

ÇANKIRI KARATEKİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KOMPLEKS DÜZLEMDE İNTEGRAL
DÖNÜŞÜMLERİ: İLGİLİ TANIMLAR, TEORİLER VE BAZI
UYGULAMALAR

Tolga Han AÇIKGÖZ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ÇANKIRI
2024

Her hakkı saklıdır

TEZ ONAYI

Tolga Han AÇIKGÖZ tarafından hazırlanan “**Kompleks Düzlemde İntegral Dönüşümleri: İlgili Tanımlar, Teoriler ve Bazı Uygulamalar**” adlı tez çalışması 23/01/2024 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği** ile Çankırı Karatekin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Hüseyin IRMAK

Jüri Üyeleri :

Başkan : Prof. Dr. Emin ÖZÇAĞ
Matematik Anabilim Dalı
Hacettepe Üniversitesi

Üye : Prof. Dr. Hüseyin IRMAK
Matematik Anabilim Dalı
Çankırı Karatekin Üniversitesi

Üye : Doç. Dr. Müfit ŞAN
Matematik Anabilim Dalı
Çankırı Karatekin Üniversitesi

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Hamit ALYAR

Enstitü Müdürü

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Çankırı Karatekin Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğine göre hazırlamış olduğum “**Kompleks Düzlemde İntegral Dönüşümleri: İlgili Tanımlar, Teoriler ve Bazı Uygulamalar**” konulu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı, tezin içerdiği yenilik ve sonuçları başka bir yerden almadığımı, tezde kullandığım eserleri usulüne göre kaynak olarak gösterdiğimi, tezin Çankırı Karatekin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü’nden başka bir bilim kuruluna akademik amaç ve unvan almak amacıyla vermediğimi ve bu çalışmanın Çankırı Karatekin Üniversitesi tarafından kullanılan “Bilimsel İntihal Tespit Programı”yla tarandığını, “intihal içermediğini” beyan ederim. Çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması halinde ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara razı olduğumu bildiririm. Çankırı Karatekin Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca gereğinin yapılmasını arz ederim (23/01/2024).

Tolga Han AÇIKGÖZ

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

KOMPLEKS DÜZLEMDE İNTEGRAL DÖNÜŞÜMLERİ: İLGİLİ TANIMLAR, TEORİLER VE BAZI UYGULAMALAR

Tolga Han AÇIKGÖZ

Çankırı Karatekin Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Hüseyin IRMAK

Bu tez çalışmasının temel amacı, hem (uygulamalı) matematikte hem de birçok mühendislik biliminde büyük rol oynayan ve kapsamı geniş olan çeşitli özel fonksiyonlarla ilgili bazı temel bilgileri öncelikli olarak tanıtmak ve ayrıca hem onların temel özelliklerinin bazılarını hem de aralarındaki çeşitli bağıntılara odaklanmaktır. Daha sonra, ilgili özel fonksiyonların dönüşüm teorisindeki yadsınamaz çeşitli etkileri, özel sonuçları ve ayrıca ilgili araştırmacılar için bazı öneriler de farklı alanlar için özel bilgiler olarak sunulacaktır.

2024, 67 sayfa

ANAHTAR KELİMELEER: Kompleks değişkenli fonksiyon, Gamma fonksiyonu, Beta fonksiyonu, İntegral dönüşümleri, Operatörler.

ABSTRACT

Master of Science Thesis

INTEGRAL TRANSFORMATIONS IN THE COMPLEX PLANE: RELATED DEFINITIONS, THEORIES AND SOME APPLICATIONS

Tolga Han AÇIKGÖZ

Çankırı Karatekin University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Hüseyin IRMAK

The main purpose of this thesis study is firstly to introduce certain fundamental information in regards to various extensive special functions, which play a big role in both (applied) mathematics and many engineering sciences, and also to center upon both some of their basic properties and several relationships between them. Afterwards, several undeniable effects of the relevant special functions in the transformation theory, various special results and some suggestions for the relevant researchers will be considered as special information for diverse fields.

2024, 67 pages

Keywords: Function with complex variable, Gamma function, Beta function, Integral transformations, Operators.

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Hem matematik bilimi hem de matematikle doğrudan ilişkili olan mühendislik bilimleri açısından, teoride ve çeşitli uygulamalarda oldukça önemli roller üstlenen ve literatürde de sıkça karşılaşılan (reel veya kompleks değişkenli (parametrelili)) özel fonksiyonlar (special functions) ve bu özel fonksiyonlarla doğrudan ilişkili olan (bazı özel) dönüşümler (transformations) teorisi bu bilimsel tez araştırmasının temel hedefi olup özellikle, araştırmamız açısından, ilgili özel fonksiyonlarla ve dönüşümlerle ilgili olan (çeşitli temel) bilgilerin, teorilerin ve bazı örneklendirmelerin öncelikli olarak sunulması, ardından da bu tez çalışmasının tüm özgün sonuçlarının literatüre kazandırılmış halini içeren ve Irmak ve Açıkgöz (2023) tarafından oluşturulmuş olan iki genel integral dönüşümü (operatörü) tanıtılmış ve ilgili dönüşümlerin çeşitli kompleks fonksiyonlara olan olası etkilerinin paylaşılması hedeflenmiştir.

Tez savunma sürecinde ve sonrasında, çeşitli açılardan yapıcı önerilerde bulunan jüri üyelerim Sayın Prof. Dr. Emin ÖZÇAĞ'a ve Sayın hocam Doç. Dr. Müfit ŞAN'a içten teşekkürlerimi sunarım. Özellikle, bu özel akademik araştırmanın tüm süreçlerinde bana sabırla yön gösteren, alışılmışın dışında ufuklar açan, oldukça farklı bakışlar kazandıran ve yardımlarını da hiçbir zaman esirgemeyen danışmanım Sayın Prof. Dr. Hüseyin IRMAK'a da çok teşekkür ederim.

Ayrıca, beni bu yaşa getiren annem Hülya AÇIKGÖZ'e, her daim desteğini esirgemeyen babam Şinasi AÇIKGÖZ'e, özellikle kardeşim Dr. Aleyna AÇIKGÖZ'e, eşim Melek DEVRİM AÇIKGÖZ'e ve emeği geçen herkese sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Tolga Han AÇIKGÖZ

Çankırı, Ocak 2024

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR.....	iii
İÇİNDEKİLER.....	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	v
1. GİRİŞ.....	1
2. MATERYAL VE METOT.....	4
2.1 Bazı Ön Bilgiler.....	4
2.2 $\mathbb{G}(v; u)(t)$ İntegral Dönüşümleri.....	19
2.3 $\mathbb{B}(v; u)(t)$ İntegral Dönüşümleri	32
3. BULGULAR VE TARTIŞMA	43
3.1 Olası Çıkarımlar I	43
3.2 Olası Çıkarımlar II	50
4. SONUÇ VE ÖNERİLER	60
KAYNAKLAR	61
ÖZGEÇMİŞ.....	67

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbf{B}(\cdot, \cdot)$	Beta fonksiyonu
$\mathbb{C}$	Kompleks sayıların oluşturduğu küme
$\mathfrak{D}_z^{-\lambda}[\cdot]$	$(\lambda$ -mertebeden) kesirsel integral operatörü
$\mathfrak{D}_z^{\lambda}[\cdot]$	$(\lambda$ -mertebeden) kesirsel türev operatörü
$\mathbb{N}$	Doğal sayıların oluşturduğu küme
$\mathbb{N}_0$	$\mathbb{N} \cup \{0\}$ şeklindeki küme
$\mathbb{R}$	Reel (gerçel) sayıların oluşturduğu küme
$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R} - \{0\}$ şeklindeki küme
$\mathcal{T}_{\alpha, \beta}[\cdot]$	$(\alpha, \beta$ - parametrelili) Tremblay operatörü
$\mathbb{U}$	(Kompleks düzlemdeki) açık birim disk
$\mathbf{U}_{\delta}(z_0)$	z_0 gibi bir noktanın δ açık komşuluğu
$\mathbb{Z}$	Tam sayıların oluşturduğu küme
$\mathbb{Z}^-$	Negatif tam sayıların oluşturduğu küme
$\Gamma(\cdot)$	Gamma fonksiyonu

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1 Reel değişkenli üstel fonksiyona ilişkin grafik	22
---	----



1. GİRİŞ

Temelde dört bölümden oluşacak olan bu tez çalışmasının bu bölümünde, araştırmalarımıza esas dayanak teşkil edecek şekilde çok temel literatür bilgilendirmeleri ile farklı bakış açılarına zemin oluşturacak şekildeki ekstra bilgilendirmeler üzerine açıklayıcı ve belirleyici konumda olan çeşitli özel bilgiler vurgulanacaktır.

Bu özgün araştırmanın her bir bölümünde, bu araştırma açısından üç temel bilgi birikimini içerecek olan temel araştırma konularına göre gerekli açıklayıcı bilgilere yer alacaktır. Bunlar ise (reel (gerçel) veya kompleks değişkenli (parametrelili)) bazı özel fonksiyonlar (special functions) teorisi, bu fonksiyonların oldukça etkin olarak rol oynadığı (özel) dönüşümler (transformations) teorisi ve onların belirlemiş olacağı (veya belirleyeceği) çeşitli tanımlara, teorilere veya uygulamalara yönelik olup bunlar da çok temel bazı bilgiler kapsamında ele alınacaktır. Aynı şekilde, üstte vurgulanan dönüşüm teorisi çeşitli integral dönüşümleri kapsamında olup aynı zamanda, ilgili dönüşümleri ifade eden operatörler şeklinde karşılaşılan özel bilgilendirmelerden de bahsetmiş olacağız.

Literatür bilgilendirmelerine gelindiğinde, öncelikli olarak bu araştırmamızın esas amacı, araştırmayı kompleks düzleme çekmek (ilişkilendirmek) olacağından dolayı, kompleks fonksiyonlar teorisi ile olan çok temel bilgilendirmeler de kaçınılmaz olacaktır. Bu bağlamda, ilgili alanla yani çok temel olan klasik (kompleks) analiz bilgileriyle doğrudan ilgili olabilecek bazı esas eserler olarak Whittaker and Watson (1963), Rudin (1964) ve Ahlfors (1966), Dettman (1970) ve Brown and Churchill (1966) eserleri oldukça temel teşkil etmesine rağmen Nehari (1952), Henrici (1977), Kayman (1994), Gradshteyn and Ryzhik (2007) ve Olver et al. (2010) ile verilen eserler de daha farklı kapsamlarda bilgiler içeren araştırmalar için önemli referanslar olarak karşımıza çıkacaktır.

Bu araştırmanın diğer konusu da (reel veya kompleks değişkenli (parametrelili)) özel fonksiyonlar olup bu fonksiyonlar da özellikle Gamma fonksiyonu, Beta fonksiyonu ve

bunlar arasındaki oldukça kapsamlı olan (özel) ilişkiler çalışmamız açısından farklı ve önemli roller üstlenecektir. Faktöriyel kavramının reel sayılara genişletilmesi göz önüne alındığında bu ve ileri boyuttaki uygulamaları olarak integral teorisindeki boyutu da oldukça genişleyecek ve uygulama alanları da artacaktır. Bu gibi durumlar özellikle klasik analiz bilgileri göz önüne alındığında her iki tipteki bilindik (reel veya kompleks formdaki) genelleştirilmiş integrallerin yakınsamalarındaki etkinliği çok sayıda integral dönüşümlerine de kapsamlı verimlilik kazandıracaktır. Her iki özel fonksiyon için; Birkhoff (1913), Press et al. (2007), Choi and Srivastava (2009), Al-Sirehy and Fisher (2011) eserleri bazı temel kaynak olmakla birlikte, onların gerek kendi aralarındaki gerekse diğer (bazı) özel fonksiyonlarla ve onların çeşitli (alanlardaki) uygulamalarına yönelik olarak da Lebedev (1965), Bell (1968), Abramowitz and Stegun (1972), Andrews (1985), Wolfram (1998), Polyanin and Manzhirov (2007), Beals and Wong (2010), Olver et al. (2010), Wang and Guo (2010) şeklindeki eserler oldukça kapsamlı referanslar olacaktır.

Bu araştırmanın ilgili olacağı diğer bir kapsamlı konusu da (integral) dönüşümleri olacaktır. Yukarıda da vurguladığımız gibi integral dönüşümleri ile özel fonksiyonlar arasında yakından ve kapsamlı ilişkileri vardır. İntegral dönüşümlerinin en özel hallerinden biri olarak bilinen Laplace dönüşümü (ve doğal olarak tersi konumunda olan Ters Laplace Dönüşümü) ile ilgili temel teoriler ve uygulama boyutları göz önüne alındığında oluşturulacak olan çeşitli bilindik veya özel integral dönüşümleri için de ana hedef kendini gösterecektir. Hem ilgili (temel) dönüşüm hem de vurgulanan özel fonksiyonlar arasındaki bazı ilişkiler içeren temel referans kaynakları olarak Spiegel (1965), Qi (2018), Press et al. (2007) ve Aghili and Zeinali (2014) eserleri öncelikli olarak sunulabilir. Özellikle bu özel dönüşümün dışında diğer çeşitli (integral) dönüşümleri ve hatta genel anlamda integral dönüşümleri için de Offord (1935), Erdelyi (1954), Churchill (1954), Sneddon (1972), Meyer (1992), Bracewell (2000), Davies (2001), Bohner and Peterson (2002), Khan and Khan (2008), El-tayeb and Kilicman (2010), Poularikas (2010), Elzaki (2011), Kashuri and Fundo (2013), Lokenath and Dambaru (2014), Bardaro and Mantellini (2014), Boyadjiev and Luchko (2017) ve Yang (2017) eserleri çeşitlilik yönleriyle oldukça detaylı kaynaklar olarak sunulabilir.

Yukarıda klasik tipte integral dönüşümlerinin dışında, kesirsel mertebeden türev-integral dönüşümleri de vardır. Bu dönüşümler (veya ilgili operatörleri), literatür açısından oldukça aktif bir dalı olan ve belirtilen özel fonksiyonların da ciddi katkılarının rol aldığı kesirsel mertebeden hesaplamalarla belirlenen integral dönüşümlerdir. Bu dönüşümler, bizim araştırmamız açısından önemli olmakla birlikte; Ross (1975), Owa (1978), Samko et al. (1993), Miller and Ross (1993), Grozdev (1997), Kilbas et al. (2006) ve Daftardar-Gejji (2014), şeklindeki eserler temel kaynak kapsamında olan eserlerdir. Ayrıca, diğer kapsamlı eserler olarak da Owa (2009), Chen et al. (1997, 1998), Hilfer (2000), Vinagre (2005), Kilbas et al. (2006), Agarwal (2012), Zhuravkov and Romanova (2015), Irmak and Engel (2019) ve Irmak (2020, 2021, 2022) eserleri çeşitli zenginlikteki çalışmaları içermektedir.

Son olarak, çeşitli mühendislik bilimlerine yönelik çeşitli (farklı tip) uygulamalar açısından da Hartley (1942), Churchill (1954), Erdelyi (1954), Whittaker and Watson (1963), Rudin (1964), Dettman (1970), Sneddon (1972), Boas (1983), Meyer (1992), Miller and Ross (1993), Dattoli et al. (1997), Wolfram (1998), Hilfer (2000), Davies (2001), Vinagre et al. (2005), Arfken and Weber (2005), Gradshteyn and Ryzhik (2007), Choi and Srivastava (2009), Zhuravkov and Romanova (2015), Boyadjiev and Luchko (2017) and Yang (2017) eserleri özellikle incelenmeli ve ilgili sonuçları araştırmamız açısından da göz önüne alınmalıdır.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

2.1. Bazı Ön Bilgiler

2.1.1 Tanım. $\mathbb{R}$ reel (gerçek) sayılar kümesini göstermek üzere, her $x, y \in \mathbb{R}$ için, $\mathbb{C}$ simgesi ile kompleks sayılar kümesi gösterilir ve bu küme de

$$\mathbb{C} = \{ z : z = x + iy \text{ ve } i^2 = -1 \}$$

şeklinde tanımlanır (Ahlfors 1966).

Yukarıda geçen kompleks sayılar kümesi zaman zaman “Kompleks Düzlem”, “Analitik Düzlem” veya “z-düzlemi” şeklinde de anılır ve bu uzayın her noktası ile z gibi bir kompleks sayının 1-1 olarak karşılık getirilen ögenin reel kısmı x ve sanal (imajiner) kısmı da y ifade edilir. Bunlar da sırasıyla,

$$\Re(z) = x \quad \text{ve} \quad \Im(z) = y$$

şeklindeki gibi sembolik gösterimlerle ifade edilir.

2.1.2 Tanım. $\mathbb{U}$ gösterim ile kompleks düzlemdeki açık birim disk olarak bilinen küme gösterilir ve

$$\mathbb{U} = \{ z : z \in \mathbb{C} \text{ ve } |z| < 1 \}$$

şeklinde tanımlanır (Ahlfors 1966).

2.1.3 Tanım. Boş küme olmayan G ve H gibi iki (Kompleks) küme verildiğinde eğer $G \cap H = \emptyset$ koşulu sağlıyorsa G ve H kümelerine ayık kümeler veya kısaca ayıktır denir (Ahlfors 1966).

2.1.4 Tanım. $\delta > 0$ bir keyfi sayı ile z_0 gibi bir kompleks sayısı verilsin. Bu durumda, z_0 noktasının δ (-açık-) komşuluğu $\mathbf{U}_\delta(z_0)$ gösterimi ile ifade edilir ve

$$\mathbf{U}_\delta(z_0) = \{ z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \delta \text{ } (\delta > 0) \}$$

şeklindeki küme ile tanımlanır (Ahlfors 1966).

Bilindiği üzere, Tanım 2.1.4 ile tanıtilan ilgili özel küme, matematik literatüründe “ z_0 merkezli ve δ birim yarıçaplı açık disk” olarak da bilinir. Özellikle, $\delta := 1$ seçilmesi durumunda da ilgili küme, yani komşuluk “ z_0 merkezli açık birim disk” olarak belirtmiş olduğumuz, yani

$$U := U_1(z_0)$$

şeklindeki kümenin olacağı açıktır.

2.1.5 Tanım. $\emptyset \neq H \subset \mathbb{C}$ gibi bir (kompleks) kümesi verilsin ve $z_0 \in H$ olsun. Eğer $U_\delta(z_0) \subset H$ olacak şekilde z_0 noktasının (en az bir açık) komşuluğu var ise z_0 noktasına H kümesinin ($\mathbb{C}$ 'de) bir iç noktasıdır denir.

2.1.6 Tanım. $\emptyset \neq G \subset \mathbb{C}$ (kompleks) kümesi verilsin. Eğer G 'nin bütün noktaları birer iç nokta ise G kümesine ($\mathbb{C}$ 'de) bir açık küme veya kısaca açıktır denir (Ahlfors 1966).

2.1.7 Tanım. Ayrık ve açık iki (kompleks) kümenin birleşimi şeklinde yazılamayan kümeye bağlantılı küme veya kısaca bağlantılıdır denir (Ahlfors 1966).

2.1.8 Tanım. Açık ve bağlantılı kümelere bölge adı verilir (Ahlfors 1966).

2.1.9 Tanım. $\emptyset \neq H \subset \mathbb{C}$ ve $\emptyset \neq G \subset \mathbb{C}$ (kompleks) kümeleri verilsin. Fonksiyon olma koşulları altında, H kümesinin elemanlarını G kümesinin elemanlarına götüren kurala (z -bağımsız değişkenli) fonksiyon adı verilir ve bilindiği üzere, böylesi bir durum ψ ile ifade edilirse;

$$\begin{aligned} \psi : H &\rightarrow G \\ z &\mapsto \psi := \psi(z) \end{aligned}$$

şeklindeki gibi (yazılarak) gösterilir (Ahlfors 1966).

2.1.10. Tanım. $\psi(z) : H \subset \mathbb{C} \rightarrow G \subset \mathbb{C}$ gibi bir (z -bağımsız değişkenli kompleks) fonksiyonu $z_0 \in H$ gibi bir noktanın en az bir komşuluğunda tanımlı olsun ve $w_0 \in G$ gibi noktası da verilsin. O zaman, verilen $\epsilon > 0$ keyfi sayısı için öyle bir $\delta > 0$ sayısı var öyle ki her $z \in U_\delta(z_0)$ için

$$|\psi(z) - w_0| < \epsilon$$

oluyor ise $\psi(z)$ fonksiyonun z_0 noktasındaki limit w_0 dır denir ve bu durum;

$$“z \rightarrow z_0 \text{ iken } \psi(z) \rightarrow w_0 \text{ dır}”$$

veya

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \psi(z) = w_0$$

şeklinde yazılarak ifade edilir.

2.1.11 Tanım. $\psi(z) : \mathbf{H} \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbf{G} \subset \mathbb{C}$ gibi bir (z-bağımsız değişkenli kompleks) fonksiyonu ve $z_0 \in \mathbf{H}$ noktası verilsin. O zaman, verilen $\epsilon > 0$ keyfi sayısı için öyle bir $\delta > 0$ sayısı var öyle ki her $z \in \mathbf{U}_\delta(z_0)$ için,

$$|\psi(z) - \psi(z_0)| < \epsilon$$

oluyor ise $\psi(z)$ fonksiyonun z_0 noktasında süreklidir denir ve bilindiği gibi bu durum;

$$“z \rightarrow z_0 \text{ iken } \psi(z) \rightarrow \psi(z_0) \text{ dır.}”$$

şeklinde ifade edilir ve

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \psi(z) = \psi(z_0)$$

şeklinde yazılır.

