

T.C.
MUĞLA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

EPİDEMİK SIR MODELİNİN VE LİNEER OLMAYAN
PANTOGRAF DİFERANSİYEL DENKLEMLERİNİN
MORGAN-VOYCE POLİNOMLARI YARDIMIYLA
YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİ

GÖZDE ŞAHİN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

OCAK 2024

MUĞLA

MUGLA SITKI KOÇMAN ÜNİVERSİTESİ

Fen Bilimleri Enstitüsü

TEZ ONAYI

Gözde ŞAHİN tarafından hazırlanan **EPİDEMİK SİR MODELİNİN VE LİNEER OLMAYAN PANTOGRAF DİFERANSİYEL DENKLEMLERİNİN MORGAN-VOYCE POLİNOMLARI YARDIMIYLA YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİ** başlıklı tezinin, 12/01/2024 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans derecesi için gerekli şartları sağladığı oybirliği/oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

TEZ SINAV JURİSİ

Prof. Dr. Mustafa GÜLSU (Jüri Başkanı)
Matematik Anabilim Dalı,
Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi, Muğla

İmza:

Dr. Öğr. Üyesi Özgül İLHAN (Danışman)
Matematik Anabilim Dalı,
Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi, Muğla

İmza:

Prof. Dr. Niyazi ŞAHİN (Üye)
Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalı,
Ankara Yıldırım Beyazıt Üniversitesi, Ankara

İmza:

ANA BİLİM DALI BAŞKANLIĞI ONAYI

Prof. Dr. Mustafa GÜLSU
Matematik Anabilim Dalı Başkanı,
Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi, Muğla

İmza:

Dr. Öğr. Üyesi Özgül İLHAN
Matematik Anabilim Dalı,
Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi, Muğla

İmza:

Savunma Tarihi: 12/01/2024

Tez çalışmalarım sırasında elde ettiğim ve sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgelerin tarafımdan bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde edildiğini; akademik ve bilimsel etik kurallarına uygun olduğunu beyan ederim. Ayrıca, akademik ve bilimsel etik kuralları gereği bu tez çalışması sırasında elde edilmemiş başkalarına ait tüm orijinal bilgi ve sonuçlara atıf yapıldığını da beyan ederim.

Gözde şAHİN

12/01/2024

ÖZET

EPİDEMİK SIR MODELİNİN VE LİNEER OLMAYAN PANTOGRAF DİFERANSİYEL DENKLEMLERİNİN MORGAN-VOYCE POLİNOMLARI YARDIMIYLA YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİ

Gözde ŞAHİN

Yüksek Lisans Tezi,

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Özgül İLHAN

Ocak 2024, 82 Sayfa

Bu çalışmada, Morgan-Voyce sıralama metodu kullanılarak bir popülasyonda ölümcül olmayan bir hastalığın yayılması probleminin ve lineer olmayan pantograf diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümleri elde edilmektedir. Bu metod, bilinmeyen katsayılı Morgan-Voyce serisini kullanarak yaklaşık çözümleri genişletip problemi lineer olmayan bir cebirsel denklem sistemine indirger. Morgan-Voyce polinomlarının bu katsayıları türevlerin matris işlemleriyle birlikte sıralama yöntemi kullanılarak hesaplanır. Böylece istenilen yaklaşık çözümler bulunmuş olur. Ayrıca metodun hassaslığını tayin etmek için hata analizi yapılmıştır. Metodun kullanılabilirliğini ve etkinliğini göstermek için birkaç örnek verilmiştir. Bu örneklerden elde edilen sonuçlar literatürde bulunan diğer metotlarla karşılaştırılmıştır. Hesaplamaları yapmak için MATLABR2022a programı kullanılmıştır.

Anahtar kelimeler: SIR Model, Lineer Olmayan Pantograf Diferansiyel Denklem, Morgan-Voyce Sıralama Metodu, Morgan-Voyce polinomları ve Serileri, Yaklaşık çözüm, Sıralama noktaları

ABSTRACT

APPROXIMATE SOLUTIONS OF THE EPIDEMIC SIR MODEL AND NONLINEAR PANTOGRAPH DIFFERENTIAL EQUATIONS USING MORGAN-VOYCE POLYNOMIALS

Gözde ŞAHİN

Master of Science (M.Sc.)

Department of Mathematics

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Özgül İLHAN

January 2024, 82 pages

In this study, approximate solutions of the problem of the spread of a non-fatal disease in a population and nonlinear pantograph differential equations have been obtained by using the Morgan-Voyce collocation method. This method expands the approximate solutions using the Morgan-Voyce series with unknown coefficients and reduces the problem to a nonlinear system of algebraic equations. These coefficients of Morgan-Voyce polynomials are calculated using the collocation method together with matrix operations of derivatives. Thus, the desired approximate solutions are found. In addition, error analysis is performed to determine the sensitivity of the method. A few examples are given to demonstrate the usability and effectiveness of the method. The results obtained from these examples are compared with other methods found in the literature. MATLABR2022a program is used to perform the calculations.

Keywords: SIR Model, Nonlinear Pantograph Differential Equation, Morgan-Voyce Collocation Method, Morgan-Voyce Polynomials and Series, Approximate Solution, Collocation points

ÖNSÖZ

Bu tezin yazımında bana çok değerli zamanını ayıran ve benim her türlü derdimde her zaman yardım elini uzatan ve yanımda olan, çok saygı değer danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Özgül İLHAN' a yardımlarından dolayı teşekkür etmeyi borç bilirim.



İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ÇİZELGELER DİZİNİ	ix
ŞEKİLLER DİZİNİ	x
1. GİRİŞ	1
1.1. Sır Modeli	1
1.2. SIR Modeline Tam Analitik Çözümler	5
1.3. SIR Modeline Yaklaşımlarla Sayısal Çözümler	7
1.4. Hayati Dinamiklere ve Sabit Nüfusa Sahip SIR Modeli.....	9
1.5. Diğer Çözüm Yöntemleri.....	11
2. KAYNAK ÖZETLERİ	15
2.1. Lineer Olmayan Pantograf Diferansiyel Denklemler	15
2.2. Epidemik SIR Model	15
2.3. Kararlı Durum Çözümleri	18
2.4. Diğer Bölmeli Modeller	18
2.4.1. SIS modeli.....	19
2.4.2. SIRD modeli	20
2.4.3. SIRV modeli	20
2.4.4. MSIR modeli.....	21
2.4.5. Taşıyıcı Durumu.....	22
2.4.6. SEIR modeli	22
2.4.7. SEIS modeli	23
2.4.8. MSEIR modeli	24
2.4.9. MSEIRS modeli	24
2.5. Morgan-Voyce Polinomlarının Toplam Formülleri.....	25
2.5.1. Morgan-Voyce polinomlarının tekrarlama (Rekürans) bağıntısı	26
2.5.2. Morgan-Voyce polinomlarının alternatif tekrarlama bağıntıları.....	26
3. MATERYAL VE YÖNTEM.....	28
3.1. Lineer Olmayan Pantograf Diferansiyel Denklemlerinin Morgan-Voyce Sıralama Metodu ile Çözüm Yöntemi	28
3.2. Epidemik SIR Modelinin Morgan-Voyce Sıralama Metodu İle Çözüm Yöntemi	36

3.3. Morgan Voyce Toplamının Hesaplanmasının Kararlılığı ve Hata Tahmini...	41
3.4. Çözümün Kontrolü ve Hata Hesabı	44
4. ARAŞTIRMA BULGULARI	46
5. SONUÇLAR VE TARTIŞMA	63
KAYNAKLAR	64
ÖZGEÇMİŞ.....	71



ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 4.1.	Örnek 4.2'nin N 'in farklı değerleri için E_N hata fonksiyonlarının karşılaştırılması.....	49
Çizelge 4.2.	Örnek 4.3'ün N 'in farklı değerleri için E_N hata fonksiyonlarının karşılaştırılması.....	51
Çizelge 4.3.	Örnek 4.4'ün N 'in farklı değerleri için E_N hata fonksiyonlarının karşılaştırılması.....	53
Çizelge 4.4.	$N=5$ için Örnek 4.5 için $S(t)$ değerlerinin nümerik sonuçlarının karşılaştırılması.....	56
Çizelge 4.5.	$N=5$ için Örnek 4.5 için $S(t)$ değerlerinin rezidü hatalarının karşılaştırılması.....	56
Çizelge 4.6.	$N=5$ için Örnek 4.5 için $I(t)$ değerlerinin nümerik sonuçlarının karşılaştırılması.....	56
Çizelge 4.7.	$N=5$ için Örnek 4.5 için $I(t)$ değerlerinin rezidü hatalarının karşılaştırılması.....	56
Çizelge 4.8.	$N=5$ için Örnek 4.5 için $R(t)$ değerlerinin nümerik sonuçlarının karşılaştırılması	57
Çizelge 4.9.	$N=5$ için Örnek 4.5 için $R(t)$ değerlerinin rezidü hatalarının karşılaştırılması.....	57
Çizelge 4. 10.	$\sigma = 0.005$ için Denklem (2.4)' ün rezidü hataları	59
Çizelge 4.11.	$\sigma = 0.01$ için Denklem (2.4)' ün rezidü hataları	59
Çizelge 4.12.	$\sigma = 0.02$ için Denklem (2.4)' ün rezidü hataları	60
Çizelge 4.13.	$\sigma = 0.03$ için Denklem (2.4)' ün rezidü hataları	60
Çizelge 4.14.	$\sigma = 0.06$ için Denklem (2.4)' ün rezidü hataları	60

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1.	SIS modelinin akış şeması	19
Şekil 2.2.	MSIR modelinin akış şeması	21
Şekil 2.3.	Taşıyıcı durumun akış şeması	22
Şekil 2.4.	SEIR modelinin akış şeması.....	23
Şekil 4.1.	Örnek 4.2'nin $N=3,4$ için yaklaşık çözümleri ve tam çözümünün karşılaştırılma.....	49
Şekil 4.2.	Örnek 4.2'nin $N=7,9$ için yaklaşık çözümleri ve tam çözümünün karşılaştırılması	50
Şekil 4.3.	Örnek 4.3'ün $N=4$ için yaklaşık çözüm ve tam çözümünün karşılaştırılması	51
Şekil 4.4.	Örnek 4.3'ün $N=5$ için yaklaşık çözüm ve tam çözümünün karşılaştırılması	52
Şekil 4.5.	Örnek 4.3'ün $N=7$ için yaklaşık çözüm ve tam çözümünün karşılaştırılması	52
Şekil 4.6.	Örnek 4.4'ün $N=3,4,5$ için yaklaşık çözümleri ve tam çözümünün karşılaştırılması	54
Şekil 4.7.	Örnek 4.4'ün $N=5,7$ için yaklaşık çözümleri ve tam çözümünün karşılaştırılması	54
Şekil 4.8.	$S(t)$ için rezidü hatalarının diğer metotlarla karşılaştırılması.....	57
Şekil 4.9.	$I(t)$ için rezidü hatalarının diğer metotlarla karşılaştırılması.....	58
Şekil 4.10.	$R(t)$ için rezidü hatalarının diğer metotlarla karşılaştırılması	58
Şekil 4.11.	$S(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ ' nin yaklaşık çözümlerinin rezidü hatalarının $\sigma=0.01$ için karşılaştırılması	61
Şekil 4.12.	$S(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ ' nin yaklaşık çözümlerinin rezidü hatalarının $\sigma=0.02$ için karşılaştırılması	61
Şekil 4.13.	$S(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ ' nin yaklaşık çözümlerinin rezidü hatalarının $\sigma=0.03$ için karşılaştırılması	62
Şekil 4.14.	$S(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ ' nin yaklaşık çözümlerinin rezidü hatalarının $\sigma=0.06$ için karşılaştırılması	62

SEMBOLLER DİZİNİ

$B(x)$	1. Tip Morgan-Voyce Polinomları
$b(x)$	2. Tip Morgan-Voyce Polinomları
$P_{kr}(x)$	Lineer Olmayan Pantograf Diferansiyel Denklemin Katsayısı
$Q_{kr}(x)$	Lineer Olmayan Pantograf Diferansiyel Denklemin Katsayısı
$Q_{kr}(x)$	Lineer Olmayan Pantograf Diferansiyel Denklemin Katsayısı
t_i	Sıralama Noktaları
R	Morgan-Voyce Polinom Katsayılar Matrisi
C	Bilinmeyen Morgan-Voyce Katsayılar Matrisi
N	Kesme Sınırı
W	Artırılmış Matris
V_j	Koşullar İçin Artırılmış Matris
$\tilde{W}$	Koşulları Kullanılmış Yeni Artırılmış Matris
$\tilde{G}$	Sağ Taraftaki Koşulları Kullanılmış Yeni Artırılmış Matris
$E(t_i)$	t_i Noktasındaki Hata

1. GİRİŞ

1.1. Sır Modeli

Adi diferansiyel denklem ve sistemleri, biyoloji, fizik mühendisliği, finansal veya sosyolojik alanlarda önemli ölçüde matematiksel ifadeler içerdiğinden bazı gerçek hayat problemlerini temsil etmede kullanılmaktadır. Bu alandaki birçok lineer olmayan problemin adi diferansiyel denklem ve sistemleri ile iyi modellenebileceği bilinmektedir.

Bölmeli modeller genellikle bulaşıcı hastalıkların matematiksel modellemesinde kullanılır. SIR modeli de bulaşıcı hastalıkların matematiksel modellemelerinden biridir. Burada, S duyarlı birey sayısını, I enfekte bireylerin sayısını, R de iyileşen bireylerin sayısını göstermektedir.

Burada S, I, R'nin sırası akış modellerini gösterir. Örneğin SEIS duyarlı, maruz kalmış, enfekte ve tekrar duyarlı durumlarını ifade eder. Bu tür modeller ilk olarak 20. Yüzyılın başlarında görülmüştür. Bu konu ile ilgili başlıca çalışmalar 1916' da Ross (1916), 1917' de Ross ve Hudson (1917), 1927' de Kermack ve McKendrick (1927) ve 1956' da Kendall (1956) tarafından yapılmıştır. Bu modeller genellikle adi diferansiyel denklemlerle modellenirler. Fakat daha doğru modeller stokastik (rastgele) denklemlerle oluşturulur ama bu denklemlerin analizi çok karmaşıktır.

Bir bulaşıcı hastalığın nasıl yayıldığı veya enfekte olan toplam sayı veya bir salgının süresi gibi şeyleri tahmin etmekle birlikte üreme sayısı gibi epidemiyolojik parametreleri yaklaşık olarak hesaplayabilmek için bu modeller kullanılır. Bu tür modeller farklı halk sağlığı müdahalelerinin salgının seyrini nasıl etkileyebileceğini belirlemede büyük bir rol oynar. Örneğin, belirli bir popülasyonda sınırlı sayıda aşı yapmak için en etkili yöntemin ne olduğunu gösterebilir.

SIR modellerinin kesin çözümlerini bulmak önemlidir. Çünkü biyologlar, doğal başlangıç koşullarını ele alarak bulaşıcı hastalıkların yayılmasını gözlemlemede deneyler tasarlamak ve yürütmek için SIR modelini kullanabilirler. Bu deneyler ve matematiksel modelleme aracılığıyla, salgınların yayılmasını kontrol etmenin yolları öğrenilebilir. Aslında bu tür doğa olaylarını temsil eden problemler için kesin çözümler elde etmek son derece zordur.

En basit bulaşıcı hastalık modellemelerinden birisi SIR modelidir. Bu model üç tip bireyden oluşur: hastalığa duyarlı olabilecekler, hastalığa yakalanmış olabilecekler ve iyileşmiş veya hastalığa bağışıklığı olabilecekler.

Model bu nedenle üç sınıfa veya duruma sahiptir.

S: Duyarlı bireylerin sayısı. Duyarlı ve bulaşıcı bir birey "bulaşıcı temasda" bulunduğunda, duyarlı birey hastalığa yakalanmış olur ve bulaşıcı bölüme aktarılır.

I: Enfekte bireylerin sayısı. Bu bölümdekiler, enfektendirler ve duyarlı bireyleri enfekte edebilirler.

R: İyileşen bireylerin sayısı. Bunlar, hastalıktan kurtulmuş ve iyileşen bölmeye geçen ya da ölmüş kişilerdir. Ölü sayısı toplam nüfusa göre önemsiz sayılmaktadır. Bu bölme " kurtarılmış " veya " dirençli " olarak da isimlendirilir.

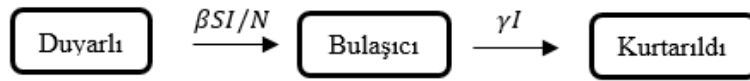
Bu model, insandan insana bulaşan ve kızamık , kabakulak, kızamıkçık ve covid gibi iyileşmenin kalıcı direnç sağladığı bulaşıcı hastalıklar için uygun bir modeldir (Yang vd., 2020).

Bununla birlikte, epidemiyoloji dışında, şarkı popüleritesinin yayılması, siyasi etkinin, söylentilerin ve silah sahipliğinin modellenmesi gibi durumlarda kullanılmıştır (Shirzad ve Viney, 2023).

(S , I ve R), belirli bir zamanda her bölmedeki insan sayısını ifade eder. Duyarlı, enfekte ve iyileşen bireylerin sayısının zamana bağlı olarak değişeceğini ifade edebilmek için (toplam popülasyon sabit kalmak üzere), S, I ve R'yi t 'ye bağlı bir fonksiyon olarak gösteririz: $S(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonları bir t anındaki sırasıyla duyarlı, enfekte ve iyileşen bireylerin sayısını gösterir. Toplam popülasyon büyüklüğü sabit kalsa bile $S(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ fonksiyonları zamanla değişebilir. Belirli bir popülasyondaki bir hastalık için salgınları tahmin etmek ve onları kontrol altına alabilmek için bu fonksiyonlar ele alınabilir (Yang vd., 2003).

S, I ve R , t zaman değişkenine bağlı fonksiyonlar olarak yazıldığından her bölmedeki sayıların zamana bağlı olarak dalgalanabilmesi yönünden model dinamiktir. Bu dinamik yönün önemi, Birleşik Krallık'ta 1968'de bir aşının tanıtılmasından önceki kızamık hastalığında da görüldüğü gibi kısa bir bulaşıcı döneme sahip endemik bir hastalıkta en belirgin şekilde ortaya çıkar. Bu tür hastalıklar zamanla $S(t)$ sayısındaki değişimden etkilenecek salgın döngüleri şeklinde gözlemlenir. Bir salgın esnasında, duyarlı bireylerin sayısı, daha çok duyarlı birey enfekte oldukça ve böylece bulaşıcı ve iyileşen bölmelere girdikçe hızla düşer. Bu döngü, örneğin duyarlı bölmede doğan bireylerin bir sonucu olarak, duyarlı kişilerin sayısı yeniden oluşana kadar devam eder.

Popülasyonun her bir üyesi tipik olarak duyarlıdan bulaşıcıya ve iyileşene yönünde ilerler. Bu bölümlerin farklı bölmeleri ve okların bölmeler arasındaki geçişi aşağıdaki şema ile gösterilir,



Şekil 1.1. Bir SIR epidemi modelindeki durumlar ve bireylerin bunlar arasında geçiş oranları

Modelin tam özellikleri için, oklar bölmeler arasındaki geçiş oranları ile etiketlenmelidir.

N toplam nüfus, β her bir kişi başına bir zaman birimi içindeki ortalama temas sayısını göstermek üzere, S ve I arasındaki geçiş hızının $\frac{d(\frac{S}{N})}{dt} = -\frac{\beta SI}{N^2}$ olduğu kabul edilir. β , duyarlı bir bireyin bulaşıcı bir nesne ile temasında hastalığın bulaşma olasılığı ile çarpılır. SI/N^2 bulaşıcı ve duyarlı bireyler arasındaki temasların, duyarlı kişinin enfekte olmasıyla sonuçlanan temaslara oranıdır. Bulaşıcı bireylerin sayısı olan γI ile I ve R arasındaki geçiş oranının orantılı olduğu kabul edilir. Bu durum, bulaşıcı bir bireyin herhangi bir dt zaman aralığında iyileşme olasılığının γdt olduğunu kabul etmekle denktir. Bir birey ortalama bir D süresi boyunca bulaşıcıysa, o zaman $\gamma = 1/D$. Bir başka ifadeyle γ , bir bireyin bulaşıcı durumda geçirdiği sürenin üstel dağılıma sahip rastgele bir değişkenidir.

SIR modeli, I-R geçiş hızı için daha karmaşık ve gerçekçi dağılımlar kullanılarak değiştirilebilir (örn. Erlang dağılımı (Wang vd., 2023)). Bulaşıcı bölmeden çıkış olmadığı özel durumda SIR modeli çok basit bir *SI* modeline dönüşür. Bu *SI* modelinde her birey sonunda enfekte olacak şekilde lojistik bir çözüm bulunur.

Basit bölüm modellerinde doğum ve ölüm çoğunlukla göz ardı edilir. Çünkü grip gibi bir salgının dinamikleri genellikle doğum ve ölüm dinamiklerinden çok daha hızlıdır.

Hayati dinamikler içermeyen (doğum, ölüm) SIR sistemi, aşağıda verilen adi diferansiyel denklemler sistemi ile ifade edilebilir (Beckley vd., 2020; Simon,2020),

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\frac{\beta IS}{N}, \\ \frac{dI}{dt} = \frac{\beta IS}{N} - \gamma I, \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I, \end{cases} \quad (1.1)$$

Burada S, duyarlı nüfus sayısını, I enfekte nüfus sayısını, R kurtarılmış (ölmüş veya iyileşmiş) nüfus sayısını ve N de bu üçünün toplamını gösterir.

Bu sistem lineer değildir, ancak analitik çözümünü kapalı biçimde türetmek mümkündür (Harko vd., 2014). İlk olarak, şunu not edelim,

$$\frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dR}{dt} = 0,$$

denkleminde

$$S(t) + I(t) + R(t) = \text{sabit} = N,$$

elde edilebilir.

Burada nüfus sabiti matematiksel olarak N ile ifade edilir. Yukarıdaki ilişki, denklemi yalnızca üç değişkenden ikisi için incelenmesi gerektiğini gösterir.

İkinci olarak, bulaşıcı sınıfın dinamikleri aşağıdaki oranla ifade edilebilir,

$$R_0 = \frac{\beta}{\gamma}$$

Bu oran, temel çoğaltma oranı olarak da adlandırılır. Bu sayı, tüm deneklerin duyarlı olduğu bir popülasyondaki tek bir enfeksiyondan beklenen yeni enfeksiyon sayısı olarak elde edilir (bu yeni enfeksiyonlara bazen ikincil enfeksiyonlar denir) (Krylova ve Earn, 2013; Hethcote, 2000).

Yukarıdaki modelde,

$$F = \beta I$$

fonksiyonu duyarlı bireylerin bölmesinden bulaşıcı bireylerin bölmesine geçiş oranını modeller ve enfeksiyonun gücü olarak adlandırılır.

Bununla birlikte, bulaşıcı hastalıkların büyük sınıfları için, bulaşıcı kişilerin mutlak sayısına değil, bunların fraksiyonuna (toplam sabit N popülasyonuna göre) bağlı bir enfeksiyon gücünü dikkate almak daha gerçekçi olacaktır ve F aşağıdaki gibi olacaktır,

$$F = \beta \frac{I}{N}$$

Capasso (1993) ve daha sonra diğer yazarlar, bulaşma sürecini daha gerçekçi bir şekilde modellemek için enfeksiyonun doğrusal olmayan kuvvetlerini önerdiler.

