

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GÜL REGLE YÜZEYLERİ

Damla BUDAK

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Matematik Anabilim Dalı
Matematik Programı

Danışman
Prof. Dr. Salim YÜCE

Şubat, 2024

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GÜL REGLE YÜZEYLERİ

Damla BUDAK tarafından hazırlanan tez çalışması 22.02.2024 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Matematik Programı **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Salim YÜCE
Yıldız Teknik Üniversitesi
Danışman

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Salim YÜCE, Danışman
Yıldız Teknik Üniversitesi

Doç. Dr. Gülsüm Yeliz SAÇLI, Üye
Yıldız Teknik Üniversitesi

Dr. Öğr. Üyesi Bedia Merih ÖZÇETİN, Üye
İstanbul Gelişim Üniversitesi

Danışmanım Prof. Dr. Salim YÜCE sorumluluğunda tarafımca hazırlanan GÜL REGLE YÜZEYLERİ başlıklı çalışmada veri toplama ve veri kullanımında gerekli yasal izinleri aldığımı, diğer kaynaklardan aldığım bilgileri ana metin ve referanslarda eksiksiz gösterdiğimi, araştırma verilerine ve sonuçlarına ilişkin çarpıtma ve/veya sahtecilik yapmadığımı, çalışmam süresince bilimsel araştırma ve etik ilkelerine uygun davrandığımı beyan ederim. Beyanımın aksinin ispatı halinde her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Damla BUDAK

İmza



Bu çalışma, Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK) tarafından 2210-A Genel Yurt İçi Yüksek Lisans Burs Programı ile desteklenmiştir.

Canım aileme...



TEŐEKKÜR

Bu alıŐma boyunca bilgisini ve tecrubesini paylaŐıp yol gosteren, değerli vaktini esirgemeyen kıymetli danışman hocam Prof. Dr. Salim YÜCE' ye; her zaman yanımda olan ve beni destekleyen aileme ve yolumu aydınlatan canım kardeŐime en içten teŐekkürlerimi sunarım. Ayrıca, yüksek lisans sürecim boyunca 2210-A Genel Yurt İçi Yüksek Lisans Burs Programı ile tezimi destekleyen Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumuna (TÜBİTAK) teŐekkürü borç bilirim.

Damla BUDAK

İÇİNDEKİLER

SİMGE LİSTESİ	viii
ŞEKİL LİSTESİ	ix
ÖZET	xi
ABSTRACT	xii
1 GİRİŞ	1
1.1 Literatür Özeti	1
1.2 Tezin Amacı	1
1.3 Bulgular	2
2 GÜL EĞRİLERİ VE GÜL YÜZEYLERİ	3
2.1 Düzlemsel Gül Eğrileri	3
2.1.1 Tam Sayı Değerli Gül Eğrileri	4
2.1.2 Rasyonel Sayı Değerli Gül Eğrileri	7
2.1.3 İrrasyonel Sayı Değerli Gül Eğrileri	8
2.2 Gül Eğrilerinin Frenet Elemanları	10
2.3 Gül Yüzeyleri	11
2.3.1 Gül Yüzeylerinin Parametrik Denklemleri	12
3 REGLE YÜZEYLERİ	13
3.1 Regle Yüzeyi	13
3.2 Regle Yüzeyin Teğet Düzlemi	14
3.3 Regle Yüzeyin Özellikleri	14
3.4 Regle Yüzeyin Global Özellikleri	15
3.4.1 Striksiyon eğrisi	15
3.4.2 Regle Yüzeyin Açılabilirliği	15
3.5 Regle Yüzeyin Geodezik Çatısı ve Geodezik Frenet Formülleri . . .	16
4 GÜL REGLE YÜZEYLERİ	19
4.1 Rektifiyan Gül Regle Yüzeyi	19
4.1.1 Rektifiyan Gül Regle Yüzeyinin Teğet Düzlemi	23

4.1.2	Rektifiyan Gül Regle Yüzeyinin Özellikleri	27
4.1.3	Rektifiyan Gül Regle Yüzeyinin Global Özellikleri	35
4.1.4	Rektifiyan Gül Regle Yüzeyinin Geodezik Çatısı ve Geodezik Frenet Formülleri	38
4.1.5	Rektifiyan Gül Regle Yüzeylerinin Görselleştirilmesi	44
4.2	Normal Gül Regle Yüzeyi	51
4.2.1	Normal Gül Regle Yüzeyinin Teğet Düzlemi	54
4.2.2	Normal Gül Regle Yüzeyinin Özellikleri	58
4.2.3	Normal Gül Regle Yüzeyinin Global Özellikleri	66
4.2.4	Normal Gül Regle Yüzeyinin Geodezik Çatısı ve Geodezik Frenet Formülleri	70
4.2.5	Normal Gül Regle Yüzeylerinin Görselleştirilmesi	74
4.3	Rektifiyan ve Normal Gül Regle Yüzeylerinin Karşılaştırılması	78
5	SONUÇ	81
	KAYNAKÇA	82
	TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR	83

SİMGE LİSTESİ

$g(s)$	Asimptotik normal doğrultu
τ	Eğrinin burulması
κ	Eğrinin eğriliği
κ_n	Geodezik eğrilik
\langle, \rangle	İç çarpım
t	Merkez normali
κ_n	Normal eğrilik
$\ , \ $	Öklid normu
\mathbb{E}^3	Öklid uzayı
$\phi(s, v)$	Regle yüzey
\mathcal{N}	Regle yüzeyin birim normal vektörü
$\alpha(s)$	Regle yüzeyin dayanak eğrisi
$e(s)$	Regle yüzeyin doğrultmanı
P_e	Regle yüzeyin drali
K	Regle yüzeyin Gauss eğriliği
$c(s)$	Regle yüzeyin striksiyon eğrisi
\times	Vektörel çarpım

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 2.1	Farklı k tam sayı değerleri için gül eğrileri	4
Şekil 2.2	$a = 1$ ve $k = 1$ için gül eğrisi	5
Şekil 2.3	$a = 1$ ve $k = 2$ için gül eğrisi	5
Şekil 2.4	$a = 1$ ve $k = 3$ için gül eğrisi	6
Şekil 2.5	$a = 1$ ve $k = 4$ için gül eğrisi	6
Şekil 2.6	$a = 1$ ve $k = 5$ için gül eğrisi	7
Şekil 2.7	$a = 1$ ve $k = \frac{1}{2}$ için gül eğrisi	8
Şekil 2.8	$a = 1$ ve $k = \frac{1}{3}$ için gül eğrisi	8
Şekil 2.9	$[0, 10\pi]$ aralığında $a = 1$ ve $k = \sqrt{2}$ için gül eğrisi	9
Şekil 2.10	$[0, 100\pi]$ aralığında $a = 1$ ve $k = \sqrt{2}$ için gül eğrisi	9
Şekil 2.11	$[0, 1000\pi]$ aralığında $a = 1$ ve $k = \sqrt{2}$ için gül eğrisi	9
Şekil 4.1	$k = 2$ ve $\theta = \frac{\pi}{2}$ için rektifiyan gül regle yüzeyi	22
Şekil 4.2	$k = 2$ ve $\theta = \frac{\pi}{3}$ için rektifiyan gül regle yüzeyi	22
Şekil 4.3	$k = 1$ ve $\theta = \frac{\pi}{2}$ için rektifiyan gül regle yüzeyi	44
Şekil 4.4	$k = 1$ ve $\theta = \frac{\pi}{3}$ için rektifiyan gül regle yüzeyi	44
Şekil 4.5	$k = 2$ ve $\theta = \frac{\pi}{2}$ için rektifiyan gül regle yüzeyi	45
Şekil 4.6	$k = 2$ ve $\theta = \frac{\pi}{3}$ için rektifiyan gül regle yüzeyi	45
Şekil 4.7	$k = 3$ ve $\theta = \frac{\pi}{2}$ için rektifiyan gül regle yüzeyi	46
Şekil 4.8	$k = 3$ ve $\theta = \frac{\pi}{3}$ için rektifiyan gül regle yüzeyi	46
Şekil 4.9	$k = 4$ ve $\theta = \frac{\pi}{2}$ için rektifiyan gül regle yüzeyi	47
Şekil 4.10	$k = 4$ ve $\theta = \frac{\pi}{3}$ için rektifiyan gül regle yüzeyi	47
Şekil 4.11	$k = 5$ ve $\theta = \frac{\pi}{2}$ için rektifiyan gül regle yüzeyi	48
Şekil 4.12	$k = 5$ ve $\theta = \frac{\pi}{3}$ için rektifiyan gül regle yüzeyi	48
Şekil 4.13	$k = \frac{1}{2}$ ve $\theta = \frac{\pi}{2}$ için rektifiyan gül regle yüzeyi	49
Şekil 4.14	$k = \frac{1}{2}$ ve $\theta = \frac{\pi}{3}$ için rektifiyan gül regle yüzeyi	49
Şekil 4.15	$k = \frac{1}{3}$ ve $\theta = \frac{\pi}{2}$ için rektifiyan gül regle yüzeyi	50
Şekil 4.16	$k = \frac{1}{3}$ ve $\theta = \frac{\pi}{3}$ için rektifiyan gül regle yüzeyi	50
Şekil 4.17	$k = 2$ ve $\theta = \frac{\pi}{2}$ için normal gül regle yüzeyi	53
Şekil 4.18	$k = 2$ ve $\theta = \frac{\pi}{3}$ için normal gül regle yüzeyi	54
Şekil 4.19	$k = 1$ ve $\theta = \frac{\pi}{3}$ için normal gül regle yüzeyi	75
Şekil 4.20	$k = 2$ ve $\theta = \frac{\pi}{3}$ için normal gül regle yüzeyi	75
Şekil 4.21	$k = 3$ ve $\theta = \frac{\pi}{3}$ için normal gül regle yüzeyi	76

Şekil 4.22	$k = 4$ ve $\theta = \frac{\pi}{3}$ için normal gül regle yüzeyi	76
Şekil 4.23	$k = 5$ ve $\theta = \frac{\pi}{3}$ için normal gül regle yüzeyi	77
Şekil 4.24	$k = \frac{1}{2}$ ve $\theta = \frac{\pi}{3}$ için normal gül regle yüzeyi	77
Şekil 4.25	$k = \frac{1}{3}$ ve $\theta = \frac{\pi}{3}$ için normal gül regle yüzeyi	78
Şekil 4.26	$k = 1$ ve $\theta = \frac{\pi}{3}$ için rektifiyan ve normal gül regle yüzeyi	78
Şekil 4.27	$k = 2$ ve $\theta = \frac{\pi}{3}$ için rektifiyan ve normal gül regle yüzeyi	79
Şekil 4.28	$k = 3$ ve $\theta = \frac{\pi}{3}$ için rektifiyan ve normal gül regle yüzeyi	79
Şekil 4.29	$k = 4$ ve $\theta = \frac{\pi}{3}$ için rektifiyan ve normal gül regle yüzeyi	79
Şekil 4.30	$k = 5$ ve $\theta = \frac{\pi}{3}$ için rektifiyan ve normal gül regle yüzeyi	80
Şekil 4.31	$k = \frac{1}{2}$ ve $\theta = \frac{\pi}{3}$ için rektifiyan ve normal gül regle yüzeyi	80
Şekil 4.32	$k = \frac{1}{3}$ ve $\theta = \frac{\pi}{3}$ için rektifiyan ve normal gül regle yüzeyi	80



GÜL REGLE YÜZEYLERİ

Damla BUDAK

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek LİSANS Tezi

Danışman: Prof. Dr. Salim YÜCE

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm, giriş bölümü olup bu bölümde literatür özeti, tezin amacı ve bulgular yer almaktadır. İkinci bölümde, gül eğrileri ve gül yüzeyleri hakkında temel kavramlar ve hesaplamalar verilmiştir. Üçüncü bölümde, \mathbb{E}^3 Öklid uzayında regle yüzeyler ile ilgili temel tanım ve teoremler verilmiştir. Tezin orijinal bölümü olan dördüncü bölümde, \mathbb{E}^3 Öklid uzayında rektifiyan ve normal gül regle yüzeyleri inşa edilmiş, bu yüzeylerin karakteristik özellikleri incelenmiş ve bu yüzeyler MATLAB programı kullanılarak görselleştirilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Gül eğrisi, regle yüzeyi, gül regle yüzeyi, rektifiyan gül regle yüzeyi, normal gül regle yüzeyi.

ABSTRACT

ROSE RULED SURFACES

Damla BUDAK

Department of Mathematics
Master of Science Thesis

Supervisor: Prof. Dr. Salim YÜCE

This thesis consists of five chapters. The first chapter is the introduction chapter and consists of the literature summary, the aim of the thesis and the findings. In the second chapter, basic concepts and calculations about rose curves and rose surfaces are given. In the third chapter, the basic definitions, and theorems about the ruled surfaces in \mathbb{E}^3 Euclidean space are given. In the fourth chapter, which is the original chapter of the thesis, the rectifying and normal rose ruled surfaces were constructed in \mathbb{E}^3 Euclidean space, the characteristic properties of these surfaces were examined, and these surfaces were visualized using the MATLAB program.

Keywords: Rose curve, ruled surface, rose ruled surface, rectifying rose ruled surface, normal rose ruled surface.

YILDIZ TECHNICAL UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE AND ENGINEERING

1.1 Literatür Özeti

18. yüzyılın başında Luigi Guido Grandi çiçek şekline benzeyen eğrilerin geometrik bir tanımını ararken gül eğrilerini buldu. Guido Grandi, bulduğu gül eğrilerinin temel özelliklerini 1713 yılının Aralık ayına kadar iki mektup aracılığıyla Leibniz'e ilettiler fakat gül eğrilerinin yaygın bir bilgi haline gelmesi on yıl sonra oldu. Guido Grandi keşfettiği gül eğrilerinin özelliklerini 1723 yılında Royal Society of London'da bir makale olarak sundu, [1]. Daha sonra 1728 yılında Floransa'da daha kapsamlı bir makale yayınladı, [2]. Gül eğrileri, 1875 yılında yapraklı eğriler adı altında Edward Wyllys Hyde tarafından incelendi, [3]. 1987 yılında Peter Maurer tam sayı değerli gül eğrileri yardımıyla oluşturulan Maurer güllerini tanımladı, [4]. 2010 yılında Sonja Gorjanc üç boyutlu Öklid uzayında gül eğrileri yardımıyla üretilen gül yüzeylerini tanımlamış ve bu yüzeylerin özelliklerini incelemiştir, [5]. Ayrıca gül eğrilerinden sanat, mimari ve mühendislik gibi pek çok alanda faydalanılmaktadır. Hırvatistan'ın Zadar şehrinde Aziz Meryem Kilisesi'nin Benedictine Manastırı'nın camlarının gül eğrisi şeklinde olması mimari alandaki örneklerinden biridir, [6].

1.2 Tezin Amacı

Literatür incelendiğinde, gül eğrilerinin temel özellikleri, gül eğrileri yardımıyla tanımlanan eğriler ve yüzeylerin çalışıldığı görülmektedir. Aynı zamanda literatürde eğriler yardımıyla üretilen regle yüzeylerin var olduğu fakat gül eğrileri ile oluşturulan regle yüzeylerin mevcut olmadığı görülmektedir. Bu tezin amacı da gül eğrileri ile üretilen regle yüzeyleri oluşturarak literatürdeki bu boşluğu doldurmaktır.

1.3 Bulgular

Bu çalışmada ilk olarak gül eğrileri, gül yüzeyleri ve regle yüzeyler ile ilgili literatürde olan temel tanım ve teoremler verilmiştir. Daha sonra \mathbb{E}^3 Öklid uzayında dayanak eğrisi gül eğrisi ve doğrultman vektörü bu eğrinin Frenet vektörlerinin açısız lineer birleşiminden oluşan gül regle yüzeyleri inşa edilmiştir. İnşa edilen bu gül regle yüzeylerinin birim normal vektörleri, teğet düzlemleri, temel form katsayıları, Gauss eğrilikleri, striksiyon eğrileri, dağılma parametreleri, asimptotik normal doğrultuları ve striksiyon noktasındaki merkez normalleri hesaplanmıştır ve bu yüzeyler MATLAB programı ile görselleştirilmiştir.



2

GÜL EĞRİLERİ VE GÜL YÜZEYLERİ

Bu bölümde, tezin orijinal kısmını oluşturacak olan dördüncü bölüm için gerekli olan gül eğrileri ile ilgili temel bilgiler verilmiştir.

2.1 Düzlemsel Gül Eğrileri

Tanım 2.1. Matematikte kutupsal koordinatlarda çizilen bir kosinüs ya da sinüs eğrisine gül veya rhodonea eğrisi denir. Gül eğrisi

$$r = a \cos(k\theta) \quad (2.1)$$

kutupsal denklemleriyle ifade edilir. Burada, a gül eğrisinin yaprağının uzunluğunu, k gül eğrisinin yapraklarının sayısını ve θ kutupsal koordinat sistemindeki açığı temsil eder. Kutupsal koordinatlardan kartezyen koordinatlara geçerse gül eğrisinin parametrik denklemleri de

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) = a \cos(k\theta) \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) = a \cos(k\theta) \sin(\theta) \end{cases} \quad (2.2)$$

şeklinde. Gül eğrileri, sinüs fonksiyonu kullanılarak da temsil edilebilir. Sinüs ve kosinüs fonksiyonları arasındaki

$$\sin(k\theta) = \cos\left(k\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(k\left(\theta - \frac{\pi}{2k}\right)\right)$$

bağıntısından $r = a \sin(k\theta)$ ile belirtilen gül, $r = a \cos(k\theta)$ ile belirtilen gülün pozitif yönde $\frac{\pi}{2k}$ radyan döndürülmüş haline eşittir. Gül eğrisi, kartezyen koordinat sisteminde çizilen bir sinüzoidin kutupsal koordinat versiyonudur, [6].

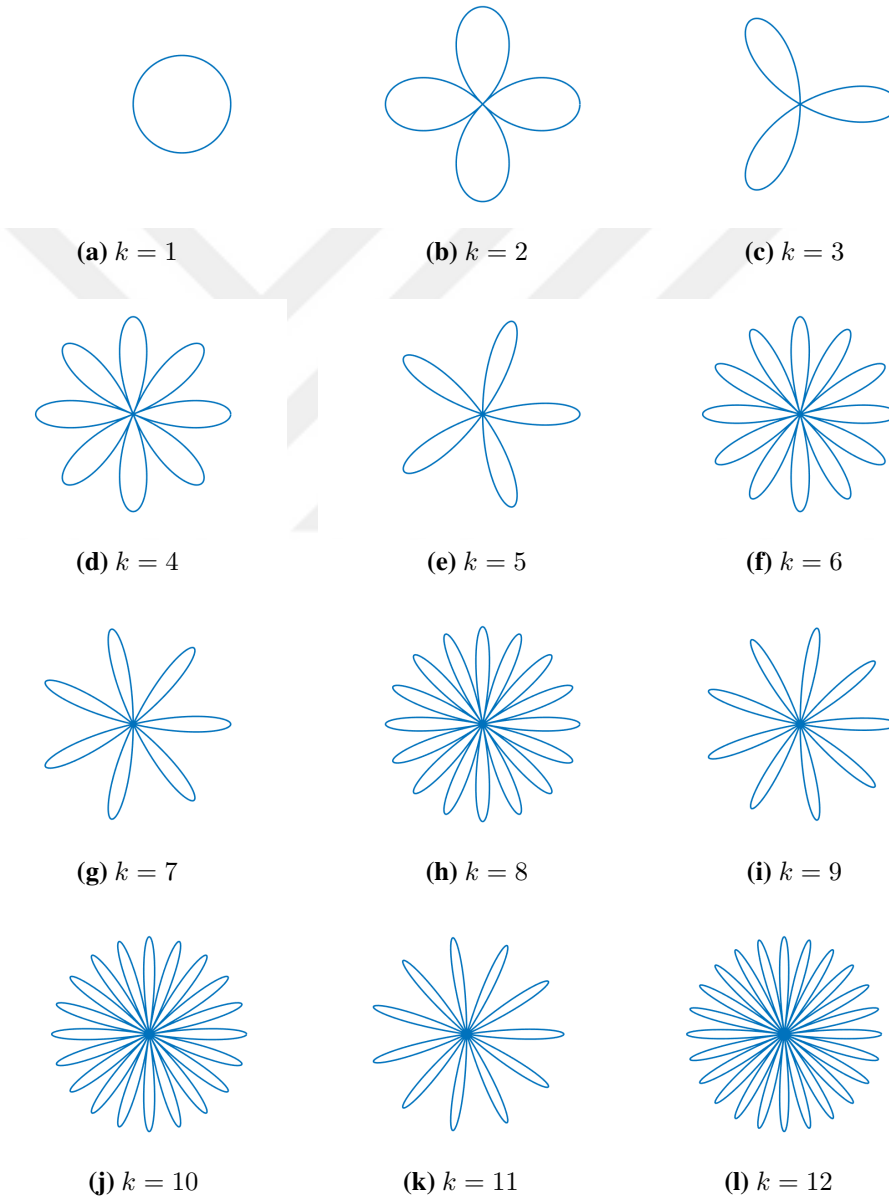
Not. Burada $a \neq 0$ ve $k \neq 0$ sabitleri pozitif reel sayılar olarak kabul edilebilir, [6].

Gül eğrileri, k sabitinin aldığı değerlere göre sınıflandırılabilir:

2.1.1 Tam Sayı Değerli Gül Eğrileri

$k \neq 0$ bir tam sayı olsun.

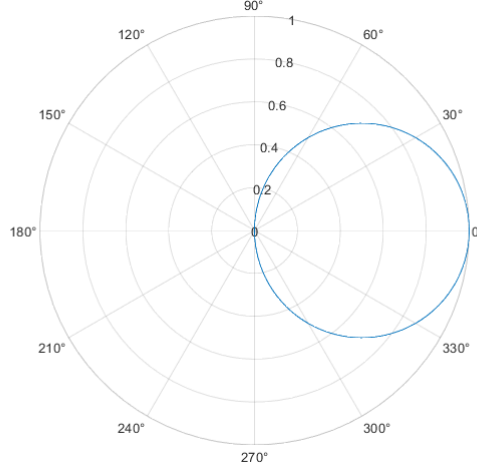
- Eğer $k = (2n - 1)$ ise eğri k yaprağa sahiptir ve π kutup açısında kapanır.
- Eğer $k = (2n)$ ise eğri $2k$ yaprağa sahiptir ve 2π kutup açısında kapanır.
- Gül eğrisi, $r = a$ çemberinin içinde kalır, [5, 7].



Şekil 2.1 Farklı k tam sayı değerleri için gül eğrileri

2.1.1.1 Çember

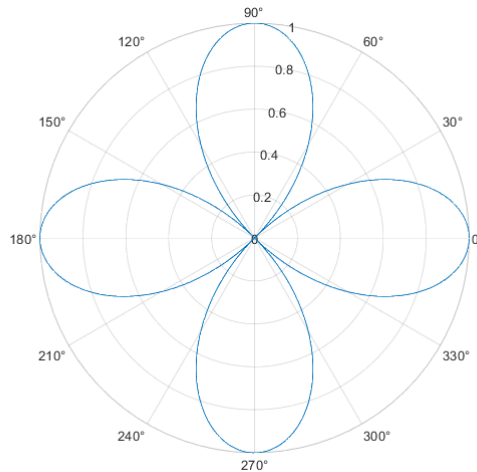
$k = 1$ için gül eğrisi $r = a \cos(\theta)$ kutup denklemiyle verilen çapı kutup ekseninde olan bir çemberdir. Eğri tek bir yaprağa sahiptir ve π kutup açısında kapanır. Kartezyen koordinatlarda denklemi $(x - \frac{a}{2})^2 + y^2 = (\frac{a}{2})^2$ şeklindedir, [5, 6].



Şekil 2.2 $a = 1$ ve $k = 1$ için gül eğrisi

2.1.1.2 Dört Yapraklı Gül Eğrisi

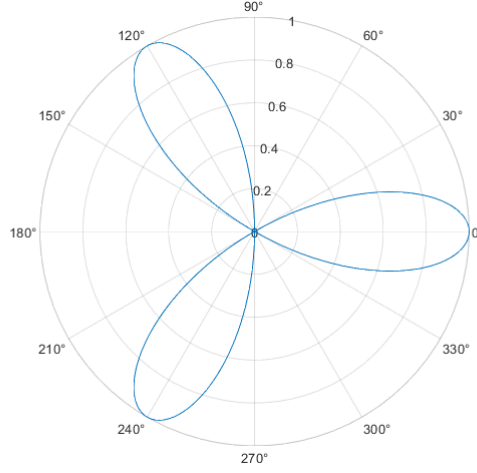
$k = 2$ için gül eğrisi $r = a \cos(2\theta)$ kutup denklemiyle verilir. Eğri 4 yaprağa sahiptir ve 2π kutup açısında kapanır. Bu gül eğrisine quadrifolium veya dört yapraklı gül eğrisi adı verilir, [5, 7].



Şekil 2.3 $a = 1$ ve $k = 2$ için gül eğrisi

2.1.1.3 Üç Yapraklı Gül Eğrisi

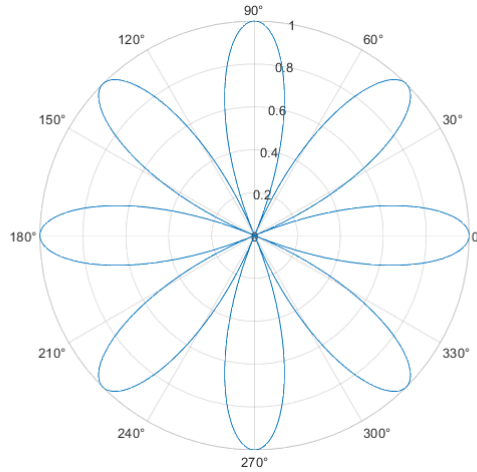
$k = 3$ için gül eğrisi $r = a \cos(3\theta)$ kutup denklemiyle verilir. Eğri 3 yaprağa sahiptir ve π kutup açısında kapanır. Bu gül eğrisine trifolium veya üç yapraklı gül eğrisi adı verilir, [5, 7].



Şekil 2.4 $a = 1$ ve $k = 3$ için gül eğrisi

2.1.1.4 Sekiz Yapraklı Gül Eğrisi

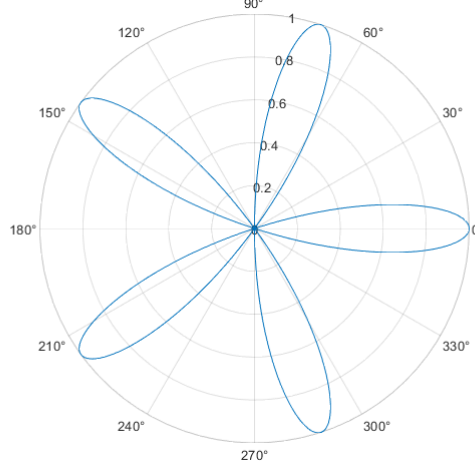
$k = 4$ için gül eğrisi $r = a \cos(4\theta)$ kutup denklemiyle verilir. Eğri 8 yaprağa sahiptir ve 2π kutup açısında kapanır. Bu gül eğrisine octafolium veya sekiz yapraklı gül eğrisi adı verilir, [5].



Şekil 2.5 $a = 1$ ve $k = 4$ için gül eğrisi

2.1.1.5 Beş Yapraklı Gül Eğrisi

$k = 5$ için gül eğrisi $r = a \cos(5\theta)$ kutup denklemiyle verilir. Eğri 5 yaprağa sahiptir ve π kutup açısında kapanır. Bu gül eğrisine pentafolium veya beş yapraklı gül eğrisi adı verilir, [5].



Şekil 2.6 $a = 1$ ve $k = 5$ için gül eğrisi

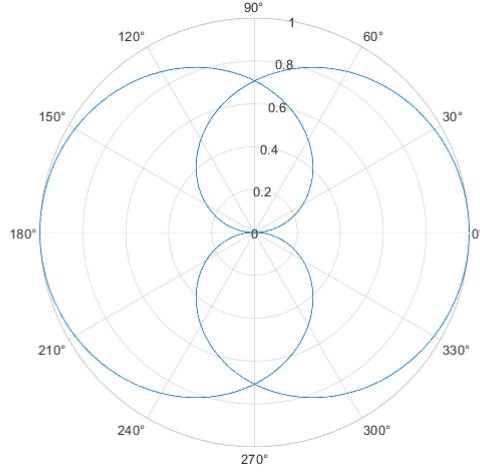
2.1.2 Rasyonel Sayı Değerli Gül Eğrileri

n ile d sıfırdan farklı ve aralarında asal tam sayılar olmak üzere $k = \frac{n}{d}$ pozitif bir rasyonel sayı olsun.

- Eğer nd tek ise eğri n yaprağa sahiptir ve $d\pi$ kutup açısında kapanır. Bu tür gül eğrileri $(n + d)$. dereceden cebirsel eğrilerdir.
- Eğer nd çift ise eğri $2n$ yaprağa sahiptir ve $2d\pi$ kutup açısında kapanır. Bu tür gül eğrileri $2(n + d)$. dereceden cebirsel eğrilerdir.
- Gül eğrisi, $r = a$ çemberinin içinde kalır, [5, 7].

2.1.2.1 Dürer Folium

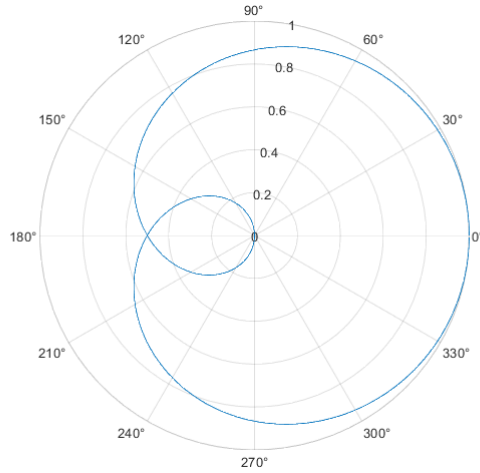
$k = \frac{1}{2}$ için gül eğrisi $r = a \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ kutup denklemiyle verilir. Eğri 2 yaprağa sahiptir ve 4π kutup açısında kapanır. Bu gül eğrisine Dürer folium adı verilir. Adını ünlü Alman matematikçi ve sanatçı Albrecht Dürer'den alır. 6. dereceden cebirsel eğridir, [5].