2.1.12 Tanım. $\psi(z)$ gibi verilen bir (kompleks değişkenli) fonksiyonu z_0 gibi noktanın en az bir komşuluğunda tanımlı olsun. Bu durumda,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\psi(z) - \psi(z_0)}{z - z_0}$$

(2.1.1)

şeklindeki (kompleks) limit mevcut ise ilgili limite $\psi(z)$ fonksiyonun $z = z_0$ noktasındaki türevi (diferansiyeli) adı verilir ve bilindiği gibi ilgili o limit de genellikle,

$$\psi'(z_0) \quad \text{veya} \quad \left. \frac{d\psi}{dz} \right|_{z=z_0}$$

şeklindeki gösterimlerinden herhangi biri ile yazılarak ifade edilir. Bu tanım yerine, eğer

$$z - z_0 = h \rightarrow 0 \quad \Leftrightarrow \quad z \rightarrow z_0$$

gibi ilişkiler göz önüne alınırsa (2.1.1) ile verilen limite denk gelen;

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\psi(z_0+h) - \psi(z_0)}{h} \quad (2.1.2)$$

şeklindeki gibi de tanımlanır (Ahlfors 1966).

Yukarıda (2.1.1) ve (2.1.2) ile verilen (kompleks) limitler birbirine denk ifadeler olması özellikle, kompleks fonksiyonlarla ilgili olan (karmaşık) limit araştırmalarında, (2.1.2) ile verilen limitle birçok yapılar oldukça kolaylık sağlamaktadır.

2.1.13 Tanım. $\psi(z)$ gibi bir (z-kompleks değişkenli) fonksiyonu, eğer z_0 gibi bir noktanın en az bir komşuluğundaki her bir noktada türevlenebiliyor ise $\psi(z)$ fonksiyonuna z_0 noktasında analitik bir fonksiyondur veya kısaca analitiktir denir (Ahlfors 1966).

2.1.14 Tanım. $\psi(z)$ gibi bir (z-bağımsız değişkenli) fonksiyonu, eğer verilen herhangi bir $E \subset \mathbb{C}$ gibi (kompleks) bölgenin her noktasında türevlenebiliyor ise $\psi(z)$ fonksiyonuna E kümesinde analitik bir fonksiyondur veya kısaca analitiktir denir (Ahlfors 1966).

2.1.15 Tanım. $\mathbb{C}$ 'de analitik olan fonksiyonlara tam fonksiyon veya kısaca tamdır denir (Ahlfors 1966).

2.1.16 Tanım. $[a, b]$ gibi bir aralıktan $\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesine tanımlanan (reel (gerçek)) fonksiyonlara, $\mathbb{C}$ 'de bir kompleks eğri adı verilir. Böylesi bir kompleks eğri γ ile gösterilecek olunursa $\gamma(a)$ 'ya ilgili eğrisinin başlangıç noktası ve $\gamma(b)$ 'ye de bitiş noktası adı verilir (Ahlfors 1966).

2.1.17 Tanım. Bir kompleks eğrisi kendi kendini sadece başlangıç ve bitiş noktalarında kesiyor ise o eğriye basit kapalı eğri adı verilir (Ahlfors 1966).

2.1.1 Teorem. $\psi(z)$ gibi bir (z bağımsız değişkenli) kompleks fonksiyonu z_0 gibi bir noktasını kapsayan bir basit kapalı γ (kompleks) eğrisinin üzerinde ve bu eğri ile

sınırlandırılmış olan bölgede analitik olsun. Bu durumda, her $\ell \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ doğal sayısı için,

$$\psi^{(\ell)}(z_0) = \frac{\ell!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\psi(z)}{(z-z_0)^{\ell+1}} dz \quad (2.1.3)$$

veya

$$\int_{\gamma} \frac{\psi(z)}{(z-z_0)^{\ell+1}} dz = \frac{2\pi i}{\ell!} \psi^{(\ell)}(z_0) \quad (2.1.4)$$

dır (Ahlfors 1966).

Yukarıda, yani (2.1.3) ve (2.1.4)'te geçen;

$$\psi^{(\ell)}(z_0) \quad (\ell = 0, 1, 2, \dots, n; n \in \mathbb{N})$$

ifadesi bilindiği gibi $\psi(z)$ (z -kompleks (bağımsız) değişkenli) fonksiyonun ℓ . (adi) türevini ifade ettiğini özellikle vurgulayalım. Ayrıca, literatürde Teorem 2.1.1'in (2.1.3) ile verilen hali Cauchy Türev teoremi (formülü) ve (2.1.4) ile verilen hali ise Cauchy İntegral teoremi (formülü) olarak bilinen önemli teoremlerdir. Onların kompleks fonksiyonlar teorisine kattığı teorik ve uygulama alanlarındaki ağırlık oldukça önemlidir. Kapsamlı bilgiler için Nehari (1952), Ahlfors (1966) ve Brown and Churchill (1996) temel eserleri oldukça kapsamlı bilgiler içermektedir.

Tüm cisim uzaylarında sayı dizileri, fonksiyon dizileri ve bunlarınla doğrudan alakalı olan sayı serileri ve fonksiyon serileri için hatırlatılması yerinde olabilecek bazı temel bilgilere ihtiyaç duyulacaktır. Bunların her biri için öncelikli olarak $\mathbb{N}_r$ gibi bir özel notasyonun tanımı kolaylık açısından ihtiyaç olacaktır. İlgili bu küme;

$$\mathbb{N}_r := \{ r, r+1, r+2, \dots : r \in \mathbb{N}_0 \}$$

şeklindeki gibi tanımlanan doğal sayıların oluşturduğu sonsuz elemanlı bir kümeyi ifade ettiğini belirterek ilgili tanımlamalara geçelim.

2.1.18 Tanım. $\mathbb{N}_r$ kümesinden $\mathbb{C}$ kümesine tanımlanan fonksiyonlara (kompleks) sayı dizileri adı verilir ve ilgili sayı dizisi genellikle;

$$\{z_n\}_{n=r}^{\infty}, \quad \{z_n\}_r^{\infty}, \quad \{z_n\}_r \quad \text{veya} \quad \{z_n\} \quad (2.1.5)$$

şeklindeki gibi gösterimlerden herhangi biri ile ifade edilir ve bu sayı dizisinin belirttiği kural, yani ilgili fonksiyon

$$z_n = z(n) : \mathbb{N}_r \rightarrow \mathbb{C}$$

şeklindeki gibi ifade edilebilen bir fonksiyondur (Ahlfors 1966).

Özellikle, eğer z_n dizisi için değer kümesi $\mathbb{R}$ olarak seçildiğinde yine (2.1.5) formundaki gösterimlere sahip olan sayı dizileri de “gerçel (reel) sayı dizileri” ifadesiyle anılacaktır. Doğal olarak ilgili değer kümesi $\mathbb{C}$ olarak olduğunda da ilgili sayı dizisinin “kompleks sayı dizisi” adıyla anıldığını ve $\{z_n\}_r$ şeklinde gösterildiğini ifade etmiştik. Hatta “ z_n genel terimli kompleks sayı dizisi” adıyla da ifade edilebilmektedir. Temel amacımız ise yine kompleks formlar olacaktır.

2.1.19 Tanım. $z_n : \mathbb{N}_r \rightarrow \mathbf{F}$ gibi bir (kompleks) sayı dizisi verilsin. Bu durumda, verilen her $\varepsilon > 0$ sayısı için öyle bir $N := N(\varepsilon) \in \mathbb{N}_r$ (doğal) sayısı var ve her $n \geq N$ için $|z_n - z_0| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $z_0 \in \mathbf{F}$ gibi bir (kompleks) sayısı var ise $\{z_n\}$ (kompleks sayı) dizisinin limiti z_0 ’dır denir ve genellikle;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0 \quad \text{veya} \quad n \rightarrow \infty \text{ iken } z_n \rightarrow z_0 \quad (2.1.6)$$

şeklinde yazılarak gösterilir. Üstteki gibi tanımlanan ve (2.1.6)’deki gibi gösterilen ilgili (kompleks) limitin var olması durumunda, ilgili sayı dizisinin “ z_0 ’a yakınsayan (kompleks sayı) dizisi” veya kısaca “yakınsak (kompleks sayı) dizisi” gibi ifadelerle de sıkça vurgulanmaktadır. Ayrıca, ilgili limit söz konusu değil ise o sayı dizisine “yakınsak olmayan dizi” denildiği gibi kısaca “ıraksak dizi” veya “ıraksaktır” da denmektedir (Ahlfors 1966).

2.1.20 Tanım. $\mathbf{I} \subset \mathbf{F}$ verilsin ve $\mathbf{F}(\mathbf{I})$ ’da, $\mathbf{I}$ kümesi üzerinde tanımlı olan z bağımsız değişkenli (kompleks) fonksiyonların oluşturduğu fonksiyonlar ailesi olsun. Bu durumda,

$$\psi_n(z) = \psi(z, n) : \mathbb{N}_s \rightarrow \mathbf{F}(\mathbf{I})$$

şeklinde tanımlanan fonksiyonlara, fonksiyon dizileri adı verilir ve (2.1.5)’teki sayı dizilerine benzer olarak;

$$\{ \psi(z) \}_{n=s}^{\infty}, \quad \{ \psi_n(z) \}_s^{\infty} \quad \text{veya} \quad \{ \psi_n(z) \} \quad (2.1.7)$$

şeklindeki gösterimlerin herhangi biri ile ifade edilir (Ahlfors 1966).

Tanım 2.1.20’de, ilgili cisim uzayı eğer $\mathbf{F} := \mathbb{R}$ şeklindeki gerçel sayılar kümesi seçilseydi (2.1.7) ile gibi gösterilen fonksiyon dizileri “gerçel fonksiyon dizileri” adını alan ve genellikle $\{ \psi_n(x) \}_s$ şeklinde gösterilen dizileridir. Özellikle, $\mathbf{F} := \mathbb{C}$ şeklindeki kompleks sayılarının oluşturacağı cisim uzayı seçildiğinde de ilgili fonksiyon dizileri “kompleks fonksiyon dizileri” adını alan ve genellikle $\{ \psi_n(z) \}_{n \geq s}$ şeklinde gösterilen dizilerdir.

2.1.21 Tanım. $\mathbf{I} \subset \mathbb{F}$ kümesi üzerinde tanımlı olan herhangi bir $\{ \psi_n(z) \}_{n \geq s}$ fonksiyon dizisi verilsin. Eğer, her bir $z \in \mathbf{I}$ için elde edilen $\psi_n(z)$ dizisinin limiti $\psi(z)$ gibi fonksiyon oluyor ise $\{ \psi_n(z) \}_{n \geq s}$ fonksiyon dizisi $\psi(z)$ fonksiyonuna yakınsıyor veya noktasal yakınsıyor denir ve böylesi bir yakınsama için,

$$"n \rightarrow \infty \text{ iken } \psi_n(z) \xrightarrow{(n)} \psi(z) \text{ dir }"$$

şeklindeki gibi bir sembolik yazımla ifade edilir (Ahlfors 1966).

2.1.22 Tanım. $\mathbf{I} \subset \mathbb{F}$ kümesi üzerinde tanımlı olan $\{ \psi_n(z) \}_{n \geq s}$ gibi bir fonksiyon dizisi $\psi(z)$ gibi bir fonksiyonuna (noktasal) yakınsasın. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde öyle bir $N \in \mathbb{N}_s$ sayısı var öyle ki her $n > N \in \mathbb{N}_s$ ve her $\omega \in \mathbf{I}$ için,

$$| \psi_n(z) - \psi(z) | < \varepsilon$$

oluyor ise $\{ \psi_n(\omega) \}_s$ fonksiyon dizisi $\psi(\omega)$ fonksiyonuna düzgün (olarak) yakınsıyor denir ve böylesi bir durum;

$$"n \rightarrow \infty \text{ iken } \psi_n(z) \xrightarrow{(d)} \psi(z) \text{ dir }" \quad (2.1.8)$$

şeklindeki gibi ifade edilir (Ahlfors 1966).

2.1.23 Tanım. $z_n = z(n) : \mathbb{N}_s \rightarrow \mathbb{F}$ gibi bir sayı dizisi verilsin. Bu dizinin terimlerinden elde edilen;

$$z_s + z_{s+1} + z_{s+2} + \cdots + z_{s+n} + \cdots$$

şeklindeki gibi sonsuz tane terimin toplamı;

$$z_s + z_{s+1} + z_{s+2} + \cdots + z_{s+n} + \cdots =: \sum_{n=s}^{\infty} z_n \quad (2.1.9)$$

şeklinde gösterilir ve bu sonsuz tane sayı toplamına da sayı serisi adı verilir (Ahlfors 1966).

Yine bilindiği üzere ilgili $\{z_n\}_s$ (kompleks) sayı dizisine ilgili (kompleks sayı) serinin “genel terimi” veya “ n . terimi” adları verilir. Ayrıca $\{z_n\}_s$ dizisinin “ilk n tane terimin toplamı olan diziye” ilgili sayı serinin “kısmi toplamlar dizisi” adı verilir ve bilindiği gibi ilgili sayı dizisi de

$$\begin{aligned} \{S_n\} &\equiv \{S_n\}_s^{s+n-1} \\ &= z_s + z_{s+1} + z_{s+2} + \cdots + z_{s+n-1} \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

şeklindeki gibi oluşturulan sayı dizisidir.

Burada, özellikle vurgulayalım ki araştırmanın her boyutunda ilgili tanımlar kompleks formda sunulmuştur. Elbette ki ilgili tüm bilgiler gerçel formlar için de geçerli olmaktadır. Genellikle, “ z_n genel terimli (kompleks veya reel (gerçel)) sayı serisi” ifadeleriyle de anılabilmektedir.

2.1.24 Tanım. z_n genel terimli bir (kompleks sayı) seri verildiğinde bu serinin kısmi toplamlar dizisi yakınsak ise ilgili seriye yakınsak seri veya kısaca yakınsaktır denir. Yakınsak olmayan (kompleks sayı) serilerine de ıraksak seri veya kısaca ıraksaktır denir (Ahlfors 1966).

Bilindiği üzere, (2.1.9) formundaki herhangi bir (kompleks sayı) serisine ait (2.1.10) formundaki “kısmi toplamlar dizisinin” limitini belirlemek her zaman kolay değildir. Bu bakımdan (2.1.9) formuna sahip (kompleks sayı) serilerinin yakınsaklıkları hakkında bilgi sahibi olmak durumundayız. Bu gibi durumlar için çok sayıda test (kriter) önemli kolaylıklar sağlamaktadır. Burada, bilgi amaçlı olarak o temel testlerden (kriterlerden) sadece ikisini hatırlatmayı uygun görüyoruz.

2.1.25 Tanım. $\{z_n\}_{s \geq 1}$ genel terimli bir (kompleks) sayı dizisi verilsin ve $r_n := |z_n|$ olsun. O zaman, eğer

$$\sum_{n \geq 1}^{\infty} r_n$$

şeklindeki (gerçel) sayı serisi yakınsak ise

$$\sum_{n \geq 1}^{\infty} z_n$$

şeklindeki sayı serisine mutlak (modülce) yakınsaktır denir (Ahlfors 1966).

2.1.2 Teorem. Her bir terimi sıfırdan olmayan olan herhangi bir $\{z_n\}_s$ (kompleks sayı) dizisi verilsin, $r_n := |z_n|$ ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_{n+1}}{r_n} = \Delta \quad \text{veya} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{r_n} = \Delta \quad (0 < \Delta < \infty) \quad (2.1.11)$$

olsun. Bu durumda,

$$\sum_{n=s}^{\infty} z_n$$

şeklindeki bir sayı serisi;

- i) $\Delta < 1$ ise ilgili seri modülce (mutlak) yakınsaktır.
- ii) $\Delta > 1$ veya $L = \infty$ ise ilgili seri ıraksaktır.
- iii) $\Delta = 1$ ise ilgili serinin yakınsaklığı ya da ıraksaklığı için bir şey söylenemez.

2.1.26 Tanım. $s \in \mathbb{N}$ olmak üzere, aşağıdaki gibi verilen;

$$\{\psi_n(z)\}_{n=s}$$

bir (kompleks) fonksiyon dizisi $\mathbf{I}$ gibi bir (kompleks cisim uzayının bir alt) kümesi üzerinde tanımlı olsun. Bu durumda,

$$\psi_s(z) + \psi_{s+1}(z) + \psi_{s+2}(z) + \cdots + \psi_{n+s+1}(z) + \cdots =: \sum_{n=s}^{\infty} \psi_n(z) \quad (2.1.12)$$

şeklinde tanımlanan kompleks serisine, ($\mathbf{I}$ kümesi üzerinde tanımlanmış olan) kompleks fonksiyon serisi adı verilir (Ahlfors 1966).

Tanım 2.1.20, Tanım 2.1.21 ve Tanım 2.1.22, Tanım 2.1.23 tanımlarında ve (2.1.7), (2.1.8) ve (2.1.9)'daki ve hatta (2.1.10)'da özel ifadelerin her biri tüm cisim uzaylarının alt kümelerinde geçerli olmasına rağmen sadece kompleks (cisim) uzayları dikkate alınmıştır. Doğal olarak aşağıdaki gibi tanıtılacak olan ve (2.1.12)'de verilen kompleks fonksiyon seriler ait;

$$\{S_n(z)\}_{n=s}^{n+s+1} \quad \text{veya} \quad \{S_n(z)\}_s^{n+s+1}$$

şeklindeki kısmi toplamlar dizileri söz konusu olacaktır ve ilgili cisim uzayı da $\mathbf{F} := \mathbb{C}$ olup $\mathbf{I} \subset \mathbb{F}$ gibi bir alt küme göz önüne alınacaktır.

2.1.27 Tanım. $\mathbf{I}$ gibi kümesi üzerinde tanımlı olan $\psi_s(z)$ gibi bir (kompleks) fonksiyon dizisini genel terim kabul eden $\sum_{n=s}^{\infty} \psi_s(z)$ şeklindeki (kompleks) fonksiyon serilerine ait olan $\{S_n(z)\}_s$ kısmi toplamlar dizisi yakınsak ise $\sum_{n=s}^{\infty} \psi_s(z)$ fonksiyon serisine ($\mathbf{I}$ kümesi üzerinde) yakınsak bir (fonksiyon) serisi veya kısaca yakınsaktır denir (Ahlfors 1966).

Karmaşadan kurtulmak adına, Tanım 2.1.27’de ifade edilen ve yakınsak olan herhangi bir fonksiyon serisinin kısmi toplamlar dizisini $\{S_n(z)\}_1$ şeklinde düşünelim. Doğal olarak ilgili (kompleks) fonksiyon dizisi her $z \in \mathbf{I}$ için yakınsak olup;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(z) = s(z)$$

şeklindeki gibi $\mathbf{I}$ kümesinde tanımlı olan bir $s(z)$ gibi bir (kompleks) fonksiyon söz konusudur ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} \psi_s(z) = s(z)$$

şeklindeki gibi bir yazımın yine söz konusu olacaktır.

Aynı zamanda, ilgili kompleks serinin “kalan terimler toplamı” olarak adlandırılan genellikle $K_n(z)$ ile gösterilen ve

$$K_n(z) = \psi_n(z) + \psi_{n+1}(z) + \psi_{n+2}(z) + \dots \quad (2.1.13)$$

şeklindeki gibi bir (kompleks) fonksiyon serisi olacaktır. Özellikle,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \psi_n(z) = \sum_{j=1}^n \psi_n(z) + \sum_{j=n+1}^{\infty} \psi_n(z)$$

veya

$$\sum_{j=1}^{\infty} \psi_n(z) = S_n(z) + K_n(z)$$

ilişkileri de açık olup ve

$$\begin{aligned} s(z) - \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(z) &= \lim_{n \rightarrow \infty} [s(z) - S_n(z)] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} K_n(z) \end{aligned}$$

şeklindeki ilişkinin doğal bir sonucu gereği, her $z \in \mathbf{I}$ kompleks sayısı için (2.1.13) formuna sahip olan ilgili kalan terimler dizisi, yani $K_n(z)$ (kompleks) fonksiyon dizisi de sıfıra yakınsayan bir dizi olacaktır.

2.1.28 Tanım. $\mathbf{I}$ üzerinde tanımlı olan bir (kompleks) fonksiyon serisinin kısmi toplamlar dizisi ($\mathbf{I}$ üzerinde) düzgün yakınsak ise ilgili (kompleks) fonksiyon serisine ($\mathbf{I}$ kümesi üzerinde) düzgün yakınsak bir (kompleks fonksiyon) serisidir veya kısaca düzgün yakınsaktır denir (Ahlfors 1966).

2.1.3 Teorem. $\mathbf{I}$ üzerinde verilen bir (kompleks) fonksiyon serisinin $s(z)$ gibi bir fonksiyona yakınsaması için gerek ve yeter şart her $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde ve her bir $z \in \mathbf{I}$ olduğunda öyle bir $N := N(z; \varepsilon) \in \mathbb{N}_s$ sayısı için

$$|S_n(z) - s(z)| = |K_n(z)| < \varepsilon$$

dır (Ahlfors 1966).