1.2. SIR Modeline Tam Analitik Çözümler

Harko ve diğerleri (2014), SIR modeline tam olarak analitik çözüm adı verilen (yalnızca sayısal olarak hesaplanabilen bir integral içeren) bir çözüm türettiler.

$S(u) = S(t)$, vb., hayati dinamik kurulumunun olmadığı durumda, $t =$

$$\frac{N}{\beta} \int_u^1 \frac{du^*}{u^* I(u^*)}, \quad \rho = \frac{\gamma N}{\beta}, \text{ için ve}$$

$$(S(1), I(1), R(1)) = (S(0), N - R(0) - S(0), R(0)), u_T < u < 1,$$

başlangıç koşulları ile

$$S(u) = S(0)u$$

$$I(u) = N - R(u) - S(u)$$

$$R(u) = R(0) - \rho \ln(u)$$

zaman parametresine karşılık gelir. Burada, u_t , $I(u_T) = 0$ koşulunu sağlar. R_∞ için transandantal denklemden, $S(0) \neq 0$ ve $I_\infty \neq 0$ ise $u_T = e^{\frac{R_\infty - R(0)}{\rho}} (= \frac{S_\infty}{S(0)})$ sonucu çıkar.

Miller (Eylül 2017; Şubat 2017) tarafından bulunan eşdeğer analitik çözüm (yalnızca sayısal olarak hesaplanabilen bir integral içeren) aşağıdaki gibidir,

$$S(t) = S(0)e^{-\varepsilon(t)}$$

$$I(t) = N - S(t) - R(t)$$

$$R(t) = R(0) + \rho\varepsilon(t)$$

$$\varepsilon(t) = \frac{\beta}{N} \int_0^t I(t^*) dt^*$$

Burada, $\varepsilon(t)$ bir bireyin t zamanına kadar alması beklenen iletim sayısı olarak yorumlanabilir. İki çözüm $e^{-\varepsilon(t)} = u$ ile ilişkilidir.

Etkili olarak aynı sonuç, Kermack ve McKendrick'in orijinal çalışmasında bulunabilir (Kermack ve McKendrick, 1927).

Bu çözümler, orijinal diferansiyel denklemlerin sağ taraflarındaki tüm terimlerin I ile orantılı olduğuna dikkat edilerek kolayca anlaşılabilir. Böylece denklemler I ile bölünebilir ve sol taraftaki diferansiyel operatör basitçe d/d_τ olacak şekilde zaman yeniden ölçeklendirilebilir. Burada $d_\tau = I dt$ yani $\tau = \int I dt$ şeklindedir. Diferansiyel denklemler artık tamamen lineerdir ve $\frac{dR}{d\tau} = \text{sabit}$ formundaki üçüncü denklem, τ ve R 'nin (ve yukarıdaki ε 'nin) basitçe doğrusal olarak ilişkili olduğunu gösterir.

SIR modelinin son derece doğru bir analitik yaklaşımının yanı sıra S_∞ , I_∞ ve R_∞ son değerleri için kesin analitik ifadeler Kröger ve Schlickeiser (Kröger ve Schlickeiser, 2020) tarafından sağlanmıştır, böylece SIR modelini çözmek için sayısal bir entegrasyon gerçekleştirmeye gerek yoktur. Parametrelerini mevcut verilerden elde etmek veya SIR modeliyle modellenen bir salgının gelecekteki dinamiklerini tahmin etmek için Microsoft Excel kullanılarak COVID-19 sayısal simülasyonuna ilişkin basitleştirilmiş bir örneğin uygulamasına buradan ulaşılabilir (Miller, 2012).

Yaklaşım, Microsoft Excel , MATLAB ve Mathematica gibi tüm temel veri görselleştirme yazılımlarının bir parçası olan Lambert W işlevini içerir .

Kendall (1956) başlangıç koşulları $S(0)$, $I(0)$ ve $R(0)$ 'ın yukarıdaki ilişkiler yoluyla bağlandığı tüm zamanların SIR modeli denilen modeli değerlendirirken, Kermack ve McKendrick (1927) $S(0)$ ve $I(0)$ 'ın her ikisinin de keyfi olduğu daha genel yarı zamanlı durumu incelemeyi önerdi. Yarı zamanlı SIR modeli (Kröger ve Schlickeiser, 2020) olarak adlandırılan bu ikinci versiyon, yalnızca $t > 0$ gelecek zamanlar için tahminlerde bulunur. Yarı zamanlı SIR modeli için de son değerlere yönelik analitik bir yaklaşım ve kesin ifadeler mevcuttur (Schlickeiser ve Kröger, 2021).

1.3. SIR Modeline Yaklaşımlarla Sayısal Çözümler

SIR modelinin sayısal çözümleri literatürde bulunabilir. COVID-19 yayılma verilerini analiz etmek için modelin kullanılması buna bir örnektir (Hart vd., 2021; Smith vd., 2022). Sayısal yaklaşımla analiz edilen verilerden üç çoğaltma sayısı çıkarılabilir,

$$\text{Temel çoğaltma sayısı: } R_0 = \frac{\beta_0}{\gamma_0}$$

$$\text{Gerçek zamanlı çoğaltma sayısı: } R_t = \frac{\beta_t}{\gamma_t}$$

$$\text{ve gerçek zamanlı etkili çoğaltma sayısı: } R_e = \frac{\beta_t S}{\gamma_t N}$$

R_0 , tüm popülasyonların duyarlı olduğu varsayıldığında yayılmanın başlangıcındaki üreme hızını temsil eder; $\beta_0 = 0.4 \text{gün}^{-1}$ ve $\gamma_0 = 0.2 \text{gün}^{-1}$ ise ortalama olarak bulaşıcı bir kişinin günde 0.4 duyarlı kişiye bulaştırdığı ve $1/0.2 = 5$ günde iyileştiği anlamına gelir. $R_0 = 2$, bulaşıcı kişilerin sayısı 5 günlük bir döngüde ikiye katlandı yani kişi iyileştiğinde, bu kişiden doğrudan bulaşan iki kişi hala bulaşıcıdır. Model tarafından simüle edilen verilerin $R_0 = 2$ ile uygun hale getirilmiş gerçek verilerle karşılaştırılması, enfekte olan kişi sayısının 5 günden daha kısa bir sürede iki katına çıkmasına neden olacaktır. Çünkü bu iki enfekte olan kişi başkalarını enfekte etmektedir. SIR modelinden, β 'nın hastalığın doğası tarafından belirlendiğini ve aynı zamanda bulaşıcı kişi I ile duyarlı kişiler S arasındaki etkileşim sıklığıyla ve ayrıca etkileşimin yoğunluğu/süresiyle, yani ne kadar yakın etkileşimde bulundukları, ne

kadar süreyle etkileşimde bulundukları ve maske takıp takmadıkları gibi faktörlere bağlı olarak bir fonksiyon olduğunu anlayabiliriz. Bu nedenle, taşıyıcıların ve duyarlı kişilerin ortalama davranışları değiştikçe β zaman içinde değişir. Model, bu faktörleri temsil etmek için SI' yı kullanır ancak aslında yayılmayı önlemek için hiçbir önlem alınmadığı ve tüm popülasyonun duyarlı olduğu, dolayısıyla tüm değişikliklerin β değişikliği tarafından absorbe edildiği başlangıç aşamasına referans verilmektedir. γ , bulaşıcı kişinin semptomlar gösterdiğinde tıbbi yardım isteyeceğini veya kendini izole edeceğini varsayarsak, genellikle zaman içinde daha stabildir. Yani R_t 'de değişiklikler bulursak, büyük olasılıkla toplumdaki insanların davranışları salgından önceki normal kalıplarından farklı hale gelmiştir veya hastalık yeni bir forma dönüşmüştür.

Duyarlı yakın temasların masraflı kitlesel tespiti ve izolasyonunun, $1/\gamma'$ nın azaltılması üzerinde etkileri vardır, ancak bunların verimliliği tartışılmaktadır. Bu tartışma büyük ölçüde, enfekte duyarlı bir kişide bir semptomun ortaya çıkmasından önce, bulaşıcı veya tespit edilebilir olduktan sonra (hangisi önce gelirse) geçen gün sayısının kısaltılması konusundaki belirsizlik üzerinedir. Kişi semptomlar ortaya çıktıktan sonra bulaşıcıysa veya tespit yalnızca semptomları olan bir kişide işe yarıyorsa, bu önleme yöntemleri gerekli değildir ve kendi kendine izolasyon veya tıbbi müdahale $1/\gamma$ değerlerini azaltmanın en iyi yoludur. COVID-19 bulaşıcı döneminin tipik başlangıcı, semptomların ortaya çıkmasından itibaren bir gün kadardır ve bu da birkaç gün içinde tipik sıklıkta yapılan yoğun tespitleri işe yaramaz hale getirir. R_t bize, toplumdaki duyarlı kişilerin oranının iyileşme veya aşılama sonrasında önemli ölçüde düştüğü sonraki aşamalarda yayılmanın hızlanıp yavaşlamayacağını söylemez. R_e , duyarlı popülasyonun fraksiyonunu toplam popülasyonla çarparak bu seyreltme etkisini düzeltir. Hastalığın yayılmasının orta ve geç evrelerinde etkileşimin çoğu bağışıklık kazandığında, bulaşıcı bir kişi ile toplumun geri kalanı arasındaki etkili/bulaşıcı etkileşimini düzeltir.

Böylece,

$R_e > 1$ ise, üstel benzeri bir salgın görülür;

$R_e = 1$ ise, sabit bir duruma ulaşılmıştır ve bulaşıcı kişilerin sayısı zamanla değişmez;

$R_e < 1$ ise, hastalık zamanla çürür ve kaybolur.

SIR modelinin diferansiyel denklemlerini kullanarak ve bunları nümerik ayrıık formlara dönüştürerek, tekrarlama bağıntıları kurulabilir ve herhangi bir başlangıç koşuluyla S, I ve R popülasyonları hesaplanabilir, ancak referans noktasından itibaren uzun bir hesaplama süresi boyunca hatalar birikir. Bazen hataları tahmin etmek için yakınsama testine ihtiyaç duyulur.

Verilen bir dizi başlangıç koşulu ve hastalık yayılma verileri ile, veriler aynı zamanda SIR modeli ile uyumlu hale getirilebilir ve genellikle hatalar, referans noktasından kısa zaman adımı nedeniyle ihmal edilebildiğinde üç üreme sayısını elde etmek mümkündür. (Miller, 2012; Miller, 2017). Zamanın herhangi bir noktası, nüfus gibi zamanla gelişen parametrelerin varsayımıyla bu sayısal model kullanılarak geleceği tahmin etmek için başlangıç koşulu olarak kullanılabilir. Ancak bu referans noktasından uzakta, hatalar zamanla birikecektir, bu nedenle daha doğru sonuçlar için en uygun zaman adımını bulmak amacıyla yakınsama testine ihtiyaç vardır. Bu üç üreme numarası arasında R_0 , kontrol baskısını değerlendirmek için oldukça kullanışlıdır; örneğin büyük bir R_0 değeri, hastalığın çok hızlı yayılacağı ve kontrol edilmesinin çok zor olacağı anlamına gelir. R_t , hastalığın gelecekteki durumunu tahmin etmede en faydalı olanıdır; örneğin, sosyal etkileşimlerin salgın öncesine göre %50 oranında azaldığını ve insanlar arasındaki etkileşim yoğunluklarının aynı olduğunu biliyorsak, bu durumda $R_t = 0.5R_0$ alabiliriz. Sosyal mesafe ve maskeler enfeksiyon verimliliğine %50' lik bir azalma daha eklerse, $R_t = 0.25R_0$ alabiliriz. R_e , yayılmanın dalgalarıyla mükemmel bir şekilde ilişkilenecektir ve $R_e > 1$ olduğu zaman yayılma hızlanır, $R_e < 1$ olduğunda ise yayılma yavaşlar; bu nedenle R_e , kısa vadeli eğilimlere dair tahminler oluşturmak için kullanışlı olacaktır. Ayrıca, sürü bağışıklığı aşaması için aşılama/bağışıklamanın eşik popülasyonunu doğrudan hesaplamak için $R_e = R_0$ alınabilir.

1.4. Hayati Dinamiklere ve Sabit Nüfusa Sahip SIR Modeli

Ölüm oranı μ ve doğum oranı Λ ile karakterize edilen ve bulaşıcı bir hastalığın yayıldığı bir popülasyonu ele alalım. (Beckley vd., 2013)

Hastaliksız dengenin (DFE) $(S(t), I(t), R(t)) = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0\right)$ olduğu, kütle etkili yayılıma sahip model aşğıdaki gibidir,

$$\frac{dS}{dt} = \Lambda - \mu S - \frac{\beta IS}{N}$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\beta IS}{N} - \gamma I - \mu I$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I - \mu R$$

Bu durumda, temel bir çoğaltma sayısı türetebiliriz, bu sayı

$$R_0 = \frac{\beta}{\mu + \gamma},$$

şeklindedir ve eşik özelliklere sahiptir. Aslında biyolojik olarak anlamlı başlangıç değerlerinden bağımsız olarak şunu gösterebiliriz,

$$R_0 \leq 1 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} (S(t), I(t), R(t)) = DFE = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0\right)$$

$$R_0 \geq 1, I(0) > 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} (S(t), I(t), R(t)) = E \\ = \left(\frac{\gamma\mu}{\beta}, \frac{\pi}{\beta}(R_0 - 1), \frac{\gamma}{\beta}(R_0 - 1)\right).$$

EE noktasına Endemik Denge denir (hastalık tamamen ortadan kaldırıılmaz ve popülasyonda kalır). Buluşsal argümanlarla, R_0 'ın tamamen duyarlı bir popülasyonda tek bir bulaşıcı deneğin neden olduğu ortalama enfeksiyon sayısı olarak okunabileceği gösterilebilir; yukarıdaki ilişki biyolojik olarak bu sayının birden az veya bire eşit olması durumunda hastalığın yok olacağı anlamına gelir, oysa bu sayı birden büyükse hastalık popülasyonda kalıcı olarak endemik kalacaktır.

1.5. Diğer Çözüm Yöntemleri

Lineer olmayan terimleri içeren adi diferansiyel denklem sistemlerinin kesin çözümlerini bulmak çoğu durumda son derece zor olabilir. Ayrıca, adi diferansiyel denklem sistemlerinin tam çözümleri kesin olarak bulunamayacağından, yaklaşık çözümler bulmak için sayısal ve yaklaşık yöntemlere ihtiyacımız vardır. Adi diferansiyel denklem sistemlerini çözmek için birçok araştırmacı tarafından incelenen birçok yöntem vardır. Hojjatiet v.d. (2004) çok adımlı yöntemleri, Mastorakis (2005) sıralama metodunu, Shawagfeh ve Kaya (2004) Adomian ayrıştırma yöntemini, Yüzbaşı ve Karaçayır (2017) Üstel Galerkin metodunu, Yüzbaşı (2016) üstel sıralama metodunu, Al-Omari v.d. (2013) Galerkin sonlu elemanlar metodunu önermişlerdir.

Son zamanlarda, (1.1) denkleminin yaklaşık çözümlerini elde etmek için, bazı araştırmacılar bu modeli farklı yöntemler kullanarak incelemişlerdir. Denklem (1.1) için, Argub ve El-ajou (2013) farklı parametre değerleri için homotopi analiz metodunu, Fadi v.d. (2009) homotopi analiz metodunu, Biazar (2006) Adomian ayrıştırma metodunu, Rafei v.d. (2007) homotopi pertürbasyon metodunu, İbrahim ve Ismail (2017) diferansiyel dönüşüm yaklaşımı kullanmışlardır. Bu sistem Laplace-Adomian ayrıştırma yöntemi kullanılarak çözülmüştür (Doğan ve Akin, 2012). Harman ve Johnston (2016) salgın modelini stokastik Galerkin yöntemini kullanarak çözdüler. Denklem (1.1), Kousar v.d. (2012) tarafından 4. mertebe Runge-Kutta yöntemi kullanılarak çözülmüştür. Hussain v.d. (2017) tarafından Euler, Runge Kutta-2 ve Runge-Kutta-4 yöntemleri kullanılarak çözülmüştür.

Sıralama metodu, diferansiyel denklemleri çözmek için son zamanlarda birçok araştırmacı tarafından kullanılmaktadır. Bu yöntem, büyük boyutlu salgın modeller için adi diferansiyel denklem sistemlerinin çözümünün karmaşıklığını azaltabileceğinden ve diferansiyel denklemlerin tam çözümüne yakın sonuçlar bulmaya katkı sağlayacağından dolayı oldukça kullanışlıdır.

Pantograf diferansiyel denklemlerinin çözülmesi, bilimsel olayların ve mühendisliğin modellenmesindeki rollerinden dolayı oldukça önemlidir. Bu nedenle literatürde çok sayıda çalışma bulunmaktadır. Örneğin, (Ahmet vd., 2020; Balachandran vd., 2013; Fan vd., 2007) çalışmalarında pantograf diferansiyel denklemlerinin çözümlerinin varlığı ve tekliği incelenmiştir. Ayrıca, analitik çözümlerin elde edilmesi aşamasındaki

zorluklardan dolayı, bu denklemleri yaklaşık olarak çözmek için çeşitli sayısal yöntemler geliştirilmiştir. Pantograf diferansiyel denklemlerinin yaklaşık çözümlerinde uygulanan sayısal yöntemlerden bazıları Bernoulli operasyonel matris yöntemi (Tohidi vd., 2013), Lucas sıralama yöntemi (Gümgüm vd., 2020), Daftardar-Jafari yöntemi (Yılmaz ve Yaman, 2020), Taylor matris yöntemi (Sezer vd., 2008) ve değiştirilmiş diferansiyel dönüşüm yöntemi (Noori ve Taghizadeh, 2020) şeklinde sıralanabilir.

Deniz ve Sezer (Deniz ve Sezer, 2020) doğrusal olmayan ısı transferi denklemlerini rasyonel Chebyshev sıralama yöntemi kullanarak yaklaşık olarak çözmüşlerdir. Srivastava ve diğerleri (Srivastava ve Deniz., 2021) Laplace dönüşümü ile optimal pertürbasyon iterasyon tekniğini kullanarak Atangana-Baleanu türevi ile genelleştirilmiş düzenli uzun dalga denklemlerinin yaklaşık çözümlerini elde etmişlerdir. Khaled ve diğerleri (Khaled vd., 2021) kesirli Nagumo denklemini homotopi analizi dönüşüm yöntemini kullanarak çözmüşlerdir. Kesirli türevler için Caputo-Fabrizio ve Atangana-Baleanu türevleri ele alınmıştır.

Manuel ve diğerleri (Manuel vd., 2021) Caputo, Caputo-Fabrizio ve Atangana-Baleanu türevleri ile birlikte kesirli Chua devre modeli için optimal pertürbasyon yineleme yöntemini önermişlerdir. Bonyah ve diğerleri tarafından yapılan çalışmada, Atangana-Baleanu-Caputo anlamında nonlinear bir sistem olan kesirli koronavirüs modeli incelenmiştir. Benzer şekilde Agarwal ve ark. (Agarwal vd., 2020) zamanla değişen katsayılarla sahip genelleştirilmiş Fitzhugh-Nagumo denklemini çözmek için optimal pertürbasyon iterasyon yöntemini kullanmışlardır.

Bildik ve Deniz'in çalışmasında (Bildik vd., 2020), yazarlar tarafından optimal iteratif pertürbasyon yöntemi kullanılarak Jeffery-Hamel akışı üzerinde manyetik alanın ve nanopartikülün etkileri incelenmiştir. Jaaffar ve diğerleri, (Jaaffar vd., 2020) ikinci dereceden gecikmeli diferansiyel denklemleri doğrudan sınır koşullarıyla çözmek için beşinci dereceden doğrudan çok adımlı blok yöntemini kullanır.

Wazwaz ve diğerleri tarafından yapılan çalışmada, lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çözümleri için hem Adomian ayrıştırma yöntemi hem de varyasyonel iterasyon yöntemi uygulanmıştır (Wazwaz vd., 2017). He ve Latifizadeh (2020), doğrusal olmayan problemler için genel bir sayısal algoritma, varyasyonel iterasyon yöntemi kullanmışlardır.

Rani ve Mishra'nın çalışmasında (Rani ve Mishra, 2020), Duffing denklemi, Van der Pol denklemi, Blasius denklemi ve jerk denklemi gibi lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çözümü için, Bernoulli polinomları ve sayısal ters Laplace dönüşüm yöntemi kullanılmıştır. Bu yöntemler, tam çözümü bilinmeyen sorunları çözmek için kullanılmıştır.

Yuttanan vd. (Yuttanan vd., 2021) Taylor wavelet yöntemini, lineer olmayan kesirli gecikme ve lineer olmayan kesirli pantograf diferansiyel denklemlerine uygulamışlardır.

Bahgat (Bahgat, 2020) lineer ve lineer olmayan multipantograf gecikmeli diferansiyel denklemlerin yaklaşık analitik çözümünü elde etmiştir. Jafari ve arkadaşları (Jafari vd., 2021) pantograf tipi lineer olmayan kesirli integral diferansiyel denklemlerin çözümü için yeni bir sayısal yöntem önermişlerdir.

Literatür taramasında Morgan-Voyce sıralama yönteminin henüz epidemik SIR modeli ve lineer olmayan pantograf denklemlerine uygulanmadığı görülmektedir. Morgan-Voyce sıralama yöntemi ile elde edilen yaklaşık çözümler iyi sonuçlar vermektedir. Bununla ilgili bazı çalışmalar şu şekilde sıralanabilir; adi diferansiyel, multi pantograf, genelleştirilmiş pantograf denklemleri (İlhan, 2012, 2021), değişken gecikmeler ve değişken sınırlar içeren adi doğrusal gecikmeli integral-diferansiyel denklemler (Özel vd., 2021), yüksek mertebeli lineer diferansiyel-fark denklemleri (Türkyılmaz vd., 2016), Volterra tipi genelleştirilmiş fonksiyonel integro-diferansiyel denklemler (Özel vd., 2019), Kuadratik ve kübik terimleri içeren nonlinear sıradan diferansiyel denklemler (Tarakçı vd., 2020), Değişken gecikmeler içeren homojen olmayan diferansiyel denklem (Özel vd., 2018).

Bilinen bazı yöntemlere alternatif olarak etkili bir teknik olan Morgan-Voyce sıralama tekniği önerilmiştir. Lineer olmayan pantograf denklemlerinin yaklaşık çözümleri daha önce Çakmak tarafından Fibonacci sıralama metodu ile elde edilmiştir (Çakmak, 2022). Ayrıca bu denklemlerin çözümünde Bernoulli operasyonel matris yöntemi, Lucas sıralama yöntemi gibi yöntemler kullanılmıştır.

Sunulan yöntem, doğrusal olmayan diferansiyel denklemler sınıfının çözümünü elde etmek için uygun bir şekilde uygulanmıştır. Ayrıca, bu yöntemde bazı karmaşık problemlerin manuel olarak hesaplanması zor olduğundan, bunlar bilgisayar yazılımı kullanılarak kolayca ve basitçe hesaplanabilir. Bu çalışmada Morgan-Voyce

polinomları kullanılmıştır. Sunulan yöntemin en önemli avantajı, SIR modelini ve lineer olmayan pantograf diferansiyel denklemi, kolayca çözülebilen lineer olmayan bir cebirsel denklem sistemine dönüştürmesidir.

