

T.C.
DENİZ HARP OKULU
DENİZ BİLİMLERİ VE MÜHENDİSLİĞİ ENSTİTÜSÜ
ELEKTRONİK SİSTEMLERİ MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

**ELEKTROMANYETİK DALGALARIN PLAZMA
ORTAMINDA ZAMANLA EVRİMİ İÇİN ANALİTİK
ÇÖZÜM**

Yüksek Lisans Tezi

Ünal BİÇER

Tez Danışmanı: Yrd.Doç.Dr. Fatih Erden

İstanbul, 2016

© Çalışmanın Tüm Hakları Deniz Bilimleri ve Mühendisliği Enstitüsü'ne aittir, 2016

T.C.
DENİZ HARP OKULU
DENİZ BİLİMLERİ VE MÜHENDİSLİĞİ ENSTİTÜSÜ
ELEKTRONİK SİSTEMLERİ MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

**ELEKTROMANYETİK DALGALARIN PLAZMA
ORTAMINDA ZAMANLA EVRİMİ İÇİN ANALİTİK
ÇÖZÜM**

Yüksek Lisans Tezi

Ünal BİÇER

Tez Danışmanı: Yrd.Doç.Dr. Fatih Erden

İstanbul, 2016

ELEKTROMANYETİK DALGALARIN PLAZMA ORTAMINDA ZAMANLA
EVİRİMİ İÇİN ANALİTİK ÇÖZÜM

Ünal BİÇER

ELEKTRONİK SİSTEMLERİ MÜHENDİSLİĞİ YÜKSEK LİSANS PROGRAMI

Yazar

:



Ünal Biçer

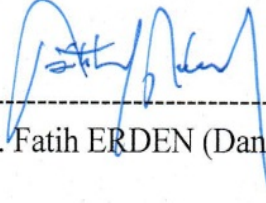
Sınav Tarihi

:

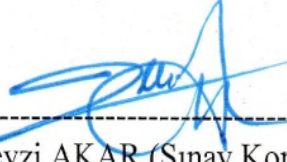
28 Nisan 2016

Onaylayanlar

:



Yrd.Doç.Dr. Fatih ERDEN (Danışman)



Doç.Dr. Feyzi AKAR (Sınav Komitesi Üyesi)



Yrd.Doç.Dr. Erkul BAŞARAN (Sınav Komitesi Üyesi)

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim süresince değerli katkılarıyla bana yol gösteren ve her konuda destek olan tez danışmanım Yrd.Doç.Dr.Fatih ERDEN'e, bütün eğitim hayatım boyunca her daim yanımda olan, maddi ve manevi yardımlarını hiç bir zaman eksik etmeyen çok değerli aileme, desteği olmadan bu çalışmayı sonlandıramayacağım sevgili eşim Hatice BİÇER'e ve eğitim sürecinde dünyaya gelerek hayatımıza renk olan biricik kızım Behice Betül BİÇER'e en içten duygularıyla teşekkürlerimi sunarım.

ÖZET

ELEKTROMANYETİK DALGALARIN PLAZMA ORTAMINDA ZAMANLA EVRİMİ İÇİN ANALİTİK ÇÖZÜM

Ünal BİÇER

Elektronik Sistemleri Mühendisliği Yüksek Lisans Tezi, 2016

Danışman: Yrd.Doç.Dr. Fatih ERDEN

Anahtar Kelimeler: Maxwell Denklemleri, Kavite, İşaret, Darbe, Zaman Domeni, Plazma, Elektromanyetik Teoriye Evrimsel Yaklaşım.

Son zamanlardaki birçok araştırma, yaygın olarak kullanılan elektromanyetik çözüm metodlarıyla çözülmesi güç olan ortamlarda (durağan olmayan, dispersif, homojen olmayan, lineer olmayan, plazma vb.) elektromanyetik alanlara ilişkin çözümler bulunması üzerine yoğunlaşmıştır. Elektromanyetik Teoriye Evrimsel Yaklaşım (ETeY), bahse konu problemlere alternatif bir yaklaşım olarak, problemin uzaysal ve zamana bağlı kısımlarını ayırarak zaman domeninde analitik bir çözüm sunmaktadır.

Bu tezde, ilk olarak, Elektromanyetik Teoriye Evrimsel Yaklaşım metodunun kısa bir özeti sunulmuştur. Daha sonra, bir kavite içerisinde zamana bağlı bir işaret (örneğin bir sinusoidal) tarafından uyarılan elektromanyetik salınımlar ETeY çerçevesinde zaman domeninde incelenmiştir. Son olarak, plazma ile doldurulmuş ve mükemmel iletken yüzeylerle kaplanmış dikdörtgen bir kavitede, sinusoidal işaret veya darbe işareti ile uyarılan alanların analizi için zaman domeninde yeni bir yaklaşım sunulmuştur. Plazma ortamı için Ohm kanununun dinamik versiyonu, plazma akımı vektörü ile elektrik alan vektörü arasındaki bünye denklemi olarak Maxwell denklemler sistemine ilave edilmiştir.

ABSTRACT

ANALYTICAL SOLUTION FOR EVOLUTION OF THE ELECTROMAGNETIC FIELDS IN PLASMA MEDIA

Ünal BİÇER

Master Thesis for Electronics Systems Engineering, 2016

Advisor: Asst.Prof.Dr. Fatih ERDEN

Key Words: Maxwell's Equations, Cavity, Signal, Surge, Pulse, Time-Domain, Plasma, Evolutionary Approach to Electromagnetic Theory.

Recently, many investigations has been devoted to the questions concerned with different types of media (nonstationary, dispersive, inhomogenous, nonlinear, plasmaetc.) that cannot be easily solved within the frame of commonly used methods. Evolutionary Approach to Electromagnetics (EAE) is an alternative method that allows us to consider such problems in the way of separating the spatial and the temporary parts of the electromagnetic field quantities.

In this thesis, firstly, an outline of the evolutionary approach to electromagnetics is presented in a compact form. Then, electromagnetic oscillations in a cavity excited by a casual time-dependent signal (e.g. a sinusoid) are studied in the time domain within the frame of the EAE. Finally, an novel time-domain approach for the analysis of waveforms which can be excited by a sinusoidal signal or pulse signal in a rectangular cavity filled with a plasma and bounded by perfect electric conductor surfaces is presented. As the constitutive relation between the electric field and the plasma current, dynamic version of the Ohm's law for plasma was involved in Maxwell's equations.

SORUMLULUK NOTU

“Bu çalışmada yazarın ortaya koymuş olduğu ifadeler kendi şahsi fikirleri olup T.C. Deniz Kuvvetleri Komutanlığı ve Deniz Harp Okulu Komutanlığı ile Deniz Bilimleri ve Mühendisliği Enstitüsü’nün resmi görüşlerini temsil etmemektedir. Bu çalışmadaki tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik değerlere uygun olarak yazıldığını, yararlandığım eserlerin tamamının kaynakçada gösterildiğini ve çalışmada kullanıldıkları her yerde bunlara atıf yapıldığını beyan ederim.”

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR.....	i
ÖZET.....	ii
ABSTRACT.....	iii
SORUMLULUK NOTU.....	iv
İÇİNDEKİLER	v
ŞEKİLLER LİSTESİ	vii
1. GİRİŞ	1
2. ELEKTROMANYETİK TEORİYE EVRİMSEL YAKLAŞIM.....	5
2.1. Elektromanyetikte İki Alternatif Yaklaşım.....	5
2.2. Literatür Özeti	8
2.3. Metodun Formülasyonu	13
2.3.1. Metodun Genel Şeması	15
2.3.2. Kendine-Eşlenik Operatör.....	16
2.3.3. Alanlar İçin Modal Açılımlar.....	21
2.3.4. Modal Evrim Denklemleri	21
2.3.5. Zaman Domeninde Analitik Çözüm	22
2.3.5.1 İrrotasyonel Modlara İlişkin Çözümler	24
2.3.5.2 Solenoidal Modlara İlişkin Çözümler	25
3. ELEKTROMANYETİKTE PLAZMA ORTAMI.....	29
3.1. Plazma Ortamının Açıklanması	29
3.2. Plazma Kriterleri	30
3.3. Homojen Manyetize Olmayan Nötr Plazma İçin Hareket Denklemi.....	31
4. BOŞ VE PLAZMA İLE DOLDURULMUŞ KAVİTELER İÇİN İKİ UYGULAMA	35
4.1. Boş Kavite İçerisinde Bir İşaret Tarafından Uyarılan Alanların Evrimi	35
4.1.1. Elektromanyetik Teoriye Evrimsel Yaklaşım Prosedürü.....	36
4.1.1.1 Maxwell Denklemleri'nden Kendine-Eşlenik Bir Operatör Türetilmesi	36
4.1.1.2 Solenoidal ve İrrotasyonel Kavite Modlarının Tam Kümesi	39
4.1.1.3 Zamana Bağlı Elektromanyetik Büyüklüklerin Modal Açılımları	41
4.1.1.4 Modal Genlikler İçin Evrimsel Denklemler: Cauchy Problemi	43

4.1.1.5 İrrotasyonel Modlara İlişkin Zamana Bağlı Çözümler	44
4.1.1.6 Solenoidal Modlara İlişkin Zamana Bağlı Çözümler	45
4.1.2. Grafiksel Sonuçlar.....	46
4.2. Plazma İle Doldurulmuş Kavitede Bir İşaret Tarafından Uyarılan Alanların Zamanla Evrimi.....	47
4.2.1. Problemin Formülasyonu	48
4.2.1.1 Kavite ve Ortamın Açıklanması	48
4.2.1.2 Zaman-Domeni Probleminin Açıklanması	49
4.2.1.3 Kavite İçerisine Uygulanan Kaynak Fonksiyonu	50
4.2.2. Elektromanyetik Teoriye Evrimsel Yaklaşım İçin Şema.....	53
4.2.2.1 Çözümler Uzayı.....	53
4.2.2.2 Kendine-Eşlenik Operatör	53
4.2.2.3 Modal Baz.....	54
4.2.2.4 Modal Alan Açılımları	55
4.2.2.5 Modal Evrim Denklemleri.....	55
4.2.2.6 İrrotasyonel Modlara İlişkin Zamana Bağlı Çözümler	57
4.2.2.7 Solenoidal Modlara İlişkin Zamana Bağlı Çözümler	58
4.2.3. Grafiksel Sonuçlar.....	58
5. SONUÇ VE DEĞERLENDİRMELER	63

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 2.1 Darbe Fonksiyonu $f(\xi)$, Alanın İrrotasyonel Modunun Genliği $a(\xi)$ ve Debye Ortam ile Doldurulmuş Kavite için Polarizasyon Vektörünün İrrotasyonel Modunun Genliği $p(\xi)$	10
Şekil 2.2 Darbe Fonksiyonu $f(\xi)$, Alanın İrrotasyonel Modunun Genliği $a(\xi)$ ve Lorentz Ortam ile Doldurulmuş Kavite için Polarizasyon Vektörünün İrrotasyonel Modunun Genliği $p(\xi)$	10
Şekil 2.3 Dispersif Polar Dielektrik Malzeme ile Dolu Kavite için Gerçek Zaman t 'nin Fonksiyonu Olarak Normalize Edilmiş Genlik e_n''	11
Şekil 2.4 Dispersif Polar Dielektrik Malzeme ile Dolu Kavite için Gerçek Zaman t 'nin Fonksiyonu Olarak Normalize Edilmiş Genlik h_n''	11
Şekil 4.1 Rastgele Frekanslı Sinüsoidal Kaynak Fonksiyonu.	36
Şekil 4.2 Sinüsoidal İşaret ve Uyarılan Solenoidal Alanlara $[e(\xi)$ ve $h(\xi)]$ Ait Modal Genlikler.	46
Şekil 4.3 Sinüsoidal İşaret ve Uyarılan İrrotasyonel Modal Alana Ait Genlikler $[a(\xi)]$	47
Şekil 4.4 ρ 'nun Farklı Değerleri için Çift-üstel Fonksiyon ile Modellenen Darbe İşareti.	52
Şekil 4.5 Plazma için Sinüsoidal Kaynağa İlişkin Solenoidal Modlar.	59
Şekil 4.6 Plazma için Sinüsoidal Kaynağa İlişkin İrrotasyonel Modlar.	60
Şekil 4.7 Plazma için Çift-Üstel Kaynağa İlişkin Solenoidal Modlar ($\rho = 1.4$).	60
Şekil 4.8 Plazma için Çift-Üstel Kaynağa İlişkin İrrotasyonel Modlar ($\rho = 1.4$).	61
Şekil 4.9 Plazma için Çift-Üstel Kaynağa İlişkin Solenoidal Modlar ($\rho = 100$).	62
Şekil 4.10 Plazma için Çift-Üstel Kaynağa İlişkin İrrotasyonel Modlar ($\rho = 100$). ..	62

SEMBOLLER ve KISALTMALAR LİSTESİ

<u>Kısaltmalar</u>	<u>Acıklama</u>
ZD	Zaman Domeni
FD	Frekans Domeni
KGM	Kompleks Genlikler Metodu
ETeY	Elektromanyetik Teoriye Evrimsel Yaklaşım
CSO	Curl-Sınır Operatörü
TE	Transverse Electric
TM	Transverse Magnetic
TEM	Transverse Electromagnetic

Semboller	Acıklama
$\mathbf{r}$	Konum Vektörü (m)
t	Zaman (s)
E	Elektrik Alan Vektörü (V/m)
H	Magnetik Alan Vektörü (A/m)
X	E ve H Vektörlerinden Oluşan $\begin{pmatrix} E(\mathbf{r},t) \\ H(\mathbf{r},t) \end{pmatrix}$ Vektörü
$\mathbf{X}(\mathbf{r})$	$\begin{pmatrix} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}) \end{pmatrix}$ Şeklinde Oluşan Altı-Bileşenli Vektör
J_{ext}	Uygulanan Elektrik Akım Yoğunluğu Vektörü (A/m^2)
D	Elektrik Akı Yoğunluğu Vektörü (C/m^2)
B	Magnetik Akı Yoğunluğu Vektörü (Wb/m^2)
P	Elektrik Polarizasyon Vektörü (C/m^2)
J	Plazma Akım Vektörü
σ	Kayıplı Yapının Elektrik İletkenliği
$\mathcal{H}(t)$	Heaviside Basamak Fonksiyonu
$F(\mathbf{r},t)$	Alanları Uyaran Dalga Formu Vektörü
∂_t	Zamana Göre Kısmi Türev Operatörü
$\mathbf{E}(\mathbf{r})$	Bazın “Elektrik” Elemanı Olarak Üç-Bileşenli Vektör
$\mathbf{H}(\mathbf{r})$	Bazın “Magnetik” Elemanı Olarak Üç-Bileşenli Vektör
$\mathbf{E}_n', \mathbf{H}_n'$	$\mathbf{E}$ ve $\mathbf{H}$ ’ın TE kavite Modlarının Tamamlanmış Seti
$\mathbf{E}_n'', \mathbf{H}_n''$	$\mathbf{E}$ ve $\mathbf{H}$ ’ın TM Kavite Modlarının Tamamlanmış Seti
$\mathfrak{R}', \mathfrak{R}$	Maxwell Denklemlerinden Ayırıştırılan Operatörler
ϵ_0	Serbest Uzayın Dielektrik Sabiti (F/m)
ϵ	Ortamın Elektriksel Geçirgenliği
ϵ_r	Elektriksel Bağlı Geçirgenlik
μ_0	Serbest Uzayın Magnetik Geçirgenlik Sabiti (H/m)
μ	Ortamın Manyetik Geçirgenliği

Semboller :	Açıklama :
μ_r	Manyetik Bağlı Geçirgenlik
ρ	Yük Yoğunluğu
η	Ortamın Empedansı
χ_s	Statik Elektrik Duyarlılık
c	Işığın Boşluktaki Hızı (m/s) ($c = 1 / \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$)
∂_n	Normal Türev
κ_n	Dirichlet Probleminin Özdeğerleri
ϕ_n	Dirichlet Probleminin Özçözümleri
ν_n	Neumann Probleminin Özdeğerleri
ψ_n	Neumann Probleminin Özçözümleri
e_n', e_n'', a_n	$E(\mathbf{r}, t)$ 'nin Zaman-Bağımlı Modal Genlikleri
h_n', h_n'', b_n	$H(\mathbf{r}, t)$ 'nin Zaman-Bağımlı Modal Genlikleri
p_n', p_n'', c_n	$P(\mathbf{r}, t)$ 'nin Zaman-Bağımlı Modal Genlikleri
i_n', i_n'', i_α	$J(\mathbf{r}, t)$ Plazma Akımı için Zaman-Bağımlı Modal Genlikler
δ	Dirac Delta Fonksiyonu
$s(t)$	Kaynak Fonksiyonunun Zaman-Bağımlı Kısım
γ	Kayıp Parametresi ($\gamma = \sigma / (2\epsilon_0)$)
v	Faz Hızı
M	Maxwell Operatörü
ω_n	$\Re$ Operatörünün Özdeğerleri
C_n	Zamana Bağlı Bilinmeyen Spektral Katsayılar
Q_{nm}	$\Re$ Operatörünün Tüm Özdeğerlerini Kapsayan Bir Matris
S	Mükemmel İletken Kavite Yüzeyi
V	Kavite Hacmi
A	M Operatörünün Lineer Olmayan Kısım
j_{ne}, j_{nh}, i_{ne} ve i_{nh}	Kuvvet Terimleri

Semboller	Acıklama
λ_D	Debye Uzunluğu
k_B	Boltzman Sabiti
T_e	Elektron Sıcaklığı
N_e	Elektron Yoğunluğu
N_i	İyon Yoğunluğu
ω_p	Plazma Salınım Frekansı
q_e	Elektronun İşaretsiz Yüğü
$\wp(\mathbf{r}, t)$	Ortamın Momenti
$\mathcal{G}_E$ ve $\mathcal{G}_H$	Hilbert Uzayında İki Alt Uzay
$\mathcal{M}(\mathbf{X}_n(\mathbf{r}))$	Maxwell Denklemleri Manifoldu
e' ve h'	Hilbert Uzayında İki Alt Uzayı

1. GİRİŞ

Elektromanyetik teörinin temelinin evrensel geçerli Maxwell denklemler sistemi olarak kabul edilmesinden itibaren, çözüm teknikleri Zaman Domeni (ZD) çalışmalarından çok Frekans Domeni (FD) metodları üzerine gelişmiştir. Bir kavite problemi ele alındığında ise; kararlı durumda, tek bir frekansta tüm elektromanyetik büyüklüklerde zamanla değişimin tahmini ve tanım olarak bu tür alanların hangi şartlar altında bulunabileceği hususu temel problemi teşkil etmiştir. Bu temel problemin çözümüne ulaşmak için yapılan çalışmalar, kabul edilebilir frekanslar ve bu frekanslarda koordinatların fonksiyonu olan kompleks genlikler elde etmeye yönelik olmuştur. Bu yaklaşıma klasik elektromanyetikte Kompleks Genlikler Metodu (KGM) denilmektedir.

KGM ile analiz için fiziksel ve kimyasal olarak kararlı ve lineer olmak kaydıyla zamanla değişmeyen ortamlar gibi geniş bir ortam sınıfı bulunmaktadır. KGM ile yapılan çözümler elektromanyetik olayların daha sonradan ters Fourier transformasyonu kullanılarak açıklanabileceği inancına dayanır. Problemin yavaş değişen bir yaklaşıma veya herhangi bir asimptotik modele indirgenmesi durumunda bu inanış bir değer kazanır. Ancak, KGM Fourier analizi ile kombine edildiğinde özellikle ultra-kısa işaret çalışmalarında hem matematiksel kökeni hem de fiziksel doğası gereği temel zorluklarla karşılaşır [1]. Lineer olmayan ortamlarda ise klasik KGM elektromanyetik alan çözümlerinde tamamen başarısız olur [2]. Lineer olmayan ortamların fiziksel analizinde ise, zaman domeninde sonlu farklar metodu (Finite-Difference Time-Domain (FDTD)) ilk kez 1966 yılında Kane S. Yee tarafından ortaya atıldığından beri, sayısal bilgilerin elde edilmesi için kullanılan güçlü bir metot olarak kullanılmaktadır. Diferansiyel formdaki Maxwell denklemlerinin doğrudan, zamanda ve konumda, merkezi farklar yöntemine göre ayrıklaştırılarak adım adım çözülmesi metodun temelini teşkil etmektedir. Metot biyolojik materyallerden atmosfere, denizaltılardan uçaklara kadar, çok farklı tip ve

özelliklere sahip cisim ve ortamların elektromanyetik saçılım ve yayılımlarının incelenmesinde ve çözümlenmesinde yaygın olarak kullanılan numerik bir metottur. Analitik türev operatörünün sayısallaştırılmasına dayanan ve sonlu farklar olarak adlandırılan FDTD [3], özellikle günümüz bilgisayar teknolojilerindeki gelişmelerle bağlantılı olarak daha da yaygın olarak kullanılmaktadır. Ancak nümerik olan bu metodun gelişimi de bilgisayar teknolojilerine bağımlı olarak ilerlemektedir. Bu durum da, analitik metotlara olan ihtiyacı her zaman için devam ettirmektedir.

KGM metodunun yeterliliği ile ilgili ilk şüpheler 1940'lı yıllarda ortaya çıkmıştır. Bu arada, zaman domeninde kavite probleminin direkt analizi için alternatif bir fikir J.C.Slater [4] ve G.V.Kisunko [5] tarafından bağımsız olarak ortaya konmuştur. Slater ve Kisunko yaptıkları çalışmalarda ortonormal modal fonksiyonlarının tam bir setinin var olduğunu varsayarak tamamlanmış olduğunu bilmedikleri içi boş bir kavitenin doğal modları gibi bir set seçmişlerdir. Bununla birlikte, kavitede istenen alan ifadelerini bilinmeyen zamana bağlı açılım katsayıları ile bu modal fonksiyonlar serisi şeklinde çözmüşlerdir. Bu bilinmeyenler için kendi düzeni içinde doğal olarak bir adi diferansiyel denklem sistemi bulunmaktadır. Bu fikir J.Van Bladel tarafından kaynaksız, boş ve geometrik olarak düzgün silindirik rastgele kesitli dalga kılavuzu teorisi üzerine genişletilmiştir [6]. Bladel bir gelişim olarak enine koordinatlar ile katsayıları, hem zamana (t) hem de boylamsal koordinat z 'ye bağlı ortonormal fonksiyonlarının önceden tanımlanmış, tamamlanmış ortonormal fonksiyon seti açısından, dalga kılavuzu alanlarını sunmuştur. Sabit katsayılı homojen kısmi diferansiyel denklemleri, daha sonra t ve z 'nin bu fonksiyonları için elde edilmiştir. Daha sonra yapılan çalışmalarda ise dört boyutlu simetrik tensör sınıfı üzerine yeni bir teorem Maxwell denklemlerinin görelî kovaryant formuna uygulanmıştır [7]. Bu teorem Transverse Electric (TE), Transverse Magnetic (TM) ve Transverse Electromagnetic (TEM) modlarını kombine ederek kılavuzlanmış dalga sınıflandırmasını birleştirir. Alan genlikleri için elde edilen zaman domeni denklemleri kolayca üç modun her biri için modifiye telgrafçı denklemlerine indirgenir [8].

Bu fikrin bir sonucu olarak, Elektromanyetik Teoriye Evrimsel Yaklaşım (ETeY) metodu 1980'li yıllarda O.A.Tretyakov tarafından ortaya konmuş ve Rus dergilerinde yayınlanmıştır [9]. Daha sonraları metodun İngilizce versiyonu yayınlanmış ve sunulmuştur [10]. Bu metotta tamamlanmış Maxwell operatörünün lineer bir parçası olarak kabul edilen, kendine özdeş bir operatör, en baştan işleme konmuştur. Bu kendine özdeş operatörün domeninde ihtiyaç duyulan baz seti daha sonra kendi özvektör kümesi olarak belirlenmiştir. Bunun asıl avantajı kendine eşlenik operatörün matris gösteriminde kendi özvektör kümesinden oluşan bazın köşegen halinde olmasıdır. Bu özellik hesaplamalarda büyük kolaylık sağlamaktadır. Kendine özdeş kısım tamamlanmış Maxwell operatöründen çeşitli yollarla ayrılabilirdiğinden her fiziksel durum ile ilgili baz seçimi için çeşitli olanaklar sunmaktadır.

