde azalan zincir koşulunu sağlar denir.

Tanım: 2)

R'nin her $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_n \supset \dots$ sağ ideallerinin azalan dizisi sonlu bir adımda durursa R ye Artinian halka, R'nin her $I_0 \subset I_1 \subset I_2 \subset \dots \subset I_n \subset \dots$ sağ ideallerinin artan dizisi sonlu bir adımda durursa R ye Noetherian halka denir.

Örnek: 1)

Z tamsayılar halkası Noetherian fakat Artinian değildir.

Z de ideallerinin artan bir dizisi $(n_1) \subset (n_2) \subset (n_3) \subset \dots$ ise bu dizi sonlu bir adımda durmalıdır.

Çünkü $(n_i) \subset (n_j)$ ile n_j 'nin n_i 'yi bölmesi demektir. Eğer dizi sonlu bir adımda durmaz ise n_1 'in sonsuz sayıda bölüneni olmalıdır. Bu ise hiçbir sonlu tamsayıda mümkün değildir.

$I \subset J \subseteq H$
 $I \subseteq H$ $J \subseteq H$
o.e.i o.e.i o.e.i

Diğer yandan

$$(2) \supset (4) \supset (8) \supset (16) \supset \dots \supset (2^n) \supset \dots$$

dizisi Z de sonlu bir adımda durmaz. Böylece Z tamsayılar halkası Noetherian fakat Artinian değildir.

Tanım: 3)

Bir altmodüller dizisinin terimleri arasına yeni altmodüller ekleyerek elde edilen yeni diziyeye ilk dizinin incelenmiş dizisi denir.

Tanım: 4)

A bir R -modül olsun. A nın bir altmodüller dizisi $A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n = A$ olsun. Bu dizi daha fazla inceltilemez ise yani her i için A_i ile A_{i+1} arasına A nın herhangi bir alt modülü ilave edilemez ise diziyeye kompozisyon dizisi denir.

Tanım: 5)

A_R bir sağ R -modül olsun.

- (i) A_R nin alt modüllerinin her topluluğunun minimal elemanı varsa A_R ye Artinian modül denir.
- (ii) A_R nin altmodüllerinin her topluluğunun maximal elemanı varsa A_R ye Noetherian modül denir.

Teorem:1)

A_R bir R -modül olsun. Bu modül ancak ve ancak azalan zincir koşulunu sağlarsa Artiniandır.

Ispat:

A nın alt modüllerinin azalan dizisi $A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset \dots$
 $A_n \supset \dots$ ve bu dizide söz edilen A_i lerin topluluğu M ise M , A azalan zincir koşulunu sağladığından bir minimal A_t elemanı bulundurur. A_{t+1} , A_t içinde A_{t+2} , A_{t+1} içinde ve böyle devamla kapsadığı ve A_t de minimal olduğundan $A_t = A_{t+1} = A_{t+2} \dots$ elde edilir ve dizi t . adımda durur. *Azalan zincir koşulunu seçti.*

A_R azalan zincir koşulunu sağlamış ve M de A nın altmodüllerinin bir topluluğu olsun. $A_0 \in M$ alalım. A_0 , M de minimal ise işlem durur. A_0 minimal değilse M de A_0 da kapsanan bir A_1 elemanı vardır. $A_1 \in M$ de minimal ise işlem durur. Minimal değilse M de A_1 'in kapsadığı bir A_2 vardır. Böyle devam edilerek M in elemanlarından oluşan bir dizi $A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset \dots$ elde edilir.

Kabul gereği bu dizi bir yerde durmalıdır, sonlu bir t için

$$A_t = A_{t+1} = \dots$$

Böylece M de aranan minimal eleman A_t dir.

II.1.1 HOMOMORFİ İLE İLGİLİ SONUÇLAR

1) $f: M \rightarrow M'$ bir modül homomorfizmi ise $\text{Ker } f$, M in $\text{Im } f$, M' nün altmodülüdür.

2) N ve N' bir M modülünün altmodülleri olsun. 0 taktirde $N+N'$ de bir altmodüldür. ve

$$N/(N \cap N') \cong (N+N')/N'$$

dir. (ikinci izomorfizma Teoremi)

3) $M \supset M' \supset M''$ modüller ise 0 taktirde

$(M/M'' / (M'/M'')) \cong M/M'$ dir. (Üçüncü izomorfizma Teoremi)

Eğer $f: M \rightarrow M'$ bir modül-homomorfizmi ve N' , M' nün bir altmodülü ise bir kanonik homomorfizmaya sahibiz.

$$\bar{f} : M/f^{-1}(N') \longrightarrow M'/N'$$

\bar{f} bir modül-izomorfizmidir.

$\text{Ker } f = \{0\}$

$$4) 0 \rightarrow G' \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} G'' \rightarrow 0$$

$\text{Im } f = \text{Ker } g$ ise bu dizi tam'dır.