2.1.4 Teorem. $\mathbf{I}$ üzerinde verilen bir (kompleks) fonksiyon serisinin $s(z)$ gibi bir (kompleks) fonksiyona düzgün olarak yakınsaması için gerek ve yeter şart her $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde öyle bir $N := N(\varepsilon) \in \mathbb{N}_1$ sayısı vardır öyle ki her $z \in \mathbf{I}$ ve her $n \geq N$ için

$$|S_n(z) - s(z)| = |K_n(z)| < \varepsilon$$

dır (Ahlfors 1966).

Kompleks sayı serilerine ait kısmi toplamlar dizilerinin yakınsaklık durumlarının araştırılması işinin güçlüğüne belirtmiştik. Doğal olarak benzeri bir araştırmanın (kompleks) fonksiyon serilerine ait kısmi toplamlar dizileri için de hiç de kolay olmayacaktır. Bu gibi araştırmalar açısından, ilgili fonksiyon serilerinin yakınsaklık ve özellikle düzgün yakınsaklık durumlarının araştırması için de Weierstrass M Kriteri (Testi) olarak bilinen kriter (teoremi) oldukça kolaylık sağlamaktadır. Yine detaylı bilgiler için Ahlfors (1966) eseri önemli bir eser olacaktır.

2.1.5 Teorem. $\mathbf{I}$ kümesi üzerinde verilen $\psi_n(z)$ gibi genel terimli bir (kompleks) fonksiyon serisi verilsin. Bu durumda, her $z \in \mathbf{I}$ için $|\psi_n(z)| \leq \kappa_n$ (gibi bir pozitif

terimli) reel (gerçel) bir sayı dizisi var ve $\sum_{n=1}^{\infty} \kappa_n$ (reel) sayı serisi de yakınsak ise $\sum_{n=s}^{\infty} \psi_n(z)$ (kompleks) fonksiyon serisine (I üzerinde) düzgün yakınsaktır (Ahlfors 1966).

2.1.6 Teorem. I kümesi üzerinde $\psi_n(z)$ genel terimli bir $\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(z)$ fonksiyon serisi verilsin. Her bir $n \in \mathbb{N}_1$ sayısı için $\psi_n(z)$ (kompleks) fonksiyonları türevlenebilir ve $\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(z)$ (kompleks) fonksiyon serisi de düzgün yakınsak ise $\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(z)$ (kompleks) fonksiyon serisi terim terime hem türevlenebilirdir hem de integrallenebilirdir (Ahlfors 1966).

2.1.29 Tanım. $\{z_n\}_s$ bir sayı serisi olmak üzere,

$$\Omega_n(z) = (z - z_0)^n z_n$$

genel terimli (kompleks) fonksiyon serilerine (kompleks) kuvvet serisi adı verilir (Ahlfors 1966).

Doğal olarak Teorem 2.1.2 gereğince (2.1.11) ile verilen limitler ile Tanım 2.1.29'da vurgulanan (kompleks) kuvvet serileri için göz önüne alındığında

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\Omega_{n+1}(z)}{\Omega_n(z)} \right| < 1 \quad (2.1.14)$$

veya

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\Omega_n(z)|} < 1 \quad (2.1.15)$$

koşullarını sağlayan kompleks formdaki kümeler,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Omega_n(z) \quad (\Omega_n(z) = (z - z_0)^n z_n)$$

şeklindeki (kompleks) fonksiyon serilerinin, yani (kompleks) kuvvet serilerinin mutlak (veya modülce) yakınsaklık durumları ile ilgili bölgeler hakkında detaylı bilgi verecektir (Ahlfors 1966).

2.1.30 Tanım. $\psi := \psi(z)$ gibi bir (kompleks değişkenli) fonksiyonu $z = z_0$ gibi bir noktanın (en az) bir komşuluğunda analitik olsun. Bu durumda, aşağıdaki gibi verilen;

$$\psi(z) = \psi(z_0) + \psi'(z_0)(z - z_0) + \frac{\psi''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2$$

$$\begin{aligned}
& + \dots + \frac{\psi^{(j)}(z_0)}{j!} (z - z_0)^2 + \dots \\
& = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\psi^{(j)}(z_0)}{j!} (z - z_0)^j
\end{aligned} \tag{2.1.16}$$

şeklindeki (kompleks kuvvet) serisine, $\psi(z)$ fonksiyonunun $z = z_0$ noktasındaki Taylor seri açılımı adı verilir (Ahlfors 1966).

Özellikle, (2.1.8)'de verilen kuvvet seri açılımında $z_0 = 0$ alınarak elde edilen;

$$\begin{aligned}
\psi(z) &= \psi(0) + \psi'(0)z + \frac{\psi''(0)}{2!}z^2 + \dots + \frac{\psi^{(j)}(0)}{j!}z^j + \dots \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\psi^{(j)}(0)}{j!}z^j
\end{aligned} \tag{2.1.17}$$

şeklindeki (kompleks) kuvvet seri açılımına da $\psi(z)$ (z -bağımsız değişkenli) kompleks fonksiyonunun $z_0 = 0$ noktasındaki Taylor seri açılımı veya kısaca MacLaurin seri açılımı adı verilir. Bilindiği gibi,

$$\psi^{(j)}(z) = \frac{d^j \psi}{dz^j} \quad (j \in \mathbb{N}_0)$$

dır (Ahlfors 1966).

Hem (2.1.16) hem de (2.1.16)'nın özel bir durumu olan (2.1.17)'deki kompleks serilerinin katsayılarının belirleyicisi konumunda olan ilgili kompleks sayılar ve onların da

$$\psi^{(j)}(z_0) := \psi^{(n)}(z) \Big|_{z:=z_0} \equiv \frac{d^n \psi}{dz^n} \Big|_{z:=z_0}$$

şeklindeki açık olan ifadeleri ile birlikte, Teorem 2.1.1 ile verilen ilgili kompleks türev ve integral ilişkileri de göz önüne alındığında da ilgili katsayılarda rolleri olan sayıların;

$$\psi^{(j)}(z_0) = \frac{j!}{2\pi i} \int_{\gamma: |z-z_0|=\epsilon} \frac{\psi(z)}{(z-z_0)^{j+1}} dz \quad (j \in \mathbb{N}_0)$$

şeklindeki ilişkileri de açıktır.

Ayrıca, binom açılımı olarak bilinen (Coolidge 1949)

$$(z + z_0)^j = \sum_{n=0}^j \binom{j}{n} z^{j-n} z_0^n \quad (j \in \mathbb{N}_0)$$

şeklindeki meşhur açılım eğer (2.1.16)'da geçen ilgili kompleks kuvvetler serileri için göz önüne alınırsa (2.1.16) ile verilen kompleks serilerinin (ve doğal olarak onun özel hali olan (2.1.17)'deki serilerinin) en genel formunun;

$$\varphi(z) := \mathbb{L}_n^s(z) := \omega_n z^n + \omega_{n+s} z^{n+s} + \omega_{n+s+1} z^{n+s+1} + \dots \quad (2.1.18)$$

$$(s, n \in \mathbb{N}_0 ; \omega_n \in \mathcal{D} \subset \mathbb{C})$$

şeklindeki gibi kompleks fonksiyon serileri olacağı açıktır. Yukarıda yazılan $\mathcal{D}$ kümesi, elbette ki (2.1.18) serisine karşılık gelecek olan kompleks fonksiyon serisinin düzgün yakınsak olması koşulunda zorunlu olan ilgili bölge olup Tanım 2.1.28 ve Teorem 2.1.4'te belirtilen bilgiler ışığında, $\mathcal{D}$ gibi bir (kompleks) bölgede ilgili (kompleks) fonksiyon serisi $\varphi(z)$ gibi analitik fonksiyonu ifade edecektir. Hem (2.1.18)'deki gibi verilen (kompleks) fonksiyon serileri hem de bu genel formun daha özel hallerini içeren ve aşağıdaki gibi sunulacak olan bazı elementer (kompleks) fonksiyonlarının yakınsamayla ilgili teoremler ile (2.1.11)-(2.1.15) verilen bilgiler kapsamına göre gerekli yakınsaklık araştırmalarını araştırmacıların ilgisine bırakıyoruz.

2.1.1 Örnek. $\psi(z) = e^z$ kompleks (değişkenli) üstel fonksiyonu $\mathbb{C}$ kümesinde analitik, yani tam bir fonksiyondur. Dolayısıyla, bu tam fonksiyonunun her mertebeden türevi vardır ve her $n \in \mathbb{N}_0$ için de,

$$\frac{d^m}{dz^m}(e^z) = e^z \implies \frac{d^m}{dz^m}(e^z) \Big|_{z:=0} = 1$$

dır. Bu durumda, (2.1.17) formundaki kompleks fonksiyon serisi de;

$$\psi(z) = e^z = 1 + z + \frac{1}{2!} z^2 + \frac{1}{3!} z^3 + \dots + \frac{1}{n!} z^n + \dots \quad (2.1.19)$$

şeklindeki kompleks fonksiyon serisi olacaktır. Hemen yukarıda belirtilen özel açıklamalar paralelinde, (2.1.19) ile verilen ilgili fonksiyon serisinin $\mathbb{U}$ bölgesinde yakınsak hatta düzgün yakınsak olduğu görülebilir.

2.1.2 Örnek. $\psi(z) = \text{Sinz}$ olsun. Bu kompleks değişkenli trigonometrik fonksiyonu tam fonksiyon olduğundan dolayı her mertebeden türevi de mevcuttur. Dolayısıyla, her $\ell \in \mathbb{N}_0$ sayısı için

$$\frac{d^{2\ell}}{dz^{2\ell}}(\text{Sinz}) = (-1)^\ell \text{Sinz} \implies \frac{d^{2\ell}}{dz^{2\ell}}(\text{Sinz}) \Big|_{z:=0} = 0$$

ve

$$\frac{d^{2\ell+1}}{dz^{2\ell+1}}(\text{Sin}z) = (-1)^\ell \text{Cos}z \Rightarrow \frac{d^{2\ell+1}}{dz^{2\ell+1}}(\text{Sin}z) \Big|_{z:=0} = (-1)^\ell$$

olur. O zaman, ilgili kompleks fonksiyonun serisi açılımı da

$$\text{Sin}(z) = z - \frac{1}{3!} z^3 + \frac{1}{5!} z^5 - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} + \dots \quad (z \in \mathbb{U}) \quad (2.1.20)$$

şeklindeki gibi bir kuvvet serisi olur. Bu kompleks fonksiyon serisi de $\mathbb{U}$ bölgesinde düzgün yakınsak olan bir kompleks kuvvet serisidir.

2.1.3 Örnek. $\psi(z) = \text{Cos}z$ olsun. Bu durumda, bu kompleks (değişkenli) trigonometrik fonksiyon da yine bir tam fonksiyon olup her $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$\frac{d^{2n}}{dz^{2n}}(\text{Cos}z) = (-1)^n \text{Cos}z \Rightarrow \frac{d^{2n}}{dz^{2n}}(\text{Cos}z) \Big|_{z:=0} = (-1)^n$$

ve

$$\frac{d^{2n+1}}{dz^{2n+1}}(\text{Cos}z) = (-1)^n \text{Sin}z \Rightarrow \frac{d^{2n+1}}{dz^{2n+1}}(\text{Cos}z) \Big|_{z:=0} = 0$$

sonuçları kolayca elde edilir. Böylece ilgili fonksiyonuna ait MacLaurin serisi açılımı da

$$\text{Cos}(z) = 1 - \frac{1}{2!} z^2 + \frac{1}{4!} z^4 - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} + \dots \quad (z \in \mathbb{U}) \quad (2.1.21)$$

şeklindeki kompleks serisi olur.

2.1.4 Örnek. Kesirsel formda verilen;

$$\psi(z) = \frac{1}{1-z} \quad (z \in \mathbb{U})$$

şeklindeki gibi bir kesirsel formundaki kompleks (bağımsız değişkenli) fonksiyonu $\mathbb{U}$ açık diskinde analitik bir fonksiyon olup her $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$\frac{d^n}{dz^n} \left(\frac{1}{1-z} \right) = \frac{n!}{(1-z)^{n+1}} \Rightarrow \frac{d^n}{dz^n} \left(\frac{1}{1-z} \right) \Big|_{z_0:=0} = n!$$

dır. Bu durumda, ilgili kompleks kuvvet serisi de

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \dots + z^n + \dots \quad (z \in \mathbb{U}) \quad (2.1.22)$$

şeklindeki seri olur.

Bu bölümün son özel bilgilendirmeleri olarak (2.1.19) ve (2.1.22) arasında verilen elementer kompleks fonksiyonlarından yararlanarak ilgili fonksiyonların daha da kompleks formlarına ilişkin aşırı sayıda fonksiyon seri açılımları da kolayca elde edilebilir. Örneğin, Örnek 2.1.4'te, eğer

$$z := \frac{z}{\alpha} \quad (|z| < |\alpha| ; \alpha \in \mathbb{C}^* := \mathbb{C} - \{0\})$$

gibi bir seçim göz önüne alınırsa kolayca,

$$\frac{\alpha}{\alpha-z} = 1 + \frac{z}{\alpha} + \left(\frac{z}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{z}{\alpha}\right)^3 + \dots + \left(\frac{z}{\alpha}\right)^n + \dots$$

kompleks fonksiyonu ile bunun ifade ettiği kompleks fonksiyon serisi elde edilir.

2.2 $\mathbb{G}(v; u)(t)$ İntegral Dönüşümleri

Bu alt bölüm de hem reel hem de kompleks parametrelerle ifade edilebilen ve genel bir yapıya sahip olan bir dönüşüm olmakla birlikte kapsamında integral teorisi esas rol oynayacaktır. Bunun için öncelikli olarak

$$m \neq n \quad , \quad m \in \mathbb{N}_2 \quad \text{ve} \quad n \in \mathbb{N}_2 \quad (2.2.1)$$

olmak üzere özellikle,

$$\int_0^\infty e^{-\kappa^{m/n}} d\kappa \quad (2.2.2)$$

şeklindeki reel değişkenli genelleştirilmiş integraller ve bunların çözümleri, klasik analiz bilgilerimizin yeterli olmadığı durumlarda, oldukça faydalı matematiksel araçlar olarak başta matematik bilimi olmak üzere, bilim ve teknoloji açısından önemi asla inkar edilemez özel integrallerdir. Çünkü ilgili m ve n doğal sayılarının çeşitli seçilmesi sonucu, (2.2.2) formundan elde edilebilecek sonsuz sayıda genelleştirilmiş integral söz konusudur. Bunların en bilindik özel halleri olan

$$\int_0^\infty e^{-\kappa} d\kappa, \int_0^\infty e^{-\sqrt{\kappa}} d\kappa, \int_0^\infty e^{-\sqrt[3]{\kappa}} d\kappa, \dots, \int_0^\infty e^{-\sqrt[n]{\kappa}} d\kappa \quad (n \in \mathbb{N}_2), \dots$$

şeklindeki genelleştirilmiş integrallerinin yakınsak oldukları hepimiz tarafından zaten bilinmekte ve eşiti olan ilgili sayılar da analiz bilgileriyle kolayca belirlenebilmektedir. Aynı zamanda (2.2.2)'nin özel hallerinden biri olan ve $m = 2n$ olacak şekilde seçilmesi sonucu elde edilen

$$\int_0^\infty e^{-\kappa^2} d\kappa \quad (2.2.3)$$

şeklindeki genelleştirilmiş integralinin yine yakınsak olduğunu ve herkesçe bilinen iki katlı integraller yardımıyla ilgili yakınsayan sayının belirlenebildiğini hepimiz hatırlarız. Yukarıda vurgulanan özel formlar dışında, diğer (2.2.2) formundaki genelleştirilmiş tüm integrallerin yakınsadıkları sayıları belirlemek reel analiz bilgileriyle mümkün değildir. Örneğin, (2.2.1) koşuluna sahip olan m ve n doğal sayıları olmak üzere, $m = \ell n$ ($\ell \in \mathbb{N}_3$) şartının da olan her ℓ doğal sayısı için

$$\int_0^\infty e^{-\kappa^\ell} d\kappa \quad (2.2.4)$$

şeklindeki genelleştirilmiş integrallerin yakınsaklığı bilinmesine rağmen ilgili reel sayılar temel reel analiz bilgileriyle belirlenemez.

Faktöriyel kavramının reel sayılara genişletilmesi ve akabinde özel fonksiyonlar sınıfında yer alan ve hem teorik hem de uygulamalı alanlarda sıkça karşılaşılan fonksiyonlardan biri olan Gamma fonksiyonu oluşturulması, (2.2.2) formuna sahip olan tüm genelleştirilmiş integrallerin belirlenmesine de önemli zemin oluşturmuştur. Şimdi bu özel fonksiyonu önce tanıtalım ardından esas amacımıza yönelelim.

Literatürde hem reel (gerçel) hem de kompleks parametrelili (değişkenli) olarak sıkça karşılaşılan ilgili özel fonksiyonun temel işlevleri için öncelikli olarak

$$\mathbb{Z}_0^- := \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \quad \text{ve} \quad \mathbf{R} := \mathbb{R} - \mathbb{Z}_0^- \quad (2.2.5)$$

şeklindeki özel kümeler önemli rol oynayacaktır.

2.2.1 Tanım. Her $\eta \in \mathbf{R}$ için, η parametrelili (değişkenli) Gamma fonksiyonu $\Gamma(\eta)$ ile gösterilir ve

$$\Gamma(\eta) = \int_0^\infty w^{\eta-1} e^{-w} dw \quad (2.2.6)$$

şeklindeki gibi genelleştirilmiş integralle tanımlanır (Birkhoff 1913).

Üstteki integralde belirtilen integral sınırı, integralde geçen;

$$\varphi(w) = w^{\eta-1}$$

şeklindeki w (reel) bağımsız değişkenli fonksiyonu ile η parametresi birlikte göz önüne alınır ve reel analiz bilgileri kapsamında incelenirse (2.2.5)'te belirtilen koşullar altında,

(2.2.6) ile tanımlanmış integralin belirli integral veya genelleştirilmiş integral ilişkileri kolayca görülebilir. Literatürde, η parametresinin reel sayı olması durumunda $\eta > 0$ şartı veya η parametresinin kompleks sayı olması durumunda da $\Re(\eta) > 0$ şartı (2.2.6) integralinin varlığını aşıkâr kılar. Fakat, $\epsilon > 0$ olmak üzere,

$$\int_0^\infty w^{\eta-1} e^{-w} dw = \int_0^\epsilon w^{\eta-1} e^{-w} dw + \int_\epsilon^\infty w^{\eta-1} e^{-w} dw$$

şeklindeki ilişkilerde geçen birinci tipten ve ikinci tipten genelleştirilmiş integralleri de içeren olası tüm integraller hakkındaki detaylı klasik analiz bilgileri ve bu tez çalışmasının devamındaki ekstra bilgiler, Tanım 2.2.1’de geçen $\eta \in \mathbf{R}$ olma koşulunu da doğrulayacaktır.

Dolayısıyla, Tanım 2.2.1’deki (2.2.6) formunda verilen genelleştirilmiş integralin yakınsaklığı için η reel parametresi için konulması gereken koşul göz önüne alınarak η parameteresinin kompleks olması durumundaki gerekli şart da kolayca belirlenebilir. Bunun için, $\eta \in \mathbb{C}$ olması durumu hakkında bazı önemli bilgilendirmede bulunmak faydalı olacaktır.

Bu durumda, ilgili parametre $\eta = \alpha + i\beta$ şeklinde olsun. (2.2.6) ile verilen integralin varlığı göz önüne alınarak aşağıdaki özel bilgilendirme;

$$\begin{aligned} |w^{\eta-1} e^{-w}| &= |w^{\alpha+i\beta-1} e^{-w}| \\ &= |w^{i\beta} w^{\alpha-1} e^{-w}| \\ &= |w^{i\beta}| |w^{\alpha-1} e^{-w}| \\ &= |w^{\alpha-1} e^{-w}| \\ &< \infty \end{aligned} \tag{2.2.7}$$

olmasını zorunlu kılacaktır. Dolayısıyla, (2.2.7)’nin varlığı da ancak $\Re(\eta) = \alpha \in \mathbf{R}$ olması ile mümkün olacaktır.

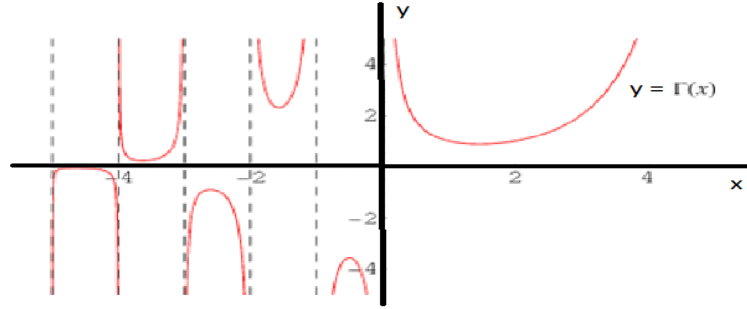
Kompleks parametrelî Gamma fonksiyonun varlığı için gerekli bilgilendirmeden sonra Tanım 2.2.1 tanımıyla dizayn edilmiş ilgili genelleştirilmiş integral, w (reel) değişkenli ve $w \geq 0$ koşulu altında tanımlanan ilgili fonksiyon hakkında bazı özel bilgilendirmeleri de hatırlatmakta fayda görmekteyiz. Klasik analiz bilgileri göz önüne

alındığında ilgili genelleştirilmiş integralin yakınsaklığının önemli olması zorunluluk gereği olup ancak (2.2.2) ile verilen şartlar altından, (2.2.6) ile verilen genelleştirilmiş integral için aşağıda verilenler de kolayca görülebilir.

i) Her $\eta \in \mathbb{Z}_0^-$ için (2.2.6)'da geçen fonksiyon göz önüne alındığında ilgili genelleştirilmiş integralin ıraksaklığı kolayca görülebilir. Bu durumda, $\Gamma(\eta)$ değerleri söz konusu bile olamaz.

ii) Her $\eta \in \mathbb{R}$ değerleri için (2.2.6) ile verilen genelleştirilmiş integralin yakınsaklığı kolayca görülebilir. Bu durumda, $\Gamma(t)$ değerleri mevcut olacaktır.

iii) (i) ve (ii) ile verilen bilgilerin detaylı incelenmesi sonucu, her $x := \eta \in \mathbb{R}$ sayısı için, $y = f(x) := \Gamma(x)$ gibi bir fonksiyonuna ait grafik aşağıdaki bilgileri içeren özel bir grafikdir.