Bu tez çalışması referanslarla birlikte toplam 6 bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm olan giriş bölümü literatür özeti ile birlikte epidemik SIR modeli ve pantograf diferansiyel denklemleri ile ilgili kısaca bilgi vermektedir.

İkinci bölüm olan kaynak özetlerinde epidemik SIR modeli ve buna benzeyen diğer epidemik modeller ile birlikte lineer olmayan pantograf diferansiyel denklemler ayrıntılı bir şekilde açıklanmıştır. Ayrıca Morgan-Voyce polinomlarının bazı özellikleri verilmiştir.

Üçüncü bölüm olan materyal ve yöntemde de epidemik SIR modeli ve lineer olmayan pantograf diferansiyel denklemlerin çözümü için Morgan-Voyce sıralama yöntemi tanıtılmıştır. Bu denklemleri çözmek için gerekli matrisler ve matris bağıntıları oluşturulmuş, bu matrisler kullanılarak bu denklemler çözülmüştür.

Dördüncü bölüm olan araştırma bulgularında verilen metodun doğruluğunu ve etkinliğini göstermek için örnekler sunulmuştur. Gerekli hesaplamalar MATLAB(R2022a) bilgisayar programı yardımı ile yapılmıştır.

Son bölüm olan tartışmalar ve sonuçlar kısmında metodun uygulanabilirliği, etkinliği ve doğruluğu hakkında yorumlar yapıp sonuçlar çıkartılmıştır.

2. KAYNAK ÖZETLERİ

2.1. Lineer Olmayan Pantograf Diferansiyel Denklemler

Lineer olmayan pantograf diferansiyel denklem $u^{(0)}(x) = u(x)$, $u^0(x) = 1$ ve $u(x)$ bilinmeyen fonksiyon olmak üzere,

$$\sum_{k=0}^m [a_{jk}u^{(k)}(a) + b_{jk}u^{(k)}(b)] = \delta_j, i = 0,1 \quad (2.1)$$

başlangıç koşulu ile birlikte

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^m \sum_{r=0}^n P_{kr}(x) u^r(a_{kr}x + \beta_{kr}(x)) u^{(k)}(\lambda_{kr}x + \gamma_{kr}(x)) \\ & + \sum_{k=1}^m \sum_{r=1}^n Q_{kr}(x) u^{(r)}(a_{kr}x + \beta_{kr}(x)) u^{(k)}(\lambda_{kr}x + \gamma_{kr}(x)) \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$= g(x), a \leq x \leq b$$

şeklinde tanımlanır. Burada $P_{kr}(x), Q_{kr}(x), g(x) \in C[a, b]$, $a_{jk}, b_{jk}, a_{kr}, \lambda_{kr}$ uygun sabitlerdir. Ayrıca, $\beta_{kr}(x)$ ve $\gamma_{kr}(x)$ uygun sabitler veya keyfi değişkenlerdir.

2.2. Epidemik SIR Model

1927'de W. O. Kermack ve A. G. McKendrick, yalnızca üç bölümden oluşan sabit bir popülasyonu dikkate aldıkları bir model oluşturdular.

Bu model için kullanılan bölmeler üç sınıftan oluşur (Kermack ve McKendrick, 1927).

$S(t)$: t zamanında hastalıkla henüz enfekte olmayan bireyleri veya popülasyondaki hastalığa duyarlı kişileri temsil etmek için kullanılır.

$I(t)$: t zamanında popülasyonda hastalıkla enfekte olan ve hastalığı duyarlı kategoridekilere yayma kapasitesine sahip bireyleri belirtir.

$R(t)$: t zamanında popülasyonda enfekte olan ve daha sonra aşılama veya ölüm nedeniyle hastalıktan kurtulan bireyler için kullanılan bölmedir. Bu kategorideki kişilerin tekrar enfeksiyon kapması veya enfeksiyonu başkalarına bulaştırması mümkün değildir.

Bu modelin akışı şu şekilde düşünülebilir,

$$S \rightarrow I \rightarrow R$$

Sabit bir popülasyon kullanarak, $N = S(t) + I(t) + R(t)$ ifadelerini kullanmak, SIR modelini çözmek için yapılan simülasyon içinde N değerinin sabit kalması gerektiğini söyler.

Alternatif olarak bir simülasyon yapılmadan da analitik yaklaşım (Kröger ve Schlickeiser, 2020) kullanılabilir. Model $S(t=0), I(t=0)$ ve $R(t=0)$ 'nın değerleriyle başlatılır. Bunlar, zamanın sıfır olduğu andaki duyarlı, enfeksiyon kapmış ve çıkarılmış kategorilerdeki kişi sayısıdır. SIR modelinin her zaman geçerli olduğu varsayılırsa bu başlangıç koşulları bağımsız değildir (Kröger ve Schlickeiser, 2020). Daha sonra akış modeli, her zaman noktası için üç değişkeni β ve γ için ayarlanan değerlerle günceller. Simülasyon ilk önce etkilenen kategoriye duyarlı olandan günceller ve ardından kaldırılan kategori, bir sonraki zaman noktası ($t=1$) için etkilenen kategoriden güncellenir. Bu, üç kategori arasındaki kişilerin akışını tanımlar. Bir salgın sırasında duyarlı kategori bu modelle değiştirilmez; β ve γ de salgının gidişatına göre değişir. Bu değişkenler salgının uzunluğunu belirler ve her döngüde güncellenmesi gerekir. SIR modeli matematiksel olarak aşağıdaki gibi ifade edilir,

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\frac{\beta SI}{N} \\ \frac{dI}{dt} &= \frac{\beta SI}{N} - \gamma I \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I\end{aligned}\tag{2.3}$$

Bu denklemlerin formülasyonunda çeşitli varsayımlar yapılmıştır. İlk olarak, popülasyondaki bir bireyin, birim zamanda temasta bulunduğu kişi sayısının a ve eşit oranda b ile hastalığa yakalanma olasılığının diğer tüm bireylerle eşit olduğu düşünülmelidir. O halde a ile b 'nin çarpımı β olsun. Bu, iletim olasılığı çarpı temas oranıdır. Ayrıca enfekte bir kişi birim zamanda b kişiyle temas kurarken bunların yalnızca S/N kısmı duyarlıdır. Böylece, her enfeksiyonlu kişinin

$abS = \beta S$ duyarlı kişileri enfekte edebileceğini biliyoruz ve bu nedenle, enfektifler tarafından birim zamanda enfekte edilen duyarlı kişilerin tam sayısı βSI 'dir. İkinci ve üçüncü denklemler için, duyarlı sınıftan ayrılan popülasyonun, enfekte sınıfa giren nüfusa eşit olduğunu düşünelim. Ancak, her birim zamanda bu sınıftan çıkarak iyileşen sınıfa giren enfekte kişilerin sayısı, ortalama iyileşme/ölüm oranını temsil eden γ (veya ortalama bulaşıcı süreyi temsil eden $1/\gamma$) kesirine eşittir. Eşzamanlı olarak gerçekleşen bu süreçlere Kitle Hareketi Yasası adı verilir; bu, bir popülasyondaki iki grup arasındaki temas oranının ilgili grupların her birinin boyutuyla orantılı olduğu yönünde yaygın olarak kabul edilen bir fikirdir. Son olarak enfeksiyon ve iyileşme oranının doğum ve ölüm zaman ölçeğinden çok daha hızlı olduğu varsayılmaktadır ve bu nedenle bu faktörler bu modelde göz ardı edilmektedir (Padua ve Tulang, 2010).

Rachah ve Torres, SIR modelini (Rachah ve Torres, 2015) geliştirmişlerdir. Verilen başlangıç koşullarıyla beraber aşılama ile birlikte SIR modelini aşağıdaki gibi modellemişlerdir, $0 \leq t \leq a$ için

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\beta S(t)I(t) - \sigma S(t) \\ \frac{dI}{dt} &= \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I(t) + \sigma S(t) \\ S(0) &= N_S, I(0) = N_I, R(0) = N_R\end{aligned}\tag{2.4}$$

burada σ , her gün aşılanan bireylerin yüzdesidir (Yon, 2010).

2.3. Kararlı Durum Çözümleri

T_L 'nin hayatta kalınan süreyi (yaşam beklentisi) yansıttığı ve T_S 'nin de enfekte olmadan önce duyarlı durumdaki süreyi yansıttığı düşünülürse, beklenen duyarlılık süresi $E[\min(T_L \setminus T_S)]$ olacaktır ve bu, şu şekilde basitleştirilebilir (May ve Anderson, 1992),

$$E[\min(T_L \setminus T_S)] = \int_0^{\infty} e^{-(\mu+\delta)x} dx = \frac{1}{\mu + \delta},$$

öyle ki, duyarlı kişilerin sayısı duyarlı bölmeye girenlerin sayısı μN çarpı duyarlılık süresine eşit olacaktır,

$$S = \frac{\mu N}{\mu + \lambda}.$$

Benzer şekilde, sabit durumdaki enfekte kişilerin sayısı, duyarlı durumdan enfekte duruma girenlerin sayısıdır (duyarlı sayı çarpı enfeksiyon oranı) yani, $\lambda = \frac{\beta I}{N}$, çarpı bulaşıklık süresi $\frac{1}{\mu + \vartheta}$,

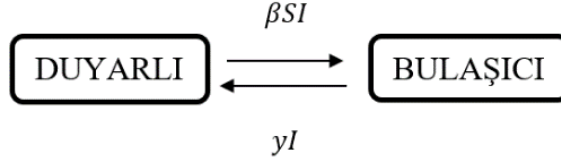
$$I = \frac{\mu N}{\mu + \lambda} \lambda \frac{1}{\mu + \vartheta}.$$

2.4. Diğer Bölmeli Modeller

SIR modelinde, iyileşme sonrasında bağışıklığın olmadığı (SIS modeli), bağışıklığın yalnızca kısa bir süre devam ettiği (SIRS), gizli bir bağışıklık süresinin olduğu doğum ve ölümleri içerenler de dahil olmak üzere birçok modifikasyon vardır. Kişinin bulaşıcı olmadığı (SEIS ve SEIR) ve bebeklerin bağışıklıkla doğabileceği (MSIR) hastalık modelleri de vardır. Bölmeli modeller aynı zamanda birden fazla risk grubunu ve hatta birden fazla patojenin etkileşimini modellemek için de kullanılabilir.

2.4.1. SIS modeli

Soğuk algınlığı ve grip gibi bazı enfeksiyonlar uzun süreli bağışıklık sağlamaz. Bu tür enfeksiyonlar geçici direnç sağlayabilir ancak enfeksiyon iyileştikten sonra uzun süreli bağışıklık sağlamaz ve bireyler yeniden duyarlı hale gelir.



Şekil 2.1. SIS modelinin akış şeması

Bu durumun matematiksel modeli aşağıdaki gibidir,

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{\beta SI}{N} + \gamma I$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\beta SI}{N} - \gamma I.$$

Toplam nüfus N ile gösterilir ve aşağıdakiler sağlanır,

$$\frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} = 0 \Rightarrow S(t) + I(t) = N.$$

Aşağıdaki gibi devam eder,

$$\frac{dI}{dt} = (\beta - \gamma)I - \frac{\beta}{N}I^2,$$

yani bulaşıcılığın dinamikleri lojistik bir fonksiyon tarafından yönetilir, böylece $\forall I(0) > 0$ için,

$$\frac{\beta}{\gamma} \leq 1 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) = 0,$$

$$\frac{\beta}{\gamma} > 1 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) = \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right)N.$$

Bu modele analitik bir çözüm bulmak mümkündür ($I = y^{-1}$ değişkenlerin dönüşümü yapılarak ve bunu ortalama alan denklemlerinde yerine koyarak) (Hethcote, 1989), öyle ki temel yeniden üretim oranı birimden büyük olur. $I_\infty = (1 - \gamma/\beta)N$ endemik bulaşıcı popülasyon, $x = \beta - \gamma$, ve $V = \frac{I_\infty}{I_0} - 1$ olmak üzere çözüm şu şekilde verilmiştir,

$$I(t) = \frac{I_\infty}{1 + Ve^{-xt}}.$$

Sistemin kapalı olduğu varsayıldığından duyarlı popülasyon $S(t) = N - I(t)$ olur.

2.4.2. SIRD modeli

Duyarlı-Bulaşıcı-İyileşen-Ölen modeli, İyileşen (özellikle hastalıktan kurtulan ve artık bağışık olan bireyler anlamına gelir) ve Ölen arasında ayrım yapar (Bailey, 1975). SIRD modelinin dört parça yöntemine dayanan yarı analitik çözümleri vardır (Al-Raei, 2021). Bu model için aşağıdaki diferansiyel denklem sistemi kullanılır,

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{\beta IS}{N},$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\beta IS}{N} - \gamma I - \mu I,$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I,$$

$$\frac{dD}{dt} = \mu I,$$

burada β, γ, μ sırasıyla enfeksiyon, iyileşme ve ölüm oranlarıdır.

2.4.3. SIRV modeli

Duyarlı-Bulaşıcı-Kurtarılan-Aşılanmış modeli, duyarlı popülasyonun aşılmasını hesaba katan genişletilmiş bir SIR modelidir (Schlickeiser ve Kröger, 2021). Bu model için aşağıdaki diferansiyel denklem sistemi kullanılır,

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{\beta(t)IS}{N} - v(t)S,$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\beta(t)IS}{N} - \gamma(t)I,$$

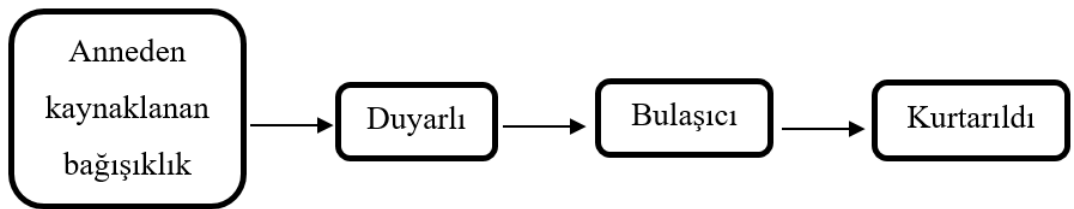
$$\frac{dR}{dt} = \gamma(t)I,$$

$$\frac{dV}{dt} = v(t)S,$$

burada β, γ, v sırasıyla enfeksiyon, iyileşme ve aşılama oranlarıdır. Yarı zamanlı başlangıç koşulları $S(0) = (1 - \eta)N$, $I(0) = \eta N$, $R(0) = V(0) = 0$ ve sabit oranlar $k = \gamma(t)/\beta(t)$ ve $b = v(t)/\beta(t)$ için model yaklaşık olarak çözülmüştür (Schlickeiser ve Kröger, 2021). Pandemik bir patlamanın meydana gelmesi $k + b < 1 - 2\eta$ olmasını gerektirir ve bunun ötesinde duyarlı bölümün kararlı durum boyutu S_∞ 'nin S_0 'a nispeten yakın kaldığı kritik bir azaltılmış aşılama oranı b_c vardır. $S(0) + I(0) + R(0) + V(0) = N$ denklemini sağlayan keyfi başlangıç koşulları, $R(0) = V(0) = 0$ ile çözülmüş özel duruma eşlenebilir (Schlickeiser ve Kröger, 2021).

2.4.4. MSIR modeli

Kızamık da dahil olmak üzere pek çok enfeksiyonda, bebekler duyarlı bölmede doğmazlar ancak anneden gelen antikora (plasentadan ve ayrıca kolostrum yoluyla geçer) karşı koruma nedeniyle yaşamın ilk birkaç ayında hastalığa karşı bağışıklık kazanırlar. Buna pasif bağışıklık denir. Bu eklenen ayrıntı, modelin başına bir M sınıfı (anneden türetilen bağışıklık için) dahil edilerek gösterilebilir.



Şekil 2.2. MSIR modelinin akış şeması

Bunu matematiksel olarak belirtmek için $M(t)$ ek bölümü eklenmiştir. Bunun sonucunda aşağıdaki diferansiyel denklemler elde edilir,

$$\frac{dM}{dt} = \Lambda - \delta M - \mu M$$

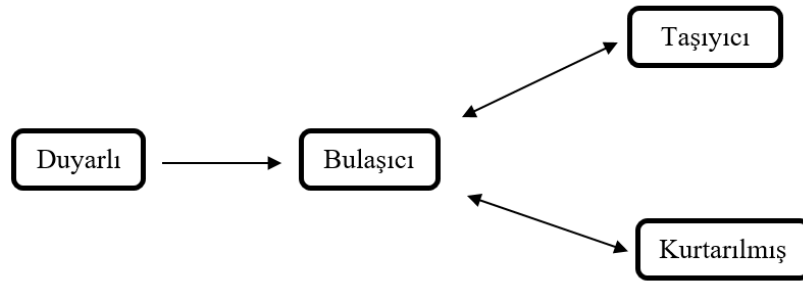
$$\frac{dS}{dt} = \delta M - \frac{\beta SI}{N} - \mu S$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\beta SI}{N} - \gamma I - \mu I$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I - \mu R$$

2.4.5. Taşıyıcı Durumu

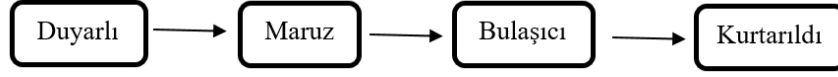
Tüberküloz gibi bulaşıcı bir hastalığa yakalanmış olan bazı kişiler hiçbir zaman tam olarak iyileşmezler ve kendileri hastalıktan muzdarip olmasalar da enfeksiyonu taşımaya devam ederler. Daha sonra bulaşıcı bölüme geri dönebilirler ve semptomlar yaşayabilirler (tüberkülozda olduğu gibi) veya semptomlara maruz kalmadan taşıyıcı olduklarında başkalarına bulaştırmaya devam edebilirler. Bunun en ünlü örneği muhtemelen 22 kişiye tifo bulaştıran Mary Mallon'dur. Taşıma bölmesi C olarak etiketlenmiştir.



Şekil 2.3. Taşıyıcı durumun akış şeması

2.4.6. SEIR modeli

Pek çok önemli enfeksiyon için, bireylerin enfekte olduğu ancak kendilerinin henüz bulaşıcı olmadığı önemli bir gecikme dönemi vardır. Bu süre zarfında birey E bölümünde (maruz kalmak için) bulunur.



Şekil 2.4. SEIR modelinin akış şeması

Gecikme süresinin, a parametresi ile üstel dağılıma sahip rastgele bir değişken olduğunu (yani, ortalama gecikme süresi a^{-1} 'dir) ve ayrıca doğum oranı Λ 'nin ölüm oranı N_μ 'ye eşit olduğu hayati dinamiklerin olduğunu varsayalım (böylece toplam N sayısı sabit olur). Bu durumda model için denklemler aşağıdaki gibidir,

$$\frac{dS}{dt} = \mu N - \mu S - \frac{\beta IS}{N}$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\beta IS}{N} - (\mu + a)E$$

$$\frac{dI}{dt} = aE - (\gamma + \mu)I$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I - \mu R.$$

Elimizde $S + E + I + R = N$ bulunmaktadır, fakat bu yalnızca doğum ve ölüm oranlarının eşit olduğu kabulünden dolayı sabittir; genel olarak N bir değişkendir.

2.4.7. SEIS modeli

SEIS modeli, sonunda herhangi bir bağışıklık kazanılmaması dışında SEIR modeline (yukarıdaki) benzer.

$$S \rightarrow E \rightarrow I \rightarrow S$$

Bu modelde enfeksiyon herhangi bir bağışıklık bırakmaz, dolayısıyla iyileşen bireyler duyarlı hale döner ve $S(t)$ bölmesine geri döner. Aşağıdaki diferansiyel denklemler bu modeli açıklamaktadır,

$$\frac{dS}{dt} = \Lambda - \frac{\beta IS}{N} - \mu S + \gamma I$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\beta IS}{N} - (\epsilon + \mu)E$$

$$\frac{dI}{dt} = \epsilon E - (\gamma + \mu)I$$

2.4.8. MSEIR modeli

Pasif bağışıklık faktörleri ve gecikme süresi içeren bir hastalık durumunda MSEIR modeli vardır.

$$M \rightarrow S \rightarrow E \rightarrow I \rightarrow R$$

$$\frac{dM}{dt} = \Lambda - \delta M - \mu M$$

$$\frac{dS}{dt} = \delta M - \frac{\beta IS}{N} - \mu S$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\beta IS}{N} - (\epsilon + \mu)E$$

$$\frac{dI}{dt} = \epsilon E - (\gamma + \mu)I$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I - \mu R$$

2.4.9. MSEIRS modeli

Bir MSEIRS modeli MSEIR'e benzerdir, ancak R sınıfındaki bağışıklık geçici olacaktır, böylece geçici bağışıklık sona erdiğinde bireyler duyarlılıklarını yeniden kazanacaktır.

$$M \rightarrow S \rightarrow E \rightarrow I \rightarrow R \rightarrow S$$

2.5. Morgan-Voyce Polinomlarının Toplam Formülleri

Morgan-Voyce polinomları (Swamy, 1968; Hoggat vd., 1974),

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n+k+1}{n-k} x^k \quad (2.5)$$

ve

$$b_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n+k}{n-k} x^k \quad (2.6)$$

şeklinde gösterilir. (2.1) ve (2.2) n. dereceden Morgan-Voyce polinomlarını ifade eder. İlk birkaç Morgan-Voyce polinomlarını açık şekilde yazalım:

$$B_0(x) = 1$$

$$B_1(x) = x + 2$$

$$B_2(x) = x^2 + 4x + 3$$

$$B_3(x) = x^3 + 6x^2 + 10x + 4$$

$$B_4(x) = x^4 + 8x^3 + 21x^2 + 20x + 5$$

$$B_5(x) = x^5 + 10x^4 + 36x^3 + 56x^2 + 35x + 6$$

$$B_6(x) = x^6 + 12x^5 + 55x^4 + 120x^3 + 126x^2 + 56x + 7$$

$$B_7(x) = x^7 + 14x^6 + 78x^5 + 110x^4 + 330x^3 + 252x^2 + 84x + 8$$

$$B_8(x) = x^8 + 16x^7 + 105x^6 + 364x^5 + 715x^4 + 792x^3 + 462x^2 + 120x + 9$$

⋮

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n+k+1}{n-k} x^k$$

$$b_0(x) = 1$$

$$b_1(x) = x + 1$$

$$b_2(x) = x^2 + 3x + 1$$

$$b_3(x) = x^3 + 5x^2 + 6x + 1$$

$$b_4(x) = x^4 + 7x^3 + 15x^2 + 10x + 1$$

$$b_5(x) = x^5 + 9x^4 + 28x^3 + 35x^2 + 15x + 1$$

$$b_6(x) = x^6 + 11x^5 + 45x^4 + 84x^3 + 70x^2 + 21x + 1$$

$$b_7(x) = x^7 + 13x^6 + 66x^5 + 165x^4 + 210x^3 + 136x^2 + 28x + 1$$

$$b_8(x) = x^8 + 15x^7 + 91x^6 + 286x^5 + 495x^4 + 462x^3 + 210x^2 + 36x + 1$$

⋮

$$b_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n+k}{n-k} x^k$$

2.5.1. Morgan-Voyce polinomlarının tekrarlama (Rekürans) bağıntısı

Morgan-Voyce polinomları arasında (Swamy, 1968; Hoggatt vd., 1974)

$$B_n(x) = (x + 1)B_{n-1}(x) + b_{n-1}(x)$$

$$b_n(x) = xB_{n-1}(x) + b_{n-1}(x)$$

bağıntıları vardır. Ayrıca

$$B_n(x) = b_n(x) + B_{n-1}(x)$$

ve

$$b_n(x) = B_n(x) - B_{n-1}(x)$$

bağıntıları da vardır (Swamy, 1968; Hoggatt vd., 1974).