ETeY metodunda elektromanyetik büyüklüklerin, zaman-harmonik alan teorisindeki gibi $\exp(\pm i\omega t)$ şeklinde zamanla değişime uğradığı düşünülmemiştir. Bu durum dikkate alınmaksızın da kaviteelerde elektromanyetik alanlar için; koordinatlara ve zamana bağlı modal ayrışımın türetilmesi ve ispatlanması mümkündür. Yapılan ayrışımardaki modal genlikler zamana bağılıdır. Maxwell denklemleri üzerine uygun şekilde yapılan izdüşümler sonucu elde edilen ve zamana bağlı kısmi türevler içeren diferansiyel denklem sisteminin çözümleri olarak, modal genlikler elde edilmektedir. Böylelikle uygun başlangıç koşulları ile tamamlanan bir zaman türevli adi diferansiyel denklemler seti elde edilir. Zaman türevli bütün diferansiyel denklemler matematikçiler tarafından evrim denklemleri olarak adlandırılır. Başlangıçtan gözlem zamanına kadar sürecin zamanla nasıl değiştiğini görmek için bu tür denklemlerin uygun başlangıç koşulları altında herhangi bir çözümünü elde etmek yeterlidir. Bu metoda evrimsel yaklaşım (evolutionary approach) adının verilmesi içerdiği bu evrim denklemlerinden kaynaklanmaktadır.

Bu tez şu şekilde düzenlenmiştir:

İkinci bölümde ETeY metodunun kısa bir özeti verilmiş, metoda ilişkin literatürde yapılan kavite çalışmaları kısaca incelenmiş ve metodun formülasyonu

genel bir halde türetilmiştir. Üçüncü bölümde elektromanyetikte plazma ortamına ilişkin genel bilgiler sunulmuş, plazma türleri ve plazma kriterleri incelenmiş, homojen nötr manyetize olmayan plazma ortamı için hareket denklemi türetilmiştir. Dördüncü bölümün ilk kısmında, boş bir kavite içerisinde zamana bağlı bir işaret (örneğin bir sinusoidal) tarafından uyarılan elektromanyetik salınımlar ETEY çerçevesinde zaman domeninde incelenmiş; ikinci kısımda ise elektron gaz yoğunluğu ile karakterize edilen plazma ortamı için, plazma akımı ile elektrik alan şiddeti bağıntısını veren hareket denklemi kullanılarak sinüsoidal veya çift üstel işaretler ile uyarılan alanların zamanla değişimi sergilenmiş, Matlab ve Maple programları kullanılarak evrim denklemlerinin çözümü olarak elde edilen grafiksel sonuçlar gösterilmiştir. Beşinci bölümde ise elde edilen sonuçlar değerlendirilmiştir.

2. ELEKTROMANYETİK TEORİYE EVRİMSEL YAKLAŞIM

2.1. Elektromanyetikte İki Alternatif Yaklaşım

Kavite içerisinde zaman domeninde elektromanyetik analizlerin analitik olarak yapılabilmesini sağlayabilmek üzere ortaya konan ETEY metodunun temellerini anlayabilmek maksadıyla; Maxwell denklemler sistemi

$$\begin{aligned}\nabla \times H(\mathbf{r}, t) &= \varepsilon_0 \partial_t E(\mathbf{r}, t) + \partial_t P(\mathbf{r}, t) + J(E(\mathbf{r}, t)) + J_{ext}(\mathbf{r}, t) \\ \nabla \times E(\mathbf{r}, t) &= -\mu_0 \partial_t H(\mathbf{r}, t)\end{aligned}\quad (2.1)$$

kısaltılmış ve birleştirilmiş bir formda

$$MX(\mathbf{r}, t) = f(\mathbf{r}, t) \quad (2.2)$$

şeklinde yazılsın. Burada $\mathbf{r}$; V kavite hacmi içerisinde bir gözlem noktasının konum vektörünü, M Maxwell operatörünü, $X(\mathbf{r}, t)$ zaman domeninde $E(\mathbf{r}, t)$ ve manyetik alan $H(\mathbf{r}, t)$ ifadelerinden oluşan sütun vektörü formundaki çözümü ve $f(\mathbf{r}, t)$ dışarıdan uygulanan kaynak fonksiyonlarını belirtsin. Lineer olmayan denklemlere ulaşmak için prensip olarak bünye bağıntılarının genel ifadeleri dikkate alınmaktadır. İki temel yaklaşımın karşılaştırılabilmesi için Maxwell denklemlerinin lineer olmayan bir formda yazılmasına ihtiyaç duyulmaktadır. Bu durumda Maxwell operatörü

$$M = i\partial_t - \mathfrak{R} + A \quad (2.3)$$

şeklinde yazılabilir. Burada ∂_t zamana göre kısmi türev operatörü, $\mathfrak{R}$ lineer, simetrik ve kendine-eşlenik operatör ve A Maxwell operatörünün geriye kalan lineer olmayan kısmıdır. Elektrik alan ve manyetik alan ile curl operatörü arasında bir takım lineer ve cebirsel işlemler vasıtasıyla ilişki kuran $\mathfrak{R}$ operatörü, sadece ilgilenilen koordinatlar üzerinde etkili olup curl sınır operatörü (CSO) olarak tanımlanır. A operatörü M operatörünün lineer olmayan parçası olup elektrik alan

$E(\mathbf{r},t)$ ve manyetik alan $H(\mathbf{r},t)$ ile bünve bağıntıları arasındaki tüm işlemleri kapsamaktadır.

Denklem (2.3) incelendiğinde karşımıza tamamlanmış özdeğer kümesine karşılık gelen ∂t ve $\Re$ lineer operatörleri çıkmaktadır. En genel manada bu iki lineer operatöründen hangisinin baz olarak seçileceği elektromanyetik teörinin gelişimi sürecinde iki temel farklı metodun ortaya çıkmasını sağlamıştır.

Ortaya çıkan bu iki temel metottan ilki olarak klasik kompleks genlikler metodunu ele alalım. İncelenecek ikinci metot da ilki ile benzer yapıdadır. Klasik KGM yaklaşımın temelini $i\frac{d}{dt}$ operatörünün bir özfonksiyonlar kümesine yakınsaması oluşturur. Bu durumda

$$i\frac{d}{dt}e^{-i\omega t} = \omega e^{-i\omega t}, -\infty < \omega < +\infty \quad (2.4)$$

eşitliği kullanılarak denklem (2.2)'nin çözümü Fourier dönüşümü yapılmak suretiyle

$$X(\mathbf{r},t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\mathbf{r},\omega)e^{-i\omega t} d\omega \quad (2.5)$$

şeklinde bulunabilir. Burada $X(\mathbf{r},\omega)$ incelenmekte olan elektromanyetik alanın kompleks genliğini ifade etmektedir. Denklem (2.2) üzerine bu dönüşüm uygulandığında bilinmeyen $X(\mathbf{r},\omega)$ çözülebilir. Bu işlem gerçekte Maxwell denklemlerindeki zaman türevli işlemin matematiksel olarak ters bir formu şeklinde ele alınabilir. Ancak bu işlemin yapılması ilk etapta A operatörünün varlığı nedeniyle mümkün değildir. Bunun nedeni A operatörünün M operatörünün lineer olmayan kısmını barındırmasından kaynaklanmaktadır. Bu sebeple klasik kompleks genlikler metodunun uygulanabilmesi için A operatörünün lineerleştirilmesi gerekmektedir. Bundan sonra ise $X(\mathbf{r},\omega)$ çözümüne ulaşmak için lineer bünve bağıntıları tarafından zamanla değişmeyen ortamların fiziksel olarak karşılanmasını sağlayacak sınırlamaların yapılması gerekmektedir. Özellikle geniş bantlı kısa

darbelerle çalışırken denklem (2.5)'in uygulanmasında Fourier dönüşümü bir takım problemler barındırmaktadır.

Bu tezde yapılan çalışmalarda kullanılan ikinci tür yaklaşım olan ETEY yaklaşımı, A operatörünün özelliklerinden tamamen bağımsız olarak işlem yapmaktadır. Bu yaklaşımda öz vektör denklemi, $\mathfrak{R}$ operatörünün M operatöründen kendine-eşlenik özelliği ile ayrılmasından sonra

$$\mathfrak{R}\mathbf{X}_n(\mathbf{r}) = \omega_n \mathbf{X}_n(\mathbf{r}) \quad (2.6)$$

şeklinde sağlanmış olacaktır. Burada ω_n , $\mathfrak{R}$ operatörünün özdeğerlerini, $\mathbf{X}_n(\mathbf{r})$ bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörleri göstermektedir. Kavite hacminin sonlu olması durumunda spektral ω parametresi, $\omega = \omega_n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ şeklinde ayırık değerler alacaktır. $\mathfrak{R}$ operatörünün kendine-eşlenikliği, bu operatörün özvektörlerinin kendi domeninde ortonormal bir kümeye dönüştürülmesi ile ilgilidir. Bu yaklaşımdaki temel hedef denklem (2.2)'nin çözümünün $\mathbf{X}_n(\mathbf{r})$ özvektörleri şeklinde elde edilmesidir. Bu durumda aranan elektromanyetik alan ifadeleri $\mathbf{X}_n(\mathbf{r})$ 'e bağlı olarak özvektör serileri şeklinde

$$\mathbf{X}(\mathbf{r}, t) = \sum_n C_n(t) \mathbf{X}_n(\mathbf{r}) \quad (2.7)$$

elde edilir. Burada $C_n(t)$ zamana bağlı bilinmeyen spektral bir katsayı, n her spektral katsayıyı gösteren bir indistir. Yukarıda anlatılan işlemlerin denklem (2.2)'ye yansıtılması ile $\mathfrak{R}$ operatörü analitik olarak özvektör serileri şeklindeki Maxwell denklemleri formuna

$$\frac{d}{dt}C_n + \sum_m Q_{nm} C_m = \langle f - A\mathbf{X}, \mathbf{X}_n \rangle \quad (2.8)$$

dönüşecektir. Burada $\langle *, * \rangle$ ifadesi çözüm uzayında seçilen bir iç çarpımı tanımlar, Q_{nm} ifadesi ise $\mathfrak{R}$ operatörünün tüm özdeğerlerini kapsayan bir matrisi ifade etmektedir. $\mathfrak{R}$ operatörünün ters dönüşümü işleminde de A operatörüne hiçbir

müdahalede bulunulmamaktadır. Denklem (2.8)'e başlangıçta bilinmeyen elektromanyetik alan tarafından sağlanan başlangıç koşullarının eklenmesi ile matematikte iyi bilinen “Cauchy Problemi”ne ulaşılmış olacaktır. Bu durumda, harici kaynakların etkileri ve elektromanyetik alanın başlangıç koşulları ile beraber, problemin çözümü olarak alan ifadelerinin zamanla değişiminin hesaplanması ve gözlemlenmesi mümkün olacaktır [11].

Dirichlet ve Neumann sınır özdeğer problemleri formundaki laplasyen denklemleri çözülerek özvektörler bulunur.

ETey yönteminin avantajlarından birisi de $\mathfrak{R}$ operatörünün matris gösteriminde kendi özvektör kümesinden oluşan bazın köşegen halinde olmasından dolayı hesaplamalarda oluşan kolaylıktır. Kendine-eşlenik kısım çeşitli yollarla Maxwell operatöründen ayrılabilindiğinden her fiziksel durumun seçimi ile ilgili çeşitli seçenekler sunmaktadır. Burada belirtilmesi gereken en önemli hususlardan birisi de ETEY yönteminin klasik KGM metodundan farklı olarak irrotasyonel ve solenoidal kavite modlarının ikisini de ortaya koyabilmesidir. Klasik KGM metodunda, irrotasyonel modlar sabit değerler olarak kabul edildiğinden incelenmez. Ancak bu tezin Dördüncü bölümünde ve daha önce yapılan bir kısım çalışmalarda irrotasyonel kavite modları için zamanla değişen çözümler elde edilmiştir.

2.2. Literatür Özeti

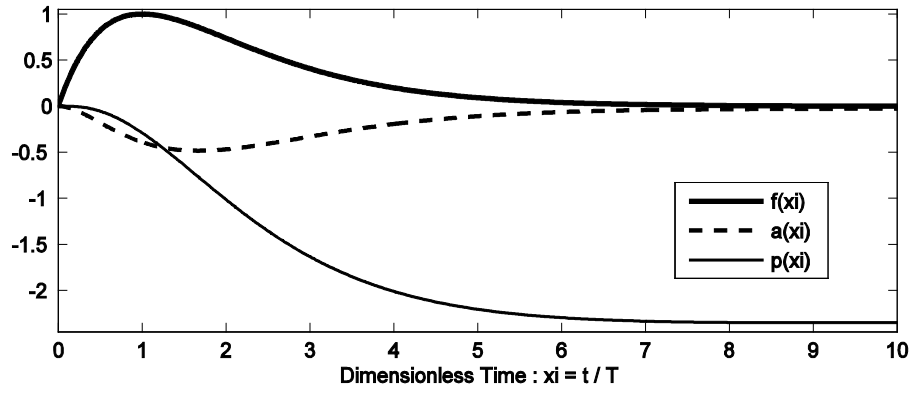
ETey, kavite ve dalga kılavuzu problemlerini zaman-domeninde analitik olarak çözebilecek şekilde ortaya konmuştur [10]. Elektromanyetikte zaman-domeni çözümlerine ilişkin gelişimin farklı yönleri literatürde [12-35] tartışılmıştır. Boş kavitenin sinüsoidal ve çift-üstel işaretler ile uyarılması problemi [16]'da, Debye ve Lorentz dinamik ortamları ile doldurulmuş kavitenin çift-üstel işaret ile uyarılması problemi; Debye ve Lorentz ortamları için polarizasyon vektörü ile elektrik alan şiddeti bağıntısını veren Debye ve Lorentz dinamik bünye bağıntıları kullanılarak [17]'de çalışılmıştır.

Ayrıca, ETEY yöntemi ile zaman-domeninde elde edilen çözümlerin diğer yöntemlerle kıyaslanarak doğruluğunun gösterilmesine ilişkin çalışmalar da bulunmaktadır [26]. Yakın zamanda ETEY klasik zaman-harmonik alan teorisine alternatif olarak kabul edilmiştir [36].

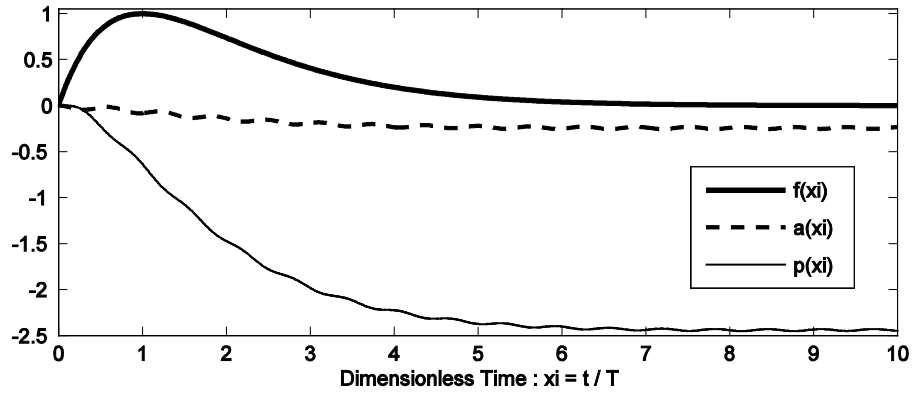
Aksoy ve Tretyakov'un çalışmasında [12], bir zaman işaretinin uygulandığı kavite zamanla değişen bir fiziksel sistem olarak ele alınmıştır. Bu çalışmada, elektromanyetik alanların ancak zamana bağlı modal genlikler ile klasik solenoidal ve irrotasyonel modlar şeklinde ayrıştırılabileceğini göstermiş ve elde ettikleri evrim denklemlerini analitik olarak çözmüşlerdir. Sayısal örneklerle zaman uzayı rezonanslarını çalışmışlardır.

Aksoy ve Tretyakov'un diğer bir çalışmasında [14], sınırlı bir süre uygulanan bir işaret tarafından uyarılan içi homojen kayıplı dielektrik malzeme ile dolu ve yüzeyi mükemmel iletken malzeme ile kaplı bir kavite problemi incelenmiştir. Walsh işaret fonksiyonu tarafından uyarılan kavite salınımları için bazı sayısal örnekler vermişler ve dijital işaretlerin rezonans durumlarını ortaya koymuşlardır.

Tretyakov ve Erden'in çalışması [17]; anahtarlama, yıldırım darbeleri ve elektrostatik boşalmaların yanında çeşitli doğa olaylarının da neden olabileceği akım ve gerilim dalgalanmalarının oluşturabileceği salınımlara ilişkin olmuştur. Çift üstel pals dalga formu yaygın olarak dalgalanmaları modellemede bir işaret türü olarak kullanıldığından çalışmalarında bu dalga formunu esas almışlardır. Sonuçlar basit konvolüsyon integralleri şeklinde elde edilmiştir. Ele aldıkları işaret türünün irrotasyonel modları solenoidal modlara göre daha fazla uyarabildiğini bulmuşlardır. Klasik KGM metodunda irrotasyonel modlar statik alanlar olarak kabul edildiğinden, elde edilen zaman bağımlı irrotasyonel modlara ilişkin sonuçlar dikkate değerdir. Söz konusu çalışmada Debye ortam ile doldurulmuş kavitede elde ettikleri irrotasyonel salınımlar Şekil 2.1'de, Lorentz ortam ile doldurulmuş kavitede elde ettikleri irrotasyonel salınımlar Şekil 2.2'de grafiksel olarak gösterilmiştir.



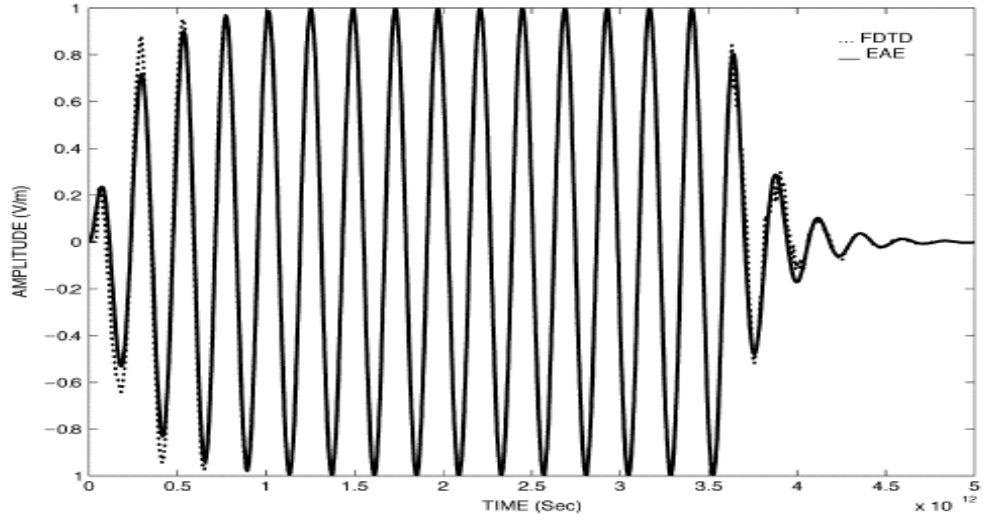
Şekil 2.1 Darbe Fonksiyonu $f(\xi)$, Alanın İrrotasyonel Modunun Genliği $a(\xi)$ ve Debye Ortam ile Doldurulmuş Kavite için Polarizasyon Vektörünün İrrotasyonel Modunun Genliği $p(\xi)$.



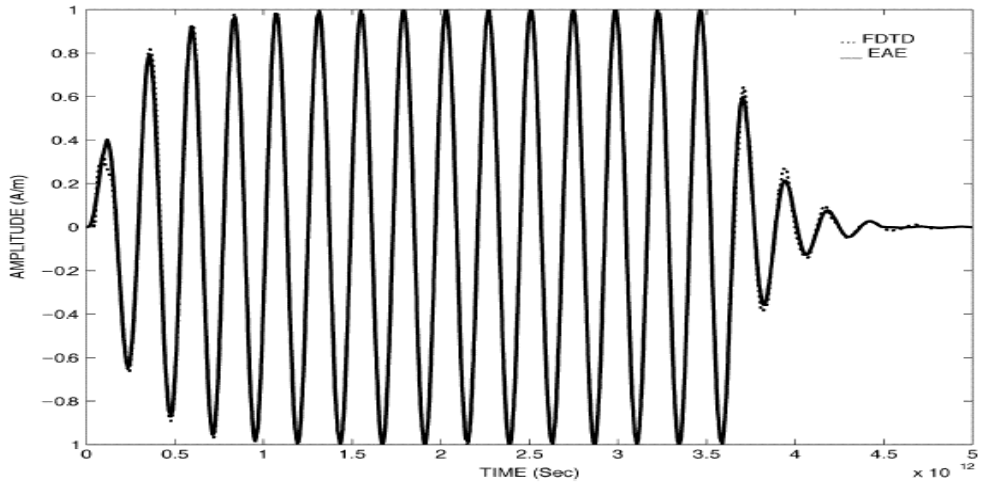
Şekil 2.2 Darbe Fonksiyonu $f(\xi)$, Alanın İrrotasyonel Modunun Genliği $a(\xi)$ ve Lorentz Ortam ile Doldurulmuş Kavite için Polarizasyon Vektörünün İrrotasyonel Modunun Genliği $p(\xi)$.

Aksoy ve arkadaşları [26], dispersif polar dielektrik malzeme dolu bir kavitedeki salınımları zaman-domeninde hem ETEY hem de FDTD metodu ile çalışmışlardır. ETEY ile elde ettikleri analitik sonuçları FDTD metoduyla karşılaştırmış ve işaretin açılıp kapanma anlarındaki küçük salınım farkları haricinde sonuçların aynı olduğunu göstermişlerdir. Çalışmalarında, elektrik alan genliğine

ilişkin elde ettikleri sonuç Şekil 2.3'te, manyetik alan genliğine ilişkin elde ettikleri sonuç ise Şekil 2.4'te sunulmuştur.



Şekil 2.3 Dispersif Polar Dielektrik Malzeme ile Dolu Kavite için Gerçek Zaman t 'nin Fonksiyonu Olarak Normalize Edilmiş Genlik e_n'' .



Şekil 2.4 Dispersif Polar Dielektrik Malzeme ile Dolu Kavite için Gerçek Zaman t 'nin Fonksiyonu Olarak Normalize Edilmiş Genlik h_n'' .

Geyi, metal kavite rezonatörlerinin zaman-domeni teorisi [27] çalışmasında dalga kılavuzları için bir dizi modifiye Klein-Gordon denklem çözümü elde etmiştir.

Elde ettiği denklemleri daha sonra Green fonksiyonları ile çözmüştür. Çalışması, zaman-domeni teorisinin, kapalı bir kavitedeki fiziksel prosedürleri gösteren tam bir resim sunduğu ve klasik zaman-harmonik teoride nedenselliğin çözüme katılmamasından kaynaklanan bazı ciddi problemleri yenebildiğini ortaya koymuştur.

Antyufeyeva, Butrym ve Tretyakov, çift negatif dispersif medya ile doldurulmuş ve mükemmel iletken yüzey ile kaplı bir kaviteyi zaman-domeninde incelemiştir [29]. Çalışmadaki ana hedef; çift negatif medya içeren rezonans yapılar incelenirken dispersiyonun, bu tür sistemlerin davranışlarının kompleks ortamın karmaşık etkileşimi ile belirlenmesi ve yapı rezonanslarının bazı beklenmeyen yeni etkiler gösterebileceği bilgileri ışığında ele alınması gerektiğini göstermek olmuştur.

Tretyakov ve Erden'in başka bir çalışması [16], bir boş kavitede elektromanyetik alanların geçici bir işarette uyarılması probleminin zaman-domeninde incelenmesine ilişkin olmuştur. Problemi modal alan genliklerini türeterek çözmüşlerdir. Genlikler için kesin çözümleri, integrasyonun değişkeni zaman olmak üzere, integrandında işaret fonksiyonunun bir parametre olduğu konvolüsyon integralleri formunda elde etmişlerdir. Yaptıkları çalışmada zamanda bir başlangıcı olan işaret fonksiyonlarının iki örneği olan çift-üstel zaman fonksiyonu ile modellenen bir darbe ve klasik sonuçlarla karşılaştırılabilmesi maksadıyla rastgele bir frekansta osilasyon yapan sinüsoidal işaret kullanmışlardır.

Antyufeyeva ve Tretyakov yaptıkları bir başka çalışmada [31], Elektromanyetik Teoriye Evrimsel Yaklaşım yöntemi ile homojen kararlı fakat dispersif ortamla doldurulmuş bir kavitede elektromanyetik alanların zamanla evrimini incelemiştir. Dispersif ortamdaki alanları uyaran işaret fonksiyonunu modellemek için bünye bağıntısı kuran integralin integrandını çift-eksponansiyel fonksiyon olarak seçmişlerdir. Serbest ve zorlanmış salınımlar için sonuçları analitik formda elde etmişlerdir [30]. Bir diğer çalışmada ise, homojen dispersif kayıplı ortamla doldurulmuş kavitedeki alanlara ilişkin çözüm sunmuşlardır. Çalışmaları ile,

Vektör diferansiyel Maxwell denklemler sistemi (2.1), elektrik alan şiddeti $E(\mathbf{r},t)$, manyetik alan şiddeti $H(\mathbf{r},t)$ ve $P(\mathbf{r},t)$ polarizasyon vektörünü içeren makroskopik alanlar için düşünölsün. Mükemmel iletken S yüzeyi ile sınırlanmış V kavite hacmi içerisinde

$$\mathbf{r} \in S: \quad \mathbf{n} \times \mathbf{E}(\mathbf{r},t) = 0 \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r},t) = 0 \quad (2.9)$$

şeklindeki sınır koşulları altında sağlanacak alanlar için; σE terimi de kavite içerisinde mevcut kayıpları modellemek için denklem (2.1)'e dahil edilsin. Kavitenin boş olduğu durumlarda polarizasyon vektörü $P \equiv 0$ olur. Kavitenin dielektrik malzeme ile dolu olduğu herhangi bir durumda ise polarizasyon vektörü P elektrik alan E 'nin bir fonksiyonu olarak denklemler sistemine dahil olacaktır.