Şekil 2.1 Reel parametrelili Gamma fonksiyonunun grafiği

iv) Her $x := \kappa \in \mathbb{N}$ olduğunda, art arda uygulanan kısmi integrallenme yöntemiyle, Gamma fonksiyonunun;

$$\Gamma(\kappa + 1) = \kappa \Gamma(\kappa) = \cdots = \kappa!$$

şeklindeki faktöriyel ilişkisini sağladığı kolayca görülebilir.

v) (iv) ile verilen genel bilginin yardımıyla, her $\kappa \in \mathbb{R}$ sayısı için, aşağıda verilen gerektirme;

$$\Gamma(\kappa + 1) = \kappa \Gamma(\kappa) \Rightarrow \Gamma(\kappa) = \frac{\Gamma(\kappa+1)}{\kappa}$$

kolayca elde edilir.

Yukarıdaki verilen bilgiler ve analiz bilgileri yardımıyla, aşağıdaki verilen özel sonuçlar hem Şekil 2.1 grafiği ile verilen verilerle karşılaştırılabilir hem de her biri kolayca hesaplanabilir. Ayrıca hem reel hem de kompleks parametrelili (değişkenli) Gamma fonksiyonu ile ilgili daha detaylı özel sonuçlar ve hesaplamalar için de Abramowitz and Stegun (1972), Olver et al. (2010) ve Beals and Wong (2010) ile verilen eserlere odaklanılabilir.

2.2.1 Örnek.

$$\begin{aligned}
 \text{i)} \quad \Gamma(25) &= \int_0^{\infty} w^{24} e^{-w} dw \\
 &= 24 \Gamma(24) = 24 \cdot 23 \Gamma(23) \\
 &= \dots \\
 &= 24! \text{ dır.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ii)} \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^{\infty} w^{-1/2} e^{-w} dw \\
 &= \sqrt{\pi} \text{ dır.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{iii)} \quad \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) &= \int_0^{\infty} w^{1/2} e^{-w} dw \\
 &= \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\
 &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{ dır.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{iv)} \quad \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) &= \int_0^{\infty} w^{-3/2} e^{-w} dw \\
 &= \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}+1\right)}{-\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{-\frac{1}{2}} \\
 &= -2\sqrt{\pi} \text{ dır.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{v)} \quad \Gamma\left(\frac{7}{2}\right) &= \int_0^\infty w^{5/2} e^{-w} dw \\
&= \frac{5}{2} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) \\
&= \frac{5}{2} \frac{3}{2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \\
&= \frac{5}{2} \frac{3}{2} \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{15\sqrt{\pi}}{8} \text{ dır.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{vi)} \quad \Gamma\left(-\frac{5}{2}\right) &= \int_0^\infty w^{-7/2} e^{-w} dw \\
&= \frac{\Gamma\left(-\frac{5}{2}+1\right)}{-\frac{5}{2}} \\
&= -\frac{2}{5} \frac{\Gamma\left(-\frac{3}{2}+1\right)}{-\frac{3}{2}} \\
&= \frac{4}{15} \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) \\
&= -\frac{8}{15} \sqrt{\pi} \text{ dır.}
\end{aligned}$$

Şimdi, Irmak ve Açığöz (2023) tarafından tanımlanmış ve oldukça genel bir forma sahip olan ilgili (integral) dönüşümünün hem karakterizasyonu hem de genel ifadesi için amaca uygun olan reel (gerçek) değişkenli $v(t)$ ve $u(t)$ gibi iki fonksiyon verilsin. $[0, \infty)$ gibi bir aralıkta sınırlı olan reel (gerçek) değişkenli $\omega(t)$ gibi bir fonksiyon ise

$$\omega(t) := v(t) e^{-u(t)} \quad (2.2.8)$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda, özellikle, $v := v(t)$ fonksiyonunun karakterize edeceği ilgili (integral) dönüşümünü;

$$\mathbb{G}[v; u](t) := \mathbb{G}[v(t); u(t)]$$

şeklinde gösterelim ve

$$\mathbb{G}[v(t); u(t)] := \int_0^\infty \omega(t) dt \quad (2.2.9)$$

şeklindeki gibi (birinci tipten) genelleştirilmiş integral ile tanımlayalım.

Kısacası, klasik analiz bilgileri göz önüne alındığında belirtilen aralıktaki değerlere göre, sınırlılıkları oldukça önemli olan ve (2.2.8) ile (2.2.9) arasındaki ilişkinin mantıklı bir dönüşüm açısından önemli olup amacımızın kapsamına uygun olan $v(t)$ ve $u(t)$ reel değişkenli fonksiyonlar yardımıyla ve

$$\mathbb{G}[v(t); u(t)] := \int_0^\infty v(t)e^{-u(t)} dt$$

şeklinde olan bir genelleştirilmiş integral ile tanımlanan bir (integral) dönüşüm olup böylesi bir dönüşümün varlığı ise elbette ki ilgili genelleştirilmiş integralin yakınsaklığı ile mümkün olan bir (integral) dönüşüm olmak durumundadır.

Özellikle, ilgili bir yakınsama açısından her $t \in [0, \infty)$ reel değerleri için doğal olarak klasik analiz bilgilerinin yanı sıra ilgili $u := u(t)$ fonksiyonunun belirleyeceği üstel formun sınırlılığı bir zorunluluktur.

Gerek integral dönüşümleri gerekse operatör teorisinde önemli olan bazı temel önermeleri ilgili dönüşümümüz için ele alalım. Onların ispatları için de temel integral teorisinin bazı bilindik özelliklerini dikkatlice göz önüne almak yeterli olacaktır. Özellikle, skalarla çarpma ve $v := v(t)$ fonksiyonuna göre dikkate alınacak olan lineerlik özelliğini (andıran) en temel olan özelliklerdir. Her C_1 ve C_2 skalarları ve her $v_1(t)$ ve $v_2(t)$ reel bağımsız değişkenli fonksiyonları için aşağıdaki önermeler kolayca oluşturulabilir. Aşağıda verilen ve (2.2.9) genelleştirilmiş integral dönüşümü ile ilgili olan tüm teorik ve (bazı) uygulamalı sonuçların her biri Irmak ve Açıkgöz (2023) tarafından literatüre kazandırılmış makaledeki özel bilgileri içermektedir.

2.2.1 Önerme. Her C_1 ve C_2 skalarları ve her $v_1(t)$ ve $v_2(t)$ fonksiyonları için aşağıdaki verilen önermeler daima doğrudur.

$$\text{i)} \quad \mathbb{G}[C_1 v_1(t); u(t)] \equiv C_1 \mathbb{G}[v_1(t); u(t)] \quad (2.2.10)$$

$$\begin{aligned} \text{ii)} \quad \mathbb{G}[C_1 v_1(t) + C_2 v_2(t); u(t)] &\equiv \mathbb{G}[C_1 v_1(t); u(t)] + \mathbb{G}[C_2 v_2(t); u(t)] \\ &\equiv C_1 \mathbb{G}[v_1(t); u(t)] + C_2 \mathbb{G}[v_2(t); u(t)]. \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

Klasik integral (dönüşüm) teorisi bilgilerinden faydalananak yukarıda geçen (2.2.10) ve (2.2.11) önermelerinin içerdığı çok temel özellikler dışında veya bilindik integral dönüşümlerinin ışığında çeşitli özellikler de yine oluşturulabilir. Ayrıca (2.2.8) ile verilen özel fonksiyon ve (2.2.9) ile verilen özel (yakınsak olan genelleştirilmiş) integral göz önünde bulundurularak klasik analiz bilgileri ışığında ve u ile v olarak ifade edilen ilgili reel değişkenli fonksiyonlarının farklı ve uygun biçimleri seçilerek çok sayıda aşına olunan sonuçlara kolayca da varılabilir. Örnek 2.2.1 ile verilen özel bilgileri kullanarak (2.2.6)-(2.2.11) arasında elde edilen özel sonuçların (veya bağıntıların) yardımıyla çok sayıda özel sonuçlara (veya bağıntılara) kolayca varılabilir. Şimdi, onlardan bazılarını özel örnekler şeklinde sunalım.

2.2.2 Örnek.

$$\begin{aligned}
 \text{i)} \quad \mathbb{G}[1; t] &:= \int_0^\infty 1 e^{-t} dt \\
 &= \int_0^\infty t^{1-1} e^{-t} dt \\
 &= \Gamma(1) \\
 &= 0! \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

olur. O halde,

$$\mathbb{G}[1; t] = 1$$

olur.

$$\begin{aligned}
 \text{ii)} \quad \mathbb{G}[t; t] &:= \int_0^\infty t e^{-t} dt \\
 &= \int_0^\infty t^{2-1} e^{-t} dt \\
 &= \Gamma(2) \\
 &= 1! \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

dir. O halde,

$$\mathbb{G}[t; t] = 1$$

olur.

$$\begin{aligned}
\text{iii)} \quad \mathbb{G}[\alpha t; \beta t] &:= \int_0^\infty (\alpha t) e^{-\beta t} dt \\
&= \alpha \int_0^\infty t e^{-\beta t} dt \quad (\alpha \in \mathbb{R}^* := \mathbb{R} - \{0\}; \beta > 0)
\end{aligned}$$

olup ve burada, eğer $\beta t = T$ şeklindeki gibi bir değişken değişimi göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
\mathbb{G}[\alpha t; \beta t] &= \alpha \int_0^\infty t e^{-\beta t} dt \\
&= \frac{\alpha}{\beta^2} \int_0^\infty T e^{-T} dt \\
&= \frac{\alpha}{\beta^2} \int_0^\infty T^{2-1} e^{-T} dt \\
&= \frac{\alpha}{\beta^2} \Gamma(2) \\
&= \frac{\alpha}{\beta^2} 1! \\
&= \frac{\alpha}{\beta^2}
\end{aligned}$$

sonucuna varılır. O halde,

$$\mathbb{G}[\alpha t; \beta t] = \frac{\alpha}{\beta^2} \quad (\alpha \in \mathbb{R}^*; \beta > 0)$$

olur.

$$\begin{aligned}
\text{iv)} \quad \mathbb{G}[2 - 3t; t] &:= \int_0^\infty (2 - 3t) e^{-t} dt \\
&= \int_0^\infty 2 e^{-t} dt + \int_0^\infty (-3t) e^{-t} dt \\
&= 2 \int_0^\infty t^{1-1} e^{-t} dt - 3 \int_0^\infty t^{2-1} e^{-t} dt \\
&= 2\Gamma(1) - 3\Gamma(2) \\
&= -1
\end{aligned}$$

elde ederiz. O halde,

$$\mathbb{G}[2 - 3t; t] = -1$$

olur.

$$\begin{aligned}
\text{v)} \quad \mathbb{G}[\sqrt{t}; t] &:= \int_0^\infty \sqrt{t} e^{-t} dt \\
&= \int_0^\infty t^{1/2} e^{-t} dt \\
&= \int_0^\infty t^{1/2+1-1} e^{-t} dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\infty t^{3/2-1} e^{-t} dt \\
&= \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2}
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde,

$$\mathbb{G}[\sqrt{t}; t] = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

vi)

$$\begin{aligned}
\mathbb{G}[-1; \sqrt{t}] &:= \int_0^\infty (-1) e^{-\sqrt{t}} dt \\
&= - \int_0^\infty e^{-\sqrt{t}} dt
\end{aligned}$$

olup ve burada, eğer $t = T^2$ şeklindeki gibi bir değişken değişimi yapılırsa

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-\sqrt{t}} dt &= \int_0^\infty e^{-T} d(T^2) \\
&= 2 \int_0^\infty T e^{-T} dT \\
&= 2 \int_0^\infty T^{2-1} e^{-T} dT \\
&= 2 \Gamma(2) \\
&= 2
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde,

$$\begin{aligned}
\mathbb{G}[-1; \sqrt{t}] &:= \int_0^\infty (-1) e^{-\sqrt{t}} dt \\
&= - \int_0^\infty e^{-\sqrt{t}} dt \\
&= -2
\end{aligned}$$

olur.

vii)

$$\mathbb{G}[\sqrt{t}; \sqrt{t}] := \int_0^\infty \sqrt{t} e^{-\sqrt{t}} dt$$

olup ve burada $t = T^2$ şeklindeki gibi bir değişken değişimi tekrar uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \sqrt{t} e^{-\sqrt{t}} dt &= \int_0^\infty T e^{-T} d(T^2) \\
&= 2 \int_0^\infty T^2 e^{-T} dT
\end{aligned}$$

$$= 2 \int_0^{\infty} T^{3-1} e^{-T} dT$$

$$= 2\Gamma(3)$$

$$= 4$$

sonucu elde edilir. O halde,

$$\mathbb{G}[\sqrt{t}; \sqrt{t}] := \int_0^{\infty} \sqrt{t} e^{-\sqrt{t}} dt$$

$$= 4$$

olacaktır.

viii)

$$\mathbb{G}\left[\frac{1}{\sqrt{t}}; t^2\right] := \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t^2} dt$$

olup ve burada $T = t^2$ şeklindeki gibi bir değişken değişimi göz önüne alınırsa

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t^2} dt = \int_0^{\infty} \frac{1}{T} e^{-T} d(T^2)$$

$$= 2 \int_0^{\infty} e^{-T} dT$$

$$= 2 \int_0^{\infty} T^{1-1} e^{-T} dT$$

$$= 2\Gamma(1)$$

$$= 2$$

sonucu elde edilir. O halde,

$$\mathbb{G}\left[\frac{1}{\sqrt{t}}; t^2\right] := \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t^2} dt$$

$$= 2$$

olur.

ix)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \pi$$

klasik analiz derslerinde karşımıza çeşitli şekillerde çıkan bu sonucu bir kez de Gamma fonksiyonu yardımıyla görelim. İntegralde geçen üstel fonksiyon bir çift fonksiyon olup ve integralin aralığı da göz önüne alınırsa

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt$$

şeklindeki önemli integral ilişkileri elde de edilir. Burada, $t = \sqrt{T}$ gibi bir değişken değişimi uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\mathbb{G}[1; t^2] &\equiv \int_0^\infty e^{-t^2} dt \\
&= \int_0^\infty e^{-T} d(\sqrt{T}) \\
&= \frac{1}{2} \int_0^\infty T^{-1/2} e^{-T} dT \\
&= \frac{1}{2} \int_0^\infty T^{-1/2+1-1} e^{-T} dT \\
&= \frac{1}{2} \int_0^\infty T^{1/2-1} e^{-T} dT \\
&= \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2}
\end{aligned}$$

sonucu elde edilir. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^\infty e^{-t^2} dt &= 2 \int_0^\infty e^{-t^2} dt \\
&= \sqrt{\pi}
\end{aligned}$$

şeklindeki sonuç elde edilir. Ve böylece (2.2.3) ile vurgulanan özel sonuç da belirlenmiş olur.

x) $\int_0^\infty e^{-t^m} dt \quad (m > 0)$

şeklindeki (genelleştirilmiş) integral için eğer $t = T^{1/m}$ gibi bir değişken değişimi göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
\mathbb{G}[1; t^m] &\equiv \int_0^\infty e^{-t^m} dt \\
&= \int_0^\infty e^{-T} d(T^{1/m}) \\
&= \frac{1}{m} \int_0^\infty T^{1/m-1} e^{-T} dT \\
&= \frac{1}{m} \Gamma\left(1 + \frac{1}{m}\right) \\
&= \Gamma\left(1 + \frac{1}{m}\right)
\end{aligned}$$

sonucuna kolayca varılır. Burada özellikle m sayısının doğal sayı olması durumunda da

$$\begin{aligned}
\mathbb{G}[1; t^m] &\equiv \int_0^\infty e^{-t^m} dt \\
&= \frac{1}{m} \Gamma\left(\frac{1}{m}\right) \\
&= \frac{1}{m} \frac{1}{m-1} \Gamma\left(\frac{1}{m-1}\right) \\
&= \dots \\
&= \frac{1}{m} \frac{1}{m-1} \cdot \dots \cdot \frac{1}{m-l} \Gamma\left(\frac{1}{m-l}\right) \quad (l \leq m) \\
&= \frac{1}{m} \frac{1}{m-1} \cdot \dots \cdot \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{m!}
\end{aligned}$$

şeklindeki gibi özel bir sonuç edilir. Böylece, (2.2.4) ile verilen genelleştirilmiş integral de belirlenmiş olur.

xi)
$$\begin{aligned}
\mathbb{G}[\alpha t^n; \beta t^m] &\equiv \int_0^\infty (\alpha t^n) e^{-\beta t^m} dt \\
&= \alpha \int_0^\infty t^n e^{-\beta t^m} dt \quad (\alpha \neq 0; n > -1; m > -1; \beta > 0)
\end{aligned}$$

şeklindeki (genelleştirilmiş) integral için eğer

$$\begin{aligned}
T = \beta t^m &\Leftrightarrow t = \left(\frac{T}{\beta}\right)^{1/m} \\
\Rightarrow dt &= \frac{1}{m} \frac{1}{\beta} \left(\frac{T}{\beta}\right)^{1/m-1} dT \\
\Leftrightarrow dt &= \frac{1}{m} \left(\frac{1}{\beta}\right)^{1/m} T^{1/m-1} dT
\end{aligned}$$

gibi bir değişken değişimi göz önüne alındığında da

$$\begin{aligned}
\mathbb{G}[\alpha t^n; \beta t^m] &= \alpha \int_0^\infty t^n e^{-\beta t^m} dt \\
&= \alpha \int_0^\infty \left(\frac{T}{\beta}\right)^{n/m} \frac{1}{m} \left(\frac{1}{\beta}\right)^{1/m} T^{1/m-1} dT \\
&= \alpha \frac{1}{m} \frac{1}{\beta} \int_0^\infty \left(\frac{T}{\beta}\right)^{n/m} e^{-T} dT
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\alpha}{m} \left(\frac{1}{\beta} \right)^{(n+1)/m} \int_0^\infty T^{(n+1)/m-1} e^{-T} dT \\
&= \frac{\alpha}{m} \left(\frac{1}{\beta} \right)^{(n+1)/m} \Gamma \left(\frac{n+1}{m} \right)
\end{aligned}$$

sonucuna varılır. Bu yukarıda sonuçta, eğer $n = s = m > -1$ gibi bir seçim söz konusu olduğunda da

$$\begin{aligned}
\mathbb{G}[\alpha t^s; \beta t^s] &\equiv \int_0^\infty (\alpha t^s) e^{-\beta t^s} dt \quad (\alpha \neq 0; s > -1; \beta > 0) \\
&= \alpha \int_0^\infty t^s e^{-\beta t^s} dt \\
&= \frac{\alpha}{s} \left(\frac{1}{\beta} \right)^{(s+1)/s} \Gamma \left(\frac{s+1}{s} \right) \\
&= \frac{\alpha}{s} \left(\frac{1}{\beta} \right)^{1+1/s} \Gamma \left(1 + \frac{1}{s} \right)
\end{aligned}$$

sonucu elde edilir. Özellikle, s doğal sayı olduğunda da

$$\mathbb{G}[\alpha t^s; \beta t^s] = \frac{\alpha \sqrt{\pi}}{s s!} \left(\frac{1}{\beta} \right)^{1+1/s}$$

olur.

Bu alt bölümün son özel bilgilendirmeleri olarak (reel veya kompleks parametrelili) Gamma fonksiyonu (veya bunun diğer özel fonksiyonlarla arasındaki çeşitli özel ilişkilere sahip olan) aşırı sayıda özel sonuçlara veya bağıntılara da sahiptir. Onlar için Birkhoff (1913), Abramowitz and Stegun (1972), Press et al. (2007), Olver et al. (2010), Beals and Wong (2010) ve Al-Sirehly and Fisher (2014) eserleri de incelenebilir ve ilgili her özel (veya genel) sonuç veya ilgili bağıntılar doğrudan (2.2.9) ile verilen genel formdaki integral dönüşümü ile ilişkilendirilebilir. Onların belirlenmesini ilgilenen araştırmacıların ilgisine bırakıyoruz.