2.5.2. Morgan-Voyce polinomlarının alternatif tekrarlama bağıntıları

$B_0(x) = b_0(x) = 1$ ve $B_1(x) = x + 2$, $b_1(x) = x + 1$ olmak üzere, ardışık üç Morgan-Voyce polinomları arasında

$$B_n(x) = (x + 2)B_{n-1}(x) - B_{n-2}(x) \quad n = 2, 3, \dots$$

ve

$$b_n(x) = (x + 2)b_{n-1}(x) - B_{n-2}(x) \quad n = 2, 3, \dots$$

bağıntısı vardır (Swamy, 1968; Hoggatt vd., 1974). Bunların yanında

$$b_{n+1}b_{n-1} - b_n^2 = x$$

ve

$$B_{n+1}B_{n-1} - B_n^2 = -1$$

bağıntıları vardır (Swamy, 1968; Hoggatt vd., 1974)

3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. Lineer Olmayan Pantograf Diferansiyel Denklemlerinin Morgan-Voyce Sıralama Metodu ile Çözüm Yöntemi

Lineer olmayan pantograf diferansiyel denklem $u^{(0)}(t) = u(t)$, $u^0(t) = 1$ ve $u(t)$ bilinmeyen fonksiyon olmak üzere,

$$\sum_{k=0}^m [a_{jk}u^{(k)}(a) + b_{jk}u^{(k)}(b)] = \delta_j, j = 0,1 \quad (3.1)$$

başlangıç koşulu ile birlikte

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^m \sum_{r=0}^n P_{kr}(t)u^r(a_{kr}t + \beta_{kr}(t))u^{(k)}(\lambda_{kr}t + \gamma_{kr}(t)) \\ & + \sum_{k=1}^m \sum_{r=1}^n Q_{kr}(t)u^{(r)}(a_{kr}t + \beta_{kr}(t))u^{(k)}(\lambda_{kr}t + \gamma_{kr}(t)) \\ & = g(t), a \leq t \leq b \end{aligned} \quad (3.2)$$

şeklinde tanımlanır. Denklem (3.2)'nin

$$u(t) = \sum_{k=0}^N c_k B_k(t) \quad (3.3)$$

şeklinde kesilmiş (sonlu) Morgan-Voyce serisi formunda bir yaklaşık çözümünün olduğunu varsayalım.

Amacımız Denklem (3.3)'ü kullanarak Denklem (3.2)'nin matris formlarını belirlemektir. (3.3) denklemini

$$[u(t)] = B(t)C \quad (3.4)$$

şeklinde bir matris formuna dönüştürebiliriz. Burada $B(t)$ ve C matrisleri

$$B(t) = [B_1(t) \ B_2(t) \ ... \ B_{N+1}(t)]$$

$$C = [c_1 \ c_2 \ c_3 \ ... \ c_{N+1}]^T$$

şeklinde tanımlanır.

- (i) $a_{kr} = \lambda_{kr} = 1$ ve $\beta_{kr}(t) = \gamma_{kr}(t) = 0$ olması durumunda (2.5) Morgan-Voyce polinomları matris formunda aşağıdaki gibi yazılabilir,

$$B(t) = X(t) \tag{3.5}$$

Burada $X(t) = [1 \ t \ t^2 \ t^3 \ ... \ t^N]_{1 \times (N+1)}$ ve

$$R^T = \begin{bmatrix} \binom{1}{0} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \binom{2}{1} & \binom{3}{0} & 0 & \dots & 0 \\ \binom{3}{2} & \binom{4}{1} & \binom{5}{0} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \binom{N+1}{N} & \binom{N+2}{N-1} & \binom{N+3}{N-2} & \dots & \binom{2N+1}{0} \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

Denklem (3.5) ve Denklem (3.4) kullanılarak matris ilişkisi şu şekilde ifade edilir,

$$u(t) \cong u_N(t) = X(t)RC,$$

$$u'(t) \cong u'_N(t) = X(t)MRC,$$

$$u''(t) \cong u''_N(t) = X(t)M^2RC, \tag{3.6}$$

...

$$u^{(k)}(t) \cong u^{(k)}_N(t) = X(t)M^kRC.$$

$X(t)$ matrisi ile türevleri olan $X'(t), X''(t), \dots, X^{(k)}(t)$ matrisleri arasındaki ilişki aşağıdaki gibidir,

$$\begin{aligned}
X'(t) &= X(t)M, \quad X''(t) = X(t)M^2, \\
X'''(t) &= X(t)M^3, \dots, X^{(k)}(t) = X(t)M^k
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Burada türev matrisi aşağıdaki gibi tanımlanır,

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & N \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$M^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

- (ii) $a_{kr}, \lambda_{kr}, \beta_{kr}(t)$ ve $\gamma_{kr}(t)$ keyfi sabitler veya değişkenler olması durumunda, kesikli bir Morgan-Voyce serisi olan denklem (3.3) tarafından tanımlanan yaklaşık çözümü matris formunda aşağıdaki gibi gösterebiliriz.

$$u(\lambda_{kr}t + \gamma_{kr}(t)) \cong u_N(\lambda_{kr}t + \gamma_{kr}(t)) = B(\lambda_{kr}t + \gamma_{kr}(t))C.$$

Denklem (3.5) ve Denklem (3.4) ilişkileri kullanılarak matris ilişkisi şu şekilde ifade edilir,

$$\begin{aligned}
u(\lambda_{kr}t + \gamma_{kr}(t)) &\cong u_N(\lambda_{kr}t + \gamma_{kr}(t)) = B(\lambda_{kr}t + \gamma_{kr}(t))C \\
&= X(\lambda_{kr}t + \gamma_{kr}(t))RC, \\
u'(\lambda_{kr}t + \gamma_{kr}(t)) &\cong u'_N(\lambda_{kr}t + \gamma_{kr}(t)) = X_{(\lambda, \gamma)}(t)MRC, \\
u''(\lambda_{kr}t + \gamma_{kr}(t)) &\cong u''_N(\lambda_{kr}t + \gamma_{kr}(t)) = X_{(\lambda, \gamma)}(t)M^2RC, \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{3.8}$$

$$u^{(k)}(\lambda_{kr}t + \gamma_{kr}(t)) \cong u_N^{(k)}(\lambda_{kr}t + \gamma_{kr}(t)) = X_{(\lambda,\gamma)}(t)M^kRC,$$

Ayrıca $X(\lambda_{kr}t + \gamma_{kr}(t))$ matrisi ile $X'(\lambda_{kr}t + \gamma_{kr}(t)), X''(\lambda_{kr}t + \gamma_{kr}(t)), X'''(\lambda_{kr}t + \gamma_{kr}(t)), \dots, X^{(k)}(\lambda_{kr}t + \gamma_{kr}(t))$ türevleri arasındaki ilişkiler de şöyledir,

$$\begin{aligned} X'(\lambda_{kr}t + \gamma_{kr}(t)) &= X(\lambda_{kr}t + \gamma_{kr}(t))M, \\ X''(\lambda_{kr}t + \gamma_{kr}(t)) &= X(\lambda_{kr}t + \gamma_{kr}(t))M^2 \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} X'''(\lambda_{kr}t + \gamma_{kr}(t)) &= X(\lambda_{kr}t + \gamma_{kr}(t))M^3, \dots, X^{(k)}(\lambda_{kr}t + \gamma_{kr}(t)) \\ &= X(\lambda_{kr}t + \gamma_{kr}(t))M^k \end{aligned}$$

şeklindedir.

Denklem (3.8) ve Denklem (3.9) ilişkilerini kullanarak aşağıdaki matris ilişkisini elde ederiz,

$$u^{(k)}(\lambda_{kr}t + \gamma_{kr}(t)) = X(\lambda_{kr}t + \gamma_{kr}(t))M^kRC. \quad (3.10)$$

Chebyshev sıralama noktaları Youssri (Youssri vd., 2021) tarafından aşağıdaki gibi tanımlanır,

$$t_i = a + \frac{(b-a)i}{N}, i = 0, 1, \dots, N. \quad (3.11)$$

(3.11) Chebyshev sıralama noktalarını Denklem (3.10)'da yerine yazarsak aşağıdakini elde ederiz,

$$u^{(k)}(\lambda_{kr}t_i + \gamma_{kr}(t_i)) = X_{\lambda,\gamma}(t_i)M^kRC, \quad k = 0, 1, \dots, m \quad (3.12)$$

ve Denklem (3.12) bağıntısının kapalı formu şu şekilde olur,

$$U^{(k)} = X_{\lambda,\gamma}M^kRC, \quad k = 0, 1, \dots, m \quad (3.13)$$

ve

$$X_{\lambda,\gamma} = \begin{bmatrix} X(\lambda_{kr}t_0 + \gamma_{kr}(t_0)) \\ X(\lambda_{kr}t_1 + \gamma_{kr}(t_1)) \\ \vdots \\ X(\lambda_{kr}t_N + \gamma_{kr}(t_N)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_{kr}t_0 + \gamma_{kr}(t_0) & \cdots & (\lambda_{kr}t_0 + \gamma_{kr}(t_0))^N \\ 1 & \lambda_{kr}t_1 + \gamma_{kr}(t_1) & \cdots & (\lambda_{kr}t_1 + \gamma_{kr}(t_1))^N \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & \lambda_{kr}t_N + \gamma_{kr}(t_N) & \cdots & (\lambda_{kr}t_N + \gamma_{kr}(t_N))^N \end{bmatrix}$$

yazılabilir.

Burada,

$$U^{(k)} = \begin{bmatrix} u^{(k)}(\lambda_{kr}t_0 + \gamma_{kr}(t_0)) \\ u^{(k)}(\lambda_{kr}t_1 + \gamma_{kr}(t_1)) \\ \vdots \\ u^{(k)}(\lambda_{kr}t_N + \gamma_{kr}(t_N)) \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Benzer şekilde $X_{1,0}$ aşağıdaki gibidir,

$$X_{1,0} = \begin{bmatrix} X(t_0) \\ X(t_1) \\ \vdots \\ X(t_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t_0 & \cdots & t_0^N \\ 1 & t_1 & \cdots & t_1^N \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & t_N & \cdots & t_N^N \end{bmatrix}.$$

Ek olarak, Denklem (3.2) ve Denklem (3.6)'yı kullanarak lineer olmayan kısımda görünen $(\hat{U})^r U^{(k)}$ ve $(\hat{U})^{(r)} U^{(k)}$ matris formlarını da aşağıdaki gibi elde edebiliriz,

$$(\hat{U})^r U^{(k)} = \begin{bmatrix} u^r(a_{kr}t_0 + \beta_{kr}(t_0))u^{(k)}(\lambda_{kr}t_0 + \gamma_{kr}(t_0)) \\ u^r(a_{kr}t_1 + \beta_{kr}(t_1))u^{(k)}(\lambda_{kr}t_1 + \gamma_{kr}(t_1)) \\ \vdots \\ u^r(a_{kr}t_N + \beta_{kr}(t_N))u^{(k)}(\lambda_{kr}t_N + \gamma_{kr}(t_N)) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} u^r(a_{kr}t_0 + \beta_{kr}(t_0)) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & u^r(a_{kr}t_1 + \beta_{kr}(t_1)) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u^r(a_{kr}t_N + \beta_{kr}(t_N)) \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

$$\times \begin{bmatrix} u^{(k)}(\lambda_{kr}t_0 + \gamma_{kr}(t_0)) \\ u^{(k)}(\lambda_{kr}t_1 + \gamma_{kr}(t_1)) \\ \vdots \\ u^{(k)}(\lambda_{kr}t_N + \gamma_{kr}(t_N)) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
(\hat{U})^{(r)} U^{(k)} &= \begin{bmatrix} u^{(r)}(a_{kr}t_0 + \beta_{kr}(t_0))u^{(k)}(\lambda_{kr}t_0 + \gamma_{kr}(t_0)) \\ u^{(r)}(a_{kr}t_1 + \beta_{kr}(t_1))u^{(k)}(\lambda_{kr}t_1 + \gamma_{kr}(t_1)) \\ \vdots \\ u^{(r)}(a_{kr}t_N + \beta_{kr}(t_N))u^{(k)}(\lambda_{kr}t_N + \gamma_{kr}(t_N)) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} u^{(r)}(a_{kr}t_0 + \beta_{kr}(t_0)) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & u^{(r)}(a_{kr}t_1 + \beta_{kr}(t_1)) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u^{(r)}(a_{kr}t_N + \beta_{kr}(t_N)) \end{bmatrix} \quad (3.15)
\end{aligned}$$

$$\times \begin{bmatrix} u^{(k)}(\lambda_{kr}t_0 + \gamma_{kr}(t_0)) \\ u^{(k)}(\lambda_{kr}t_1 + \gamma_{kr}(t_1)) \\ \vdots \\ u^{(k)}(\lambda_{kr}t_N + \gamma_{kr}(t_N)) \end{bmatrix}$$

Burada,

$$\hat{U} = \hat{X}\hat{R}\hat{C} \text{ ve } (\hat{U})^{(r)} = \hat{X}(\hat{M})^r \hat{R}\hat{C}$$

$$\begin{aligned}
\hat{X}_{\lambda,\gamma} &= \\
&\begin{bmatrix} \mathbf{X}(\lambda_{kr}t_0 + \gamma_{kr}(t_0)) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{X}(\lambda_{kr}t_1 + \gamma_{kr}(t_1)) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{X}(\lambda_{kr}t_N + \gamma_{kr}(t_N)) \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

$$\hat{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{M} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{M} \end{bmatrix}, \hat{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{R} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{R} \end{bmatrix}, \hat{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{C} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{C} \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

$(t_i = a + \frac{(b-a)i}{N}, i = 0, 1, \dots, N)$ sıralama noktalarını Denklem (3.14)'te yerine yazarsak denklem sistemini aşağıdaki gibi elde ederiz,

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^m \sum_{r=0}^n P_{kr}(t_i) u^r(a_{kr}t_i + \beta_{kr}(t_i)) u^{(k)}(\lambda_{kr}t_i + \gamma_{kr}(t_i)) \\
& + \sum_{k=1}^m \sum_{r=1}^n Q_{kr}(t_i) u^{(r)}(a_{kr}t_i + \beta_{kr}(t_i)) u^{(k)}(\lambda_{kr}t_i + \gamma_{kr}(t_i)) \\
& = g(t_i),
\end{aligned}$$

Bu ifade, Denklem (3.12) ve Denklem (3.14) yardımıyla şu şekilde ifade edilebilir,

$$\sum_{k=0}^m \sum_{r=0}^n \mathbf{P}_{kr}(\hat{U})^r \mathbf{U}^{(k)} + \sum_{k=1}^m \sum_{r=1}^n \mathbf{Q}_{kr}(\hat{U})^{(r)} \mathbf{U}^{(k)} = \mathbf{G} \quad (3.16)$$

Burada

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{kr} &= \text{diag}[P_{kr}(t_0) \quad P_{kr}(t_1) \quad \dots \quad P_{kr}(t_N)] \\
\mathbf{Q}_{kr} &= \text{diag}[Q_{kr}(t_0) \quad Q_{kr}(t_1) \quad \dots \quad Q_{kr}(t_N)]
\end{aligned}$$

ve

$$\mathbf{G} = [g(t_0) \quad g(t_1) \quad \dots \quad g(t_N)]^T.$$

Denklem (3.13) ve Denklem (3.15) bağıntılarını Denklem (3.16)'da yerine koyarak, temel matris denklemi aşağıdaki gibi olur,

$$\left\{ \sum_{k=0}^m \sum_{r=0}^n \mathbf{P}_{kr}(\hat{\mathbf{X}}_{a,\beta} \hat{\mathbf{R}} \hat{\mathbf{C}})^r \mathbf{X}_{\lambda,\gamma} \mathbf{M}^k \mathbf{R} + \sum_{k=1}^m \sum_{r=1}^n \mathbf{Q}_{kr} \hat{\mathbf{X}}_{a,\beta}(\hat{\mathbf{M}})^r \hat{\mathbf{R}} \hat{\mathbf{C}} \mathbf{X}_{\lambda,\gamma} \mathbf{M}^k \mathbf{R} \right\} \mathbf{C} = \mathbf{G}. \quad (3.17)$$

Kısaca Denklem (3.17) şu şekilde de gösterilebilir,

$$\mathbf{WC} = \mathbf{G} \text{ veya } [\mathbf{W}; \mathbf{G}], \quad (3.18)$$

Burada

$$W = \sum_{k=0}^m \sum_{r=0}^n P_{kr} (\hat{X}_{a,\beta} \hat{R} \hat{C})^r X_{\lambda,\gamma} M^k R + \sum_{k=1}^m \sum_{r=1}^n Q_{kr} \hat{X}_{a,\beta} (\hat{M})^r \hat{R} \hat{C} X_{\lambda,\gamma} M^k R.$$

Burada Denklem (3.18), $(N + 1)$ bilinmeyen Morgan-Voyce katsayılı $(N + 1)$ doğrusal olmayan cebirsel denklem içeren bir sistemdir. a ve b noktalarında Denklem (3.13) kullanılarak denklem (3.1)'deki koşulların matris gösterimi aşağıdaki şekilde verilir,

$$\left\{ \sum_{k=0}^{m-1} [a_{jk} X(a) + b_{jk} X(b)] (M)^k R \right\} C = \delta_j, j = 0, 1, 2, \dots, m-1,$$

veya

$$V_j C = [\delta_j] \text{ veya } [V_j; \delta_j]; j = 0, 1, 2, \dots, m-1 \quad (3.19)$$

olarak yazabiliriz.

Burada,

$$V_j = \sum_{k=0}^{m-1} [a_{jk} X(a) + b_{jk} X(b)] (M)^k R = [v_{j0} \quad v_{j1} \quad v_{j2} \quad \dots \quad v_{jN}]$$

şeklindedir.

Böylece Denklem (3.19)'daki koşul matrislerini genişletilmiş matris Denklem (3.18)'in m satırı ile değiştirirsek, yeni artırılmış matris şöyle olacaktır,

$$[\widehat{W}; \widehat{G}] = \begin{bmatrix} W_{00} & W_{01} & W_{02} & \dots & W_{0N} & ; & g(t_0) \\ W_{10} & W_{11} & W_{12} & \dots & W_{1N} & ; & g(t_1) \\ W_{20} & W_{21} & W_{22} & \dots & W_{2N} & ; & g(t_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & ; & \vdots \\ W_{(N-m)0} & W_{(N-m)1} & W_{(N-m)2} & \dots & W_{(N-m)N} & ; & g(t_{N-m}) \\ v_{00} & v_{01} & v_{02} & \dots & v_{0N} & ; & \delta_0 \\ v_{10} & v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1N} & ; & \delta_1 \\ v_{20} & v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2N} & ; & \delta_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & ; & \vdots \\ v_{(m-1)0} & v_{(m-1)1} & v_{(m-1)2} & \dots & v_{(m-1)N} & ; & \delta_{m-1} \end{bmatrix}. \quad (3.20)$$

Bu şekilde c_n , $n = 1, 2, \dots, N + 1$ bilinmeyenli Morgan-Voyce katsayıları Denklem (3.20)'deki sistem çözülerek elde edilir. Daha sonra bu katsayılar Denklem (3.3)'te yerine konularak yaklaşık çözüm bulunur.

3.2. Epidemik SIR Modelinin Morgan-Voyce Sıralama Metodu İle Çözüm Yöntemi

Bu bölümde, Epidemik SIR modelin yaklaşık çözümlerini elde etmek için Morgan-Voyce sıralama yöntemi kullanılmaktadır.