Elektrik akım yoğunluğu $J_{ext}(\mathbf{r},t)$, zamana ve koordinatlara bağı verilen bir fonksiyondur. $J_{ext}(\mathbf{r},t)$ fonksiyonu fiziksel olarak kavite salınımlarını üretir.

Hiperbolik tipteki (2.1) kısmi diferansiyel denklemler sistemi

$$\mathbf{r} \in V, t = 0: E(\mathbf{r},0) \quad H(\mathbf{r},0) = 0 \quad (2.10)$$

başlangıç koşulları ile desteklenmelidir.

$t < 0$ 'dan önce kaynaklar bulunmadığından, nedensellik prensibi gereğı çözüm

$$E(\mathbf{r},t), P(\mathbf{r},t) \text{ ve } H(\mathbf{r},t) \equiv 0, \text{ eğer } t < 0 \text{ ise} \quad (2.11)$$

şartlarını sağlamalıdır.

Herhangi bir elektromanyetik alanın enerjisinin sonlu olduğu genel fiziksel kabulü

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{V'} (\epsilon_0 E(\mathbf{r},t) \cdot E^*(\mathbf{r},t) + \mu_0 H(\mathbf{r},t) \cdot H^*(\mathbf{r},t)) dv < \infty \quad (2.12)$$

şeklinde ifade edilen bir çözümler uzayı oluşturur. Burada $0 \leq t_1 < t_2 < \infty$, $V' \subseteq V$ olmak üzere, nokta vektörlerin skaler çarpımını, yıldız kompleks konjügasyonu, uzay ve zamanın fonksiyonları olan $E(\mathbf{r}, t)$ ve $H(\mathbf{r}, t)$ ise çözümü belirtir.

2.3.1. Metodun Genel Şeması

Maxwell denklemlerinin (2.1) ve sınır koşullarının (2.9), $E(\mathbf{r}, t)$ ve $H(\mathbf{r}, t)$ vektörleri üzerinde işlem yapan ve $\mathcal{M} = \mathfrak{R} + A$ şeklinde iki parçadan oluşan $\mathcal{M}$ operatörünün bir sonucu olarak görüldüğü düşünölsün. $\mathfrak{R}$ operatörünün lineer olduğu, koordinatlar üzerinde işlem yaptığı ve L_2 çözümler uzayında kendine-eşlenik olduğu varsayölsün. A operatörü $\mathcal{M}$ operatörünün geri kalan kısmı olup ∂t zaman türevli kısım A operatörüne dahildir.

$\mathfrak{R}$ operatörünün kendine eşlenikliği, bu operatörün özvektör setinin tamamlanmışlığını ve L_2 çözümler uzayında bir baz oluşturduğunu gösterir. Baz elemanları fiziksel olarak irrotasyonel ve solenoidal kavite modlarının her ikisi ile de ilişkilidir.

$\mathfrak{R}$ operatörünün matris gösteriminde kendi özvektör kümesinden oluşan baz köşegen halindedir. Bu sebeple analitik olarak tersi kolaylıkla alınabilir ve bu özvektör serilerini verir.

Maxwell denklemlerinde zaman türevi ∂t 'nin korunması modal genlikler için zaman türevli diferansiyel denklemler sistemini verir. Çözümün evrim denklemleri olarak da adlandırılan zaman türevli diferansiyel denklemler formunda elde edilmesi nedeniyle, kullanılan yöntem evrimsel yaklaşım olarak adlandırılmıştır. Evrim denklemleri, sınır koşulları ile birlikte matematikte iyi bilinen Cauchy problemini oluştururlar. Bu yaklaşım, elektromanyetikte çeşitli türden salınımların evrim denklemleri yoluyla çalışılması için önemli bir olanak sağlar.

2.3.2. Kendine-Eşlenik Operatör

Sadece koordinatlar üzerinde işlem yapan altı-bileşenli $\mathbf{X}(\mathbf{r})$ vektör uzayı

$$\mathbf{X}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

şeklinde tanımlansın. $\mathbf{X}(\mathbf{r})$ vektörünün üç-bileşenli vektör çifti $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ ve $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ denklem (2.9)'daki sınır koşullarını sağlar:

$$\mathbf{r} \in S: \quad \mathbf{n} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}) = 0$$

Denklem (2.12)'deki hacimsel integral bu uzayı

$$\langle \mathbf{X}_1(\mathbf{r}), \mathbf{X}_2(\mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{V} \int_V (\varepsilon_0 \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}_2^*(\mathbf{r}) + \mu_0 \mathbf{H}_1(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{H}_2^*(\mathbf{r})) dv \quad (2.14)$$

şeklinde bir iç çarpım ile tanımlamayı önerir. Burada $\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) \\ \mathbf{H}_1(\mathbf{r}) \end{pmatrix}$, $\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_2(\mathbf{r}) \\ \mathbf{H}_2(\mathbf{r}) \end{pmatrix}$ çifti, bu uzayın rastgele elemanlarından oluşmaktadır.

Denklem (2.1)'in sol yanı $\mathbf{X}(\mathbf{r}, t)$ üzerinde işlem yapan

$$\mathfrak{R}' \mathbf{X}(\mathbf{r}, t) = \begin{pmatrix} -i\varepsilon_0^{-1} \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \\ i\mu_0^{-1} \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{O} & -i\varepsilon_0^{-1} \nabla \times \\ i\mu_0^{-1} \nabla \times & \mathbf{O} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

şeklinde bir $\mathfrak{R}'$ matris diferansiyel operatörünün tanımlanmasını önerir. Burada $\mathbf{O}$, 3×3 ebatlarında sıfır-değerli bir matris, i ise imajiner birimdir. Diferansiyel operatör $\mathfrak{R}'$ ve sınır koşullarının (2.9) birlikte ele alınması sonucunda

$$\mathfrak{R} \mathbf{X}(\mathbf{r}, t) = \begin{cases} \mathfrak{R}' \mathbf{X}(\mathbf{r}, t), & \mathbf{r} \in V, \quad \mathbf{r} \notin S, \\ \mathbf{n} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = 0, & \mathbf{r} \in S. \end{cases} \quad (2.16)$$

şeklinde sınırlanmış bir operatör elde edilir.

$\Re$ operatörünün kendine-eşlenik olma durumunu gösteren $\langle \Re \mathbf{X}_1(\mathbf{r}), \mathbf{X}_2(\mathbf{r}) \rangle - \langle \mathbf{X}_1(\mathbf{r}), \Re \mathbf{X}_2(\mathbf{r}) \rangle = 0$ eşitliğinin sağlandığı gösterilebilir [4]. Bu durumda; ω_n 'ler $\Re$ operatörünün özdeğerleri ve $\mathbf{X}_n$ 'ler de bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörler olmak üzere $\Re \mathbf{X}_n(\mathbf{r}) = \omega_n \mathbf{X}_n(\mathbf{r})$ operatör özdeğer problemi sağlanır. Bu operatör özdeğer denkleminde $\Re$ 'in yerine konulması sonucu;

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H}_n(\mathbf{r}) &= -i\omega_n \varepsilon_0 \mathbf{E}_n(\mathbf{r}), \quad (\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}_n)|_s = 0, \\ \nabla \times \mathbf{E}_n(\mathbf{r}) &= i\omega_n \mu_0 \mathbf{H}_n(\mathbf{r}), \quad [\mathbf{n} \times \mathbf{E}_n]|_s = 0. \end{aligned} \quad (2.17)$$

eş özdeğer problemi elde edilir. Burada $\omega_n = 0$ bir özdeğer olmanın yanı sıra sonsuz bir dejenerasyon kuvvetine sahiptir. $\omega_n \neq 0$ durumunda ise; $\nabla \times \mathbf{E}_n = i\omega_n \mu_0 \mathbf{H}_n$ denklemi, $[\mathbf{n} \times \mathbf{E}_n]|_s = 0$ sınır koşulunun sağlanması halinde $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}_n)|_s = 0$ şartının da otomatik olarak sağlanacağı ve aynı zamanda bunun tam tersinin de geçerli olduğu (2.17)'deki denklemlerin Stocks teoreminden faydalanarak gösterilebilir. Bu sebeple Denklem (2.17) sonuç olarak iki farklı sınır özdeğer problemi verir. $\omega_n \neq 0$ özdeğerleri solenoidal olarak adlandırılır.

V kavite hacmi, bir silindirin rastgele kısa bir parçası olarak düşünülürse, Laplacian vektör sınır özdeğer problemlerine ulaşmak için, simetrik özdeğerlere karşılık gelen özvektörler

$$\mathbf{x}_n = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{+n} \\ O \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}_n = \begin{pmatrix} O \\ \mathbf{H}_{+n} \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

olmak üzere

$$\mathbf{X}_{+n} = \mathbf{x}_n + \mathbf{y}_n; \quad \omega_{+n} > 0, \quad \mathbf{X}_{-n} = \mathbf{x}_n - \mathbf{y}_n; \quad \omega_{-n} = -\omega_{+n} \quad (2.19)$$

şeklinde ayrıştırılsın. Denklem (2.19) gösterimi $\Re \mathbf{X}_n(\mathbf{r}) = \omega_n \mathbf{X}_n(\mathbf{r})$ operatör özdeğer problemini

$$\begin{aligned} R(\mathbf{x}_n + \mathbf{y}_n) &= \omega_{+n}(\mathbf{x}_n + \mathbf{y}_n) \\ R(\mathbf{x}_n - \mathbf{y}_n) &= \omega_{-n}(\mathbf{x}_n - \mathbf{y}_n) \end{aligned} \quad (2.20)$$

şeklinde yeni bir forma getirir. Denklem (2.20) üzerinde basit işlemler yapılarak

$$\begin{aligned} R\mathbf{x}_n &= \omega_n \mathbf{y}_n \\ R\mathbf{y}_n &= \omega_n \mathbf{x}_n \end{aligned} \quad (2.21)$$

denklemini $\omega_n = \omega_{+n}$ veya $\omega_n = \omega_{-n} = -\omega_{+n}$ özdeğerleri ile beraber $\omega_0 = 0$ özdeğeri de mevcut iken elde edilebilir. Denklem (2.21)'in üst kısmı

$$\mathfrak{R}'\mathbf{x}_n = \begin{pmatrix} \mathbf{O} & i\epsilon_0^{-1}\nabla \times \\ -i\mu_0^{-1}\nabla \times & \mathbf{O} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{+n} \\ \mathbf{O} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{O} \\ -i\mu_0^{-1}\nabla \times \mathbf{E}_{+n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{O} \\ \omega_{+n}\mathbf{H}_{+n} \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

şeklinde açık bir halde yazılabilir. Benzer şekilde alt kısım da

$$\mathfrak{R}'\mathbf{y}_n = \begin{pmatrix} \mathbf{O} & i\epsilon_0^{-1}\nabla \times \\ -i\mu_0^{-1}\nabla \times & \mathbf{O} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{O} \\ \mathbf{H}_{+n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\epsilon_0^{-1}\nabla \times \mathbf{H}_{+n} \\ \mathbf{O} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{+n}\mathbf{E}_{+n} \\ \mathbf{O} \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

açık olarak yazılabilir. Sonuç olarak (2.22), (2.23) ve (2.17)'den

$$\mathbf{E}_{+n} = i\nabla \times \mathbf{H}_{+n} / \omega_{+n}\epsilon_0, \text{ div}\mathbf{E}_{+n} = 0; \quad \mathbf{H}_{+n} = -i\nabla \times \mathbf{E}_{+n} / \omega_{+n}\mu_0, \text{ div}\mathbf{H}_{+n} = 0 \quad (2.24)$$

eşitlikleri elde edilir.

Denklem (2.21)'in üst kısmının her iki tarafı da $\mathfrak{R}'$ ile çarpılırsa; denklemin sol yanı $R'R'\mathbf{x}_n = \omega_n R'\mathbf{y}_n = \omega_n^2 \mathbf{x}_n$ halini alırken, denklemin sağ yanı

$$\mathfrak{R}'(\mathfrak{R}'\mathbf{x}_n) = \begin{pmatrix} \mathbf{O} & i\epsilon_0^{-1}\nabla \times \\ -i\mu_0^{-1}\nabla \times & \mathbf{O} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{O} \\ -i\mu_0^{-1}\nabla \times \mathbf{E}_{+n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_{+n} / \epsilon_0\mu_0 \\ \mathbf{O} \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

şeklindedir. $R'R'\mathbf{x}_n = \omega_n^2 \mathbf{x}_n$ operatör denklemini

$$\begin{pmatrix} \nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_{+n} / \epsilon_0\mu_0 \\ \mathbf{O} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{+n}^2 \mathbf{E}_{+n} \\ \mathbf{O} \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

şeklinde altı-bileşenli vektör denklemi formundadır. R operatörü ile iki defa işlem yapılması sınır koşulları (2.9)'nı değiştirmemektedir. Bu sebeple $\mathbf{E}_{+n}$ vektörü için gereken koşulun da eklenmesi ile Laplacian vektör sınır özdeğer problemleri ile tanımlanabilen solenoidal TE modlarının tamamlanmış bir seti, (2.14) iç çarpım tanımından solenoidal özvektörler için normalizasyon koşulları ile birlikte, (2.24), (2.26) denklemlerinden

$$\begin{aligned}\nabla^2 \mathbf{E}'_n(\mathbf{r}) + (\omega'_n / c)^2 \mathbf{E}'_n(\mathbf{r}) &= 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{E}'_n(\mathbf{r}) = 0, \quad [\mathbf{n} \times \mathbf{E}'_n(\mathbf{r})]_S = 0 \\ \mathbf{H}'_n(\mathbf{r}) &= -i(\omega'_{\pm n} \mu_0)^{-1} \nabla \times \mathbf{E}'_n(\mathbf{r}) \\ \frac{\epsilon_0}{V} \int_V \mathbf{E}_n(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}_n^*(\mathbf{r}) dv &= 1\end{aligned}\tag{2.27}$$

şeklinde ve solenoidal TM modlarının tamamlanmış bir seti elde edilir:

$$\begin{aligned}\nabla^2 \mathbf{H}''_n(\mathbf{r}) + (\omega''_n / c)^2 \mathbf{H}''_n(\mathbf{r}) &= 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{H}''_n(\mathbf{r}) = 0, \quad (\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}''_n(\mathbf{r}))_S = 0 \\ \mathbf{E}''_n(\mathbf{r}) &= i(\omega''_{\pm n} \epsilon_0)^{-1} \nabla \times \mathbf{H}''_n(\mathbf{r}) \\ \int_V \frac{\mu_0}{V} \int_V \mathbf{H}_n(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{H}_n^*(\mathbf{r}) dv &= 1.\end{aligned}$$

Burada $n=1,2,\dots$, $c=1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ 'dır. $\omega''_{\pm n} = \pm \omega''_n$ ve $\omega'_{\pm n} = \pm \omega'_n$ 'ler ise $\omega_0=0$ noktasına göre simetrik olarak reel eksen $(0, \omega)$ üzerinde bulunan $\mathfrak{R}$ operatörünün özdeğerleridir. Ayrıca burada ve bundan sonra (') terimi solenoidal TE modları için, (') terimi ise solenoidal TM modları için kullanılmıştır.

$\omega_0=0$ ise $\mathfrak{R}$ operatörünün sonsuz dejenerasyon derecesine sahip bir özdeğeridir. $\omega_0=0$ özdeğeri Denklem (2.17)'de yerine konulursa ; $\nabla \times \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = 0$ ve $\nabla \times \mathbf{H}_0(\mathbf{r}) = 0$ şeklinde iki denklem elde edilir. Elde edilen $\mathbf{E}_0$ ve $\mathbf{H}_0$ vektörleri rotasyonellerinin 0'a eşit olması nedeniyle irrotasyonel olarak adlandırılırlar. Bu irrotasyonel vektörleri iki defa türevlenebilir rastgele fonksiyonlar olan $\phi(\mathbf{r})$ ve $\psi(\mathbf{r})$ skaler potansiyelleri yardımıyla; $\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = -\nabla \phi(\mathbf{r})$ ve $\mathbf{H}_0(\mathbf{r}) = -\nabla \psi(\mathbf{r})$ şeklinde göstermek mümkündür. ∂_n ; S yüzeyinin normal türevi olmak üzere,

$[\mathbf{n} \times \mathbf{E}_0]_s = 0$ ve $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}_0)_s = 0$ sınır koşulları, skaler potansiyeller için sınır koşullarını $\phi|_s = 0$ ve $\partial_n \psi|_s = 0$ olarak verir. $\phi|_s = 0$ ve $\partial_n \psi|_s = 0$ sınır koşulları birbirlerini Helmholtz denklemleri yardımıyla tamamlarlar. Bu yolla $\omega_0=0$ özdeğerine karşılık gelen iki özvektör seti bulunmaktadır. Bu setler Laplacian için iyi çalışılmış Dirichlet ve Neumann sınır özdeğer problemlerine çözümdürler. $\nabla \times \nabla \phi_n(\mathbf{r}) \equiv \text{rot} \nabla \phi_n(\mathbf{r}) = 0$ ve $\nabla \times \nabla \psi_n(\mathbf{r}) \equiv \text{rot} \nabla \psi_n(\mathbf{r}) = 0$ olmak üzere setlerin iki elemanı $\{\nabla \phi_n(\mathbf{r})\}_{n=1}^{\infty}$ ve $\{\nabla \psi_n(\mathbf{r})\}_{n=1}^{\infty}$ irrotasyonel kavite modlarını belirtir.

Diverjans Maxwell denklemleri ($\text{div} \mathbf{D} = \rho + \rho_e - \text{div} \mathbf{P}$ ve $\text{div} \mathbf{B} = \rho_h - \text{div} \mathbf{M}$)'indeki büyüklükleri elde etmek üzere; $\mathbf{E}_0(\mathbf{r})$ ve $\mathbf{H}_0(\mathbf{r})$ vektörleri üzerine diverjans işlemi uygulanırsa skaler potansiyeller türünden

$$\text{div} \mathbf{E}_\alpha(\mathbf{r}) \equiv -\nabla^2 \phi_\alpha(\mathbf{r}); \quad \text{div} \mathbf{H}_\beta(\mathbf{r}) \equiv -\nabla^2 \psi_\beta(\mathbf{r}) \quad (2.28)$$

elde edilir. $\mathbf{E}_0(\mathbf{r})$ ve $\mathbf{H}_0(\mathbf{r})$ üç-bileşenli vektörleri, $\phi_\alpha(\mathbf{r})$ ve $\psi_\beta(\mathbf{r})$ skalerleri tarafından üretildiğinden 0 alt indis $\alpha = 0, 1, 2, \dots$ ve $\beta = 0, 1, 2, \dots$ alt indisleri ile değiştirilmiştir. $\phi|_s = 0$ ve $\partial_n \psi|_s = 0$ sınır koşullarının diverjans Maxwell denklemleri ile beraber ele alınması ile Dirichlet ve Neumann sınır özdeğer problemlerinin çözümü Helmholtz denklemi formunda $\{\nabla \phi_n(\mathbf{r})\}_{n=1}^{\infty}$ ve $\{\nabla \psi_n(\mathbf{r})\}_{n=1}^{\infty}$ potansiyelleri için (3.14) iç çarpım tanımından irrotasyonel özvektörlerin normalizasyon koşulları ile birlikte

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi_n(\mathbf{r}) + \kappa_n^2 \phi_n(\mathbf{r}) &= 0, & \nabla^2 \psi_n(\mathbf{r}) + \nu_n^2 \psi_n(\mathbf{r}) &= 0, \\ \phi_n(\mathbf{r})|_s &= 0, & \partial_n \psi_n(\mathbf{r})|_s &= 0, \\ \frac{\epsilon_0 \kappa_n^2}{V} \int_V |\phi_n|^2 dv &= 1, & \frac{\mu_0 \nu_n^2}{V} \int_V |\psi_n|^2 dv &= 1, \end{aligned} \quad (2.29)$$

$\nu_n^2 > 0$ ve $\kappa_n^2 > 0$ özdeğerler olmak üzere elde edilebilir.

2.3.3. Alanlar İçin Modal Açılımlar

Elektrik alan vektörü $E(\mathbf{r}, t)$, manyetik alan vektörü $H(\mathbf{r}, t)$, polarizasyon vektörü $P(\mathbf{r}, t)$ ve harici kaynak $J_{ext}(\mathbf{r}, t)$ 'nin modal baz elemanları üzerine yansıtılması ile modal açılımlar

$$\begin{aligned} E(\mathbf{r}, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} e'_n(t) \mathbf{E}'_n(\mathbf{r}) + \sum_{n=1}^{\infty} e''_n(t) \mathbf{E}''_n(\mathbf{r}) + \sum_{n=1}^{\infty} a_\alpha(t) \nabla \phi_n(\mathbf{r}) \\ H(\mathbf{r}, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} h'_n(t) \mathbf{H}'_n(\mathbf{r}) + \sum_{n=1}^{\infty} h''_n(t) \mathbf{H}''_n(\mathbf{r}) + \sum_{n=1}^{\infty} b_\beta(t) \nabla \psi_n(\mathbf{r}) \\ P(\mathbf{r}, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} p'_n(t) \mathbf{E}'_n(\mathbf{r}) + \sum_{n=1}^{\infty} p''_n(t) \mathbf{E}''_n(\mathbf{r}) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \nabla \phi_n(\mathbf{r}) \\ J_{ext}(\mathbf{r}, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} j'_n(t) \mathbf{E}'_n(\mathbf{r}) + \sum_{n=1}^{\infty} j''_n(t) \mathbf{E}''_n(\mathbf{r}) + \sum_{n=1}^{\infty} j_n(t) \nabla \phi_n(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (2.30)$$

şeklinde elde edilir. Burada zamana bağlı skalar $e'_n, e''_n, a_\alpha, h'_n, h''_n, b_\beta$ ve $p'_n, p''_n, c_n, j'_n, j''_n, j_n$ katsayıları modal genlikler olarak adlandırılır.

2.3.4. Modal Evrim Denklemleri

Sırasıyla elektrik ve manyetik türden harici kaynaklar $J_{ext}(\mathbf{r}, t) = \begin{pmatrix} J_e(\mathbf{r}, t) \\ J_h(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix}$

olmak üzere Maxwell denklemleri (2.1)'nin baz elemanları üzerine yansıtılması ile modal genlikler için bir set evrim denklemi

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e'_n(t) + \frac{d}{dt} p'_n(t) + i\omega'_n h'_n &= -j'_{ne}(t) \\ \frac{d}{dt} h'_n(t) + i\omega'_n e'_n(t) &= -j'_{nh}(t) \\ \frac{d}{dt} p'_n(t) + (1/\tau_0) p'_n(t) - (\chi_e / \tau_0) e'_n(t) &= 0, \\ \frac{d}{dt} e''_n(t) + \frac{d}{dt} p''_n(t) + i\omega''_n h''_n &= -j''_{ne}(t) \\ \frac{d}{dt} h''_n(t) + i\omega''_n e''_n(t) &= -j''_{nh}(t) \\ \frac{d}{dt} p''_n(t) + (1/\tau_0) p''_n(t) - (\chi_e / \tau_0) e''_n(t) &= 0 \end{aligned} \quad (2.31)$$

elde edilir. Kuvvet terimleri $j_{ne}(t)$ ve $j_{nh}(t)$

$$\begin{aligned} j'_{ne}(t) &= \frac{\varepsilon_0}{V} \int_V J_e \cdot \mathbf{E}'_n{}^* dv & j''_{ne}(t) &= \frac{\varepsilon_0}{V} \int_V J_e \cdot \mathbf{E}''_n{}^* dv \\ j'_{nh}(t) &= \frac{\mu_0}{V} \int_V J_h \cdot \mathbf{H}'_n{}^* dv, & j''_{nh}(t) &= \frac{\mu_0}{V} \int_V J_h \cdot \mathbf{H}''_n{}^* dv \end{aligned} \quad (2.32)$$

şeklinde akım yoğunluklarının aynı baz elemanları üzerine yansıtılmış halidir.