2.3 $\mathbb{B}(v; u)(t)$ İntegral Dönüşümleri

Bu bölümde de Irmak ve Açıkgöz (2023) tarafından tanımlanmış ve hem reel hem de kompleks parametreler (değişkenler) içeren genelleştirilmiş formdaki farklı bir (genelleştirilmiş integral) dönüşümü (operatörü) üzerine odaklanılacaktır. Tanımlanacak olan bu ikinci genel (integral) dönüşümünün kapsamında giren ve bazı özel tip integrallerle doğrudan ilişkili olan yapıları hakkında bilgi vermek adına, öncelikli olarak

$$n, m, s \in \mathbb{Z}^* := \mathbb{Z} - \{0\}$$

olsun. O zaman,

$$\int_0^1 (1-\kappa^{n/m})^{1/s} d\kappa \quad (1-\kappa^{n/m} > 0) \quad (2.3.1)$$

veya (2.3.1)'deki integral tiplerini de içeren ve genellik açısından

$$\int_0^w (w-\kappa^{n/m})^{1/s} d\kappa \quad (w > 0 ; w-\kappa^{n/m} > 0) \quad (2.3.2)$$

şeklindeki integrallerin çeşitli özel halleriyle başta matematik biliminde olmak üzere matematik ile doğrudan ilişkili olan fen veya mühendislik bilimlerinde de sıkça karşılaşılır. Tam sayılardan oluşan ilgili parametrelerin uygun seçilmesiyle ya belirli tipte olan integraller ya da genelleştirilmiş integral tipindeki integraller elde edilir. Bu gibi özel hallerin bazıları temel analiz derslerinde sıkça karşılaşılan ya çözümü kolayca belirlenebilen integral tipleridir ya da yakınsaklığı (veya ıraksaklığı) çeşitli yollarla araştırılabilen genelleştirilmiş integral tipleridir. Örneğin;

$$\int_0^1 \sqrt[s]{1-\kappa} d\kappa, \quad \int_0^1 \frac{d\kappa}{\sqrt[s]{1-\kappa}}, \quad \int_0^1 \sqrt[s]{1-\kappa^2} d\kappa \quad \text{ve} \quad \int_0^1 \frac{d\kappa}{\sqrt[s]{1-\kappa^2}} \quad (s \in \mathbb{N}_2)$$

şeklindeki gibi verilen genelleştirilmiş integrallerin yakınsaklıkları elementer yollarla araştırılabilir ve hatta eşiti olan ilgili sayılar bile belirlenirken,

$$\int_0^1 \sqrt[r]{1-\kappa^s} d\kappa \quad \text{ve} \quad \int_0^1 \frac{d\kappa}{\sqrt[r]{1-\kappa^s}} \quad (r \in \mathbb{N}_2 ; s \in \mathbb{N}_3)$$

şeklinde verilen tipteki integrallerden elde edilebilecek olan sonsuz çokluktaki genelleştirilmiş integrallerin bilindik bazı testler yardımıyla yakınsaklıkları (veya ıraksaklıkları) araştırılabilse de özellikle yakınsak olanlar için ilgili sayıların belirlenmesi hiç de kolay bir iş değildir. Hem daha detaylı bilgi hem de daha fazla örnekler için sadece temel (reel veya kompleks) analiz kitaplarına odaklanmak yeterli olmasına rağmen Rudin (1964), Abramowitz and Stegun (1972), Henrici (1977), Wolfram (1998), Olver et al. (2010), Wrede and Spiegel (2010) ve Roussos (2013) eserleri de detaylı bilgiler içermektedir.

Yukarıda yani (2.3.1)'deki tüm formları da içine alan (2.3.2)'deki gibi genel form ile belirtmiş olduğumuz (belirli veya genelleştirilmiş) integral tiplerinden daha da kapsamlı integralleri içeren onların hesaplanmasında oldukça yardımcı olan ve özel fonksiyonlar ailesinde yer alan Beta fonksiyonu oldukça önemli roller oynamaktadır. Bu özel

fonksiyon da yine hem reel (gerçel) parametrelili hem de kompleks parametrelili olarak karşılaşılan bir fonksiyondur. Şimdi, ilgili fonksiyonu tanıtalım ve ardından da bazı özelliklerini sunalım.

2.3.1 Tanım. $r, s \in \mathbb{R}^+ := \{r \in \mathbb{R} : r > 0\}$ olsun. Bu durumda, r ve s parametrelili (değişkenli) Beta fonksiyonu $\mathbf{B}(r, s)$ notasyonu ile gösterilir ve

$$\mathbf{B}(r, s) = \int_0^1 \kappa^{r-1} (1 - \kappa)^{s-1} d\kappa \quad (2.3.3)$$

şeklinde tanımlanır (Lebedev 1965).

Özellikle (2.3.3)'teki integral sınırı, ilgili integralde geçen;

$$\aleph(\kappa) = \kappa^{r-1} (1 - \kappa)^{s-1} \quad (r, s \in \mathbb{R}^+)$$

şeklindeki κ (reel) bağımsız değişkenli fonksiyonu ile birlikte r ve s parametreleri göz önüne alınır ve reel analiz bilgileri kapsamında incelenirse (2.2.3) ile tanımlanmış integralin hem belirli integralle hem de genelleştirilmiş integralle ilişkili olduğu kolayca görülebilir.

Gamma fonksiyonu için vurguladığımız benzeri bilgilendirmeleri Beta fonksiyonu için de vurgulamak yararlı olacaktır. Literatürde, r ve s parametrelerinin reel sayılar olması durumunda her ikisinin de sıfırdan büyük olması şartı veya ilgili parametrelerin birer kompleks sayılar olması durumunda da $\Re(r) > 0$ ve $\Re(s) > 0$ şartları (2.2.3) ile verilen integralinin varlığı için yeterlidir. Fakat, $\epsilon > 0$ olmak üzere,

$$\int_0^1 \kappa^{r-1} (1 - \kappa)^{s-1} d\kappa = \int_0^\epsilon \kappa^{r-1} (1 - \kappa)^{s-1} d\kappa + \int_\epsilon^1 \kappa^{r-1} (1 - \kappa)^{s-1} d\kappa$$

şeklindeki ilişkilerde geçen birinci tipten genelleştirilmiş integralleri de içeren olası tüm integraller hakkındaki detaylı klasik analiz bilgileri ve bu tez çalışmasının devamındaki ekstra bilgiler Tanım 2.3.1'de geçen $r, s \in \mathbb{R}^+$ olma koşulunu zorunlu olarak gerektirecektir.

Ayrıca Tanım 2.3.1'deki genelleştirilmiş integralin yakınsaklığı için ilgili r ve s parametreleri için konulması gereken koşul göz önüne alınarak η parameteresinin kompleks olması durumundaki gerekli şartları da kolayca belirlenebilir. Bunun için

$r, s \in \mathbb{C}$ olması durumu hakkında bazı önemli bilgilendirmede bulunmak faydalı olacaktır.

Eğer

$$r = \alpha_1 + i\beta_1 \quad \text{ve} \quad s = \alpha_2 + i\beta_2$$

olarak seçilir ve (2.2.3) ile verilen integralin varlığı da göz önüne alınırsa aşağıdaki özel ilişkilere

$$\begin{aligned} |\kappa^{r-1}(1-\kappa)^{s-1}| &= |\kappa^{\alpha_1+i\beta_1-1}(1-\kappa)^{\alpha_2+i\beta_2-1}| \\ &= |\kappa^{i\beta_1}\kappa^{i\beta_2}\kappa^{\alpha_1-1}(1-\kappa)^{\alpha_2-1}| \\ &= |\kappa^{i(\beta_1+\beta_2)}\kappa^{\alpha_1-1}(1-\kappa)^{\alpha_2-1}| \\ &= |\kappa^{i(\beta_1+\beta_2)}| |\kappa^{\alpha_1-1}(1-\kappa)^{\alpha_2-1}| \\ &= |\kappa^{\alpha_1-1}(1-\kappa)^{\alpha_2-1}| \\ &< \infty \end{aligned} \tag{2.3.4}$$

kolayca varılır.

O halde, (2.3.4) ile verilen açıklama ilgili temel tanım ile birlikte düşünüldüğünde (2.3.3) ile verilecek olan bir kompleks parametrelili Beta fonksiyonun varlığı da ancak

$$\Re(r) = \alpha_1 \in \mathbb{R}^+ \quad \text{ve} \quad \Re(s) = \alpha_2 \in \mathbb{R}^+$$

şeklindeki koşullarının sağlanması hem gerekli hem de zorunlu konumda olacaktır.

Hem reel ve hem de kompleks parametrelili Beta Gamma fonksiyonu için gerekli bilgilendirmelerden sonra Tanım 2.3.1 ile dizayn edilecek olan genelleştirilmiş integral için, κ (reel) değişkenli ve $\kappa \in [0,1]$ koşulu altında tanımlanan ilgili fonksiyon hakkında bazı ekstra bilgilendirmeler de aşağıda verilmiştir. Hem ilgili önerme hem de detaylı bilgiler olarak Abramowitz and Stegun (1972), Olver et al. (2010) ve Beals and Wong (2010) ile verilen eserlere yine odaklanılabilir.

2.3.1 Önerme. Her $r, s \in \mathbb{R}^+$ için

$$\mathbf{B}(r, s) = \frac{\Gamma(r) \Gamma(s)}{\Gamma(r+s)} \quad (2.3.5)$$

sağlanır. Eğer, özellikle, $r, s \in \mathbb{N}$ olması durumunda,

$$\mathbf{B}(r, s) = \frac{\Gamma(r) \Gamma(s)}{\Gamma(r+s)} = \frac{(r-1)! (s-1)!}{(r+s-1)!}$$

olur (Lebedev 1965).

2.3.1 Örnek.

i) $\mathbf{B}(1,2) = \int_0^1 \kappa^{1-1} (1-\kappa)^{2-1} d\kappa$

$$\left(\equiv \int_0^1 (1-\kappa) d\kappa \right)$$

$$= \frac{\Gamma(1) \Gamma(2)}{\Gamma(3)}$$

$$= \frac{1}{2} \text{ dir.}$$

ii) $\mathbf{B}\left(\frac{1}{2}, 1\right) = \int_0^1 \kappa^{1/2-1} (1-\kappa)^{1-1} d\kappa$

$$\left(\equiv \int_0^1 \kappa^{-1/2} d\kappa \right)$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma(1)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma(1)}{\frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$= 2 \text{ dir.}$$

iii) $\mathbf{B}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \int_0^1 \kappa^{1/2-1} (1-\kappa)^{1/2-1} d\kappa$

$$\left(\equiv \int_0^1 \kappa^{-1/2} (1-\kappa)^{-1/2} d\kappa \right)$$

$$\left(\equiv \int_0^1 \frac{d\kappa}{\sqrt{\kappa-\kappa^2}} \right)$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)}$$

$$= \pi \text{ dır.}$$

$$\begin{aligned} \text{iv)} \quad \mathbf{B}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) &= \int_0^1 \kappa^{1/2-1} (1-\kappa)^{1/3-1} d\kappa \\ &= \left(\int_0^1 \kappa^{-1/2} (1-\kappa)^{-2/3} d\kappa \right) \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)} \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)} \text{ dır.} \end{aligned}$$

Hedefimizde olan ikinci genel dönüşümümüz ise (2.3.3)'te verilen integral yapısını içeren ve oldukça fazla sayıda kapsamlı uygulamaları olan bir dönüşümdür. İlgili kapsamlı dönüşümün oluşumu için amaca uygun olarak verilen $v(t)$ ve $u(t)$ gibi (reel t bağımsız değişkenli) iki fonksiyonun belirlediği

$$\omega_{w,V}(t) := v(t)(w - u(t))^V \quad (2.3.6)$$

şeklindeki fonksiyon ile tanımlanan;

$$\begin{aligned} \mathbb{B}[v; u](t) &:= \mathbb{B}_{w,V}[v(t); u(t)] \\ &= \int_0^w \omega_{w,V}(t) dt \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

şeklindeki integral dönüşümü olup tanımda yer alan w ve V parametreleri ise $w, V \in \mathbb{R}$ şeklindeki reel sayılardır. Bu yukarıda tanımlanmış olan (integral) dönüşümü Irmak ve Açıkgöz (2023) tarafından oluşturulmuş ve esasta $v := v(t)$ fonksiyonunun karakterize edeceği bir dönüşüm olup aşağıda geçen ve (2.3.7) dönüşümü ile alakalı tüm teorik ve uygulamalı sonuçlar da ilgili makalede yer almaktadır.

Burada bazı önemli uyarıları yapmakta fayda görmekteyiz. Yukarıdaki gibi tanımlanan dönüşümde yer alan fonksiyonlara ve parametrelere odaklanıldığında (2.3.6) şeklindeki fonksiyonlarının çeşitliliği doğal olarak (2.3.7) ile sunulan dönüşümün çeşitliliğini de belirleyecektir. Fakat, bu çeşitlilik integral dönüşüm teorisi açısından, $\mathbb{B}_{w,V}[v(t); u(t)]$ dönüşümünün yakınsaklığına zemin oluşturmasıyla anlam kazanır. Aynı zamanda, tanımda yer alan w ve V parametrelerinin seçimi ilgili dönüşüm için belirli integraller veya genelleştirilmiş integraller üretecek şeklinde olmaları da önemlidir. Ayrıca, (2.3.4)

ile birlikte (2.3.3) tanımı göz önüne alındığında, ilgili parametreler elbette ki kompleks sayılar olarak da seçilebilir.

Şimdi, yine $v := v(t)$ fonksiyonunun karakterize edeceği bu yeni (integral) dönüşümüne ait temel özelliklerinden bazılarını ve onların bazı olası uygulamalarına odaklanalım. Yine onları da yine remark ve örnekler olarak sunalım.

2.3.1 Önerme. Her C_1 ve C_2 skalarları ve her $v_1(t)$ ve $v_2(t)$ fonksiyonları için aşağıdaki verilen önermeler daima doğrudur:

$$\text{i)} \quad \mathbb{B}[C_1 v_1(t); u(t)] \equiv C_1 \mathbb{B}[v_1(t); u(t)] \quad (2.3.8)$$

$$\begin{aligned} \text{ii)} \quad \mathbb{B}[C_1 v_1(t) + C_2 v_2(t); u(t)] &\equiv \mathbb{B}[C_1 v_1(t); u(t)] + \mathbb{B}[C_2 v_2(t); u(t)] \\ &\equiv C_1 \mathbb{B}[v_1(t); u(t)] + C_2 \mathbb{B}[v_2(t); u(t)] \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

2.3.1 Remark. İlgili v ve u fonksiyonları

$$v := v(t) := t^\lambda \quad \text{ve} \quad u := u(t) := wt \quad (2.3.10)$$

şeklinde seçilsin. O zaman, ilgili genel dönüşüm de

$$\mathbb{B}_{w,v}[t^\lambda; wt] \equiv w^V \int_0^w t^\lambda (1-t)^V dt \quad (2.3.11)$$

şeklini alır.

Eğer Remark 2.3.1’de $w := 1$ gibi bir seçim göz önüne alınırsa (2.3.10) ve (2.3.11)’de ki ifadelerden, Beta fonksiyonu ile ilişkili olan

$$\mathbf{B}(\lambda + 1, V + 1) = \int_0^1 t^\lambda (1-t)^V dt \quad (\lambda, V > -1),$$

veya denk olarak

$$\mathbf{B}(\lambda, V) = \int_0^1 t^{\lambda-1} (1-t)^{V-1} dt \quad (\lambda, V > 0)$$

şeklindeki sonuç da elde edilir.

Yukarıda elbette ki eğer $\lambda \in \mathbb{R}$ ve $V \in \mathbb{R}$ olması durumunda $\lambda > -1$ ve $V > -1$ olması ve aynı zamanda $\lambda \in \mathbb{C}$ ve $V \in \mathbb{C}$ olması durumunda da $\Re(\lambda) > -1$ ve $\Re(V) > -1$ olması gerekmektedir.

Yani kısacası

$$\mathbb{B}_{1,V-1}[t^{\lambda-1}; t] \equiv \mathbf{B}(\lambda, V)$$

dır.

2.3.2 Remark. İlgili v ve u fonksiyonları:

$$v := v(t) := t^\lambda \quad \text{ve} \quad u := u(t) := t$$

şeklinde seçilsin. Bu durumda da

$$\mathbb{B}_{w,V}[t^\lambda; t] \equiv \int_0^w t^\lambda (w-t)^V dt \quad (2.3.12)$$

sonucuna varılır. Eğer (2.3.11)'de elde edilen ifade de

$$t = w\tau \implies dt = w d\tau$$

şeklinde değişken değişimleri göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} \mathbb{B}_{w,V}[(w\tau)^\lambda; wt] &\equiv \int_0^1 (w\tau)^\lambda (w-w\tau)^V d(w\tau) \\ &= w^{1+\lambda+V} \int_0^1 \tau^\lambda (1-\tau)^V d\tau \\ &= w^{1+\lambda+V} \mathbf{B}(1+\lambda; 1+V) \end{aligned}$$

şeklindeki gibi ilişkiler kolayca elde edilir. Burada eğer Gamma fonksiyonu göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\lambda, V) &\equiv \mathbb{B}_{w,V}[(w\tau)^\lambda; wt] \\ &= w^{\lambda+V+1} \frac{\Gamma(\lambda+1)\Gamma(V+1)}{\Gamma(\lambda+V+2)} \end{aligned}$$

şeklindeki özel ilişkileri ve özellikle ilgili λ ve V parametrelerinin doğal sayılar olması durumunda da

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\lambda, V) &\equiv \mathbb{B}_{w,V}[(w\tau)^\lambda; wt] \\ &= w^{\lambda+V+1} \frac{\lambda! V!}{(\lambda+V+1)!} . \end{aligned}$$

şeklindeki özel ilişkiler elde edilir.

Örnek 2.3.1 ile verilen özel bilgileri kullanarak (2.3.8)-(2.3.12) arasında elde edilen özel sonuçlar (veya ilişkiler) ışığında aşırı sayıda özel (elementer) sonuçlar da elde edilebilir. Şimdi bunlardan bazılarını örnekler şeklinde sunalım.

2.3.2 Örnek.

$$\begin{aligned}
\text{i)} \quad \mathbb{B}_{1,2}[2; t] &= \int_0^1 2(1-t)^2 dt \\
&= 2 \int_0^1 (1-t)^2 dt \\
&= 2 \int_0^1 t^{1-1} (1-t)^{3-1} dt \\
&= 2\mathbf{B}(1, 3) \\
&= 2 \frac{\Gamma(1) \Gamma(3)}{\Gamma(1+3)} \\
&= 2 \frac{\Gamma(1) \Gamma(3)}{\Gamma(4)} \\
&= 2 \frac{0! 2!}{3!} \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{ii)} \quad \mathbb{B}_{1,2}[2-3t; t] &\equiv \int_0^1 (2-3t)(1-t)^2 dt \\
&= 2 \int_0^1 (1-t)^2 dt - 3 \int_0^1 t(1-t)^2 dt \\
&= 2 \int_0^1 (1-t)^2 dt - 3 \int_0^1 t(1-t)^2 dt \\
&= 2 \int_0^1 t^{1-1} (1-t)^{3-1} dt - 3 \int_0^1 t^{2-1} (1-t)^{3-1} dt \\
&= 2\mathbf{B}(1, 3) - 3\mathbf{B}(2, 3) \\
&= 2 \frac{\Gamma(1) \Gamma(3)}{\Gamma(1+3)} - 3 \frac{\Gamma(2) \Gamma(3)}{\Gamma(2+3)} \\
&= 2 \frac{\Gamma(1) \Gamma(3)}{\Gamma(4)} - 3 \frac{\Gamma(2) \Gamma(3)}{\Gamma(5)} \\
&= 2 \frac{0! 2!}{3!} - 3 \frac{1! 2!}{4!} \\
&= \frac{2}{3} - \frac{1}{4} \\
&= \frac{5}{12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{iii)} \quad \mathbb{B}_{1,1/2}[-1; t] &\equiv \int_0^1 (-1)(1-t)^{1/2} dt \\
&= - \int_0^1 (1-t)^{1/2} dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\int_0^1 t^{1-1}(1-t)^{1/2+1-1} dt \\
&= -\int_0^1 t^{1-1}(1-t)^{3/2-1} dt \\
&= -\mathbf{B}(1, 3/2) \\
&= -\frac{\Gamma(1)\Gamma(3/2)}{\Gamma(1+3/2)} \\
&= -\frac{\Gamma(1)\Gamma(3/2)}{\Gamma(5/2)} \\
&= -\frac{\Gamma(1)\Gamma(3/2)}{3/2\Gamma(3/2)} \\
&= -\frac{2}{3}
\end{aligned}$$

iv) $\mathbb{B}_{2,1/2}[1; t] \equiv \int_0^2 (2-t)^{1/2} dt$

integralı için eğer $t = 2T$ şeklindeki gibi bir değişken ve diferansiyel değişimleri göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
\int_0^2 (2-t)^{1/2} dt &= \int_0^1 (2-2T)^{1/2} 2T dT \\
&= 2\sqrt{2} \int_0^1 (1-T)^{1/2} dT \\
&= 2\sqrt{2} \int_0^1 T^{1-1}(1-T)^{1/2+1-1} dt \\
&= 2\sqrt{2} \mathbf{B}(1, 3/2) \\
&= 2\sqrt{2} \frac{\Gamma(1)\Gamma(3/2)}{\Gamma(1+3/2)} \\
&= \frac{4\sqrt{2}}{3}
\end{aligned}$$

sonucu elde edilir. O halde,

$$\mathbb{B}_{2,1/2}[1; t] \equiv \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

olur.

v) $\mathbb{B}_{1,2}[C_1 t^\lambda + C_2 t^\beta; t] \equiv \int_0^1 (C_1 t^\lambda + C_2 t^\beta)(1-t)^2 dt$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 (C_1 t^\lambda + C_2 t^\beta)(1-t)^2 dt \\
&= \int_0^1 C_1 t^\lambda (1-t)^2 dt + \int_0^1 C_2 t^\beta (1-t)^2 dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= C_1 \int_0^1 t^\lambda (1-t)^2 dt + C_2 \int_0^1 t^\beta (1-t)^2 dt \\
&= C_1 \mathbf{B}(\lambda+1, 3) + C_2 \mathbf{B}(\beta+1, 3) \\
&= C_1 \frac{\Gamma(\lambda+1) \Gamma(3)}{\Gamma(4+\lambda)} + C_2 \frac{\Gamma(\beta+1) \Gamma(3)}{\Gamma(4+\beta)} \\
&= 2 \left(C_1 \frac{\Gamma(1+\lambda)}{\Gamma(4+\lambda)} + C_2 \frac{\Gamma(1+\beta)}{\Gamma(4+\beta)} \right) \\
&= 2 \left(\frac{C_1}{(1+\lambda)(2+\lambda)(3+\lambda)} + \frac{C_1}{(1+\beta)(2+\beta)(3+\beta)} \right)
\end{aligned}$$

olur.

vi) $\mathbb{B}_{1,1/2}[1; t^3] \equiv \int_0^1 (1-t^3)^{1/2} dt$

göz önüne alındığında ilgili integralin (bilindik) elementer yollarla çözülebilmesinin mümkün olmadığını biliyoruz. Fakat ilgili (genelleştirilmiş) integral için $t^3 = T$ şeklindeki değişken değişimi yapılırsa

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (1-t^3)^{3/2} dt &= \int_0^1 (1-T)^{1/2} d(T^{1/3}) \\
&= \frac{1}{3} \int_0^1 T^{-2/3} (1-T)^{1/2} dT \\
&= \frac{1}{3} \int_0^1 T^{-2/3+1-1} (1-T)^{1/2+1-1} dt \\
&= \frac{1}{3} \int_0^1 T^{1/3-1} (1-T)^{3/2-1} dt \\
&= \frac{1}{3} \mathbf{B}(1/3, 3/2) \\
&= \frac{1}{3} \frac{\Gamma(1/3) \Gamma(3/2)}{\Gamma(1/3+3/2)} \\
&= \frac{1}{3} \frac{\Gamma(1/3) \Gamma(3/2)}{\Gamma(11/6)} \\
&= \frac{1}{3} \frac{\Gamma(1/3) 1/2 \Gamma(1/2)}{\Gamma(11/6)} \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{6} \frac{\Gamma(1/3)}{\Gamma(11/6)}
\end{aligned}$$

sonucu elde edilir.