Denklem (2.4)'ün, kesilmiş Morgan-Voyce serisi formundaki yaklaşık çözümlerinin aşağıdaki gibi olduğunu varsayalım,

$$S(t) = \sum_{I=0}^N C_{1,I} B_I(t), \quad I(t) = \sum_{I=0}^N C_{2,I} B_I(t) \quad \text{ve} \quad R(t) = \sum_{I=0}^N C_{3,I} B_I(t). \quad (3.21)$$

Burada;

$N > m$ (m sistemdeki denklem sayısıdır) iken N herhangi bir pozitif sayı, $C_{1,I}, C_{2,I}, C_{3,I}$ ($I = 0, 1, 2, \dots, N$) bilinmeyen Morgan-Voyce katsayıları ve $B_I(t)$, $I = 0, 1, 2, \dots, N$ Morgan-Voyce polinomlarıdır.

$$B_N(t) = \sum_{k=0}^N \binom{N+k+1}{N-k} t^k \quad (3.22)$$

Morgan-Voyce polinomları olarak tanımlanmıştır (Swamy, 1968; Hoggat vd., 1974). Denklem (2.4)'ü matris formunda yazmak için ilk olarak yaklaşık çözümleri aşağıdaki gibi yazabiliriz,

$$\begin{aligned} S(t) &= B(t)C_1 \\ I(t) &= B(t)C_2 \\ R(t) &= B(t)C_3 \end{aligned} \tag{3.23}$$

burada

$$B(t) = [B_1(t) \quad B_2(t) \quad \cdots \quad B_{N-1}(t) \quad B_N(t)],$$

$$C_1 = [C_{1,0} \quad C_{1,1} \quad \cdots \quad C_{1,N}]^T$$

$$C_2 = [C_{2,0} \quad C_{2,1} \quad \cdots \quad C_{2,N}]^T, \quad C_3 = [C_{3,0} \quad C_{3,1} \quad \cdots \quad C_{3,N}]^T$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} B_0(t) \\ B_1(t) \\ B_2(t) \\ \vdots \\ B_L(t) \end{bmatrix}}_{B^T(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \binom{1}{0} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \binom{2}{1} & \binom{3}{0} & 0 & \cdots & 0 \\ \binom{3}{2} & \binom{4}{1} & \binom{5}{0} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \binom{N+1}{N} & \binom{N+2}{N-1} & \binom{N+3}{N-2} & \cdots & \binom{2N+1}{0} \end{bmatrix}}_R \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ \vdots \\ t^N \end{bmatrix}}_{X^T(t)}$$

(3.24)

$$X(t) = [1 \quad t \quad t^2 \quad \cdots \quad t^N].$$

Bu nedenle, aşağıdaki denklemleri yazabiliriz,

$$S(t) = X(t)R^T C_1$$

$$I(t) = X(t)R^T C_2$$

$$R(t) = X(t)R^T C_3$$

(3.25)

$X(t)$ matrisi ile türevi olan $X^{(1)}(t)$ matrisi arasındaki bağlantı aşağıdaki gibidir,

$$X^{(1)}(t) = X(t)M \quad (3.26)$$

Burada

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & N \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Denklem (3.25) ve (3.26)'den aşağıdaki denklemleri elde ederiz,

$$S^{(1)}(t) = X(t)MR^T C_1, I^{(1)}(t) = X(t)MR^T C_2, R^{(1)}(t) = X(t)MR^T C_3 \quad (3.27)$$

Böylece $v(t)$ matrisini oluşturabiliriz ve $v^{(1)}(t)$ matrisi aşağıdaki gibidir,

$$v(t) = \bar{X}\bar{F}C \text{ ve } v^{(1)}(t) = \bar{X}\bar{M}\bar{F}C \quad (3.28)$$

Bu matrisler aşağıdaki gibi tanımlanır,

$$v(t) = \begin{bmatrix} S(t) \\ I(t) \\ R(t) \end{bmatrix}, v^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} S^{(1)}(t) \\ I^{(1)}(t) \\ R^{(1)}(t) \end{bmatrix}, \bar{X}(t) = \begin{bmatrix} X(t) & 0 & 0 \\ 0 & X(t) & 0 \\ 0 & 0 & X(t) \end{bmatrix},$$

$$\bar{R}(t) = \begin{bmatrix} R^T & 0 & 0 \\ 0 & R^T & 0 \\ 0 & 0 & R^T \end{bmatrix}, \bar{M} = \begin{bmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & M \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix}$$

Denklem (2.4)'ü matris formunda aşağıdaki gibi ifade edebiliriz,

$$v^{(1)}(t) - Kv(t) - Ev(t) - Dv_{1,2} = g \quad (3.29)$$

Burada

$$g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma & 0 \\ 0 & \gamma & 0 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} -\sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \sigma & 0 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} -\beta \\ \beta \\ 0 \end{bmatrix}, v_{1,2} = [S(t)I(t)].$$

Şimdi $C_{1,I}, C_{2,I}$ ve $C_{3,I}$ bilinmeyen katsayılarını belirlemek için sıralama noktalarını aşağıdaki gibi tanımlayalım,

$$a \leq t \leq b \text{ aralığı için } t_i = a + \frac{b-a}{N}i, i = 0, 1, \dots, N \quad (3.30)$$

Denklem (3.30)'daki sıralama noktalarını kullanarak, aşağıdaki sistemi elde ederiz,

$$v^{(1)}(t_i) - Kv(t_i) - Ev(t_i) - Dv_{1,2}(t_i) = g \quad (3.31)$$

$$V^{(1)} = \begin{bmatrix} v^{(1)}(t_0) \\ v^{(1)}(t_1) \\ \vdots \\ v^{(1)}(t_N) \end{bmatrix}, \quad \bar{K} = \begin{bmatrix} K & 0 & \dots & 0 \\ 0 & K & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & K \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}, \quad v = \begin{bmatrix} v(t_0) \\ v(t_1) \\ \vdots \\ v(t_N) \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} g \\ g \\ \vdots \\ g \end{bmatrix},$$

$$\bar{E} = \begin{bmatrix} E & 0 & \dots & 0 \\ 0 & E & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & E \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}, \quad \tilde{V} = \begin{bmatrix} v_{1,2}(t_0) \\ v_{1,2}(t_1) \\ \vdots \\ v_{1,2}(t_N) \end{bmatrix}, \quad \bar{D} = \begin{bmatrix} D & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & D \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}$$

Üst matrislerin yardımıyla Denklem (2.4) aşağıdaki matris formunda yazılabilir,

$$V^{(1)} - \bar{K}V - \bar{E}V - \bar{D}\tilde{V} = G \quad (3.32)$$

Denklem (3.30)'daki sıralama noktaları Denklem (3.28)'de yerine yazılarak aşağıdaki bağıntılar elde edilir,

$$v(t_i) = \bar{X}(t_i)\bar{R}C \text{ ve } v^{(1)}(t_i) = \bar{X}(t_i)\bar{M}\bar{R}C$$

$$V = X\bar{R}C \text{ ve } V^{(1)} = X\bar{M}\bar{R}C \quad (3.33)$$

Böylece

$$X = [\bar{X}(t_0) \quad \bar{X}(t_1) \quad \dots \quad \bar{X}(t_N)]^T, \quad \bar{X}(t_i) = \begin{bmatrix} X(t_i) & 0 & 0 \\ 0 & X(t_i) & 0 \\ 0 & 0 & X(t_i) \end{bmatrix}$$

Sıralama noktaları $v_{1,2}(t)$ 'de yerine yazılarak aşağıdaki matris formunu elde edilir,

$$\tilde{V} = \begin{bmatrix} v_{1,2}(t_0) \\ v_{1,2}(t_1) \\ \vdots \\ v_{1,2}(t_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I(t_0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I(t_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I(t_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S(t_0) \\ S(t_1) \\ \vdots \\ S(t_N) \end{bmatrix} = \bar{I}\bar{S} \quad (3.34)$$

$$\bar{I} = \tilde{X}\tilde{F}\bar{C}_2 \text{ ve } \bar{S} = \tilde{T}\tilde{R}C \quad (3.35)$$

Böylece

$$\tilde{X} = \begin{bmatrix} X(t_0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & X(t_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & X(t_N) \end{bmatrix}, \quad \bar{C}_2 = \begin{bmatrix} C_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & C_2 \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}$$

$$\tilde{R} = \begin{bmatrix} R^T & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R^T & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & R^T \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}, \quad \tilde{X} = \begin{bmatrix} X(t_0) \\ X(t_1) \\ \vdots \\ X(t_N) \end{bmatrix}$$

$$\tilde{R} = [R^T \quad S \quad S], \quad S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}$$

(3.33)-(3.35) denklemlerinden temel matris denklemi aşağıdaki gibidir,

$$\{X\bar{M}\bar{R} - \bar{K}X\bar{R} - \bar{D}\tilde{X}\tilde{F}\bar{C}_2\tilde{X}\tilde{F}\}C = G. \quad (3.36)$$

Kısaca Denklem (3.36) şu şekilde yazılabilir,

$$WC = G \text{ veya } [W; G] \quad (3.37)$$

$$W = X\bar{M}\bar{R} - \bar{K}X\bar{R} - \bar{E}X\bar{R} - \bar{D}\tilde{X}\tilde{F}\bar{C}_2\tilde{X}\tilde{F}. \quad (3.38)$$

Denklem (2.4), bilinmeyen $c_{1,I}, c_{2,I}$ ve $c_{3,I}$ Morgan-Voyce katsayıları ile $3(N+1)$ lineer olmayan cebirsel denklem sistemine karşılık gelir.

Denklem (3.23)'te $t \rightarrow 0$ için başlangıç koşullarının matris formu aşağıdaki gibi ifade edilebilir,

$$\begin{aligned}
S(t) &= B(0)C_1=[N_S] \\
I(t) &= B(0)C_2=[N_I] \\
R(t) &= B(0)C_3=[N_R].
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Böylece, bu matris formları şu şekilde ifade edilebilir,

$$\begin{aligned}
U_1 &= S(0) = [c_{1,0} \quad c_{1,1} \quad \dots \quad c_{1,N}] \\
U_2 &= I(0) = [c_{2,0} \quad c_{2,1} \quad \dots \quad c_{2,N}] \\
U_3 &= R(0) = [c_{3,0} \quad c_{3,1} \quad \dots \quad c_{3,N}].
\end{aligned} \tag{3.40}$$

Denklem (3.40)'taki satır matrisleri Denklem (3.37)'deki matrisin herhangi 3 satırı ile değiştirildiğinde,

$$\tilde{W}C = \tilde{G} \tag{3.41}$$

arttırılmış matrisi elde edilir.

Katsayıları belirlemek için bu sistemin çözülmesi gerekir. $c_{i,0}, c_{i,1}, \dots, c_{i,N}, (i = 1,2,3)$ katsayıları denklem (3.21) de yazılır ve yaklaşık çözüm bulunur.

3.3. Morgan Voyce Toplamının Hesaplanmasının Kararlılığı ve Hata Tahmini

Bu bölümde sunulan metodun doğruluğunu test etmek için Morgan-Voyce toplamının hesaplanmasının kararlılığı ve $E_N(t)$ mutlak hata fonksiyonu ele alınmıştır. $E_N(t)$ hata fonksiyonu,

$$E_N(t) = |u_N(t) - u(t)| \tag{3.42}$$

şeklinde tanımlanır. u_N yaklaşık çözüm, $u(t)$ tam çözümdür. S_n , Morgan-Voyce serisinin kısmi toplamı olsun ve aşağıdaki gibi verilsin,

$$S_n = \sum_{i=0}^n b_i B_i(t) = b_0 B_0(t) + b_1 B_1(t) + \dots + b_n B_n(t) \tag{3.43}$$

Bu denklem vektör formunda

$$S_n = b^T \cdot B \tag{3.44}$$

şeklinde yazılır.

$$b^T = (b_0 \quad b_1 \quad \dots \quad b_n) \text{ ve } B^T = (B_0 \quad B_1 \quad \dots \quad B_n)$$

şeklindedir.

$$C^T = (C_0 \ C_1 \ \cdots \ C_n)$$

şeklinde bir vektör tanımlayalım. Bu aşağıdaki gibidir,

$$C^T . A = b^T \quad (3.45)$$

Buradaki A matrisi $(n + 1) \times (n + 1)$ tipinde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -(t-2) & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -(t-2) & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -(t-2) & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -(t-2) & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -(t-2) & 1 \end{bmatrix}$$

olarak verilir.

Bu aşağıdaki tekrarlama bağıntısını verir,

$$d_i - (t + 2)d_{i+1} + d_{i+2} = b_i, i = 0, 1, \dots, n \quad (3.46)$$

$$d_{n+1} = d_{n+2} = 0$$

Şimdi bir n sabit sayısı için yeni $a^T = (a_0 \ a_1 \ \cdots \ a_n)$ vektörü tanımlayalım.

$a_i = d_{n-i}$ girdileriyle i yerine $n - i$ ve b_{n-i} yerine A_i yazarsak aşağıdakiler elde edilir.

$$d_{n-i} - (t + 2)d_{n-(i-1)} + d_{n-(i-2)} = b_{n-i}$$

ya da

$$a_i - (t + 2)a_{i-1} + a_{i-2} = A_i, i = 0, 1, \dots, n \quad (3.47)$$

$$(a_{-1} = a_{-2} = 0)$$

(3.47) denklemi Morgan-Voyce polinomlarına özellik olarak denktir ve

$B_0(t) = 1, B_1(t) = t + 2$ olmak üzere Morgan-Voyce polinomları için tekrarlama bağıntısı aşağıdaki gibidir,

$$B_i - (t + 2)B_{i-1} + B_{i-2} = 0$$

Böylece

$$A.B = D, (D^T = 1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0) \quad (3.48)$$

(3.45) ve (3.48) denklemlerini (3.44) denkleminde yerine yazarsak aşağıdaki denklemi elde ederiz,

$$S_n = C^T . A . B = c_n = a_0 \quad (3.49)$$

Şimdi yuvarlama hatasının büyümesini ve metotta hata yayılımını görmek için üzeri bar işareti ile buna karşılık gelen hesaplanmış değeri gösterilsin.

$$a_i - (t + 2)a_{i-1} + a_{i-2} = A_i, i = 0, 1, \dots, n$$

Denkleminden,

$$\bar{a}_i = (t + 2)\bar{a}_{i-1} - \bar{a}_{i-2} + A_i - \varepsilon_i \quad (3.50)$$

yazılabilir.

Buradaki ε , A 'daki hatadır. Böylece a_i 'deki hatayı

$$a_i - \bar{a}_i = n_i$$

şeklinde tanımlayalım ve

$$\bar{S}_n = \bar{a}_0 \quad (3.51)$$

$$S_n - \bar{S}_n = \Delta \quad (3.52)$$

(3.50) ve (3.51) denklemlerinden, aşağıdakini yazabiliriz.

$$n_i = (t + 2)n_{i-1} + n_{i-2} + \varepsilon_i$$

ve

$$\Delta = n_0 \text{ dır.}$$

(3.50) denklemi $a_i = n_i$ ve $\varepsilon_i = A_i$ alırsak, (3.47) denklemine denk olur. Böylece,

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \cdot B_i(t) \quad (3.53)$$

olur.

Böylece $|t| \leq 1$ için, (İlhan, 2012)

$$|B_n(t)| \leq \sum_{k=0}^n \binom{n+k+1}{n-k} \quad (3.54)$$

Hata sınırlaması için L_∞ normunu kullanırsak (3.53) ve (3.54) denklemlerinden aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} \|\Delta\|_\infty &= \left\| \sum_{i=0}^n \varepsilon_i B_i(t) \right\|_\infty \\ &\leq \sum_{i=0}^n \|\varepsilon_i\|_\infty \cdot \|B_i(t)\|_\infty \\ &\leq T \cdot \sum_{i=0}^n \|\varepsilon_i\|_\infty \end{aligned}$$

Burada

$$T = \sum_{k=0}^n \binom{n+k+1}{n-k}$$

3.4. Çözümün Kontrolü ve Hata Hesabı

(3.3) ve (3.21) ifadelerindeki kesilmiş Morgan-Voyce serisi formundaki yaklaşık çözümler sırasıyla (3.2) ve (2.4)'te verilen denklemleri yaklaşık olarak sağlar. Böylece her $(t = t_i)$ $(-\infty < a \leq t \leq b < \infty)$, $i = 0, 1, \dots, N$, için

$$E(t_i) = |U(t_i) - U_N(t_i)|$$

ya da

$$E(t_i) \leq 10^{-k_i} \text{ (} k_i \text{ herhangi bir pozitif tamsayı)}$$

olmalıdır. Eğer maksimum $(10^{-k_i}) = 10^{-k}$ (k herhangi bir pozitif tamsayı) önceden belirlenirse, o zaman N kesme sınırı t_i noktalarının her birindeki $E(t_i)$ değeri alınan 10^{-k} 'dan küçük oluncaya kadar artırılır.

Diğer yandan hata fonksiyonunu

$$E(t) = |U(t) - U_N(t)|$$

şeklinde bulunur.

(2.4) denkleminde verilen epidemik SIR modelinin çözümlerinin doğruluğunu kontrol etmek için, Denklem (3.21) ile elde edilen çözümler Denklem (2.4)'te yerine yazılır. Denklem (3.21) polinom çözümü (2.4) sisteminin bir çözümü olduğundan Denklem (2.4)'ü sağlamalıdır. O halde, t_i verilen aralıkların seçilmiş noktaları olmak üzere, Denklem (2.4) için, $0 \leq t \leq a$ aralığında rezidü hata fonksiyonları aşağıdaki gibi olacaktır,

$$E_{1,N}(t_i) = \left| \frac{dS(t_i)}{dt} + \beta S(t_i)I(t_i) + \sigma S(t_i) \right|$$

$$E_{2,N}(t_i) = \left| \frac{dI(t_i)}{dt} - \beta S(t_i)I(t_i) + \gamma I(t_i) \right|$$

$$E_{3,N}(t_i) = \left| \frac{dR(t_i)}{dt} - \gamma I(t_i) - \sigma S(t_i) \right|$$

Sıralama noktalarında $E_{i,N}(t) = 0$ ($i = 1,2,3$) olması beklenir. $0 \leq t \leq a$ için $y_i(t) \cong y_{i,N}(t)$ ise $E_{i,N}(t) \cong 0$ 'dır.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde, sunulan Morgan-Voyce sıralama yönteminin kullanılabilirliğini, doğrulunu ve etkinliğini göstermek amacı ile epidemik SIR modeli ve lineer olmayan pantograf diferansiyel denkleminin örnekleri verilmiştir. Epidemik SIR model için iki tane örnek sunulmuştur. İlk örnekte hatalar ve çözümler diğer metotlarla karşılaştırılmıştır. Bu hatalar rezidü hata ile elde edilmiştir. İkinci örnekte farklı aşılama oranları için sonuçlar karşılaştırılmıştır. Çizelge ve şekiller verilen bir aralıktaki belirli noktalardaki karşılaştırmaları göstermektedir. Lineer olmayan pantograf diferansiyel denklem için dört tane örnek sunulmuştur. Bu örneklerin mutlak hata fonksiyonları $u(t)$ tam çözüm ve $u_N(t)$ yaklaşık çözüm olmak üzere $e_N(t) = |u(t) - u_N(t)|$ ile hesaplanmış ve sonuçlar çizelge ve şekillerle verilmiştir. Sonuçlar Lucas sıralama metodu (Gümgüm vd., 2020), Fibonacci sıralama metodu (Çakmak, 2022) ile elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Bütün nümerik hesaplamalar MATLABR2022a programı kullanılarak yapılmıştır.

Örnek 4.1. Tam çözümü $u_{Tam}(t) = 4t^2 - 6t + 5$ olan değişken katsayılı

$$(t^2 - t)(u''(t))^2 + t^2 u'(t - 1) - u\left(\frac{t}{2}\right) = 8t^3 + 49t^2 - 61t - 5$$

homojen ve lineer olmayan pantograf denklemini $0 \leq t \leq 1$ aralığında $u'(1) = 2$ koşulu altında $N = 2$ için sonlu Morgan-Voyce sıralama yöntemi ile çözelim.

$$Q_{22}(t) = t^2 - t, \quad \alpha_{22} = 1, \beta_{22}(t) = 0, \lambda_{22} = 1, \delta_{22}(t) = 0$$

$$P_{10}(t) = t^2, \lambda_{10} = 0, \delta_{10}(t) = t - 1, P_{00}(t) = -1, \lambda_{00} = \frac{1}{2}, \delta_{00}(t) = 0$$

$$g(t) = 8t^3 + 49t^2 - 61t - 5$$

şeklindedir.

Burada $N = 2$ için Morgan-Voyce seri çözümü olan

$$u(t) = \sum_{n=0}^N c_n B_n(t)$$

bulmak için sıralama noktaları,

$$t_i = a + \frac{b-a}{N} i, \quad i = 0, 1, \dots, N$$

bağıntısı kullanılarak

$$\left\{ t_0 = 0, \quad t_1 = \frac{1}{2}, \quad t_2 = 1 \right\}$$

şeklinde bulunur.

Böylece temel denklem,

$$\left\{ Q_{22} \hat{X}_{1,0} \hat{M}^2 \hat{R} \hat{C} X_{10} (M)^2 R + P_{10} X_{1,-1} M R^T + P_{00} X_{\frac{1}{2},0} R \right\} C = G$$

$$W = Q_{22} \hat{X}_{1,0} \hat{M}^2 \hat{R} \hat{C} X_{10} (M)^2 R + P_{10} X_{1,-1} M R + P_{00} X_{\frac{1}{2},0} R \quad (4.1)$$

şeklindedir. Buradaki matrisler aşağıdaki gibidir.

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{R} = \begin{bmatrix} R & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & R \end{bmatrix}, \quad \hat{C} = \begin{bmatrix} C & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} -5 \\ -\frac{89}{4} \\ -9 \end{bmatrix},$$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{M} = \begin{bmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & M \end{bmatrix}, \quad Q_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P_{10} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$P_{00} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad X_{1,0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{X}_{1,0} = \begin{bmatrix} X(0) & 0 & 0 \\ 0 & X(\frac{1}{2}) & 0 \\ 0 & 0 & X(1) \end{bmatrix}$$

$$X_{1,-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad X_{\frac{1}{2},0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{16} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Bu matrisler Denklem (4.1)' de yerine yazılırsa artırılmış matris aşağıdaki gibi bulunur,

$$[\mathbf{W}:\mathbf{G}] = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -\frac{3}{16} & : & -\frac{5}{4} \\ -1 & -2 & -\frac{117}{16} & : & -\frac{89}{4} \\ -1 & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{4} & : & -9 \end{bmatrix}$$

Denklem (3.16)' dan başlangıç koşullarının matris formu, $[V_0; \delta_0] = [0, 1, 6; 2]$ şeklinde bulunur. Böylece problemin yeni eklenmiş $[\tilde{\mathbf{W}}:\tilde{\mathbf{G}}]$ matris formu aşağıdaki gibi elde edilir,

$$[\tilde{\mathbf{W}}:\tilde{\mathbf{G}}] = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -\frac{3}{16} & : & -\frac{5}{4} \\ -1 & -2 & -\frac{117}{16} & : & -\frac{89}{4} \\ 0 & 1 & 6 & : & 2 \end{bmatrix}$$

Bu sistem çözüldükten sonra, Morgan-Voyce katsayılar matrisi aşağıdaki gibi bulunur;

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 37 \\ -22 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = [37 \quad -22 \quad 4]^T$$

$N = 2$ için Morgan-Voyce polinomları ile elde edilen yaklaşık çözüm aşağıdaki gibidir,

$$u_2(x) = 4t^2 - 6t + 5$$

Örnek 4.2. (Gümgüm vd., 2020) Tam çözümü $u_{Tam}(x) = e^t$ olan

$$u''(t) + u'(t - t^2) - t^2 u\left(t + \frac{t}{2}\right) + (u'(t))^2 - u'(t)u(t) = g(t)$$

$$g(t) = e^t + e^{t-t^2} - t^2 e^{3t/2}$$

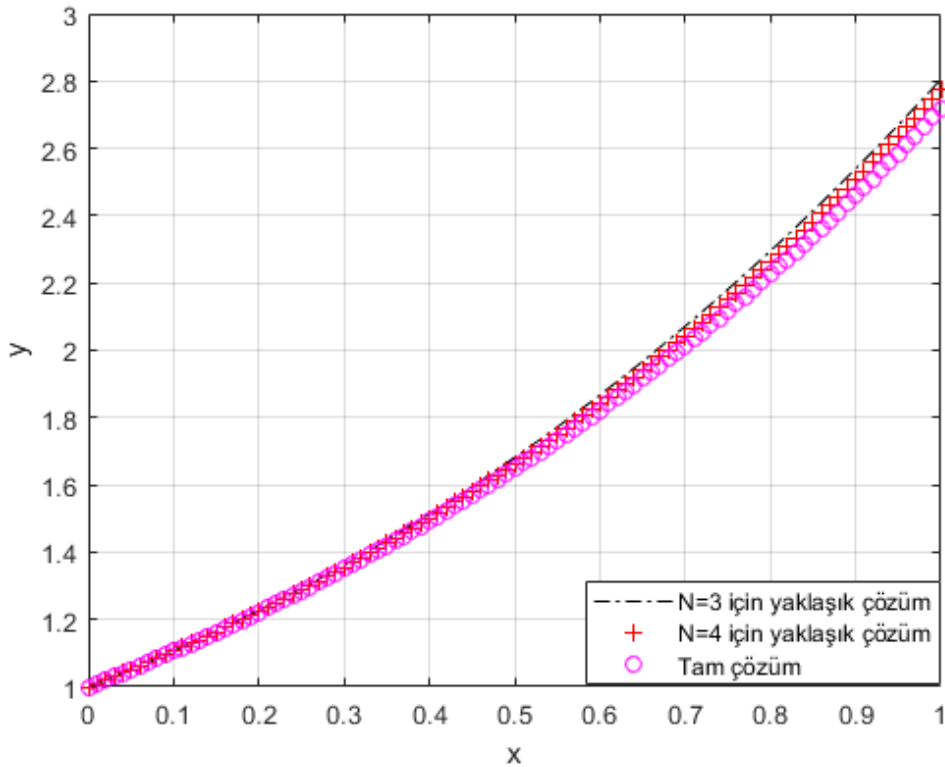
lineer olmayan pantograf diferansiyel denkleminin yaklaşım çözümleri $u(0) = 1$, $u'(0) = 1$ koşulları altında ve $0 \leq t \leq 1$ aralığında $N = 3, 4, 7, 9$ için Morgan-Voyce sıralama metodu ile incelenmiştir.