İrrotasyonel modlar için modal genlikler

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} a_\alpha(t) + \frac{d}{dt} c_\alpha(t) &= -i_{\alpha e}(t) \\ \frac{d}{dt} c_\alpha(t) - (\chi_s / \tau_0) a_\alpha(t) + (1 / \tau_0) c_\alpha(t) &= 0 \\ \frac{d}{dt} b_\beta(t) &= -i_{\beta h}(t) \end{aligned} \quad (2.33)$$

şeklinde bir evrim denklemi seti daha verir. Burada χ_s statik elektrik duyarlılık, $\alpha, \beta=1,2,\dots$ ve kuvvet terimleri

$$\begin{aligned} i_{\alpha e}(t) &= \frac{\varepsilon_0}{V} \int_V J_e \cdot \nabla \Phi_\alpha^* dv \\ i_{\beta h}(t) &= \frac{\mu_0}{V} \int_V J_h \cdot \nabla \Psi_\beta^* dv \end{aligned} \quad (2.34)$$

şeklindedir.

2.3.5. Zaman Domeninde Analitik Çözüm

Bu kısımda ortam parametrelerinin de zamana bağlı olması durumu göz önüne alınarak formülasyon türetilmiştir. Bu nedenle, elektrik ve manyetik akı yoğunlukları

$$\begin{aligned} D(\mathbf{r}, t) &= \varepsilon_0 \varepsilon(t) E_n(\mathbf{r}, t) \\ B(\mathbf{r}, t) &= \mu_0 \mu(t) H_n(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (2.35)$$

$\varepsilon(t)$ ve $\mu(t)$ sırasıyla elektrik ve manyetik geçirgenliklerin zaman bağımlılıklarını göstermek üzere (2.36) bünye bağıntıları ile gösterilsin. Daha önce denklem (2.30)'da $E(\mathbf{r}, t)$ ve $H(\mathbf{r}, t)$ için bulunan modal açılımlara benzer şekilde elektrik ve manyetik akı yoğunlukları için modal açılımlar

$$\begin{aligned} D(\mathbf{r}, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \bar{e}_n(t) \mathbf{E}_n(\mathbf{r}) - \sum_{\alpha=1}^{\infty} \bar{a}_{\alpha}(t) \nabla \phi_{\alpha}(\mathbf{r}) \\ B(\mathbf{r}, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \bar{h}_n(t) \mathbf{H}_n(\mathbf{r}) - \sum_{\beta=1}^{\infty} \bar{b}_{\beta}(t) \nabla \psi_{\beta}(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (2.36)$$

bulunabilir. Yine $\bar{e}_n$, $\bar{a}_{\alpha}$, $\bar{h}_n$ ve $\bar{b}_{\beta}$ katsayıları bünye bağıntıları yardımıyla

$$\begin{aligned} \bar{e}_n &= \varepsilon_0 \varepsilon(t) e_n(t) \\ \bar{a}_{\alpha} &= \varepsilon_0 \varepsilon(t) a_{\alpha}(t) \\ \bar{h}_n &= \mu_0 \mu(t) h_n(t) \\ \bar{b}_{\beta} &= \mu_0 \mu(t) b_{\beta}(t) \end{aligned} \quad (2.37)$$

elde edilir. Denklem (2.31) lineer homojen ve zamanla değişen ortamlar için bünye bağıntıları yeniden düzenlenirse,

$$\begin{aligned} P &= \varepsilon_0 \chi_e(t) E \\ M &= \chi_m(t) H \\ J_{\sigma} &= \sigma(t) E \end{aligned} \quad (2.38)$$

denklemleri χ_e , χ_m ve σ ifadeleri dispersif ortamlar için zamana göre integre edilebilir veya dispersif olmayan ortamlar için Voltera tipi integral operatörleri olmak üzere elde edilir. Elde edilen bu denklemin denklem (2.31)'de yerine konulması ile ortonormalizasyon koşulları gereği hacim integrallerinin ihmal edilmesi sonucu basit bağımsız Cauchy problemi elde edilir. Zamana bağlı katsayıların bir çifti $e_n(t)$ ve $h_n(t)$ solenoidal modların herbiri için

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\varepsilon e_n(t)) + v e_n(t) + i \omega_n h_n(t) &= -j_n^e(t); & e_n(t) &= e_n^0 \\ \frac{d}{dt}(\mu h_n(t)) + i \omega_n e_n(t) &= -j_n^h(t); & h_n(t) &= h_n^0\end{aligned}\quad (2.39)$$

şeklindeki Cauchy probleminin çözümünü sağlar. Bu denklemdeki $\omega_n \neq 0$ değerleri $\Re$ operatörünün solenoidal modlarına ait özdeğerleridir. Elde edilen bu denklem aynı zamanda ortamın elektromanyetik özelliklerini de kapsamaktadır. Denklem (2.38)'de belirtilen χ_e , χ_m ve σ ifadeleri ile ortamın elektromanyetik özellikleri arasında

$$\begin{aligned}\varepsilon &= 1 + \chi_e(t) = \varepsilon(t) \\ \mu &= 1 + \chi_m(t) = \mu(t) \\ v &= \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0} = v(t)\end{aligned}\quad (2.40)$$

şeklinde ilişki vardır. Bu durumda irrotasyonel modlar için zaman bağımlı katsayılar,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\varepsilon a_\alpha(t)) + v a_\alpha(t) &= -i_\alpha^e(t); & a_\alpha(0) &= e_n^0 \\ \frac{d}{dt}(\mu b_\beta(t)) + i \omega_n e_n(t) &= -i_\beta^h(t); & b_\beta(0) &= h_n^0\end{aligned}\quad (2.41)$$

şeklinde elektrik ve manyetik ifadeler için $\alpha = 1, 2, \dots$ ve $\beta = 1, 2, \dots$ olmak üzere elde edilir. Denklem (2.39) ve denklem (2.41)'in incelenmesi sonucu; lineer homojen ortamlarda irrotasyonel ve solenoidal kavite modlarının her ikisinin de zamanla değiştiği fiziksel olarak ortaya çıkmaktadır.

2.3.5.1 İrrotasyonel Modlara İlişkin Çözümler

Denklem (2.41), $\mu(t) > 0$, $\varepsilon(t) > 0$ ve $\frac{\sigma(t)}{\varepsilon(t)} \geq 0$ şartları altında çözülürse

$$\mu_0^{-1} \bar{b}_\beta(t) = \mu(t) b_\beta(t) = \mu(0) b_\beta^0 - \int_0^t i_\alpha^e(t') dt' \quad (2.42)$$

$$\varepsilon_0^{-1} \bar{a}_\alpha(t) = \varepsilon(t) a_\alpha(t) = e^{\xi(t)} \left[\varepsilon(0) a_\alpha^0 - \int_0^t e^{\xi(t')} i_\alpha^e(t') dt' \right] \quad (2.43)$$

sonuçları

$$\xi(t) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^t \frac{\sigma(t'')}{\varepsilon(t'')} dt'' \quad (2.44)$$

olmak üzere elde edilir. Ortamda kaynakların olmadığı durumu ele alırsak, Denklem (2.42)'deki manyetik akı yoğunluğu ifadesi zamanla değişen herhangi bir ortamda statik bir alan olur. Yine kaynaksız ortamda, Denklem (2.43)'deki elektrik akı yoğunluğu ifadesi başlangıç anından itibaren eksponansiyel olarak sıfıra düşer. Denklem (2.42) ve Denklem (2.43)'ün birlikte çözülmesi ile kaynak fonksiyonlarının, irrotasyonel kavite modlarının zamanla değişmesine uyumlu olduğu anlaşılmaktadır.

2.3.5.2 Solenoidal Modlara İlişkin Çözümler

Denklem (2.31)'in çözümü için, $\mu(t) > 0$, $\sigma = \text{sabit}$ ve $\frac{1}{\varepsilon(t)} > 0$ şeklinde zamana göre integrallenebilir fonksiyonlar olarak varsayılabilir. Bu şartlara ilave olarak

$$\sqrt{\frac{\mu(t)}{\varepsilon(t)}} = \eta = \text{sabit} \quad (2.45)$$

şartı ile beraber denklem (2.31)'in çözümü mümkün olabilecektir. Cauchy probleminin çözümünü elde etmek için bir takım notasyon değişimleri

$$\bar{e}(t) = \varepsilon(t) e_n(t); \quad \bar{h}(t) = \eta \varepsilon(t) h_n(t); \quad 2\gamma = \frac{\eta \sigma}{\varepsilon_0} \quad (2.46)$$

şeklinde yapılsın. Bu durumda denklem (2.31)'deki diferansiyel denklemler sistemi matrisel formda

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \bar{e}(t) \\ \bar{h}(t) \end{pmatrix} + \frac{1}{\eta \varepsilon} \begin{pmatrix} 2\gamma & i\omega \\ i\omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{e}(t) \\ \bar{h}(t) \end{pmatrix} = -\frac{1}{\eta \varepsilon} \begin{pmatrix} \eta \varepsilon j^e \\ \varepsilon j^h \end{pmatrix} \quad (2.47)$$

gösterilebilir. Elde edilen bu denklem üzerinde yeni bir değişken

$$\tau(t) = \frac{1}{\eta} \int_0^t \frac{dt''}{\varepsilon(t'')} \quad (2.48)$$

tanımlanırsa, denklem (2.47) yeni bir formda,

$$Y(\tau) = \begin{pmatrix} \bar{e}(t) \\ \bar{h}(t) \end{pmatrix}; \quad Q = \begin{pmatrix} 2\gamma & i\omega \\ i\omega & 0 \end{pmatrix}; \quad J = \begin{pmatrix} \eta \varepsilon j^e \\ \varepsilon j^h \end{pmatrix} \quad (2.49)$$

$\omega = \omega_n > 0$ ifadesi $\Re$ operatörünün özdeğerleri olmak üzere yazılabilir. Denklem (2.49)'daki yeni gösterim kullanılarak denklem (2.47)

$$\frac{d}{d\tau} Y(\tau) + QY(\tau) = -J; \quad Y(0) = \begin{pmatrix} \varepsilon(0)e_n^0 \\ \eta \varepsilon(0)h_n^0 \end{pmatrix} \quad (2.50)$$

halini alacaktır. Elde edilen bu denklem vasıtasıyla bilinmeyen $Y(t)$, Denklem (2.43)'deki gibi

$$Y(t) = e^{-\tau(t)} \left[Y(0) - \int_0^t e^{-\tau(t')Q} J(t') \frac{dt'}{\eta \varepsilon(t')} \right] \quad (2.51)$$

bulunabilir. Denklem (2.43) ile denklem (2.51) karşılaştırıldığında; (2.43)'den farklı olarak, (2.51)'deki $e^{-\tau(t')Q}$ ifadesinde Q 'nun matrisel bir terim olması nedeniyle eksponansiyel terimin çözülebilmesi için normal cebirsel yöntemlerin haricinde bir yöntem ihtiyacı ortaya çıkmaktadır. “Matris üstel” denklemler birçok yöntemle çözülebilmekte olup bu kısımda “Lagrange İnterpolasyonu”na dayalı bir çözüm ele alınmıştır.

Öncelikle Q matrisinin determinanı

$$\det(\lambda I - Q) = \lambda^2 - 2\gamma\lambda + \omega^2 = 0 \quad (2.52)$$

hesaplanırsın. Burada I , Q matrisi ile aynı boyutlarda birim matristir. Denklem (2.52)'nin çözümü bir çift

$$\lambda_{1,2} = \gamma \pm iw \quad (2.53)$$

özdeğer verir. Burada $w = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$, $\gamma = \frac{\eta\sigma}{2\varepsilon_0}$, $\rho = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon}$, olarak tanımlıdır. Bu

özdeğerler yardımıyla A , m sonlu boyutunda sabit bir matris ve $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m; \theta$ ayrık özdeğerlerine sahip olmak üzere bir $F(\theta A)$ fonksiyonu

$$F(\theta A) = \sum_1^m F(\theta\lambda_r)K(\lambda_r); \quad K(\lambda_r) = \prod_{s=1,2,\dots,m}^{s \neq r} \frac{(\lambda_s I - A)}{(\lambda_s - \lambda_r)} \quad (2.54)$$

hesaplanabilir. Buraya kadar anlatılan prosedürler denklem (2.51)'deki $e^{-\tau(t)Q}$ ifadesine uygulanırsa

$$e^{-\tau(t)Q} = \frac{\omega}{w} e^{-\gamma\tau(t)} \begin{pmatrix} \cos(w\tau(t) + \delta) & -i \sin w\tau(t) \\ -i \sin w\tau(t) & \cos(w\tau(t) - \delta) \end{pmatrix} \quad (2.55)$$

elde edilir. Denklem (2.55) ve (2.51)'in beraber ele alınması neticesinde

$$\begin{aligned} u(t) &= e^{-\rho t} \int_0^t e^{-\rho t'} j_n^e(t') \cos(w_n t' - \delta_n) dt' \\ v(t) &= ie^{-\rho t} \int_0^t e^{-\rho t'} j_n^e(t') \sin w_n t' dt' \end{aligned} \quad (2.56)$$

$$\begin{pmatrix} e_n^{kaynak}(t) \\ \eta h_n^{kaynak}(t) \end{pmatrix} = \frac{\bar{w}_n^2}{\varepsilon w_n^2} \begin{pmatrix} \cos(w_n(t) + \delta_n) & -i \sin w_n(t) \\ -i \sin w_n(t) & \cos(w_n(t) - \delta_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$$

şeklinde zamana bağlı katsayılar elde edilir. Burada

$$\delta_n = \arctan(\rho / w_n), \quad w_n = \sqrt{\bar{w}_n^2 - \rho^2}, \quad \bar{w}_n = \frac{\omega_n}{\sqrt{\epsilon\mu}} \text{ olarak tanımlıdır. Denklem (2.51)}$$

incelendiğinde kaynakların bulunmaması durumunda

$$Y(t) = e^{-\tau(t)} Y(0) \quad (2.57)$$

şeklinde bir çözüm ortaya çıkacaktır. Burada $Y(0)$ terimi Denklem (2.50)'da verildiği gibi başlangıç koşullarını tanımlar. Bu şekilde elde edilen başlangıç koşullarının da ilave edilmesi ile

$$\begin{aligned} e_n(t) &= e_n^{kaynak}(t) + e_n^{serbest}(t) \\ h_n(t) &= h_n^{kaynak}(t) + h_n^{serbest}(t) \end{aligned} \quad (2.58)$$

elektrik alan ve manyetik alana ilişkin katsayılar, serbest salınımlar ve kaynaklardan kaynaklı salınımlar olarak elde edilir [11].

Bu bölümde sadece elektrik alan ve manyetik alana ilişkin modal genlikler kullanılarak genel çözüm üzerinde durulmuştur. Değişik ortamlarda ortaya çıkan farklı modal genlikler için çözümler burada kullanılan prosedür ile bulunabilir. Dinamik ortamla dolu kavitelere irrotasyonel modlar için de bu bölümdeki gibi “matris üstel” yöntemle çözüm yapılması gerekmektedir. Dördüncü bölümde bu yapıda bir plazma ortamı problemi ele alınmıştır.

3. ELEKTROMANYETİKTE PLAZMA ORTAMI

3.1. Plazma Ortamının Açıklanması

Doğada madde dört halde bulunmaktadır. Bunlar katı, sıvı, gaz ve plazmadır. Plazma ortamı katı, sıvı ve gaz ortamlardan farklı özellikler göstermektedir. Plazma maddenin doğada en çok bulunan halidir. En tipik plazma ortamı güneş ve yıldızlardır. Ayrıca düşük yoğunluklu bölgeler de plazmanın görüldüğü ortamlardır. Plazma evrende doğal olarak bulunmakla beraber gazın ısıtılması ile veya güçlü elektromanyetik alana tabi tutulması ile de elde edilebilir. Bu işlemler sonucunda ortamda bulunan gaz içerisinde iyon olarak adlandırılan pozitif ve negatif parçacıklar ortaya çıkar ve moleküler ayrışmalar meydana gelir. Ortamda bulunan serbest elektronlar ve yüklü parçacıklar plazma ortamının iletken özelliklere sahip olmasına yani elektromanyetik alanlara tepki vermesine eşlik eder.

Plazma ilk olarak 1879 yılında Sir William Crookes tarafından keşfedilmiş ancak “radyant madde” olarak tanımlanmıştır. Daha sonra yapılan çalışmalar sonucunda plazma terimi ilk olarak 1928 yılında Irving Langmuir tarafından kullanılmıştır. Yapılan ilk çalışmalar gaz deşarjları ile ilgili olmuştur. Daha sonra 1930’lu yıllarda nükleer çalışmaların artması ile birlikte plazma alanında yapılan çalışmalar da genişlemiştir.

Plazma içerisindeki parçacıklar üzerine beş kuvvet etki eder. Bunlar elektrik kuvvetler, manyetik kuvvetler, basınç-gradyent kuvvetler, çekim kuvvetleri ve çarpışma kuvvetleridir. Bu kuvvetlerin toplamı plazma içerisindeki her bir parçacığın, kütle ve ivmesinin çarpımı olan, momentini verir. İki tür plazma yaklaşımı vardır. Bunlardan ilki bu beş kuvvetin tüm etkilerini ele alan sıcak plazma yaklaşımıdır. İkinci yaklaşım olan soğuk plazma yaklaşımında ise parçacıkların etkileşimleri sonucu ortaya çıkan sıcaklıkları ihmal eder. Bu durumda plazma içerisinde basınç-gradyent etkileri göz önüne alınmaz [37]. Plazma alanında yapılan çalışmalar temelde bu iki yaklaşıma göre ayrılmaktadır. Tamamen iyonlaşmış plazma durumunda ortamda nötr parçacık bulunmaz. Ortamda sadece pozitif iyonlar

ve serbest elektronlar mevcuttur. Bu plazma ortamında tüm parçacıklar ortak bir hızda hareket ederler. Bu tür bir ortam tamamen akışkan bir plazma olarak nitelendirilebilir [38].

Plazma, yüklü parçacıkların uygulanan bir alanın ve parçacık-parçacık etkileşimlerinin etkisi altında hareket etmek üzere serbest olduğu, iyonize gazdır. Plazma, parçacıkların hareketini kısıtlayan bir atom kafesin bulunmaması yönüyle diğer maddelerden farklıdır. Ancak, bir gaz içerisinde dahi parçacıklar ve alanlar arasındaki etkileşim polarizasyon etkisini artırır ve serbest uzay ile gazın geçirgenliği arasında fark oluşmasına neden olur. Buna ek olarak, gazı bir dış alana maruz bırakmak parçacıklar üzerindeki Lorentz kuvveti sonucu ikincil bir akım akmasına neden olur. Hareket eden parçacıkların birbirleri ile çarpışması sonucu iletkenlik terimi ile açıklanabilir bir etki olan momentlerini kaybederler.

3.2. Plazma Kriterleri

Plazma ortamı genel olarak nötr olmakla birlikte bazı durumlarda nötr olmayabilir. Ancak her durumda ortam iletkenidir. Plazma içerisindeki parçacıkların yörüngeleri elektromanyetik alanlar tarafından kontrol edilir. Parçacıkların hareketleri elektrik alan veya manyetik alan oluşturan akıma sebep olabilir. Her iyonize olmuş gaz plazma olarak nitelendirilemez. Bir ortamın plazma olarak nitelendirilebilmesi için bazı kriterleri sağlaması gerekir. Debye uzunluğu, parçacık sayısı ve çarpışma frekansının sağlaması gereken koşullar ortamın elektrostatik özelliklerini belirler. Bu koşullar Debye uzunluğu ile plazma boyutu, Debye hacmi ile parçacık yoğunluğu, çarpışma frekansı ile yüklü parçacıklar ve nötr atomların çarpışmaları arasında geçen ortalama zaman arasındaki bağıntılardır.

$$\lambda_D = \left[\frac{k_B T_e \epsilon_0}{N_e e^2} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad \lambda_D \ll L \quad (3.1)$$

Burada λ_D Debye uzunluğu, k_B Boltzman sabiti, T_e elektron sıcaklığı, ϵ_0 serbest uzayın elektrik geçirgenliği, N_e elektron yoğunluğu, e ise elektronun yüküdür.

Plazma içerisinde yüklü herhangi bir parçacığın diğer bir parçacığın elektrik alanını hissettiği mesafe Debye uzunluğu olarak belirtilir. Plazma boyutu L 'nin λ_D Debye uzunluğundan çok büyük olması, iyonlaşmış bir gazın plazma olarak adlandırılabilmesi için gerekli bir koşuldur. Bu tezde incelenecek olan nötr plazma için elektron yoğunluğu N_e ve iyon yoğunluğu N_i 'nin hemen hemen birbirine eşit olması anlamına gelen, plazmanın yaklaşık olarak nötr kalma (quasineutrality) koşulu kullanılır. Plazmayı etrafındaki yüzeylerden ayıran bir bölge meydana gelmektedir. Bu bölge plazma kılıfı olarak adlandırılmakta olup bu alanda pozitif yük yoğunluğu elektron yoğunluğundan fazladır. Plazma ortamı için gerekli olan koşullardan bir diğeri ise Debye hacmi içerisinde bulunan ve

$$N_D = \frac{4}{3} n \pi \lambda_D^3, \quad N_D \gg 1 \quad (3.2)$$

şeklinde tanımlı parçacık sayısının 1'den çok büyük olmasıdır. Diğer koşul ise yüklü parçacıklar ile nötr atomlar arasındaki ortalama çarpışma süresi τ ile ω_p plazma salınım frekansının

$$\omega_p \tau > 1 \quad (3.3)$$

çarpımının 1'den büyük olmasıdır. Ayrıca plazma için iki tane daha önemli parametre vardır. Bunlar sıcaklık ve yoğunluktur. Farklı sıcaklık ve yoğunluklarda birçok plazma evrende bulunmaktadır [39].

3.3. Homojen Manyetize Olmayan Nötr Plazma İçin Hareket Denklemi

Kaviteler mikrodalga sistemlerinde bulunan karakteristik elemanlardır. Kaviteler boş olabileceği gibi içerisi herhangi bir ortam ile doldurulmuş da olabilir. Dördüncü bölümün ilk kısmında boş kavite içerisinde elektromanyetik alanların zamanla evrimi çalışılmış, ikinci kısmında ise homojen manyetize olmayan nötr plazma ortamı ile doldurulmuş kavite problemi ele alınmıştır. Ancak plazma gibi dinamik bir ortamda çalışırken ortam ile alanlar arasındaki ilişkiyi açıklayan ilave

bağıntılara ihtiyaç duyulmaktadır. Bu nedenle öncelikle plazma için hareket denkleminin türetilmesine ihtiyaç vardır. Bu hareket denklemi, Ohm kanununun dinamik versiyonu olarak yorumlanabilir. Plazma akımı vektörü ile elektrik alan vektörü arasındaki bünye denklemi Maxwell denklemler sistemine Ohm kanununun dinamik bir versiyonu olarak ilave edilmiş ve ihtiyaç duyulan evrim denklemleri elde edilmiştir.

Homojen manyetize olmayan nötr plazma ortamına ilişkin hareket denklemini türetebilmek için öncelikle ortam ile ilgili bir takım varsayımların yapılması gerekmektedir. Bunlar;

- Plazma ortamının tamamen nötr olduğu varsayılmıştır. Yani serbest elektronlar ve pozitif iyonlar eşit sayıda ve düzgün dağılımdadır. Parçacıklar makroskopik anlamda kabul için yeterince yoğun ise gaz tarafından üretilen herhangi bir net alan ve dolayısıyla parçacıklar arasında herhangi bir elektromanyetik etkileşim yoktur. Plazma homojen olup elektron sayısı yoğunluğu N_e zamandan ve koordinatlardan bağımsızdır.
- Bir elektronun kütlesinin bir iyonun kütlesine oranı en az bir elektronun kütlesinin bir protonun kütlesine oranı ($m_p / m_e = 1837$) kadar olması ve dolayısıyla iyonların çok daha yavaş hızlanması nedeniyle ikincil akımın hesaplanmasında pozitif iyonların hareketi ihmal edilmiştir.
- Uygulanan alanın bir elektromanyetik dalga olduğu varsayılmıştır. Serbest uzayda manyetik alanın elektrik alana oranı $|\mathbf{H}| / |\mathbf{E}| = \sqrt{\epsilon_0 / \mu_0}$ olduğundan manyetik akı yoğunluğunun elektrik alana oranı

$$\frac{|\mathbf{B}|}{|\mathbf{E}|} = \mu_0 \sqrt{\epsilon_0 / \mu_0} = \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = \frac{1}{c} \quad (3.4)$$

şeklinde olur. Böylece, Lorentz kuvvet denklemi içinde bir elektronun gücü $v \ll c$ olduğu sürece yaklaşık olarak

$$\mathbf{F} = q_e (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \approx q_e \mathbf{E} \quad (3.5)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $q = q_e = -1.6021 \times 10^{-19} \text{ C}$ olmak üzere bir elektronun yüküdür.

- Harici kaynakların yokluğunda, yönlendirilmiş plazma hızının rastgele olduğunu belirten bir çarpışma frekansı γ kullanılarak parçacıklar arasındaki mekanik etkileşimlerin ifade edilebileceği varsayılmıştır.