O halde,

$$\begin{aligned}\mathbb{B}_{1,1/2}[1; t^3] &\equiv \int_0^1 (1 - t^3)^{1/2} dt \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{6} \frac{\Gamma(1/3)}{\Gamma(11/6)}\end{aligned}$$

olur.

Hem Gamma ve Beta fonksiyonlarının hem de onlar arasındaki çok sayıda bağıntı vardır. Onlar için Birkhoff (1913), Abramowitz and Stegun (1972), Press et al. (2007), Olver et al. (2010), ve Beals and Wong (2010) ve Al-Sirehly and Fisher (2014) eserleri gözden geçirilebilir ve gözlemlenen her özel (veya genel) sonuç veya bağıntılar doğrudan (2.3.7) ile verilen genel formdaki integral dönüşümü ile ilişkilendirilebilir. Onların oluşturulması işini yine ilgilenen araştırmacıların ilgisine sunuyoruz.

3. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu esas bölümde de (reel (veya kompleks) parametrelili (değişkenli)) Gamma ve Beta fonksiyonlarının da oldukça belirleyici etkisinin olacağı (2.2.9) ve (2.3.7)'deki gibi önceden Irmak ve Açıkgöz (2023) tarafından önce tanımlanmış ve ardından da belirlenmiş olan ilgili (integral) dönüşümlerinin çeşitli dönüşümlerle (veya operatörlerle) olan bazı kapsamlı ilişkileri üzerine (yeniden) odaklanılacak ilgili özel çıkarımlar ve çeşitli sonuçlarla ile birlikte bazı özel uygulamalar ve öneriler sunulacaktır.

3.1 Olası Çıkarımlar I

Bu özel kısımda ise (2.2.6)'da ki gibi tanımlanan (reel (veya kompleks) parametrelili) Gamma fonksiyonunun da oldukça aktif rol oynayacağı ve (2.2.9)'da ki gibi oluşturulan genel formulu $\mathbb{G}[\cdot; \cdot]$ (integral) dönüşümüne öncelikli olarak odaklanılacak ardından da bu $\mathbb{G}[\cdot; \cdot]$ dönüşümünün bazı kapsamlı (diğer integral) dönüşümleri üzerine çeşitli (özel) etkileri irdelenecektir.

Irmak ve Açıkgöz (2023) tarafından oluşturulmuş olan ilgili $\mathbb{G}[\cdot; \cdot]$ dönüşümüyle alakalı olan çok sayıda özel formdaki bilindik (reel veya kompleks parametre içeren) dönüşümler söz konusu olup, bunlardan sadece iki tanesi remark şeklinde sunulacaktır. Ardından da onların bazı özel uygulamaları belirlenerek çeşitli önerilere de zemin oluşturulacaktır.

3.1.1 Remark. Aşağıda verilen:

$$\lambda > 0, \quad t \in [0, \infty) \quad \text{ve} \quad |v(t)e^{-\lambda t}| < \infty$$

koşulları altında, eğer ilgili u reel (değişkenli) fonksiyonu da

$$u := u(t) = \lambda t$$

şeklinde seçilirse (2.2.9)'da tanımlanmış olan ilgili integral dönüşümünün

$$\begin{aligned} \mathbb{G}[v(t); \lambda t] &\equiv \mathcal{L}[v](t) \\ &\equiv \mathcal{L}[v(t)] \\ &= \int_0^\infty v(t)e^{-\lambda t} dt \end{aligned} \tag{3.1}$$

şeklindeki $v := v(t)$ gibi bir fonksiyonun Laplace dönüşümüyle olan ilişkisi elde edilir. Ve doğal olarak ilgili dönüşümün özel halinin sahip olduğu

$$\mathcal{L}[v(t)] = \mathcal{V}(\lambda) \quad \text{ve} \quad v(t) = \mathcal{L}^{-1}[\mathcal{V}(\lambda)]$$

şeklindeki ilişkiler de zaten Laplace dönüşümü üzerine aşına olunan ve kapsamaları oldukça geniş olan özel ilişkilerdir. Bu meşhur dönüşümü için daha detaylı bilgiler olarak referanslarda geçen Erdelyi (1954), Spiegel (1965), Sneddon (1972), Davies (2001), Aghili Zeinali (2014) ve Lokenath and Dambaru (2014) eserlerindeki detaylı bilgilere odaklanılabilir.

Genel formdaki dönüşümün ilişkili olacağı diğer alışılmışın dışındaki özel (kompleks formdaki) integral dönüşümlerinden birini de yine aşağıdaki gibi remark şeklinde tanıtalım.

3.1.2 Remark. Verilen:

$$t \in [0, \infty) \quad \text{ve} \quad |v(t)e^{-u(t)}| < \infty$$

koşullar altında, her $\lambda \in [0, \infty)$ için $p := p(\lambda) \neq 0$ ve $q := q(\lambda) > 0$ (reel değişkenli (sürekli)) fonksiyonlar olmak üzere, eğer ilgili u reel (değişkenli) fonksiyonu

$$u := u(t) := iq(\lambda)t \quad (i^2 = -1)$$

şeklinde seçilirse (2.2.8) yardımıyla tanımlanan (2.2.9) dönüşümü de

$$\begin{aligned} \mathbb{S}_{p,q}[v(t)] &\equiv \mathbb{S}_{p,q}[v](t) \\ &\equiv p(\lambda) \mathbb{G}[v(t); iq(\lambda)t] \\ &= q(\lambda) \int_0^\infty v(t) e^{-iq(\lambda)t} dt \end{aligned} \quad (3.2)$$

şeklindeki gibi bir $v := v(t)$ bir fonksiyonlarının integral dönüşümünü ifade eder ve bu özel dönüşüm de SEJI integral dönüşümü olarak anılan (kompleks formdaki) bir integral dönüşümdür. Doğal olarak bu kompleks integral dönüşümü açısından

$$\mathbb{S}_{p,q}[v(t)] = \mathcal{V}_{p,q}(\lambda) \quad \text{ve} \quad v_{p,q}(t) = \mathbb{S}_{p,q}^{-1}[\mathcal{V}_{p,q}(\lambda)]$$

şeklindeki ilişkilerde, integral dönüşüm teorisi gereğince SEJI dönüşümün doğal olan (notasyon) ilişkileridir. Hem bu özel (kompleks) integral dönüşümü ve hem de ters dönüşümü için bazı temel olan bilgiler ve çeşitli uygulamaları olarak Davies (2001), Kashuri and Fundo (2013), Lokenath and Dambaru (2014) ve Mehdi et al. (2022, 2023) eserleri oldukça detaylı bilgi içermektedir.

Ayrıca yukarıda sadece (2.2.9) yardımıyla tanımlanmış (reel veya kompleks parametrelili) $\mathbb{G}[\cdot; \cdot]$ dönüşümüyle kolayca ifade edilebilen sadece iki (bilindik) dönüşüm ile ilgili olası ilişkileri oluşturulmuştur. Bilindiği üzere integral dönüşüm teorisi oldukça kapsamlı bir (teorik ve uygulamalı) bilim alan olup $\mathbb{G}[\cdot; \cdot]$ dönüşümüyle elde edilebilecek çok sayıda farklı tipte (özel) dönüşümlerin de olduğunu belirtmiştik. Bunlar için de Offord (1935), Dattoli et al. (1997), Bracewell (2000), Bohner Peterson (2002), Khan and Khan (2008), El-tayeb and Kilicman (2010), Elzaki (2011), Aghili and Zeinali (2014), Bardaro and Mantellini (2014), Boyadjiev Luchko (2017), Yang (2017), Mansour et al. (2022) and Mehdi et al. (2022, 2023) makaleleri incelenebilir. Bu araştırmanın kapsamı açısından hem ilgili diğer (reel veya kompleks tipteki) dönüşümlerle olan (kapsamlı) ilişkilerin ortaya çıkarılmasını araştırmacıların dikkatine sunarak hem de aşağıdaki gibi belirlenecek olan (3.1)'deki gibi elde edilen

bazı özel hesaplamaların, (3.2)'deki ve diğer (bazı) dönüşümler için belirlenmesini de ilgilenenlerin dikkatine sunuyoruz.

Remark 3.1.1 göz önüne alındığında aşağıda verilen önermelerin her biri, sunulan bilgilendirmeler sonucu kolayca oluşturulabilir.

3.1.1 Örnek. $\mathbb{G}[v(t); u(t)]$ dönüşümde yer alan (reel) bağımsız değişkenli ilgili fonksiyonlar

$$v(t) := t^\beta \quad \text{ve} \quad u(t) := \lambda t \quad (\lambda > 0)$$

şeklinde seçilsin. O zaman, eğer β parametresinin $\beta \in \mathbb{N}$ olarak kabul edilmesi durumunda, $v := v(t)$ fonksiyonunun ilgili integral dönüşümü, klasik analiz bilgileri yardımıyla kolaylıkla hesaplanabilir. Ancak, ilgili β parametresi eğer $\beta > -1$ koşulunu sağlayan herhangi bir reel sayı olduğunda elbette ki ilgili fonksiyonun ilgili integral dönüşümünü hesaplamak (veya belirlemek) bilindik elementer yollarla mümkün olamaz. Bu durumda eğer (2.2.6)'daki (reel (veya kompleks) formdaki) özel fonksiyon kullanılırsa istenen fonksiyona ait olan ilgili dönüşüm kolayca belirlenebilir. Bu kapsamlı hesaplamayı içeren özel ilişkiler ise

$$\begin{aligned} \mathbb{G}[t^\beta; \lambda t] &\equiv \mathcal{L}[t^\beta] \\ &= \int_0^\infty t^\beta e^{-\lambda t} dt \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\lambda^{1+\beta}} \quad (\lambda > 0; \beta > -1) \end{aligned} \tag{3.3}$$

şeklinde olacaktır. Bu özel çıkarımdan ve Laplace dönüşümüyle ilgili bilinen bilgiler paralelin de

$$\mathcal{L}[t^\beta] = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\lambda^{1+\beta}} \quad \text{ve} \quad t^\beta = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\Gamma(\beta+1)}{\lambda^{1+\beta}} \right] \tag{3.4}$$

şeklindeki ilişkiler zaten önceden bilinen ilişkilerdir. Aynı zamanda, özellikle eğer $\beta \in \mathbb{N}$ şeklindeki gibi doğal sayı olması durumunda, (3.4) ifadelerinin

$$\mathcal{L}[t^\beta] = \frac{\beta!}{\lambda^{1+\beta}} \quad \text{ve} \quad t^\beta = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\beta!}{\lambda^{1+\beta}} \right] \tag{3.5}$$

şeklindeki ifadelere denk olacakları açıktır.

3.1.2 Örnek. $C \neq 0$ ve $\lambda > 0$ olmak üzere, ilgili dönüşümler de yer alan reel değişkenli fonksiyonlar;

$$v(t) := C \quad \text{ve} \quad u(t) := \lambda t$$

şeklinde seçilsin. Bu durum da $v(t) := C$ ($C \neq 0$) gibi bir sabit fonksiyonunun Laplace dönüşümü de

$$\begin{aligned} \mathbb{G}[C; \lambda t] &\equiv \mathcal{L}[C] \\ &= C \int_0^\infty e^{-\lambda t} dt \\ &= C \lambda^{-1} \end{aligned} \tag{3.6}$$

şeklinde olur. Doğal olarak, (3.6) ifadesinden

$$C = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{C}{\lambda} \right] \quad (C \neq 0; \lambda > 0) \tag{3.7}$$

şeklindeki bilindik özel ilişki de kendini gösterir. Özel olarak $\lambda := 1 =: C$ seçimi göz önüne alındığında da

$$\mathbb{G}[1; t] \equiv \mathcal{L}[1] = 1 \quad \text{ve} \quad 1 = \mathcal{L}^{-1}[1]$$

çok özel ilişkiler kendilerini gösterir.

3.1.3 Örnek. Eğer ilgili özel fonksiyonlar:

$$v(t) := 1 \quad \text{ve} \quad u(t) := \lambda t^\beta$$

şeklindeki gibi seçilirse aşağıdaki verilen ve oldukça kapsamlı sonuçları da içeren ve genel bir integral formuna sahip olan

$$\begin{aligned} \mathbb{G}[1; \lambda t^\beta] &\equiv \mathbf{G}_\lambda(\beta) \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda t^\beta} dt \quad (\lambda > 0; \beta > 0) \end{aligned}$$

şeklinde genelleştirilmiş integrale olan ilişkiler elde edilir. Burada eğer

$$\begin{aligned} \kappa = \lambda t^\beta &\Leftrightarrow t = \lambda^{-1/\beta} \kappa^{1/\beta} \\ \Rightarrow dt &= \frac{1}{\beta} \lambda^{-1/\beta} \kappa^{1/\beta-1} d\kappa \end{aligned}$$

şeklindeki gibi değişken ve diferansiyel değişimleri ilgili genelleştirilmiş integrali için göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_\lambda(\beta) &:= \frac{1}{\beta} \lambda^{-1/\beta} \int_0^\infty \kappa^{1/\beta-1} e^{-\kappa} d\kappa \\ &= \lambda^{-1/\beta} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \quad (\lambda > 0; \beta > 0) \end{aligned} \tag{3.8}$$

şeklindeki özel sonuç elde edilir.

Son olarak Örnek 3.1.3'ün bazı özel sonuçlarını da burada yine netleştirelim. Onlar için öncelikli olarak eğer β parametresi $\beta := m$ ($m \in \mathbb{N}$) şeklindeki gibi doğal sayılar olarak seçilirse aşağıdaki gibi oldukça kapsamlı olan

$$\begin{aligned} G_\lambda(1/m) &:= \int_0^\infty e^{-\lambda \sqrt[m]{t}} dt \\ &= \lambda^{-m} \Gamma(1+m) \\ &= \frac{m!}{\lambda^m} \quad (\lambda > 0 ; m \in \mathbb{N}) \end{aligned} \quad (3.9)$$

sonuçlarına kolayca varılır. Bu sonucun daha özel (klasik) sonuçlarında iki tanesi de aşağıdaki gibi oluşturulmuştur

$$G_1(1/m) := \int_0^\infty e^{-\sqrt[m]{t}} dt = m! \quad (3.10)$$

ve

$$G_\lambda(1) := \int_0^\infty e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda} \quad (\lambda > 0). \quad (3.11)$$

3.1.3 Remark. γ , β ve λ parametrelerinin alabileceği uygun olan (mantıklı) her değerleri için ilgili reel değişkenli fonksiyonları da

$$v := v(t) := \text{Sin}(\gamma t^\beta) \quad \text{ve} \quad u(t) := \lambda t$$

şeklindeki gibi genel formlar olsun. Bu durumda, birinci bölümdeki gibi sunulan fonksiyon serileriyle ilgili Tanım 2.1.21-Tanım 2.1.30 ile Teorem 2.1.4-Teorem 2.1.8 arasındaki detaylı bilgiler ışığında ve (2.2.6)'da verilen Gamma fonksiyonunun yardımıyla, v fonksiyonuna ilişkin hem Maclaurin seri açılımı hem de v fonksiyonunun (2.2.9)'daki dönüşümü ve bu dönüşümle ilgili olan Laplace dönüşümü arasındaki ilişkiler kolayca belirlenebilir. Şimdi bunları sırasıyla belirleyelim:

i) (2.1.20) ile elde edilmiş olan trigonometrik sinüs fonksiyonuna ait kuvvet serisinde eğer

$$z := \gamma t^\beta \quad (\gamma \neq 0 ; \beta > -1)$$

seçimi yapılırsa,

$$\text{Sin}(\gamma t^\beta) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} (\gamma t^\beta)^{2j+1}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \gamma^{2j+1}}{(2j+1)!} t^{\beta(2j+1)} \quad (3.12)$$

şeklindeki gibi bir seri açılımı kolayca elde edilir. Bu serinin yakınsaklığına ilişkin gerekli araştırmalar Teorem 2.1.2 yardımıyla yapılabilir.

ii) Gamma fonksiyonuna ait (2.2.6)'daki tanımı göz önüne alındığında ilgili v ve u (reel değişkenli) fonksiyonlarının (2.2.8)'deki yapının belirlediği (2.2.9) gibi bir integral dönüşümü ise

$$\begin{aligned} \mathbb{G}[Sin(\gamma t^\beta); \lambda t] &=: \mathcal{L}[Sin(\gamma t^\beta)] \\ &= \int_0^\infty Sin(\gamma t^\beta) e^{-\lambda t} dt \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^j \gamma^{2j+1}}{(2j+1)!} \int_0^\infty t^{\beta(2j+1)} e^{-\lambda t} dt \right\} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma[\beta(2j+1)]}{(2j)!} (-1)^j \gamma^{2j+1} \end{aligned} \quad (3.13)$$

şeklindeki gibi kolayca belirlenebilir. Aynı zamanda, i)'de vurgulandığı gibi, (3.13) ile verilen serinin yakınsaklığına ilişkin gerekli araştırmalar yine Teorem 2.1.2 yardımıyla yapılabilir.

iii) Yukarıda elde edilen (3.12) ve (3.13)'teki sonuçlarda, eğer $\gamma := 1$ ve $\beta := 2$ gibi özel seçimler göz önüne alınırsa

$$Sin(t^2) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} t^{2j+1}, \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[Sin(t^2)] &:= \mathbb{G}[Sin(t^2); e^{-\lambda t}] \\ &= \int_0^\infty Sin(t^2) e^{-\lambda t} dt \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(4j+1)!}{(2j)!} (-1)^j \end{aligned} \quad (3.15)$$

ve doğal olarak

$$Sin(t^2) = \mathcal{L}^{-1} \left[\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(4j+1)!}{(2j)!} (-1)^j \right] \quad (3.16)$$

özel sonuçlar ve doğal olan özel ilişkiler kolayca elde edilir.

Bu özel bölüme bazı özel katkılar sunmak adına öncelikli olarak yukarıda gerçekleştirilen (3.3)-(3.11)'deki gibi özel bilgilendirmeler ve Remark 3.1.3'teki gibi oluşturulan ve (3.12)-(3.16) arasındaki gibi tüm (benzeri) adımlar aynen (2.1.19), (2.1.21) ve (2.1.22) ile verilen (reel (veya kompleks) değişkenli) elementer fonksiyonlar için de gerçekleştirilebilir. Yani ilgili serilerden kolayca

$$\exp(\gamma t^\beta) , \cos(\gamma t^\beta) \text{ ve } (1 - \gamma t^\beta)^{-1} \quad (3.17)$$

şeklindeki özel formlar yardımıyla oluşturulacak olan fonksiyonlar ve bunlara ait seriler göz önüne çeşitli açılardan da incelenebilir.