Burada f , 1-1 ve g , örtendir.

$G' \xrightarrow{f} G$ bir modül-homomorfizmi
 f nin 1-1 olması için
 g ye $\text{Ker } f = \{0\}$
olmasıdır.

H , G nin altmodülü ise

$$0 \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow G/H \rightarrow 0$$

vardır.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & G' & \xrightarrow{f} & G & \xrightarrow{g} & G'' \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & H & \rightarrow & G & \rightarrow & G/H \rightarrow 0 \end{array}$$

$f: G \rightarrow G'$ $H' \triangleleft G'$ ve $H = f^{-1}(H')$ olsun.

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\quad} & G' \\ \downarrow & & \downarrow \\ f^{-1}(H') & \xrightarrow{\quad} & H' \end{array} \quad f^{-1}(H') \triangleleft G$$

$$G \rightarrow G' \rightarrow G'/H'$$

$$f^{-1} : G/H \rightarrow G'/H'$$

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \rightarrow & H & \rightarrow & G & \rightarrow & G/H & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & H' & \rightarrow & G' & \rightarrow & G'/H' & \rightarrow & 0 \end{array}$$

f \bar{f}

\bar{f} izomorfizmadır.

BÖLÜM III

BİR TAMLIK BÖLGESİNİN KESİRLER CİSMİ

Q , rasyonel sayılar cismini Z tamsayılar halkasından elde ederken kullandığımız yöntemi herhangi bir A tamlik bölgesine kolayca genişletebiliriz. Böylece A nın kesirler cismini elde ederiz. Bu yöntemde $a, s \in A$ ve $s \neq 0$ olmak üzere bütün sıralı (a, s) ikilileri arasında;

$(a, s) \equiv (b, t) \Leftrightarrow at - bs = 0$ denklik bağıntısı tanımlansın.

Bu ancak, A bir tamlik bölgesi ise geçerlidir. Çünkü bağıntının geçişken olduğu gösterilirken kısaltma yapılıyor. Yani A nın sıfırdan farklı sıfır bölenleri yoktur.

A bir halka olsun. A nın çarpımsal kapalı bir altkütmesi denince $1 \in S$ ve S çarpma altında kapalı olmak üzere A nın bir S altkütmesi anlaşılır.

Şimdi $A \times S$ de bir denklik bağıntısını şöyle tanımlayalım.

$$(a, s) \equiv (b, t) \Leftrightarrow at = bs$$

bu bağıntının yansıyan, simetrik olduğu açıktır.

Geçişken olduğunu göstermek için;

$$(a,s) \equiv (b,t) \quad \text{ve} \quad (b,t) \equiv (c,u) \quad \text{alalım.}$$

$$at = sb \quad \Rightarrow \quad uat = usb$$

$$bu = tc \quad \Rightarrow \quad sbu = stc$$

$$uat = usb$$

$$stc = sbu$$

$$uat - stc = \underline{usb - sbu}$$

$$0$$

$$t(au - sc) = 0 \quad t \neq 0 \quad au - sc = 0$$

$$(a,s) \equiv (c,u) \quad \text{olur.}$$

$\frac{a}{s} \rightarrow A$ tauluk bölgesine ait kesirlerin.
 $\frac{a}{s}$, (a,s) nin denklik sınıflarını gösterebilirsin.

Bu denklik bağıntısı
 $AXSY$ denklik sınıflarına
ayırır.

Denklik sınıflarının kümesi $S^{-1}A$ olsun.

$S^{-1}A$ da toplama işlemi;

$$\left(\frac{a}{s}\right) + \left(\frac{b}{t}\right) = \left(\frac{at+bs}{st}\right)$$

$S^{-1}A$ da çarpma işlemi;

$$\left(\frac{a}{s}\right) \left(\frac{b}{t}\right) = \frac{ab}{st} \quad \text{şeklinde tanımlansın.}$$

$S^{-1}A$ kümesi yukarıdaki $(+)$ ve (\cdot) işlemlerine göre bir halkadır.

(a, s) denlik sınıflarının cüleri
 $S^{-1}A = \{(a, s); (a, s) \in A\}$ -16-

A taahlik bölge olsun.
 $\forall x \in A$ için $1 \cdot x = x$ yazılabilir.

Ayrıca $f(x) = \frac{x}{1}$ ile tanımlı bir $f: A \rightarrow S^{-1}A$

homomorfizması vardır.

Bunu ispatlamak için önce yukarıdaki toplama işleminin iyi tanımlı olduğu ispatlanmalıdır.