Bu varsayımlar altında plazma ortamı için hareket denklemi yazılabilir. Plazma ortamının makroskopik hızının $v(\mathbf{r}, t)$ ile ifade edildiği varsayılın. Daha sonra, Newton'un ikinci yasasına göre, bir ortamdaki her noktaya etki eden kuvvet bu noktada moment değişim zamanı oranı ile dengelenir. Çarpışmalar nedeniyle moment yoğunluğundaki toplam değişim, moment hacim yoğunluğu

$$\wp(\mathbf{r}, t) = N_e m_e v(\mathbf{r}, t) \quad (3.6)$$

olmak üzere,

$$F(\mathbf{r}, t) = N_e q_e E(\mathbf{r}, t) = \frac{d}{dt} \wp(\mathbf{r}, t) + \gamma \wp(\mathbf{r}, t) \quad (3.7)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\wp(\mathbf{r}, t)$ ortamın momentini olup

$$[N_e m_e v] = [N_e] [m_e] [v] = \frac{1}{m^3} \text{ kg } \frac{m}{s} = \frac{1}{m^2} \frac{\text{kg}}{s} \quad (3.8)$$

fiziksel boyutlarındadır.

Plazmada hacimsel akım yoğunluğu için hareket denklemi

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [m_e v] + \gamma [m_e v] &= q_e E(\mathbf{r}, t) \Leftrightarrow \frac{q_e}{m_e} \\ \frac{d}{dt} [q_e v] + \gamma [q_e v] &= \frac{q_e^2}{m_e} E(\mathbf{r}, t) \\ \frac{d}{dt} [N_e q_e v] + \gamma [N_e q_e v] &= N_e \frac{q_e^2}{m_e} E(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (3.9)$$

şeklinde türetilir. Hacimsel akım yoğunluğu

$$\mathbf{J} \stackrel{def}{=} N_e q_e \mathbf{v} \quad (3.10)$$

şeklinde olmak üzere $J(E(\mathbf{r},t))$ için hareket denklemi

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} J(\mathbf{r},t) + \gamma J(\mathbf{r},t) &= N_e \frac{q_e^2}{m_e} E(\mathbf{r},t) \Leftrightarrow \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0} \\ \frac{d}{dt} J(\mathbf{r},t) + \gamma J(\mathbf{r},t) &= \varepsilon_0 \left[N_e \frac{q_e^2}{m_e \varepsilon_0} \right] E(\mathbf{r},t) \end{aligned} \quad (3.11)$$

şeklinde. Bulunan bu denklemdeki $\left[N_e \frac{q_e^2}{m_e \varepsilon_0} \right]$ katsayısının fiziksel boyutu hesaplanırsa

$$\begin{aligned} \left[N_e \frac{q_e^2}{m_e \varepsilon_0} \right] &= \frac{[N_e][q_e^2]}{[m_e][\varepsilon_0]} = \frac{[m^{-3}][C^2]}{[kg][Fm^{-1}]} \\ &= \frac{m^{-3}C^2}{kgFm^{-1}} = \frac{1}{s^2} = \left(\frac{1}{s^2} \right) \end{aligned} \quad (3.12)$$

şeklinde bir frekansın karesi olduğu görülür. Bu frekansı plazma frekansı olarak adlandırıp

$$\omega_p^2 \stackrel{def}{=} \frac{N_e q_e^2}{m_e \varepsilon_0} \quad (3.13)$$

şeklinde tanımlarsak plazmada hacimsel akım yoğunluğu için hareket denklemi

$$\frac{d}{dt} J(E(\mathbf{r},t)) + \gamma J(E(\mathbf{r},t)) = \varepsilon_0 \omega_p^2 E(\mathbf{r},t) \quad (3.14)$$

şeklini alır [40].

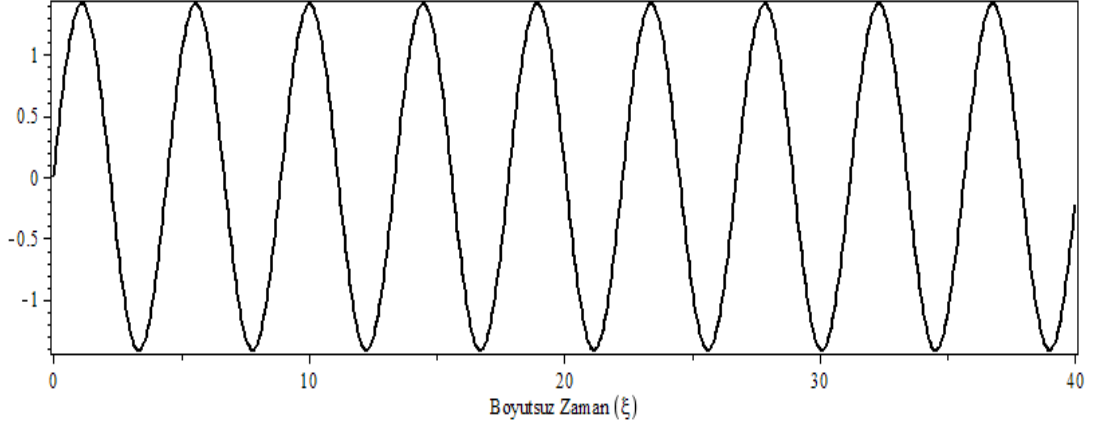
4. BOŞ VE PLAZMA İLE DOLDURULMUŞ KAVİTELER İÇİN İKİ UYGULAMA

Bu bölüm iki kısımdan oluşmaktadır. İlk kısımda boş bir kavite içerisinde zamana bağlı bir işaret tarafından uyarılan elektromanyetik salınımlar ETEY yöntemiyle zaman domeninde incelenmiştir. Alanları uyarıcı bir işaret Maxwell denklemlerine koordinatların ve zamanın bir fonksiyonu olarak elektrik akım yoğunluğu vasıtasıyla yerleştirilmiştir. İşaret, zamanda integrallenebilir isteğe bağlı herhangi bir fonksiyon olabilir. Zamana bağlı genlikleri içeren modal alan açılımları türetilmiş, modal genlikler bir işaret fonksiyonunun integrandın içerisinde bulunduğu, basit konvolüsyon integralleri formunda elde edilmiştir [41]. İkinci kısımda ise plazma ile doldurulmuş ve mükemmel iletken yüzeylerle kaplanmış dikdörtgen bir kavitede, sinüsoidal ve darbe işaretleri ile uyarılabilen alanların analizi için zaman domeninde yeni bir yaklaşım sunulmuştur. Zaman türevli Maxwell denklemleri, başlangıç koşulları ile desteklenerek, nedensellik prensibi altında çözülmüştür. Kaviteelerde, plazma gibi dinamik ortamların bulunması durumunda ilave bağıntılara ihtiyaç duyulur. Bu bağıntılar, ortam ile alanlar arasında ilişki kuran bünye bağıntılarıdır. Bu kısımda, Üçüncü bölümde elde edilen plazma için hareket denklemi bünye bağıntısı olarak kullanılmıştır. Plazma ortamı için Ohm kanununun dinamik versiyonu, plazma akımı vektörü ile elektrik alan vektörü arasındaki bünye denklemi olarak Maxwell denklemler sistemine ilave edilmiştir. Elektrik alan, manyetik alan ve plazma akımı için çözümler, kesin çözüm olarak basit konvolüsyon integralleri formunda elde edilmiştir [42].

4.1. Boş Kavite İçerisinde Bir İşaret Tarafından Uyarılan Alanların Evrimi

Bu kısımda ETEY yönteminin bir mikrodalga kavite içerisindeki alanların zamanla evrimini sergileme konusundaki yeterliliği gösterilmiştir. Kavite, hemen her mikrodalga sisteminde bulunan karakteristik bileşenlerdendir. Çalışmada, kavite içerisindeki alanları uyarıcı işaret fonksiyonu olarak, nedensellik prensibini sağlamak

üzere zamanda başlangıcı olan Şekil 4.1'deki gibi rastgele bir frekansta salınım yapan bir sinusoidal seçilmiştir.



Şekil 4.1 Rastgele Frekanslı Sinüsoidal Kaynak Fonksiyonu.

4.1.1. Elektromanyetik Teoriye Evrimsel Yaklaşım Prosedürü

4.1.1.1 Maxwell Denklemleri'nden Kendine-Eşlenik Bir Operatör Türetilmesi

Zaman-domeninde gerçek-değerli altı bileşenli bir elektromanyetik alan vektörü

$$X(\mathbf{r}, t) = \begin{pmatrix} E(\mathbf{r}, t) \\ H(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

olsun. $\mathbf{r}$ gözlem noktasının konum vektörü, t gözlem zamanı $E(\mathbf{r}, t)$ ve $H(\mathbf{r}, t)$ elektrik ve manyetik alan vektörleri olmak üzere tanımlansın. $J_e(\mathbf{r}, t)$ ve $J_h(\mathbf{r}, t)$ kavite içerisinde sırasıyla elektrik ve manyetik alanları uyarmak üzere uygulanan ve

$J_{ext}(\mathbf{r}, t) = \begin{pmatrix} J_e(\mathbf{r}, t) \\ J_h(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix}$ yi oluşturan kaynaklar, $\mathfrak{R}'$ 6×6 boyutlarında matris türev prosedürü

$$\mathfrak{R}'X(\mathbf{r}, t) = \begin{pmatrix} \epsilon_0^{-1} \nabla \times H(\mathbf{r}, t) \\ \mu_0^{-1} \nabla \times E(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{O} & \epsilon_0^{-1} \nabla \times \\ \mu_0^{-1} \nabla \times & \mathbf{O} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E(\mathbf{r}, t) \\ H(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

ve $\mathbf{n}$ mükemmel iletken kapalı kavite yüzeyi S 'den dışarıya doğru birim vektör olmak üzere; $[\mathbf{n} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)]|_S = 0$ ve $[\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)]|_S = 0$ sınır koşullarının $\mathfrak{R}'$ ile birleşiminden oluşan $\mathfrak{R}$ kendine-eşlenik operatörü

$$\mathfrak{R}X(\mathbf{r}, t) = \begin{cases} \mathfrak{R}'X(\mathbf{r}, t), & \mathbf{r} \in V, \quad \mathbf{r} \notin S, \\ \mathbf{n} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = 0, & \mathbf{r} \notin V, \quad \mathbf{r} \in S, \end{cases} \quad (4.3)$$

yardımıyla ve σ kavitenin V hacmi içerisindeki olası kayıpları modelleyen iletkenlik $J(\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)) = \sigma \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \sigma \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{J}_e(\mathbf{r}, t) \\ \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\mu_0 \partial_t \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{J}_h(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Maxwell denklemleri sınır koşulları ile birlikte altı bileşenli bir denklem şeklinde yazılabilir:

$$\mathfrak{R}X(\mathbf{r}, t) = \begin{pmatrix} \partial_t \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + (\sigma / \varepsilon_0) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \varepsilon_0^{-1} \mathbf{J}_e(\mathbf{r}, t) \\ -\partial_t \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) - \mu_0^{-1} \mathbf{J}_h(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

$t < 0$ iken akım yoğunlukları $\mathbf{J}_e(\mathbf{r}, t) = 0$ ve $\mathbf{J}_h(\mathbf{r}, t) = 0$ olduğundan, problemin çözümü nedensellik prensibi

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \text{ ve } \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \equiv 0, \text{ eğer } t < 0 \text{ ise} \quad (4.6)$$

ile uyumlu olmalıdır.

Denklem (4.2) ve (4.3) incelenecek olursa $\mathfrak{R}$ operatörünün sadece uzaysal $\mathbf{r}$ değişkeni üzerinde etkisinin olduğu, zaman değişkeni t 'nin ise bir parametre rolü oynadığı görülür. Bu durum; V domeninde iki defa türevlenebilir, S sınırları üzerinde (4.3)'teki ile aynı sınır koşullarına tabi, gerçek değerli $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ ve $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ vektör fonksiyonlarından oluşan altı bileşenli $\mathbf{X}(\mathbf{r})$;

$$\mathbf{X}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}) \end{pmatrix}; \quad \begin{aligned} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}_n(\mathbf{r}))|_S &= 0, \\ [\mathbf{n} \times \mathbf{E}_n(\mathbf{r})]|_S &= 0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

elemanlarının oluşturduğu fonksiyonel bir çözümler uzayı sunmayı önerir. Burada,

$\mathbf{X}_1(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) \\ \mathbf{H}_1(\mathbf{r}) \end{pmatrix}$ ve $\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_2(\mathbf{r}) \\ \mathbf{H}_2(\mathbf{r}) \end{pmatrix}$ vektörlerinin herhangi bir çiftinden oluşan bir iç çarpım sunarak

$$\langle \mathbf{X}_1(\mathbf{r}), \mathbf{X}_2(\mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{V} \int_V (\varepsilon_0 \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}_2(\mathbf{r}) + \mu_0 \mathbf{H}_1(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{H}_2(\mathbf{r})) dv \quad (4.8)$$

çözümler uzayını belirleyelim. Açıkça görülür ki, V kapalı domeninde değişim gösteren vektör fonksiyonlarının Hilbert uzayı $L_2(V)$ 'nda işlem yapılmaktadır.

İç çarpımlar arasında

$$\langle \Re \mathbf{X}_1(\mathbf{r}), \mathbf{X}_2(\mathbf{r}) \rangle - \langle \mathbf{X}_1(\mathbf{r}), \Re \mathbf{X}_2(\mathbf{r}) \rangle = 0 \quad (4.9)$$

ilişkisi geçerlidir. Bu gerçek, ω_n 'ler gerçek değerli özdeğerler, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

özdeğerlerin gerçek ekseninde dağılımını belirleyen alt indis ve $\mathbf{X}_n(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_n(\mathbf{r}) \\ \mathbf{H}_n(\mathbf{r}) \end{pmatrix}$ bu

özdeğerlere karşılık gelen özvektörler olmak üzere; $\Re$ operatörünün kendine-eşlenik olduğunu ve

$$\Re \mathbf{X}_n(\mathbf{r}) = \omega_n \mathbf{X}_n(\mathbf{r}): \quad \mathbf{r} \in V, \mathbf{r} \in S \quad (4.10)$$

operatör özdeğer denkleminin sağlandığını gösterir. V domeni sonlu olduğu için $\{\omega_n\}$ spektrumu ayrıktır.

4.1.1.2 Solenoidal ve İrrotasyonel Kavite Modlarının Tam Kümesi

$\Re$ operatörünün denklem (4.10)'da yerine konması, $\mathbf{X}_n(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_n(\mathbf{r}) \\ \mathbf{H}_n(\mathbf{r}) \end{pmatrix}$

özvektörlerinin terimleri ile yazılmış

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H}_n(\mathbf{r}) &= \omega_n \varepsilon_0 \mathbf{E}_n(\mathbf{r}), \quad (\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}_n(\mathbf{r}))|_S = 0, \\ \nabla \times \mathbf{E}_n(\mathbf{r}) &= \omega_n \mu_0 \mathbf{H}_n(\mathbf{r}), \quad [\mathbf{n} \times \mathbf{E}_n(\mathbf{r})]|_S = 0. \end{aligned} \quad (4.11)$$

eş sınır özdeğer problemini verir. Denklem (4.11)'in analizi, çözümler uzayının altı alt uzayında altı çeşit çözüm olduğunu ortaya çıkarır. $\omega_n \neq 0$ özdeğerlerine karşılık gelen çözümler, solenoidal vektörlerin dört alt uzayını verir. Eğer kavite hacmi silindirik bir kılavuzdan alınmış bir kesit ise, solenoidal vektörler fiziksel olarak, TE ve TM kavite modlarına karşılık gelir. $c^{-2} = \varepsilon_0 \mu_0$ ve $n=1,2,\dots$ olmak üzere, $\omega'_n > 0$; $\Re$ operatörünün gerçek değerli özdeğerler kümesi, $\omega''_n > 0$; $\Re$ operatörünün bir başka özdeğerler kümesidir. Solenoidal TE ve TM kavite modları için sırasıyla

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'\{\mathbf{E}'_n(\mathbf{r})\} : & \begin{cases} \nabla^2 \mathbf{E}'_n(\mathbf{r}) + (\omega'_n / c)^2 \mathbf{E}'_n(\mathbf{r}) = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{E}'_n(\mathbf{r}) = 0, \quad [\mathbf{n} \times \mathbf{E}'_n(\mathbf{r})]|_S = 0 \end{cases} \\ \mathbf{h}'\{\mathbf{H}'_n(\mathbf{r})\} : & \begin{cases} \mathbf{H}'_n(\mathbf{r}) = (\omega'_{\pm n} \mu_0)^{-1} \nabla \times \mathbf{E}'_n(\mathbf{r}) \\ \nabla \cdot \mathbf{H}'_n(\mathbf{r}) = 0 \quad (\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}'_n(\mathbf{r}))|_S = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{h}''\{\mathbf{H}''_n(\mathbf{r})\} : & \begin{cases} \nabla^2 \mathbf{H}''_n(\mathbf{r}) + (\omega''_n / c)^2 \mathbf{H}''_n(\mathbf{r}) = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{H}''_n(\mathbf{r}) = 0, \quad (\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}''_n(\mathbf{r}))|_S = 0 \end{cases} \\ \mathbf{e}''\{\mathbf{E}''_n(\mathbf{r})\} : & \begin{cases} \mathbf{E}''_n(\mathbf{r}) = (\omega''_n \varepsilon_0)^{-1} \nabla \times \mathbf{H}''_n(\mathbf{r}) \\ \nabla \cdot \mathbf{E}''_n(\mathbf{r}) = 0, \quad [\mathbf{n} \times \mathbf{E}''_n(\mathbf{r})]|_S = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.13)$$

şeklinde Laplacian sınır özdeğer problemleri elde edilir.

Denklem (4.10)'da ve sonuç olarak (4.11)'de $\omega_0 = 0$ olduğunda; $\alpha = 1, 2, \dots$ için $\kappa_\alpha^2 > 0$ özdeğerler ve ϕ_α 'lar κ_α^2 'lara karşılık gelen özfonksiyonlar

$$\mathcal{G}_E\{\mathbf{E}_\alpha(\mathbf{r})\} : \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E}_\alpha(\mathbf{r}) = \nabla \phi_\alpha(\mathbf{r}) : \\ \nabla^2 \phi_\alpha(\mathbf{r}) + \kappa_\alpha^2 \phi_\alpha(\mathbf{r}) = 0, \\ \phi_\alpha(\mathbf{r})|_S = 0 \end{array} \right\}_{n=1}^\infty \quad (4.14)$$

$\beta = 1, 2, \dots$ için $v_\beta^2 > 0$ özdeğerler ve ψ_β 'ler v_β^2 'lere karşılık gelen özfonksiyonlar olmak üzere

$$\mathcal{G}_H\{\mathbf{H}_\alpha(\mathbf{r})\} : \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{H}_\alpha(\mathbf{r}) = \nabla \psi_\beta(\mathbf{r}) : \\ \nabla^2 \psi_\beta(\mathbf{r}) + v_\beta^2 \psi_\beta(\mathbf{r}) = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \nabla \psi_\beta(\mathbf{r})|_S = 0 \end{array} \right\}_{\beta=1}^\infty \quad (4.15)$$

problem (4.11)'in iki ayrık sonsuz özçözüm seti vardır. Bu durum matematiksel olarak, $\mathfrak{R}$ operatörünün özdeğeri ω_0 'ın sonsuz dejenerasyon derecesine sahip olduğu anlamındadır. $\{\mathbf{E}_\alpha(\mathbf{r})\}_{\alpha=1}^\infty$ ve $\{\mathbf{H}_\alpha(\mathbf{r})\}_{\beta=1}^\infty$ kümeleri Hilbert uzayında sırasıyla $\mathcal{G}_E$ ve $\mathcal{G}_H$, şeklinde iki alt uzay oluştururlar. Bu alt uzaylar $\mathbf{n} \times \mathbf{E}_\alpha(\mathbf{r}) = 0$ ve $\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}_\beta(\mathbf{r}) = 0$ olduğundan sadece irrotasyonel vektörleri içerirler.

(4.10) operatör denkleminin tüm $\mathbf{X}_n(\mathbf{r})$ çözümleri $\mathcal{M}(\mathbf{X}_n(\mathbf{r}))$ manifoldu ile belirtilsin ve $\oplus$ notasyonu çözümler uzayında alt uzayların doğrudan toplamasını sembolize etmek üzere

$$\mathcal{M}(\mathbf{X}_n(\mathbf{r})) = \begin{array}{c} \mathcal{E}\{\mathbf{E}_{n,\alpha}(\mathbf{r})\} \\ \mathcal{H}\{\mathbf{H}_{n,\alpha}(\mathbf{r})\} \end{array} = \begin{array}{c} \mathcal{E}'\{\mathbf{E}'_n(\mathbf{r})\} \oplus \mathcal{E}''\{\mathbf{E}''_n(\mathbf{r})\} \oplus \mathcal{G}_E\{\mathbf{E}_\alpha(\mathbf{r})\} \\ \mathcal{H}'\{\mathbf{E}'_n(\mathbf{r})\} \oplus \mathcal{H}''\{\mathbf{E}''_n(\mathbf{r})\} \oplus \mathcal{G}_H\{\mathbf{H}_\beta(\mathbf{r})\} \end{array} \quad (4.16)$$

şeklinde gösterilsin.

Üç önemli yorum:

1. $\mathcal{M}(\mathbf{X}_n(\mathbf{r}))$ manifoldunun Hilbert uzayı $L_2(V)$ 'nda tamlığı fonksiyonel analizdeki Weyl teoremi [43] ile ispatlanmıştır [10].
2. Bütün altı bileşenli $\mathbf{X}_n(\mathbf{r})$ vektörleri, $\mathfrak{R}$ operatörünün kendine-eşlenik özvektörleri olarak, Hilbert uzayı $L_2(V)$ 'nda. $\mathbf{X}_n(\mathbf{r})$ 'in üçer bileşenli kısımları olan $\mathbf{E}_n(\mathbf{r})$ ve $\mathbf{H}_n(\mathbf{r})$ de aynı şekilde birbirlerine diktir. Uygun normalizasyon; bütün $\mathbf{E}_n(\mathbf{r})$ ve $\mathbf{H}_n(\mathbf{r})$ vektörlerinin, sırasıyla Vm^{-1} ve Am^{-1} fiziksel boyutlarını sağlayabilir. Bu anlamda, (4.16) manifoldu kavite alanları için fiziksel anlamda bir modal bazdır.
3. Modal bazın türetilmesi sürecinde, (4.5) Maxwell denklemlerinde ∂t zamanda türev ifadesi korunmuş ve böylece modal genlikler için zamanda türev içeren bir problem elde edilmesi sağlanabilmiştir.

4.1.1.3 Zamana Bağlı Elektromanyetik Büyüklüklerin Modal Açılımları

Modal bazın vektör elemanları bilinen büyüklükler olarak değerlendirilmek üzere, elektrik ve manyetik alan vektörleri zaman domeninde modal açılımlar yolu ile

$$\begin{aligned} E(\mathbf{r}, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} e_n'(t) \mathbf{E}_n'(\mathbf{r}) + \sum_{n=1}^{\infty} e_n''(t) \mathbf{E}_n''(\mathbf{r}) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \mathbf{E}_n(\mathbf{r}) \\ H(\mathbf{r}, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} h_n'(t) \mathbf{H}_n'(\mathbf{r}) + \sum_{n=1}^{\infty} h_n''(t) \mathbf{H}_n''(\mathbf{r}) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \mathbf{H}_n(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (4.17)$$

şeklinde gösterilebilir. Problem, modal genlikler olan fiziksel olarak boyutsuz zamana bağlı skaler katsayıların bulunmasıdır.