Aynı zamanda Remark 3.1.2 ile oluşturulan, yani SEJI integral dönüşümüyle oluşturulacak olan çok sayıda özel (elementer fonksiyonlarla ilgili) sonuçlar da (3.2)'de geçen her uygun formdaki fonksiyonların farklı farklı seçimleriyle gerçekleştirilebilir ve hatta (2.2.29) formuyla olan kapsamlı (kompleks formdaki) ilişkiler de ortaya çıkarılabilir. Bütün bu ekstra sonuçların oluşturulmasını ve irdelenmesini de yine ilgili olan araştırmacıların dikkatine sunuyoruz.

3.2 Olası Çıkarımlar II

Bu ikinci özel alt bölümde, (reel (veya kompleks) parametrelili) hem Gamma hem de Beta fonksiyonlarının oldukça aktif rol oynayacağı ve (2.3.6) ile belirtilen fonksiyonlarının yardımıyla (Irmak ve Açıkgöz (2023) tarafından) oluşturulmuş $\mathbb{B}[\cdot; \cdot]$ (integral) dönüşümüne yönelik temel bazda bazı bilgilendirmelere odaklanılacak ardından da bu $\mathbb{B}[\cdot; \cdot]$ dönüşümünün bazı kapsamlı (integral) dönüşümleri üzerine çeşitli (özel) etkileri irdelenecektir. Fakat burada bir önceki kısımda ele alınan veya önerilen integral dönüşümleri değil de kesirsel hesaplamalarla ilgili bazı temel dönüşümler (operatörler) amaçlanmıştır.

İlgili $\mathbb{B}[\cdot; \cdot]$ (integral) dönüşümüyle ifade edilebilecek olan çeşitli hem reel hem de kompleks formdaki kesirsel merteden hesaplamalar ile ilgili olan bazı dönüşümler yine remark şeklinde tanıtılacak ve ardından da onların bazı özel sonuçları veya uygulamaları belirlenerek çeşitli önerilere yine zemin oluşturulacaktır.

Kesirsel hesaplamalar ile ilgili olan birinci özel çıkarım, kesirsel mertebeden integral operatörü ile ifade edilen integral dönüşümü olup sunulacak olan bilgilendirmeler de kompleks fonksiyonlar teorisi kapsamında ele alınacaktır.

3.2.1 Remark. Verilen $\theta(z)$ gibi bir (kompleks değişkenli) fonksiyon orijini içine alan herhangi bir basit kapalı kompleks bölgede analitik bir fonksiyon olsun ve $\varphi > 0$ sayısı verilsin. Bu durumda, $\theta(z)$ kompleks fonksiyonunun φ -mertebeden kesirsel integrali, genellikle

$$\mathfrak{D}_z^{-\varphi}[\theta(z)] \equiv \mathfrak{D}_z^{-\varphi}[\theta](z) \quad (3.19)$$

şeklindeki gibi denk notasyonlarından herhangi biri ile gösterilir ve

$$\mathfrak{D}_z^{-\varphi}[\theta(z)] = \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_0^z \frac{\theta(\tau)}{(z-\tau)^{1-\varphi}} d\tau \quad (3.20)$$

şeklinde tanımlanır.

Yukarıda verilen tanımda geçen, doğal olarak

$$\mathfrak{D}_z^{-\varphi}[\theta](z) \quad (\varphi > 0)$$

ifadesinin varlığı ancak (3.18) ile verilen integralin varlığıyla mümkün olacaktır. Ayrıca, (3.19)'daki integralde geçen $z - \tau$ ifadesinin pozitif olması durumunda $\log(z - \tau)$ ifadesinin değeri gerçel alınarak ilgili integral de geçen $(z - \tau)^{1-\varphi}$ kompleks terimin olası katlılığı da kaldırılır (Owa 1978).

Basit bir odaklanmanın özel sonucu olarak ilgili (3.18)'deki operatör ile (2.3.7)'deki operatör arasındaki

$$\mathfrak{D}_z^{-\varphi}[\theta](z) \equiv \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \mathbb{B}_{z,\varphi-1}[\theta(t); (z-t)^{\varphi-1}] \quad (3.20)$$

şeklindeki gibi bir denklik ilişkisi kolayca görülür.

Kesirsel hesaplamalar ile alakalı olan ikinci özel çıkarım ise kesirsel mertebeden türev operatörü ile ilgili olan integral dönüşümü olup yine gerekli bilgilendirmeler de kompleks fonksiyonlar teorisi kapsamında verilecektir.

3.2.2 Remark. Verilen $\theta(z)$ gibi bir (kompleks değişkenli) fonksiyonu orijini içine alan herhangi bir basit kapalı kompleks bölgede analitik bir fonksiyon olsun. O zaman, $\theta(z)$ (kompleks değişkenli) fonksiyonun φ - mertebeden kesirsel türevi genellikle

$$\mathfrak{D}_z^\varphi[\theta(z)] \equiv \mathfrak{D}_z^\varphi[\theta](z) \quad (3.21)$$

şeklindeki denk notasyonlardan herhangi biri ile gösterilir ve

$$\mathfrak{D}_z^\varphi[\theta(z)] = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(1-\varphi)} \frac{d}{dz} \int_0^z \frac{\theta(t)}{(z-t)^\varphi} dt & \text{eğer } 0 \leq \varphi < 1 \text{ ise} \\ \frac{d^j}{dz^j} \{ \mathfrak{D}_z^{\varphi-j}[\theta](z) \} & \text{eğer } 0 \leq \varphi - j < 1 \text{ ise} \end{cases} \quad (3.22)$$

şeklinde tanımlanır (Owa 1978).

Remark 3.2.2 ile verilen tanımda, doğal olarak

$$\mathfrak{D}_z^\varphi[\theta](z) \quad (0 \leq \varphi < 1)$$

ifadesinin varlığı ancak (3.22) ile verilen (genelleştirilmiş) integralin varlığıyla mümkün olacaktır. Aynı zamanda aynen Remark 3.2.1’de vurgulandığı üzere, (3.22)’deki integralde yer alan $z - \tau$ şeklindeki kompleks ifadesinin pozitif olması durumunda, $\log(z - \tau)$ ifadesinin değeri gerçel alınarak ilgili integralde yer alan $(z - \tau)^\varphi$ şeklindeki kompleks terimin (olası) katlılığı da kaldırılır (Owa 1978).

Özellikle, basit bir odaklanmanın sonucu olarak, ilgili (3.20) ve (2.3.7)’deki operatörler arasındaki

$$\mathfrak{D}_z^\varphi[\theta](z) \equiv \frac{1}{\Gamma(1-\varphi)} \frac{d}{dz} (\mathbb{B}_{z,-\varphi}[\theta(t); (z-t)^{-\varphi}]) \quad (3.23)$$

şeklindeki gibi bir bağıntının varlığı yine kolayca görülebilir. Doğal olarak (3.22) gereğince

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_z^{1+\varphi}[\theta](z) &\equiv \frac{d}{dz} (\mathfrak{D}_z^{1-\varphi}[\theta](z)) \quad (1 \leq \varphi < 2) \\ &\equiv \frac{d}{dz} (\mathfrak{D}_z^\varphi[\theta](z)) \quad (0 \leq \varphi < 1) \\ &\equiv \frac{1}{\Gamma(-\varphi)} \frac{d}{dz} (\mathbb{B}_{z,-1-\varphi}[\theta(t); (z-t)^{-1-\varphi}]) \end{aligned} \quad (3.24)$$

ilişkisi de kolayca görülebilir.

Yukarıda tanıtılan hem kesirsel mertebeden integral operatörü hem de kesirsel mertebeden türev operatörü ile ilgili hem temel bazı kaynaklar olarak hem de çeşitli teoremler ve sonuçlar içeren bazı özel çalışmalar olarak da Miller and Ross (1975), Grozdev (1997), Owa (1978, 2009), Chen at al. (1997, 1998), Hilfer (2000), Kilbas et al. (2006), Irmak and Engel (2019), Agarwal (2012), Kulalı (2023), Irmak (2020, 2021, 2022) ve Yıldız (2023) eserleri incelenebilir.

Bu alt bölümün son operatörü de literatürde Tremblay operatörü olarak anılan ve kesirsel mertebeden türev operatörü yardımıyla tanımlanan bir integral dönüşümüdür. Bu integral dönüşümü de yine remark şeklinde sunulacak ve bu dönüşüm, kompleks fonksiyonlar kapsamında ele alınacak ve onun (2.3.7)'deki gibi genel integral dönüşümü ile aralarındaki bazı özel ilişkiler veya uygulamalar sunulacaktır.

3.2.3 Remark. Aşağıda verilen parametrelerle ilgili olan

$$0 < \alpha \leq 1, \quad 0 < \beta \leq 1 \quad \text{ve} \quad 0 \leq \alpha - \beta < 1$$

şeklindeki koşullar altında, verilen $\theta(z)$ gibi bir analitik fonksiyonunun α ve β parametrelili Tremblay operatörü

$$\mathcal{T}_{\alpha,\beta}[\theta(z)] \tag{3.25}$$

şeklinde gösterilir ve

$$\mathcal{T}_{\alpha,\beta}[\theta(z)] := \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)} z^{1-\beta} \mathfrak{D}_z^{\alpha-\beta} [z^{\alpha-1} \theta(z)] \tag{3.26}$$

şeklinde tanımlanır.

Özellikle, (3.23) ve (2.3.7)'deki ilgili operatörlerinin (3.26) ve (3.22)'deki gibi verilen tanımlar dikkate alındığında

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\alpha,\beta}[\theta](z) &:= \mathcal{T}_{\alpha,\beta}[\theta(z)] \\ &\equiv \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)} z^{1-\beta} \mathfrak{D}_z^{\alpha-\beta} [z^{\alpha-1} \theta(z)] \\ &\equiv \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha+\beta)} z^{1-\beta} \frac{d}{dz} \left(\int_0^z t^{\alpha-1} \theta(t) (z-t)^{\beta-\alpha} dt \right) \\ &\equiv \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha+\beta)} z^{1-\beta} \frac{d}{dz} \left(\mathbb{B}_{z,\beta-\alpha} [t^{\alpha-1} \theta(t); (z-t)^{\beta-\alpha}] \right) \end{aligned} \tag{3.27}$$

şeklindeki gibi ilişkileri de vurgulayalım.

Elbette ki (3.24) ile verilen operatör kesirsel mertebeden türev operatörü yardımıyla tanımlanan bir operatör olduğundan dolayı Remark 3.2.2’de yer alan ilgili esas tanımdan hemen sonra vurgulanan özel koşulların geçerliliği burada da zorunlu olmak durumundadır. Bu özel integral dönüşümü ile ilgili olan bazı (özel veya detaylı) çalışmalar için, Yıldız (2023) ve Irmak and Engel (2023) ile verilen eserlerdeki sonuçlar da incelenebilir.

Ayrıca, yukarıda tanıtılan Remark 3.2.1, Remark 3.2.2 ve Remark 3.2.3’teki gibi verilen tüm operatörlerin, “Skalarla Çarpma” ve “Lineerlik” gibi çok temel özelliklerinin sağlandığı kolayca görülebilir. Aynı zamanda verilen tüm tanımlarda ilgili parametreler elbette ki kompleks sayılardan da oluşabilir. Bu gibi durumlarda, ilgili parametrelerin reel kısımlarının pozitif olması zorunluluğu ilgili genelleştirilmiş integrallerin yakınsaklıkları gereğidir.

Önceki bölümlerde de vurgulandığı gibi klasik integral dönüşüm (veya operatör) teorisi göz önüne getirildiğinde örneğin, herkesçe çok iyi bilinen Laplace dönüşümü ile ilgili olan gerek teorik gerekse çeşitli uygulama alanları için bilmiş olduğumuz kapsamlı bilgiler elbette ki hem

$$\mathbb{G}[v(t); u(t)] \quad \text{ve} \quad \mathbb{B}_{w,v}[v(t); u(t)] \quad (3.28)$$

şeklindeki genel integral dönüşümleri hem de bu genel dönüşümlerle doğrudan ilgili ve kesirsel mertebeden türevlerce tanımlanmış olan

$$\mathfrak{D}_z^{-\varphi}[\theta](z) \quad , \quad \mathfrak{D}_z^{\varphi}[\theta](z) \quad \text{and} \quad \mathcal{J}_{\alpha,\beta}[\theta](z) \quad (3.29)$$

şeklindeki gibi tanıtılmış operatörlerin çeşitli temel özellikleri, teorileri ve uygulamaya yönelik kapsama alanları hafızalarımızda kolayca canlandırılabilir. Özellikle, Erdelyi (1954), Sneddon (1972), Davies (2001), Gradshteyn and Ryzhik (2007), Khan and Khan (2008), Poularikas (2010), Lokenath and Dambaru (2014) ve Aghili and Zeinali (2014) ile sunulan eserlerindeki temel integral dönüşümü ile ilgili kapsamlı bilgiler herkese de ufuk açacaktır. Bu bağlamda (3.28) ve (3.29) ile verilen ilgili (kompleks parametreleri

içeren) operatörler arasındaki bazı özel sonuçları da sadece önerme şeklinde aşağıdaki gibi sunmakta yarar görüyoruz.

3.2.1 Önerme.

$$\theta(z) := z^m \quad (m > -1; z \in \mathbb{C}^*)$$

şeklindeki gibi verilen kompleks kuvvet (üstel) fonksiyonu için, aşağıda verilenler doğrudur.

i) Her $\varphi > 0$ için,

$$\begin{aligned} \mathbb{B}_{z,1-\varphi}[t^m; t] &\equiv \Gamma(\varphi) \mathfrak{D}_z^{-\varphi}[z^m] \\ &= \frac{\Gamma(\varphi) \Gamma(m+1)}{\Gamma(m+\varphi+1)} z^{m+\varphi} \end{aligned} \quad (3.30)$$

dır.

ii) Her $0 \leq \varphi < 1$ için,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} (\mathbb{B}_{z,\varphi}[t^m; t]) &\equiv \Gamma(1-\varphi) \mathfrak{D}_z^{\varphi}[z^m] \\ &= \frac{\Gamma(1-\varphi) \Gamma(m+1)}{\Gamma(m-\varphi+1)} z^{m-\varphi} \end{aligned} \quad (3.31)$$

dır.

iii) $0 \leq \alpha - \beta < 1$ koşulunu sağlayan her $0 < \alpha \leq 1$ ve $0 < \beta \leq 1$ için,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} (\mathbb{B}_{z,\beta-\alpha}[t^{m+\alpha-1}; t]) &\equiv \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(1-\alpha+\beta)}{\Gamma(\beta)} z^{\beta-1} \mathcal{J}_{\alpha,\beta}[z^m] \\ &= \frac{\Gamma(1-\alpha+\beta) \Gamma(m+\alpha)}{\Gamma(m+\beta)} z^{m+\beta-1} \end{aligned} \quad (3.32)$$

dır.

Önerme 3.2.1’de geçen tüm sonuçlarda ilgili m sayısının $m \in \mathbb{C}$ olması da elbette ki $\Re(m) > -1$ şartını zorunlu kılar. Aynı zamanda, kullanılan diğer parametrelerin kompleks sayılar olması durumunda, onların reel kısımları sıfırdan büyük olacak şekilde koşulları da söz konusudur.

İspat. Yukarıda verilen önermeler için sırasıyla (3.18) ile (3.20), (3.22) ile (3.23) ve (3.26) ile (3.27) dönüşümleri ile beraber (2.37) ile verilen genel dönüşüm kullanılır, elde edilen genelleştirilmiş integrallerin her biri için

$$\tau = zt \Rightarrow d\tau = zdt$$

gibi bir değişken değişimleri uygulanır, klasik Gamma ile Beta fonksiyonları birlikte göz önüne alınır ve detaylı elementer işlemler yapılırsa sırasıyla, (3.31), (3.32) ve (3.33) ile verilen eşitliklere (veya denkliliklere) kolayca varılabilir. Detaylar ilgilenen araştırmacıların çabasına bırakılmıştır.

3.2.2 Önerme.

$$\theta(z) := \text{Sin}(\gamma z^\beta) \quad (\gamma \neq 0; \beta > -1; z \in \mathbb{U})$$

şeklindeki gibi verilen kompleks trigonometrik fonksiyonu için, aşağıda verilenler daima doğrudur:

i) Her $\varphi > 0$ için,

$$\begin{aligned} \mathbb{B}_{z,1-\varphi}[\text{Sin}(\gamma z^\beta); t] &\equiv \Gamma(\varphi) \mathfrak{D}_z^{-\varphi}[\text{Sin}(\gamma z^\beta)] \\ &\equiv \Gamma(\varphi) \mathfrak{D}_z^{-\varphi} \left[\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \gamma^{2j+1}}{(2j+1)!} t^{\beta(2j+1)} \right] \\ &\equiv \Gamma(\varphi) \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^j \gamma^{2j+1}}{(2j+1)!} \mathfrak{D}_z^{-\varphi} [t^{\beta(2j+1)}] \right\} \\ &= \Gamma(\varphi) \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^j \gamma^{2j+1}}{(2j+1)!} \right. \\ &\quad \times \left. \frac{\Gamma[\beta(2j+1)+2]}{\Gamma[\beta(2j+1)+\varphi+1]} z^{\beta(2j+1)+\varphi} \right\} \end{aligned} \quad (3.33)$$

dır.

ii) Her $\varphi > 0$ için,

$$\begin{aligned} \mathbb{B}_{z,-\varphi}[\text{Sin}(\gamma z^\beta); t] &\equiv \Gamma(\varphi) \mathfrak{D}_z^{\varphi}[\text{Sin}(\gamma z^\beta)] \\ &\equiv \Gamma(1-\varphi) \mathfrak{D}_z^{\varphi} \left[\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \gamma^{2j+1}}{(2j+1)!} t^{\beta(2j+1)} \right] \\ &\equiv \Gamma(1-\varphi) \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^j \gamma^{2j+1}}{(2j+1)!} \mathfrak{D}_z^{\varphi} [t^{\beta(2j+1)}] \right\} \\ &= \Gamma(\varphi) \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^j \gamma^{2j+1}}{(2j+1)!} \right. \end{aligned}$$

$$\times \frac{\Gamma[\beta(2j+1)+2]}{\Gamma[\beta(2j+1)-\varphi+1]} z^{\beta(2j+1)-\varphi} \} \quad (3.34)$$

dır.

iv) $0 \leq \alpha - \beta < 1$ koşulunu sağlayan her $0 < \alpha \leq 1$ ve $0 < \beta \leq 1$ sayıları için,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} (\mathbb{B}_{z, \beta-\alpha} [\text{Sin}(\gamma z^\beta); t]) & \equiv \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(1-\alpha+\beta)}{\Gamma(\beta)} z^{\beta-1} \mathcal{T}_{\alpha, \beta} [\text{Sin}(\gamma z^\beta)] \\ & \equiv \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(1-\alpha+\beta)}{\Gamma(\beta)} z^{\beta-1} \mathcal{T}_{\alpha, \beta} \left[\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \gamma^{2j+1}}{(2j+1)!} t^{\beta(2j+1)} \right] \\ & \equiv \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(1-\alpha+\beta)}{\Gamma(\beta)} z^{\beta-1} \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^j \gamma^{2j+1}}{(2j+1)!} \mathcal{T}_{\alpha, \beta} [t^{\beta(2j+1)}] \right\} \\ & \equiv \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(1-\alpha+\beta)}{\Gamma(\beta)} z^{\beta-1} \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^j \gamma^{2j+1}}{(2j+1)!} \mathcal{T}_{\alpha, \beta} [t^{\beta(2j+1)}] \right\} \\ & \equiv \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(1-\alpha+\beta)}{\Gamma(\beta)} z^{\beta-1} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^j \gamma^{2j+1}}{(2j+1)!} \right. \\ & \quad \left. \times \frac{\Gamma(1-\alpha+\beta) \Gamma(\beta(2j+1)+\alpha)}{\Gamma(\beta(2j+1)+\beta)} z^{m+\beta-1} \right) \end{aligned} \quad (3.35)$$

dır.

İspat. Önerme 3.2.1'in ispatında vurgulanan tüm adımlarının bir kez de (3.12)'de verilen kompleks değişkenli trigonometrik fonksiyonuna ait kuvvet serisi için göz önüne alınması gerekli ispat için yeterli olacaktır.

Yukarıda sadece tanımlamış olduğumuz iki kapsamlı dönüşümün bazı özel dönüşümlerle olan ilişkileri belirledik ve ardından da onlarla ilgili sadece iki kapsamlı önerme oluşturduk. Bilindiği gibi bilindik özel dönüşümlerin genel özellikleri ve bunların çeşitli (uygulama) alanlardaki rolü oldukça geniştir. İlgili araştırmacılar için farklı ufuklar açmak adına, aşağıdaki özel bilgilendirmelerin yine elde edilecek olan diğer (farklı) dönüşümler için de göz önüne alınabileceğini belirtmek istiyoruz.

Örneğin;

I. İkinci ve üçüncü bölümlerde (veya ilgili alt bölümlerde) sunulmuş olan tüm sonuçlarda (önermelerde, remarklarda veya özel örneklendirmelerde) geçen ilgili

parametrelerin uygun (mantıklı) seçilmesi durumunda, aşırı sayıda özel sonuçlar kolayca elde edilebilir. Örneğin, Remark 3.1.3 yardımıyla oluşturulmuş olan (3.12)-(3.16) arasındaki özel sonuçlar gibi çok sayıda farklı sonuçlar yeniden üretilebilir. Bu gibi özel sonuçların her biri için (2.2.9) ve (2.3.7) dönüşümleri (veya bu dönüşümlerin daha özel halleri olan bilindik dönüşümler) yeniden belirlenebilir.