Çizelge 4.1'de $N = 7, 9$ için önerilen yöntem ile elde edilen hatalar Lucas sıralama metodu (Gümgüm vd., 2020), Fibonacci sıralama metodu (Çakmak, 2022) ile elde edilen hatalar ile karşılaştırılmıştır. Bu hatalar hata fonksiyonu kullanılarak elde edilmiştir. Bu çizelgedeki sonuçlara göre verilen yöntemin bazı noktalarda Lucas yöntemine göre daha iyi sonuçlar verdiği görülmüştür. Şekil 4.1.'de $N = 3$ ve 4 için

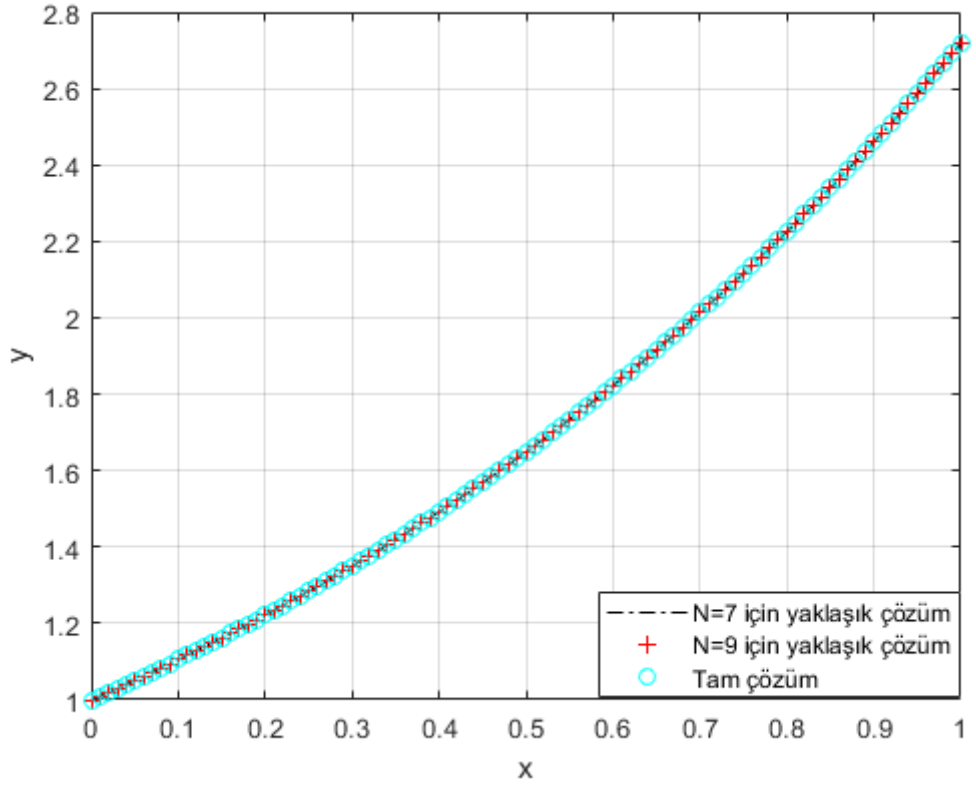
önerilen yöntemle elde edilen yaklaşık çözümlerin ve tam çözümün karşılaştırması sunulmaktadır. Şekil 4.2.'de $N = 7$ ve 9 için önerilen yöntemle elde edilen yaklaşık çözümlerin ve tam çözümün karşılaştırması verilmiştir. Çizelge 4.1, Şekil 4.1. ve Şekil 4.2.'den N arttıkça hatanın azaldığı sonucu çıkarılabilir.

Çizelge 4.1. Örnek 4.2'nin N 'in farklı değerleri için E_N hata fonksiyonlarının karşılaştırılması

x	Lucas sıralama metot		Fibonacci sıralama metot		Önerilen yöntem	
	E_7	E_9	E_7	E_9	E_7	E_9
0.2	2.79×10^{-9}	1.86×10^{-12}	2.42×10^{-9}	2.20×10^{-12}	2.42×10^{-9}	2.88×10^{-12}
0.4	5.53×10^{-9}	3.56×10^{-12}	4.12×10^{-9}	3.92×10^{-12}	4.12×10^{-9}	1.01×10^{-11}
0.6	8.75×10^{-9}	4.95×10^{-12}	5.23×10^{-9}	4.97×10^{-12}	5.21×10^{-9}	2.95×10^{-11}
0.8	4.84×10^{-9}	8.55×10^{-11}	2.79×10^{-9}	6.62×10^{-11}	2.84×10^{-9}	2.99×10^{-12}
1	5.35×10^{-7}	4.78×10^{-9}	5.57×10^{-7}	3.93×10^{-9}	5.57×10^{-7}	3.77×10^{-9}



Şekil 4.1. Örnek 4.2'nin $N=3,4$ için yaklaşık çözümleri ve tam çözümünün karşılaştırılması



Şekil 4.2. Örnek 4.2'nin $N=7,9$ için yaklaşık çözümleri ve tam çözümünün karşılaştırılması

Örnek 4.3. (Yılmaz ve Yaman, 2020)

Tam çözümü $u_{Tam}(t) = e^{-2t}$ olan

$$u''(t) + u(t) - 5u^2\left(\frac{t}{2}\right) = 0$$

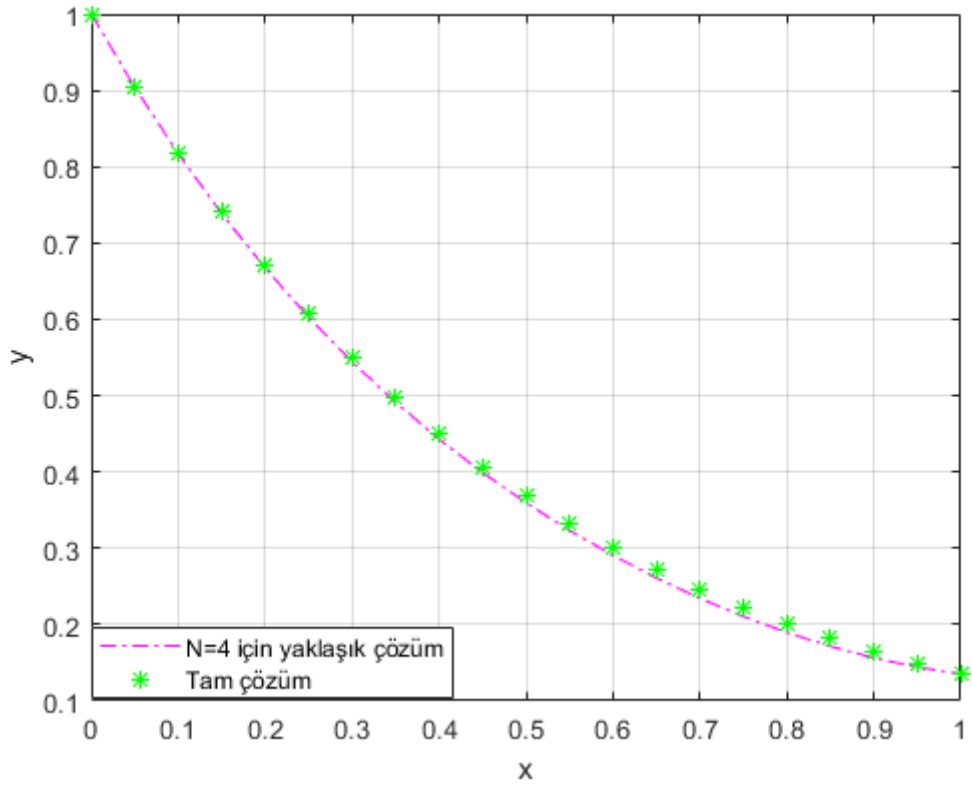
Lineer olmayan pantograf denkleminin yaklaşık çözümleri $u(0) = 1, u(1) = e^{-2}$ koşulları altında $0 \leq t \leq 1$ aralığında $N = 4, 5, 7, 9$ için Morgan-Voyce sıralama yöntemi ile incelenmiştir.

Çizelge 4.2'de $N = 5, 7, 9$ için önerilen yöntem ile elde edilen hatalar Fibonacci sıralama metodu (Çakmak, 2022) ile elde edilen hatalar ile karşılaştırılmıştır. Bu hatalar hata fonksiyonu kullanılarak elde edilmiştir. Bu çizelgedeki sonuçlara göre verilen yöntemle elde edilen hataların Fibonacci sıralama yöntemi ile elde edilen hatalara yakın olduğu görülmüştür. Şekil 4.3, Şekil 4.4. ve Şekil 4.5.'te sırası ile $N = 4, 5, 7$ için önerilen yöntemle elde edilen yaklaşık çözümlerin ve tam çözümün

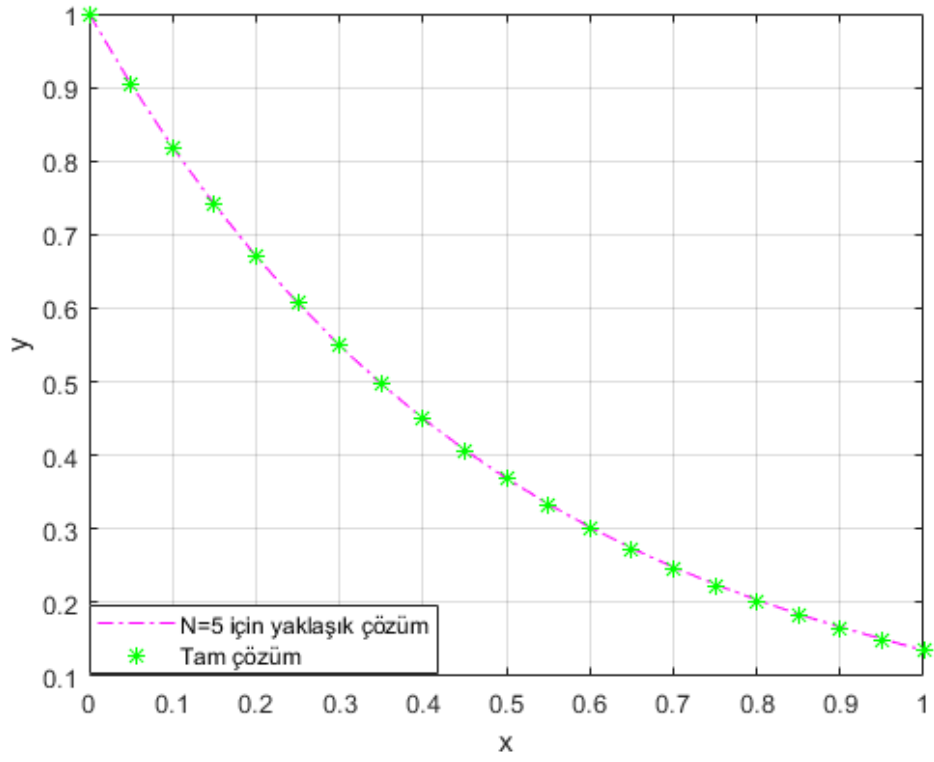
karşılaştırması sunulmaktadır. Çizelge 4.2, Şekil 4.3, Şekil 4.4. ve Şekil 4.5.’ten de görüldüğü gibi N arttıkça hata azalır.

Çizelge 4.2. Örnek 4.3’ün N ’in farklı değerleri için E_N hata fonksiyonlarının karşılaştırılması

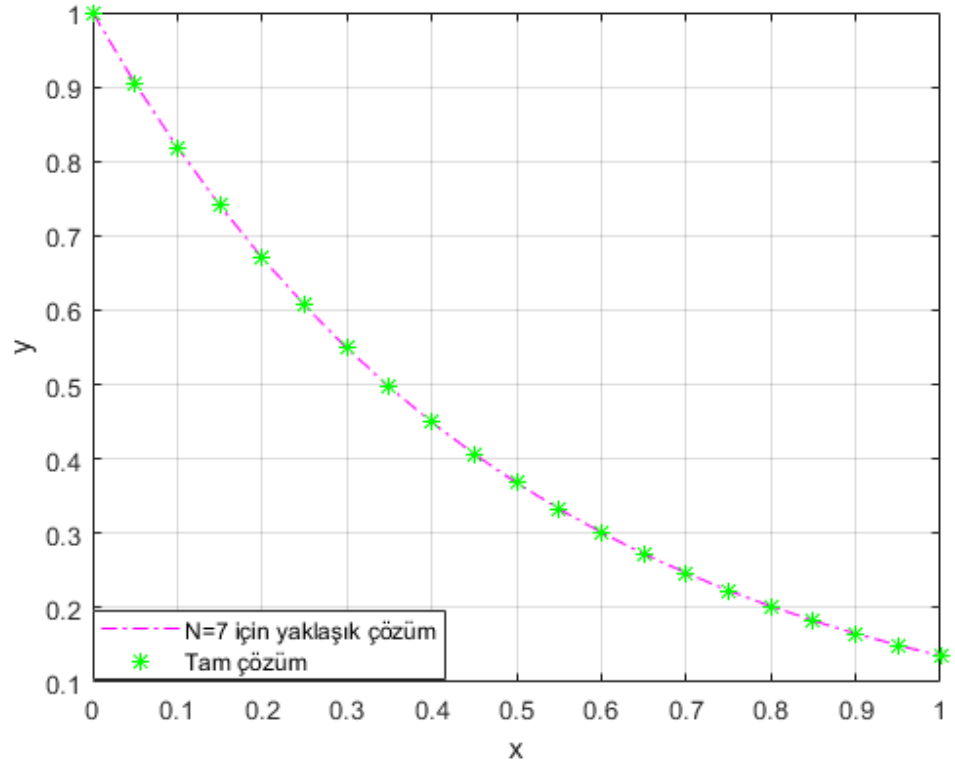
Fibonacci sıralama metot				Önerilen yöntem		
x	E_5	E_7	E_9	E_5	E_7	E_9
0.2	3.88×10^{-4}	4.39×10^{-6}	3.04×10^{-8}	3.88×10^{-4}	4.39×10^{-6}	3.02×10^{-8}
0.4	8.31×10^{-4}	9.31×10^{-6}	6.45×10^{-8}	8.31×10^{-4}	9.31×10^{-6}	6.46×10^{-8}
0.6	1.35×10^{-3}	1.50×10^{-5}	1.04×10^{-7}	1.35×10^{-3}	1.50×10^{-5}	1.04×10^{-7}
0.8	1.79×10^{-3}	2.16×10^{-5}	1.50×10^{-7}	1.79×10^{-3}	2.16×10^{-5}	1.52×10^{-7}
1	0	0	0	7.76×10^{-9}	4.13×10^{-9}	0



Şekil 4.3. Örnek 4.3’ün $N=4$ için yaklaşık çözüm ve tam çözümünün karşılaştırılması



Şekil 4.4. Örnek 4.3'ün $N=5$ için yaklaşık çözüm ve tam çözümünün karşılaştırılması



Şekil 4.5. Örnek 4.3'ün $N=7$ için yaklaşık çözüm ve tam çözümünün karşılaştırılması

Örnek 4.4 Tam çözümü $u_{Tam}(t) = e^t \cos t$ olan

$$u''\left(\frac{t}{2}\right)[u(t)]^2 + 2e^{\frac{3t}{2}} \cos t \sin \frac{t}{2} u'(t) + u\left(\frac{5t}{2}\right) = g(t)$$

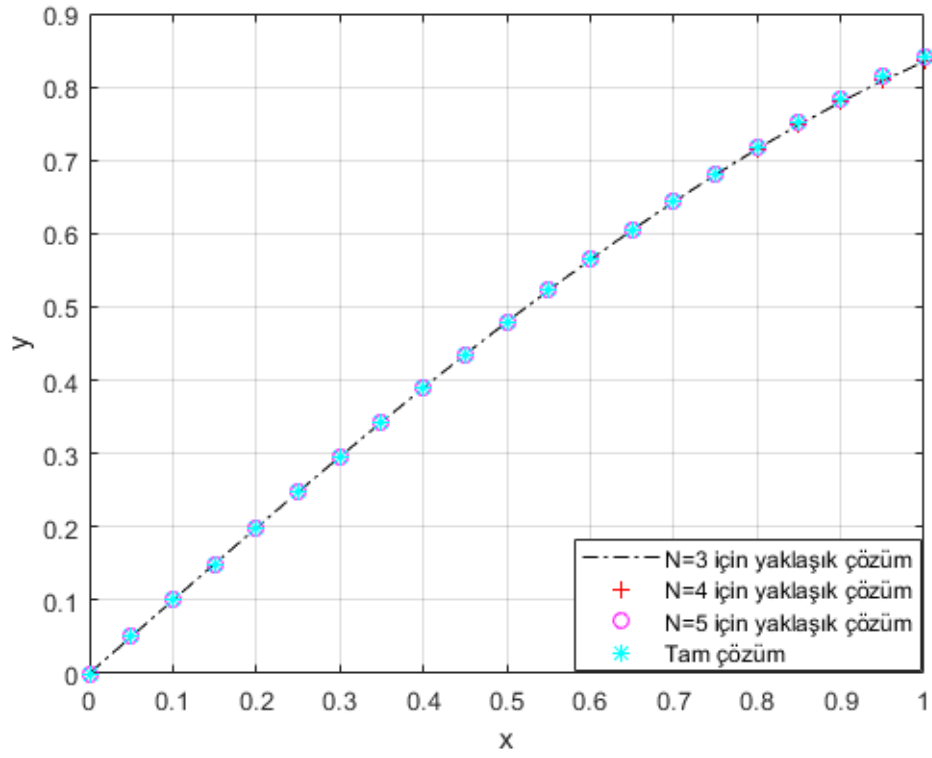
$$g(t) = e^{\frac{5t}{2}} \left(-\sin 2t \sin \frac{t}{2} + \cos \frac{5t}{2} \right)$$

Lineer olmayan pantograf diferansiyel denkleminin $u(0) = 1$, $u'(0) = 1$ koşulları altında $0 \leq t \leq 1$ aralığında yaklaşık çözümleri $N = 3, 4, 7, 9$ için incelenmiştir.

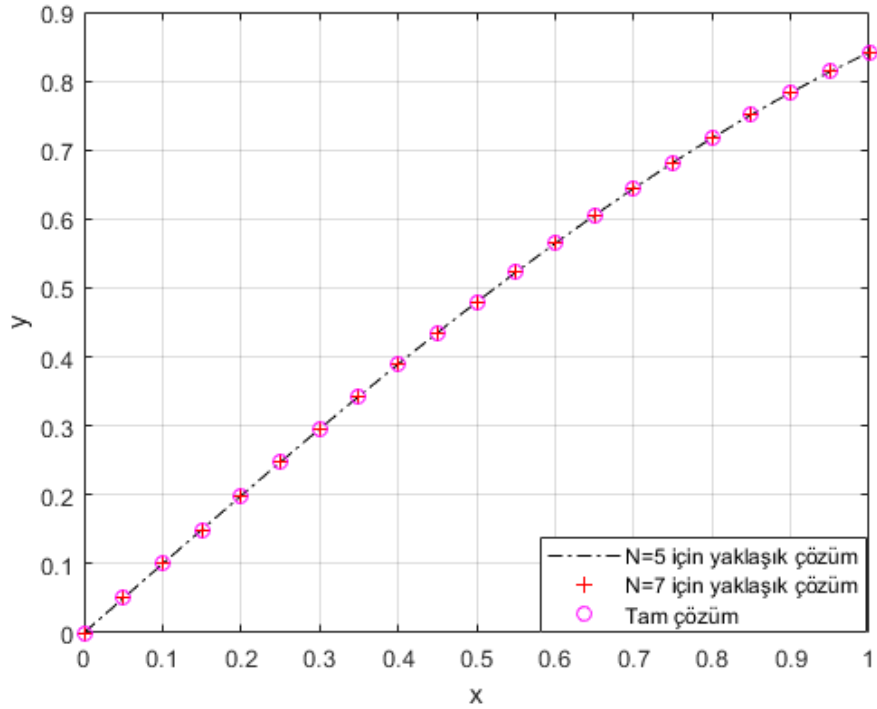
Çizelge 4.3.' te $N = 3, 4, 7, 9$ için önerilen yöntem ile elde edilen hatalar verilmiştir. Bu hatalar hata fonksiyonu kullanılarak elde edilmiştir. Bu çizelgedeki sonuçlara göre verilen yöntem ile elde edilen hatalar oldukça düzgündür. Şekil 4.6.' da $N = 3, 4, 5$ için elde edilen yaklaşık çözümler ile tam çözümün, Şekil 4.7.' de de $N = 5, 7$ için elde edilen yaklaşık çözümler ile tam çözümün karşılaştırması gösterilmektedir. Çizelge 4.3.' ten de görüldüğü gibi N arttıkça hata azalır. Şekil 4.6. ve Şekil 4.7.'den N arttıkça yaklaşık çözümlerin tam çözüme daha yakın olduğu görülür.

Çizelge 4.3. Örnek 4.4'ün N 'in farklı değerleri için E_N hata fonksiyonlarının karşılaştırılması

x	E_3	E_4	E_7	E_9
0.2	3.9×10^{-4}	1.7×10^{-5}	2.0×10^{-9}	7.7×10^{-10}
0.4	7.9×10^{-4}	1.0×10^{-4}	1.1×10^{-6}	1.4×10^{-8}
0.6	5.9×10^{-5}	6.1×10^{-4}	7.0×10^{-6}	6.7×10^{-8}
0.8	3.5×10^{-2}	9.1×10^{-4}	7.5×10^{-6}	4.7×10^{-7}
1	1.1×10^{-1}	1.2×10^{-3}	2.6×10^{-5}	1.0×10^{-6}



Şekil 4.6. Örnek 4.4'ün N=3,4,5 için yaklaşık çözümleri ve tam çözümünün karşılaştırılması



Şekil 4.7. Örnek 4.4'ün N=5,7 için yaklaşık çözümleri ve tam çözümünün karşılaştırılması

ÖRNEK 4.5. (Secer vd., 2018)

Bu örnekte aşısız SIR modeli $0 \leq t \leq 1$ aralığı için aşağıdaki parametre değerleri kullanılarak ele alınmaktadır.

$$N_S = 20, N_I = 15, N_R = 10, \beta = 0.01, \gamma = 0.02, \nu = 0$$

Önerilen yöntemle elde edilen sonuçlar (Secer vd., 2018) çalışmasındaki sonuçlarla karşılaştırılmıştır. $N = 5$ için yaklaşık çözümler sunulan yöntem kullanılarak aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\begin{aligned} S_5(t) = & 20.00000000 - 2.999999999t - 0.04499957685t^2 \\ & + 0.02804671200t^3 + 0.0008058035642t^4 \\ & - 0.0003329149155t^5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_5(t) = & 15.00000000 + 2.699999999t + 0.01799970470t^2 \\ & - 0.02816759777t^3 - 0.0006626352597t^4 \\ & + 0.0003329022387t^5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_5(t) = & 10.00000000 + 0.300000000t + 0.2699987216t^2 \\ & + 0.0001208857706t^3 - 0.0001431683045t^4 \\ & + 0.126768711610 \times 10^{-7}t^5 \end{aligned}$$

Epidemik SIR modelinin kesin bir çözümünün olmadığı bilinmektedir. Bu nedenle elde edilen çözümler kullanılarak sunulan yöntem Hermite sıralama metodu (HSM) (Secer vd., 2018), Homotopi Pertürbasyon metodu (HPM) (Rafei vd., 2007), Laplace-Adomian ayrıştırma metodu (LADM) (Doğan ve Akın, 2012) ile elde edilen yaklaşık çözümlerle karşılaştırılmıştır. Ayrıca kalan hatalar da sunulmaktadır. Çizelge 4.4- 4.9' da ve Şekil 4.8, 4.9, 4.10' da $N = 5$ için sonuçlar verilmiştir. Bu çizelge ve şekillerden de görüldüğü gibi sunulan yöntemle elde edilen hatalar HPM ve LADM ile elde edilenlerden daha küçüktür ve HSM ile elde edilenlere benzerdir. Yani şunu söyleyebiliriz ki sunulan yöntem sonuçları iyileştirmiştir. Şekiller ve çizelgelerin gösterdiği gibi, M-VSM doğrusal olmayan bir denklem sisteminin çözümünde etkili ve kullanışlıdır.