$S^{-1}A$ da toplama

$a/s + a'/s' = s'a + sa' / ss'$ şeklinde tanımlandı.

iyi tanımlı olduğunu gösterelim.

$$a/s = a'/s'$$

$$b/r = b'/r'$$

$$\frac{ar + bs}{sr} = \frac{a'r' + b's'}{r's'}$$

$$(ar + bs)r's' = (a'r' + b's')sr$$

$$arr's' - a'r'sr = b's'sr - bsr's'$$

$$arr's' - a'r'sr - b's'sr + bsr's' = 0$$

$$rr'(as' - a's) + ss'(br' - b'r) = 0$$

$$r, r' \in S \quad s, s' \in S$$

$$rr' \in S \quad ss' \in S$$

$$(as'-a's) = 0 \quad (br'-b'r) = 0$$

Toplama iyi tanımlıdır.

Çarpmaya göre;

$$ab/sr = a'b'/s'r'$$

$$abs'r' = a'b' sr$$

$$abs'r' - a'b'sr - br'a's + br'a's = 0$$

$$br'(as'-a's) + a's(br'-b'r) = 0$$

Sonuçta çarpma iyi tanımlıdır.

$S^{-1}A$ halkası ve $f:A \rightarrow S^{-1}A$ homomorfizmi aşağıdaki özellikleri sağlar.

1) $s \in S \Rightarrow f(s)$, $S^{-1}A$ da birimseldir.

2) $f(a) \neq 0$ bir $s \in S$ için $as = 0$ dır.

3) $S^{-1}A$ nın her elemanı, bir $a \in A$ ve bir $s \in S$ için

$f(a)f(s)^{-1}$ şeklindedir.

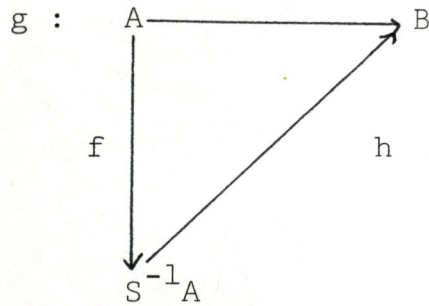
Sonuç:1)

Eğer $g: A \rightarrow B$

i) $s \in S \Rightarrow g(s)$, B de birimsel

ii) $g(a) \neq 0 \Rightarrow$ bir $s \in S$ için $as = 0$

iii) B nin her elemanı $g(a)g(s)^{-1}$ biçimde olacak şekilde bir homomorfizm ise o zaman tek bir $h:S^{-1}A \rightarrow B$ izomorfizmi vardır ve $g = h \circ f$ olur.



$$h\left(\frac{a}{s}\right) = g(a)g(s)^{-1} \text{ ile tanımlı}$$

$h: S^{-1}A \rightarrow B$ dönüşümünün bir izomorfizm olduğunu göstereceğiz.

h örtendir ve h nin 1-1 olduğunu göstermek için çekirdeğine bakalım.

Eğer $h\left(\frac{a}{s}\right) = 0$ ise $g(a) = 0$ dır.

0 halde (ii) den bir $t \in S$ için $at = 0$ ve böylece $(a, s) \equiv (0, 1)$ bulunur. Yani $S^{-1}A$ da $\frac{a}{s} \equiv 0$ dır.

Tanım 1)

B bir halka ve A, B nin bir althalkası olsun. $a_i \in A, c \in B$ için

$$c^n + a_1 c^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad \text{ise}$$

$c \in B$ ye A da tamdır denir.

Tanım 2)

$f: A \rightarrow B$ bir halka homomorfisi olsun (A, B değışmeli halka)

Eğer $B, f(A)$ üzerinde tam ise f' ye tam ve B ye tam A -cebir denir.

$f: A \rightarrow B$ ve $g: B \rightarrow C$ tam ise o taktirde
 $g \circ f: A \rightarrow C$ tamdır.

Önerme 1.

$g: A \rightarrow B$ her $s \in S$ için $g(s)$, B de birimsel olacak şekilde bir homomorfi olsun. O zaman $g = h \circ f$ olacak şekilde tek bir $h: S^{-1}A \rightarrow B$ homomorfisi vardır.

Teklik:

Eğer h koşulları sağlanırsa, o zaman her $a \in A$ için

$$h\left(\frac{a}{1}\right) = h_f(a) = g(a) \text{ olur.}$$

Böylece $s \in S$ ise

$$h\left(\frac{1}{s}\right) = h\left(\frac{s}{1}\right)^{-1} = g(s)^{-1}$$

O halde

$$\begin{aligned} h\left(\frac{a}{s}\right) &= h\left(\frac{a}{1}\right) \cdot h\left(\frac{1}{s}\right) \\ &= g(a)g(s)^{-1} \end{aligned}$$

Bu yüzden h, g ile tek olarak tanımlanır.

ii) Varlık $h\left(\frac{a}{s}\right) = g(a)g(s)^{-1}$ olsun. \mathcal{O} zaman

iyi tanımlı homomorfizm olacaktır.

Şimdi $\frac{a}{s} = \frac{a'}{s'}$ olsun. \mathcal{O} halde

$(as' - sa')t = 0$ olacak şekilde $t \in S$ vardır.