II. Remark 3.1.3 göz önüne alınarak (3.17)'de belirtilen daha kapsamlı (reel veya kompleks) formdaki yapılar için (2.2.9) ve (2.3.7) dönüşümleri (veya bu dönüşümlerin daha özel halleri olan özel dönüşümler) yine yeniden belirlenebilir.

III. İkinci bölümde geçen ve (2.1.18) şeklindeki genel forma sahip (reel veya kompleks) seri açılımlı $\mathbb{L}_n^s(z)$ şeklindeki fonksiyonu için Kesirsel Mertebeden İntegral Operatörünü, Kesirsel Mertebeden Türev Operatörünü ve Tremblay Operatörünü kapsayan (2.2.9) ve (2.3.7) integral operatörleri göz önüne alınabilir ve (2.1.18) fonksiyon seri açılımında ilgili katsayılar farklı farklı seçilerek farklı elementer fonksiyonların belirtilen özel ve genel dönüşümleri belirlenebilir. Örneğin, seri açılımda geçen;

$$\omega_n := \frac{1}{n!} \quad (n := 1; 2; 3; \dots)$$

seçilmesi sonucu,

$$\mathbb{L}_1^1(z) := e^z - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

şeklindeki elementer formdaki (kompleks değişkenli) fonksiyonu ile onun kuvvet seri açılımı elde edilir.

IV. Bu araştırmada özel fonksiyonlardan olan sadece Gamma ve Beta fonksiyonları tanıtılmıştı. Gerek bu fonksiyonlarla alakalı olan gerekse çok sayıda diğer özel fonksiyonlarla ilişkilendirilebilen çeşitli fonksiyonlar mevcut olup bunların her biri belirlenebilir ve önceden tanıtılmış olan temel veya genel dönüşümler altındaki etkileri belirlenebilir. Özellikle örneğin Mittag-Leffler fonksiyonu, Hypergeometrik Geometrik fonksiyonlar gibi özel fonksiyonlar ile elde edilebilecek sonuçları ilgili özel fonksiyonlar veya denklemlerle doğal ilişkilerine odaklanılabilir ve belirtilen operatörler altındaki değişimleri de belirlenebilir. Oldukça özel bir örnek olması açısından,

literatürde hem reel hem de kompleks parametrelili formu olarak sıkça karşılaşılan ve hem mühendislik hem de uygulamalı bilimlerde oldukça önemli rolü olan

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\rho^2} d\rho$$

şeklindeki gibi bilinen hata (error) fonksiyonunda geçen ve özellikle (2.1.19) ile verilen üstel fonksiyonuna ilişkin seri açılımdan, yani

$$e^{-\rho^2} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} \rho^{2j}$$

seri açılımından faydalanarak

$$\begin{aligned} \operatorname{erf}(z) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} \rho^{2j} \right) d\rho \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^j}{j!} \int_0^z \rho^{2j} d\rho \right\} \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!(2j+1)} z^{2j+1} \quad (z \in \mathbb{C}) \end{aligned}$$

şeklindeki gibi karşılaşılan ilgili hata (error) fonksiyonunun ikinci tanımı olarak bilinen seri açılımı da elde edilir. Böylesi bir seri açılımlı fonksiyonun yukarıdaki (adımlardaki) gibi vurgulanan özel ve genel dönüşümler kolayca belirlenebilir. İlgili özel fonksiyonlarla da ilgili olan daha fazla özel (veya özgün) sonuçlar (teoriler ve bağıntılar vs) açısından Lebedev (1965), Zhang and Jin (1966), Abramowitz and Stengun (1971), Andrews (1985), Olver et al. (2010), Wang and Guo (2010), Beals and Wong (2010), Akkoyun (2020), Yıldız (2023) ve Kulalı (2023) eserleri oldukça detaylı bilgi içermektedir.

V. 2.2 ve 2.3 ile verilen alt bölümlerde tanımlanmış olan ilgili genel iki dönüşümün bilindik özel dönüşümleriyle belirtilen çeşitli özel ilişkilerden (denkliklerden) hareketle, (2.2.9) ve (2.3.7) genel dönüşümlerinin teorileri ve uygulamaları da genişletilebilir. Örneğin, aşağıdaki gibi verilen ve herkesçe çok iyi bilinen Laplace dönüşümü ile kesirsel mertebeden integral dönüşümü ve kesirsel mertebeden türev dönüşümü arasındaki aşağıdaki iki önerme, vurgulanan tartışmaların veya önerilerin boyutunu da yine oldukça genişletecektir.

i) $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi \in \mathbb{C}$ ve $\Re(\varphi) > 0$ olmak üzere, (3.20) ile verilen $v := v(t)$ gibi bir fonksiyonunun kesirsel mertebeden integral dönüşümünün Laplace dönüşümü ile olan ilişkisi:

$$s^\varphi \mathcal{L} \{ \mathfrak{D}_z^{-\varphi} [v(t)] \} (s) = \mathcal{L} [v(t)] (s) .$$

ii) $n \in \mathbb{N}^*$, $s \in \mathbb{C}$ ve $n - 1 < \Re(\varphi) \leq n$ olmak üzere, (3.22) ile verilen $v := v(t)$ gibi bir fonksiyonunun kesirsel mertebeden türev dönüşümünün Laplace dönüşümü ile olan ilişkisi:

$$\mathcal{L} \{ \mathfrak{D}_z^\varphi [v(t)] \} (s) = s^\varphi \mathcal{L} [v(t)] (s) - \sum_{j=0}^{s-1} s^j \mathfrak{D}_z^{\varphi-j-1} [v(0)]$$

şeklindeki bağıntılar yine yukarıda vurgulanan (genel veya özel) dönüşümler kapsamının genişletilmesinde yol gösterici olacaktır. Bu araştırmada, yukarıdaki temel bağıntılara benzer olarak bilinen bazı özel dönüşümlerle ilgili olan çeşitli çalışmalar referanslar verilmiştir. Her biri üzerine odaklanılabilir.

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Temelde dört bölümden oluşan bu bilimsel çalışmanın ilk bölümünde çalışmanın esas konusu ile doğrudan ilişkili olan bazı (reel veya kompleks parametrelili (değişkenli)) özel fonksiyonlar ile (integral) dönüşüm teorisi hakkında bazı temel bilgilendirmeler ile birlikte literatür sunumu gerçekleştirilmiştir. İkinci bölümde ise bazı özel fonksiyonlara ilişkin çeşitli bilgiler ve Irmak ve Açıkgöz (2023) tarafından tanımlanmış ve üzerinde çalışılmış genel formda olan iki (integral) dönüşümü sunulmuş, ardından da ilgili fonksiyon ve dönüşümlerle ilgili çeşitli özellikler, önermeler ve örnekler sunulmuştur. Üçüncü bölümde de ikinci bölümde oluşturulmuş olan genel formdaki integral dönüşümlerinin çeşitli (reel veya kompleks formdaki) dönüşümlerle olan bazı ilişkileri

açığa çıkarılmış ve onlarla ilgili çeşitli önermeler, sonuçlar, bazı önerilerde bulunulmuş ve her biri için de elementer örnekler verilmiştir. Ayrıca, ilgili (genelleştirilmiş) integrallerin (operatörlerin) çeşitli (bilim) alanlarındaki kapsamlı uygulamalarına yönelik bazı özel açıklamalara (veya örneklendirmelere) yer verilmiştir. Özellikle, çeşitli hazır programlar yardımıyla, ilgili önermelerde, remarklarda veya ilgili sonuçlarda kullanılan parametrelere ilişkin uygun (mantıklı) kısıtlamalar altında ve uygun seçimlerle oluşturulacak olan (reel veya kompleks parametrelili) fonksiyonlardan yararlanarak (2.2.2)-(2.2.4), (2.3.1)-(2.3.3), (2.3.11)-(2.3.12), (3.3)-(3.16) ve (3.30)-(3.35) arasında geçen her bir özel sonuca ilişkin özel hesaplamalar yapılabilir ve hatta bu özel hesaplamalar kullanılarak 2D veya 3D boyutlarındaki çeşitli grafikler de oluşturulabilir (veya gerçekleştirilebilir).

KAYNAKLAR

- Abramowitz, M. and Stegun, I. A. 1972. Handbook of Mathematical Functions With Formulas, Graphs and Mathematical Tables. Dover, 1044 pages, New York, USA.
- Agarwal, P. 2012. Further results on fractional calculus of Saigo operators. Appl. Math., 7 (2): 585-594.
- Aghili, A. and Zeinali, H. 2014. Advances in Laplace type integral transforms with applications. Indian Journal of Science and Technology, 6 (7): 877-890.
- Ahlfors, L. V. 1966. Complex Analysis, MacGrw-Hill Inc., 347 pages, USA.

- Akkoyun, M. D. 2020. Kompleks Değişkenli Hata Fonksiyonları ve Bunların Bazı Sonuçları. Yüksek Lisans Tezi, Çankırı Karatekin Üniversitesi, 76 sayfa, Çankırı.
- Al-Sirehy, F. and Fisher, B. 2011. Evaluation of the beta function, *Int. J. Appl. Math.*, 26(1): 359-70.
- Andrews, L. C. 1985, *Special Functions For Engineeres and Applied Mathematicians*, Macmillan Publishing Company, 504 pages, New York, USA.
- Arfken, G. B. and Weber, H. J. 2005. *Mathematical Methods for Physics*, Elsevier Academic Press, 1195 pages, USA.
- Bardaro, C. and Mantellini, I. 2014. On Mellin convolution operators: A direct approach to the asymptotic formulae, *Integral Transform Spec. Funct.*, 25(3), 182-195.
- Beals, R. and Wong, R. 2010. *Special Functions: A Graduate Text*, 468 pages, Cambridge University Press, UK.
- Bell, W. W. 1968. *Special functions for scientists and engineers*, D. Van Nostrand Company Ltd., 247 pages, Reinhold, New York, USA.
- Birkhoff, G. D. 1913. Note on the gamma function, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 20(1), 1-10.
- Boas, M. L. 1983. *Mathematical Methods in the Physical Sciences*, John Wiley & Sons, 858 pages, Canada.
- Bohner, M. and Peterson, A. 2002, Laplace transform and Z-transform: unification and extension, *Methods and Applications of Analysis*, 9(1): 151-157.
- Boyadjiev, L. and Luchko, Y. 2017. Mellin Integral Transform Approach to Analyze the Multidimensional Diffusion-Wave Equations, *Chaos Solitons and Fractals*, 102: 127-134.
- Bracewell, R. N. 2000. *The Fourier Transform and Its Applications*, McGraw-Hill, 630 pages, Boston, Mass, USA.
- Brown, J. W. and Churchill, R. V. 1996. *Complex variables and applications*, McGraw-Hill, 468 pages, USA.
- Chen, M. P., Irmak, H. and Srivastava, H. M. 1997. Some families of multivalently analytic functions with negative coefficients. *J. Math. Anal. Appl.*, 214 (2): 674-690.

- Chen, M. P., Irmak, H. and Srivastava, H. M. 1998. A certain subclass of analytic functions involving operators of fractional calculus. *Comput. Math. Appl.*, 35 (5): 83-91.
- Choi, J. and Srivastava, H. M. 2009. Integral representations for the gamma function, the beta function, and the double gamma function, *Integral Transform Spec. Funct.*, 20(11), 859-869.
- Churchill, R. V. 1954. The Operational Calculus of Legendre Transforms, *Journal of Mathematics and Physics*, 33(1-4): 165-178.
- Coolidge, J. L. 1949. The Story of the Binomial Theorem, *The American Mathematical Monthly*, 56 (3): 147-157.
- Dettman, J. 1970. *Applied Complex Variables*, Dover Publications, INC., 512 pages, New York, USA.
- Daftardar-Gejji V. 2014. *Fractional Calculus: Theory and Applications*, Narosa Publishing House, 225 pages, New Delhi.
- Dattoli, G. Ottaviani, P. L., Torre, A. and Vazquez, L. 1997. Evolution Operator Equations: Integration with algebraic and finite difference methods, Application in Physical Problems in classical and quantum mechanics and quantum field theory, *Riv. Nuovo Cimento*, 20(2): 1-133.
- Davies, B. 2001. *Integral Transforms and Their Applications (Applied Mathematical Sciences)*, 370 pages, Springer and Business Media, USA.
- El-tayeb, H. and Kilicman, A. 2010. A note on Sumudu Transforms and Differential Equations, *Applied Mathematical Sciences*, 4(22): 1089-1098.
- Elzaki, T. M. 2011. The New Integral Transform "Elzaki transform", *Glob. J. of Pur. and Appl. Math.*, 7(1): 57-64.
- Erdelyi, A. 1954. *Tables of Integral Transforms*, Mc-Graw Hill, 402 pages, California, USA.
- Gradshteyn, I. S. and Ryzhik, I. M. 2007. *Table of Integrals, Series, and Products*, Translated from Russian by Scripta Technica, Inc., Academic Press, 1220 pages, USA.
- Grozdev, S. 1997. On the appearance of the fractional calculus. *J. Theoret. Appl. Mech.*, 27 (3): 11-20.

- Hartley, R. V. L. 1942. A more symmetrical fourier analysis applied to transmission problems, *Proceedings of the IRE.*, 30(3): 144-150.
- Henrici, P. 1977. *Applied and Computational Complex Analysis*, John Wiley and Sons, 682 pages, New York, USA.
- Hilfer, R. 2000. *Applications of Fractional Calculus in Physics*, World Scientific, 472 pages, Singapore.
- Irmak, H. and Açıkgöz, T. H. 2023. Notes on various transforms identified by some special functions with complex (or real) parameters and some of related implications, *Engineering World*, 5: 108-118.
- Irmak, H. and Engel, O. 2019. Some results concerning the Tremblay operator and some of its applications to certain analytic functions, *Acta Univ. Sapientiae Math.*, 11(2): 296-305.
- Irmak, H. 2020. A note on some elementary properties and applications of certain operators to certain functions analytic in the unit disk, *Ann. Univ. Paedagog. Crac. Stud. Math.*, 19(1): 193-201.
- Irmak, H. 2021. Characterizations of some fractional-order operators in complex domains and their extensive implications to certain analytic functions, *An. Univ. Craiova Ser. Mat. Inform.*, 48 (2): 349-357.
- Irmak, H. 2022. Various operators in relation to fractional order calculus and some of their applications to normalized analytic functions in the open unit disk, *Turkish Journal of Mathematics*, 46(1): 167-176.
- Kashuri, A. and A. Fundo, A. 2013. A new integral transform, *Advanced in Theoretical and Applied Mathematics*, 8(1): 27-43.
- Kayman, W. K. 1994. *Multivalent Functions*, Cambridge University Press, 263 pages, Cambridge, USA.
- Khan, Z. H. and Khan, W. A. 2008. *N-Transform-Properties and Applications*, NUST Journal of Engineering Sciences, 1: 127-133.
- Kilbas, A. A., Srivastava, H. M. and Trujillo, J. J. 2006. *Theory and applications of fractional differential equations*, North-Holland Mathematical Studies, 204. Elsevier (North-Holland) Science Publishers, 504 pages, Amsterdam, London and New York.

- Kulalı, Ö. F. 2023. Kesirsel Mertebeden Hesaplamalar: İlgili Tanımlar, Teoriler ve Bazı Olası Sonuçlar. Yüksek Lisans Tezi, Çankırı Karatekin Üniversitesi, 71 sayfa, Çankırı.
- Lebedev, N. N. 1965. Special functions and their applications, Prentice Hall, 322 pages, New Jersey.
- Lokenath, D. and Dambaru, B. 2014. Integral Transforms and Their Applications, CRC Press, 818 pages, Boca Raton, USA.
- Mansour, E. A., Kuffi, E. A. and Mehdi, S. A. 2022. Applying SEE transform in solving Faltung type Volterra integro-differential equation of first kind, Journal of Interdisciplinary Mathematics, 25 (5): 1315-1322.
- Mehdi, S. A, Kuffi, E. A. and Jasim, J. A. 2022. Solving ordinary differential equations using a new complex intgeral transform, Journal of Interdisciplinary Mathematics, 25 (6): 1919-1932.
- Mehdi, S. A, Kuffi, E. A. and Jasim, J. A. 2023. Using a new general complex intgeral transform for solving population growth and decay problems, IHJPAS, 36 (1): 398-404.
- Meyer, Y. 1992. Wavelets and Operators, Cambridge University Press, 223 pages, Cambridge, UK.
- Miller, K. and Ross, B. 1993. An introduction to the Fractional and Fractional Differential Equations, John Wiley & Sons, 384 pages, NY, USA.
- Nehari, Z. 1952. Conformal Mapping, MacGraw-Hill, 414 pages, New York, USA.
- Offord, A. C. 1935. On Hankel transform, Proceedings of the London Mathematical Society, 39(2): 49-67.
- Olver, F. W. J., Lozier, D. W., Boisvert, R. F. and Clark, C. W. 2010. NIST Handbook of Mathematical Functions, Cambridge University Press, 967 pages, New York, USA.
- Owa, S. 1978. On the distortion theorems. I, Kyungpook Math., J. 18 (3): 53-59.
- Owa, S. 2009. Some properties of fractional calculus operators for certain analytic functions, Kyuto Univ. Research Information Repository, 1626: 86-92.
- Polyanin, A. D. and Manzhirov, A. V. 1998. Handbook of Integral Equations, CRC Press, 1144 pages, New York, USA.

- Polyanin, A. D. and Manzhirov, A. V. 2007. Handbook of Mathematics for Engineers and Scientists, Taylor & Francis Group, 1543 pages, Boca Raton, 2007.
- Poularikas, A. D. 2010. Transforms and Applications Handbook, CRC Press, 412 pages, Boca Raton.
- Press, W. H., Teukolsky, S. A. and Vetterling, W.T. and Flannery, B. P. 2007. Gamma Function, Beta Function, Factorials, Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing, Cambridge University Press, 746 pages, New York, USA.
- Qi, F. 2018. An improper integral, the beta function, the Wallis ratio, and the Catalan numbers, *Probl. Anal. Issues Anal.*, 7(25): 104-115.
- Ross, B. 1975. Fractional Calculus and its Applications, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, , 457 pages, New York.
- Roussos, I. M. 2013. Improper Riemann Integrals, Chapman and Hall, CRC Press, 689 pages, UK.
- Rudin, W. 1964. Principals of Mathematical Analysis, International Series in Pure & Applied Mathematics, McGraw-Hill Education, 352 pages, USA.
- Samko, G. Kilbas, A. and Marchiev, O. 1993. Fractional Integrals and derivatives theory and applications. Gordon and Breach, 282 pages, NY, USA.
- Sneddon, I. N. 1972. The use of Integral Transforms, McGraw-Hill, International Editions, 539 pages, New York, USA.
- Spiegel, M. R. 1965. Theory and Problems of Laplace Transforms, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, 197 pages, New York, USA.
- Vinagre, J., Blas, M., Calderon, G., Antonio, J., Suarez, M., Jose, I., Monje, M. and Concepcion, A. 2005. Control theory and fractional calculus. *Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fis. Nat.*, 99 (2): 241-258.
- Wang Z. X. and Guo, D. R. 2010. Special Functions, World Scientific Pub. Comp., 716 pages, Singapore.
- Whittaker, E. T. and Watson, G. N. 1963. A Course of Modern Analysis: An Introduction to the General Theory of Infinite Processes of Analytic Functions; with an Account of the Principal Transcendental Functions, Cambridge Univ. Press, 608 pages, UK.
- Wrede, R. and Spiegel, M. 2010, Schaum's Outline of Advanced Calculus, McGraw-Hill, 456 pages, Boston, USA.

- Wolfram, S. 1998. The Mathematica Book, Addison-Wesley, 1301 pages, USA.
- Yang, X. J. 2017. New Integral Transforms for Solving a Steady Heat-Transfer Problem, Thermal Science, 21: 79-87.
- Yıldız T. H. 2023. Kompleks Düzlemde Tremblay Operatörü ve Bazı Analitik Fonksiyonlara Uygulamaları. Yüksek Lisans Tezi, Çankırı Karatekin Üniversitesi, 47 sayfa, Çankırı.
- Zhang, S. and Jin, J. 1966. Computation of Special Functions, Wiley-Interscience, 717 pages, USA.
- Zhuravkov, M. and Romanova, N. 2015. Modification of Hertz contact problem solution on the basis of fractional calculus for biostructures mechanical properties determination. Nonlinear Phenom. Complex Syst., 18 (1): 31-37.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı ve Soyadı Tolga Han AÇIKGÖZ

Eğitim

Yüksek Lisans	Çankırı Karatekin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı	2020-2024
---------------	--	-----------

	Necmettin Erbakan Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Eğitim Programları ve Öğretimi	2021-2022
	İstanbul Rumeli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İş Sağlığı ve Güvenliği	2018-2019
Lisans	Hacı Bayram Veli Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi Siyaset Bilimi Yönetimi	2020-Halen
	Maltepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği	2017-2018
	Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Anabilim Dalı	2009-2013
İş Deneyimi		
Yıl	Kurum	Görev
2019-2023	Çankırı İsmail Nazire Ünal Ortaokulu	Öğretmen
2023-Halen	Şırnak Gümüşyazı Ortaokulu	Öğretmen

Akademik Aktiviteler

1. H. Irmak and T. H. Açıkgoz, Notes on various transforms identified by some special functions with complex (or real) parameters and some of related implications, Engineering World 5 (2023), 108-118, Art.#12.