Şekil 2.7 $a = 1$ ve $k = \frac{1}{2}$ için gül eğrisi

2.1.2.2 Limaçon Trisectrix

$k = \frac{1}{3}$ için gül eğrisi $r = a \cos\left(\frac{\theta}{3}\right)$ kutup denkleminde verilir. Eğri 1 yaprağa sahiptir ve 3π kutup açısında kapanır. Bu gül eğrisine Limaçon Trisectrix adı verilir. 4.dereceden cebirsel eğridir, [5, 8]

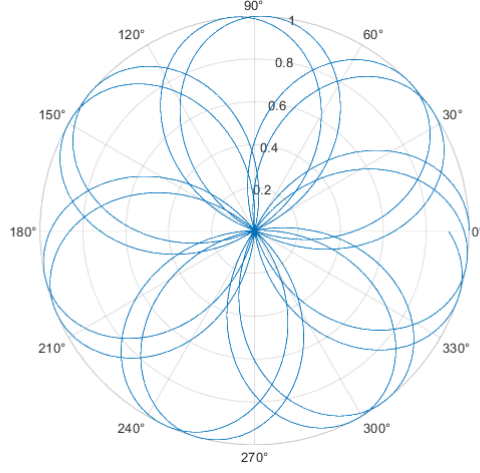


Şekil 2.8 $a = 1$ ve $k = \frac{1}{3}$ için gül eğrisi

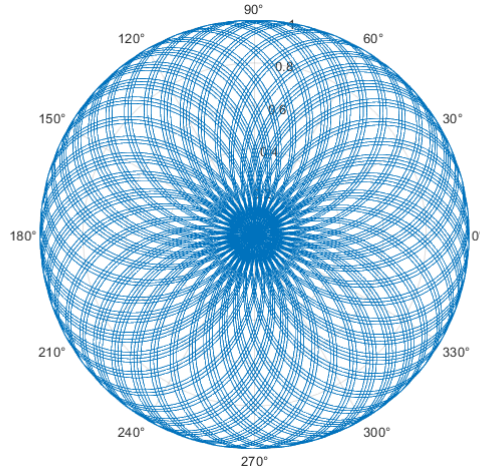
2.1.3 İrrasyonel Sayı Değerli Gül Eğrileri

k bir irrasyonel sayı olsun.

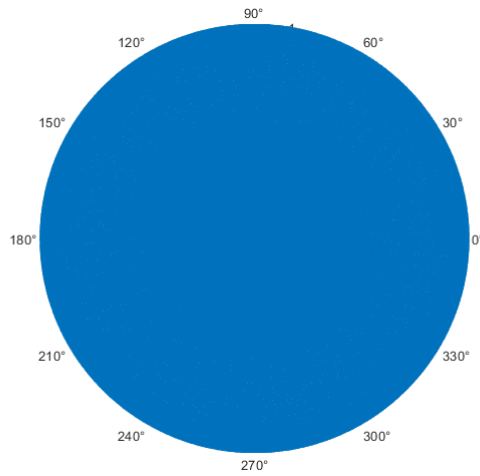
- Eğri asla kapanmaz dolayısıyla sonsuz sayıda yaprak vardır ve eğri birim diski doldurur, [6].



Şekil 2.9 $[0, 10\pi]$ aralığında $a = 1$ ve $k = \sqrt{2}$ için gül eğrisi



Şekil 2.10 $[0, 100\pi]$ aralığında $a = 1$ ve $k = \sqrt{2}$ için gül eğrisi



Şekil 2.11 $[0, 1000\pi]$ aralığında $a = 1$ ve $k = \sqrt{2}$ için gül eğrisi

2.2 Gül Eğrilerinin Frenet Elemanları

Kartezyen koordinatlarda, gül eğrisinin parametrik denklemleri

$$\begin{cases} x = a \cos(k\theta) \cos(\theta) \\ y = a \cos(k\theta) \sin(\theta) \end{cases}$$

şeklindedir. O halde gül eğrisinin düzlemsel bir eğri olması kullanılarak \mathbb{E}^3 Öklid uzayında gül eğrisinin denklemi için

$$\alpha(s) = (a \cos(ks) \cos(s), a \cos(ks) \sin(s), 0) \quad (2.3)$$

yazılabilir.

Teorem 2.1. \mathbb{E}^3 Öklid uzayında (2.3) eşitliği ile verilen gül eğrisinin $\{T, N, B\}$ Frenet çattısı, κ eğriliği ve τ burulması

$$T(s) = \left(-\frac{\cos(ks) \sin(s) + k \sin(ks) \cos(s)}{\sqrt{(k^2 - 1) \sin^2(ks) + 1}}, \frac{\cos(ks) \cos(s) - k \sin(ks) \sin(s)}{\sqrt{(k^2 - 1) \sin^2(ks) + 1}}, 0 \right),$$

$$N(s) = \left(-\frac{\cos(ks) \cos(s) - k \sin(ks) \sin(s)}{\sqrt{(k^2 - 1) \sin^2(ks) + 1}}, -\frac{\cos(ks) \sin(s) + k \sin(ks) \cos(s)}{\sqrt{(k^2 - 1) \sin^2(ks) + 1}}, 0 \right),$$

$$\kappa(s) = \frac{(k^2 - 1) \sin^2(ks) + k^2 + 1}{a ((k^2 - 1) \sin^2(ks) + 1)^{3/2}}$$

şeklindedir. Ayrıca burada gül eğrileri düzlemsel eğriler olduğundan $\tau = 0$ ve $B(s) = (0, 0, 1)$ olduğu açıktır.

İspat. \mathbb{E}^3 Öklid uzayında verilen

$$\alpha(s) = (a \cos(ks) \cos(s), a \cos(ks) \sin(s), 0)$$

gül eğrisinin birinci ve ikinci mertebe türevleri

$$\alpha_s = (-a \cos(ks) \sin(s) - ak \sin(ks) \cos(s), a \cos(ks) \cos(s) - ak \sin(ks) \sin(s), 0) \quad (2.4)$$

ve

$$\begin{aligned} \alpha_{ss} = & (-a \cos(ks) \cos(s) - ak^2 \cos(ks) \cos(s) + 2ak \sin(ks) \sin(s), \\ & -a \cos(ks) \sin(s) - ak^2 \cos(ks) \sin(s) - 2ak \sin(ks) \cos(s), 0) \end{aligned} \quad (2.5)$$

şeklindedir. Buradan

$$\|\alpha_s\| = a \sqrt{(k^2 - 1) \sin^2(ks) + 1}, \quad (2.6)$$

$$\alpha_s \times \alpha_{ss} = (0, 0, a^2 ((k^2 - 1) \sin^2(ks) + k^2 + 1)), \quad (2.7)$$

$$\|\alpha_s \times \alpha_{ss}\| = a^2 ((k^2 - 1) \sin^2(ks) + k^2 + 1), \quad (2.8)$$

olarak hesaplanır. O halde gül eğrisinin birim teğet vektörü

$$T = \frac{\alpha_s}{\|\alpha_s\|}$$

olmak üzere

$$T(s) = \left(-\frac{\cos(ks) \sin(s) + k \sin(ks) \cos(s)}{\sqrt{(k^2 - 1) \sin^2(ks) + 1}}, \frac{\cos(ks) \cos(s) - k \sin(ks) \sin(s)}{\sqrt{(k^2 - 1) \sin^2(ks) + 1}}, 0 \right) \quad (2.9)$$

elde edilir. Binormal vektörünün

$$B(s) = \frac{\alpha_s \times \alpha_{ss}}{\|\alpha_s \times \alpha_{ss}\|} = (0, 0, 1) \quad (2.10)$$

olduğu açıktır. Ayrıca birim asli normal vektörü

$$\begin{aligned} N(s) &= B(s) \times T(s) \\ &= \left(-\frac{\cos(ks) \cos(s) - k \sin(ks) \sin(s)}{\sqrt{(k^2 - 1) \sin^2(ks) + 1}}, -\frac{\cos(ks) \sin(s) + k \sin(ks) \cos(s)}{\sqrt{(k^2 - 1) \sin^2(ks) + 1}}, 0 \right) \end{aligned} \quad (2.11)$$

bulunur ve eğriligi

$$\kappa = \frac{\|\alpha_s \times \alpha_{ss}\|}{\|\alpha_s\|^3} = \frac{(k^2 - 1) \sin^2(ks) + k^2 + 1}{a ((k^2 - 1) \sin^2(ks) + 1)^{3/2}} \quad (2.12)$$

şeklindedir. ■

Not. $\forall k$ ve $\forall s$ için $\sqrt{(k^2 - 1) \sin^2(ks) + 1}$ ifadesi iyi tanımlıdır.

2.3 Gül Yüzeyleri

Tanım 2.2. $P(0, 0, p)$, z eksenini üzerindeki herhangi bir nokta ve $R(n, d)$, $z = 0$ düzleminde $r = \cos\left(\frac{n}{d}\theta\right)$ denklemi ile verilen bir gül eğrisi olsun. $R(n, d, p)$ gül yüzeyi, z eksenini boyunca ζ düzlemlerinde uzanan ve $\overline{PR_i}$ çaplarına sahip olan c_i çemberlerinden oluşan bir sistemdir. Burada $R_i \neq 0$, $R(n, d)$ gül eğrisinin ve ζ düzleminin kesişme noktalarıdır, [5].

2.3.1 Gül Yüzeylerinin Parametrik Denklemleri

θ , $\zeta(\theta)$ ve $y = 0$ düzlemleri arasındaki açı olsun. $\zeta(\theta)$ düzlemindeki PR çapına sahip c çemberinin parametrik denklemleri

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{2} \left(\cos \frac{n}{d} \theta + \sqrt{p^2 + \cos^2 \frac{n}{d} \theta} \sin \varphi \right), \\ z &= \frac{1}{2} \left(p + \sqrt{p^2 + \cos^2 \frac{n}{d} \theta} \cos \varphi \right) \end{aligned} \quad (2.13)$$

şeklindedir. Burada $\varphi \in [0, 2\pi)$, nd tek sayı ise $\theta \in [0, d\pi)$ ve nd çift sayı ise $\theta \in [0, 2d\pi)$ olur. Bu nedenle $R(n, d, p)$ gül yüzeyinin parametrik denklemleri

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} \cos \theta \left(\cos \frac{n}{d} \theta + \sqrt{p^2 + \cos^2 \frac{n}{d} \theta} \sin \varphi \right), \\ y &= \frac{1}{2} \sin \theta \left(\cos \frac{n}{d} \theta + \sqrt{p^2 + \cos^2 \frac{n}{d} \theta} \sin \varphi \right), \\ z &= \frac{1}{2} \left(p + \sqrt{p^2 + \cos^2 \frac{n}{d} \theta} \cos \varphi \right) \end{aligned} \quad (2.14)$$

şeklindedir. Burada nd tek sayı ise $(\theta, \varphi) \in [0, d\pi) \times [0, 2\pi)$ ve nd çift sayı ise $(\theta, \varphi) \in [0, 2d\pi) \times [0, 2\pi)$ olur, [5].

3

REGLE YÜZEYLERİ

Bu bölümde, tezin orjinal kısmını oluşturacak dördüncü bölüm için gerekli olan \mathbb{E}^3 Öklid uzayında regle yüzeyler ile ilgili temel kavram ve teoremler verilmiştir.

3.1 Regle Yüzeyi

Tanım 3.1. \mathbb{E}^3 Öklid uzayındaki doğruların 1-parametrelili ailelerini kapsayan bir yüzeye, regle yüzey denir. Bu ailedeki doğruların her birine regle yüzeyin ana doğrusu (doğrultmanı) adı verilir. \mathbb{E}^3 Öklid uzayında regle yüzey, bir doğrunun bir eğri üzerinde hareket ettirilmesiyle oluşan yüzey olarak da ifade edilebilir. Bu durumda doğrunun dayandığı eğriye, regle yüzeyin dayanak eğrisi denir.

Dayanak eğrisi $\alpha(s)$ ve $\|e\| = 1$ olmak üzere doğrultman vektörü e olan regle yüzeyin parametrik denklemi

$$\phi(s, v) = \alpha(s) + ve(s) \quad (3.1)$$

şeklindedir, [9].

Tanım 3.2. \mathbb{E}^3 Öklid uzayında $\phi(s, v) = \alpha(s) + ve(s)$ ile verilen regle yüzeyinin doğrultman vektörünün birim küre yüzeyi üzerinde çizmiş olduğu eğriye regle yüzeyinin küresel gösterge eğrisi adı verilir. Küresel gösterge eğrisi (e) ile gösterilir ve $\alpha_e(s) = e(s)$ olarak tanımlanır, [9].

Tanım 3.3. \mathbb{E}^3 Öklid uzayında (3.1) eşitliği ile verilen regle yüzey

$$\phi(s + 2\pi, v) = \phi(s, v) \quad (3.2)$$

eşitliğini sağlamıyorsa $\phi(s, v)$ regle yüzeyine kapalı regle yüzey adı verilir, [9].

Tanım 3.4. \mathbb{E}^3 Öklid uzayında $\phi(s, v) = \alpha(s) + ve(s)$ ile verilen regle yüzeyinin

doğrultman vektörü e ve $e_s = \frac{de}{ds}$ olmak üzere

$$e \times e_s \neq \vec{0} \quad (3.3)$$

eşitliği sağlanıyor ise regle yüzeye silindir olmayan regle yüzey adı verilir, [9].

3.2 Regle Yüzeyin Teğet Düzlemi

Tanım 3.5. \mathbb{E}^3 Öklid uzayında $\phi(s, v) = \alpha(s) + ve(s)$ ile verilen regle yüzeyinin parametrik denkleminde $\phi_s = \alpha_s + ve_s$ ve $\phi_v = e$ olarak yazılabilir. Böylece regle yüzeyin normal vektörü

$$\phi_s \times \phi_v = (\alpha_s \times e) + v(e_s \times e) \quad (3.4)$$

olarak bulunur. Regle yüzeyin birim normal vektörü de

$$\mathcal{N} = \frac{\phi_s \times \phi_v}{\|\phi_s \times \phi_v\|} = \frac{(\alpha_s \times e) + v(e_s \times e)}{\|(\alpha_s \times e) + v(e_s \times e)\|} \quad (3.5)$$

olarak elde edilir, [9].

Tanım 3.6. \mathbb{E}^3 Öklid uzayında $\phi(s, v) = \alpha(s) + ve(s)$ regle yüzeyinin doğrultmanını içeren ve yüzeyin birim normaline dik olan düzleme regle yüzeyin teğet düzlemi adı verilir. Burada X teğet düzlem üzerinde temsili bir noktayı ve P düzlemin yüzeye teğet olduğu noktayı göstermek üzere teğet düzlem denklemi

$$\langle \mathcal{N}_p, \overrightarrow{PX} \rangle = 0 \quad (3.6)$$

eşitliğiyle elde edilir, [9].

3.3 Regle Yüzeyin Özellikleri

Tanım 3.7. \mathbb{E}^3 Öklid uzayında (3.1) eşitliği ile verilen yüzey için $\phi_s = \alpha_s + ve_s$ ve $\phi_v = e$ olmak üzere regle yüzeyin 1. temel form katsayıları

$$E = \langle \phi_s, \phi_s \rangle, \quad (3.7)$$

$$F = \langle \phi_s, \phi_v \rangle, \quad (3.8)$$

$$G = \langle \phi_v, \phi_v \rangle, \quad (3.9)$$

ile verilir, [9]

Tanım 3.8. \mathbb{E}^3 Öklid uzayında (3.1) eşitliği ile verilen yüzey için $\phi_{ss} = \alpha_{ss} + ve_{ss}$, $\phi_{sv} = e_s$, $\phi_{vv} = 0$ ve $W = \sqrt{EG - F^2} \neq 0$ olmak üzere regle yüzeyin 2. temel form katsayıları

$$\mathbf{e} = \frac{\det(\phi_s, \phi_v, \phi_{ss})}{W}, \quad (3.10)$$

$$\mathbf{f} = \frac{\det(\phi_s, \phi_v, \phi_{sv})}{W}, \quad (3.11)$$

$$\mathbf{g} = \frac{\det(\phi_s, \phi_v, \phi_{vv})}{W} \quad (3.12)$$

olarak verilir, [9].

Tanım 3.9. \mathbb{E}^3 Öklid uzayında (3.1) eşitliği ile verilen yüzey için Gauss eğriliği

$$K = -\frac{(\det(\alpha_s, e, e_s))^2}{\|\phi_s \times \phi_v\|^4} \quad (3.13)$$

ile hesaplanır, [9].

3.4 Regle Yüzeyin Global Özellikleri

3.4.1 Striksiyon eğrisi

Tanım 3.10. Regle yüzeyinin komşu iki ana doğrusunun ortak dikmesinin ana doğrular üzerindeki ayaklarına regle yüzeyin striksiyon noktası denir, [9].

Tanım 3.11. $\phi(s, v) = \alpha(s) + ve(s)$ yüzeyinin doğrultman vektörü dayanak eğrisi üzerinde regle yüzeyi üretirken, striksiyon noktalarının geometrik yerlerine regle yüzeyinin striksiyon eğrisi adı verilir. Striksiyon eğrisinin genel denklemi

$$c(s) = \alpha(s) - \frac{\langle \alpha_s, e_s \rangle}{\langle e_s, e_s \rangle} e(s) \quad (3.14)$$

şeklindedir, [9].

3.4.2 Regle Yüzeyin Açılabilirliği

Tanım 3.12. Teğet düzlemleri, ana doğruları boyunca aynı kalan regle yüzeylere açılabilir denir, [9].

Tanım 3.13. \mathbb{E}^3 Öklid uzayında $\phi(s, v) = \alpha(s) + ve(s)$ ile verilen regle yüzeyinin iki komşu doğrultmanı arasındaki en yakın uzaklığın, bu iki doğrultman arasındaki açıya oranına regle yüzeyin drali veya dağılma parametresi denir. Regle yüzeyin dağılma parametresi P_e ile gösterilir ve

$$P_e = \frac{\det(\alpha_s, e, e_s)}{\|e_s\|^2} \quad (3.15)$$

eşitliği ile bulunur, [9].

Teorem 3.1. $\phi(s, v) = \alpha(s) + ve(s)$ yüzeyinin açılabilir olması için gerek ve yeter koşul regle yüzeyinin dralinin $P_e = 0$ olmasıdır, [9].

Not. \mathbb{E}^3 Öklid uzayında verilen $\phi(s, v) = \alpha(s) + ve(s)$ regle yüzeyi açılabilirse striksiyon eğrisi dayanak eğrisine eşittir, [9].

3.5 Regle Yüzeyin Geodezik Çatısı ve Geodezik Frenet Formülleri

Tanım 3.14. \mathbb{E}^3 Öklid uzayında verilen $\phi(s, v) = \alpha(s) + ve(s)$ regle yüzeyin herhangi bir doğrultmanı $l = \phi(s_0, v)$ olsun. Bu doğrultman üzerindeki bir Q noktasının hareketi sırasında bu noktadaki normal doğrultu l etrafında döner. O halde Q noktası l üzerinde sonsuza yaklaştığında v de sonsuza yaklaşır. Bu durumda $v \rightarrow -\infty$ iken regle yüzeyin elde edilen normal doğrultusuna asimptotik normal doğrultu adı verilir ve $g(s)|_{s=s_0}$ ile gösterilir. O halde asimptotik normal doğrultu $g(s)|_{s=s_0} = \lim_{v \rightarrow -\infty} \mathcal{N}(s, v)|_{s=s_0}$ şeklindedir, [9].

Teorem 3.2. \mathbb{E}^3 Öklid uzayında (3.1) eşitliği ile verilen yüzeyin bir $l = \phi(s_0, v)$ doğrultmanına ait asimptotik normal doğrultu,

$$g(s)|_{s=s_0} = \frac{e \times e_s}{\|e_s\|} \Big|_{s=s_0} \quad (3.16)$$

şeklindedir, [9].

İspat. Asimptotik normal doğrultu tanımı gereğince

$$g(s)|_{s=s_0} = \lim_{v \rightarrow -\infty} \mathcal{N}(s, v) \Big|_{s=s_0}$$

veya

$$g(s)|_{s=s_0} = \lim_{v \rightarrow -\infty} \frac{(\alpha_s + ve_s) \times e}{(\|\alpha_s + ve_s\|^2 - \langle \alpha_s, e \rangle^2)^{1/2}} \Big|_{s=s_0}$$

olmak üzere

$$g(s)|_{s=s_0} = \lim_{v \rightarrow -\infty} \frac{v \left(\frac{1}{v} \alpha_s + e_s \right) \times e}{|v| \left(\left\| \frac{1}{v} \alpha_s + e_s \right\|^2 - \frac{1}{|v|^2} \langle \alpha_s, e \rangle^2 \right)^{1/2}} \Big|_{s=s_0}$$

yazılabilir. $v \rightarrow -\infty$ için $\frac{1}{v} \rightarrow 0$ ve $|v| = -v$ olduğundan

$$g(s)|_{s=s_0} = - \frac{e_s \times e}{\|e_s\|} \Big|_{s=s_0} = \frac{e \times e_s}{\|e_s\|} \Big|_{s=s_0}$$

elde edilir. $v \rightarrow \infty$ için birim normal vektörü e etrafında 180° döner ve $-g$ konumuna gelir, [9]. ■

Tanım 3.15. Striksiyon noktasında \mathcal{N} vektörünün doğrultusuna regle yüzeyin merkez normali denir, [9].

Teorem 3.3. $\phi(s, v)$ regle yüzeyinin bir $\phi(s, v_0)$ striksiyon noktasındaki merkez normali t olmak üzere

$$t = \frac{e_s}{\|e_s\|} \quad (3.17)$$

şeklindedir, [9].

İspat. $\phi(s, v)$ regle yüzeyinin bir $\phi(s, v_0)$ striksiyon noktasındaki \mathcal{N} normal vektörünü n ile ifade edelim. Merkez normal tanımından $\langle n, e \rangle = 0$ ve n , asimptotik normaline de dik olduğundan $\langle n, e \times e_s \rangle = 0$ yazılabilir. O halde n ve e_s vektörleri paraleldir. Bu durumda

$$t = \frac{n}{\|n\|}$$

veya

$$t = \frac{e_s}{\|e_s\|}$$

elde edilir, [9]. ■

Tanım 3.16. $\phi(s, v)$ regle yüzeyinin e doğrultman vektörü, t merkez normali ve g asimptotik normalinin oluşturduğu $\{e, t, g\}$ ortonormal sistemine regle yüzeyin geodezik Frenet 3-ayaklısı ve bu sistemin her bir vektörüne de geodezik Frenet vektörü adı verilir, [9].

Sonuç 3.1. $\phi(s, v)$ regle yüzeyinin $\alpha(s)$ dayanak eğrisinin normal ve geodezik eğriliği, sırasıyla,

$$\kappa_n(\alpha) = \frac{\langle \alpha_{ss}, N \rangle}{\|\alpha_s\|^2}, \quad (3.18)$$

$$\kappa_g(\alpha) = \frac{\langle \alpha_s \times \alpha_{ss}, N \rangle}{\|\alpha_s\|^3} \quad (3.19)$$

şeklinde bulunur, [9].

Tanım 3.17. \mathbb{E}^3 Öklid uzayında

$$\begin{cases} e_{rek}(s) = \cos \theta(s)T(s) + \sin \theta(s)B(s), \\ e_{osk}(s) = \cos \theta(s)T(s) + \sin \theta(s)N(s), \\ e_{nor}(s) = \cos \theta(s)N(s) + \sin \theta(s)B(s) \end{cases}$$

olmak üzere

$$\begin{cases} \phi_{rek}(s, v) = \alpha(s) + ve_{rek}(s), \\ \phi_{osk}(s, v) = \alpha(s) + ve_{osk}(s), \\ \phi_{nor}(s, v) = \alpha(s) + ve_{nor}(s) \end{cases}$$

regle yüzeylerine sırasıyla rektifiyan, oskütör ve normal regle yüzeyi adı verilir, [10].



4 GÜL REGLE YÜZEYLERİ

Bu bölüm, tezin orijinal kısmını oluşturmaktadır. Bu bölümde, \mathbb{E}^3 Öklid uzayında gül eğrilerini dayanak eğrisi ve gül eğrilerinin Frenet vektörlerinin açısız lineer bileşimini doğrultman vektör kabul eden regle yüzeyler inşa edilmiştir. Ayrıntılı olarak, gül eğrilerinin birim teğet vektörü ile binormal vektörlerinin açısız lineer birleşimini doğrultman vektör kabul eden rektifiyan gül regle yüzeyleri ve gül eğrilerinin birim aslı normal vektörü ile binormal vektörlerinin açısız lineer birleşimini doğrultman vektör kabul eden normal gül regle yüzeyleri incelenmiş ve bu yüzeyler MATLAB programı ile görselleştirilmiştir. Burada, gül eğrilerini dayanak eğrisi ve gül eğrilerinin birim teğet vektörü ile birim aslı normal vektörlerinin açısız lineer birleşimini doğrultman vektör kabul eden oskülatör gül regle yüzeyleri dayanak eğrisinin ve doğrultman vektörün aynı düzlemde olması sebebiyle incelenmemiştir.

4.1 Rektifiyan Gül Regle Yüzeyi

Tanım 4.1. \mathbb{E}^3 Öklid uzayında gül eğrisini dayanak eğrisi ve dayanak eğrisinin birim teğet ile binormal vektörlerinin açısız lineer birleşimini doğrultman vektör kabul eden yüzeye rektifiyan gül regle yüzeyi denir.

\mathbb{E}^3 Öklid uzayında dayanak eğrisi

$$\alpha(s) = (a \cos(ks) \cos(s), a \cos(ks) \sin(s), 0)$$

ile verilen gül eğrisi; ana doğrunun doğrultman vektörü

$$e(s) = \cos \theta(s)T(s) + \sin \theta(s)B(s) \quad (4.1)$$

veya

$$e(s) = \left(-\frac{\cos \theta(s)(\cos(ks) \sin(s) + k \sin(ks) \cos(s))}{\sqrt{(k^2 - 1) \sin^2(ks) + 1}}, \right. \\ \left. \frac{\cos \theta(s)(\cos(ks) \cos(s) - k \sin(ks) \sin(s))}{\sqrt{(k^2 - 1) \sin^2(ks) + 1}}, \sin \theta(s) \right) \quad (4.2)$$

ve $\|e(s)\| = 1$ olan bir rektifiyan gül regle yüzeyinin parametrik denklemi

$$\begin{aligned} \phi(s, v) &= \alpha(s) + ve(s) \\ &= (a \cos(ks) \cos(s), a \cos(ks) \sin(s), 0) \\ &\quad + v \left(-\frac{\cos \theta(s)(\cos(ks) \sin(s) + k \sin(ks) \cos(s))}{\sqrt{(k^2 - 1) \sin^2(ks) + 1}}, \right. \\ &\quad \left. \frac{\cos \theta(s)(\cos(ks) \cos(s) - k \sin(ks) \sin(s))}{\sqrt{(k^2 - 1) \sin^2(ks) + 1}}, \sin \theta(s) \right) \\ &= \left(a \cos(ks) \cos(s) - \frac{v \cos \theta(s)(\cos(ks) \sin(s) + k \sin(ks) \cos(s))}{\sqrt{(k^2 - 1) \sin^2(ks) + 1}}, \right. \\ &\quad a \cos(ks) \sin(s) + \frac{v \cos \theta(s)(\cos(ks) \cos(s) - k \sin(ks) \sin(s))}{\sqrt{(k^2 - 1) \sin^2(ks) + 1}}, \\ &\quad \left. v \sin \theta(s) \right) \end{aligned} \quad (4.3)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $T(s)$, gül eğrisinin birim teğet vektörü ve $B(s)$ gül eğrisinin binormal vektörüdür.

Örnek 4.1. \mathbb{E}^3 Öklid uzayında $a = 1$ ve $k = 2$ değerleri için (2.3) eşitliği yardımıyla elde edilen $\alpha(s) = (\cos(2s) \cos(s), \cos(2s) \sin(s), 0)$ gül eğrisini dayanak eğrisi kabul eden rektifiyan gül regle yüzeyini bulunuz.

Çözüm. \mathbb{E}^3 Öklid uzayında $a = 1$ ve $k = 2$ değerleri için (2.9) eşitliği yardımıyla $\alpha(s)$ gül eğrisinin birim teğet vektörü

$$T(s) = \left(-\frac{\cos(2s) \sin(s) + 2 \sin(2s) \cos(s)}{\sqrt{3 \sin^2(2s) + 1}}, \frac{\cos(2s) \cos(s) - 2 \sin(2s) \sin(s)}{\sqrt{3 \sin^2(2s) + 1}}, 0 \right)$$

ve (2.10) eşitliği yardımıyla binormal vektörü

$$B(s) = (0, 0, 1)$$

olarak bulunur. Burada $\alpha(s)$ gül eğrisinin birim teğet vektörü $T(s)$ ile binormal vektörü $B(s)$ yardımıyla tanımlanan rektifiyan gül regle yüzeyinin doğrultmanı

$$\begin{aligned}
e(s) &= \cos \theta(s)T(s) + \sin \theta(s)B(s) \\
&= \cos \theta(s) \left(-\frac{\cos(2s) \sin(s) + 2 \sin(2s) \cos(s)}{\sqrt{3 \sin^2(2s) + 1}}, \right. \\
&\quad \left. \frac{\cos(2s) \cos(s) - 2 \sin(2s) \sin(s)}{\sqrt{3 \sin^2(2s) + 1}}, 0 \right) + \sin \theta(s)(0, 0, 1) \\
&= \left(-\frac{\cos \theta(s)(\cos(2s) \sin(s) + 2 \sin(2s) \cos(s))}{\sqrt{3 \sin^2(2s) + 1}}, \right. \\
&\quad \left. \frac{\cos \theta(s)(\cos(2s) \cos(s) - 2 \sin(2s) \sin(s))}{\sqrt{3 \sin^2(2s) + 1}}, \sin \theta(s) \right)
\end{aligned}$$

şeklinde dir. Böylece $\alpha(s)$ gül eğrisini dayanak eğrisi ve $e(s)$ vektörünü doğrultman vektör kabul eden rektifiyan gül regle yüzey

$$\begin{aligned}
\phi(s, v) &= \left(\cos(2s) \cos(s) - \frac{v \cos \theta(s)(\cos(2s) \sin(s) + 2 \sin(2s) \cos(s))}{\sqrt{3 \sin^2(2s) + 1}}, \right. \\
&\quad \cos(2s) \sin(s) + \frac{v \cos \theta(s)(\cos(2s) \cos(s) - 2 \sin(2s) \sin(s))}{\sqrt{3 \sin^2(2s) + 1}}, \\
&\quad \left. v \sin \theta(s) \right)
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu ifadede $\theta(s)$ ifadesinin aldığı farklı değerler için farklı rektifiyan gül regle yüzey ailesi elde edilir.