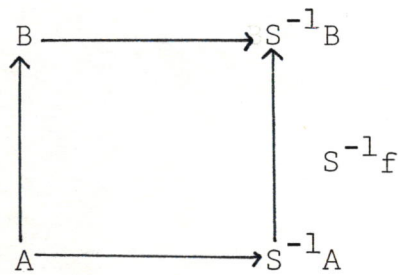
$$(g(a)g(s') - g(s)g(a'))g(t) = 0$$

olur. $g(t)$, B de birimseldir.

$$g(a)g(s)^{-1} = g(a')g(s')^{-1} \text{ elde edilir.}$$

$f: A \rightarrow B$ tam olsun. S de A nın çarpımsal alt kümesi olsun. \mathcal{O} taktirde $S^{-1}f: S^{-1}A \rightarrow S^{-1}B$ homomorfisi vardır.

$$(S^{-1}f)(x/s) = f(x)/f(s) \text{ ile tanımlanır.}$$



Önerme 2.

$f: A \rightarrow B$ tam ve S, A nın çarpımsal altkütmesi olsun. 0 taktirde $S^{-1} f: S^{-1}A \rightarrow S^{-1}B$ tamdır.

Ispat:

$x \in B$ ve $a_i \in A$ için

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad \text{olur.}$$

$$\frac{x}{s} \in S^{-1}B \quad (x \in B, s \in S)$$

Yukarıdaki eşitlikten

$$\left(\frac{x}{s}\right)^n + \left(\frac{a_1}{s}\right) \left(\frac{x}{s}\right)^{n-1} + \dots + \frac{a_n}{s_n} = 0 \quad \text{dır.}$$

$$\frac{x}{s}, S^{-1}A \text{ da tamdır.}$$

Teorem 1)

Eğer $A \subseteq B \subseteq C$ halkalar ve B, A da tam C, B de tam ise o zaman C, A da tamdır.

Tanım 3)

A bir halka olmak üzere, katsayıları A dan alınan bir $f(x)$ polinomu

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + \dots$$

şeklinde bir sonsuz toplamdır. Öyle ki $a_j \in A$ lara $f(x)$ polinomunun katsayıları ve x 'e belirsiz veya değişken adı verilir.

A üzerinde bütün tek değişkenli polinomların cümlesi $A[x]$ ile gösterilir.

Önerme 3. Aşağıdakiler denktir.

- 1) $x \in B$, A da tamdır.
- 2) $A[x]$ sonlu üretilmiş A-modüldür.

Sonuç 2.

A da tam olacak şekilde B nin x_i ($1 \leq i \leq n$) elemanlarını alalım. O zaman $A[x_1, \dots, x_n]$ halkası sonlu üretilmiş bir A-modüldür.

Ispat:

n üzerinde tümevarım uygulayalım. $n = 1$ için doğru olduğunu biliyoruz. $n > 1$ ve $A_n = A[x_1, \dots, x_n]$ alalım. 0 zaman tümevarıma göre A_{n-1} sonlu üretilmiş bir A-modüldür. x_n, A_{n-1} de tam olduğu için $n = 1$ durumundan

$A_n = A_{n-1}[x_n]$ sonlu üretilmiş bir A_{n-1} modüldür. A_n bir A-modül olarak sonlu üretilmiş olur.

Önerme 4)

$A \subseteq B$ tamlık bölgeleri ve B, A da tam olsun. B cisimdir $\Leftrightarrow A$ cisimdir.

Ispat:

A bir cisim olsun. $y \in B, y \neq 0$ alalım, ayrıca,

$$y^n + a_1 y^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad (a_i \in A)$$

B tamlık bölgesi olduğu için $a_n \neq 0$ dır. Dolayısıyla

$$y^n y^{-1} + a_1 y^{n-1} y^{-1} + \dots + a_n y^{-1} = 0$$

$$y^{-1} (y^n + a_1 y^{n-1} + \dots + a_n) = 0$$

$$y^{n-1} a_n^{-1} + a_1 a_n^{-1} y^{n-2} + \dots + y^{-1} = 0$$

$$y^{-1} = -a_n^{-1} (y^{n-1} + a_1 y^{n-2} + \dots + a_{n-1}) \in B$$

böylece B cisimdir.

Tersine B bir cisim olsun. $x \in A$, $x \neq 0$ alalım. 0 zaman $x^{-1} \in B$ olur.

B, A da tam olduğundan,

$$x^{-m} + a_1' x^{-m+1} + \dots + a_m' = 0 \quad (a_i' \in A)$$

olur. Buradan

$$x^{m-1} (x^{-m} + a_1' x^{-m+1} + \dots + a_m') = 0$$

$$(x^{-1} + a_1' + a_2' x + \dots + a_m' x^{m-1}) = 0$$

$$x^{-1} = -(a_1' + a_2' x + \dots + a_m' x^{m-1}) \in A$$

dan A bir cisimdir.