Maxwell denklemleri (4.5)'ndeki kaynak fonksiyonları olan J_e ve J_h , kavite içerisine uygulanan salınımları ifade etmektedirler. J_e ve J_h harici kaynak fonksiyonları; $\mathbf{F}(\mathbf{r})$, $s(t)$ işaret taşıyıcısının tanımlanması için atanan ve koordinat

belirten verilmiş vektör fonksiyonları olmak üzere elektrik türden ve manyetik türden kaynaklar olarak

$$J_e(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \mathbf{F}_e(\mathbf{r}) s(t) K, \quad J_h(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \mathbf{F}_h(\mathbf{r}) s(t) K \quad (4.18)$$

şeklinde ifade edilsinler. $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ vektörü $E(\mathbf{r}, t)$ ve $H(\mathbf{r}, t)$ alanları ile aynı fiziksel boyutta, $s(t)$ boyutsuz zaman fonksiyonu ve T esas zaman olmak üzere; $K = \frac{1}{T}$ katsayısı J_e ve J_h 'in tanımını

$$J_e(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \mathbf{F}_e(\mathbf{r}) s(t) / T, \quad J_h(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \mathbf{F}_h(\mathbf{r}) s(t) / T \quad (4.19)$$

şeklinde verir. Bu durumda İkinci bölümde anlatılan şekilde kuvvet fonksiyonları için modal açılımlar

$$\begin{aligned} F_e(\mathbf{r}, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} F'_{ne}(t) \mathbf{E}'_n(\mathbf{r}) + \sum_{n=1}^{\infty} F''_{ne}(t) \mathbf{E}''_n(\mathbf{r}) + \sum_{\alpha=1}^{\infty} F_{\alpha}(t) \mathbf{E}_{\alpha}(\mathbf{r}) \\ F_h(\mathbf{r}, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} F'_{nh}(t) \mathbf{H}'_n(\mathbf{r}) + \sum_{n=1}^{\infty} F''_{nh}(t) \mathbf{H}''_n(\mathbf{r}) + \sum_{\beta=1}^{\infty} F_{\beta}(t) \mathbf{H}_{\beta}(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (4.20)$$

elde edilir. Tanımda olduğu gibi, uygulanan J_e ve J_h kaynak vektör fonksiyonları elektrik ve manyetik akımların yoğunluklarının sırasıyla Am^{-2} ve Vm^{-2} fiziksel boyutlarına sahiptir. Buradaki kuvvet terimleri

$$\begin{aligned} F'_{ne}(t) &= \frac{\varepsilon_0}{V} \int_V F_e(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}'_n(\mathbf{r}) dv & F'_{nh}(t) &= \frac{\mu_0}{V} \int_V F_h(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{H}'_n(\mathbf{r}) dv \\ F''_{ne}(t) &= \frac{\varepsilon_0}{V} \int_V F_e(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}''_n(\mathbf{r}) dv & F''_{nh}(t) &= \frac{\mu_0}{V} \int_V F_h(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{H}''_n(\mathbf{r}) dv \\ F_{\alpha}(t) &= \frac{\varepsilon_0}{V} \int_V F_e(\mathbf{r}, t) \cdot \nabla \Phi_{\alpha}(\mathbf{r}) dv & F_{\beta}(t) &= \frac{\mu_0}{V} \int_V F_h(\mathbf{r}, t) \cdot \nabla \Psi_{\beta}(\mathbf{r}) dv \end{aligned} \quad (4.21)$$

elde edilir. $F(\mathbf{r}, t)$ kuvvet fonksiyonunun kaviteye bir $s(t)$ işareti sağlayan bir nokta dipole karşılık gelmesi halinde kuvvet fonksiyonu;

$$F(\mathbf{r}, t) = \mathbf{d} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s) s(t), \quad (4.22)$$

şeklini alır. Burada; $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s)$ Dirac delta fonksiyonu, $\mathbf{r}_s$ kavite içerisinde dipolün yerini tanımlayan pozisyon vektörü, $\mathbf{d}$ ise dipolün $E(\mathbf{r}, t)$ alanıyla aynı birimlerle ölçülen, yönünü ve gücünü tanımlayan vektördür. $s(t)$ işareti, zamanda integrallenebilir herhangi bir fonksiyon olabilir. Denklem (4.22)'nin (4.21)'de yerine konması f'_n , f''_n ve $f_{\alpha, \beta}$ sabitler olmak üzere

$$\begin{aligned} F'_n(t) &= f'_n s(t), & F''_n(t) &= f''_n s(t), & F_{\alpha, \beta}(t) &= f_{\alpha, \beta} s(t), \\ f'_{ne} &= \frac{\epsilon_0}{V} \mathbf{d} \cdot \mathbf{E}'_n(\mathbf{r}_s), & f''_{ne} &= \frac{\epsilon_0}{V} \mathbf{d} \cdot \mathbf{E}''_n(\mathbf{r}_s), & f_\alpha &= \frac{\epsilon_0}{V} \mathbf{d} \cdot \nabla \phi_n(\mathbf{r}_s), \\ f'_{nh} &= \frac{\mu_0}{V} \mathbf{d} \cdot \mathbf{H}'_n(\mathbf{r}_s), & f''_{nh} &= \frac{\mu_0}{V} \mathbf{d} \cdot \mathbf{H}''_n(\mathbf{r}_s), & f_\beta &= \frac{\mu_0}{V} \mathbf{d} \cdot \nabla \Psi_n(\mathbf{r}_s) \end{aligned} \quad (4.23)$$

sonuçlarını verir.

4.1.1.4 Modal Genlikler İçin Evrimsel Denklemler: Cauchy Problemi

Modal genlik problemi, Maxwell denklemlerinin modal bazın elemanları üzerine izdüşümü alınarak düzenlenebilir. Özellikle, Maxwell denklemlerinin, sırasıyla $\mathbf{e}'$ ve $\mathbf{h}'$ altuzaylarından alınmış olan, eşlenmiş iki $\mathbf{E}'_n(\mathbf{r})$ ve $\mathbf{H}'_n(\mathbf{r})$ elemanı üzerine izdüşümünün alınması; sonuç olarak $e'_n(t)$ ve $h'_n(t)$ genlikler çifti için;

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e'_n(t) + 2\gamma e'_n(t) - \omega'_n h'_n(t) &= -f'_{ne} \mathcal{H}(t) \frac{s(t)}{T}, & e'_n(0) &= 0, \\ \frac{d}{dt} h'_n(t) + \omega'_n e'_n(t) &= -f'_{nh} \mathcal{H}(t) \frac{s(t)}{T}, & h'_n(0) &= 0, \end{aligned} \quad (4.24)$$

şeklinde zaman türevli bir çift adi diferansiyel denklemi verir. Burada $n=1, 2, \dots$, $\gamma = \sigma / (2\epsilon_0)$ şeklinde tanımlı olup basit bir örnek olarak Denklem (4.22)'deki nokta dipol kaynak durumu alınmıştır. Zaman türevli Maxwell denklemleri vektör alanları için başlangıç koşulları ile tamamlanmalıdır. Burada başlangıç koşullarının

$E(\mathbf{r}, 0) = 0$ ve $H(\mathbf{r}, 0) = 0$ olarak alınması Denklem (4.25)'deki modal genlikler için bir çift başlangıç koşulunu verir. Denklem (4.25)'de başlangıç koşulları ile birlikte ele alınan evrimsel denklemler $e'_n(t)$ ve $h'_n(t)$ modal genlikleri için tek bir çözüme sahip iki Cauchy problemini oluşturur. Benzer prosedür $e''_n(t)$ ve $h''_n(t)$ genlikler çifti için bir başka Cauchy problemini $n = 1, 2, \dots$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e''_n(t) + 2\gamma e''_n(t) - \omega_n'' h''_n(t) &= -f_{ne}'' \mathcal{H}(t) \frac{s(t)}{T}, \quad e''_n(0) = 0, \\ \frac{d}{dt} h''_n(t) + \omega_n'' h''_n(t) &= -f_{nh}'' \mathcal{H}(t) \frac{s(t)}{T}, \quad h''_n(0) = 0, \end{aligned} \quad (4.25)$$

verir.

Benzer olarak, irrotasyonel $a_\alpha(t)$ ve $b_\beta(t)$ modları için

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} a_\alpha(t) + 2\gamma a_\alpha(t) &= -f_\alpha \mathcal{H}(t) \frac{s(t)}{T}, \quad a_\alpha(0) = 0, \\ \frac{d}{dt} b_\beta(t) &= -f_\beta \mathcal{H}(t) \frac{s(t)}{T}, \quad b_\beta(0) = 0, \end{aligned} \quad (4.26)$$

Cauchy problemleri elde edilir. Denklem (4.26) temel bir konvolüsyon integrali problemidir. Denklem (4.24) ve denklem (4.25) problemlerinin açık çözümü İkinci bölümde ele alınan "matris üstel" ifadelerin çözüm yöntemi ile bulunabilir. Bu metot Fourier veya Laplace integral dönüşümlerinin kullanılmasına ihtiyaç duymadığından çeşitli geçici ve devamlı işaretlerin incelemesinde kullanmak için uygundur.

4.1.1.5 İrrotasyonel Modlara İlişkin Zamana Bağlı Çözümler

Denklem (4.26)'daki manyetik alanlar ($b_\beta(t)$) için elektrik türden kaynak ($f_\beta = 0$) durumuna ilişkin çözüm;

$$\frac{d}{dt} b_\beta(t) = 0, \quad b_\beta(0) = 0 \Rightarrow b_\beta(t) = \text{sabit}, \beta = 1, 2, \dots \rightarrow \infty \quad (4.27)$$

şeklinde bir sabit olarak elde edilir. Elektrik türden irrotasyonel modlara ilişkin çözüm ise konvolüsyon integrali formunda

$$a_{\alpha}(\xi) = -\mathcal{H}(\xi) f_{\alpha}(\xi) \int_0^{\xi} e^{2\eta\rho_0(x-\xi)} s(x) dx \quad (4.28)$$

$\rho_0 = \gamma / \gamma_1$, $\gamma = \sigma / (2\varepsilon_0)$ olmak üzere elde edilir. (4.28)'deki konvolüsyon integrali, (2.51)'den farklı olarak matris üstel ifade içermediğinden, çözümü kolaylıkla

$\theta = \cos^{-1} \left[1 / \sqrt{1 + (2\gamma / \Omega)^2} \right]$ ve $\alpha = 1, 2, \dots \rightarrow \infty$ olmak üzere

$$a_{\alpha}(t) = \frac{\mathcal{H}(t) f_{\alpha}(t)}{2\pi \sqrt{1 + (2\gamma / \Omega)^2}} \left[\cos(\Omega t + \theta) - \frac{\exp(-2\gamma t)}{\sqrt{1 + (2\gamma / \Omega)^2}} \right] \quad (4.29)$$

tam çözüm formunda elde edilir.

4.1.1.6 Solenoidal Modlara İlişkin Zamana Bağlı Çözümler

(4.24) Cauchy problemi elektrik türden kaynak durumu için operatör formda

$Y_n(\xi) = \begin{pmatrix} e_n(\xi) \\ h_n(\xi) \end{pmatrix}$ ve $F_2(\xi) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ olmak üzere

$$\frac{d}{d\xi} Y_n'(\xi) + D_2 Y_n'(\xi) = -f_{ne}(\xi) \mathcal{H}(\xi) F_2(\xi), \quad Y_n'(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.30)$$

şeklinde yazılabilir. Burada D_2 katsayısı

$$D_2 = \begin{pmatrix} 2\gamma & -\omega_n \\ \omega_n & 0 \end{pmatrix} \quad (4.31)$$

şeklinde 2×2 ebatlarında sabit bir matristir. Denklem (4.30)'un çözümü elektrik alan $e(\xi)$ ve manyetik alan $h(\xi)$ için solenoidal modlara ait genlikleri verir.

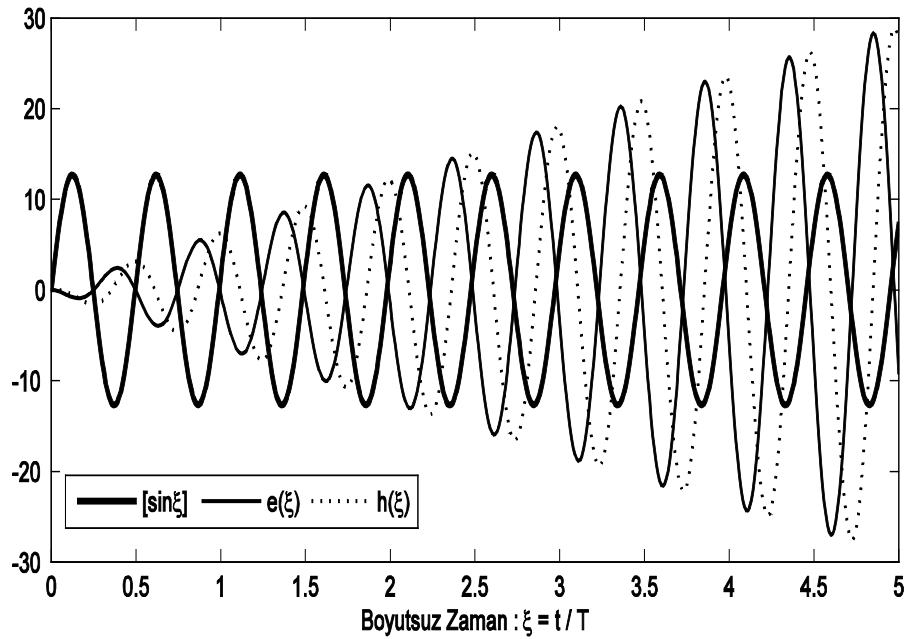
Probleme ilişkin, kaynak fonksiyonunun integrandın içinde yer aldığı

$$Y_n(\xi) = -\mathcal{H}(\xi) \int_0^\xi e^{(x-\xi)D_2} F_2 f_{ne}(x) dx \quad (4.32)$$

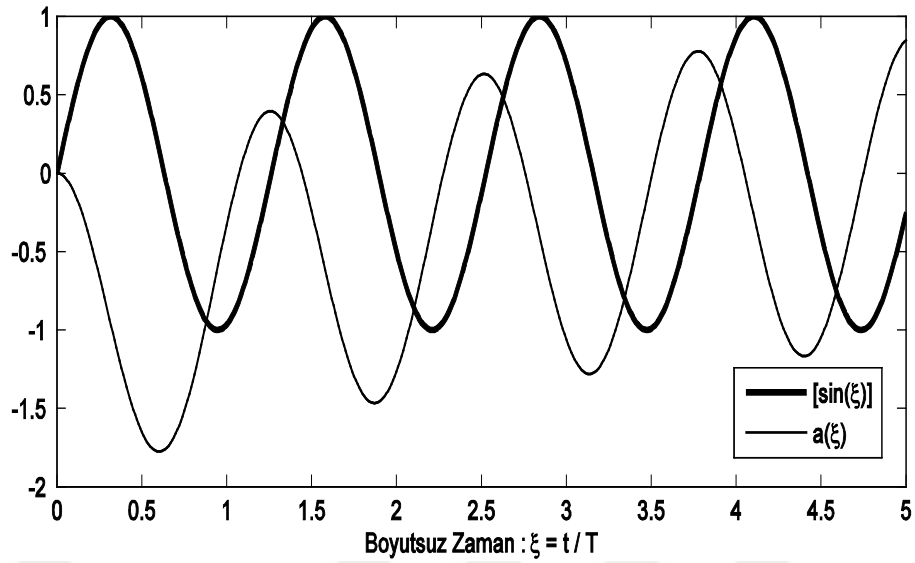
formunda konvolüsyon integrali elde edilir. Bu integralin çözümü de 2.3.5’de “matris üstel”lerin çözümü için ele alınan yöntemle bulunabilir.

4.1.2. Grafiksel Sonuçlar

Denklem (4.32)’de elde edilen kavite içerisindeki alanlara ilişkin çözüm ifadesinde, kaynak olarak zamanda bir başlangıcı olan bir sinusoidal işaretin ele alınması sonucu solenoidal modal genliklere ait zamanla değişim grafikleri Şekil 4.2’de, irrotasyonel genliklere ait (4.29) zamanla değişim grafiği ise Şekil 4.3’de sergilenmiştir.



Şekil 4.2 Sinusoidal İşaret ve Uyarılan Solenoidal Alanlara $[e(\xi)$ ve $h(\xi)]$ Ait Modal Genlikler.



Şekil 4.3 Sinusoidal İşaret ve Uyarılan İrrotasyonel Modal Alana Ait Genlikler $[a(\xi)]$.

4.2. Plazma İle Doldurulmuş Kavitede Bir İşaret Tarafından Uyarılan Alanların Zamanla Evrimi

Bu kısımda, doğal veya insan yapımı gerilim ve akım darbelerinin kavite içerisinde oluşturdukları alanların zamanla evrimi problemi ele alınmıştır. Elektromanyetik salınım işaretlerinden farklı olarak darbeler, çeşitli alanlardaki elektronik sistemler ve ekipmanlar üzerinde geçici veya kalıcı hasar bırakan etkilere sebep olabilmektedir. Navigasyon, savunma ve haberleşme sistemleri, modern tıp ekipmanları; yıldırım etkisi, endüstriyel ve evsel aletlerdeki arızalar, elektrostatik boşalmalar gibi doğal darbelerin etkisinin yanında, çok küçük ebatlardaki mikrodalga jeneratörleri tarafından üretilebilen insan yapımı darbe işaretlerinin de tehdidi altındadır [44,45].

Plazma ile doldurulmuş mikrodalga kavite içerisindeki dinamik bir ortamda alan büyüklüklerinin zamanla değişimi konusunda ETEY metodunun yeterliliğinin gösterilmesi maksadıyla bu kısımda, kaynak fonksiyonu olarak darbe işareti ve rastgele frekanslı bir sinüsoidal işaret kullanılarak alanların zamanla evrimi

çalışılmıştır. Darbe işaretlerini modellemek için literatürde yaygın olarak kullanılan çift-üstel darbe dalga şekli kullanılmıştır [46].

Her kaynak fonksiyonunun zamanda bir başlangıcı olduğundan, Maxwell denklemler sistemine ilişkin çözümler uygun başlangıç koşulları altında nedensellik prensibine uygun olarak elde edilmiştir. Kavitede irrotasyonel ve solenoidal modal alanların her ikisi de uyarılmaktadır. Modal genliklere ait kesin çözümler elde edilmiş ve solenoidal dalga şekilleri üzerinde baskın olan irrotasyonel dalga şekilleri gözlenmiştir. Metodun plazma gibi dinamik ortamlardaki yetkinliğini göstermek üzere, kavite homojen nötr manyetize olmayan plazma ile tamamen doldurulmuş olarak düşünülmüştür. Bu durum; Maxwell denklemler sisteminin, dinamik Ohm kanunu olarak yorumlanabilen ve plazma akımı vektörü ile elektrik alan vektörü arasında bünye bağlantısı kuran ve Üçüncü bölümde türetilen plazma için hareket denklemi ile desteklenmesini gerektirmektedir. Genliklere ilişkin çözümler basit konvolüsyon integralleri formunda elde edilmiştir.

4.2.1. Problemin Formülasyonu

4.2.1.1 Kavite ve Ortamın Açıklanması

Kartezyen koordinat sisteminde (x, y, z) , $O(0, 0, 0)$ orjin noktası, a, b ve d kenar uzunlukları olmak üzere $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq d$ ebatlarında bir V kavite hacmi tanımlayalım. $\mathbf{n}$; S yüzeyinden dışarı birim normal, $\mathbf{r}$; V hacimli bir kavite içerisindeki gözlem noktasının konum vektörü ve t ; gözlem zamanı olmak üzere V kavite hacmi, üzerinde

$$\mathbf{r} \in S: \quad \mathbf{n} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (4.33)$$

sınır koşullarının sağlandığı mükemmel iletken S yüzeyi ile çevrelenmiş olsun. $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ ve $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ çözümü aranan elektrik ve manyetik alan kuvvet vektörleridir. Kavite, Üçüncü bölümde açıklanan N hacimsel “elektron gaz” yoğunluğu ile karakterize edilmiş, homojen nötr ve manyetize olmayan plazma ile doldurulmuş

olsun. Plazma fiziğine göre $E(\mathbf{r},t)$ alanı tarafından $J(E(\mathbf{r},t))$ plazma akımı, denklem (3.14)'te elde edilen ve yeni bir formda

$$\frac{d}{dt}J(E(\mathbf{r},t)) + \frac{1}{\tau_0}J(E(\mathbf{r},t)) = \varepsilon_0\omega_p^2 E(\mathbf{r},t) \quad (4.34)$$

şeklinde yazılan plazma için hareket denklemi ile uyarılmaktadır [47]. Burada; τ_0 plazma ortamı için elektronlar arasındaki çarpışmaların ortalama zamanı olmak üzere bir plazma parametresi, $\omega_p^2 = Nq_e^2 / (m_e\varepsilon_0)$ plazma frekansı m_e ve q_e sırasıyla elektronun kütlesi ve işaretli yükü, ε_0 ise boşluk için dielektrik geçirgenlik katsayısıdır. Eğer denklem (4.34)'teki $E(\mathbf{r},t)$ zamana bağlı değilse, $J(\mathbf{E}(\mathbf{r}))$ 'nin çözümü de zamana bağlı değildir. Dolayısıyla, diferansiyel prosedür $\frac{d}{dt}$ 'nin 0 ile çarpım anlamına gelmesi, $\sigma = \varepsilon_0\tau_0\omega_p^2$ plazmanın doğru-akım iletkenliği olmak üzere

$$J(\mathbf{E}(\mathbf{r})) = \sigma\mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (4.35)$$

statik Ohm kanununu verir. Denklem (4.34)'ün “statik” durumu olan denklem (4.35)'in Maxwell denklemlerine uygulanması, zamanla değişen bir alan içerisine yerleştirilmiş σ iletkenlik katsayısına sahip iletken ortamı modeller. Bu çalışmada ise, hareket denklemi (4.34), Ohm kanununun (4.35) dinamik bir versiyonu olarak yorumlanmış ve Maxwell denklemler sistemi ile birlikte çözülmüştür.

4.2.1.2 Zaman-Domeni Probleminin Açıklanması

Elektrik kuvvet vektörü $E(\mathbf{r},t)$ ve manyetik kuvvet vektörü $H(\mathbf{r},t)$ için Maxwell denklemler sistemi, $J(E(\mathbf{r},t))$ plazma akım yoğunluğu ve $J_{ext}(\mathbf{r},t)$ harici kaynağın verilen bir fonksiyonu olmak üzere

$$\begin{aligned} \nabla \times H(\mathbf{r},t) &= \varepsilon_0\partial_t E(\mathbf{r},t) + J(E(\mathbf{r},t)) + J_{ext}(\mathbf{r},t) \\ -\nabla \times E(\mathbf{r},t) &= \mu_0\partial_t H(\mathbf{r},t) \end{aligned} \quad (4.36)$$

şeklinde yazılabilir. Denklem (4.36)'daki plazma akım yoğunluğu $J(E(\mathbf{r}, t))$, bir elektrik alan tarafından uyarılan plazma ortamındaki alanlar için plazma için hareket denklemini (4.34) ile ifade edilen vektörel büyüklüktür. (4.34)'deki $\sigma = \varepsilon_0 \tau_0 \omega_p^2$ iletkenlik katsayısı yeni bir formda

$$2\gamma = \tau_0 \omega_p^2 \quad (4.37)$$

şeklinde yazılabilir.

Denklem (4.37)'nin denklem (4.34)'e uygulanması plazma için hareket denklemini yeni bir formda verir;

$$\tau_0 \frac{d}{dt} \frac{J(\mathbf{r}, t)}{\varepsilon_0} + \frac{J(\mathbf{r}, t)}{\varepsilon_0} = 2\gamma E(\mathbf{r}, t). \quad (4.38)$$

4.2.1.3 Kavite İçerisine Uygulanan Kaynak Fonksiyonu

Denklem (4.36)'daki $J_{ext}(\mathbf{r}, t)$ fonksiyonu, (4.19) ile tanımlanan kavite içerisine uygulanan salınımları ifade eder. Burada, $J_{ext}(\mathbf{r}, t)$ kaynak fonksiyonu; $\mathbf{F}(\mathbf{r})$, $s(t)$ işaret taşıyıcısının tanımlanması için atanan koordinat belirten verilmiş bir vektör fonksiyonudur. $\mathcal{H}(t)$ Heaviside basamak fonksiyonu olmak üzere, kaynak fonksiyonu $t=0$ anında bir başlangıca sahip olduğundan, $s(t)$

$$s(t) = \mathcal{H}(t) f(t) \quad (4.39)$$

şeklinde belirtilebilir.

Bu kısımda türetilen çözümler elektrik türden kaynak fonksiyonları için elde edilmiş olup, ilk kaynak fonksiyonu Şekil 4.1'deki gibi rastgele frekansa sahip bir sinüsoidaldir. Bu kaynak fonksiyonu için kuvvet fonksiyonu

$$f(t) = \sin(\omega t) \quad (4.40)$$

$$T_\omega = 2\pi / \omega \quad \xi = t / T$$

ω bir parametre olmak üzere tanımlanabilir.