Özel durum:

- $\theta = \frac{\pi}{2}$ için

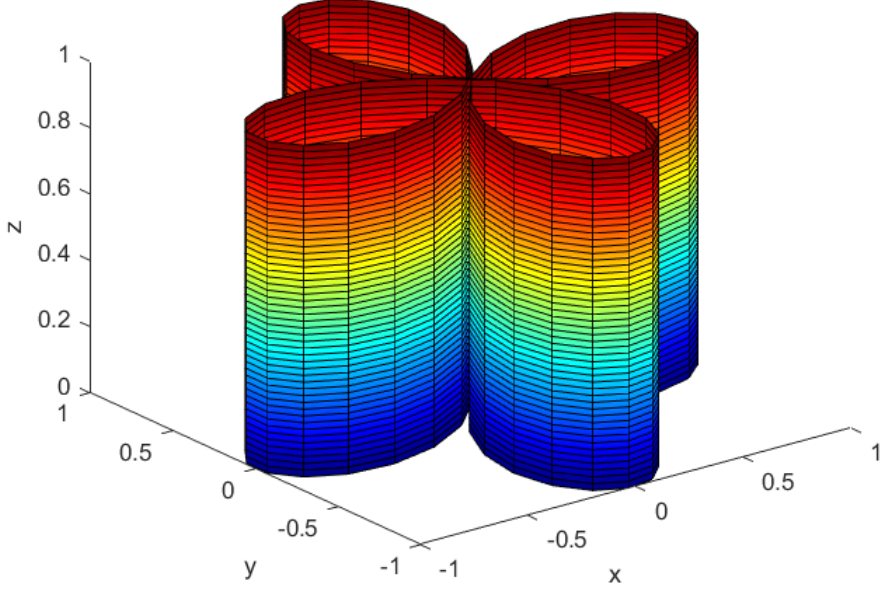
$$\phi_1(s, v) = (\cos(2s) \cos(s), \cos(2s) \sin(s), v)$$

rektifiyan gül regle yüzeyi elde edilir. Burada $s \in [0, 2\pi]$ ve $v \in [0, 1]$ alınırsa Şekil 4.1 elde edilir.

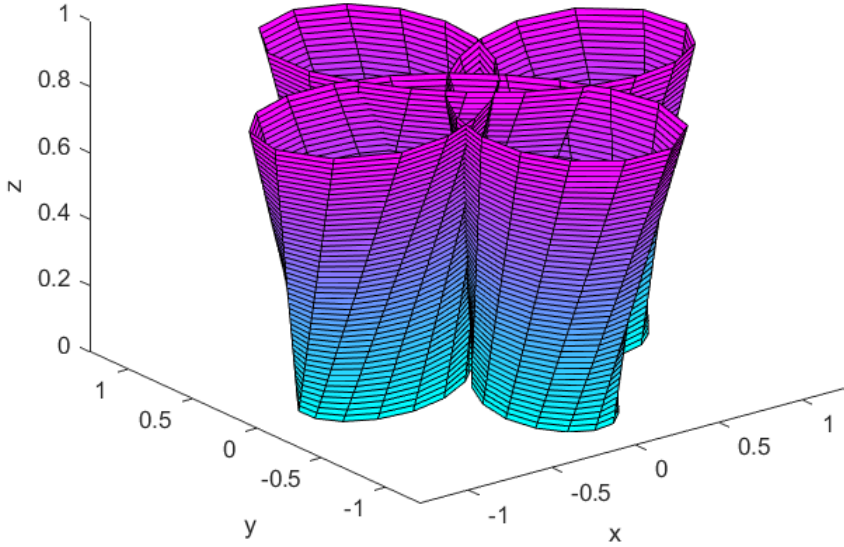
- $\theta = \frac{\pi}{3}$ için

$$\begin{aligned}
\phi_2(s, v) &= \left(\cos(2s) \cos(s) - \frac{v(\cos(2s) \sin(s) + 2 \sin(2s) \cos(s))}{2\sqrt{3 \sin^2(2s) + 1}}, \right. \\
&\quad \cos(2s) \sin(s) + \frac{v(\cos(2s) \cos(s) - 2 \sin(2s) \sin(s))}{2\sqrt{3 \sin^2(2s) + 1}}, v \frac{\sqrt{3}}{2} \left. \right)
\end{aligned}$$

rektifiyan gül regle yüzeyi elde edilir. Burada $s \in [0, 2\pi]$ ve $v \in [0, 1]$ alınırsa Şekil 4.2 elde edilir.



Şekil 4.1 $k = 2$ ve $\theta = \frac{\pi}{2}$ için rektifiyan gül regle yüzeyi



Şekil 4.2 $k = 2$ ve $\theta = \frac{\pi}{3}$ için rektifiyan gül regle yüzeyi

4.1.1 Rektifiyan Gül Regle Yüzeyinin Teğet Düzlemi

Tanım 4.2. \mathbb{E}^3 Öklid uzayında rektifiyan gül regle yüzeyinin doğrultmanını içeren ve yüzeyin birim normaline dik olan düzleme rektifiyan gül regle yüzeyinin teğet düzlemi denir.

Teorem 4.1. \mathbb{E}^3 Öklid uzayında $\phi(s, v)$ rektifiyan gül regle yüzeyinin birim normal vektörü

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(s, v) = & \frac{1}{\sqrt{\left(v\theta'(s) - a \sin \theta(s) \sqrt{(k^2 - 1) \sin^2(ks) + 1}\right)^2 + \frac{v^2 \cos^2 \theta(s) \left((k^2 - 1) \sin^2(ks) + k^2 + 1\right)^2}{\left((k^2 - 1) \sin^2(ks) + 1\right)^2}} \\ & \left(\frac{(\cos(ks) \cos(s) - k \sin(ks) \sin(s)) (a \sin \theta(s) \sqrt{(k^2 - 1) \sin^2(ks) + 1} - v\theta'(s))}{\sqrt{(k^2 - 1) \sin^2(ks) + 1}} \right. \\ & \left. - \frac{v \cos \theta(s) \sin \theta(s) (\cos(ks) \sin(s) + k \sin(ks) \cos(s)) \left((k^2 - 1) \sin^2(ks) + k^2 + 1\right)}{\left((k^2 - 1) \sin^2(ks) + 1\right)^{3/2}}, \right. \\ & \left. \frac{(\cos(ks) \sin(s) + k \sin(ks) \cos(s)) (a \sin \theta(s) \sqrt{(k^2 - 1) \sin^2(ks) + 1} - v\theta'(s))}{\sqrt{(k^2 - 1) \sin^2(ks) + 1}} \right. \\ & \left. + \frac{v \cos \theta(s) \sin \theta(s) (\cos(ks) \cos(s) - k \sin(ks) \sin(s)) \left((k^2 - 1) \sin^2(ks) + k^2 + 1\right)}{\left((k^2 - 1) \sin^2(ks) + 1\right)^{3/2}}, \right. \\ & \left. - \frac{v \cos^2 \theta(s) \left((k^2 - 1) \sin^2(ks) + k^2 + 1\right)}{\left((k^2 - 1) \sin^2(ks) + 1\right)} \right) \end{aligned} \quad (4.4)$$

şeklindedir.

İspat. \mathbb{E}^3 Öklid uzayında $\phi(s, v) = \alpha(s) + ve(s)$ rektifiyan gül regle yüzeyinin birim normal vektörü

$$\mathcal{N} = \frac{\phi_s \times \phi_v}{\|\phi_s \times \phi_v\|} = \frac{(\alpha_s \times e) + v(e_s \times e)}{\|(\alpha_s \times e) + v(e_s \times e)\|}$$

şeklindedir. O halde regle yüzeyin birim normal vektörünün hesabı için α_s ve e_s hesaplanmalıdır. Birim teğet vektörün tanımından

$$T(s) = \frac{\alpha_s}{\|\alpha_s\|}$$

olduğunu biliyoruz. O halde

$$\alpha_s = \|\alpha_s\| T(s) \quad (4.5)$$

yazabiliriz. $\|\alpha_s\|$ hızlı regüler eğri için $T'(s) = \|\alpha_s\| \kappa N(s)$, $B'(s) = -\|\alpha_s\| \tau N(s)$ eşitlikleri ve gül eğrileri için $\tau = 0$ olduğu göz önüne alınarak e_s ifadesini elde

etmek için rektifiyan gül regle yüzeyinin doğrultman vektörünün türevini alırsak

$$\begin{aligned}
e_s &= \frac{de}{ds} \\
&= \frac{d(\cos \theta(s)T(s) + \sin \theta(s)B(s))}{ds} \\
&= -\theta'(s) \sin \theta(s)T(s) + \cos \theta(s)T'(s) + \theta'(s) \cos \theta(s)B(s) + \sin \theta(s)B'(s) \\
&= -\theta'(s) \sin \theta(s)T(s) + \cos \theta(s)(\|\alpha_s\|\kappa N(s)) + \theta'(s) \cos \theta(s)B(s) \\
&\quad + \sin \theta(s)(-\|\alpha_s\|\tau N(s)) \\
&= -\theta'(s) \sin \theta(s)T(s) + \|\alpha_s\|\kappa \cos \theta(s)N(s) + \theta'(s) \cos \theta(s)B(s)
\end{aligned} \tag{4.6}$$

olarak bulunur. Burada rektifiyan gül regle yüzeyinin normal vektörünü bulmak için $(\alpha_s \times e)$ ve $(e_s \times e)$ değerlerini hesaplayalım. Burada (4.5) ve (4.1) eşitlikleri yardımıyla

$$\begin{aligned}
(\alpha_s \times e) &= (\|\alpha_s\|T(s)) \times (\cos \theta(s)T(s) + \sin \theta(s)B(s)) \\
&= \|\alpha_s\| \cos \theta(s)(T(s) \times T(s)) + \|\alpha_s\| \sin \theta(s)(T(s) \times B(s)) \\
&= -\|\alpha_s\| \sin \theta(s)N(s)
\end{aligned} \tag{4.7}$$

olarak bulunur. Aynı zamanda (4.6) ve (4.1) eşitlikleri yardımıyla

$$\begin{aligned}
(e_s \times e) &= (-\theta'(s) \sin \theta(s)T(s) + \|\alpha_s\|\kappa \cos \theta(s)N(s) + \theta'(s) \cos \theta(s)B(s)) \\
&\quad \times (\cos \theta(s)T(s) + \sin \theta(s)B(s)) \\
&= -\theta'(s) \sin \theta(s) \cos \theta(s)(T(s) \times T(s)) - \theta'(s) \sin^2 \theta(s)(T(s) \times B(s)) \\
&\quad + \|\alpha_s\|\kappa \cos^2 \theta(s)(N(s) \times T(s)) + \|\alpha_s\|\kappa \cos \theta(s) \sin \theta(s)(N(s) \times B(s)) \\
&\quad + \theta'(s) \cos^2 \theta(s)(B(s) \times T(s)) + \theta'(s) \cos \theta(s) \sin \theta(s)(B(s) \times B(s)) \\
&= \theta'(s) \sin^2 \theta(s)N(s) - \|\alpha_s\|\kappa \cos^2 \theta(s)B(s) \\
&\quad + \|\alpha_s\|\kappa \cos \theta(s) \sin \theta(s)T(s) + \theta'(s) \cos^2 \theta(s)N(s) \\
&= \|\alpha_s\|\kappa \cos \theta(s) \sin \theta(s)T(s) + \theta'(s)N(s) - \|\alpha_s\|\kappa \cos^2 \theta(s)B(s)
\end{aligned} \tag{4.8}$$

olarak bulunur. Regle yüzeyin normal vektörü

$$\phi_s \times \phi_v = (\alpha_s + ve_s) \times e = (\alpha_s \times e) + v(e_s \times e)$$

şeklinde hesaplandığından rektifiyan gül regle yüzeyinin normal vektörü (4.7) ve

(4.8) eşitlikleri yardımıyla

$$\begin{aligned} \phi_s \times \phi_v = & v\|\alpha_s\|\kappa \cos \theta(s) \sin \theta(s)T(s) + (-\|\alpha_s\| \sin \theta(s) + v\theta'(s))N(s) \\ & - v\|\alpha_s\|\kappa \cos^2 \theta(s)B(s) \end{aligned} \quad (4.9)$$

olarak bulunur. Bu normal vektörün normunu hesaplırsak

$$\begin{aligned} \|\phi_s \times \phi_v\|^2 = & \langle \phi_s \times \phi_v, \phi_s \times \phi_v \rangle \\ = & \langle v\|\alpha_s\|\kappa \cos \theta(s) \sin \theta(s)T(s) + (-\|\alpha_s\| \sin \theta(s) + v\theta'(s))N(s) \\ & - v\|\alpha_s\|\kappa \cos^2 \theta(s)B(s), v\|\alpha_s\|\kappa \cos \theta(s) \sin \theta(s)T(s) \\ & + (-\|\alpha_s\| \sin \theta(s) + v\theta'(s))N(s) - v\|\alpha_s\|\kappa \cos^2 \theta(s)B(s) \rangle \\ = & v^2\|\alpha_s\|^2\kappa^2 \cos^2 \theta(s) \sin^2 \theta(s) + (-\|\alpha_s\| \sin \theta(s) + v\theta'(s))^2 \\ & + v^2\|\alpha_s\|^2\kappa^2 \cos^4 \theta(s) \\ = & v^2\|\alpha_s\|^2\kappa^2 \cos^2 \theta(s) + (-\|\alpha_s\| \sin \theta(s) + v\theta'(s))^2 \end{aligned} \quad (4.10)$$

olduğundan

$$\|\phi_s \times \phi_v\| = \sqrt{v^2\|\alpha_s\|^2\kappa^2 \cos^2 \theta(s) + (-\|\alpha_s\| \sin \theta(s) + v\theta'(s))^2} \quad (4.11)$$

elde ederiz. Böylece rektifiyan gül regle yüzeyinin birim normal vektörü (4.9) ve (4.11) eşitlikleri yardımıyla

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(s, v) = & \frac{\phi_s \times \phi_v}{\|\phi_s \times \phi_v\|} \\ = & \frac{v\|\alpha_s\|\kappa \cos \theta(s) \sin \theta(s)T(s)}{\sqrt{v^2\|\alpha_s\|^2\kappa^2 \cos^2 \theta(s) + (-\|\alpha_s\| \sin \theta(s) + v\theta'(s))^2}} \\ & + \frac{(-\|\alpha_s\| \sin \theta(s) + v\theta'(s))N(s)}{\sqrt{v^2\|\alpha_s\|^2\kappa^2 \cos^2 \theta(s) + (-\|\alpha_s\| \sin \theta(s) + v\theta'(s))^2}} \\ & - \frac{v\|\alpha_s\|\kappa \cos^2 \theta(s)B(s)}{\sqrt{v^2\|\alpha_s\|^2\kappa^2 \cos^2 \theta(s) + (-\|\alpha_s\| \sin \theta(s) + v\theta'(s))^2}} \end{aligned} \quad (4.12)$$

şeklindedir. Bu ifadede $\|\alpha_s\|$, κ , $T(s)$, $N(s)$, $B(s)$ değerleri yerine yazılırsa (4.4) denklemi elde edilir. ■

Örnek 4.2. \mathbb{E}^3 Öklid uzayında $a = 1$, $k = 2$ ve $\theta(s) = \frac{\pi}{3}$ değerleri için verilen

$$\phi_2(s, v) = \left(\cos(2s) \cos(s) - \frac{v(\cos(2s) \sin(s) + 2 \sin(2s) \cos(s))}{2\sqrt{3 \sin^2(2s) + 1}}, \right. \\ \left. \cos(2s) \sin(s) + \frac{v(\cos(2s) \cos(s) - 2 \sin(2s) \sin(s))}{2\sqrt{3 \sin^2(2s) + 1}}, v \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

rektifiyan gül regle yüzeyinin $P \left(\frac{1}{2}, -1, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$ noktasındaki Frenet elemanlarını ve teğet düzlemini bulunuz.

Çözüm. \mathbb{E}^3 Öklid uzayında verilen $\phi_2(s, v)$ rektifiyan gül regle yüzeyi için $s = \frac{\pi}{2}$ ve $v = 1$ değerleri $P \left(\frac{1}{2}, -1, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$ noktasına karşılık gelmektedir. Burada $\alpha(s)$ gül eğrisi için birim teğet vektörü

$$T(s) = \left(-\frac{\cos(2s) \sin(s) + 2 \sin(2s) \cos(s)}{\sqrt{3 \sin^2(2s) + 1}}, \frac{\cos(2s) \cos(s) - 2 \sin(2s) \sin(s)}{\sqrt{3 \sin^2(2s) + 1}}, 0 \right),$$

birim asli normal vektörü

$$N(s) = \left(-\frac{\cos(2s) \cos(s) - 2 \sin(2s) \sin(s)}{\sqrt{3 \sin^2(2s) + 1}}, -\frac{\cos(2s) \sin(s) + 2 \sin(2s) \cos(s)}{\sqrt{3 \sin^2(2s) + 1}}, 0 \right),$$

binormal vektörü

$$B(s) = (0, 0, 1),$$

hızı

$$\|\alpha_s(s)\| = \sqrt{3 \sin^2(2s) + 1},$$

ve eğriliği

$$\kappa(s) = \frac{3 \sin^2(2s) + 5}{(3 \sin^2(2s) + 1)^{3/2}}$$

şeklinde. Bu ifadelerin $P \left(\frac{1}{2}, -1, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$ noktasında aldıkları değerler $s = \frac{\pi}{2}$ ve $v = 1$ için

$$\begin{cases} T \left(\frac{\pi}{2} \right) = (1, 0, 0), \\ N \left(\frac{\pi}{2} \right) = (0, 1, 0), \\ B \left(\frac{\pi}{2} \right) = (0, 0, 1), \\ \|\alpha_s \left(\frac{\pi}{2} \right)\| = 1, \\ \kappa \left(\frac{\pi}{2} \right) = 5 \end{cases}$$

olarak bulunur. Bu ifadeler (4.12) eşitliğinde yerine yazılırsa $\phi_2(s, v)$ rektifiyan gül

regle yüzeyinin $P\left(\frac{1}{2}, -1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ noktasındaki birim normal vektörü

$$\mathcal{N}_p = \left(\frac{5\sqrt{21}}{28}, -\frac{2\sqrt{21}}{28}, -\frac{5\sqrt{7}}{28} \right)$$

olarak hesaplanır. O halde rektifiyan gül regle yüzeyinin teğet düzlemi üzerindeki temsili bir nokta $X(x, y, z)$ olmak üzere $P\left(\frac{1}{2}, -1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ noktasındaki teğet düzlemi

$$\left(x - \frac{1}{2}\right) \frac{5\sqrt{21}}{28} - (y + 1) \frac{2\sqrt{21}}{28} - \left(z - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \frac{5\sqrt{7}}{28} = 0$$

olarak yazılır. Bu ifadeyi düzenlersek $\phi_2(s, v)$ rektifiyan gül regle yüzeyinin $P\left(\frac{1}{2}, -1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ noktasındaki teğet düzlemi

$$5\sqrt{3}x - 2\sqrt{3}y - 5z = 2\sqrt{3}$$

olarak elde edilir.

4.1.2 Rektifiyan Gül Regle Yüzeyinin Özellikleri

Teorem 4.2. \mathbb{E}^3 Öklid uzayında $\phi(s, v)$ rektifiyan gül regle yüzeyinin 1. temel form katsayıları

$$\begin{cases} E = a^2 \left((k^2 - 1) \sin^2(ks) + 1 \right) - 2av\theta'(s) \sin \theta(s) \sqrt{(k^2 - 1) \sin^2(ks) + 1} \\ \quad + v^2 \left((\theta'(s))^2 + \frac{\cos^2 \theta(s) \left((k^2 - 1) \sin^2(ks) + k^2 + 1 \right)^2}{\left((k^2 - 1) \sin^2(ks) + 1 \right)^2} \right), \\ F = a \cos \theta(s) \sqrt{(k^2 - 1) \sin^2(ks) + 1}, \\ G = 1 \end{cases}$$

şeklindedir.

İspat. \mathbb{E}^3 Öklid uzayında rektifiyan gül regle yüzeyinin 1. temel form katsayıları (3.7), (3.8) ve (3.9) eşitlikleriyle elde edilir. Burada (4.5) ve (4.6) eşitlikleri

yardımıyla

$$\begin{aligned}
E &= \langle \phi_s, \phi_s \rangle \\
&= \langle \alpha_s + ve_s, \alpha_s + ve_s \rangle \\
&= \langle \alpha_s, \alpha_s \rangle + \langle \alpha_s, ve_s \rangle + \langle ve_s, \alpha_s \rangle + \langle ve_s, ve_s \rangle \\
&= \langle \alpha_s, \alpha_s \rangle + 2v \langle \alpha_s, e_s \rangle + v^2 \langle e_s, e_s \rangle \\
&= \langle \|\alpha_s\|T(s), \|\alpha_s\|T(s) \rangle + 2v \langle \|\alpha_s\|T(s), -\theta'(s) \sin \theta(s)T(s) \\
&\quad + \|\alpha_s\|\kappa \cos \theta(s)N(s) + \theta'(s) \cos \theta(s)B(s) \rangle \\
&\quad + v^2 \langle -\theta'(s) \sin \theta(s)T(s) + \|\alpha_s\|\kappa \cos \theta(s)N(s) + \theta'(s) \cos \theta(s)B(s), \\
&\quad -\theta'(s) \sin \theta(s)T(s) + \|\alpha_s\|\kappa \cos \theta(s)N(s) + \theta'(s) \cos \theta(s)B(s) \rangle \\
&= \|\alpha_s\|^2 \|T(s)\|^2 + 2v(-\theta'(s)\|\alpha_s\| \sin \theta(s)\|T(s)\|^2) \\
&\quad + v^2((\theta'(s))^2 \sin^2 \theta(s)\|T(s)\|^2 + \|\alpha_s\|^2 \kappa^2 \cos^2 \theta(s)\|N(s)\|^2 \\
&\quad + (\theta'(s))^2 \cos^2 \theta(s)\|B(s)\|^2) \\
&= \|\alpha_s\|^2 + 2v(-\theta'(s)\|\alpha_s\| \sin \theta(s)) + v^2(\|\alpha_s\|^2 \kappa^2 \cos^2 \theta(s) + (\theta'(s))^2) \\
&= \|\alpha_s\|^2 - 2v\theta'(s)\|\alpha_s\| \sin \theta(s) + v^2(\|\alpha_s\|^2 \kappa^2 \cos^2 \theta(s) + (\theta'(s))^2)
\end{aligned} \tag{4.13}$$

elde edilir. Bu ifadede $\|\alpha_s\|$ ve κ değerleri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
E &= a^2 \left((k^2 - 1) \sin^2(ks) + 1 \right) - 2av\theta'(s) \sin \theta(s) \sqrt{(k^2 - 1) \sin^2(ks) + 1} \\
&\quad + v^2 \left((\theta'(s))^2 + \frac{\cos^2 \theta(s) \left((k^2 - 1) \sin^2(ks) + k^2 + 1 \right)^2}{\left((k^2 - 1) \sin^2(ks) + 1 \right)^2} \right)
\end{aligned} \tag{4.14}$$

olarak bulunur. Aynı zamanda (4.1), (4.5) ve (4.6) eşitlikleri yardımıyla

$$\begin{aligned}
F &= \langle \phi_s, \phi_v \rangle \\
&= \langle \alpha_s + ve_s, e \rangle \\
&= \langle \alpha_s, e \rangle + v \langle e_s, e \rangle \\
&= \langle \|\alpha_s\|T(s), \cos \theta(s)T(s) + \sin \theta(s)B(s) \rangle + v \langle -\theta'(s) \sin \theta(s)T(s) \\
&\quad + \|\alpha_s\|\kappa \cos \theta(s)N(s) + \theta'(s) \cos \theta(s)B(s), \cos \theta(s)T(s) + \sin \theta(s)B(s) \rangle \\
&= \|\alpha_s\| \cos \theta(s) \|T(s)\|^2 - v\theta'(s) \sin \theta(s) \cos \theta(s) \|T(s)\|^2 \\
&\quad + v\theta'(s) \cos \theta(s) \sin \theta(s) \|B(s)\|^2 \\
&= \|\alpha_s\| \cos \theta(s) - v\theta'(s) \sin \theta(s) \cos \theta(s) + v\theta'(s) \cos \theta(s) \sin \theta(s) \\
&= \|\alpha_s\| \cos \theta(s)
\end{aligned} \tag{4.15}$$

elde edilir. Bu ifadede $\|\alpha_s\|$ değeri yerine yazılırsa

$$F = a \cos \theta(s) \sqrt{(k^2 - 1) \sin^2(ks) + 1} \quad (4.16)$$

olarak bulunur. Benzer şekilde (4.1) eşitliği yardımıyla

$$\begin{aligned} G &= \langle \phi_v, \phi_v \rangle \\ &= \langle e, e \rangle \\ &= \langle \cos \theta(s)T(s) + \sin \theta(s)B(s), \cos \theta(s)T(s) + \sin \theta(s)B(s) \rangle \\ &= \cos^2 \theta(s) \langle T(s), T(s) \rangle + \cos \theta(s) \sin \theta(s) \langle T(s), B(s) \rangle \\ &\quad + \sin \theta(s) \cos \theta(s) \langle B(s), T(s) \rangle + \sin^2 \theta(s) \langle B(s), B(s) \rangle \\ &= \cos^2 \theta(s) \|T(s)\|^2 + \sin^2 \theta(s) \|B(s)\|^2 \\ &= \cos^2 \theta(s) + \sin^2 \theta(s) \\ &= 1 \end{aligned} \quad (4.17)$$

olarak bulunur. ■

Örnek 4.3. \mathbb{E}^3 Öklid uzayında $a = 1$, $k = 2$ ve $\theta(s) = \frac{\pi}{3}$ değerleri için verilen

$$\phi_2(s, v) = \left(\cos(2s) \cos(s) - \frac{v(\cos(2s) \sin(s) + 2 \sin(2s) \cos(s))}{2\sqrt{3 \sin^2(2s) + 1}}, \right. \\ \left. \cos(2s) \sin(s) + \frac{v(\cos(2s) \cos(s) - 2 \sin(2s) \sin(s))}{2\sqrt{3 \sin^2(2s) + 1}}, v \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

rektifiyan gül regle yüzeyinin 1. temel form katsayılarını bulunuz.

Çözüm. \mathbb{E}^3 Öklid uzayında $a = 1$, $k = 2$ ve $\theta(s) = \frac{\pi}{3}$ değerleri için verilen $\phi_2(s, v)$ rektifiyan gül regle yüzeyinin 1. temel form katsayıları sırasıyla (4.14), (4.16) ve (4.17) eşitlikleri yardımıyla

$$\begin{cases} E = (3 \sin^2(2s) + 1) + \left(\frac{3v \sin^2(2s) + 5v}{6 \sin^2(2s) + 2} \right)^2, \\ F = \frac{1}{2} \sqrt{3 \sin^2(2s) + 1}, \\ G = 1 \end{cases} \quad (4.18)$$

olarak bulunur.

Teorem 4.3. \mathbb{E}^3 Öklid uzayında rektifiyan gül regle yüzeyinin 2. temel form katsayıları

$$\begin{cases} \mathbf{e} = \frac{v^2 \kappa \cos \theta(s) (\theta'(s) \|\alpha_s\|' - \|\alpha_s\|^3 \kappa^2 \cos \theta(s) \sin \theta(s) - \theta''(s) \|\alpha_s\|)}{\sqrt{(\|\alpha_s\| \sin \theta(s) - v \theta'(s))^2 + v^2 \|\alpha_s\|^2 \kappa^2 \cos^2 \theta(s)}} \\ + \frac{(v \theta'(s) - \|\alpha_s\| \sin \theta(s)) (v \|\alpha_s\| \kappa' \cos \theta(s) - 2v \theta''(s) \|\alpha_s\| \kappa \sin \theta(s) + \|\alpha_s\|^2 \kappa)}{\sqrt{(\|\alpha_s\| \sin \theta(s) - v \theta'(s))^2 + v^2 \|\alpha_s\|^2 \kappa^2 \cos^2 \theta(s)}}, \\ \mathbf{f} = \frac{-\|\alpha_s\|^2 \kappa \sin \theta(s) \cos \theta(s)}{\sqrt{(\|\alpha_s\| \sin \theta(s) - v \theta'(s))^2 + v^2 \|\alpha_s\|^2 \kappa^2 \cos^2 \theta(s)}}, \\ \mathbf{g} = 0 \end{cases}, \quad (4.19)$$

şeklinde dir.