Tanım: 4)

S değişmeli ve birim elemanlı bir halka ve R, S nin 1_S 'i içeren bir alt halkası olsun. O taktirde S'ye R nin halka genişlemesi denir.

Örnek: 1)

Çift tamsayılar kümesi E , Z tamsayılar kümesinin bir althalkasıdır.

$$1) \quad E \neq \emptyset \quad (2, 4, 6 \in E)$$

$m, n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $2m, 2n \in E$ $E \neq \emptyset$ dır.

$$2) \quad 2m, 2n \in E$$

$$2m - 2n = 2(m - n) \in E$$

$$3) \quad (2n)(2m) = 4nm \in E$$

E, 1'i içermediğinden Z, E nin bir halka genişlemesi değildir.

Tanım 5)

S nin her elemanı R üzerinde tam ise S, R nin bir tam genişlemesidir denir.

$r \in R$ elemanı, $x - r \in R[x]$ in kökü olduğundan R halkası kendisi üzerinde tamdır. Z nin R genişlemesinde

$\frac{1}{\sqrt{3}}$, $x^2 - \frac{1}{3}$ 'ün bir kökü olduğundan, $\frac{1}{\sqrt{3}}$, Z üzerinde cebirseldir, fakat $\frac{1}{\sqrt{3}}$, Z üzerinde tam değildir.

Çünkü $x^2 - \frac{1}{3}$ teki $\frac{1}{3}$ katsayısı Z in elemanı değildir.

Bununla birlikte $\frac{1}{\sqrt{3}}$, $x^2 - \frac{1}{3}$ ün bir kökü olduğundan

Q rasyonel sayılar cismi üzerinde tamdır.

BÖLÜM IV

PRIMARY İDEALLER VE RADİKALLER

Tanım: 1)

I , R halkasının bir ideali olsun. I nin radikali \sqrt{I} ile gösterilip

$$\sqrt{I} = \{a \in R \mid a^n \in I, \quad n > 0\}$$

şeklinde tanımlanır.

Z halkasında,

$$\sqrt{(12)} = \sqrt{(12)} = \sqrt{(2^2)(3)} = (2)(3) = (6)$$

$$\sqrt{(4)} = \sqrt{(2^2)} = (2)$$

$$\sqrt{(32)} = \sqrt{(32)} = \sqrt{(2^5)} = (2)$$

Teorem: 1)

$$1) \sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$$

$$2) \sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$$

$$3) k > 0 \text{ ve } I^k \subseteq J \text{ ise } \sqrt{I} \subseteq \sqrt{J}$$

Ispat:

$$1) \sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$$

$$a \in \sqrt{\sqrt{I}} \text{ ise } a^k \in \sqrt{I} \quad (a^k)^m \in I$$

$$a^{km} \in I, \quad km \in \mathbb{Z}$$

$$a \in \sqrt{I} \quad \sqrt{\sqrt{I}} \subseteq \sqrt{I} \quad \textcircled{1}$$

$$\sqrt{I} \subseteq \sqrt{\sqrt{I}} \quad \textcircled{2} \text{ tanımdan}$$

1 ve 2 den $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$ dir.

$$2) \sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$$

$$a \in \sqrt{I \cap J} \text{ olsun. } a^n \in I \cap J \subseteq I \cap J$$

$$a \in \sqrt{I \cap J}$$

$$a \in \sqrt{I \cap J} \text{ olsun } a^n \in I \text{ ve } a^n \in J \Rightarrow a \in \sqrt{I \cap J}$$

$$a \in \sqrt{I \cap J} \text{ olsun.}$$

$$a^m \in I, a^n \in J$$

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n \in I \cap J$$

$$a \in \sqrt{I \cap J}$$

$$3) \quad k > 0 \text{ ve } I^k \subseteq J \text{ ise } \sqrt{I} \subseteq \sqrt{J}$$

$$I^k = I \dots \dots I$$

$$a \in \sqrt{I} \subseteq \sqrt{J}$$

$$a^m \in I$$

$$a^{mk} = (a^m \dots a^m)^k \in I^k \subseteq J$$

$$a^{mk} \in J \quad a \in \sqrt{J} \text{ olur.}$$

Teorem: 2)

\sqrt{I} , R halkasının bir idealidir.

Ispat:

1) $a - b\epsilon\sqrt{I}$

2) $ra\epsilon\sqrt{I}$

1) $a, b\epsilon\sqrt{I}$ olsun. Buradan

$a^n \epsilon I$, $b^m \epsilon I$ olur.

$(a-b)^{n+m} = \binom{n+m}{k} a^{m+n-k} b^k \epsilon I$ olduğundan

$k \geq m$ ise $b^m \cdot b^{k-m} \epsilon I$ $b^m \epsilon I$ olduğundan

$b^k \epsilon I$ olur.

$k \leq m$ $m+n-k > m+n-m = n$

$a^n \epsilon I$ olduğundan $a^{m+n-k} \epsilon I$ olur.