İkinci olarak kullanılan kaynak fonksiyonu ise $\gamma_2 > \gamma_1 > 0$ olmak üzere $t > 0$ için; $f(t)$ kuvvet fonksiyonu çift-üstel darbe

$$f(t) = (e^{-\gamma_1 t} - e^{-\gamma_2 t}) / (e^{-\gamma_1 T} - e^{-\gamma_2 T}) \quad (4.41)$$

ile modellenmiştir. $f(T) = 1$ olduğu açıktır. T parametresinin değerinin fonksiyon (4.41)'in maksimumunu ifade eden $\left. \frac{d}{dt} s(t) \right|_{t=T} = 0$ şartıyla belirtilmesi çift-üstel darbe fonksiyonu parametreleri için;

$$\begin{aligned} T &= \eta / \gamma_1 = \rho \eta / \gamma_2, \\ \rho &= \gamma_2 / \gamma_1 > 1, \\ \eta &= (\ln \rho) / (\rho - 1) \end{aligned} \quad (4.42)$$

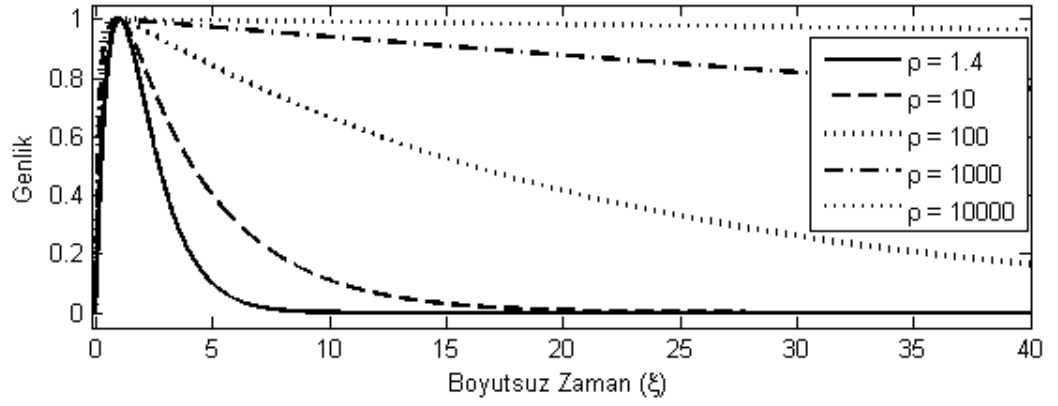
tanımlarını verir.

Darbe dalga şekli, $\xi = t / T$ şeklindeki boyutsuz zamanın fonksiyonu olarak ve (4.42)'deki dönüşümlerden faydalanarak tek değişkenli fonksiyon şeklinde;

$$f(\xi) = (e^{-\eta \xi} - e^{-\rho \eta \xi}) e^{\eta} \rho / (\rho - 1) \quad (4.43)$$

matematiksel eşitliği ile modellenebilir.

Denklem (4.43) ile ifade edilen darbe işaret modelinin ρ 'nun farklı değerleri için grafiği Şekil 4.4'de gösterilmiştir. ρ değeri sonsuza yaklaştırılarak denklem (4.43), birim basamak fonksiyonu için model olarak kullanılabilir.



Şekil 4.4 ρ 'nun Farklı Değerleri için Çift-üstel Fonksiyon ile Modellenen Darbe İşareti.

Kaynak işareti $t < 0$ 'da bulunmadığından, zorlanmış salınımlar nedensellik prensibine uygun olarak;

$$E(\mathbf{r}, t) = 0 \quad H(\mathbf{r}, t) = 0, \text{ eğer } t < 0 \text{ ise} \quad (4.44)$$

şeklinde bulunmalıdır.

Herhangi bir elektromanyetik alanın enerjisinin sonlu olduğu fiziksel şartı

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{V'} (\epsilon_0 E(\mathbf{r}, t) \cdot E(\mathbf{r}, t) + \mu_0 H(\mathbf{r}, t) \cdot H(\mathbf{r}, t)) dv < \infty \quad (4.45)$$

şeklinde ifade edilen bir çözümler uzayı oluşturur. Burada $0 \leq t_1 < t_2 < \infty$, $V' \subseteq V$ olmak üzere, nokta vektörlerin skaler çarpımını, $E(\mathbf{r}, t)$ ve $H(\mathbf{r}, t)$ ise uzay ve zamanın gerçek değerli fonksiyonlarını belirtmektedir. Denklem (4.45) çalışmakta olduğumuz bu problemin çözümler uzayı olarak bir $L_2(V)$ Hilbert uzayı seçmemizi önerir.

4.2.2. Elektromanyetik Teoriye Evrimsel Yaklaşım İçin Şema

4.2.2.1 Çözümler Uzaı

Maxwell denklemleri (4.36)'da eşitliğin sol yanından altı bileşenli $\mathbf{X}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}) \end{pmatrix}$ vektörü tanımlanarak, altı bileşenli vektörün bileşenleri olan $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ ve $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ için aynı sınır koşulları uygulanabilir. Gerçek değerli çözüm uzayı

$$\langle \mathbf{X}_1(\mathbf{r}), \mathbf{X}_2(\mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{V} \int_V (\epsilon_0 \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}_2(\mathbf{r}) + \mu_0 \mathbf{H}_1(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{H}_2(\mathbf{r})) dv \quad (4.46)$$

iç çarpımı ile tanımlanır. Burada $\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) \\ \mathbf{H}_1(\mathbf{r}) \end{pmatrix}$, $\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_2(\mathbf{r}) \\ \mathbf{H}_2(\mathbf{r}) \end{pmatrix}$ çifti, L_2 Hilbert çözüm uzayının rastgele elemanlarından oluşmaktadır.

4.2.2.2 Kendine-Eşlenik Operatör

Maxwell denklemler sistemi (4.36)'nde eşitliğin sol yanından $\{\mathbf{r} \in V, \mathbf{r} \notin S\}$ domeninde sadece $\mathbf{X}(\mathbf{r})$ vektörü üzerinde işlem yapan 6×6 bir $\mathfrak{R}$ matris diferansiyel operatörü

$$\mathfrak{R}\mathbf{X}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \mathbf{O} & \frac{1}{\epsilon_0} \nabla \times \\ \frac{1}{\mu_0} \nabla \times & \mathbf{O} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\epsilon_0} \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) \\ \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \quad (4.47)$$

şeklinde tanımlanabilir. Burada $\mathbf{O}$ notasyonu 3×3 sıfır-değerli bir matris anlamına gelmektedir. $\mathfrak{R}$ diferansiyel operatörüne ilişkin (4.47) denklemi, (4.33) sınır koşulları ile desteklendiğinde

$$\mathfrak{R}'\mathbf{X}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \mathfrak{R}\mathbf{X}(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in V, \mathbf{r} \notin S, \\ \mathbf{n} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0, \mathbf{n} \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}) = 0, & \mathbf{r} \in S \end{cases} \quad (4.48)$$

şeklinde tanımlanmış bir $\mathfrak{R}'$ CSO verir.

$\mathfrak{R}'$ operatörünün kendine-eşlenik olduğunu gösteren

$$\langle \mathfrak{R}' \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \rangle - \langle \mathbf{X}_1, \mathfrak{R}' \mathbf{X}_2 \rangle = 0 \quad (4.49)$$

eşitliğinin sağlandığı İkinci bölümde ele alınmıştı. ω_n 'ler $\mathfrak{R}'$ operatörünün özdeğerleri, $\mathbf{X}_n$ 'ler bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörler olmak üzere;

$$\mathfrak{R}' \mathbf{X}_n(\mathbf{r}) = \omega_n \mathbf{X}_n(\mathbf{r}) \quad (4.50)$$

operatör özdeğer denklemi yazılabilir.

4.2.2.3 Modal Baz

Maxwell denklemler sistemi (4.36)'nin sol yanından ayrıştırılan $\mathfrak{R}$ operatörünün operatör özdeğer eşitliği (4.50)'nde yerine konması, $\{\mathbf{r} \in V, \mathbf{r} \notin S\}$ domeninde sınır özdeğer problemleri formunda (4.51) ve (4.52) baz elemanlarını verir. $n = 1, 2, \dots$ olmak üzere kavite modlarına ilişkin solenoidal TE ve TM modları ifade eden tamamlanmış iki set

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H}'_n(\mathbf{r}) &= \omega'_n \varepsilon_0 \mathbf{E}'_n(\mathbf{r}) & \nabla \times \mathbf{H}''_n(\mathbf{r}) &= \omega''_n \varepsilon_0 \mathbf{E}''_n(\mathbf{r}) \\ \nabla \times \mathbf{E}'_n(\mathbf{r}) &= \omega'_n \mu_0 \mathbf{H}'_n(\mathbf{r}) & \nabla \times \mathbf{E}''_n(\mathbf{r}) &= \omega''_n \mu_0 \mathbf{H}''_n(\mathbf{r}) \\ [\mathbf{n} \times \mathbf{E}'_n(\mathbf{r})]_{|\mathbf{r} \in S} &= 0 & (\mathbf{n} \times \mathbf{H}''_n(\mathbf{r}))_{|\mathbf{r} \in S} &= 0 \end{aligned} \quad (4.51)$$

şeklinde elde edilir. Kavite modlarına ilişkin irrotasyonel modları ifade eden tamamlanmış iki set de Dirichlet ve Neumann sınır özdeğer problemleri

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi_n + \kappa_n^2 \phi_n &= 0, & \nabla^2 \psi_n + \kappa_n^2 \psi_n &= 0, \\ \phi_n|_S &= 0, & \partial_n \psi_n|_S &= 0, \\ n &= 0, 1, 2, \dots & n &= 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4.52)$$

formunda elde edilir.

4.2.2.4 Modal Alan Açılımları

Denklem (4.51) ve (4.52)'deki problemlerin çözümlerinin uygun şekilde normalize edilmesi ile solenoidal ve irrotasyonel modlar için modal baz elde edilir. Elektrik alan vektörü $E(\mathbf{r}, t)$ ve manyetik alan vektörü $H(\mathbf{r}, t)$, plazma akımı $J(\mathbf{r}, t)$ ve kaynak işareti $J_{ext}(\mathbf{r}, t)$ için modal açılımlar

$$\begin{aligned} E(\mathbf{r}, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} e'_n(t) \mathbf{E}'_n(\mathbf{r}) + \sum_{n=1}^{\infty} e''_n(t) \mathbf{E}''_n(\mathbf{r}) + \sum_{n=1}^{\infty} e_n(t) \nabla \phi_n \\ H(\mathbf{r}, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} h'_n(t) \mathbf{H}'_n(\mathbf{r}) + \sum_{n=1}^{\infty} h''_n(t) \mathbf{H}''_n(\mathbf{r}) + \sum_{n=1}^{\infty} h_n(t) \nabla \psi_n \\ J(\mathbf{r}, t) &= \omega_p \left(\sum_{n=1}^{\infty} i'_n(t) \mathbf{E}'_n(\mathbf{r}) + \sum_{n=1}^{\infty} i''_n(t) \mathbf{E}''_n(\mathbf{r}) + \sum_{n=1}^{\infty} i_n(t) \nabla \phi_n \right) \\ J_{ext}(\mathbf{r}, t) &= \omega_s \left(\sum_{n=1}^{\infty} s'_n(t) \mathbf{E}'_n(\mathbf{r}) + \sum_{n=1}^{\infty} s''_n(t) \mathbf{E}''_n(\mathbf{r}) + \sum_{n=1}^{\infty} s_n(t) \nabla \phi_n \right) \end{aligned} \quad (4.53)$$

şeklinde ifade edilebilir. Denklem (4.53)'teki eşitliklerde konuma bağlı modal baz elemanları elde edilmiş, zamana bağlı modal genlikler bir sonraki bölümde türetilenektir. Hilbert Uzayının ortogonal ayrıkları hakkındaki Weyl Teoremine göre solenoidal ve irrotasyonel modlar Hilbert uzayında birlikte bir modal baz oluştururlar [43].

4.2.2.5 Modal Evrim Denklemleri

Şimdiye kadar Maxwell denklemlerinin sağ tarafındaki zaman türevi korunmuştur. Maxwell denklemleri (4.36) ve mükemmel iletken yüzeyler için sınır koşulları denklem (4.33)'ün modal baza izdüşümü, ortak başlangıç koşulları ile birlikte, matematikte iyi bilinen Cauchy problemleri olarak adlandırılan zaman türevli diferansiyel denklemler sistemini verir. Maxwell denklemleri (4.36)'nin baza

izdüşümü; denklem (4.49)'da; $\mathbf{X}_1$ yerine $X(\mathbf{r}, t) = \begin{pmatrix} E(\mathbf{r}, t) \\ H(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix}$ sütun vektörü, $\mathbf{X}_2$

yerine $\Re$ operatörünün $\mathbf{X}_n$ özvektörleri, $\Re X_2(\mathbf{r}, t)$ yerine denklem (4.50)'nin sağ yanı $\omega_n \mathbf{X}_n(\mathbf{r})$ kullanılarak sağlanır. Bu matematiksel işlemler sonucunda elektrik

alan, manyetik alan ve plazma akımı için solenoidal ve irrotasyonal modal genliklere ait evrimsel adi diferansiyel denklemler seti elde edilir.

Dinamik plazma ortamı durumunda, solenoidal TE kavite modları için Cauchy problemleri;

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}e'_n(t) - \omega'_n h'_n(t) + \omega'_p i'_n(t) &= -\omega_s f'_n(t) \mathcal{H}(t), & e'_n(0) &= 0, \\ \frac{d}{dt}h'_n(t) + \omega'_n e'_n(t) &= 0, & h'_n(0) &= 0, \\ \frac{d}{dt}i'_n(t) - \omega'_n e'_n(t) + \gamma i'_n(t) &= 0, & i'_n(0) &= 0,\end{aligned}\tag{4.54}$$

solenoidal TM kavite modları için;

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}e''_n(t) - \omega''_n h''_n(t) + \omega''_p i''_n(t) &= -\omega_s f''_n(t) \mathcal{H}(t), & e''_n(0) &= 0, \\ \frac{d}{dt}h''_n(t) + \omega''_n e''_n(t) &= 0, & h''_n(0) &= 0, \\ \frac{d}{dt}i''_n(t) - \omega''_n e''_n(t) + \gamma i''_n(t) &= 0, & i''_n(0) &= 0,\end{aligned}\tag{4.55}$$

elektrik türden irrotasyonel kavite modları için;

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}e_n(t) + \omega_p i_n(t) &= -\omega_s f_n(t) \mathcal{H}(t), & e_n(0) &= 0, \\ \frac{d}{dt}i_n(t) - \omega_n e_n(t) + \frac{\omega_p^2}{\gamma} i_n(t) &= 0, & i_n(0) &= 0\end{aligned}\tag{4.56}$$

elde edilir. Manyetik türden irrotasyonel modlar için;

$$\frac{d}{dt}h_n(t) = 0, \quad h_n(0) = 0\tag{4.57}$$

evrimsel denklem seti elde edilir.

Manyetik türden (4.57) irrotasyonel modlar için Cauchy probleminin çözümü statik bir çözüm verir. Denklem (4.56)'deki elektrik türden irrotasyonel modlara ve (4.54) ile (4.55)'deki solenoidal modlara ilişkin Cauchy problemlerinin çözümleri İkinci bölümde anlatılan “matris üstel” yöntemiyle kesin olarak bulunabilir.

4.2.2.6 İrrotasyonel Modlara İlişkin Zamana Bağlı Çözümler

$$Y_n(\xi) = \begin{pmatrix} e_n(\xi) \\ i_n(\xi) \end{pmatrix} \text{ ve } F_2(\xi) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ olmak üzere denklem (4.56) ile ifade edilen}$$

Cauchy problemi operatör formda

$$\frac{d}{d\xi} Y_n(\xi) + D_2 Y_n(\xi) = -\omega_s f(\xi) \mathcal{H}(\xi) F_2(\xi), \quad Y_n(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.58)$$

şeklinde yazılabilir. Burada D_2 katsayısı

$$D_2 = \begin{pmatrix} 0 & \omega_p \\ -\omega_n & \frac{\omega_p^2}{\gamma} \end{pmatrix} \quad (4.59)$$

şeklinde 2×2 ebatlarında sabit bir matristir. Denklem (4.58)'in çözümü elektrik alan $e(\xi)$ ve plazma akımı $i(\xi)$ için irrotasyonel modlara ait genlikleri verir.

Probleme ilişkin, kaynak fonksiyonunun integrandın içinde yer aldığı

$$Y_n(\xi) = -\mathcal{H}(\xi) \int_0^\xi e^{(x-\xi)D_2} F_2 f(x) dx \quad (4.60)$$

formunda konvolüsyon integrali elde edilir.

4.2.2.7 Solenoidal Modlara İlişkin Zamana Bağlı Çözümler

$$Y_n(\xi) = \begin{pmatrix} e_n(\xi) \\ h_n(\xi) \\ i_n(\xi) \end{pmatrix} \text{ ve } F_3(\xi) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ olmak üzere denklem (4.54) ile ifade edilen}$$

Cauchy problemi operatör formda

$$\frac{d}{d\xi} Y_n'(\xi) + \omega_p D_3 Y_n'(\xi) = -\omega_s f(\xi) \mathcal{H}(\xi) F_3(\xi), \quad Y_n'(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.61)$$

şeklinde yazılabilir. Burada D_3 katsayısı

$$D_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_n & \omega_p \\ \omega_n & 0 & 0 \\ -\omega_n & 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad (4.62)$$

şeklinde 3×3 ebatlarında sabit bir matristir.

Probleme ilişkin, kaynak fonksiyonunun integrandın içinde yer aldığı

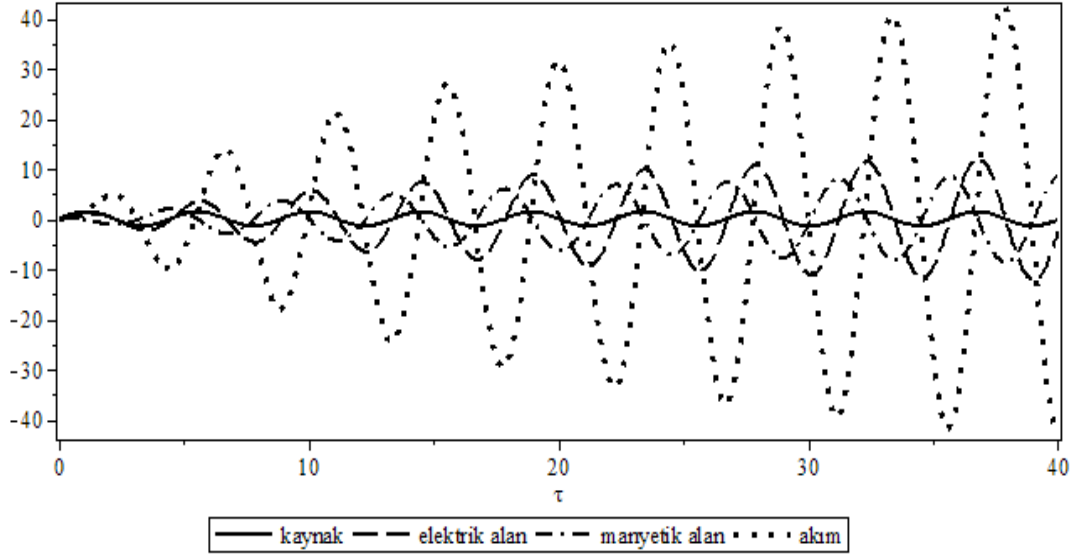
$$Y_n(\xi) = -\mathcal{H}(\xi) \int_0^\xi e^{(x-\xi)D_3} F_3 f(x) dx \quad (4.63)$$

formunda konvolüsyon integrali elde edilir. (4.60) ve (4.63) integrallerinin çözümleri; sırasıyla irrotasyonel modlara ait elektrik alan $e_n(\xi)$ ve plazma akımı $i_n(\xi)$ modal genlikleri (4.60) ile, solenoidal modlara ait elektrik alan $e_n(\xi)$, manyetik alan $h_n(\xi)$ ve plazma akımı $i_n(\xi)$ modal genliklerini (4.63) verir.

4.2.3. Grafiksel Sonuçlar

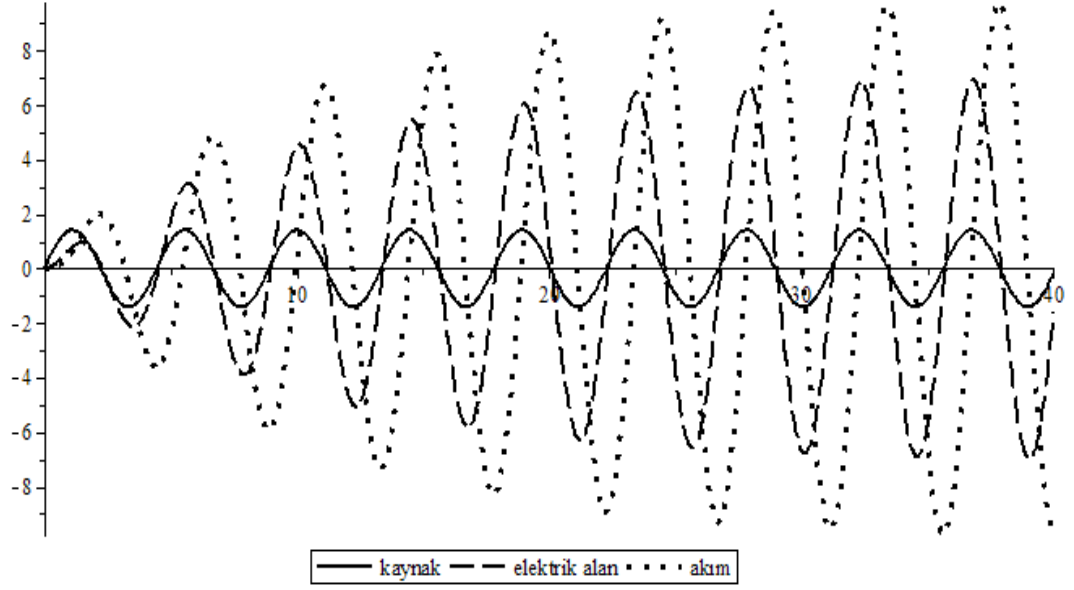
Bu kısımda öncelikle sinüsoidal kaynağa ilişkin, ardından çift üstel işaret ile modellenen darbe işaretine ilişkin grafiksel sonuçlar gösterilmiştir.

Şekil 4.5’de plazma ile doldurulmuş kavite için kaynak frekansı ile kavite özfrekansının örtüştüğü rezonans durumuna ait sinüsoidal kaynak fonksiyonu $s(\xi)$, elektrik alan $e(\xi)$, manyetik alan $h(\xi)$ ve plazma akımının solenoidal modlarının genlikleri $i(\xi)$ gösterilmiştir.



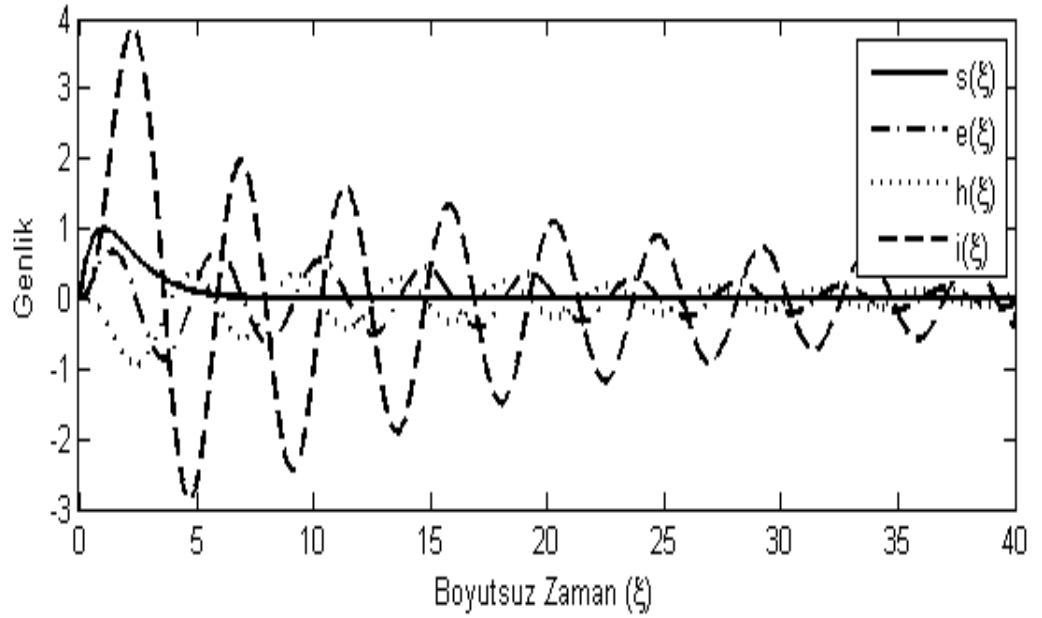
Şekil 4.5 Plazma için Sinüsoidal Kaynağa İlişkin Solenoidal Modlar.

Şekil 4.6’da Şekil 4.5’teki örnekteki ile aynı kavite ve kaynak fonksiyonu $s(\xi)$ için, elektrik alan $e(\xi)$ ve plazma akımının irrotasyonel modlarının genlikleri $i(\xi)$ gösterilmiştir.