İspat. \mathbb{E}^3 Öklid uzayında rektifiyan gül regle yüzeyinin 2. temel form katsayıları

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= \frac{\det(\phi_s, \phi_v, \phi_{ss})}{W} = \frac{\det(\phi_s, \phi_v, \phi_{ss})}{\sqrt{EG - F^2}}, \\ \mathbf{f} &= \frac{\det(\phi_s, \phi_v, \phi_{sv})}{W} = \frac{\det(\phi_s, \phi_v, \phi_{sv})}{\sqrt{EG - F^2}}, \\ \mathbf{g} &= \frac{\det(\phi_s, \phi_v, \phi_{vv})}{W} = \frac{\det(\phi_s, \phi_v, \phi_{vv})}{\sqrt{EG - F^2}} \end{aligned}$$

şeklinde dir. Burada 2. temel form katsayılarını elde etmek için $\det(\phi_s, \phi_v, \phi_{ss})$, $\det(\phi_s, \phi_v, \phi_{sv})$, $\det(\phi_s, \phi_v, \phi_{vv})$ ve $\sqrt{EG - F^2}$ ifadeleri hesaplanmalıdır. O halde ϕ_{ss} , ϕ_{sv} , ϕ_{vv} değerleri bulunmalıdır. Burada $\phi(s, v) = \alpha(s) + ve(s)$ olduğundan $\phi_s = \alpha_s + ve_s$, $\phi_v = e$, $\phi_{ss} = \alpha_{ss} + ve_{ss}$, $\phi_{sv} = e_s$ ve $\phi_{vv} = (0, 0, 0)$ olarak elde edilir. O halde ilk olarak ϕ_{ss} değerini hesaplayalım. Burada

$$\begin{cases} T'(s) = \|\alpha_s\| \kappa N(s), \\ N'(s) = -\|\alpha_s\| \kappa T(s) + \|\alpha_s\| \tau B(s), \\ B'(s) = -\|\alpha_s\| \tau N(s), \end{cases}$$

eşitlikleri ve gül eğrileri için $\tau = 0$ olduğu göz önüne alınarak

$$\begin{aligned} \alpha_{ss} &= \frac{d\alpha_s}{ds} \\ &= \frac{d(\|\alpha_s\| T(s))}{ds} \\ &= \|\alpha_s\|' T(s) + \|\alpha_s\| T'(s) \\ &= \|\alpha_s\|' T(s) + \|\alpha_s\| (\|\alpha_s\| \kappa N(s)) \\ &= \|\alpha_s\|' T(s) + \|\alpha_s\|^2 \kappa N(s) \end{aligned} \quad (4.20)$$

ve

$$\begin{aligned}
e_{ss} &= \frac{de_s}{ds} \\
&= \frac{d(-\theta'(s) \sin \theta(s)T(s) + \|\alpha_s\| \kappa \cos \theta(s)N(s) + \theta'(s) \cos \theta(s)B(s))}{ds} \\
&= -\theta''(s) \sin \theta(s)T(s) - \theta'(s)\theta'(s) \cos \theta(s)T(s) - \theta'(s) \sin \theta(s)T'(s) \\
&\quad + \|\alpha_s\|' \kappa \cos \theta(s)N(s) + \|\alpha_s\| \kappa' \cos \theta(s)N(s) - \theta'(s)\|\alpha_s\| \kappa \sin \theta(s)N(s) \\
&\quad + \|\alpha_s\| \kappa \cos \theta(s)N'(s) + \theta''(s) \cos \theta(s)B(s) - \theta'(s)\theta'(s) \sin \theta(s)B(s) \\
&\quad + \theta'(s) \cos \theta(s)B'(s) \\
&= -\theta''(s) \sin \theta(s)T(s) - \theta'(s)\theta'(s) \cos \theta(s)T(s) - \theta'(s) \sin \theta(s)(\|\alpha_s\| \kappa N(s)) \\
&\quad + \|\alpha_s\|' \kappa \cos \theta(s)N(s) + \|\alpha_s\| \kappa' \cos \theta(s)N(s) - \theta'(s)\|\alpha_s\| \kappa \sin \theta(s)N(s) \\
&\quad + \|\alpha_s\| \kappa \cos \theta(s)(-\|\alpha_s\| \kappa T(s) + \|\alpha_s\| \tau B(s)) + \theta''(s) \cos \theta(s)B(s) \\
&\quad - \theta'(s)\theta'(s) \sin \theta(s)B(s) + \theta'(s) \cos \theta(s)(-\|\alpha_s\| \tau N(s)) \\
&= -(\theta''(s) \sin \theta(s) + \theta'(s)\theta'(s) \cos \theta(s) + \|\alpha_s\|^2 \kappa^2 \cos \theta(s))T(s) \\
&\quad + (\|\alpha_s\|' \kappa \cos \theta(s) + \|\alpha_s\| \kappa' \cos \theta(s) - 2\theta'(s)\|\alpha_s\| \kappa \sin \theta(s))N(s) \\
&\quad + (\theta''(s) \cos \theta(s) - \theta'(s)\theta'(s) \sin \theta(s))B(s)
\end{aligned} \tag{4.21}$$

olarak hesaplandığından

$$\begin{aligned}
\phi_{ss} &= \alpha_{ss} + v e_{ss} \\
&= (\|\alpha_s\|' - v\theta''(s) \sin \theta(s) - v\theta'(s)\theta'(s) \cos \theta(s) - v\|\alpha_s\|^2 \kappa^2 \cos \theta(s))T(s) \\
&\quad + (\|\alpha_s\|^2 \kappa + v\|\alpha_s\|' \kappa \cos \theta(s) + v\|\alpha_s\| \kappa' \cos \theta(s) - 2v\theta'(s)\|\alpha_s\| \kappa \sin \theta(s))N(s) \\
&\quad + (v\theta''(s) \cos \theta(s) - v\theta'(s)\theta'(s) \sin \theta(s))B(s)
\end{aligned} \tag{4.22}$$

şeklinde bulunur. Buradan $\det(\phi_s, \phi_v, \phi_{ss})$, $\det(\phi_s, \phi_v, \phi_{sv})$ ve $\det(\phi_s, \phi_v, \phi_{vv})$ değerleri

$$\begin{aligned}
\det(\phi_s, \phi_v, \phi_{ss}) &= \langle \phi_s \times \phi_v, \phi_{ss} \rangle \\
&= \langle v \|\alpha_s\| \kappa \cos \theta(s) \sin \theta(s) T(s) + (-\|\alpha_s\| \sin \theta(s) + v \theta'(s)) N(s) - v \|\alpha_s\| \kappa \cos^2 \theta(s) B(s), \\
&\quad (\|\alpha_s\|' - v \theta''(s) \sin \theta(s) - v (\theta'(s))^2 \cos \theta(s) - v \|\alpha_s\|^2 \kappa^2 \cos \theta(s)) T(s) + (\|\alpha_s\|^2 \kappa + v \|\alpha_s\|' \kappa \cos \theta(s) \\
&\quad + v \|\alpha_s\| \kappa' \cos \theta(s) - 2v \theta'(s) \|\alpha_s\| \kappa \sin \theta(s)) N(s) + (v \theta''(s) \cos \theta(s) - v (\theta'(s))^2 \sin \theta(s)) B(s) \rangle \\
&= v \|\alpha_s\| \|\alpha_s\|' \kappa \cos \theta(s) \sin \theta(s) - v^2 \theta''(s) \|\alpha_s\| \kappa \cos \theta(s) \sin^2 \theta(s) - v^2 (\theta'(s))^2 \|\alpha_s\| \kappa \cos^2 \theta(s) \sin \theta(s) \\
&\quad - v^2 \|\alpha_s\|^3 \kappa^3 \cos^2 \theta(s) \sin \theta(s) - \|\alpha_s\|^3 \kappa \sin \theta(s) - v \|\alpha_s\| \|\alpha_s\|' \kappa \cos \theta(s) \sin \theta(s) - v \|\alpha_s\|^2 \kappa' \cos \theta(s) \sin \theta(s) \\
&\quad + 2v \theta'(s) \|\alpha_s\|^2 \kappa \sin^2 \theta(s) + v \theta'(s) \|\alpha_s\|^2 \kappa + v^2 \theta'(s) \|\alpha_s\|' \kappa \cos \theta(s) + v^2 \theta'(s) \|\alpha_s\| \kappa' \cos \theta(s) \\
&\quad - 2v^2 (\theta'(s))^2 \|\alpha_s\| \kappa \sin \theta(s) - v^2 \theta''(s) \|\alpha_s\| \kappa \cos^2 \theta(s) \cos \theta(s) + v^2 (\theta'(s))^2 \|\alpha_s\| \kappa \cos^2 \theta(s) \sin \theta(s) \\
&= -v^2 \theta''(s) \|\alpha_s\| \kappa \cos \theta(s) - v^2 \|\alpha_s\|^3 \kappa^3 \cos^2 \theta(s) \sin \theta(s) + v^2 \theta'(s) \|\alpha_s\|' \kappa \cos \theta(s) \\
&\quad + (v \theta'(s) - \|\alpha_s\| \sin \theta(s)) (v \|\alpha_s\| \kappa' \cos \theta(s) - 2v \theta'(s) \|\alpha_s\| \kappa \sin \theta(s) + \|\alpha_s\|^2 \kappa) \\
&= v^2 \kappa \cos \theta(s) (\theta'(s) \|\alpha_s\|' - \|\alpha_s\|^3 \kappa^2 \cos \theta(s) \sin \theta(s) - \theta''(s) \|\alpha_s\|) \\
&\quad + (v \theta'(s) - \|\alpha_s\| \sin \theta(s)) (v \|\alpha_s\| \kappa' \cos \theta(s) - 2v \theta'(s) \|\alpha_s\| \kappa \sin \theta(s) + \|\alpha_s\|^2 \kappa)
\end{aligned} \tag{4.23}$$

$$\begin{aligned}
\det(\phi_s, \phi_v, \phi_{sv}) &= \langle \phi_s \times \phi_v, \phi_{sv} \rangle \\
&= \langle v \|\alpha_s\| \kappa \cos \theta(s) \sin \theta(s) T(s) + (v\theta'(s) - \|\alpha_s\| \sin \theta(s)) N(s) \\
&\quad - v \|\alpha_s\| \kappa \cos^2 \theta(s) B(s), -\theta'(s) \sin \theta(s) T(s) \\
&\quad + \|\alpha_s\| \kappa \cos \theta(s) N(s) + \theta'(s) \cos \theta(s) B(s) \rangle \\
&= -v\theta'(s) \|\alpha_s\| \kappa \cos \theta(s) \sin^2 \theta(s) \|T(s)\|^2 \\
&\quad + (v\theta'(s) \|\alpha_s\| \kappa \cos \theta(s) - \|\alpha_s\|^2 \kappa \sin \theta(s) \cos \theta(s)) \|N(s)\|^2 \\
&\quad - v\theta'(s) \|\alpha_s\| \kappa \cos^2 \theta(s) \cos \theta(s) \|B(s)\|^2 \\
&= -v\theta'(s) \|\alpha_s\| \kappa \cos \theta(s) \sin^2 \theta(s) + v\theta'(s) \|\alpha_s\| \kappa \cos \theta(s) \\
&\quad - \|\alpha_s\|^2 \kappa \sin \theta(s) \cos \theta(s) - v\theta'(s) \|\alpha_s\| \kappa \cos^2 \theta(s) \cos \theta(s) \\
&= -v\theta'(s) \|\alpha_s\| \kappa \cos \theta(s) + v\theta'(s) \|\alpha_s\| \kappa \cos \theta(s) \\
&\quad - \|\alpha_s\|^2 \kappa \sin \theta(s) \cos \theta(s) \\
&= -\|\alpha_s\|^2 \kappa \sin \theta(s) \cos \theta(s)
\end{aligned} \tag{4.24}$$

ve

$$\det(\phi_s, \phi_v, \phi_{vv}) = 0 \tag{4.25}$$

olarak bulunur. Rektifiyan gül regle yüzeyinin 1. temel form katsayıları yardımıyla

$$W = \sqrt{EG - F^2}$$

olmak üzere

$$W = \sqrt{(\|\alpha_s\| \sin \theta(s) - v\theta'(s))^2 + v^2 \|\alpha_s\|^2 \kappa^2 \cos^2 \theta(s)} \tag{4.26}$$

şeklindedir. O halde rektifiyan gül regle yüzeyinin 2. temel form katsayıları (4.19) denkleminde bulunur. ■

Teorem 4.4. \mathbb{E}^3 Öklid uzayında rektifiyan gül regle yüzeyinin Gauss eğriliği

$$K = - \frac{\frac{a^2 \cos^2 \theta(s) \sin^2 \theta(s) ((k^2-1) \sin^2(ks) + k^2 + 1)^2}{(k^2-1) \sin^2(ks) + 1}}{\left(\left(v\theta'(s) - a \sin \theta(s) \sqrt{(k^2-1) \sin^2(ks) + 1} \right)^2 + \frac{v^2 \cos^2 \theta(s) ((k^2-1) \sin^2(ks) + k^2 + 1)^2}{((k^2-1) \sin^2(ks) + 1)^2} \right)^2} \tag{4.27}$$

şeklindedir.

İspat. \mathbb{E}^3 Öklid uzayında rektifiyan gül regle yüzeyinin Gauss eğriliği

$$K = - \frac{(\det(\alpha_s, e, e_s))^2}{\|\phi_s \times \phi_v\|^4}$$

eşitliği yardımıyla hesaplanır. Burada (4.6) ve (4.7) eşitlikleri yardımıyla

$$\begin{aligned}
\det(\alpha_s, e, e_s) &= \langle \alpha_s \times e, e_s \rangle \\
&= \langle -\|\alpha_s\| \sin \theta(s) N(s), -\theta'(s) \sin \theta(s) T(s) \\
&\quad + \|\alpha_s\| \kappa \cos \theta(s) N(s) + \theta'(s) \cos \theta(s) B(s) \rangle \\
&= +\theta'(s) \|\alpha_s\| \sin^2 \theta(s) \langle N(s), T(s) \rangle \\
&\quad - \kappa \|\alpha_s\|^2 \sin \theta(s) \cos \theta(s) \langle N(s), N(s) \rangle \\
&\quad - \theta'(s) \|\alpha_s\| \sin \theta(s) \cos \theta(s) \langle N(s), B(s) \rangle \\
&= -\kappa \|\alpha_s\|^2 \sin \theta(s) \cos \theta(s) \|N(s)\|^2 \\
&= -\kappa \|\alpha_s\|^2 \sin \theta(s) \cos \theta(s)
\end{aligned} \tag{4.28}$$

elde edilir. O halde

$$(\det(\alpha_s, e, e_s))^2 = \kappa^2 \|\alpha_s\|^4 \sin^2 \theta(s) \cos^2 \theta(s) \tag{4.29}$$

olarak bulunur. Aynı zamanda (4.11) eşitliği yardımıyla

$$\|\phi_s \times \phi_v\|^4 = \left((\|\alpha_s\| \sin \theta(s) - v\theta'(s))^2 + v^2 \|\alpha_s\|^2 \kappa^2 \cos^2 \theta(s) \right)^2 \tag{4.30}$$

olarak hesaplanır. Burada (4.29) ve (4.30) eşitlikleri yardımıyla rektifiyan gül regle yüzeyinin Gauss eğriliği

$$K = -\frac{\kappa^2 \|\alpha_s\|^4 \sin^2 \theta(s) \cos^2 \theta(s)}{\left((\|\alpha_s\| \sin \theta(s) - v\theta'(s))^2 + v^2 \|\alpha_s\|^2 \kappa^2 \cos^2 \theta(s) \right)^2} \tag{4.31}$$

olur. Bu eşitlikte κ ve $\|\alpha_s\|$ değerleri yerine yazılırsa (4.27) eşitliği elde edilir. ■

Örnek 4.4. \mathbb{E}^3 Öklid uzayında $a = 1$, $k = 2$ ve $\theta(s) = \frac{\pi}{3}$ değerleri için verilen

$$\begin{aligned}
\phi_2(s, v) &= \left(\cos(2s) \cos(s) - \frac{v(\cos(2s) \sin(s) + 2 \sin(2s) \cos(s))}{2\sqrt{3} \sin^2(2s) + 1}, \right. \\
&\quad \left. \cos(2s) \sin(s) + \frac{v(\cos(2s) \cos(s) - 2 \sin(2s) \sin(s))}{2\sqrt{3} \sin^2(2s) + 1}, v \frac{\sqrt{3}}{2} \right)
\end{aligned}$$

rektifiyan gül regle yüzeyinin $P\left(\frac{1}{2}, -1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ noktasındaki Gauss eğriliğini bulunuz.

Çözüm. \mathbb{E}^3 Öklid uzayında verilen $\phi_2(s, v)$ rektifiyan gül regle yüzeyi için $s = \frac{\pi}{2}$ ve $v = 1$ değerleri $P\left(\frac{1}{2}, -1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ noktasına karşılık gelmektedir. Bu noktada $\alpha(s)$ gül eğrisi için $\|\alpha_s\left(\frac{\pi}{2}\right)\| = 1$ ve $\kappa\left(\frac{\pi}{2}\right) = 5$ olduğu bilinmektedir. Aynı zamanda $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ ve $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ olduğu göz önüne alındığında bu ifadeler (4.31) denkleminde yerine yazılırsa $\phi_2(s, v)$ rektifiyan gül regle yüzeyinin $P\left(\frac{1}{2}, -1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ noktasındaki Gauss eğriliği $K = -\frac{75}{784}$ olarak elde edilir.

4.1.3 Rektifiyan Gül Regle Yüzeyinin Global Özellikleri

4.1.3.1 Rektifiyan Gül Regle Yüzeyinin Striksiyon Eğrisi

Teorem 4.5. \mathbb{E}^3 Öklid uzayında $\phi(s, v)$ rektifiyan gül regle yüzeyinin striksiyon eğrisi

$$c(s) = \begin{pmatrix} a \cos(ks) \cos(s) - \frac{a \cos \theta(s) \sin \theta(s) (\cos(ks) \sin(s) + k \sin(ks) \cos(s)) \theta'(s)}{(\theta'(s))^2 + \frac{\cos^2 \theta(s) ((k^2-1) \sin^2(ks) + k^2 + 1)^2}{((k^2-1) \sin^2(ks) + 1)^2}}, \\ a \cos(ks) \sin(s) + \frac{a \cos \theta(s) \sin \theta(s) (\cos(ks) \cos(s) - k \sin(ks) \sin(s)) \theta'(s)}{(\theta'(s))^2 + \frac{\cos^2 \theta(s) ((k^2-1) \sin^2(ks) + k^2 + 1)^2}{((k^2-1) \sin^2(ks) + 1)^2}}, \\ \frac{a \theta'(s) \sin^2 \theta(s) \sqrt{(k^2-1) \sin^2(ks) + 1}}{(\theta'(s))^2 + \frac{\cos^2 \theta(s) ((k^2-1) \sin^2(ks) + k^2 + 1)^2}{((k^2-1) \sin^2(ks) + 1)^2}} \end{pmatrix} \quad (4.32)$$

şeklindedir.

İspat. $\phi(s, v) = \alpha(s) + ve(s)$ regle yüzeyinin striksiyon eğrisinin

$$c(s) = \alpha(s) - \frac{\langle \alpha_s, e_s \rangle}{\langle e_s, e_s \rangle} e(s)$$

olduğu bilinmektedir. Burada (4.5) ve (4.6) eşitlikleri yardımıyla

$$\begin{aligned} \langle \alpha_s, e_s \rangle &= \langle \|\alpha_s\| T(s), -\theta'(s) \sin \theta(s) T(s) + \|\alpha_s\| \kappa \cos \theta(s) N(s) \\ &\quad + \theta'(s) \cos \theta(s) B(s) \rangle \\ &= -\theta'(s) \|\alpha_s\| \sin \theta(s) \langle T(s), T(s) \rangle \\ &\quad + \|\alpha_s\|^2 \kappa \cos \theta(s) \langle T(s), N(s) \rangle \\ &\quad + \theta'(s) \|\alpha_s\| \cos \theta(s) \langle T(s), B(s) \rangle \\ &= -\theta'(s) \|\alpha_s\| \sin \theta(s) \end{aligned} \quad (4.33)$$

elde edilir. O halde $\|\alpha_s\|$ değerini yerine yazdığımızda

$$\langle \alpha_s, e_s \rangle = -a \theta'(s) \sin \theta(s) \sqrt{(k^2-1) \sin^2(ks) + 1} \quad (4.34)$$

bulunur. Aynı zamanda (4.6) eşitliği yardımıyla

$$\begin{aligned}
\langle e_s, e_s \rangle &= \langle -\theta'(s) \sin \theta(s) T(s) + \|\alpha_s\| \kappa \cos \theta(s) N(s) + \theta'(s) \cos \theta(s) B(s), \\
&\quad -\theta'(s) \sin \theta(s) T(s) + \|\alpha_s\| \kappa \cos \theta(s) N(s) + \theta'(s) \cos \theta(s) B(s) \rangle \\
&= (\theta'(s))^2 \sin^2 \theta(s) \|T(s)\|^2 + \|\alpha_s\|^2 \kappa^2 \cos^2 \theta(s) \|N(s)\|^2 \\
&\quad + (\theta'(s))^2 \cos^2 \theta(s) \|B(s)\|^2 \\
&= (\theta'(s))^2 \sin^2 \theta(s) + \|\alpha_s\|^2 \kappa^2 \cos^2 \theta(s) + (\theta'(s))^2 \cos^2 \theta(s) \\
&= (\theta'(s))^2 + \|\alpha_s\|^2 \kappa^2 \cos^2 \theta(s)
\end{aligned} \tag{4.35}$$

elde edilir. Burada $\|\alpha_s\|$ ve κ değerlerini yerine yazdığımızda

$$\langle e_s, e_s \rangle = (\theta'(s))^2 + \frac{\cos^2 \theta(s) ((k^2 - 1) \sin^2(ks) + k^2 + 1)^2}{((k^2 - 1) \sin^2(ks) + 1)^2} \tag{4.36}$$

bulunur. Burada (2.3), (4.2), (4.34) ve (4.36) eşitlikleri yardımıyla rektifiyan gül regle yüzeyinin striksiyon eğrisi (4.32) olarak bulunur. ■

Örnek 4.5. \mathbb{E}^3 Öklid uzayında $a = 1$, $k = 2$ ve $\theta(s) = \frac{\pi}{3}$ değerleri için verilen

$$\begin{aligned}
\phi_2(s, v) &= \left(\cos(2s) \cos(s) - \frac{v(\cos(2s) \sin(s) + 2 \sin(2s) \cos(s))}{2\sqrt{3 \sin^2(2s) + 1}}, \right. \\
&\quad \left. \cos(2s) \sin(s) + \frac{v(\cos(2s) \cos(s) - 2 \sin(2s) \sin(s))}{2\sqrt{3 \sin^2(2s) + 1}}, v \frac{\sqrt{3}}{2} \right)
\end{aligned}$$

rektifiyan gül regle yüzeyinin striksiyon eğrisini bulunuz.

Çözüm. \mathbb{E}^3 Öklid uzayında verilen $\phi_2(s, v)$ rektifiyan gül regle yüzeyinin dayanak eğrisinin

$$\alpha(s) = (\cos(2s) \cos(s), \cos(2s) \sin(s), 0)$$

olduğu bilinmektedir. Burada (4.34) eşitliği yardımıyla $k = 2$ ve $\theta(s) = \frac{\pi}{3}$ için

$$\langle \alpha_s, e_s \rangle = 0$$

olduğu bulunur. O halde $\phi_2(s, v)$ rektifiyan gül regle yüzeyinin striksiyon eğrisi

$$c(s) = (\cos(2s) \cos(s), \cos(2s) \sin(s), 0)$$

olarak bulunur. Burada striksiyon eğrisi dayanak eğrisine eşittir.

4.1.3.2 Rektifiyan Gül Regle Yüzeyinin Açılabilirliği

Teorem 4.6. \mathbb{E}^3 Öklid uzayında $\phi(s, v)$ rektifiyan gül regle yüzeyinin drali

$$P_e = \frac{-\frac{a \cos \theta(s) \sin \theta(s) ((k^2-1) \sin^2(ks) + k^2 + 1)}{\sqrt{(k^2-1) \sin^2(ks) + 1}}}{(\theta'(s))^2 + \frac{\cos^2 \theta(s) ((k^2-1) \sin^2(ks) + k^2 + 1)^2}{((k^2-1) \sin^2(ks) + 1)^2}} \quad (4.37)$$

şeklindedir.

İspat. \mathbb{E}^3 Öklid uzayında regle yüzeyinin drali

$$P_e = \frac{\det(\alpha_s, e, e_s)}{\|e_s\|^2}$$

olmak üzere burada (4.28) eşitliğinden

$$\det(\alpha_s, e, e_s) = -\kappa \|\alpha_s\|^2 \sin \theta(s) \cos \theta(s)$$

ve (4.35) eşitliğinden

$$\|e_s\|^2 = (\theta'(s))^2 + \|\alpha_s\|^2 \kappa^2 \cos^2 \theta(s)$$

olduğu görünmektedir. O halde rektifiyan gül regle yüzeyinin drali

$$P_e = \frac{-\kappa \|\alpha_s\|^2 \sin \theta(s) \cos \theta(s)}{(\theta'(s))^2 + \|\alpha_s\|^2 \kappa^2 \cos^2 \theta(s)} \quad (4.38)$$

şeklindedir. Bu ifadede κ ve $\|\alpha_s\|$ değerleri yerine yazıldığında (4.37) eşitliği elde edilir. ■

Sonuç 4.1. \mathbb{E}^3 uzayında verilen $\phi(s, v)$ rektifiyan gül regle yüzeyi $\theta(s) = \left(\frac{2n-1}{2}\right) \pi$ değerleri için açılabilir.

Örnek 4.6. \mathbb{E}^3 Öklid uzayında $a = 1$, $k = 2$ ve $\theta(s) = \frac{\pi}{3}$ değerleri için verilen

$$\phi_2(s, v) = \left(\cos(2s) \cos(s) - \frac{v(\cos(2s) \sin(s) + 2 \sin(2s) \cos(s))}{2\sqrt{3 \sin^2(2s) + 1}}, \right. \\ \left. \cos(2s) \sin(s) + \frac{v(\cos(2s) \cos(s) - 2 \sin(2s) \sin(s))}{2\sqrt{3 \sin^2(2s) + 1}}, v \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

rektifiyan gül regle yüzeyinin dralini bulunuz.

Çözüm. \mathbb{E}^3 Öklid uzayında $\alpha(s)$ gül eğrisinin hızı

$$\|\alpha_s\| = \sqrt{3 \sin^2(2s) + 1}$$

eğriliği

$$\kappa(s) = \frac{3 \sin^2(2s) + 5}{(3 \sin^2(2s) + 1)^{3/2}}$$

ve $\theta'(s) = 0$ şeklindedir. Burada (4.38) eşitliği yardımıyla $\phi_2(s, v)$ rektifiyan gül regle yüzeyinin drali

$$P_e = -\frac{\sqrt{3}(3 \sin^2(2s) + 1)^{3/2}}{3 \sin^2(2s) + 5}$$

olarak bulunur.

4.1.4 Rektifiyan Gül Regle Yüzeyinin Geodezik Çatısı ve Geodezik Frenet Formülleri

Teorem 4.7. \mathbb{E}^3 Öklid uzayında verilen $\phi(s, v)$ rektifiyan gül regle yüzeyinin bir $l = \phi(s_0, v)$ doğrultmanına ait asimptotik normal doğrultu,

$$g(s) = \frac{1}{\sqrt{(\theta'(s))^2 + \frac{\cos^2 \theta(s)((k^2-1) \sin^2(ks) + k^2 + 1)^2}{((k^2-1) \sin^2(ks) + 1)^2}}}$$

$$\left(\frac{(\cos(ks) \cos(s) - k \sin(ks) \sin(s))\theta'(s)}{\sqrt{(k^2-1) \sin^2(ks) + 1}} \right.$$

$$+ \frac{\cos \theta(s) \sin \theta(s) (\cos(ks) \sin(s) + k \sin(ks) \cos(s)) ((k^2-1) \sin^2(ks) + k^2 + 1)}{((k^2-1) \sin^2(ks) + 1)^{3/2}},$$

$$\frac{(\cos(ks) \sin(s) + k \sin(ks) \cos(s))\theta'(s)}{\sqrt{(k^2-1) \sin^2(ks) + 1}}$$

$$- \frac{\cos \theta(s) \sin \theta(s) (\cos(ks) \cos(s) - k \sin(ks) \sin(s)) ((k^2-1) \sin^2(ks) + k^2 + 1)}{((k^2-1) \sin^2(ks) + 1)^{3/2}},$$

$$\left. \frac{\cos^2 \theta(s) ((k^2-1) \sin^2(ks) + k^2 + 1)}{(k^2-1) \sin^2(ks) + 1} \right)$$

(4.39)

şeklindedir.

İspat. \mathbb{E}^3 uzayında verilen $\phi(s, v)$ rektifiyan gül regle yüzeyinin bir $l = \phi(s_0, v)$ doğrultmanına ait asimptotik normal doğrultu,

$$g(s)|_{s=s_0} = \frac{e \times e_s}{\|e_s\|} \Big|_{s=s_0}$$

olmak üzere (4.8) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
e \times e_s &= -e_s \times e \\
&= -(\|\alpha_s\| \kappa \cos \theta(s) \sin \theta(s) T(s) + \theta'(s) N(s) - \|\alpha_s\| \kappa \cos^2 \theta(s) B(s)) \\
&= -\|\alpha_s\| \kappa \cos \theta(s) \sin \theta(s) T(s) - \theta'(s) N(s) + \|\alpha_s\| \kappa \cos^2 \theta(s) B(s)
\end{aligned} \tag{4.40}$$

ve (4.35) eşitliğinden

$$\|e_s\| = \sqrt{(\theta'(s))^2 + \|\alpha_s\|^2 \kappa^2 \cos^2 \theta(s)} \tag{4.41}$$

elde edilir. Böylece

$$g(s) = \frac{-\|\alpha_s\| \kappa \cos \theta(s) \sin \theta(s) T(s) - \theta'(s) N(s) + \|\alpha_s\| \kappa \cos^2 \theta(s) B(s)}{\sqrt{(\theta'(s))^2 + \|\alpha_s\|^2 \kappa^2 \cos^2 \theta(s)}} \tag{4.42}$$

şeklinde bulunur. Bu ifadede $\|\alpha_s\|$, κ , $T(s)$, $N(s)$, $B(s)$ değerleri yerine yazılırsa (4.39) eşitliği elde edilir. ■

Örnek 4.7. \mathbb{E}^3 Öklid uzayında $a = 1$, $k = 2$ ve $\theta(s) = \frac{\pi}{3}$ değerleri için verilen

$$\begin{aligned}
\phi_2(s, v) &= \left(\cos(2s) \cos(s) - \frac{v(\cos(2s) \sin(s) + 2 \sin(2s) \cos(s))}{2\sqrt{3 \sin^2(2s) + 1}}, \right. \\
&\quad \left. \cos(2s) \sin(s) + \frac{v(\cos(2s) \cos(s) - 2 \sin(2s) \sin(s))}{2\sqrt{3 \sin^2(2s) + 1}}, v \frac{\sqrt{3}}{2} \right)
\end{aligned}$$

rektifiyan gül regle yüzeyinin bir $l = \phi\left(\frac{\pi}{2}, v\right)$ doğrultmanına ait asimptotik normal doğrultusunu hesaplayınız.