Çizelge 4.4. N=5 için Örnek 4.5 için S(t) değerlerinin nümerik sonuçlarının karşılaştırılması

t	S(t) (HPM)	S(t) (HSM, N=5)	S(t) (LADM)	S(t) M-VSM
0.2	19.39842557	19.39842556	19.39842557	19.3984255735
0.4	18.79461232	18.79461227	18.79461232	18.7946122770
0.6	18.18993727	18.18993677	18.18993727	18.1899367871
0.8	17.58578366	17.58578115	17.58578366	17.5857811555
1	16.98352883	16.98352001	16.98352883	16.9835200246

Çizelge 4.5. N=5 için Örnek 4.5 için S(t) değerlerinin rezidü hatalarının karşılaştırılması

t	ER_S (HPM)	I(t) (HSM, N=5)	ER_S (LADM)	ERS M-VSM
0.2	2.2416×10^{-8}	1.0080×10^{-9}	2.2417×10^{-8}	3.8045×10^{-9}
0.4	6.6425×10^{-7}	1.0201×10^{-9}	6.6427×10^{-7}	4.4120×10^{-9}
0.6	4.6388×10^{-6}	1.0363×10^{-9}	4.6389×10^{-6}	5.2320×10^{-9}
0.8	1.7832×10^{-5}	1.0566×10^{-9}	1.7833×10^{-5}	6.3120×10^{-9}
1	4.9171×10^{-5}	1.9918×10^{-7}	4.9172×10^{-5}	1.9256×10^{-7}

Çizelge 4.6. N=5 için Örnek 4.5 için I(t) değerlerinin nümerik sonuçlarının karşılaştırılması

t	I(t) (HPM)	I(t) (HSM, N=5)	I(t) (LADM)	I(t) M-VSM
0.2	15.54049369	15.54049370	15.54049369	15.5404936937
0.4	16.08106363	16.08106367	16.08106363	16.081063672
0.6	16.62033527	16.62033570	16.62033527	16.6203357015
0.8	17.15693346	17.15693567	17.15693345	17.156935671
1	17.68949465	17.68950236	17.68949464	17.6895023739

Çizelge 4.7. N=5 için Örnek 4.5 için I(t) değerlerinin rezidü hatalarının karşılaştırılması

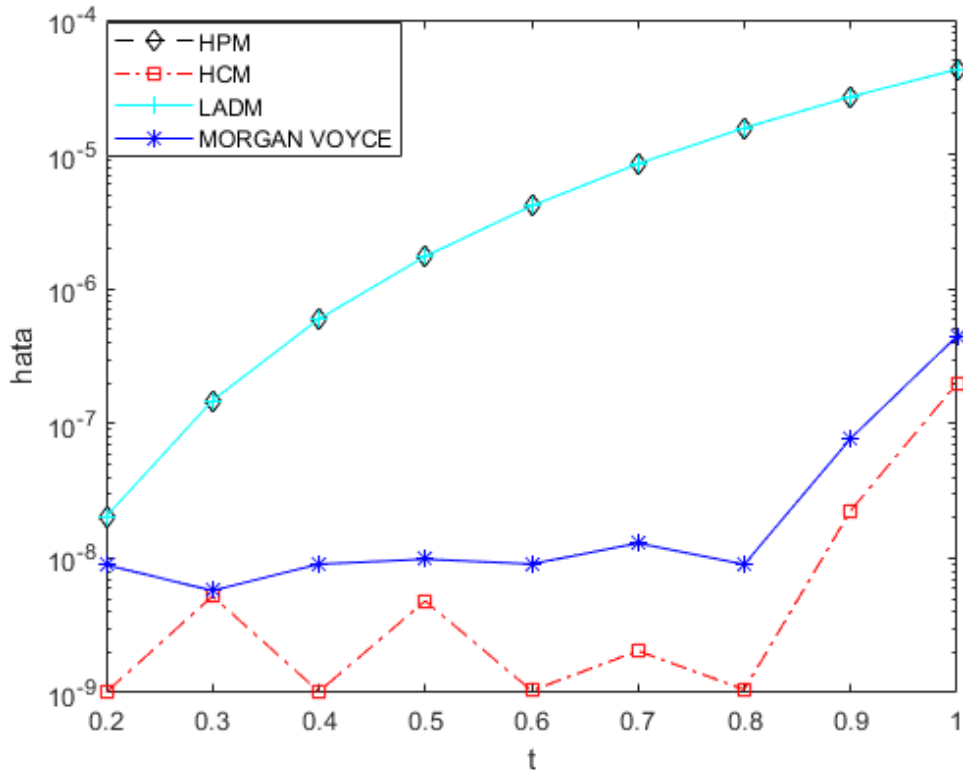
t	ER_I (HPM)	ER_I (HSM, N=5)	ER_I (LADM)	ER_I M-VSM
0.2	2.0373×10^{-8}	1.0080×10^{-9}	2.0375×10^{-8}	8.9114×10^{-9}
0.4	5.9888×10^{-7}	1.0201×10^{-9}	5.9892×10^{-7}	9.0230×10^{-9}
0.6	4.1424×10^{-6}	1.0363×10^{-9}	4.1426×10^{-6}	9.0493×10^{-9}
0.8	1.5741×10^{-5}	1.0566×10^{-9}	1.5741×10^{-5}	8.9952×10^{-9}
1	4.2787×10^{-5}	1.9918×10^{-7}	4.2789×10^{-5}	4.4706×10^{-7}

Çizelge 4.8. N=5 için Örnek 4.5 için R(t) değerlerinin nümerik sonuçlarının karşılaştırılması

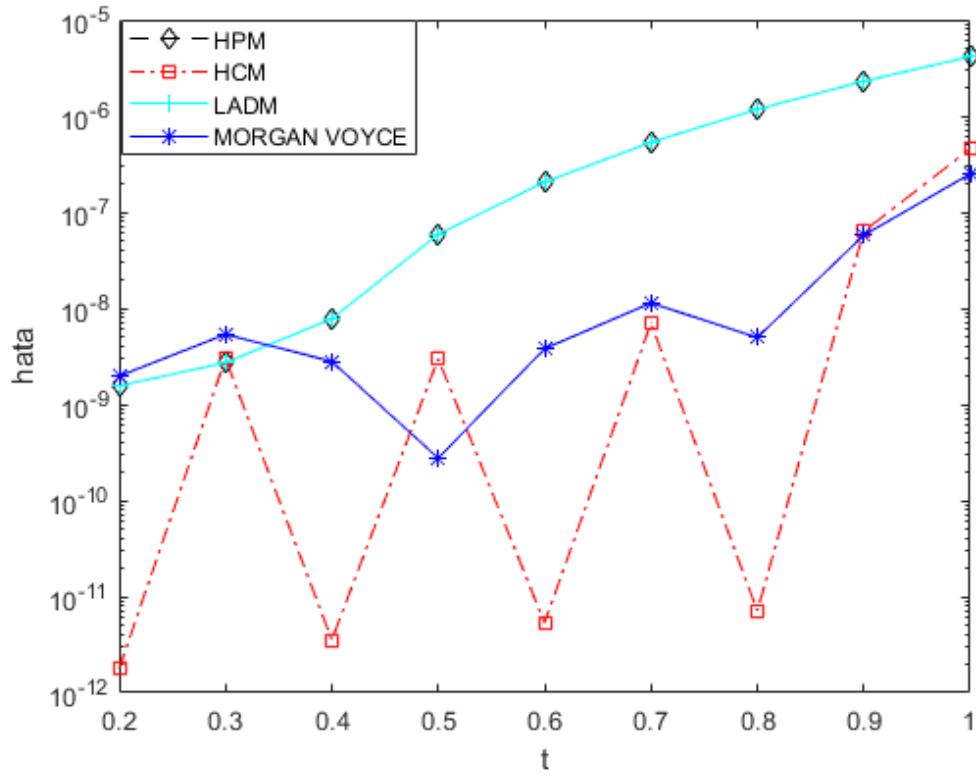
t	R(t) (HPM)	R(t) (HSM, N=5)	R(t) (LADM)	R(t) Morgan-Voyce
0.2	10.06108073	10.06108073	10.06108073	10.0610807329
0.4	10.12432405	10.12432405	10.12432405	10.1243240513
0.6	10.18972750	10.18972751	10.18972750	10.1897275117
0.8	10.25728304	10.25728317	10.25728304	10.2572831742
1	10.32697698	10.32697760	10.32697698	10.3269776025

Çizelge 4.9. N=5 için Örnek 4.5 için R(t) değerlerinin rezidü hatalarının karşılaştırılması

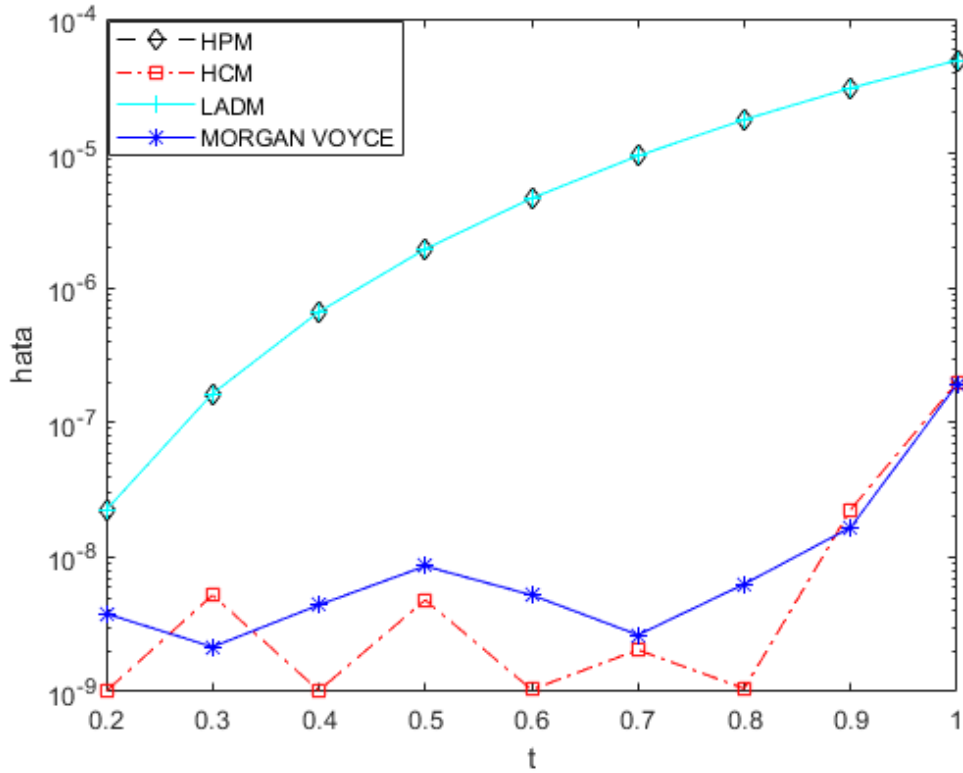
t	ER_R (HPM)	ER_R (HSM for L=5)	ER_R (LADM)	ER_R M-VCM
0.2	1.5573×10^{-9}	1.7802×10^{-12}	1.5573×10^{-9}	1.9663×10^{-9}
0.4	7.7657×10^{-9}	3.5556×10^{-12}	7.7656×10^{-9}	2.7950×10^{-9}
0.6	2.0477×10^{-7}	5.3304×10^{-12}	2.0477×10^{-7}	3.7913×10^{-9}
0.8	1.1701×10^{-6}	7.1090×10^{-12}	1.1701×10^{-6}	4.9600×10^{-9}
1	4.1334×10^{-6}	4.5486×10^{-7}	4.1334×10^{-6}	2.4930×10^{-7}



Şekil 4.8. S(t) için rezidü hatalarının diğer metotlarla karşılaştırılması



Şekil 4.9. I(t) için rezidü hatalarının diğer metotlarla karşılaştırılması



Şekil 4.10. R(t) için rezidü hatalarının diğer metotlarla karşılaştırılması

Örnek 4.6.

$0 \leq t \leq 1$ aralığında $N_S = 0.95, N_I = 0.05, N_R = 0, \beta = 0.2, \gamma = 0.1, \sigma = 0.005, 0.01, 0.02, 0.03, 0.06$ parametre değerleri için denklem (2.4)' i ele alalım.

Bu parametreler (Rachah ve Torres, 2015) çalışmasından seçilmiştir. $S(t), I(t), R(t)$ için rezidü hatalar Çizelge 4.10.-Çizelge 4.14. ve Şekil 4.11-Şekil 4.14.' de farklı σ değerleri için sunulmuştur. Küçük σ değerleri için $S(t)$ ve $R(t)$ hataları daha küçüktür, ancak $I(t)$ hatası pek değişmez. $\sigma = 0.02$ değeri için en küçük $I(t)$ hatası elde edilir. $S(t)$ ve $R(t)$ 'nin en küçük hataları $\sigma = 0.01$ ve 0.03 değerleri için elde edilir. Böylece en iyi yaklaşımın $\sigma = 0.02$ için elde edildiğini söyleyebiliriz.

Çizelge 4. 10. $\sigma = 0.005$ için Denklem (2.4)' ün rezidü hataları

t	ER_S	ER_I	ER_R
0.1	2.0017×10^{-7}	2.0805×10^{-8}	1.0544×10^{-8}
0.2	2.4419×10^{-7}	2.5143×10^{-8}	1.1137×10^{-8}
0.3	2.9299×10^{-7}	2.9958×10^{-8}	1.1797×10^{-8}
0.4	3.4678×10^{-7}	3.5273×10^{-8}	1.2529×10^{-8}
0.5	4.0577×10^{-7}	4.1114×10^{-8}	1.3337×10^{-8}
0.6	4.7020×10^{-7}	4.7505×10^{-8}	1.4226×10^{-8}
0.7	5.4027×10^{-7}	5.4471×10^{-8}	1.5200×10^{-8}
0.8	6.1622×10^{-7}	6.2036×10^{-8}	1.6262×10^{-8}
0.9	6.9824×10^{-7}	7.0221×10^{-8}	1.7416×10^{-8}
1	7.8657×10^{-7}	7.9046×10^{-8}	1.8661×10^{-8}

Çizelge 4.11. $\sigma = 0.01$ için Denklem (2.4)' ün rezidü hataları

t	ER_S	ER_I	ER_R
0.1	5.1591×10^{-8}	9.3905×10^{-8}	1.7736×10^{-9}
0.2	5.5453×10^{-8}	1.1294×10^{-7}	2.5089×10^{-9}
0.3	5.9708×10^{-8}	1.3399×10^{-7}	3.4104×10^{-9}
0.4	6.4395×10^{-8}	1.5712×10^{-7}	4.4980×10^{-9}
0.5	6.9554×10^{-8}	1.8243×10^{-7}	5.7929×10^{-9}
0.6	7.5227×10^{-8}	2.1000×10^{-7}	7.3172×10^{-9}
0.7	8.1458×10^{-8}	2.3993×10^{-7}	9.0941×10^{-9}
0.8	8.8295×10^{-8}	2.7229×10^{-7}	1.1148×10^{-8}
0.9	9.5794×10^{-8}	3.0717×10^{-7}	1.3503×10^{-8}
1	1.0402×10^{-8}	3.4464×10^{-7}	1.6184×10^{-8}

Çizelge 4.12. $\sigma = 0.02$ için Denklem (2.4)' ün rezidü hataları

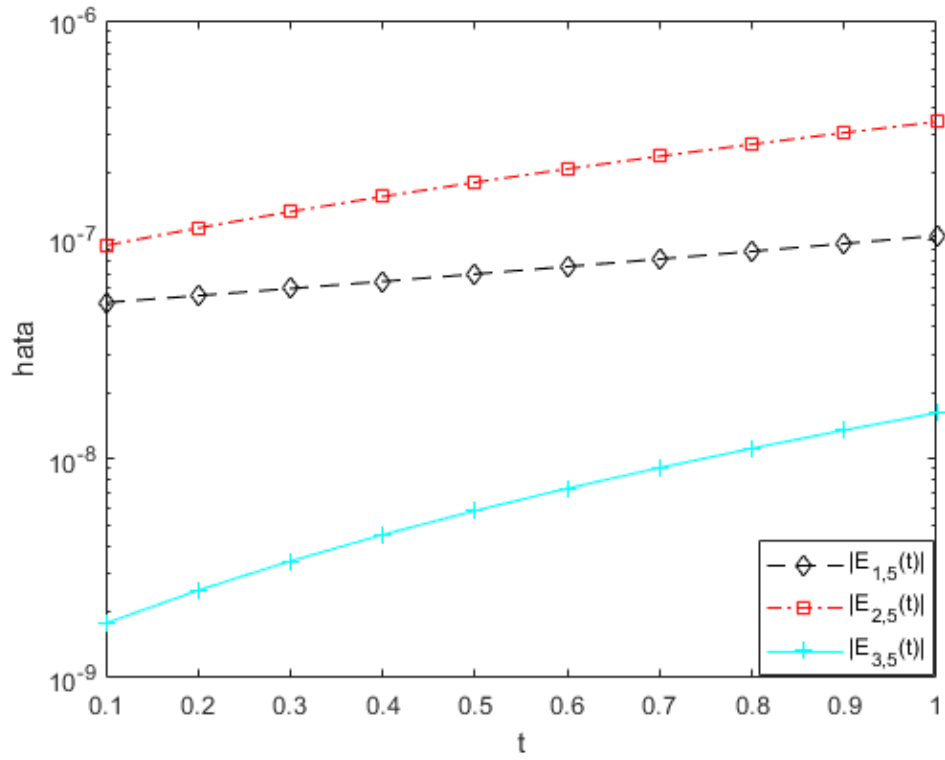
t	ER_S	ER_l	ER_R
0.1	3.1084×10^{-7}	1.0500×10^{-9}	2.4970×10^{-7}
0.2	4.0778×10^{-7}	2.0300×10^{-9}	2.9760×10^{-7}
0.3	5.2230×10^{-7}	3.2950×10^{-9}	3.5110×10^{-7}
0.4	6.5640×10^{-7}	4.0000×10^{-9}	4.1066×10^{-7}
0.5	8.1100×10^{-7}	6.8300×10^{-9}	4.7650×10^{-7}
0.6	9.9065×10^{-7}	9.2000×10^{-9}	5.4925×10^{-7}
0.7	1.1948×10^{-7}	1.2043×10^{-8}	6.2904×10^{-7}
0.8	1.4266×10^{-7}	1.5405×10^{-8}	7.1630×10^{-7}
0.9	1.6880×10^{-6}	1.9000×10^{-8}	8.1140×10^{-7}
1	1.9819×10^{-6}	2.4010×10^{-8}	9.1494×10^{-7}

Çizelge 4.13. $\sigma = 0.03$ için Denklem (2.4)' ün rezidü hataları

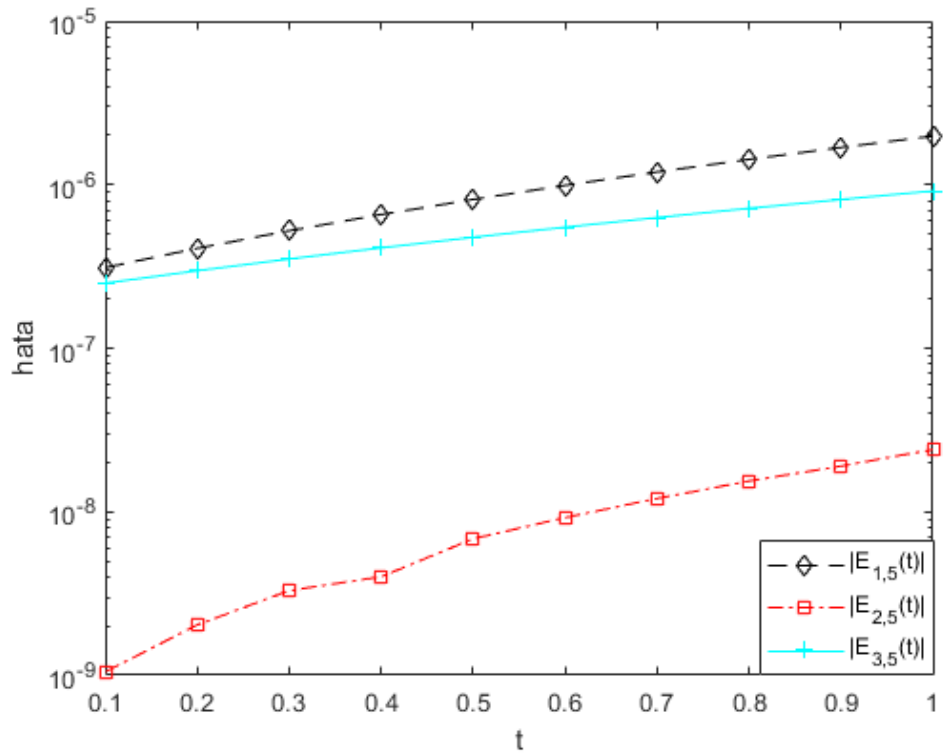
t	ER_S	ER_l	ER_R
0.1	2.2100×10^{-8}	3.7200×10^{-8}	6.9600×10^{-10}
0.2	2.7380×10^{-8}	4.9700×10^{-8}	1.7400×10^{-9}
0.3	3.3490×10^{-8}	6.4701×10^{-8}	3.0619×10^{-9}
0.4	4.0500×10^{-8}	8.2200×10^{-8}	4.6670×10^{-9}
0.5	4.8700×10^{-8}	1.0270×10^{-7}	6.6010×10^{-9}
0.6	5.7000×10^{-8}	1.2640×10^{-7}	8.9000×10^{-9}
0.7	6.8390×10^{-8}	1.5347×10^{-7}	1.1605×10^{-8}
0.8	8.0117×10^{-8}	1.8420×10^{-7}	1.4750×10^{-8}
0.9	9.3220×10^{-8}	2.1914×10^{-7}	1.8380×10^{-8}
1	1.0780×10^{-7}	2.5836×10^{-7}	2.2531×10^{-8}