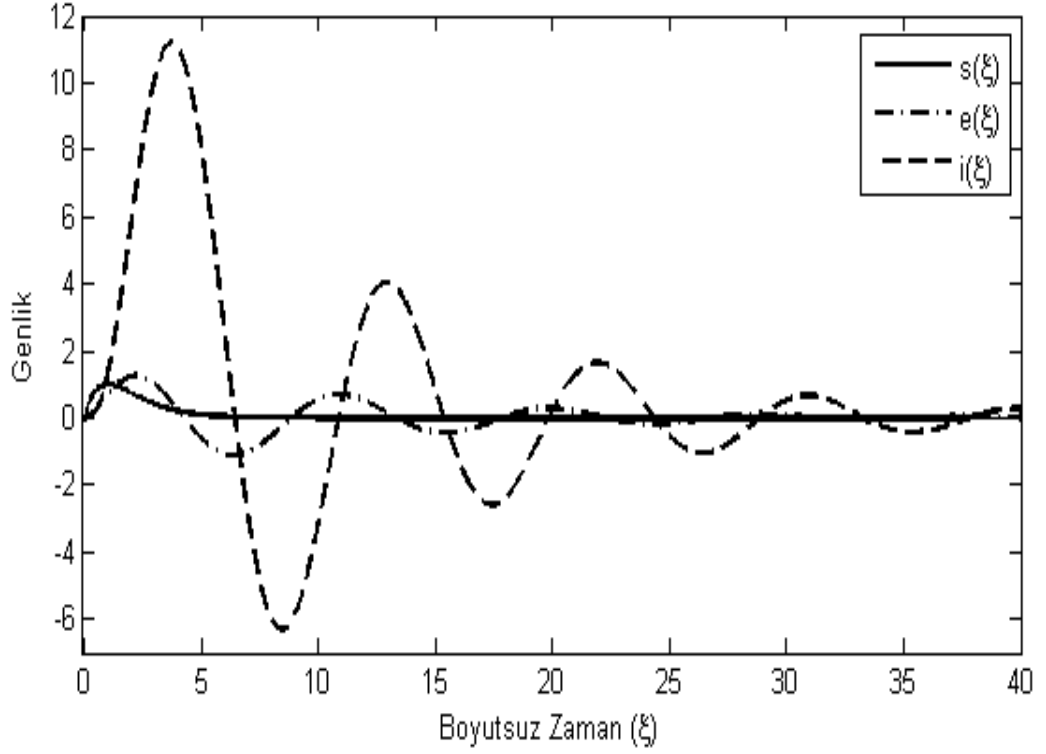
Şekil 4.6 Plazma için Sinüsoidal Kaynağa İlişkin İrrotasyonel Modlar.

Şekil 4.7’de plazma ile doldurulmuş kavite için, $\rho = 1.4$ olmak üzere çift-üstel kaynak fonksiyonu $s(\xi)$, elektrik alan $e(\xi)$, manyetik alan $h(\xi)$ ve plazma akımının solenoidal TE modlarının genlikleri $i(\xi)$ gösterilmiştir.



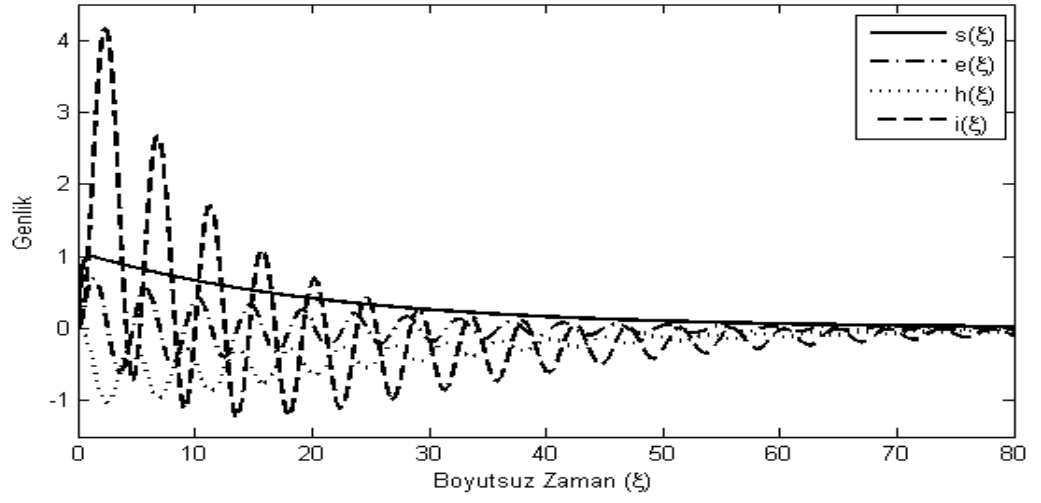
Şekil 4.7 Plazma için Çift-Üstel Kaynağa İlişkin Solenoidal Modlar ($\rho = 1.4$).

Şekil 4.8’de; Şekil 4.7’deki örnekteki ile aynı kavite ve kaynak fonksiyonu $s(\xi)$ için, elektrik alan $e(\xi)$ ve plazma akımının irrotasyonel modlarının genlikleri $i(\xi)$ gösterilmiştir.



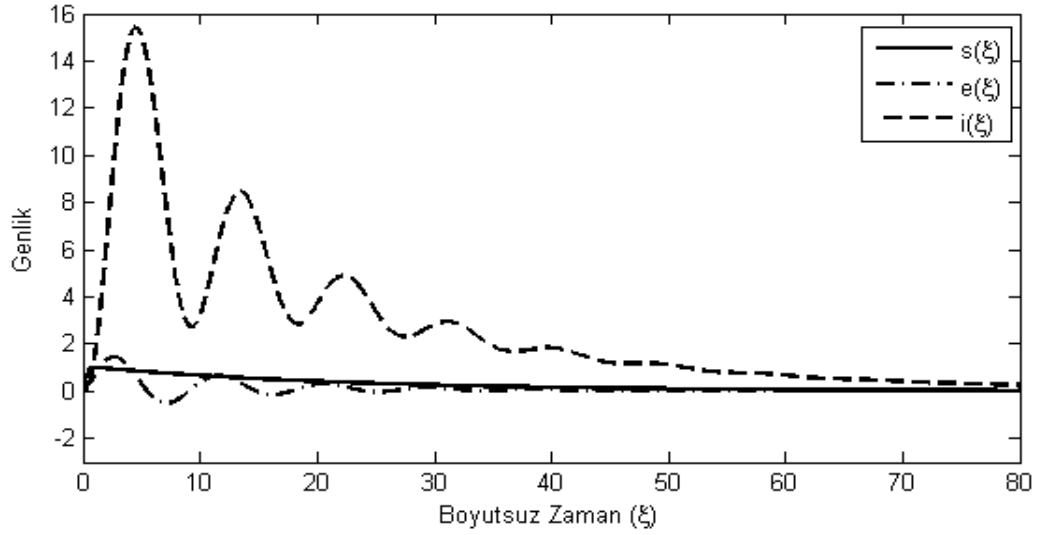
Şekil 4.8 Plazma için Çift-Üstel Kaynağa İlişkin İrrotasyonel Modlar ($\rho=1.4$).

Şekil 4.9’da plazma ile doldurulmuş kavite için, $\rho=100$ olmak üzere çift-üstel kaynak fonksiyonu $s(\xi)$, elektrik alan $e(\xi)$, manyetik alan $h(\xi)$ ve plazma akımının solenoidal TE modlarının genlikleri $i(\xi)$ gösterilmiştir.



Şekil 4.9 Plazma için Çift-Üstel Kaynağa İlişkin Solenoidal Modlar ($\rho = 100$).

Şekil 4.10'da Şekil 4.9'daki örnekteki ile aynı kavite ve kaynak fonksiyonu $s(\xi)$ için, elektrik alan $e(\xi)$ ve plazma akımının irrotasyonel modlarının genlikleri $i(\xi)$ gösterilmiştir.



Şekil 4.10 Plazma için Çift-Üstel Kaynağa İlişkin İrrotasyonel Modlar ($\rho = 100$).

Zaman harmonik alan teorisinden farklı olarak irrotasyonel modların da zamana bağlı salınım gösterdikleri şekillerde görülmektedir.

5. SONUÇ VE DEĞERLENDİRMELER

Elektromanyetik problemlerin çözümüne yeni bir yaklaşım getiren Elektromanyetik Teoriye Evrimsel Yaklaşım ile çözümler solenoidal ve irrotasyonel modların modal açılımları şeklinde elde edilir. Metot, Maxwell denklemler sistemindeki zaman türevinin korunarak Fourier ve Laplace dönüşümlerine ihtiyaç duymadan analitik bir çözüm elde edilmesi prensibine dayanır.

Bu çalışmada kavite problemine ilişkin solenoidal ve irrotasyonel modal baz elemanları türetilmiş, zamana bağlı modal genlikler için bir dizi zaman türevli adi diferansiyel denklem seti (evrim denklemleri) türetilmiştir. Bu sayede problem, matematikte iyi bilinen Cauchy problemine dönüştürülmüştür. Evrim denklemlerinin türetilmesi kavite içerisinde alanları uyaran kaynak fonksiyonunun bağımsızdır. Denklemlerin türetilmesinin kaynaklardan bağımsızlığı herhangi integrallenebilir bir fonksiyon için bu metot ile çözüm elde edilebilmesini sağlar. Bu sayede, doğada ölçülen bir gerilim darbesi gibi işaretlerin uyardığı alanlara ilişkin elektromanyetik uyumluluk problemine çözüm elde edilebilir.

Elektrik alan şiddeti, manyetik alan şiddeti, plazma akım vektörü gibi aranan büyüklükleri uzaysal ve zaman bağımlı kısımlara ayırma yolu bu yöntemin avantajını oluşturmaktadır. Öncelikle uzaysal bağımlı modal baz elemanları, ardından evrimsel denklemler formunda türetilen zaman bağımlı modal genlikler türetilerek alan büyüklükleri elde edilmektedir.

Frekans uzayında ancak nümerik yöntemlerle güçlü işlemciler vasıtasıyla çözülebilen problemler bu yaklaşım ile analitik olarak çözülebilmektedir. Nümerik sonuçlardan fiziksel anlamlar çıkarabilmek, ilgilenilen olaya ilişkin teorik bilgi sahibi olmayı da gerektirir. Ayrıca, teorik metotlar bizlere, elde edilen sonuçları yorumlama, sebep-sonuç ilişkilerini araştırma ve olayların iç yüzünü kavrama imkanı sunduğundan elde edilen analitik sonuçlar ile probleme ilişkin doğrudan yorumlar yapmak da mümkün olmaktadır.

- Bu doğrultuda, Dördüncü bölümün ilk kısmında yapılan boş kavite çalışması neticesinde doğrudan elde edilen sonuçlar:

a. Herhangi bir zaman domeninde, problemin formülasyonu zamanda harmonik alan problemlerinde yer almayan ilave iki gereksinimi içermelidir:

(1) Başlangıç koşulları: Frekans domeninde çözüm için ele alınan zamanda harmonik Maxwell denklemleri eliptik tip diferansiyel denklemler sınıfına dahil olduğundan başlangıç koşullarına ihtiyaç duymazken, zaman türevli Maxwell denklemleri hiperbolik kısmi diferansiyel denklemler sınıfına dahil olduğundan başlangıç koşullarına ihtiyaç duyarlar.

(2) Nedensellik prensibi: Gerçeğe uygun bir kaynak fonksiyonu zamanda bir başlangıca sahiptir. Oysa, bilindiği gibi; zamanda harmonik alanlar $t = -\infty$ anında başlar ve $t = +\infty$ anına kadar devam ederler.

Problemin formülasyonu konum ve zamanda değişim gösteren ölçülebilir fiziksel elektromanyetik işaretler için verilmiştir. Bundan dolayı; alanlar, ölçülebilir fiziksel büyüklükler olan, koordinatların ve zamanın gerçek değerli fonksiyonları ile modellenmiştir. Böylece, ETEY elde edilen sonuçların fiziksel olarak yorumlanmasına olanak sağlamaktadır.

b. Kavite içerisindeki elektrik ve manyetik alanlar, zamana bağlı modal genlikler olarak, solenoidal ve irrotasyonel kavite modlarının tam kümesi üzerine modal açılımlar şeklinde türetilmiştir. Modal genlikler, integrasyon değişkeninin zaman olduğu, problemin çözümünün aşağıdaki özellikleri sağladığı basit konvolüsyon integralleri olarak elde edilmiştir:

(1) başlangıç koşulları ve nedensellik prensibi sağlanır;

(2) kavite içerisindeki alanları uyaran verilmiş bir işaretin zamana bağlı kısmı, konvolüsyon integralinin integrandında parametrik bir faktör olarak yer alır;

(3) ETEY, zamana bağlı geniş bir işaret grubunun sadece bir kısıtlama hariç incelenmesine olanak verir: işaret zamanda integre edilebilir olmalıdır.

c. Zamanda başlangıcı olan bir sinusoidal işaret kaynağının irrotasyonel modları da kavite içerisinde zaman bağımlı olarak uyardığı görülmüştür.

ç. Çalışmadaki ilk problem, kavitenin ortamsız olduğu durumla sınırlı tutulmuştur. Kavite içerisinde dispersif veya Dördüncü bölümün ikinci kısmında yapılan çalışma gibi plazma gibi dinamik bir ortam olması durumunda, zaman türevli Maxwell denklemleri dinamik bünye denklemleri ile desteklenmelidir.

- Dördüncü bölümün ikinci kısmında yapılan plazma ortamı ile doldurulmuş kavite çalışması neticesinde elde edilen sonuçlar:

a. Klasik zaman-harmonik alan konseptinin irrotasyonel modları statik alan olarak yorumlamasından farklı olarak, ETEY yönteminde irrotasyonel modların plazma ortamına ilişkin problemde de zaman bağımlı oldukları gösterilmiştir. Bu çalışmada, hem elektrik alan hem de plazma akımı için irrotasyonel modların yanı sıra solenoidal modların zamanla değişimini sergileyen evrim denklemleri türetilmiştir.

b. Ele alınan problemde, plazma akımı ile plazma akımını doğuran elektrik alan arasında, zaman domeninde uygun dinamik bünye denklemi kullanılmalıdır. Maxwell denklemler sistemi, plazma ortamı için bünye denklemi olarak kullanılan hareket denklemi ile birlikte çözülmüştür.

c. Gerçekleştirilen zaman-domeni çalışması, bir dalga kılavuzunun kısaltılmış ve uçları kapatılmış bir parçası olan içi plazma ile doldurulmuş kavite durumu ile sınırlıdır. Çalışma, plazma ile dolu bir dikdörtgen veya silindirik dalga kılavuzlarında elektromanyetik alanların propagasyonu problemi için genişletilebilir. Bu durumda, "nabla" ∇ operatörü ve üç bileşenli modal baz vektörleri $\mathbf{H}_n(\mathbf{r}, z, t)$ ve $\mathbf{E}_n(\mathbf{r}, z, t)$; dalga kılavuzu boyunca dalgaların boyuna yayılmasına ilişkin denklemleri türetmek için enine-boyuna ayrışım aracıyla gösterilebilir.

KAYNAKÇA

1. HILLION, P., 1993, "Some Comments on Electromagnetic Signals", in ed. By A.Lakhtakia, "Essays on the Formal Aspects of Electromagnetic Theory", World Scientific Publ. Co., Singapore.
2. HARMUTH, H.F., 1993, "Electromagnetic Transients not Explained by Maxwell Equations", in ed. By Lakhtakia,A., "Essays on the Formal Aspects of Electromagnetic Theory", World Scientific Publ. Co., Singapore.
3. TAFLOVE, A., HAGNESS, S.C., 2005, "Computational Electrodynamics: The Finite Difference Time Domain", Norwood/United States of America: Artech House, 3-4,236-242.
4. SLATER, J.C., 1946, "Microwave Electronics, Review of Modern Physics", vol. 18, No. 4, 441-512.
5. KISUNKO, G.V., 1949 (in Russian), "Electrodynamics of Hollow Systems", VKAS-Press, Leningrad.
6. BLADEL, J.V., 1985, "Electromagnetics Fields", Hemisphere, Washington.
7. GABRIEL, G.J., 1980, "Theory of Electromagnetic Transmission Structures, Part 1: Relativistic Foundation and Network Formalisms", Proceedings of the IEEE, vol. 68, No. 3.
8. REITER, G., 1959, "Generalized Telegraphist's Equation for Waveguides of Varying Cross-Section", Proceedings of the IEEE - Part B: Electronic and Communication Engineering, vol. 106, 54-61.
9. TRETYAKOV, O.A., 1986, "The Method of Modal Basis, Radiotekhnika i Elektronika", vol. 31, No. 6, 1986 (in Russian). English Translation in Soviet J. on Communication Technology and Electronics.
10. TRETYAKOV, O.A., 1993, "Essentials of Nonstationary and Nonlinear Electromagnetic Field Theory", Chapter 3 in Analytical and Numerical Methods in Electromagnetic Wave Theory, M. Hashimoto, M. Idemen, O. A. Tretyakov, Eds., Tokyo, Japan, Science House Co. Ltd., 123-146.

11. AKSOY, S., 1999, "Zamana Bağlı Bir İşaret Tarafından Kavite İçerisinde Üretilen Osilasyonlar", Yüksek Lisans Tezi, Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Kocaeli.
12. AKSOY, S., TRETYAKOV, O.A., 2002, "Study of a Time Variant Cavity System", Journal of Electromagnetics Waves and Applications, vol. 16, 1535-1553.
13. AKSOY, S., TRETYAKOV, O.A., 2003, "Evolution Equations for Analytical Study of Digital Signals in Waveguides", Journal of Electromagnetic Waves and Applications, vol. 17, 1665-1682.
14. AKSOY, S., TRETYAKOV, O.A., 2004, "The Evolution Equations in Study of the Cavity Oscillations Excited by a Digital Signal", IEEE Transactions Antennas Propagation, vol. 52, 271-279.
15. TRETYAKOV, O.A., ERDEN, F., 2007, "Separation of the Instantaneous and Dynamic Polarizations in Studies of Dispersive Dielectrics", The Sixth International Kharkov Symposium on Physics and Engineering of Microwaves, Millimeter and Submillimeter Waves, Kharkov, Ukraine, vol. 1, 42-48.
16. ERDEN, F., TRETYAKOV, O.A., 2008, "Excitation by a Transient Signal of the Real-Valued Electromagnetic Fields in a Cavity", Physical Review E, vol. 77, 056605.
17. TRETYAKOV, O.A., ERDEN, F., 2008, "Temporal Cavity Oscillations Caused by a Wide-Band Waveform", Progress In Electromagnetics Research B, vol. 6, 183-204.
18. TRETYAKOV, O.A., AKGUN, O., 2010, "Derivation of Klein-Gordon Equation from Maxwell's Equations and Study of Relativistic Time-domain Waveguide Modes", Progress in Electromagnetics Research, vol. 105, 171-191.
19. ERDEN, F., TRETYAKOV, O.A., 2011, "Temporal Evolution of the Irrotational and Solenoidal Cavity Modes", XXXth URSI General Assembly and Scientific Symposium, Istanbul, Turkey, 1-4.
20. TRETYAKOV, O.A., KAYA, M., 2012, "The Real-valued Time-domain TE-modes in Lossy Waveguides", Progress In Electromagnetics Research, vol. 127, 405-426.

21. TRETYAKOV, O.A., KAYA, M., 2013, "Time-domain Real-valued TM-modal Waves in Lossy Waveguides", Progress In Electromagnetics Research, vol. 138, 675-696.
22. ERDEN, F., TRETYAKOV, O.A., 2014, "Analytical Approach for Studying a Time-domain Cavity Problem", IEEE International Symposium on Antennas and Propagation and USNC-URSI National Radio Science Meeting, Memphis, TN, 131-132.
23. ERDEN, F., TRETYAKOV, O.A., 2015, "Time-domain Forced Oscillations in a Cavity Filled with a Plasma Driven by the Dynamic Ohm's Law", presented at URSI Atlantic Radio Science Conference, Gran Canaria, Spain.
24. AKGUN, O., TRETYAKOV, O.A., 2015, "Solution to the Klein-Gordon Equation for the Study of Time-domain Waveguide Fields and Accompanying Energetic Processes", IET Microwaves, Antennas & Propagation, 9, (12), 1337-1344.
25. ERDEN, F., TRETYAKOV, O.A., 2015, "Evolution Equations for the Oscillations in a Cavity Filled with a Dynamic Medium", presented at IEEE International Symposium on Antennas and Propagation and URSI CNC/USNC Joint Meeting, Vancouver, BC.
26. AKSOY, S., ANTYUFEYEVA, M.S., BASARAN, E., ERGİN, A.A., TRETYAKOV O.A., 2005, "Time-Domain Cavity Oscillations Supported by a Temporally Dispersive Dielectric", IEEE Transactions Microwave Theory Techniques, vol. 53, no. 8, 2465-2471.
27. GEYI, W., 2008, "Time-Domain Theory of Metal Cavity Resonator", Progress In Electromagnetics Research, PIER 78, 219–253.
28. ANTYUFEYEVA, M.S., BUTRYM, A.Y., TRETYAKOV O.A., 2008, "Microwave Oscillations in a Cavity with Dispersive Double Negative Medium", MRRS-2008 Symposium Proceedings, Kiev, Ukraine, September 22-24.
29. ANTYUFEYEVA, M.S., BUTRYM, A.Y., TRETYAKOV O.A., 2009, "Transient Electromagnetic Fields in a Cavity with Dispersive Double Negative Medium", Progress In Electromagnetics Research M, Vol. 8, 51-65.
30. ANTYUFEYEVA, M.S., TRETYAKOV, O.A., 2002, "Time-Domain Electromagnetic Fields in a Resonator With Dispersive Medium", MMET'02

Proceedings IX-th International Conference on Mathematics Methods in Electromagnetic Theory, 186-188, Kiev, Ukraine.

31. ANTYUFEYEVA, M.S., TRETYAKOV, O.A., 2004, "Time-Domain Electromagnetic Fields in a Cavity With Temporally Dispersive Dielectric", MMET*04 10th International Conference on Mathematics Methods in Electromagnetic Theory, September 14-17, 225-227, Dniepropetrovsk, Ukraine.

32. ANTYUFEYEVA, M.S., 2012, "Electromagnetic Field in a Dispersive Medium Filled Cavity Under Pulse Train Excitation", presented at IEEE Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals, September 17-21, 302-304, Sevastopol, Ukraine.

33. ANTYUFEYEVA, M.S., TRETYAKOV, O.A., 2010, "Pulse Excitation of a Cavity with Dispersive Medium that Refractive Index is Positive and Negative", presented at IEEE Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals, September 6-10, 134-135, Sevastopol, Ukraine.

34. ANTYUFEYEVA, M.S., 2011, "Cavity with Dispersive Medium that Refractive Index is Positive and Negative", presented at IEEE Microwaves, Radar and Remote Sensing Symposium, August 25-27, 73-76, Kiev, Ukraine.

35. ANTYUFEYEVA, M.S., 2006, "Electromagnetic Field Oscillations in a Cavity with Multipole Debye Medium", MMET'06 11th International Conference on Mathematics Methods in Electromagnetic Theory, June 26-29, 312-314, Kharkiv, Ukraine.

36. TRETYAKOV, O.A., ERDEN, F., 2012, "Evolutionary Approach to Electromagnetics as an Alternative to the Time-Harmonic Field Method," presented at IEEE International Symposium Antennas and Propagation and USNC-URSI Nat. Radio Science Meeting, Chicago, IL.

37. DENDY, R.O., 1990, "Plasma Dynamics", Clarendon Press, California.

38. TANENBAUM, B.S., 1967, "Plasma Physics", McGraw-Hill Book Company, New York.

39. AVCI, S.A., 2014, "Yüksek Frekanslı Gauss Hüzmesinin Plazma Ortamla Etkileşimi", Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Fakültesi, Ankara.

40. ROTHWELL, E.J., CLOUD, M.J., 2001, "Electromagnetics", CRC Press LLC, Washington D.C..
41. ERDEN, F., TRETYAKOV, O.A., BİÇER, Ü., 2016, "Kavite İçerisinde Bir Sinyal Tarafından Uyarılan Solenoidal ve İrrotasyonel Modal Alanların Evrimi", 24. IEEE Sinyal İşleme ve İletişim Uygulamaları Kurultayı, 16-19 Mayıs, Zonguldak.
42. ERDEN, F., BİÇER, Ü., 2016, "Plazma ile Doldurulmuş Kavitede Darbe İşareti Tarafından Uyarılan Alanların Zamanla Evrimi", Dokuz Eylül Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Fen ve Mühendislik Dergisi, Sayı 53.
43. WEYL, H., 1940, "The Method of Orthogonal Projection in Potential Theory", Duke Math. Journal, vol. 7, 411-444.
44. CAMP, M., GARBE, H., 2004, "Susceptibility of Personal Computer Systems to Electromagnetic Pulses with Double Exponential Character", Advances in Radio Science, vol. 2, 63-69.
45. CRAMER, J.M., SCHOLTZ, R.A., WIN, M.Z., 1999, "On the Analysis of UWB Communication Channels", Proceedings of the IEEE Military Communications Conference, vol. 2, 1191-1195.
46. CAMP, M., GARBE, H., 2004, "Parameter Estimation of Double Exponential Pulses (EMP, UWB) with Least Squares and Nelder Mead Algorithm", IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility, vol. 46, 675-678.
47. BITTENCOURT, J.A., 2004, "Fundamentals of Plasma Physics", Springer-Verlag, New York.