Çözüm. \mathbb{E}^3 Öklid uzayında verilen $\alpha(s)$ gül eğrisinin $s = \frac{\pi}{2}$ için

$$\begin{cases} T\left(\frac{\pi}{2}\right) = (1, 0, 0), \\ N\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0, 1, 0), \\ B\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0, 0, 1), \\ \|\alpha_s\left(\frac{\pi}{2}\right)\| = 1, \\ \kappa\left(\frac{\pi}{2}\right) = 5 \end{cases}$$

değerlerini aldığımızı biliyoruz. Böylece (4.42) eşitliği yardımıyla \mathbb{E}^3 Öklid uzayında verilen $\phi_2(s, v)$ rektifiyan gül regle yüzeyinin bir $l = \phi\left(\frac{\pi}{2}, v\right)$ doğrultmanına ait

asimptotik normal doğrultusu

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$$

olarak elde edilir.

Teorem 4.8. \mathbb{E}^3 Öklid uzayında verilen $\phi(s, v)$ rektifiyan gül regle yüzeyinin bir $\phi(s, v_0)$ striksiyon noktasındaki merkez normali

$$t(s) = \frac{1}{\sqrt{(\theta'(s))^2 + \frac{\cos^2\theta(s)((k^2-1)\sin^2(ks)+k^2+1)^2}{((k^2-1)\sin^2(ks)+1)^2}} \left(\begin{aligned} & \frac{\sin\theta(s)(\cos(ks)\sin(s) + k\sin(ks)\cos(s))\theta'(s)}{\sqrt{(k^2-1)\sin^2(ks)+1}} \\ & - \frac{\cos\theta(s)(\cos(ks)\cos(s) - k\sin(ks)\sin(s))((k^2-1)\sin^2(ks)+k^2+1)}{((k^2-1)\sin^2(ks)+1)^{3/2}}, \\ & - \frac{\cos\theta(s)(\cos(ks)\sin(s) + k\sin(ks)\cos(s))((k^2-1)\sin^2(ks)+k^2+1)}{((k^2-1)\sin^2(ks)+1)^{3/2}} \\ & - \frac{\sin\theta(s)(\cos(ks)\cos(s) - k\sin(ks)\sin(s))\theta'(s)}{\sqrt{(k^2-1)\sin^2(ks)+1}}, \cos\theta(s)\theta'(s) \end{aligned} \right) \quad (4.43)$$

şeklindedir.

İspat. \mathbb{E}^3 Öklid uzayında verilen $\phi(s, v)$ rektifiyan gül regle yüzeyinin bir $\phi(s, v_0)$ striksiyon noktasındaki merkez normali t olmak üzere

$$t = \frac{e_s}{\|e_s\|}$$

şeklinde bulunur. Burada (4.6) eşitliğinden

$$e_s = -\theta'(s)\sin\theta(s)T(s) + \|\alpha_s\|\kappa\cos\theta(s)N(s) + \theta'(s)\cos\theta(s)B(s)$$

olduğu ve (4.41) eşitliğinden

$$\|e_s\| = \sqrt{(\theta'(s))^2 + \|\alpha_s\|^2\kappa^2\cos^2\theta(s)}$$

olduğu bilinmektedir. Böylece

$$t(s) = \frac{-\theta'(s)\sin\theta(s)T(s) + \|\alpha_s\|\kappa\cos\theta(s)N(s) + \theta'(s)\cos\theta(s)B(s)}{\sqrt{(\theta'(s))^2 + \|\alpha_s\|^2\kappa^2\cos^2\theta(s)}} \quad (4.44)$$

olarak elde edilir. Bu ifadede $\|\alpha_s\|$, κ , $T(s)$, $N(s)$, $B(s)$ değerleri yerine yazılırsa (4.43) eşitliği elde edilir. ■

Örnek 4.8. \mathbb{E}^3 Öklid uzayında $a = 1$, $k = 2$ ve $\theta(s) = \frac{\pi}{3}$ değerleri için verilen

$$\phi_2(s, v) = \left(\cos(2s) \cos(s) - \frac{v(\cos(2s) \sin(s) + 2 \sin(2s) \cos(s))}{2\sqrt{3 \sin^2(2s) + 1}}, \right. \\ \left. \cos(2s) \sin(s) + \frac{v(\cos(2s) \cos(s) - 2 \sin(2s) \sin(s))}{2\sqrt{3 \sin^2(2s) + 1}}, v \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

rektifiyan gül regle yüzeyinin bir $\phi(s, 1)$ striksiyon noktasındaki merkez normalini bulunuz.

Çözüm. \mathbb{E}^3 Öklid uzayında verilen $\alpha(s)$ gül eğrisinin birim teğet vektörü

$$T(s) = \left(-\frac{\cos(2s) \sin(s) + 2 \sin(2s) \cos(s)}{\sqrt{3 \sin^2(2s) + 1}}, \frac{\cos(2s) \cos(s) - 2 \sin(2s) \sin(s)}{\sqrt{3 \sin^2(2s) + 1}}, 0 \right),$$

birim asli normal vektörü

$$N(s) = \left(-\frac{\cos(2s) \cos(s) - 2 \sin(2s) \sin(s)}{\sqrt{3 \sin^2(2s) + 1}}, -\frac{\cos(2s) \sin(s) + 2 \sin(2s) \cos(s)}{\sqrt{3 \sin^2(2s) + 1}}, 0 \right),$$

binormal vektörü

$$B(s) = (0, 0, 1),$$

hızı

$$\|\alpha_s(s)\| = \sqrt{3 \sin^2(2s) + 1},$$

ve eğriliği

$$\kappa(s) = \frac{3 \sin^2(2s) + 5}{(3 \sin^2(2s) + 1)^{3/2}}$$

olmak üzere (4.44) eşitliği yardımıyla rektifiyan gül regle yüzeyinin bir $\phi(s, 1)$ striksiyon noktasındaki merkez normali için

$$t(s) = \left(-\frac{\cos(2s) \cos(s) - 2 \sin(2s) \sin(s)}{\sqrt{3 \sin^2(2s) + 1}}, -\frac{\cos(2s) \sin(s) + 2 \sin(2s) \cos(s)}{\sqrt{3 \sin^2(2s) + 1}}, 0 \right)$$

elde edilir.

Sonuç 4.2. \mathbb{E}^3 Öklid uzayında verilen $\phi(s, v)$ rektifiyan gül regle yüzeyinin $\alpha(s)$ dayanak eğrisinin normal ve geodezik eğriliği, sırasıyla,

$$\kappa_n(\alpha) = \frac{v\|\alpha_s\|'\kappa \sin \theta(s) \cos \theta(s) + v\theta'(s)\|\alpha_s\|\kappa - \|\alpha_s\|^2\kappa \sin \theta(s)}{\|\alpha_s\|\sqrt{(\|\alpha_s\| \sin \theta(s) - v\theta'(s))^2 + v^2\|\alpha_s\|^2\kappa^2 \cos^2 \theta(s)}} \quad (4.45)$$

ve

$$\kappa_g(\alpha) = \frac{-v\|\alpha_s\|\kappa^2 \cos^2 \theta(s)}{\sqrt{(\|\alpha_s\| \sin \theta(s) - v\theta'(s))^2 + v^2\|\alpha_s\|^2\kappa^2 \cos^2 \theta(s)}} \quad (4.46)$$

şeklindedir.

İspat. \mathbb{E}^3 Öklid uzayında verilen $\phi(s, v)$ regle yüzeyinin $\alpha(s)$ dayanak eğrisinin normal ve geodezik eğriliği, sırasıyla,

$$\kappa_n(\alpha) = \frac{\langle \alpha_{ss}, \mathcal{N} \rangle}{\|\alpha_s\|^2}$$

$$\kappa_g(\alpha) = \frac{\langle \alpha_s \times \alpha_{ss}, \mathcal{N} \rangle}{\|\alpha_s\|^3}$$

olduğundan (4.9) ve (4.20) eşitlikleri yardımıyla

$$\begin{aligned} \langle \alpha_{ss}, \phi_s \times \phi_v \rangle &= \langle \|\alpha_s\|'T(s) + \|\alpha_s\|^2\kappa N(s), v\|\alpha_s\|\kappa \sin \theta(s) \cos \theta(s)T(s) \\ &\quad + (v\theta'(s) - \|\alpha_s\| \sin \theta(s))N(s) - v\|\alpha_s\|\kappa \cos^2 \theta(s)B(s) \rangle \\ &= v\|\alpha_s\|'\|\alpha_s\|\kappa \sin \theta(s) \cos \theta(s) + v\theta'(s)\|\alpha_s\|^2\kappa - \|\alpha_s\|^3\kappa \sin \theta(s) \end{aligned} \quad (4.47)$$

olarak hesaplanır. Buradan

$$\langle \alpha_{ss}, \mathcal{N} \rangle = \frac{\langle \alpha_{ss}, \phi_s \times \phi_v \rangle}{\|\phi_s \times \phi_v\|}$$

olmak üzere

$$\langle \alpha_{ss}, \mathcal{N} \rangle = \frac{v\|\alpha_s\|'\|\alpha_s\|\kappa \sin \theta(s) \cos \theta(s) + v\theta'(s)\|\alpha_s\|^2\kappa - \|\alpha_s\|^3\kappa \sin \theta(s)}{\sqrt{(\|\alpha_s\| \sin \theta(s) - v\theta'(s))^2 + v^2\|\alpha_s\|^2\kappa^2 \cos^2 \theta(s)}} \quad (4.48)$$

elde edilir. O halde $\phi(s, v)$ rektifiyan gül regle yüzeyinin $\alpha(s)$ dayanak eğrisinin normal eğriliği (4.45) olarak bulunur. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned} \alpha_s \times \alpha_{ss} &= \|\alpha_s\|T(s) \times (\|\alpha_s\|'T(s) + \|\alpha_s\|^2\kappa N(s)) \\ &= \|\alpha_s\|^3\kappa B(s) \end{aligned} \quad (4.49)$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\langle \alpha_s \times \alpha_{ss}, \phi_s \times \phi_v \rangle &= \langle \|\alpha_s\|^3 \kappa B(s), v \|\alpha_s\| \kappa \sin \theta(s) \cos \theta(s) T(s) \\ &\quad + (v \theta'(s) - \|\alpha_s\| \sin \theta(s)) N(s) - v \|\alpha_s\| \kappa \cos^2 \theta(s) B(s) \rangle \\ &= -v \|\alpha_s\|^4 \kappa^2 \cos^2 \theta(s)\end{aligned}\tag{4.50}$$

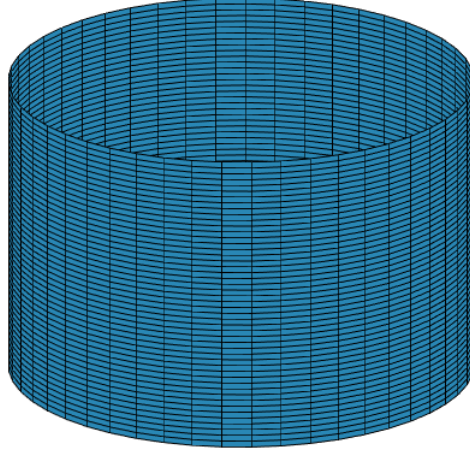
olarak hesaplanır. Buradan

$$\langle \alpha_s \times \alpha_{ss}, \mathcal{N} \rangle = \frac{-v \|\alpha_s\|^4 \kappa^2 \cos^2 \theta(s)}{\sqrt{(\|\alpha_s\| \sin \theta(s) - v \theta'(s))^2 + v^2 \|\alpha_s\|^2 \kappa^2 \cos^2 \theta(s)}}\tag{4.51}$$

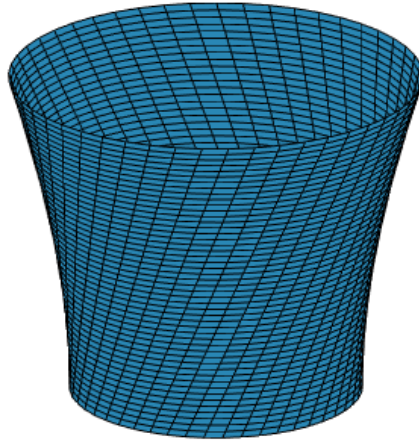
elde edilir. O halde $\phi(s, v)$ rektifiyan gül regle yüzeyinin $\alpha(s)$ dayanak eğrisinin geodezik eğriliği (4.46) olarak bulunur. ■

4.1.5 Rektifiyan Gül Regle Yüzeylerinin Görselleştirilmesi

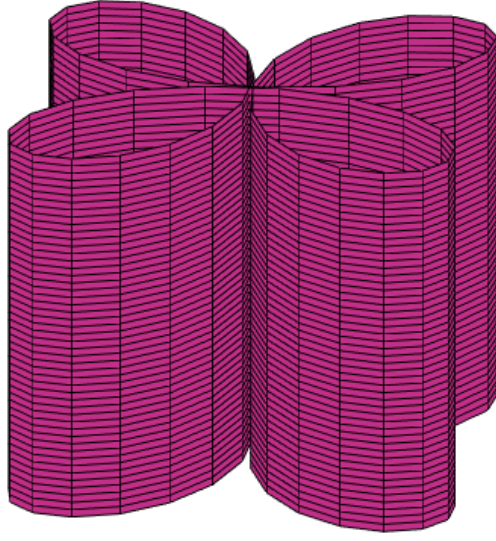
Bu bölümde $a = 1$ olmak üzere farklı k ve θ değerleri için elde edilen rektifiyan gül regle yüzeyleri MATLAB programı ile görselleştirilmiştir.



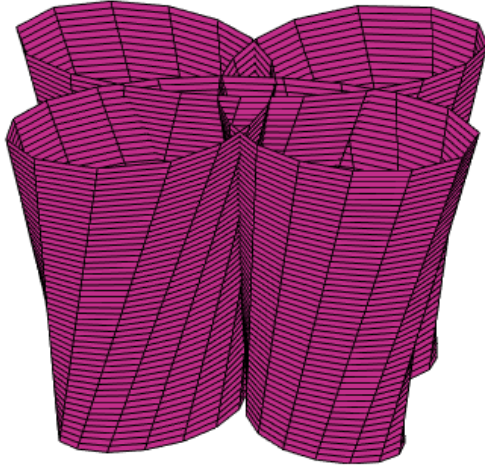
Şekil 4.3 $k = 1$ ve $\theta = \frac{\pi}{2}$ için rektifiyan gül regle yüzeyi



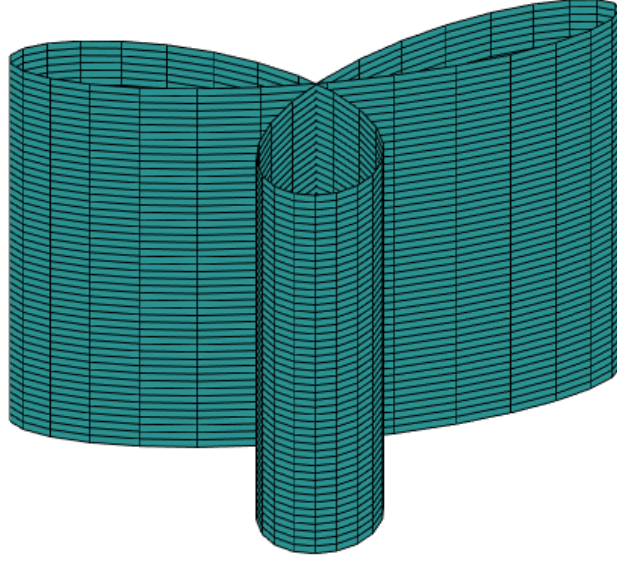
Şekil 4.4 $k = 1$ ve $\theta = \frac{\pi}{3}$ için rektifiyan gül regle yüzeyi



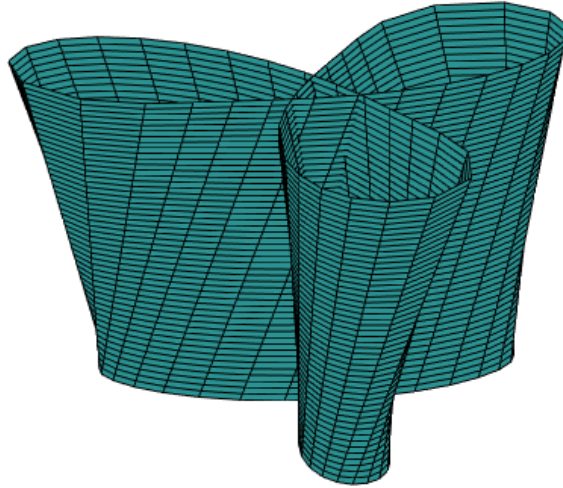
Şekil 4.5 $k = 2$ ve $\theta = \frac{\pi}{2}$ için rektifiyan gül regle yüzeyi



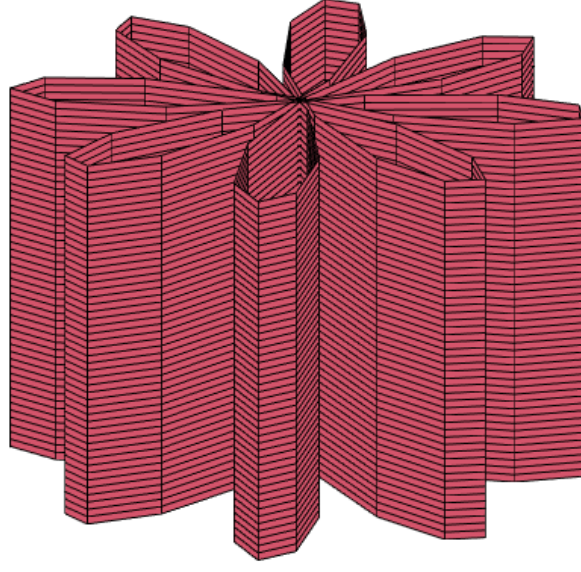
Şekil 4.6 $k = 2$ ve $\theta = \frac{\pi}{3}$ için rektifiyan gül regle yüzeyi



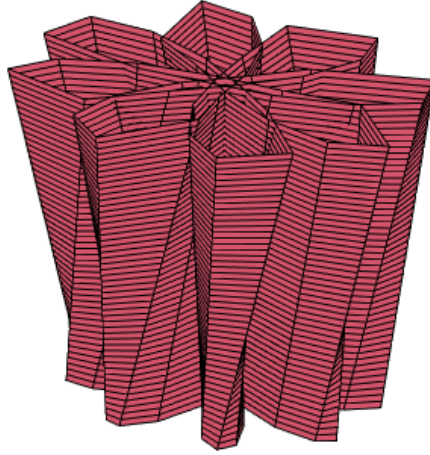
Şekil 4.7 $k = 3$ ve $\theta = \frac{\pi}{2}$ için rektifiyan gül regle yüzeyi



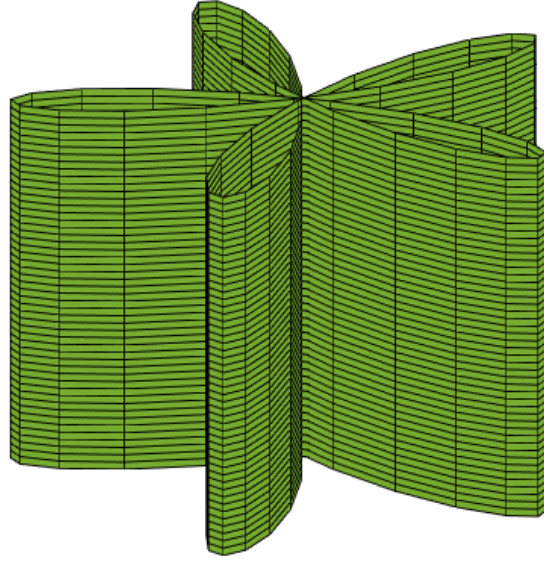
Şekil 4.8 $k = 3$ ve $\theta = \frac{\pi}{3}$ için rektifiyan gül regle yüzeyi



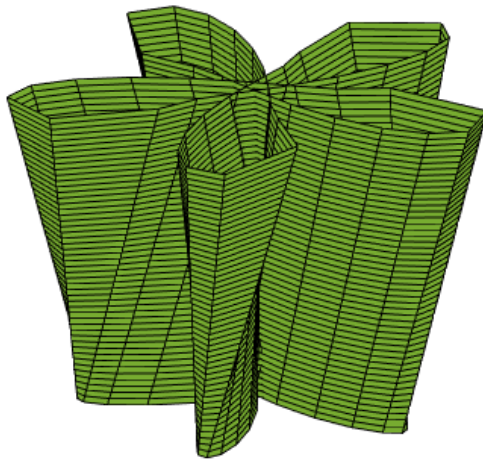
Şekil 4.9 $k = 4$ ve $\theta = \frac{\pi}{2}$ için rektifiyan gül regle yüzeyi



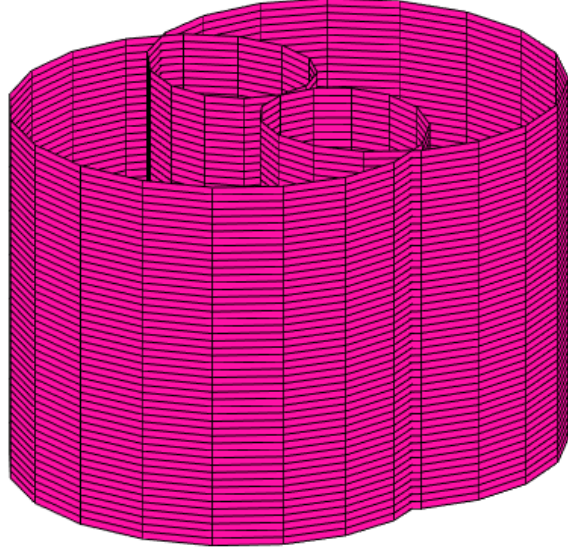
Şekil 4.10 $k = 4$ ve $\theta = \frac{\pi}{3}$ için rektifiyan gül regle yüzeyi



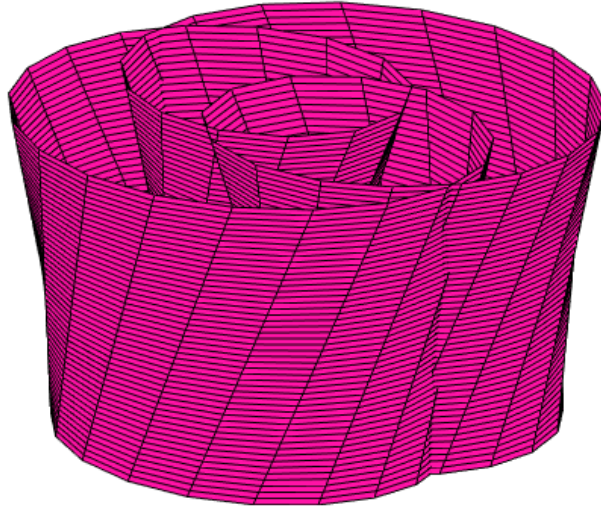
Şekil 4.11 $k = 5$ ve $\theta = \frac{\pi}{2}$ için rektifiyan gül regle yüzeyi



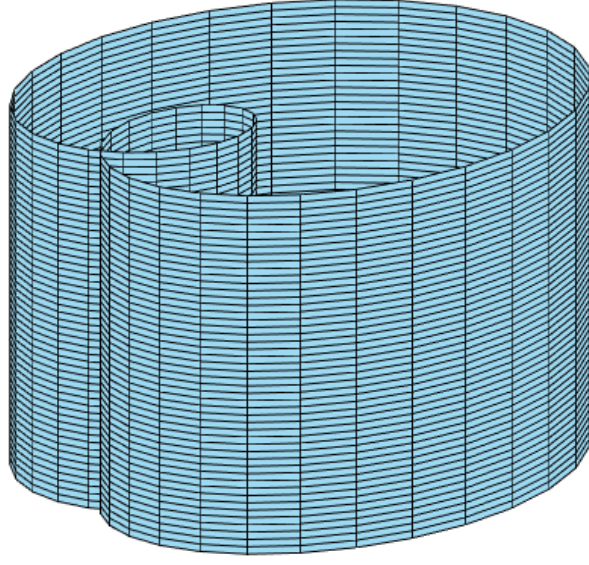
Şekil 4.12 $k = 5$ ve $\theta = \frac{\pi}{3}$ için rektifiyan gül regle yüzeyi



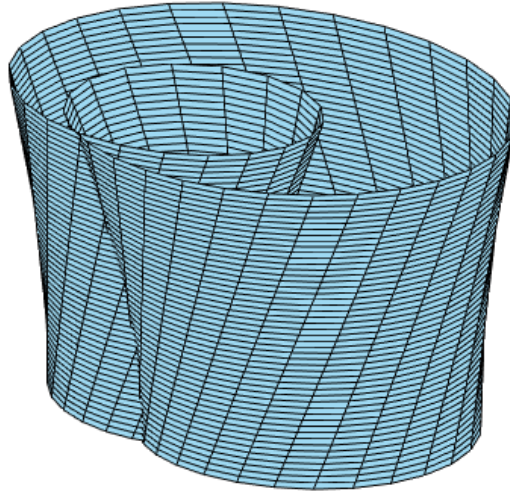
Şekil 4.13 $k = \frac{1}{2}$ ve $\theta = \frac{\pi}{2}$ için rektifiyan gül regle yüzeyi



Şekil 4.14 $k = \frac{1}{2}$ ve $\theta = \frac{\pi}{3}$ için rektifiyan gül regle yüzeyi



Şekil 4.15 $k = \frac{1}{3}$ ve $\theta = \frac{\pi}{2}$ için rektifiyan gül regle yüzeyi



Şekil 4.16 $k = \frac{1}{3}$ ve $\theta = \frac{\pi}{3}$ için rektifiyan gül regle yüzeyi

4.2 Normal Gül Regle Yüzeyi

Tanım 4.3. \mathbb{E}^3 Öklid uzayında gül eğrisini dayanak eğrisi ve dayanak eğrisinin birim asli normal ile binormal vektörlerinin açısız lineer birleşimini doğrultman vektör kabul eden yüzeye normal gül regle yüzeyi denir.

\mathbb{E}^3 Öklid uzayında dayanak eğrisi

$$\alpha(s) = (a \cos(ks) \cos(s), a \cos(ks) \sin(s), 0)$$

ile verilen gül eğrisi; ana doğrunun doğrultman vektörü

$$e(s) = \cos \theta(s)N(s) + \sin \theta(s)B(s) \quad (4.52)$$

veya

$$e(s) = \left(-\frac{\cos \theta(s)(\cos(ks) \cos(s) - k \sin(ks) \sin(s))}{\sqrt{(k^2 - 1) \sin^2(ks) + 1}}, \right. \\ \left. -\frac{\cos \theta(s)(\cos(ks) \sin(s) + k \sin(ks) \cos(s))}{\sqrt{(k^2 - 1) \sin^2(ks) + 1}}, \sin \theta(s) \right) \quad (4.53)$$

ve $\|e(s)\| = 1$ olan bir normal gül regle yüzeyinin parametrik denklemi

$$\begin{aligned} \phi(s, v) &= \alpha(s) + ve(s) \\ &= (a \cos(ks) \cos(s), a \cos(ks) \sin(s), 0) \\ &\quad + v \left(-\frac{\cos \theta(s)(\cos(ks) \cos(s) - k \sin(ks) \sin(s))}{\sqrt{(k^2 - 1) \sin^2(ks) + 1}}, \right. \\ &\quad \left. -\frac{\cos \theta(s)(\cos(ks) \sin(s) + k \sin(ks) \cos(s))}{\sqrt{(k^2 - 1) \sin^2(ks) + 1}}, \sin \theta(s) \right) \\ &= \left(a \cos(ks) \cos(s) - \frac{v \cos \theta(s)(\cos(ks) \cos(s) - k \sin(ks) \sin(s))}{\sqrt{(k^2 - 1) \sin^2(ks) + 1}}, \right. \\ &\quad a \cos(ks) \sin(s) - \frac{v \cos \theta(s)(\cos(ks) \sin(s) + k \sin(ks) \cos(s))}{\sqrt{(k^2 - 1) \sin^2(ks) + 1}}, \\ &\quad \left. v \sin \theta(s) \right) \end{aligned} \quad (4.54)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $N(s)$, gül eğrisinin birim asli normal vektörü ve $B(s)$ gül eğrisinin binormal vektörüdür.

Örnek 4.9. \mathbb{E}^3 Öklid uzayında $a = 1$ ve $k = 2$ değerleri için (2.3) eşitliği yardımıyla elde edilen $\alpha(s) = (\cos(2s)\cos(s), \cos(2s)\sin(s), 0)$ gül eğrisini dayanak eğrisi kabul eden normal gül regle yüzeyini bulunuz.