2) $(ra)^n \epsilon I$

$(ra)^n = r^n a^n \epsilon I$ $ra\epsilon\sqrt{I}$ olur.

Tanım: 2)

Q , değişmeli R halkasının bir ideali olsun. Herhangi $a, b \in R$ için

$ab \in Q$ ve $a \notin Q$ iken $b^n \in Q$ ($n > 0$) ise Q ya primary ideal denir.

Örnek:1)

Her asal ideal açıkça primarydir.

$ab \in Q$ ve $a \notin Q$ ise $b \in Q$ olur.

Teorem:3)

Q , değişmeli R halkasında primary ideal ise o takdirde \sqrt{Q} asal idealdir.

İspat: $ab \in \sqrt{Q}$ ve $a \notin \sqrt{Q}$ kabul edelim. O takdirde

$a^n b^n = (ab)^n \in Q$ olur. $a \notin \sqrt{Q}$ olduğundan $a^n \notin Q$ olacaktır. Q primary olduğundan $(b^n)^m \in Q$ olacak şekilde $m > 0$ tamsayısı vardır.

Buradan $b^{nm} \in Q$ ise $b \in \sqrt{Q}$ olur.

$ab \in \sqrt{Q}$, $a \notin \sqrt{Q}$ veya $b \in \sqrt{Q}$ ise \sqrt{Q}

asal idealdir.

Teorem: 4)

Y ve P , A halkasında idealler olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanırsa Y primary ve P , onun radikalidir.

1) $Y \subset P$

2) $b \in P$ ise o taktirde $b^m \in Y$

3) $ab \in Y$ ve $a \notin Y$ ise $b \in P$ dir.

Ispat:

İlk olarak, Y nin primary olduğunu gösterelim.

$ab \in Y$, $a \notin Y$ ise $b^n \in Y$

olduğunu göstermeliyiz.

$ab \in Y$ $a \notin Y$ $b \in PC\sqrt{Y}$

$b \in \sqrt{Y}$ $b^n \in Y$ olur.

Bu yüzden Y primarydir.

Y nin, P nin radicali olduğunu göstermek için $P = \sqrt{Y}$ olduğunu göstermek yeterdir.

(1 ve 2 den)

$P \subset \sqrt{Y}$ dir (x)

$b \in \sqrt{Y}$ ise $b^n \in Y$ olacak şekilde n tamsayısı vardır.

$n = 1$ ise $b \in Y \subset P$ $b \in P$ olur.

$n > 1$ kabul edelim.

$$b^{n-1} b = b^n \in Y$$

$b^{n-1} \notin Y$ olmak koşulu ile (3) den $b \in P$ dir.

Böylece $b \in \sqrt{Y}$ den

$$\sqrt{Y} \subset P \text{ olur } (x \ x)$$

(x) ve (x x) dan $\sqrt{Y} = P$ dir.

Teorem:5)

I nın maximal ideal olması için gerek ve yeter koşul her $a \notin I$ için $(I, a) = R$ olmasıdır.

Sonuç 1)

M bir R halkasının maximal ideali ise M^n bir primary idealdir.

İspat: Teorem (4) ün 3 üncü koşulundan $ab \in M^n$ ve $a \notin M$ yazılır.

M maximal ideal olduğundan Teorem 5 den $(M, a) = R$ yazılır. R birimli bir halka olduğundan

$$1 = m + ra$$

$$1 = (m + ra)^n$$

$$1 = (m^n + r^n a^n)$$

$$b = bm^n + r^n ab \quad r^n \in R$$

$$b = bm^n + r^n ab$$

$b \in M^n$ olur ve M^n primary idealdir.

Tanım:3)

I , R halkasının bir ideali ve P de R nin bir asal ideali olsun. $I \subseteq P$ ve bir P' için $I \subseteq P' \subsetneq P$ mümkün değilse P ye I nin en küçük asal ideali denir.

Tanım:4)

R de bir ideal I olsun. n pozitif bir tamsayı ve I nin n kere çarpımı sıfır ideal, $I^n = (0)$ ise I ya nilpotent ideal denir.

Teorem:6)

I , R halkasının bir ideali olsun. I , ancak ve ancak R/I bölüm halkasının bir sıfır bölene nilpotent ise primarydir.

Ispat:

I , R nin bir primary ideali ve $a+I$, R/I nin bir sıfır bölene olsun.

$(a+I)(b+I) = I$ olacak şekilde $b+I \neq I$ koseti vardır.

$$(a+I)(b+I) = I$$

$$ab+I = I$$

$ab \in I$ ve $b+I \neq I$ olduğundan

$b \notin I$ dir. I primary olduğundan

$a^n \in I$ olmalıdır.

$$(a+I)^n = a^n+I = I \text{ dir.}$$

$(a+I)$ nilpotenttir.

R/I nin herhangi bir sıfır bölene nilpotent kabul edilsin. R/I nin sıfır bölene $a+I$ olsun.