Çizelge 4.14. $\sigma = 0.06$ için Denklem (2.4)' ün rezidü hataları

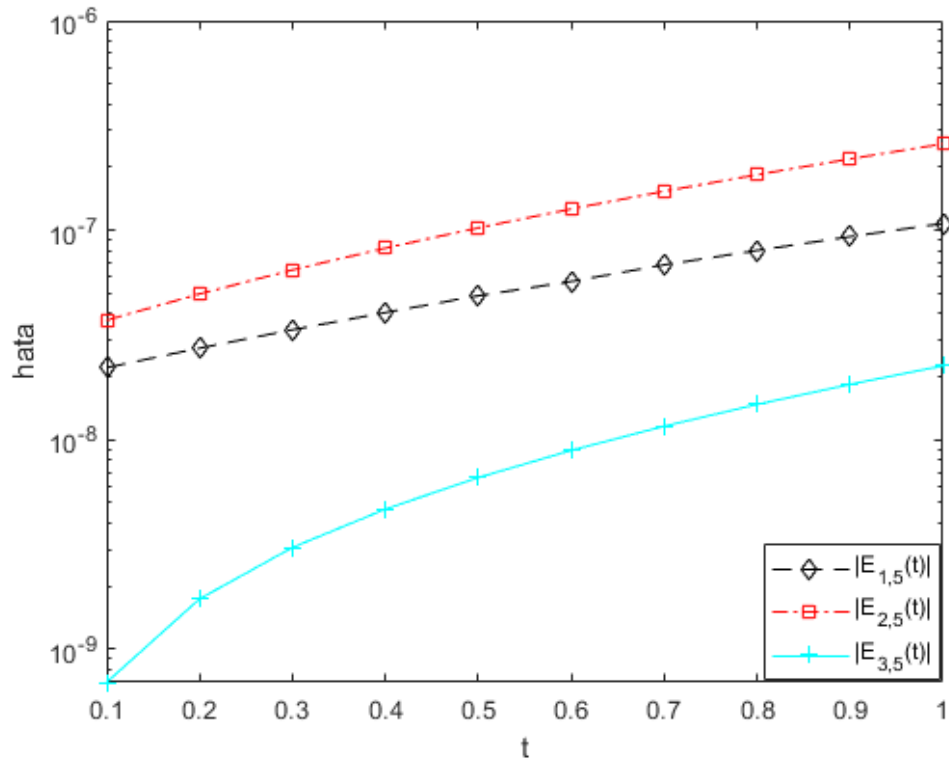
t	ER_S	ER_l	ER_R
0.1	8.5647×10^{-7}	5.4000×10^{-8}	2.0762×10^{-7}
0.2	9.5890×10^{-7}	5.3700×10^{-8}	2.4940×10^{-7}
0.3	1.0660×10^{-6}	5.2000×10^{-8}	2.9568×10^{-7}
0.4	1.1792×10^{-6}	4.9930×10^{-8}	3.4662×10^{-7}
0.5	1.2972×10^{-6}	4.6100×10^{-8}	4.0240×10^{-7}
0.6	1.4202×10^{-6}	4.0964×10^{-8}	4.6333×10^{-7}
0.7	1.5484×10^{-6}	3.4200×10^{-8}	5.2955×10^{-7}
0.8	1.6819×10^{-6}	2.5800×10^{-8}	6.0120×10^{-7}
0.9	1.8205×10^{-6}	1.5672×10^{-8}	6.7870×10^{-7}
1	1.9641×10^{-6}	3.7710×10^{-9}	7.6213×10^{-7}



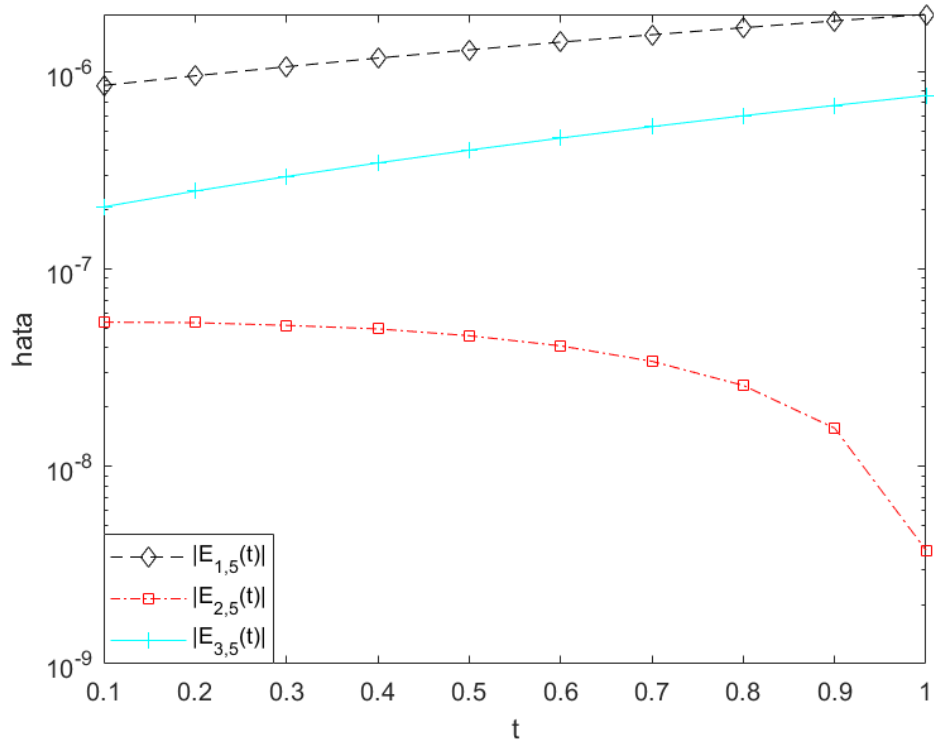
Şekil 4.11. $S(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ ' nin yaklaşık çözümlerinin rezidü hatalarının $\sigma=0.01$ için karşılaştırılması



Şekil 4.12. $S(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ ' nin yaklaşık çözümlerinin rezidü hatalarının $\sigma=0.02$ için karşılaştırılması



Şekil 4.13. S(t), I(t) ve R(t)' nin yaklaşık çözümlerinin rezidü hatalarının $\sigma=0.03$ için karşılaştırılması



Şekil 4.14. S(t), I(t) ve R(t)' nin yaklaşık çözümlerinin rezidü hatalarının $\sigma=0.06$ için karşılaştırılması

5. SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Epidemik SIR modelinin ve lineer olmayan pantograf diferansiyel denklemlerin tam çözümlerini bulmak genellikle kolay olmadığından bu denklemlerin yaklaşık çözümlerini bulmak önemlidir. Bu tezin amacı bulaşıcı hastalıkların modeli olan epidemik SIR modelinin ve de lineer olmayan pantograf diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerini Morgan-Voyce sıralama metodu ile bulmaktır. Ayrıca çözümlerin doğruluğu ve yöntemin etkinliği de incelenmiştir. Epidemik SIR modelin tam çözümleri bilinmediğinden dolayı yaklaşık çözümlerin doğruluğu rezidü hata ile incelenmiştir. Lineer olmayan pantograf diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerinin doğruluğu da mutlak hata ile incelenmiştir.

Morgan-Voyce polinomları $(-\infty, \infty)$ aralığında tanımlı olduğundan dolayı Morgan-Voyce sıralama metodu istenilen herhangi bir lineer diferansiyel, integro diferansiyel, kesirli diferansiyel, pantograf diferansiyel, lineer olmayan diferansiyel, kısmi diferansiyel denklem ve denklem sistemlerinin yaklaşık çözümlerini $a \leq x \leq b$ aralığında bulmak için uygulanabilir.

Bu çalışmanın 4. bölümünde epidemik SIR modelinin ve lineer olmayan pantograf diferansiyel denklemlerinin yaklaşık çözümlerinin bulunması ile ilgili örnekler verilmiştir. Bu örneklerde yaklaşık çözümler farklı N değerleri için bulunmuştur. N 'nin küçük olması durumunda bulunan yaklaşık çözümler istenilen doğrulukta olmayabilir. N büyük alındığı zaman çok büyük boyutlu matrisler oluşacağından dolayı bilgisayardaki hesaplamalar uzun zaman alacaktır. O yüzden uygun değerleri için küçük hatalar elde edilmiştir. Bu yöntemin avantajları, epidemik SIR modelin tam çözümleri bilinmemesine rağmen rezidü hata analizi yardımıyla bu modelin hatalarının hesaplanması ve bu modelin ve lineer olmayan pantograf diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerinin bilgisayar programıyla kolayca bulunabilmesidir. Daha sonraki çalışmalarda Morgan-Voyce sıralama metodu, diğer lineer olmayan diferansiyel denklem sistemlerin ve kesirli diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerini bulmak için kullanılabilir.

KAYNAKLAR

- Abd-Elhameed, W.M., ve Youssri, Y.H. (2016) Solutions of the connection problems between Fermat and generalized Fibonacci polynomials. *JP J Algebra, Number Theory Appl.*, 38(4):349-362.
- Agarwal, P., Deniz, S., Jain, S., Alderremy, A.A. ve Aly, S. (2020) A new analysis of a partial differential equation arising in biology and population genetics via semi analytical techniques, *Phys A Stat Mech Appl.*, 542(12):2769.
- Ahmed, I., Kumam, P., Abdeljawad ,T., v.d. (2020) Existence and uniqueness results for OE-Caputo implicit fractional pantograph differential equation with generalized anti-periodic boundary condition, *Adv Differ Equ.*, 1:1-19.
- Al-Omari, A., Schüttler, H.B., Arnold, J., ve Taha, T. (2013) Solving nonlinear systems of first order ordinary differential equations using a Galerkin finite element method, *IEEE Access*, 1: 408–417.
- Al-Raei, M. (2021). The basic reproduction number of the new coronavirus pandemic with mortality for India, the Syrian Arab Republic, the United States, Yemen, China, France, Nigeria and Russia with different rate of cases, *Clinical Epidemiology and Global Health*, 9: 147–149.
- Arqub, O.A., ve El-Ajou, A. (2013) Solution of the fractional epidemic model by homotopy analysis method, *J. King Saud Univ.-Sci.*, 25(1): 73–81.
- Atta, G.A., Moatimid, G.M. ve Youssri, H. (2021) Generalized Fibonacci operational tau algorithm for fractional Bagley-Torvik equation, *Progr Fract Differentiation Appl.*, 6:215-224.
- Bahgat, M.S. (2020) Approximate analytical solution of the linear and nonlinear multi-pantograph delay differential equations, *Phys Scripta.*, 95(5):055219.
- Bailey, Norman T. J. (1975) *The mathematical theory of infectious diseases and its applications*, 2nd ed., London: Griffin, ISBN 0-85264-231-8.
- Balachandran, K., Kiruthika, S. ve Trujillo, J.J. (2013) Existence of solutions of nonlinear fractional pantograph equations. *Acta Math Sci.*, 33(3):712-720.

- Beckley, R., Weatherspoon, C., Alexander, M., Chandler, M., Johnson, A. ve Bhatt, G.S. (2013) *Modeling epidemics with differential equations*, Tennessee State University Internal Report, Retrieved July 19.
- Biazar, J. (2006) Solution of the epidemic model by Adomian decomposition method, *Appl. Math. Comput.*, 173(2): 1101–1106.
- Capasso, V. (1993) *Mathematical Structure of Epidemic Systems*, Springer, Berlin, ISBN 3-540-56526-4.
- Çakmak, M. (2022) Fibonacci collocation method for solving a class of nonlinear pantograph differential equations, *Math Meth Appl Sci.*, 45(17): 11962-11976.
- Deniz, S. ve Sezer, M. (2020) Rational Chebyshev collocation method for solving nonlinear heat transfer equations, *Int Commun Heat Mass Transfer.*, 114:104595
- Dogan, N., ve Akin, Ö. (2012) Series solution of epidemic model, *TWMS J. Appl. Eng. Math.*, 2(2): 238–244.
- Fadi, A., Adawi, A. ve Mustafa, Z. (2009) Solutions of the SIR models of epidemics using HAM, *Chaos Soliton Fract.*, 42(5): 3047–3052.
- Fan, Z., Liu, M. ve Cao, W. (2007) Existence and uniqueness of the solutions and convergence of semi-implicit Euler methods for stochastic pantograph equations, *J Math Anal Appl.*, 325(2):1142-1159.
- Gümgüm, S., Savaseneril, N.B., Kürkcü, Ö.K. ve Sezer, M. (2020) Lucas polynomial solution of nonlinear differential equations with variable delays, *Hacettepe J Math Stat.*, 49(2):553-564.
- Hethcote, H.W. (1989) *Three Basic Epidemiological Models*. In Levin SA, Hallam TG, Gross LJ (eds.), *Applied Mathematical Ecology, Biomathematics*, Vol. 18. Berlin: Springer. pp. 119–144.
- Ibrahim, S.F.M., ve Ismail, S.M. (2017) Differential Transformation Approach to a SIR Epidemic Model with Constant Vaccination, *J. Am. Sci.*, 8(7): 764–769.
- Ibrahim, S.F.M. ve Ismail, S.M. (2017) Differential Transformation Approach to a SIR Epidemic Model with Constant Vaccination, *J. Am. Sci.*, 8: 764–769.

- İlhan, Ö. (2021) An Improved approach for solutions of systems of linear Fredholm integro-differential equations, *Muğla Journal of Science and Technology*, 7(1): 83-92.
- İlhan, Ö. (2012) *Lineer Diferansiyel, İntegral ve İntegro-Diferansiyel Denklemlerin Morgan-Voyce Polinom Çözümleri*, Yüksek Lisans Tezi, Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi, Muğla, 123s.
- Jaaffar, N.T., Abdul Majid, Z. ve Senu, N. (2020) Numerical approach for solving delay differential equations with boundary conditions, *Mathematics.*, 8:1073.
- Jafari, H., Tuan, N.A. ve Ganji, R.M. (2021) A new numerical scheme for solving pantograph type nonlinear fractional integro-differential equations, *J King Saud Univer-Sci.*, 33(1):101185.
- Kendall, D.G. (1956) Deterministic and Stochastic Epidemics in Closed Populations, *Contributions to Biology and Problems of Health*, 4:149–165.
- Kermack, W.O. ve McKendrick, A.G. (1927) A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics, *Proceedings of the Royal Society of London, Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character.*, 115 (772): 700–721.
- Khaled, M.H., Deniz, S. ve Dumitru, B. (2019) On a new modified fractional analysis of Nagumo equation, *Int J Biomath.*, 12(3):1950034.
- Kousar, N., Mahmood, R., ve Ghalib, M.A. (2012) Numerical Study of SIR Epidemic Model, *Int. J. Sci. Basic Appl. Res.*, 25: 354–363.
- Kröger, M. ve Schlickeiser, R. (2020) Analytical solution of the SIR-model for the temporal evolution of epidemics, Part A: Time-independent reproduction factor, *Journal of Physics A*. 53 (50): 505601.
- Krylova, O. ve Earn, D.J. (July 2013) Effects of the infectious period distribution on predicted transitions in childhood disease Dynamics, *Journal of the Royal Society, Interface*, 10 (84): 20130098.
- Manuel, D.S., Deniz, S. ve Sözen, H. (2021) A new efficient technique for solving modified Chua's circuit model with a new fractional operator, *Adv Differ Equ.*, 21:1-16.

- Mastorakis, N.E. (2005) Numerical solution of non-linear ordinary differential equations via collocation method (finite elements) and genetic algorithms, *WSEAS Trans. Inf. Sci. Appl.*, 2: 467–473.
- May, R.M. ve Anderson, B. (1992-09-24) *Infectious Diseases of Humans: Dynamics and Control*, (Revised ed.), Oxford University Press, Oxford, ISBN 978-0-19-854040-3.
- Miller, J.C. (September 2012) A note on the derivation of epidemic final sizes, *Bulletin of Mathematical Biology*, 74 (9): 2125–2141.
- Miller, J.C. (February 2017) Mathematical models of SIR disease spread with combined non-sexual and sexual transmission routes, *Infectious Disease Modelling*, 2 (1): 35–55.
- Noori, S.R.M. ve Taghizadeh, N. (2020) Modified differential transform method for solving linear and nonlinear pantograph type of differential and Volterra integro-differential equations with proportional delays, *Adv Differ Equ.*, 2020(1):1-25.
- Özel, M., Tarakçı, M. ve Sezer, M., (2018) A numerical approach for a nonhomogeneous differential equation with variable delays, *Mathematical Sciences*, 12(2):145-155.
- Özel, M., Kürkçü, Ö. K. ve Sezer, M., (2019) A morgan-voyce matrix method for generalized functional integro-differential equations of volterra-type, *Journal of Science and Arts*, 2: 295-310.
- Özel, M., Tarakçı, M. ve Sezer, M. (2021) Morgan-Voyce polynomial approach for ordinary linear delay integro-differential equations with variable delays and variable bounds, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 50(5): 1434-1447.
- Padua, R.N. ve Tulang, A.B. (2 December 2010) A Density–Dependent Epidemiological Model for the Spread of Infectious Diseases, *Liceo Journal of Higher Education Research*, 6 (2).
- Rachah, A. ve Torres, D.F.M. (2015) Mathematical Modelling, simulation, and optimal control of the 2014 ebola outbreak in West Africa, *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2015(842792): 9 pages.

- Rafei, M., Ganji, D.D., ve Daniali, H. (2007) Solution of the epidemic model by homotopy perturbation method, *Appl. Math. Comput.*, 187(2): 1056–1062.
- Rani, D. ve Mishra V. (2020) Numerical inverse Laplace transform based on Bernoulli polynomials operational matrix for solving nonlinear differential equations, *Results Phys.*, 16:102836.
- Schlickeiser, R. ve Kröger, M. (2021) Analytical solution of the SIR-model for the temporal evolution of epidemics. Part B: Semi-time case, *Journal of Physics A*. 54 (17): 175601.
- Secer, A., Ozdemir, N., ve Bayram, M. (2018) A Hermite Polynomial Approach for Solving the SIR Model of Epidemics, *Mathematics*, 6: 305.
- Sezer, M., Yalcinbas, S. ve Sahin, N. (2008) Approximate solution of multi-pantograph equation with variable coefficients, *J Comput Appl Math.*, 214:406-416.
- Shawagfeh, N., ve Kaya, D. (2004) Comparing numerical methods for the solutions of systems of ordinary differential equations, *Appl. Math. Lett.*, 17(3): 323–328.
- Shirzad, K. Ve Viney, C. (2023) A critical review on applications of the Avrami equation beyond materials science, *Journal of the Royal Society Interface*, 20 (203).
- Simon, C. (2020) The SIR dynamic model of infectious disease transmission and its analogy with chemical kinetics, *Peer J Physical Chemistry*, (2): e14.
- Smith, D.K., Lauro, K., Kelly, D., Fish, J., Lintelman, E., McEwen, D., Smith, C., Stecz, M., Ambagaspitiya, T.D. ve Chen, J. (2022) Teaching Undergraduate Physical Chemistry Lab with Kinetic Analysis of COVID-19 in the United States, *Journal of Chemical Education*, 99 (10): 3471–3477.
- Srivastava, H.M., Deniz, S. ve Saad, K.M. (2021) An efficient semi-analytical method for solving the generalized regularized long wave equations with a new fractional derivative operator, *J King Saud Univer - Sci.*, 33(2):101345.
- Swamy, M.N.S. (1968) Further, Properties of Morgan-Voyce Polynomials., *Fibonacci Quarterly*, 6, (2): 167-176.

- Tarakçı, M., Özel, M. ve Sezer, M. (2020) Solution of nonlinear ordinary differential equations with quadratic and cubic terms by Morgan-Voyce matrix-collocation method, *Turkish Journal of Mathematics*, 44(3): 906-918.
- Tohidi, E., Bhrawy, A.H. ve Erfani, K.H. (2013) A collocation method based on Bernoulli operational matrix for numerical solution of generalized pantograph equation, *Appl Math Model.*, 37(6):4283-4294
- Türkyılmaz, B., Gürbüz, B., ve Sezer, M. (2016) Morgan-Voyce Polynomial Approach for Solution of High-Order Linear Differential-Difference Equations with Residual Error Estimation, *Düzce Üniversitesi Bilim Ve Teknoloji Dergisi*, 4(1): 252-263.
- Yang, W., Zhang, D., Peng, L., Zhuge, C. ve Hong, L. (2021) Rational evaluation of various epidemic models based on the COVID-19 data of China, *Epidemics*, doi: 10.1016/j.epidem.2021.100501.
- Yilmaz, B. ve Yaman, V. (2020) Numerical solutions of nonlinear boundary value pantograph type delay differential equations, *Int J Adv Eng Pure Sci.*, 32(3):333-339.
- Yon, M. J. (2010) *Modelisation de la propagation d'un virus*, INSA Rouen.
- Youssri, Y.H. (2022) Two Fibonacci operational matrix pseudo-spectral schemes for nonlinear fractional Klein–Gordon equation, *Int J Modern Phys C.*, 33(4):2250049-20.
- Youssri, Y.H. ve Abd-Elhameed W.M. (2016) Spectral solutions for multiterm fractional initial value problems using a new Fibonacci operational matrix of fractional integration, *Progr Fract Differ Appl*, 2(2):141-151.
- Youssri, Y.H., Abd-Elhameed, W.M., Mohamed, A.S., v.d. (2021) Generalized Lucas polynomial sequence treatment of fractional pantograph differential equation, *Int J Appl Comput Math.*, 7:27.
- Yuttanan, B., Razzaghi, M. ve Vo, T.N. (2021) A fractional-order generalized Taylor wavelet method for nonlinear fractional delay and nonlinear fractional pantograph differential equations, *Math Methods Appl Sci.*, 44(5):4156-4175.
- Yüzbaşı, S. (2016) An exponential collocation method for the solutions of the HIV infection model of CD 4+T cells, *Int. J. Biomath.*, 9: 885–893.

- Yüzbaşı, S. ve Karaçayır, M. (2017) An exponential Galerkin method for solutions of HIV infection model of CD4+T-cells, *Comput. Biol. Chem.*, 67: 205–212.
- Wang, S., Schreckenberg, M. ve Guhr, T. (2023) Response functions as a new concept to study local dynamics in traffic networks, *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 626(C).
- Wazwaz, A.M., Raja, M.A.Z. ve Syam, I.M. (2017) Reliable treatment for solving boundary value problems of pantograph delay differential equation, *Roman Rep Phys.*, 69:102.



ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Ad Soyad : G***** Ş*****
Uyruk : T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi: Muğla, **/**/19**
Medeni Hali : Bekar
Telefon : 050* **** *****
E-posta : g*****@hotmail.com

Eğitim

Alınan Derece	Aldığı Kurum/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Lise	Yatağan Anadolu Lisesi	2008
Lisans	Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi	2012
Yüksek Lisans	Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi	2024

İş Tecrübesi

Yıl	Yer	Pozisyon/görev
2014-2021	Tokat	Öğretmen
2021-	Denizli	Öğretmen

Yabancı Dil(ler)

Dil (İngilizce, vs)	Başlangıç	Orta	İleri
Yazma		X	
Konuşma		X	
Anlama		X	
Okuma		X	

Yayınlar

- İhan, Özgül and Şahin, Gözde. "A numerical approach for an epidemic SIR model via Morgan-Voyce series" International Journal of Mathematics and Computer in Engineering, vol.2(1) (2024) 123-138.-. <https://doi.org/10.2478/ijmce-2024-0010>