Çözüm. \mathbb{E}^3 Öklid uzayında $a = 1$ ve $k = 2$ değerleri için (2.11) eşitliği yardımıyla $\alpha(s)$ gül eğrisinin birim asli normal vektörü

$$N(s) = \left(-\frac{\cos(2s)\cos(s) - 2\sin(2s)\sin(s)}{\sqrt{3\sin^2(2s) + 1}}, -\frac{\cos(2s)\sin(s) + 2\sin(2s)\cos(s)}{\sqrt{3\sin^2(2s) + 1}}, 0 \right)$$

ve (2.10) eşitliği yardımıyla binormal vektörü

$$B(s) = (0, 0, 1)$$

olarak bulunur. Burada $\alpha(s)$ gül eğrisinin birim asli normal vektörü $N(s)$ ile binormal vektörü $B(s)$ yardımıyla tanımlanan normal gül regle yüzeyinin doğrultmanı

$$\begin{aligned} e(s) &= \cos\theta(s)N(s) + \sin\theta(s)B(s) \\ &= \cos\theta(s) \left(-\frac{\cos(2s)\cos(s) - 2\sin(2s)\sin(s)}{\sqrt{3\sin^2(2s) + 1}}, \right. \\ &\quad \left. -\frac{\cos(2s)\sin(s) + 2\sin(2s)\cos(s)}{\sqrt{3\sin^2(2s) + 1}}, 0 \right) + \sin\theta(s)(0, 0, 1) \\ &= \left(-\frac{\cos\theta(s)(\cos(2s)\cos(s) - 2\sin(2s)\sin(s))}{\sqrt{3\sin^2(2s) + 1}}, \right. \\ &\quad \left. -\frac{\cos\theta(s)(\cos(2s)\sin(s) + 2\sin(2s)\cos(s))}{\sqrt{3\sin^2(2s) + 1}}, \sin\theta(s) \right) \end{aligned}$$

şeklinde dir. Böylece $\alpha(s)$ gül eğrisini dayanak eğrisi ve $e(s)$ vektörünü doğrultman vektör kabul eden normal gül regle yüzey

$$\begin{aligned} \phi(s, v) &= \left(\cos(2s)\cos(s) - \frac{v\cos\theta(s)(\cos(2s)\cos(s) - 2\sin(2s)\sin(s))}{\sqrt{3\sin^2(2s) + 1}}, \right. \\ &\quad \cos(2s)\sin(s) - \frac{v\cos\theta(s)(\cos(2s)\sin(s) + 2\sin(2s)\cos(s))}{\sqrt{3\sin^2(2s) + 1}}, \\ &\quad \left. v\sin\theta(s) \right) \end{aligned}$$

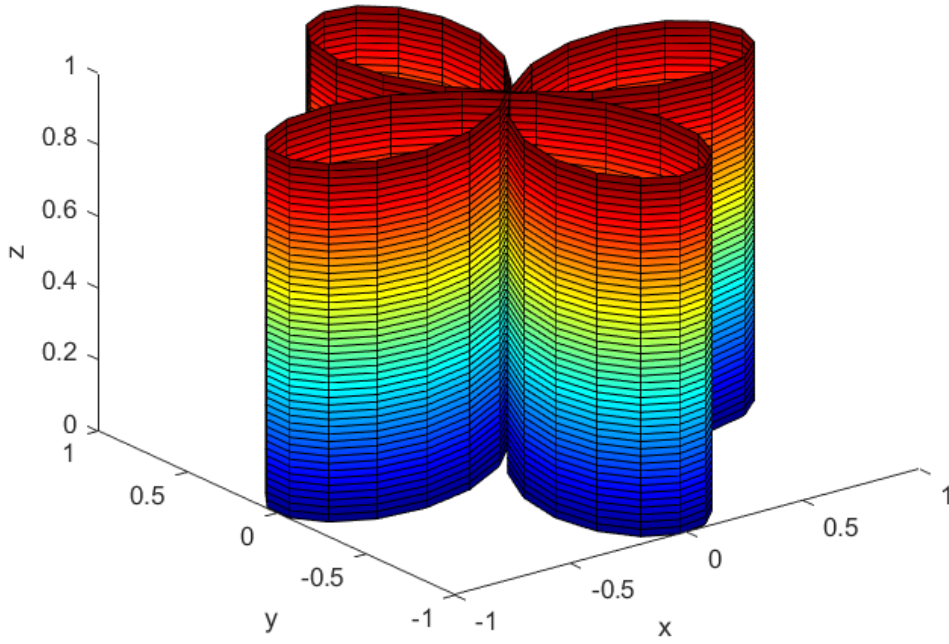
olarak bulunur. Bu ifadede $\theta(s)$ ifadesinin aldığı farklı değerler için farklı normal gül regle yüzey ailesi elde edilir.

Özel durum:

- $\theta = \frac{\pi}{2}$ için

$$\phi_1(s, v) = (\cos(2s) \cos(s), \cos(2s) \sin(s), v)$$

normal gül regle yüzeyi elde edilir. Burada $s \in [0, 2\pi]$ ve $v \in [0, 1]$ alınırsa Şekil 4.17 elde edilir.

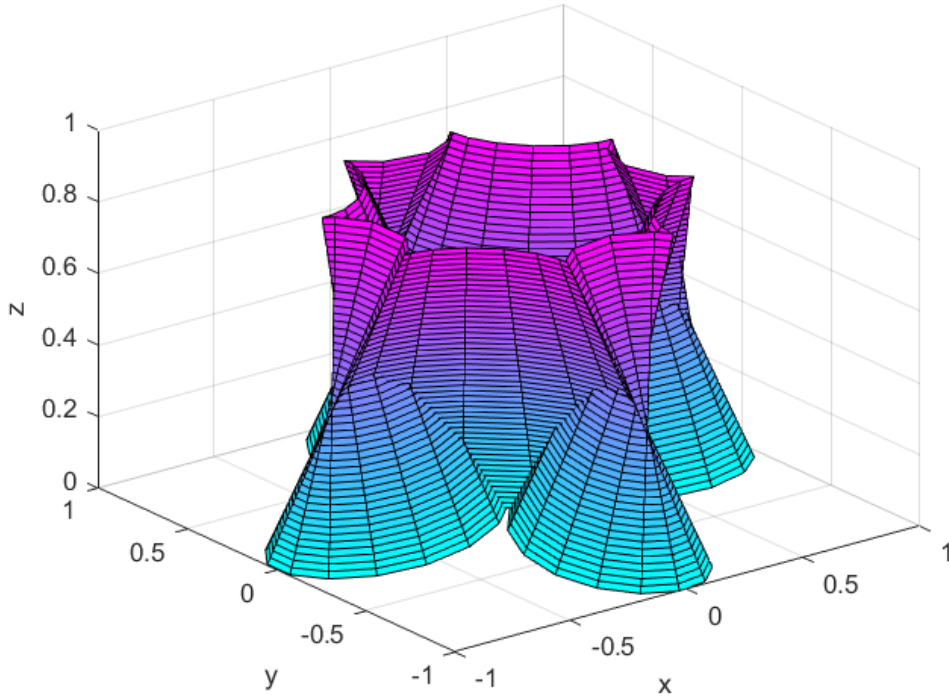


Şekil 4.17 $k = 2$ ve $\theta = \frac{\pi}{2}$ için normal gül regle yüzeyi

- $\theta = \frac{\pi}{3}$ için

$$\phi_2(s, v) = \left(\cos(2s) \cos(s) - \frac{v(\cos(2s) \cos(s) - 2 \sin(2s) \sin(s))}{2\sqrt{3} \sin^2(2s) + 1}, \right. \\ \left. \cos(2s) \sin(s) - \frac{v(\cos(2s) \sin(s) + 2 \sin(2s) \cos(s))}{2\sqrt{3} \sin^2(2s) + 1}, v \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

normal gül regle yüzeyi elde edilir. Burada $s \in [0, 2\pi]$ ve $v \in [0, 1]$ alınırsa Şekil 4.18 elde edilir.



Şekil 4.18 $k = 2$ ve $\theta = \frac{\pi}{3}$ için normal gül regle yüzeyi

4.2.1 Normal Gül Regle Yüzeyinin Teğet Düzlemi

Tanım 4.4. \mathbb{E}^3 Öklid uzayında normal gül regle yüzeyinin doğrultmanını içeren ve yüzeyin birim normaline dik olan düzleme normal gül regle yüzeyinin teğet düzlemi denir.

Teorem 4.9. \mathbb{E}^3 Öklid uzayında $\phi(s, v)$ normal gül regle yüzeyinin birim normal vektörü

$$\begin{aligned}
 \mathcal{N}(s, v) = & \frac{1}{\sqrt{\left(a\sqrt{(k^2-1)\sin^2(ks)+1} - \frac{v\cos\theta(s)((k^2-1)\sin^2(ks)+k^2+1)}{((k^2-1)\sin^2(ks)+1)}\right)^2 + v^2(\theta'(s))^2}} \\
 & \left(a\sin\theta(s)(\cos(ks)\cos(s) - k\sin(ks)\sin(s)) + \frac{v(\cos(ks)\sin(s) + k\sin(ks)\cos(s))\theta'(s)}{\sqrt{(k^2-1)\sin^2(ks)+1}} \right. \\
 & \left. - \frac{v\cos\theta(s)\sin\theta(s)(\cos(ks)\cos(s) - k\sin(ks)\sin(s))((k^2-1)\sin^2(ks)+k^2+1)}{((k^2-1)\sin^2(ks)+1)^{3/2}}, \right. \\
 & a\sin\theta(s)(\cos(ks)\sin(s) + k\sin(ks)\cos(s)) - \frac{v(\cos(ks)\cos(s) - k\sin(ks)\sin(s))\theta'(s)}{\sqrt{(k^2-1)\sin^2(ks)+1}} \\
 & \left. - \frac{v\cos\theta(s)\sin\theta(s)(\cos(ks)\sin(s) + k\sin(ks)\cos(s))((k^2-1)\sin^2(ks)+k^2+1)}{((k^2-1)\sin^2(ks)+1)^{3/2}}, \right. \\
 & \left. a\cos\theta(s)\sqrt{(k^2-1)\sin^2(ks)+1} - \frac{v\cos^2\theta(s)((k^2-1)\sin^2(ks)+k^2+1)}{(k^2-1)\sin^2(ks)+1} \right)
 \end{aligned} \tag{4.55}$$

şeklindedir.

İspat. \mathbb{E}^3 Öklid uzayında $\phi(s, v) = \alpha(s) + ve(s)$ normal gül regle yüzeyinin birim normal vektörü

$$\mathcal{N} = \frac{\phi_s \times \phi_v}{\|\phi_s \times \phi_v\|} = \frac{(\alpha_s \times e) + v(e_s \times e)}{\|(\alpha_s \times e) + v(e_s \times e)\|}$$

şekindedir. O halde regle yüzeyin birim normal vektörünün hesabı için α_s ve e_s hesaplanmalıdır. Birim teğet vektörün tanımından

$$T(s) = \frac{\alpha_s}{\|\alpha_s\|}$$

olduğunu biliyoruz. O halde

$$\alpha_s = \|\alpha_s\|T(s) \quad (4.56)$$

yazabiliriz. $\|\alpha_s\|$ hızlı regüler eğri için $N'(s) = -\|\alpha_s\|\kappa T(s) + \|\alpha_s\|\tau B(s)$, $B'(s) = -\|\alpha_s\|\tau N(s)$ eşitlikleri ve gül eğrileri için $\tau = 0$ olduğu göz önüne alınarak e_s ifadesini elde etmek için normal gül regle yüzeyinin doğrultman vektörünün türevini alırsak

$$\begin{aligned} e_s &= \frac{de}{ds} \\ &= \frac{d(\cos \theta(s)N(s) + \sin \theta(s)B(s))}{ds} \\ &= -\theta'(s) \sin \theta(s)N(s) + \cos \theta(s)N'(s) + \theta'(s) \cos \theta(s)B(s) + \sin \theta(s)B'(s) \\ &= -\theta'(s) \sin \theta(s)N(s) + \cos \theta(s)(-\|\alpha_s\|\kappa T(s) + \|\alpha_s\|\tau B(s)) \\ &\quad + \theta'(s) \cos \theta(s)B(s) + \sin \theta(s)(-\|\alpha_s\|\tau N(s)) \\ &= -\|\alpha_s\|\kappa \cos \theta(s)T(s) - \theta'(s) \sin \theta(s)N(s) + \theta'(s) \cos \theta(s)B(s) \end{aligned} \quad (4.57)$$

olarak bulunur. Burada normal gül regle yüzeyinin normal vektörünü bulmak için $(\alpha_s \times e)$ ve $(e_s \times e)$ değerlerini hesaplayalım. Burada (4.56) ve (4.52) eşitlikleri yardımıyla

$$\begin{aligned} (\alpha_s \times e) &= (\|\alpha_s\|T(s)) \times (\cos \theta(s)N(s) + \sin \theta(s)B(s)) \\ &= \|\alpha_s\| \cos \theta(s)(T(s) \times N(s)) + \|\alpha_s\| \sin \theta(s)(T(s) \times B(s)) \quad (4.58) \\ &= -\|\alpha_s\| \sin \theta(s)N(s) + \|\alpha_s\| \cos \theta(s)B(s) \end{aligned}$$

olarak bulunur. Aynı zamanda (4.57) ve (4.52) eşitlikleri yardımıyla

$$\begin{aligned}
(e_s \times e) &= (-\|\alpha_s\|\kappa \cos \theta(s)T(s) - \theta'(s) \sin \theta(s)N(s) + \theta'(s) \cos \theta(s)B(s)) \\
&\quad \times (\cos \theta(s)N(s) + \sin \theta(s)B(s)) \\
&= -\|\alpha_s\|\kappa \cos^2 \theta(s)(T(s) \times N(s)) - \|\alpha_s\|\kappa \cos \theta(s) \sin \theta(s)(T(s) \times B(s)) \\
&\quad - \theta'(s) \sin \theta(s) \cos \theta(s)(N(s) \times N(s)) - \theta'(s) \sin^2 \theta(s)(N(s) \times B(s)) \\
&\quad + \theta'(s) \cos^2 \theta(s)(B(s) \times N(s)) + \theta'(s) \cos \theta(s) \sin \theta(s)(B(s) \times B(s)) \\
&= -\theta'(s)T(s) + \|\alpha_s\|\kappa \cos \theta(s) \sin \theta(s)N(s) - \|\alpha_s\|\kappa \cos^2 \theta(s)B(s)
\end{aligned} \tag{4.59}$$

olarak bulunur. Regle yüzeyin normal vektörü

$$\phi_s \times \phi_v = (\alpha_s + ve_s) \times e = (\alpha_s \times e) + v(e_s \times e)$$

şeklinde hesaplandığından normal gül regle yüzeyinin normal vektörü (4.58) ve (4.59) eşitlikleri yardımıyla

$$\begin{aligned}
\phi_s \times \phi_v &= -v\theta'(s)T(s) + (v\|\alpha_s\|\kappa \cos \theta(s) \sin \theta(s) - \|\alpha_s\| \sin \theta(s))N(s) \\
&\quad + (\|\alpha_s\| \cos \theta(s) - v\|\alpha_s\|\kappa \cos^2 \theta(s))B(s)
\end{aligned} \tag{4.60}$$

olarak bulunur. Bu normal vektörün normunu hesaplarsak

$$\begin{aligned}
\|\phi_s \times \phi_v\|^2 &= \langle \phi_s \times \phi_v, \phi_s \times \phi_v \rangle \\
&= \langle -v\theta'(s)T(s) + (v\|\alpha_s\|\kappa \cos \theta(s) \sin \theta(s) - \|\alpha_s\| \sin \theta(s))N(s) \\
&\quad + (\|\alpha_s\| \cos \theta(s) - v\|\alpha_s\|\kappa \cos^2 \theta(s))B(s), -v\theta'(s)T(s) \\
&\quad + (v\|\alpha_s\|\kappa \cos \theta(s) \sin \theta(s) - \|\alpha_s\| \sin \theta(s))N(s) \\
&\quad + (\|\alpha_s\| \cos \theta(s) - v\|\alpha_s\|\kappa \cos^2 \theta(s))B(s) \rangle \\
&= v^2(\theta'(s))^2 + (v\|\alpha_s\|\kappa \cos \theta(s) \sin \theta(s) - \|\alpha_s\| \sin \theta(s))^2 \\
&\quad + (\|\alpha_s\| \cos \theta(s) - v\|\alpha_s\|\kappa \cos^2 \theta(s))^2 \\
&= v^2(\theta'(s))^2 + \sin^2 \theta(s)(v\|\alpha_s\|\kappa \cos \theta(s) - \|\alpha_s\|)^2 \\
&\quad + \cos^2 \theta(s)(\|\alpha_s\| - v\|\alpha_s\|\kappa \cos \theta(s))^2 \\
&= v^2(\theta'(s))^2 + (\|\alpha_s\| - v\|\alpha_s\|\kappa \cos \theta(s))^2
\end{aligned} \tag{4.61}$$

olduğundan

$$\|\phi_s \times \phi_v\| = \sqrt{v^2(\theta'(s))^2 + (\|\alpha_s\| - v\|\alpha_s\|\kappa \cos \theta(s))^2} \tag{4.62}$$

elde ederiz. Böylece normal gül regle yüzeyinin birim normal vektörü (4.60) ve (4.62) eşitlikleri yardımıyla

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}(s, v) &= \frac{\phi_s \times \phi_v}{\|\phi_s \times \phi_v\|} \\
&= - \frac{v\theta'(s)T(s)}{\sqrt{v^2(\theta'(s))^2 + (\|\alpha_s\| - v\|\alpha_s\|\kappa \cos \theta(s))^2}} \\
&\quad + \frac{(v\|\alpha_s\|\kappa \cos \theta(s) \sin \theta(s) - \|\alpha_s\| \sin \theta(s))N(s)}{\sqrt{v^2(\theta'(s))^2 + (\|\alpha_s\| - v\|\alpha_s\|\kappa \cos \theta(s))^2}} \\
&\quad + \frac{(\|\alpha_s\| \cos \theta(s) - v\|\alpha_s\|\kappa \cos^2 \theta(s))B(s)}{\sqrt{v^2(\theta'(s))^2 + (\|\alpha_s\| - v\|\alpha_s\|\kappa \cos \theta(s))^2}}
\end{aligned} \tag{4.63}$$

şeklinde dir. Bu ifadede $\|\alpha_s\|$, κ , $T(s)$, $N(s)$, $B(s)$ değerleri yerine yazılırsa (4.55) eşitliği elde edilir. ■

Örnek 4.10. \mathbb{E}^3 Öklid uzayında $a = 1$, $k = 2$ ve $\theta(s) = \frac{\pi}{3}$ değerleri için verilen

$$\begin{aligned}
\phi_2(s, v) &= \left(\cos(2s) \cos(s) - \frac{v(\cos(2s) \cos(s) - 2 \sin(2s) \sin(s))}{2\sqrt{3 \sin^2(2s) + 1}}, \right. \\
&\quad \left. \cos(2s) \sin(s) - \frac{v(\cos(2s) \sin(s) + 2 \sin(2s) \cos(s))}{2\sqrt{3 \sin^2(2s) + 1}}, v \frac{\sqrt{3}}{2} \right)
\end{aligned}$$

normal gül regle yüzeyinin $P\left(0, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ noktasındaki Frenet elemanlarını ve teğet düzlemini bulunuz.

Çözüm. \mathbb{E}^3 Öklid uzayında verilen $\phi_2(s, v)$ normal gül regle yüzeyi için $s = \frac{\pi}{2}$ ve $v = 1$ değerleri $P\left(0, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ noktasına karşılık gelmektedir. Burada $\alpha(s)$ gül eğrisi için birim teğet vektörü

$$T(s) = \left(-\frac{\cos(2s) \sin(s) + 2 \sin(2s) \cos(s)}{\sqrt{3 \sin^2(2s) + 1}}, \frac{\cos(2s) \cos(s) - 2 \sin(2s) \sin(s)}{\sqrt{3 \sin^2(2s) + 1}}, 0 \right),$$

birim asli normal vektörü

$$N(s) = \left(-\frac{\cos(2s) \cos(s) - 2 \sin(2s) \sin(s)}{\sqrt{3 \sin^2(2s) + 1}}, -\frac{\cos(2s) \sin(s) + 2 \sin(2s) \cos(s)}{\sqrt{3 \sin^2(2s) + 1}}, 0 \right),$$

binormal vektörü

$$B(s) = (0, 0, 1),$$

hızı

$$\|\alpha_s(s)\| = \sqrt{3 \sin^2(2s) + 1},$$

ve eğriliği

$$\kappa(s) = \frac{3 \sin^2(2s) + 5}{(3 \sin^2(2s) + 1)^{3/2}}$$

şeklindedir. Bu ifadelerin $P \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ noktasında aldıkları değerler $s = \frac{\pi}{2}$ ve $v = 1$ için

$$\begin{cases} T \left(\frac{\pi}{2}\right) = (1, 0, 0), \\ N \left(\frac{\pi}{2}\right) = (0, 1, 0), \\ B \left(\frac{\pi}{2}\right) = (0, 0, 1), \\ \|\alpha_s \left(\frac{\pi}{2}\right)\| = 1, \\ \kappa \left(\frac{\pi}{2}\right) = 5 \end{cases}$$

olarak bulunur. Bu ifadeler (4.63) eşitliğinde yerine yazılırsa $\phi_2(s, v)$ normal gül regle yüzeyinin $P \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ noktasındaki birim normal vektörü

$$\mathcal{N}_p = \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

olarak hesaplanır. O halde normal gül regle yüzeyinin teğet düzlemi üzerindeki temsili bir nokta $X(x, y, z)$ olmak üzere $P \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ noktasındaki teğet düzlemi

$$(x - 0)0 + \left(y + \frac{1}{2}\right) \frac{\sqrt{3}}{2} - \left(z - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \frac{1}{2} = 0$$

olarak yazılır. Bu ifadeyi düzenlersek $\phi_2(s, v)$ normal gül regle yüzeyinin $P \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ noktasındaki teğet düzlemi

$$2\sqrt{3}y - 2z + 2\sqrt{3} = 0$$

olarak elde edilir.

4.2.2 Normal Gül Regle Yüzeyinin Özellikleri

Teorem 4.10. \mathbb{E}^3 Öklid uzayında $\phi(s, v)$ normal gül regle yüzeyinin 1. temel form katsayıları

$$\begin{cases} E = \left(a\sqrt{(k^2 - 1) \sin^2(ks) + 1} - \frac{v \cos \theta(s) ((k^2 - 1) \sin^2(ks) + k^2 + 1)}{(k^2 - 1) \sin^2(ks) + 1} \right)^2 \\ \quad + v^2 (\theta'(s))^2, \\ F = 0, \\ G = 1 \end{cases}$$

şeklindedir.

İspat. \mathbb{E}^3 Öklid uzayında normal gül regle yüzeyinin 1. temel form katsayıları (3.7), (3.8) ve (3.9) eşitlikleriyle elde edilir. Burada (4.56) ve (4.57) eşitlikleri yardımıyla

$$\begin{aligned}
E &= \langle \phi_s, \phi_s \rangle \\
&= \langle \alpha_s + ve_s, \alpha_s + ve_s \rangle \\
&= \langle \alpha_s, \alpha_s \rangle + \langle \alpha_s, ve_s \rangle + \langle ve_s, \alpha_s \rangle + \langle ve_s, ve_s \rangle \\
&= \langle \alpha_s, \alpha_s \rangle + 2v \langle \alpha_s, e_s \rangle + v^2 \langle e_s, e_s \rangle \\
&= \langle \|\alpha_s\|T(s), \|\alpha_s\|T(s) \rangle + 2v \langle \|\alpha_s\|T(s), -\|\alpha_s\|\kappa \cos \theta(s)T(s) \\
&\quad - \theta'(s) \sin \theta(s)N(s) + \theta'(s) \cos \theta(s)B(s) \rangle \\
&\quad + v^2 \langle -\|\alpha_s\|\kappa \cos \theta(s)T(s) - \theta'(s) \sin \theta(s)N(s) + \theta'(s) \cos \theta(s)B(s), \\
&\quad -\|\alpha_s\|\kappa \cos \theta(s)T(s) - \theta'(s) \sin \theta(s)N(s) + \theta'(s) \cos \theta(s)B(s) \rangle \\
&= \|\alpha_s\|^2 \|T(s)\|^2 + 2v (-\|\alpha_s\|^2 \kappa \cos \theta(s) \|T(s)\|^2) \\
&\quad + v^2 (\|\alpha_s\|^2 \kappa^2 \cos^2 \theta(s) \|T(s)\|^2 + (\theta'(s))^2 \sin^2 \theta(s) \|N(s)\|^2 \\
&\quad + (\theta'(s))^2 \cos^2 \theta(s) \|B(s)\|^2) \\
&= \|\alpha_s\|^2 - 2v \|\alpha_s\|^2 \kappa \cos \theta(s) + v^2 (\|\alpha_s\|^2 \kappa^2 \cos^2 \theta(s) + (\theta'(s))^2) \\
&= (\|\alpha_s\| - v \|\alpha_s\| \kappa \cos \theta(s))^2 + v^2 (\theta'(s))^2
\end{aligned} \tag{4.64}$$

elde edilir. Bu ifadede $\|\alpha_s\|$ ve κ değerleri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
E &= \left(a \sqrt{(k^2 - 1) \sin^2(ks) + 1} - \frac{v \cos \theta(s) ((k^2 - 1) \sin^2(ks) + k^2 + 1)}{((k^2 - 1) \sin^2(ks) + 1)} \right)^2 \\
&\quad + v^2 (\theta'(s))^2
\end{aligned} \tag{4.65}$$

olarak bulunur. Aynı zamanda (4.52), (4.56) ve (4.57) eşitlikleri yardımıyla

$$\begin{aligned}
F &= \langle \phi_s, \phi_v \rangle \\
&= \langle \alpha_s + ve_s, e \rangle \\
&= \langle \alpha_s, e \rangle + v \langle e_s, e \rangle \\
&= \langle \|\alpha_s\|T(s), \cos \theta(s)N(s) + \sin \theta(s)B(s) \rangle + v \langle -\|\alpha_s\|\kappa \cos \theta(s)T(s) \\
&\quad - \theta'(s) \sin \theta(s)N(s) + \theta'(s) \cos \theta(s)B(s), \cos \theta(s)N(s) + \sin \theta(s)B(s) \rangle \\
&= v (-\theta'(s) \sin \theta(s) \cos \theta(s) \|N(s)\|^2 + \theta'(s) \cos \theta(s) \sin \theta(s) \|B(s)\|^2) \\
&= v (-\theta'(s) \sin \theta(s) \cos \theta(s) + \theta'(s) \cos \theta(s) \sin \theta(s)) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{4.66}$$

olarak bulunur. Benzer şekilde (4.52) eşitliği yardımıyla

$$\begin{aligned}
G &= \langle \phi_v, \phi_v \rangle \\
&= \langle e, e \rangle \\
&= \langle \cos \theta(s)N(s) + \sin \theta(s)B(s), \cos \theta(s)N(s) + \sin \theta(s)B(s) \rangle \\
&= \cos^2 \theta(s) \|N(s)\|^2 + \sin^2 \theta(s) \|B(s)\|^2 \\
&= \cos^2 \theta(s) + \sin^2 \theta(s) \\
&= 1
\end{aligned} \tag{4.67}$$

olarak bulunur. ■

Örnek 4.11. \mathbb{E}^3 Öklid uzayında $a = 1$, $k = 2$ ve $\theta(s) = \frac{\pi}{3}$ değerleri için verilen

$$\phi_2(s, v) = \left(\begin{array}{c} \cos(2s) \cos(s) - \frac{v(\cos(2s) \cos(s) - 2 \sin(2s) \sin(s))}{2\sqrt{3 \sin^2(2s) + 1}}, \\ \cos(2s) \sin(s) - \frac{v(\cos(2s) \sin(s) + 2 \sin(2s) \cos(s))}{2\sqrt{3 \sin^2(2s) + 1}}, v \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \right)$$

normal gül regle yüzeyinin 1. temel form katsayılarını bulunuz.

Çözüm. \mathbb{E}^3 Öklid uzayında $a = 1$, $k = 2$ ve $\theta(s) = \frac{\pi}{3}$ değerleri için verilen $\phi_2(s, v)$ normal gül regle yüzeyinin 1. temel form katsayıları sırasıyla (4.65), (4.66) ve (4.67) eşitlikleri yardımıyla

$$\left\{ \begin{array}{l} E = \left(\sqrt{3 \sin^2(2s) + 1} - \frac{3v \sin^2(2s) + 5v}{6 \sin^2(2s) + 2} \right)^2, \\ F = 0, \\ G = 1 \end{array} \right.$$

olarak bulunur.

Teorem 4.11. \mathbb{E}^3 Öklid uzayında normal gül regle yüzeyinin 2. temel form katsayıları

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{e} = \frac{(-v\theta''(s)\|\alpha_s\| + v\theta'(s)\|\alpha_s\|' - v\|\alpha_s\|^3 \kappa^2 \cos \theta(s) \sin \theta(s) + \|\alpha_s\|^3 \kappa \sin \theta(s))(-1 + v\kappa \cos \theta(s))}{\sqrt{(\|\alpha_s\| - v\|\alpha_s\| \kappa \cos \theta(s))^2 + v^2(\theta'(s))^2}} \\ \quad + \frac{v^2 \theta'(s) \|\alpha_s\| \kappa' \cos \theta(s) - 2v^2(\theta'(s))^2 \|\alpha_s\| \kappa \sin \theta(s)}{\sqrt{(\|\alpha_s\| - v\|\alpha_s\| \kappa \cos \theta(s))^2 + v^2(\theta'(s))^2}}, \\ \mathbf{f} = \frac{\theta'(s) \|\alpha_s\|}{\sqrt{(\|\alpha_s\| - v\|\alpha_s\| \kappa \cos \theta(s))^2 + v^2(\theta'(s))^2}}, \\ \mathbf{g} = 0 \end{array} \right. \tag{4.68}$$

şeklindedir.