$(a+I)(b+I) = I$ olacak şekilde

$b+I \neq I$ koseti vardır.

Sıfır bölen nilpotent olduğundan $(a+I)^n = I$ olur.

$ab \in I$, $b \notin I$ $a^n \in I$ dir.

ve I primarydir.

Teorem:7)

Q_1, Q_2, \dots, Q_n primary ideal ve $\sqrt{Q_i} = P$ ise o taktirde $Q = \bigcap_{i=1}^n Q_i$ de $\sqrt{Q} = P$ olmak koşulu ile primary idealdir.

Ispat:

$$\sqrt{Q} = \sqrt{\bigcap_{i=1}^n Q_i} = \bigcap_{i=1}^n \sqrt{Q_i} = \bigcap P = P$$

Q_i komutatif R halkasında primary ideal ise o taktirde $\sqrt{Q_i}$ asal idealdir.

R/Q bölüm halkasının sıfır böleni $a+Q$ olsun.

$$(ab+Q) = (a+Q)(b+Q) = Q$$

olacak şekilde $b+Q \neq Q$ koseti vardır.

$b+Q \neq Q$ dan

$$b \notin Q = \bigcap Q_i \quad b \notin Q_i$$

Q_i primary ideal olduğundan,

$$ab \in Q_i \quad b \notin Q_i \quad a^n \in Q_i$$

$$a \in \sqrt{Q_i} = P = \sqrt{Q}$$

$$a \in \sqrt{Q} \quad a^n \in Q$$

$$(a+Q)^n = a^n + Q = Q$$

$a+Q$ nilpotenttir.

Q, R nin bir primary idailidir.

Tanım:5)

Değişmeli bir R halkasının ideali I olsun. Her bir Q_i primary olmak koşulu ile $I = Q_1 \cap Q_2 \cap \dots \cap Q_n$ ise I , bir primary ayrışımaya sahiptir. Eğer hiçbir Q_i , $Q_1 \cap \dots \cap Q_{i-1} \cap Q_{i+1} \cap \dots \cap Q_n$ içermezse ve Q_i nin radikalleri farklı ise o taktirde primary ayrışım indirgenmiştir denir.

R de bir I idealinin primary ayrışımı I'nin primary ideallerin sonlu bir arakesiti olarak yazılışıdır, yani

$$I = \bigcap_{i=1}^n Q_i \quad \text{dir.}$$

Ayrıca

1) Bütün $\text{rad}(Q_i)$ ler birbirinden farklı

2) $Q_i \not\subseteq \bigcap_{j \neq i} Q_j \quad (1 \leq i \leq n)$

sağlanıyorsa $I = \bigcap_{i=1}^n Q_i$ primary ayrışımına indirgenmiş denir.

Tanım:6)

R birimli, değişmeli halka ve B bir R-modül olsun. B'nin bir A altmodülü $r \in R$, $b \notin A$ ve $rb \in A \Rightarrow r^n B \subset A$ olması şartıyla primarydır.

Tanım:7)

Bir R halkasının Jacobson radikali $\text{rad}R$ ile gösterilir.

$$\text{rad}R = \bigcap \{M \mid M, R \text{ nin bir maximal idealidir}\}$$

Eğer $\text{rad}R = \{0\}$ ise o taktirde R ye Jacobson radikalsiz

halka yada yarı basit halka denir.

Birimli ve değişmeli halka en az bir maximal ideale sahip olduğundan daima Jacobson radikali vardır.

Teorem:8)

Herhangi bir R halkasında a elemanı ancak ve ancak her $r \in R$ için $1-ra$ tersinir ise $\text{rad } R$ nin elemanıdır.

Sonuç:2)

Bir a elemanı, ancak ve ancak $a + \text{rad } R$, $R/\text{rad } R$ bölüm halkasında tersinir ise R halkasında tersinirdir.

İspat:

$a + \text{rad } R$, $R/\text{rad } R$ de bir inverse sahip olsun.

$$(a + \text{rad } R)(b + \text{rad } R) = 1 + \text{rad } R$$

$$1 - ab \in \text{rad } R$$

Bir önceki teoremde $r = 1$ alınırsa

$ab = 1 - 1(1 - ab)$ den ab tersinirdir ve a elemanı R de bir inverse sahip olur.

Sonuç:3)

R nin her nilideali $\text{rad } R$ da bulunur.

Ispat:

N , R nin nilideali olsun. $a \in N$ alalım. Her $r \in R$ için $ra \in N$ dir. Böyle ra çarpımı nilpotenttir. ra , R halkasında nilpotent eleman olduğundan $1-ra$, R de tersinirdir. ve $a \in \text{rad } R$ olur. $N \subseteq \text{rad } R$ dir.

Teorem:9)

$\text{rad } R$ de idempotent eleman sadece 0 dır.