İspat. \mathbb{E}^3 Öklid uzayında normal gül regle yüzeyinin 2. temel form katsayıları

$$\begin{aligned}\mathbf{e} &= \frac{\det(\phi_s, \phi_v, \phi_{ss})}{W} = \frac{\det(\phi_s, \phi_v, \phi_{ss})}{\sqrt{EG - F^2}}, \\ \mathbf{f} &= \frac{\det(\phi_s, \phi_v, \phi_{sv})}{W} = \frac{\det(\phi_s, \phi_v, \phi_{sv})}{\sqrt{EG - F^2}}, \\ \mathbf{g} &= \frac{\det(\phi_s, \phi_v, \phi_{vv})}{W} = \frac{\det(\phi_s, \phi_v, \phi_{vv})}{\sqrt{EG - F^2}}\end{aligned}$$

şeklindedir. Burada 2. temel form katsayılarını elde etmek için $\det(\phi_s, \phi_v, \phi_{ss})$, $\det(\phi_s, \phi_v, \phi_{sv})$, $\det(\phi_s, \phi_v, \phi_{vv})$ ve $\sqrt{EG - F^2}$ ifadeleri hesaplanmalıdır. O halde ϕ_{ss} , ϕ_{sv} , ϕ_{vv} değerleri bulunmalıdır. Burada $\phi(s, v) = \alpha(s) + ve(s)$ olduğundan $\phi_s = \alpha_s + ve_s$, $\phi_v = e$, $\phi_{ss} = \alpha_{ss} + ve_{ss}$, $\phi_{sv} = e_s$ ve $\phi_{vv} = (0, 0, 0)$ olarak elde edilir. O halde ilk olarak ϕ_{ss} değerini hesaplayalım. Burada

$$\begin{cases} T'(s) = \|\alpha_s\| \kappa N(s), \\ N'(s) = -\|\alpha_s\| \kappa T(s) + \|\alpha_s\| \tau B(s), \\ B'(s) = -\|\alpha_s\| \tau N(s), \end{cases}$$

eşitlikleri ve gül eğrileri için $\tau = 0$ olduğu göz önüne alınarak

$$\begin{aligned}\alpha_{ss} &= \frac{d\alpha_s}{ds} \\ &= \frac{d(\|\alpha_s\|T(s))}{ds} \\ &= \|\alpha_s\|'T(s) + \|\alpha_s\|T'(s) \\ &= \|\alpha_s\|'T(s) + \|\alpha_s\|(\|\alpha_s\|\kappa N(s)) \\ &= \|\alpha_s\|'T(s) + \|\alpha_s\|^2\kappa N(s)\end{aligned}\tag{4.69}$$

ve

$$\begin{aligned}
e_{ss} &= \frac{de_s}{ds} \\
&= \frac{d(-\|\alpha_s\|\kappa \cos \theta(s)T(s) - \theta'(s) \sin \theta(s)N(s) + \theta'(s) \cos \theta(s)B(s))}{ds} \\
&= -\|\alpha_s\|'\kappa \cos \theta(s)T(s) - \|\alpha_s\|\kappa' \cos \theta(s)T(s) + \theta'(s)\|\alpha_s\|\kappa \sin \theta(s)T(s) \\
&\quad - \|\alpha_s\|\kappa \cos \theta(s)T'(s) - \theta''(s) \sin \theta(s)N(s) - (\theta'(s))^2 \cos \theta(s)N(s) \\
&\quad - \theta'(s) \sin \theta(s)N'(s) + \theta''(s) \cos \theta(s)B(s) - (\theta'(s))^2 \sin \theta(s)B(s) \\
&\quad + \theta'(s) \cos \theta(s)B'(s) \\
&= -\|\alpha_s\|'\kappa \cos \theta(s)T(s) - \|\alpha_s\|\kappa' \cos \theta(s)T(s) + \theta'(s)\|\alpha_s\|\kappa \sin \theta(s)T(s) \\
&\quad - \|\alpha_s\|\kappa \cos \theta(s)(\|\alpha_s\|\kappa N(s)) - \theta''(s) \sin \theta(s)N(s) - (\theta'(s))^2 \cos \theta(s)N(s) \\
&\quad - \theta'(s) \sin \theta(s)(-\|\alpha_s\|\kappa T(s) + \|\alpha_s\|\tau B(s)) + \theta''(s) \cos \theta(s)B(s) \\
&\quad - (\theta'(s))^2 \sin \theta(s)B(s) + \theta'(s) \cos \theta(s)(-\|\alpha_s\|\tau N(s)) \\
&= (-\|\alpha_s\|'\kappa \cos \theta(s) - \|\alpha_s\|\kappa' \cos \theta(s) + 2\theta'(s)\|\alpha_s\|\kappa \sin \theta(s))T(s) \\
&\quad + (-\|\alpha_s\|^2\kappa^2 \cos \theta(s) - \theta''(s) \sin \theta(s) - (\theta'(s))^2 \cos \theta(s))N(s) \\
&\quad + (\theta''(s) \cos \theta(s) - (\theta'(s))^2 \sin \theta(s))B(s)
\end{aligned} \tag{4.70}$$

olarak hesaplandığından

$$\begin{aligned}
\phi_{ss} &= \alpha_{ss} + ve_{ss} \\
&= (\|\alpha_s\|' - v\|\alpha_s\|'\kappa \cos \theta(s) - v\|\alpha_s\|\kappa' \cos \theta(s) + 2v\theta'(s)\|\alpha_s\|\kappa \sin \theta(s))T(s) \\
&\quad + (\|\alpha_s\|^2\kappa - v\|\alpha_s\|^2\kappa^2 \cos \theta(s) - v\theta''(s) \sin \theta(s) - v(\theta'(s))^2 \cos \theta(s))N(s) \\
&\quad + (v\theta''(s) \cos \theta(s) - v(\theta'(s))^2 \sin \theta(s))B(s)
\end{aligned} \tag{4.71}$$

şeklinde bulunur. Buradan $\det(\phi_s, \phi_v, \phi_{ss})$, $\det(\phi_s, \phi_v, \phi_{sv})$ ve $\det(\phi_s, \phi_v, \phi_{vv})$ değerleri

$$\begin{aligned}
\det(\phi_s, \phi_v, \phi_{ss}) &= \langle \phi_s \times \phi_v, \phi_{ss} \rangle \\
&= \langle -v\theta'(s)T(s) + (v\|\alpha_s\|\kappa \cos \theta(s) \sin \theta(s) - \|\alpha_s\| \sin \theta(s))N(s) + (\|\alpha_s\| \cos \theta(s) - v\|\alpha_s\|\kappa \cos^2 \theta(s))B(s), \\
&\quad (\|\alpha_s\|' - v\|\alpha_s\|\kappa \cos \theta(s) - v\|\alpha_s\|\kappa' \cos \theta(s) + 2v\theta'(s)\|\alpha_s\|\kappa \sin \theta(s))T(s) \\
&\quad + (\|\alpha_s\|^2 \kappa - v\|\alpha_s\|^2 \kappa^2 \cos \theta(s) - v\theta''(s) \sin \theta(s) - v(\theta'(s))^2 \cos \theta(s))N(s) + (v\theta''(s) \cos \theta(s) - v(\theta'(s))^2 \sin \theta(s))B(s) \rangle \\
&= -v\theta'(s)\|\alpha_s\|' + v^2\theta'(s)\|\alpha_s\|\kappa \cos \theta(s) + v^2\theta'(s)\|\alpha_s\|\kappa' \cos \theta(s) - 2v^2(\theta'(s))^2\|\alpha_s\|\kappa \sin \theta(s) + v\|\alpha_s\|^3 \kappa^2 \cos \theta(s) \sin \theta(s) \\
&\quad - v^2\|\alpha_s\|^3 \kappa^3 \cos^2 \theta(s) \sin \theta(s) - v^2\theta''(s)\|\alpha_s\|\kappa \cos \theta(s) \sin^2 \theta(s) - v^2(\theta'(s))^2\|\alpha_s\|\kappa \cos^2 \theta(s) \sin \theta(s) - \|\alpha_s\|^3 \kappa \sin \theta(s) \\
&\quad + v\|\alpha_s\|^3 \kappa^2 \cos \theta(s) \sin \theta(s) + v\theta''(s)\|\alpha_s\| \sin^2 \theta(s) + v(\theta'(s))^2\|\alpha_s\| \cos \theta(s) \sin \theta(s) + v\theta''(s)\|\alpha_s\| \cos^2 \theta(s) \\
&\quad - v(\theta'(s))^2\|\alpha_s\| \cos \theta(s) \sin \theta(s) - v^2\theta''(s)\|\alpha_s\|\kappa \cos^2 \theta(s) \cos \theta(s) + v^2(\theta'(s))^2\|\alpha_s\|\kappa \cos^2 \theta(s) \sin \theta(s) \\
&= -v\theta''(s)\|\alpha_s\|(-1 + v\kappa \cos \theta(s)) + v\theta'(s)\|\alpha_s\|'(-1 + v\kappa \cos \theta(s)) - v\|\alpha_s\|^3 \kappa^2 \cos \theta(s) \sin \theta(s)(-1 + v\kappa \cos \theta(s)) \\
&\quad + \|\alpha_s\|^3 \kappa \sin \theta(s)(-1 + v\kappa \cos \theta(s)) + v^2\theta'(s)\|\alpha_s\|\kappa' \cos \theta(s) - 2v^2(\theta'(s))^2\|\alpha_s\|\kappa \sin \theta(s) \\
&= (-v\theta''(s)\|\alpha_s\| + v\theta'(s)\|\alpha_s\|' - v\|\alpha_s\|^3 \kappa^2 \cos \theta(s) \sin \theta(s) + \|\alpha_s\|^3 \kappa \sin \theta(s))(-1 + v\kappa \cos \theta(s)) \\
&\quad + v^2\theta'(s)\|\alpha_s\|\kappa' \cos \theta(s) - 2v^2(\theta'(s))^2\|\alpha_s\|\kappa \sin \theta(s)
\end{aligned} \tag{4.72}$$

$$\begin{aligned}
\det(\phi_s, \phi_v, \phi_{sv}) &= \langle \phi_s \times \phi_v, \phi_{sv} \rangle \\
&= \langle -v\theta'(s)T(s) + (v\|\alpha_s\|\kappa \cos \theta(s) \sin \theta(s) - \|\alpha_s\| \sin \theta(s))N(s) \\
&\quad + (\|\alpha_s\| \cos \theta(s) - v\|\alpha_s\|\kappa \cos^2 \theta(s))B(s), -\|\alpha_s\|\kappa \cos \theta(s)T(s) \\
&\quad - \theta'(s) \sin \theta(s)N(s) + \theta'(s) \cos \theta(s)B(s) \rangle \\
&= v\theta'(s)\|\alpha_s\|\kappa \cos \theta(s) - v\theta'(s)\|\alpha_s\|\kappa \cos \theta(s) \sin^2 \theta(s) \\
&\quad + \theta'(s)\|\alpha_s\| \sin^2 \theta(s) + \theta'(s)\|\alpha_s\| \cos^2 \theta(s) \\
&\quad - v\theta'(s)\|\alpha_s\|\kappa \cos^2 \theta(s) \cos \theta(s) \\
&= v\theta'(s)\|\alpha_s\|\kappa \cos \theta(s) - v\theta'(s)\|\alpha_s\|\kappa \cos \theta(s) + \theta'(s)\|\alpha_s\| \\
&= \theta'(s)\|\alpha_s\|
\end{aligned} \tag{4.73}$$

ve

$$\det(\phi_s, \phi_v, \phi_{vv}) = 0 \tag{4.74}$$

olarak bulunur. Normal gül regle yüzeyinin 1. temel form katsayıları yardımıyla

$$W = \sqrt{EG - F^2}$$

olmak üzere

$$W = \sqrt{(\|\alpha_s\| - v\|\alpha_s\|\kappa \cos \theta(s))^2 + v^2(\theta'(s))^2} \tag{4.75}$$

şeklindedir. O halde normal gül regle yüzeyinin 2. temel form katsayıları (4.68) denklemiyle bulunur. ■

Teorem 4.12. \mathbb{E}^3 Öklid uzayında normal gül regle yüzeyinin Gauss eğriliği

$$K = - \frac{a^2((k^2 - 1) \sin^2(ks) + 1)(\theta'(s))^2}{\left(\left(a\sqrt{(k^2 - 1) \sin^2(ks) + 1} - \frac{v \cos \theta(s)((k^2 - 1) \sin^2(ks) + k^2 + 1)}{((k^2 - 1) \sin^2(ks) + 1)} \right)^2 + v^2 (\theta'(s))^2 \right)^2} \tag{4.76}$$

şeklindedir.

İspat. \mathbb{E}^3 Öklid uzayında normal gül regle yüzeyinin Gauss eğriliği

$$K = - \frac{(\det(\alpha_s, e, e_s))^2}{\|\phi_s \times \phi_v\|^4}$$

eşitliği yardımıyla hesaplanır. Burada (4.57) ve (4.58) eşitlikleri yardımıyla

$$\begin{aligned}
\det(\alpha_s, e, e_s) &= \langle \alpha_s \times e, e_s \rangle \\
&= \langle -\|\alpha_s\| \sin \theta(s) N(s) + \|\alpha_s\| \cos \theta(s) B(s), \\
&\quad -\|\alpha_s\| \kappa \cos \theta(s) T(s) - \theta'(s) \sin \theta(s) N(s) + \theta'(s) \cos \theta(s) B(s) \rangle \\
&= \theta'(s) \|\alpha_s\| \sin^2 \theta(s) \|N(s)\|^2 + \theta'(s) \|\alpha_s\| \cos^2 \theta(s) \|B(s)\|^2 \\
&= \theta'(s) \|\alpha_s\| \sin^2 \theta(s) + \theta'(s) \|\alpha_s\| \cos^2 \theta(s) \\
&= \theta'(s) \|\alpha_s\|
\end{aligned} \tag{4.77}$$

elde edilir. O halde

$$(\det(\alpha_s, e, e_s))^2 = (\theta'(s))^2 \|\alpha_s\|^2 \tag{4.78}$$

olarak bulunur. Aynı zamanda (4.62) eşitliği yardımıyla

$$\|\phi_s \times \phi_v\|^4 = ((\|\alpha_s\| - v\|\alpha_s\| \kappa \cos \theta(s))^2 + v^2(\theta'(s))^2)^2 \tag{4.79}$$

olarak hesaplanır. Burada (4.78) ve (4.79) eşitlikleri yardımıyla normal gül regle yüzeyinin Gauss eğriliği

$$K = -\frac{(\theta'(s))^2 \|\alpha_s\|^2}{((\|\alpha_s\| - v\|\alpha_s\| \kappa \cos \theta(s))^2 + v^2(\theta'(s))^2)^2} \tag{4.80}$$

olur. Bu eşitlikte κ ve $\|\alpha_s\|$ değerleri yerine yazılırsa (4.76) eşitliği elde edilir. ■

Örnek 4.12. \mathbb{E}^3 Öklid uzayında $a = 1$, $k = 2$ ve $\theta(s) = \frac{\pi}{3}$ değerleri için verilen

$$\begin{aligned}
\phi_2(s, v) &= \left(\cos(2s) \cos(s) - \frac{v(\cos(2s) \cos(s) - 2 \sin(2s) \sin(s))}{2\sqrt{3} \sin^2(2s) + 1}, \right. \\
&\quad \left. \cos(2s) \sin(s) - \frac{v(\cos(2s) \sin(s) + 2 \sin(2s) \cos(s))}{2\sqrt{3} \sin^2(2s) + 1}, v \frac{\sqrt{3}}{2} \right)
\end{aligned}$$

normal gül regle yüzeyinin $P \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$ noktasındaki Gauss eğriliğini bulunuz.

Çözüm. \mathbb{E}^3 Öklid uzayında verilen $\phi_2(s, v)$ normal gül regle yüzeyi için $s = \frac{\pi}{2}$ ve $v = 1$ değerleri $P \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$ noktasına karşılık gelmektedir. Bu noktada $\alpha(s)$ gül eğrisi için $\|\alpha_s \left(\frac{\pi}{2} \right)\| = 1$ ve $\kappa \left(\frac{\pi}{2} \right) = 5$ olduğu bilinmektedir. Aynı zamanda $\cos \left(\frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2}$ ve $\theta'(s) = 0$ olduğu göz önüne alındığında bu ifadeler (4.80) denkleminde yerine yazılırsa $\phi_2(s, v)$ normal gül regle yüzeyinin $P \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$ noktasındaki Gauss eğriliği $K = 0$ elde edilir.

4.2.3 Normal Gül Regle Yüzeyinin Global Özellikleri

4.2.3.1 Normal Gül Regle Yüzeyinin Striksiyon Eğrisi

Teorem 4.13. \mathbb{E}^3 Öklid uzayında verilen $\phi(s, v)$ normal gül regle yüzeyinin striksiyon eğrisi

$$\begin{aligned}
 c(s) = & \left(a \cos(ks) \cos(s) - \frac{\frac{a \cos^2 \theta(s)((k^2-1) \sin^2(ks) + k^2 + 1)}{(k^2-1) \sin^2(ks) + 1}}{(\theta'(s))^2 + \frac{\cos^2 \theta(s)((k^2-1) \sin^2(ks) + k^2 + 1)^2}{((k^2-1) \sin^2(ks) + 1)^2}} \right. \\
 & (\cos(ks) \cos(s) - k \sin(ks) \sin(s)), \\
 & a \cos(ks) \sin(s) - \frac{\frac{a \cos^2 \theta(s)((k^2-1) \sin^2(ks) + k^2 + 1)}{(k^2-1) \sin^2(ks) + 1}}{(\theta'(s))^2 + \frac{\cos^2 \theta(s)((k^2-1) \sin^2(ks) + k^2 + 1)^2}{((k^2-1) \sin^2(ks) + 1)^2}} \\
 & (\cos(ks) \sin(s) + k \sin(ks) \cos(s)), \\
 & \left. \frac{\frac{a \cos \theta(s) \sin \theta(s)((k^2-1) \sin^2(ks) + k^2 + 1)}{\sqrt{(k^2-1) \sin^2(ks) + 1}}}{(\theta'(s))^2 + \frac{\cos^2 \theta(s)((k^2-1) \sin^2(ks) + k^2 + 1)^2}{((k^2-1) \sin^2(ks) + 1)^2}} \right) \quad (4.81)
 \end{aligned}$$

şeklindedir.

İspat. $\phi(s, v) = \alpha(s) + ve(s)$ regle yüzeyinin striksiyon eğrisinin

$$c(s) = \alpha(s) - \frac{\langle \alpha_s, e_s \rangle}{\langle e_s, e_s \rangle} e(s)$$

olduğu bilinmektedir. Burada (4.56) ve (4.57) eşitlikleri yardımıyla

$$\begin{aligned}
 \langle \alpha_s, e_s \rangle &= \langle \|\alpha_s\| T(s), -\|\alpha_s\| \kappa \cos \theta(s) T(s) - \theta'(s) \sin \theta(s) N(s) \\
 & \quad + \theta'(s) \cos \theta(s) B(s) \rangle \\
 &= -\|\alpha_s\|^2 \kappa \cos \theta(s) \langle T(s), T(s) \rangle \\
 & \quad - \theta'(s) \|\alpha_s\| \sin \theta(s) \langle T(s), N(s) \rangle \\
 & \quad + \theta'(s) \|\alpha_s\| \cos \theta(s) \langle T(s), B(s) \rangle \\
 &= -\|\alpha_s\|^2 \kappa \cos \theta(s) \|T(s)\|^2 \\
 &= -\|\alpha_s\|^2 \kappa \cos \theta(s)
 \end{aligned} \quad (4.82)$$

elde edilir. O halde $\|\alpha_s\|$ ve κ değerlerini yerine yazdığımızda

$$\langle \alpha_s, e_s \rangle = -\frac{a \cos \theta(s)((k^2-1) \sin^2(ks) + k^2 + 1)}{\sqrt{(k^2-1) \sin^2(ks) + 1}} \quad (4.83)$$

bulunur. Aynı zamanda (4.57) eşitliği yardımıyla

$$\begin{aligned}
\langle e_s, e_s \rangle &= \langle -\|\alpha_s\|\kappa \cos \theta(s)T(s) - \theta'(s) \sin \theta(s)N(s) + \theta'(s) \cos \theta(s)B(s), \\
&\quad -\|\alpha_s\|\kappa \cos \theta(s)T(s) - \theta'(s) \sin \theta(s)N(s) + \theta'(s) \cos \theta(s)B(s) \rangle \\
&= \|\alpha_s\|^2 \kappa^2 \cos^2 \theta(s) \langle T(s), T(s) \rangle \\
&\quad + (\theta'(s))^2 \sin^2 \theta(s) \langle N(s), N(s) \rangle \\
&\quad + (\theta'(s))^2 \cos^2 \theta(s) \langle B(s), B(s) \rangle \\
&= \|\alpha_s\|^2 \kappa^2 \cos^2 \theta(s) \|T(s)\|^2 \\
&\quad + (\theta'(s))^2 \sin^2 \theta(s) \|N(s)\|^2 \\
&\quad + (\theta'(s))^2 \cos^2 \theta(s) \|B(s)\|^2 \\
&= \|\alpha_s\|^2 \kappa^2 \cos^2 \theta(s) + (\theta'(s))^2 \sin^2 \theta(s) + (\theta'(s))^2 \cos^2 \theta(s) \\
&= \|\alpha_s\|^2 \kappa^2 \cos^2 \theta(s) + (\theta'(s))^2
\end{aligned} \tag{4.84}$$

elde edilir. Burada $\|\alpha_s\|$ ve κ değerlerini yerine yazdığımızda

$$\langle e_s, e_s \rangle = (\theta'(s))^2 + \frac{\cos^2 \theta(s) ((k^2 - 1) \sin^2(ks) + k^2 + 1)^2}{((k^2 - 1) \sin^2(ks) + 1)^2} \tag{4.85}$$

bulunur. Burada (2.3), (4.53) (4.83) ve (4.85) eşitlikleri yardımıyla normal gül regle yüzeyinin striksiyon eğrisi (4.81) olarak bulunur. ■

Örnek 4.13. \mathbb{E}^3 Öklid uzayında $a = 1$, $k = 2$ ve $\theta(s) = \frac{\pi}{3}$ değerleri için verilen

$$\begin{aligned}
\phi_2(s, v) &= \left(\cos(2s) \cos(s) - \frac{v(\cos(2s) \cos(s) - 2 \sin(2s) \sin(s))}{2\sqrt{3} \sin^2(2s) + 1}, \right. \\
&\quad \left. \cos(2s) \sin(s) - \frac{v(\cos(2s) \sin(s) + 2 \sin(2s) \cos(s))}{2\sqrt{3} \sin^2(2s) + 1}, v \frac{\sqrt{3}}{2} \right)
\end{aligned}$$

normal gül regle yüzeyinin striksiyon eğrisini bulunuz.

Çözüm. \mathbb{E}^3 Öklid uzayında verilen $\phi_2(s, v)$ normal gül regle yüzeyinin dayanak eğrisi

$$\alpha(s) = (\cos(2s) \cos(s), \cos(2s) \sin(s), 0)$$

ve doğrultman vektörü

$$e(s) = \left(-\frac{(\cos(2s)\cos(s) - 2\sin(2s)\sin(s))}{2\sqrt{3}\sin^2(2s) + 1}, \right. \\ \left. -\frac{(\cos(2s)\sin(s) + 2\sin(2s)\cos(s))}{2\sqrt{3}\sin^2(2s) + 1}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

şeklindedir. Burada (4.83) ve (4.85) eşitlikleri yardımıyla $a = 1$, $k = 2$ ve $\theta(s) = \frac{\pi}{3}$ için

$$\langle \alpha_s, e_s \rangle = -\frac{3\sin^2(2s) + 5}{2\sqrt{3}\sin^2(2s) + 1}$$

ve

$$\langle e_s, e_s \rangle = \frac{(3\sin^2(2s) + 5)^2}{4(3\sin^2(2s) + 1)^2}$$

bulunur. O halde $\phi_2(s, v)$ normal gül regle yüzeyinin striksiyon eğrisi

$$c(s) = \left(\cos(2s)\cos(s) - \frac{(3\sin^2(2s) + 1)(\cos(2s)\cos(s) - 2\sin(2s)\sin(s))}{3\sin^2(2s) + 5}, \right. \\ \cos(2s)\sin(s) - \frac{(3\sin^2(2s) + 1)(\cos(2s)\sin(s) + 2\sin(2s)\cos(s))}{3\sin^2(2s) + 5}, \\ \left. \frac{\sqrt{3}(3\sin^2(2s) + 1)^{3/2}}{3\sin^2(2s) + 5} \right)$$

olarak bulunur.

4.2.3.2 Normal Gül Regle Yüzeyinin Açılabilirliği

Teorem 4.14. \mathbb{E}^3 Öklid uzayında $\phi(s, v)$ normal gül regle yüzeyininin drali

$$P_e = \frac{a\theta'(s)\sqrt{(k^2 - 1)\sin^2(ks) + 1}}{(\theta'(s))^2 + \frac{\cos^2\theta(s)((k^2-1)\sin^2(ks)+k^2+1)^2}{((k^2-1)\sin^2(ks)+1)^2}} \quad (4.86)$$

şeklindedir.

İspat. \mathbb{E}^3 Öklid uzayında regle yüzeyin drali

$$P_e = \frac{\det(\alpha_s, e, e_s)}{\|e_s\|^2}$$

olmak üzere burada (4.77) eşitliğinden

$$\det(\alpha_s, e, e_s) = \theta'(s)\|\alpha_s\|$$

ve (4.84) eşitliğinden

$$\|e_s\|^2 = \|\alpha_s\|^2 \kappa^2 \cos^2 \theta(s) + (\theta'(s))^2$$

olduğu görünmektedir. O halde normal gül regle yüzeyinin drali

$$P_e = \frac{\theta'(s) \|\alpha_s\|}{\|\alpha_s\|^2 \kappa^2 \cos^2 \theta(s) + (\theta'(s))^2} \quad (4.87)$$

şeklindedir. Bu ifadede κ ve $\|\alpha_s\|$ değerleri yerine yazıldığında (4.86) eşitliği elde edilir. ■

Sonuç 4.3. \mathbb{E}^3 uzayında verilen $\phi(s, v)$ normal gül regle yüzeyi $\theta'(s) = 0$ ve $\cos \theta(s) \neq 0$ koşulunu sağlayan $\theta(s)$ değerleri için açılabilir.

Örnek 4.14. \mathbb{E}^3 Öklid uzayında $a = 1$, $k = 2$ ve $\theta(s) = \frac{\pi}{3}$ değerleri için verilen

$$\phi_2(s, v) = \left(\cos(2s) \cos(s) - \frac{v(\cos(2s) \cos(s) - 2 \sin(2s) \sin(s))}{2\sqrt{3 \sin^2(2s) + 1}}, \right. \\ \left. \cos(2s) \sin(s) - \frac{v(\cos(2s) \sin(s) + 2 \sin(2s) \cos(s))}{2\sqrt{3 \sin^2(2s) + 1}}, v \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

normal gül regle yüzeyinin dralini bulunuz.

Çözüm. \mathbb{E}^3 Öklid uzayında $\alpha(s)$ gül eğrisinin hızı

$$\|\alpha_s\| = \sqrt{3 \sin^2(2s) + 1},$$

eğriliği

$$\kappa(s) = \frac{3 \sin^2(2s) + 5}{(3 \sin^2(2s) + 1)^{3/2}},$$

ve $\theta'(s) = 0$ şeklindedir. Burada (4.87) eşitliği yardımıyla $\phi_2(s, v)$ normal gül regle yüzeyinin drali

$$P_e = 0$$

olarak bulunur.

4.2.4 Normal Gül Regle Yüzeyinin Geodezik Çatısı ve Geodezik Frenet Formülleri

Teorem 4.15. \mathbb{E}^3 Öklid uzayında verilen $\phi(s, v)$ normal gül regle yüzeyinin bir $l = \phi(s_0, v)$ doğrultmanına ait asimptotik normal doğrultu,

$$g(s) = \frac{1}{\sqrt{(\theta'(s))^2 + \frac{\cos^2 \theta(s)((k^2-1)\sin^2(ks) + k^2 + 1)^2}{((k^2-1)\sin^2(ks) + 1)^2}} \left(-\frac{(\cos(ks)\sin(s) + k\sin(ks)\cos(s))\theta'(s)}{\sqrt{(k^2-1)\sin^2(ks) + 1}} + \frac{\cos \theta(s)\sin \theta(s)(\cos(ks)\cos(s) - k\sin(ks)\sin(s))((k^2-1)\sin^2(ks) + k^2 + 1)}{((k^2-1)\sin^2(ks) + 1)^{3/2}}, \right. \\ \left. \frac{\cos \theta(s)\sin \theta(s)(\cos(ks)\sin(s) + k\sin(ks)\cos(s))((k^2-1)\sin^2(ks) + k^2 + 1)}{((k^2-1)\sin^2(ks) + 1)^{3/2}} + \frac{(\cos(ks)\cos(s) - k\sin(ks)\sin(s))\theta'(s)}{\sqrt{(k^2-1)\sin^2(ks) + 1}}, \frac{\cos^2 \theta(s)((k^2-1)\sin^2(ks) + k^2 + 1)}{(k^2-1)\sin^2(ks) + 1} \right) \quad (4.88)$$

şeklindedir.

İspat. \mathbb{E}^3 uzayında verilen $\phi(s, v)$ normal gül regle yüzeyinin bir $l = \phi(s_0, v)$ doğrultmanına ait asimptotik normal doğrultu,

$$g(s)|_{s=s_0} = \frac{e \times e_s}{\|e_s\|}|_{s=s_0}$$

olmak üzere (4.59) eşitliğinden

$$e \times e_s = -e_s \times e \\ = -(-\theta'(s)T(s) + \|\alpha_s\|\kappa \cos \theta(s) \sin \theta(s)N(s) - \|\alpha_s\|\kappa \cos^2 \theta(s)B(s)) \\ = \theta'(s)T(s) - \|\alpha_s\|\kappa \cos \theta(s) \sin \theta(s)N(s) + \|\alpha_s\|\kappa \cos^2 \theta(s)B(s) \quad (4.89)$$

ve (4.84) eşitliğinden

$$\|e_s\| = \sqrt{(\theta'(s))^2 + \|\alpha_s\|^2 \kappa^2 \cos^2 \theta(s)} \quad (4.90)$$

elde edilir. Böylece

$$g(s) = \frac{\theta'(s)T(s) - \|\alpha_s\|\kappa \cos \theta(s) \sin \theta(s)N(s) + \|\alpha_s\|\kappa \cos^2 \theta(s)B(s)}{\sqrt{(\theta'(s))^2 + \|\alpha_s\|^2 \kappa^2 \cos^2 \theta(s)}} \quad (4.91)$$

şeklinde bulunur. Bu ifadede $\|\alpha_s\|$, κ , $T(s)$, $N(s)$, $B(s)$ değerleri yerine yazılırsa (4.88) eşitliği elde edilir. ■

Örnek 4.15. \mathbb{E}^3 Öklid uzayında $a = 1$, $k = 2$ ve $\theta(s) = \frac{\pi}{3}$ değerleri için verilen

$$\phi_2(s, v) = \left(\cos(2s) \cos(s) - \frac{v(\cos(2s) \cos(s) - 2 \sin(2s) \sin(s))}{2\sqrt{3 \sin^2(2s) + 1}}, \right. \\ \left. \cos(2s) \sin(s) - \frac{v(\cos(2s) \sin(s) + 2 \sin(2s) \cos(s))}{2\sqrt{3 \sin^2(2s) + 1}}, v \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

normal gül regle yüzeyinin bir $l = \phi\left(\frac{\pi}{2}, v\right)$ doğrultmanına ait asimptotik normal doğrultusunu hesaplayınız.

Çözüm. \mathbb{E}^3 Öklid uzayında verilen $\alpha(s)$ gül eğrisinin $s = \frac{\pi}{2}$ için

$$\begin{cases} T\left(\frac{\pi}{2}\right) = (1, 0, 0), \\ N\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0, 1, 0), \\ B\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0, 0, 1), \\ \|\alpha_s\left(\frac{\pi}{2}\right)\| = 1, \\ \kappa\left(\frac{\pi}{2}\right) = 5 \end{cases}$$

değerlerini aldığımızı biliyoruz. Böylece (4.91) eşitliği yardımıyla \mathbb{E}^3 Öklid uzayında verilen $\phi_2(s, v)$ normal gül regle yüzeyinin bir $l = \phi\left(\frac{\pi}{2}, v\right)$ doğrultmanına ait asimptotik normal doğrultusu

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(0, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

olarak elde edilir.

Teorem 4.16. \mathbb{E}^3 Öklid uzayında verilen $\phi(s, v)$ normal gül regle yüzeyinin bir $\phi(s, v_0)$ striksiyon noktasındaki merkez normali

$$t(s) = \frac{1}{\sqrt{(\theta'(s))^2 + \frac{\cos^2 \theta(s)((k^2-1) \sin^2(ks) + k^2 + 1)^2}{((k^2-1) \sin^2(ks) + 1)^2}}} \\ \left(\frac{\sin \theta(s)(\cos(ks) \cos(s) - k \sin(ks) \sin(s))\theta'(s)}{\sqrt{(k^2-1) \sin^2(ks) + 1}} \right. \\ + \frac{\cos \theta(s)(\cos(ks) \sin(s) + k \sin(ks) \cos(s))((k^2-1) \sin^2(ks) + k^2 + 1)}{((k^2-1) \sin^2(ks) + 1)^{3/2}}, \\ - \frac{\cos \theta(s)(\cos(ks) \cos(s) - k \sin(ks) \sin(s))((k^2-1) \sin^2(ks) + k^2 + 1)}{((k^2-1) \sin^2(ks) + 1)^{3/2}} \\ \left. + \frac{\sin \theta(s)(\cos(ks) \sin(s) + k \sin(ks) \cos(s))\theta'(s)}{\sqrt{(k^2-1) \sin^2(ks) + 1}}, \cos \theta(s)\theta'(s) \right) \quad (4.92)$$

şeklindedir.

İspat. \mathbb{E}^3 Öklid uzayında verilen $\phi(s, v)$ normal gül regle yüzeyinin bir $\phi(s, v_0)$ striksiyon noktasındaki merkez normali t olmak üzere

$$t = \frac{e_s}{\|e_s\|}$$

şeklinde bulunur. Burada (4.57) eşitliğinden

$$e_s = -\|\alpha_s\|\kappa \cos \theta(s)T(s) - \theta'(s) \sin \theta(s)N(s) + \theta'(s) \cos \theta(s)B(s)$$

olduğu ve (4.90) eşitliğinden

$$\|e_s\| = \sqrt{(\theta'(s))^2 + \|\alpha_s\|^2 \kappa^2 \cos^2 \theta(s)}$$

olduğu bilinmektedir. Böylece

$$t(s) = \frac{-\|\alpha_s\|\kappa \cos \theta(s)T(s) - \theta'(s) \sin \theta(s)N(s) + \theta'(s) \cos \theta(s)B(s)}{\sqrt{(\theta'(s))^2 + \|\alpha_s\|^2 \kappa^2 \cos^2 \theta(s)}} \quad (4.93)$$

olarak elde edilir. Bu ifadede $\|\alpha_s\|$, κ , $T(s)$, $N(s)$, $B(s)$ değerleri yerine yazılırsa (4.92) eşitliği elde edilir. ■

Örnek 4.16. \mathbb{E}^3 Öklid uzayında $a = 1$, $k = 2$ ve $\theta(s) = \frac{\pi}{3}$ değerleri için verilen

$$\phi_2(s, v) = \left(\cos(2s) \cos(s) - \frac{v(\cos(2s) \cos(s) - 2 \sin(2s) \sin(s))}{2\sqrt{3 \sin^2(2s) + 1}}, \right. \\ \left. \cos(2s) \sin(s) - \frac{v(\cos(2s) \sin(s) + 2 \sin(2s) \cos(s))}{2\sqrt{3 \sin^2(2s) + 1}}, v \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

normal gül regle yüzeyinin bir $\phi(s, 1)$ striksiyon noktasındaki merkez normalini bulunuz.

Çözüm. \mathbb{E}^3 Öklid uzayında verilen $\alpha(s)$ gül eğrisinin birim teğet vektörü

$$T(s) = \left(-\frac{\cos(2s) \sin(s) + 2 \sin(2s) \cos(s)}{\sqrt{3 \sin^2(2s) + 1}}, \frac{\cos(2s) \cos(s) - 2 \sin(2s) \sin(s)}{\sqrt{3 \sin^2(2s) + 1}}, 0 \right),$$

birim asli normal vektörü

$$N(s) = \left(-\frac{\cos(2s) \cos(s) - 2 \sin(2s) \sin(s)}{\sqrt{3 \sin^2(2s) + 1}}, -\frac{\cos(2s) \sin(s) + 2 \sin(2s) \cos(s)}{\sqrt{3 \sin^2(2s) + 1}}, 0 \right),$$

binormal vektörü

$$B(s) = (0, 0, 1),$$

hızı

$$\|\alpha_s(s)\| = \sqrt{3 \sin^2(2s) + 1},$$

ve eğriliği

$$\kappa(s) = \frac{3 \sin^2(2s) + 5}{(3 \sin^2(2s) + 1)^{3/2}}$$

olmak üzere (4.93) eşitliği yardımıyla normal gül regle yüzeyinin bir $\phi(s, 1)$ striksiyon noktasındaki merkez normali için

$$t(s) = \left(\frac{\cos(2s) \sin(s) + 2 \sin(2s) \cos(s)}{\sqrt{3 \sin^2(2s) + 1}}, -\frac{\cos(2s) \cos(s) - 2 \sin(2s) \sin(s)}{\sqrt{3 \sin^2(2s) + 1}}, 0 \right)$$

elde edilir.

Sonuç 4.4. \mathbb{E}^3 Öklid uzayında verilen $\phi(s, v)$ normal gül regle yüzeyinin $\alpha(s)$ dayanak eğrisinin normal ve geodezik eğriliği, sırasıyla,

$$\kappa_n(\alpha) = \frac{-v\theta'(s)\|\alpha_s\|' + v\|\alpha_s\|^3\kappa^2 \cos \theta(s) \sin \theta(s) - \|\alpha_s\|^3\kappa \sin \theta(s)}{\|\alpha_s\|^2 \sqrt{(\|\alpha_s\| - v\|\alpha_s\|\kappa \cos \theta(s))^2 + v^2(\theta'(s))^2}} \quad (4.94)$$

ve

$$\kappa_g(\alpha) = \frac{\|\alpha_s\|\kappa \cos \theta(s) - v\|\alpha_s\|\kappa^2 \cos^2 \theta(s)}{\sqrt{(\|\alpha_s\| - v\|\alpha_s\|\kappa \cos \theta(s))^2 + v^2(\theta'(s))^2}} \quad (4.95)$$

şeklindedir.

İspat. \mathbb{E}^3 Öklid uzayında verilen $\phi(s, v)$ regle yüzeyinin $\alpha(s)$ dayanak eğrisinin normal ve geodezik eğriliği, sırasıyla,

$$\kappa_n(\alpha) = \frac{\langle \alpha_{ss}, \mathcal{N} \rangle}{\|\alpha_s\|^2}$$

$$\kappa_g(\alpha) = \frac{\langle \alpha_s \times \alpha_{ss}, \mathcal{N} \rangle}{\|\alpha_s\|^3}$$

olduğundan (4.60) ve (4.69) eşitlikleri yardımıyla

$$\begin{aligned} \langle \alpha_{ss}, \phi_s \times \phi_v \rangle &= \langle \|\alpha_s\|'T(s) + \|\alpha_s\|^2\kappa N(s), -v\theta'(s)T(s) \\ &\quad + (v\|\alpha_s\|\kappa \cos \theta(s) \sin \theta(s) - \|\alpha_s\| \sin \theta(s))N(s) \\ &\quad + (\|\alpha_s\| \cos \theta(s) - v\|\alpha_s\|\kappa \cos^2 \theta(s))B(s) \rangle \\ &= -v\theta'(s)\|\alpha_s\|' + v\|\alpha_s\|^3\kappa^2 \cos \theta(s) \sin \theta(s) - \|\alpha_s\|^3\kappa \sin \theta(s) \end{aligned} \quad (4.96)$$

olarak hesaplanır. Buradan

$$\langle \alpha_{ss}, \mathcal{N} \rangle = \frac{\langle \alpha_{ss}, \phi_s \times \phi_v \rangle}{\|\phi_s \times \phi_v\|}$$

olmak üzere

$$\langle \alpha_{ss}, \mathcal{N} \rangle = \frac{-v\theta'(s)\|\alpha_s\|' + v\|\alpha_s\|^3\kappa^2 \cos \theta(s) \sin \theta(s) - \|\alpha_s\|^3\kappa \sin \theta(s)}{\sqrt{(\|\alpha_s\| - v\|\alpha_s\|\kappa \cos \theta(s))^2 + v^2(\theta'(s))^2}} \quad (4.97)$$

elde edilir. O halde $\phi(s, v)$ normal gül regle yüzeyinin $\alpha(s)$ dayanak eğrisinin normal eğriliği (4.94) olarak bulunur. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned} \alpha_s \times \alpha_{ss} &= \|\alpha_s\|T(s) \times (\|\alpha_s\|'T(s) + \|\alpha_s\|^2\kappa N(s)) \\ &= \|\alpha_s\|^3\kappa B(s) \end{aligned} \quad (4.98)$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \langle \alpha_s \times \alpha_{ss}, \phi_s \times \phi_v \rangle &= \langle \|\alpha_s\|^3\kappa B(s), -v\theta'(s)T(s) \\ &\quad + (v\|\alpha_s\|\kappa \cos \theta(s) \sin \theta(s) - \|\alpha_s\| \sin \theta(s))N(s) \\ &\quad + (\|\alpha_s\| \cos \theta(s) - v\|\alpha_s\|\kappa \cos^2 \theta(s))B(s) \rangle \\ &= \|\alpha_s\|^4\kappa \cos \theta(s) - v\|\alpha_s\|^4\kappa^2 \cos^2 \theta(s) \end{aligned} \quad (4.99)$$

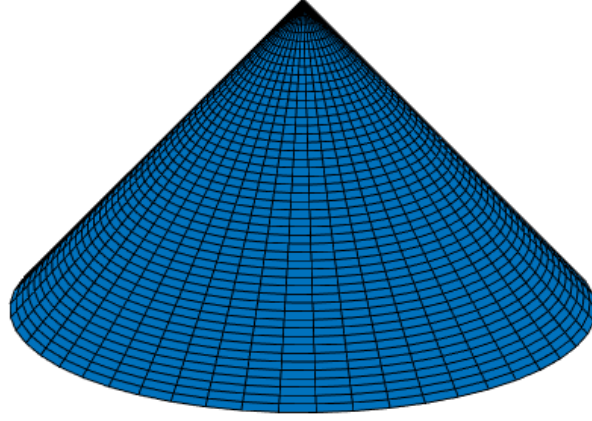
olarak hesaplanır. Buradan

$$\langle \alpha_s \times \alpha_{ss}, \mathcal{N} \rangle = \frac{\|\alpha_s\|^4\kappa \cos \theta(s) - v\|\alpha_s\|^4\kappa^2 \cos^2 \theta(s)}{\sqrt{(\|\alpha_s\| - v\|\alpha_s\|\kappa \cos \theta(s))^2 + v^2(\theta'(s))^2}} \quad (4.100)$$

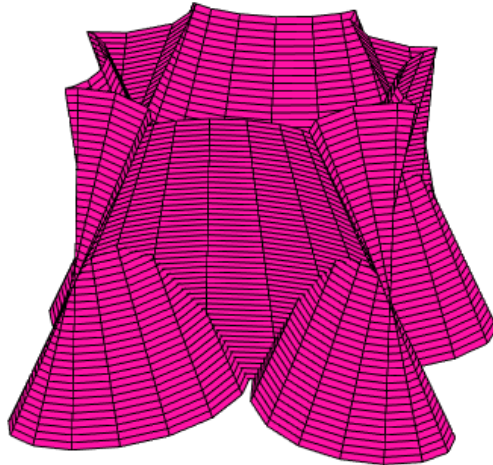
elde edilir. O halde $\phi(s, v)$ normal gül regle yüzeyinin $\alpha(s)$ dayanak eğrisinin geodezik eğriliği (4.95) olarak bulunur. ■

4.2.5 Normal Gül Regle Yüzeylerinin Görselleştirilmesi

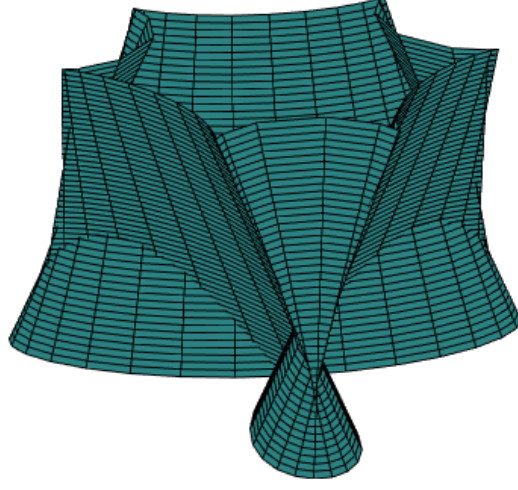
Bu bölümde $a = 1$ olmak üzere farklı k değerleri için elde edilen normal gül regle yüzeyleri MATLAB programı ile görselleştirilmiştir.



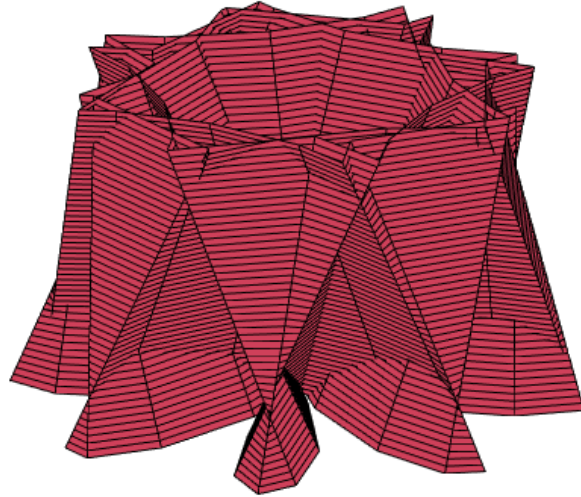
Şekil 4.19 $k = 1$ ve $\theta = \frac{\pi}{3}$ için normal gül regle yüzeyi



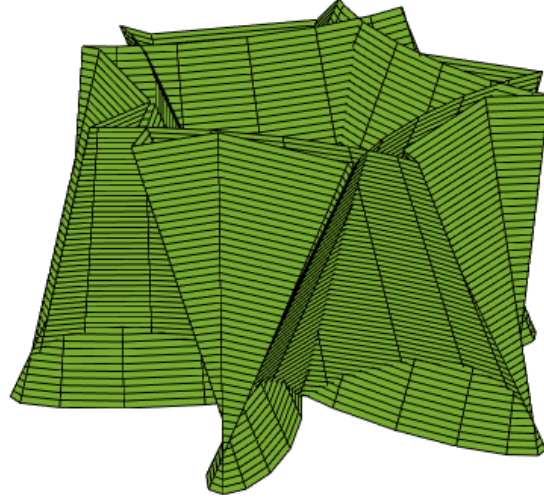
Şekil 4.20 $k = 2$ ve $\theta = \frac{\pi}{3}$ için normal gül regle yüzeyi



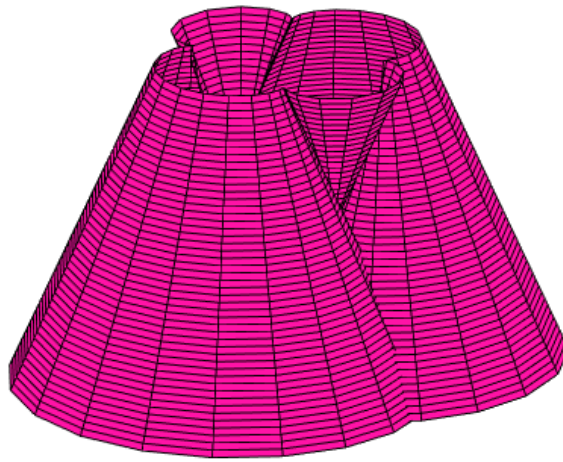
Şekil 4.21 $k = 3$ ve $\theta = \frac{\pi}{3}$ için normal gül regle yüzeyi



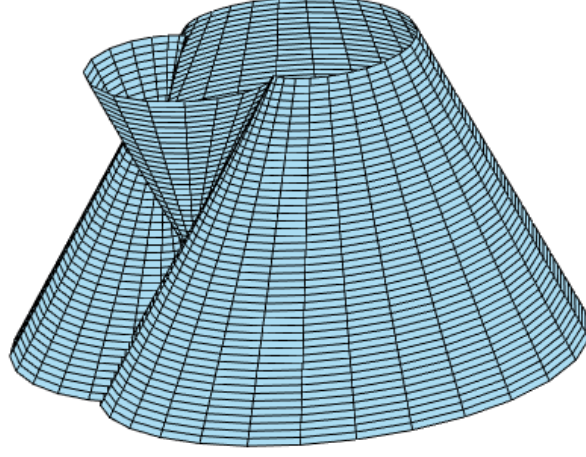
Şekil 4.22 $k = 4$ ve $\theta = \frac{\pi}{3}$ için normal gül regle yüzeyi



Şekil 4.23 $k = 5$ ve $\theta = \frac{\pi}{3}$ için normal gül regle yüzeyi



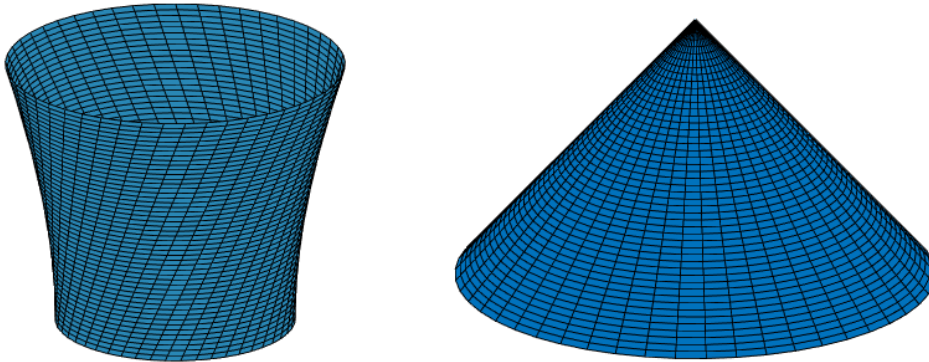
Şekil 4.24 $k = \frac{1}{2}$ ve $\theta = \frac{\pi}{3}$ için normal gül regle yüzeyi



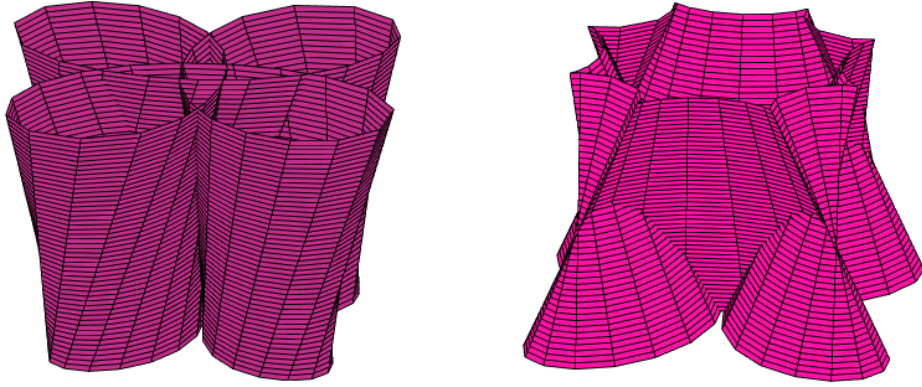
Şekil 4.25 $k = \frac{1}{3}$ ve $\theta = \frac{\pi}{3}$ için normal gül regle yüzeyi

4.3 Rektifiyan ve Normal Gül Regle Yüzeylerinin Karşılaştırılması

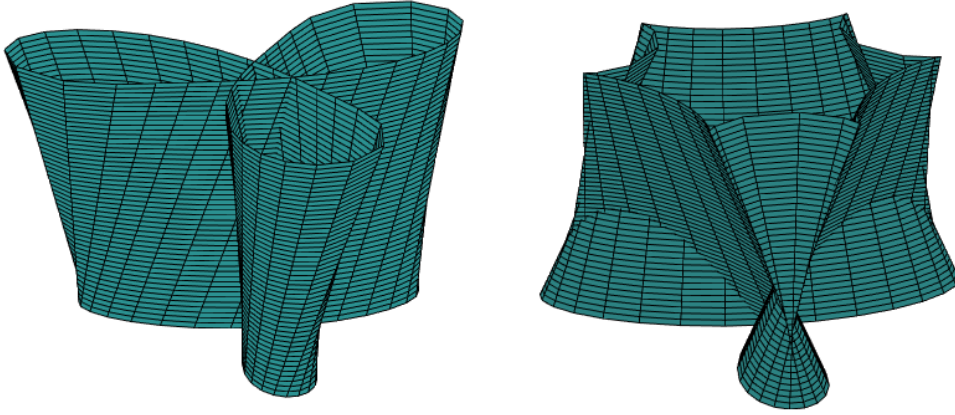
Bu bölümde (4.1) ve (4.2)'de verilen örnekler kullanılarak aynı k ve θ değerleri için her iki regle yüzeyin görsel olarak karşılaştırılması amaçlanmıştır.



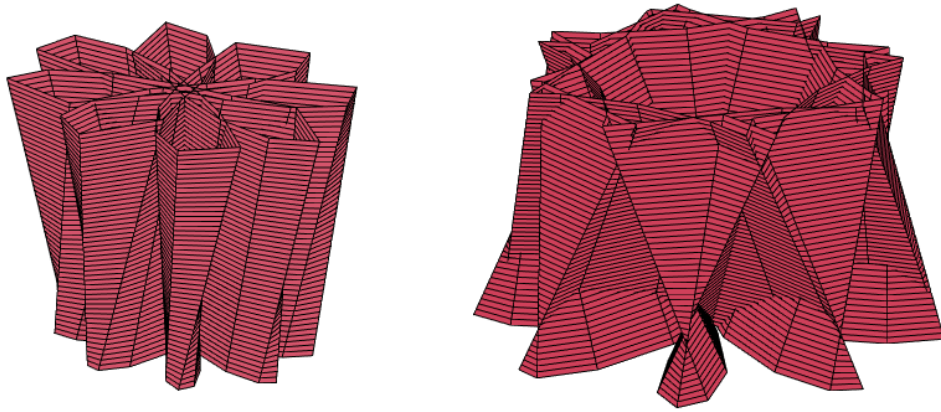
Şekil 4.26 $k = 1$ ve $\theta = \frac{\pi}{3}$ için rektifiyan ve normal gül regle yüzeyi



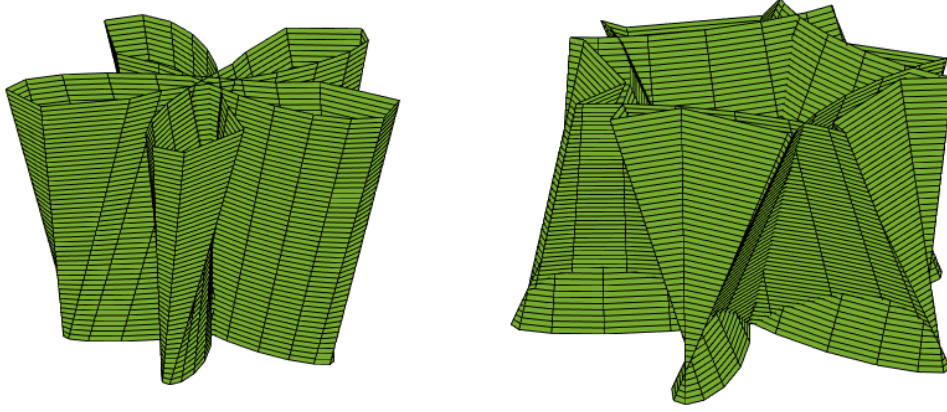
Şekil 4.27 $k = 2$ ve $\theta = \frac{\pi}{3}$ için rektifiyan ve normal gül regle yüzeyi



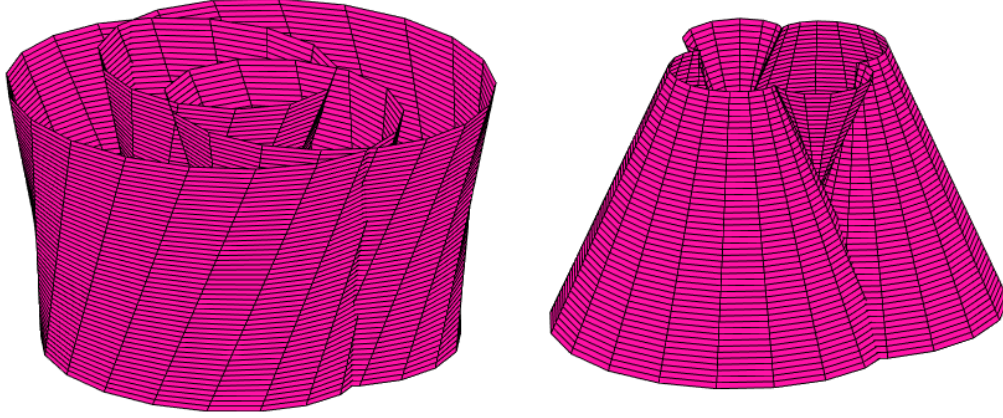
Şekil 4.28 $k = 3$ ve $\theta = \frac{\pi}{3}$ için rektifiyan ve normal gül regle yüzeyi



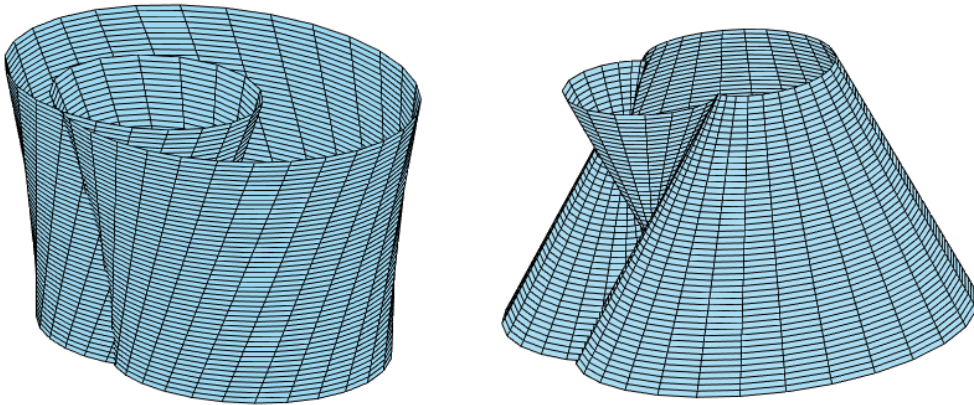
Şekil 4.29 $k = 4$ ve $\theta = \frac{\pi}{3}$ için rektifiyan ve normal gül regle yüzeyi



Şekil 4.30 $k = 5$ ve $\theta = \frac{\pi}{3}$ için rektifiyan ve normal gül regle yüzeyi



Şekil 4.31 $k = \frac{1}{2}$ ve $\theta = \frac{\pi}{3}$ için rektifiyan ve normal gül regle yüzeyi



Şekil 4.32 $k = \frac{1}{3}$ ve $\theta = \frac{\pi}{3}$ için rektifiyan ve normal gül regle yüzeyi

5

SONUÇ

Bu çalışmada, \mathbb{E}^3 Öklid uzayında dayanak eğrisi gül eğrisi ve doğrultman vektörü bu eğrinin Frenet vektörlerinin açısasal lineer birleşimi olan regle yüzeyler tanımlanmıştır. Ayrıntılı olarak, gül eğrilerinin birim teğet vektörü ile binormal vektörlerinin açısasal lineer birleşimini doğrultman vektör kabul eden rektifiyan gül regle yüzeyleri ve gül eğrilerinin birim aslı normal vektörü ile binormal vektörlerinin açısasal lineer birleşimini doğrultman vektör kabul eden normal gül regle yüzeyleri incelenmiştir. Bu regle yüzeylerin birim normal vektörleri, teğet düzlemleri, temel form katsayıları, Gauss eğrilikleri, striksiyon eğrileri, dağılma parametreleri, asimptotik normal doğrultuları ve striksiyon noktasındaki merkez normalleri hesaplanmış ve bu yüzeyler MATLAB programı ile görselleştirilmiştir. Bu çalışma kapsamında tanımlanan gül regle yüzeyleri kavramı, literatürde var olan gül yüzeyleri kavramından farklı bir bakış açısı ile oluşturulmuştur. Yapılan analizler sonucunda gül regle yüzeylerinin, gül yüzeylerinin özel bir hali olmadığı açıktır. Dolayısıyla, gül regle yüzeyleri, gül yüzeylerinden farklı bir yüzey kavramını temsil etmektedir.

- [1] G. Grandi, “I. florum geometricorum manipulus regiae societati exhibitus à d. guidone grandi abbate camaldulensi, pisani lycaei mathematico, rss,” *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, vol. 32, no. 378, pp. 355–371, 1722.
- [2] G. Grandi, *Flores geometrici ex Rhodonearum, et Cloeliarum curvarum descriptione resultantes, quos unà cum novi expeditissimi Mesolabii auctario... d. Guido Grandus.. typis Regiae Celsitudinis*, 1728.
- [3] E. W. Hyde, “Foliate curves,” *The Analyst*, vol. 2, no. 1, pp. 12–14, 1875, issn: 07417918. [Online]. Available: <http://www.jstor.org/stable/2635681> (visited on 01/18/2024).
- [4] P. M. Maurer, “A rose is a rose...,” *The American Mathematical Monthly*, vol. 94, no. 7, pp. 631–702, 1987.
- [5] S. Gorjanc, “Rose surfaces and their visualizations,” *Journal for geometry and graphics*, vol. 13, no. 1, pp. 1–9, 2010.
- [6] M. Sošić, “Rose curves,” 2023.
- [7] J. D. Lawrence, *A Catalog of Special Plane Curves*. New York, Dover Publications, 1972.
- [8] G. Soleymanpour, A. S. Janfada, “A general trisectrix curve and its applications,” *Journal for Geometry and Graphics*, vol. 27, no. 1, pp. 47–57, 2023.
- [9] S. Yüce, “Öklid uzayında diferansiyel geometri,” *Pegem Akademi Yayıncılık*, 2024.
- [10] N. Althibany, “Classification of ruled surfaces family with common characteristic curve in euclidean 3-space,” *Turkish Journal of Science*, vol. 6, no. 2, pp. 61–70, 2021.

TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR

Konferans Bildirisi

1. Budak, D., & Yüce, S., (2023). GÜL REGLE YÜZEYLERİ . İZMİR MATHEMATICS DAYS V (pp.31). İzmir, Turkey