Ispat:

$a^2 = a$ olmak koşulu ile $a \in \text{rad } R$ olsun. $1-a$, R de bir inverse sahiptir.

$$(1-a)b = 1 \quad b \in R$$

$$a(1-a)b = (a-a^2)b = 0 \quad a = 0 \text{ dır.}$$

Teorem:10)

Herhangi bir R halkası için $R/\text{rad } R$ bölüm halkası yarı basittir yani $\text{rad}(R/\text{rad } R) = \{0\}$ dır.

Ispat:

$\text{rad } R$ yi I ile gösterelim. $a+I \in \text{rad } R/I$ olmak üzere, göstermek istediğimiz $a+I = I$ için $a \in I$ olduğudur.

$a+I$, $\text{rad}(R/I)$ nin elemanı olduğundan

$$(1+I)-(a+I)(a+I) = 1-ra+I$$

R/I da tersinirdir.

$(1-ra+I)(b+I) = (1+I)$ olacak şekilde $b+I$ koseti vardır.

$$(1-ra+I)(b+I) = 1+I$$

$$1-(b-rab)_\epsilon I = radR$$

$$b-rab = 1-1(1-b+rab)$$

R de bir c inversine sahiptir.

$$(1-ra)bc = (b-rab)c = 1$$

Şöyle ki

$(1-ra)$, R de bir çarpımsal inverse sahiptir.

Buradan $a_\epsilon radR = I$ bulunmuş olur.

Teorem:11)

R birimli bir halka olsun. R nin her maximal ideali asal idealdir.

Ispat:

M bir maximal ideal olsun. M in maximal ideal olması için gerek ve yeter koşul her $a \notin M$ için $(M,a) = R$ olmasıdır.

$$l = m+ra$$

$$b = \underbrace{bm} + \underbrace{bra}$$

$\varepsilon m \quad \varepsilon m \quad \circ$

$b \in \mathfrak{m}$ bulunur ve M asal idealdir.

Tanım:8)

R bir halka olsun. R nin asal ideallerinin arakesiti-
ne asal radikal denir.

$$P(R) = \bigcap \{P; P, R \text{ de asal ideal}\}$$

Eğer $P(R) = \{0\}$ ise R halkasına asal radikalsiz
yada sıfır asal radikaline sahiptir denir.

BÖLÜM V

BOOLE HALKALARI

X bir küme, R , X 'in bütün alt kümelerinin topluluğu olsun. $a, b \in R$ için

$a \oplus b = a \Delta b = (a \cup b) / (a \cap b) = a$ ile b nin simetrik farkı,

$ab = a \cap b = a$ ile b nin arakesiti olarak R üzerinde toplama ve çarpma işlemlerini tanımlayalım. R nin bir halka olduğu aşikardır. R in birimi X in kendisi, sıfırı \emptyset kümedir. Herhangi bir a elemanı için $a^2 = a.a = a \cap a = a$ dan R nin her elemanı idempotent olacaktır.

$ab = a \cap b = b \cap a = ba$ dan da R nin değişmeli olacağı sonucu çıkar. Böyle kurulan R halkasına X in alt kümeleri halkası denir.

Tanım:1)

Her elemanı idempotent olan halkaya Boole halkası denir.

Teorem: 2)

Her boole halkası değişmelidir.

Ispat:

$a, b \in R$ ve R boole halkası olsun.

$$a+b = (a+b)^2 = a^2 + ab + ba + b^2 = a + ab + ba + b \text{ den}$$

$$ab + ba = 0 \tag{1}$$

elde edilir. (1) her a, b için doğru olduğundan

$$a+a = aa+aa = 2a = 0 \tag{2}$$

(2) den her a için

$$a = -a \tag{3}$$

(1) ve (3) den

$$ab = -(ba) = ba \text{ olur ki}$$

bu da R nin değişmeli olması demektir.

KAYNAKÇA

- 1) Thomas Hungerford. Algebra. Springer Verlag (1974)
- 2) David M. Burton. A First Course In rings and ideals. Addison-Wesley series in mathematics (1970)
- 3) Serge Lang. Algebra. Addison-wesley Publishing Company (1984)
- 4) Hıdeyukı Matsumura. Commutative ring Theory. Cambridge University Press (1980)
- 5) Mustafa Bayraktar. Soyut Cebir ve Sayılar Teorisi. Atatürk Üniversitesi (1988)
- 6) M.F.Atiyah, I.G. Macdonald H.Ü. Fen Fakültesi Basımevi (1980)
- 7) Doç.Dr.Abdullah HARMANCI. Cebir II. Hacettepe Üniversitesi Basımevi ()

ÖZGEÇMİŞ

15.8.1966 tarihinde Trabzon'da doğdum. İlk,orta ve lise öğrenimimi İstanbul'da tamamladım. 1984 yılında Marmara Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne kayıt olup, 1988 yılı Haziran döneminde mezun oldum.

22.1.1990 tarihinden itibaren; Yıldız Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktayım.