

**T.C.  
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI**



**BÖLEN FONKSİYONLARI YARDIMIYLA YAPRAKLARIN  
MODELLENMESİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**ESRA ÇOLAK**

**BALIKESİR, HAZİRAN - 2016**

**T.C.  
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI**



**BÖLEN FONKSİYONLARI YARDIMIYLA YAPRAKLARIN  
MODELLENMESİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**ESRA ÇOLAK**

**Jüri Üyeleri : Yrd. Doç. Dr. Nazlı YILDIZ İKİKARDEŞ**

**Prof. Dr. Ali GÜVEN**

**Doç. Dr. Gökhan SOYDAN**

**BALIKESİR, HAZİRAN - 2016**

## KABUL VE ONAY SAYFASI

Esra ÇOLAK tarafından hazırlanan “BÖLEN FONKSİYONLARI YARDIMIYLA YAPRAKLARIN MODELLENMESİ” adlı tez çalışmasının savunma sınavı 21.06.2016 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

İmza

Danışman

Yrd. Doç. Dr. Nazlı YILDIZ İKİKARDEŞ



Üye

Prof. Dr. Ali GÜVEN



Üye

Doç. Dr. Gökhan SOYDAN



Jüri üyeleri tarafından kabul edilmiş olan bu tez Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca onanmıştır.

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Doç. Dr. Necati ÖZDEMİR



## ÖZET

**BÖLEN FONKSİYONLARI YARDIMIYLA YAPRAKLARIN  
MODELLENMESİ  
YÜKSEK LİSANS TEZİ  
ESRA ÇOLAK  
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**(TEZ DANIŞMANI: YRD. DOÇ. DR. NAZLI YILDIZ İKİKARDEŞ)**

**BALIKESİR, HAZİRAN - 2016**

Bu tezde, bölen fonksiyonları yardımıyla yaprakların modellenmesi üzerine çalışılmıştır.

Birinci bölümde, bölen fonksiyonlarının tarihsel gelişiminden ve bu süreçte bulunan bazı sonuçlardan bahsedilmektedir.

İkinci bölümde, bölen fonksiyonları ve matematiksel modelleme hakkında ön bilgiler verilmiştir.

Üçüncü bölüm, tezin teorik kısmıdır. Bir  $k$  pozitif tamsayısı için  $(1 \leq k \leq 100)$ ,  $n$  tam kare olmayan bir tek tamsayı olmak üzere  $\sigma(n) = \sigma(n + 2k)$  denkleminin tüm çözümleri verilmiştir. Ayrıca  $\ell$  pozitif bir tamsayı ve  $q$  tek asal sayı olmak üzere  $\sigma_{2\ell}(n) = \sigma_{2\ell}(q)$  denkleminin hiçbir sonucu yoktur.

Dördüncü bölüm, tezin uygulama kısmıdır. Bu bölümde, eliptik, yelpaze ve beş loblu yaprakların alanlarına ve yaprakların büyüme süreçlerine, bölen fonksiyonları yardımıyla modelleme yapılmıştır.

Son bölümde, sonuç ve öneriler verilmiştir.

**ANAHTAR KELİMELELER:** Bölen fonksiyonu, tek bölen fonksiyonu, modelleme, yaprakların modellenmesi.

## ABSTRACT

### MODELLING OF THE LEAVES WITH THE HELP OF DIVISOR FUNCTION

MSC THESIS

ESRA ÇOLAK

BALIKESİR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE  
MATHEMATICS DEPARTMENT

(SUPERVISOR: ASSIST. PROF. DR. NAZLI YILDIZ İKİKARDEŞ )

BALIKESİR, JUNE 2016

In this thesis, modelling of the leaves with the help of divisor functions are worked on.

In the first chapter, the historical development of divisor functions and some results found in this process are mentioned.

In the second chapter, preliminary information about divisor functions and mathematical modelling are given.

The third chapter is the theoretical part of the thesis. For a positive integer  $k$  ( $1 \leq k \leq 100$ ), all solutions of the equation  $\sigma(n) = \sigma(n + 2k)$  with odd square-free integer  $n$  are given. Also, for a positive integer  $\ell$  and odd prime  $q$ , there are no results of the equation  $\sigma_{2\ell}(n) = \sigma_{2\ell}(q)$ .

The fourth chapter is the application part of the thesis. In this chapter, the elliptic, flabellate and five-lobes leaves's area and the growth process of the leaves were made modelling with the help of divisor functions.

In the final chapter, conclusions and recommendations are given.

**KEYWORDS:** Divisor function, odd divisor function, modelling, modelling of the leaves.

# İÇİNDEKİLER

## Sayfa

|                                                                                        |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| ÖZET.....                                                                              | i   |
| ABSTRACT .....                                                                         | ii  |
| İÇİNDEKİLER .....                                                                      | iii |
| ŞEKİL LİSTESİ.....                                                                     | iv  |
| TABLO LİSTESİ .....                                                                    | v   |
| SEMBOL LİSTESİ .....                                                                   | vi  |
| ÖNSÖZ.....                                                                             | vii |
| 1. GİRİŞ.....                                                                          | 1   |
| 2. ÖN BİLGİLER .....                                                                   | 5   |
| 2.1    Bölen Fonksiyonları.....                                                        | 5   |
| 2.2    Matematiksel Modelleme .....                                                    | 8   |
| 3. $\sigma(n) = \sigma(n + 2k)$ DEKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİ .....                             | 11  |
| 3.1    Tek Bölen Fonksiyonu.....                                                       | 11  |
| 4. YAPRAKLARIN MODELLENMESİ .....                                                      | 24  |
| 4.1    Eliptik ve Yalpaze Şeklindeki Yaprakların Modellenmesi.....                     | 24  |
| 4.2    Beş Loblu Yaprakların Modellenmesi .....                                        | 29  |
| 4.3    Yaprakların Modellenmesinde $S_3$ Alanı .....                                   | 31  |
| 4.4    Yaprağın Büyümesinin Modellenmesi .....                                         | 34  |
| 4.5    Yaprakların Modellenmesinde Ortaya Çıkan Altın Orana En Yakın<br>Değerler ..... | 36  |
| 5. SONUÇ VE ÖNERİLER .....                                                             | 38  |
| 6. KAYNAKLAR.....                                                                      | 39  |
| 7. EKLER.....                                                                          | 41  |

## ŞEKİL LİSTESİ

### Sayfa

|                                                                               |    |
|-------------------------------------------------------------------------------|----|
| Şekil 2.1 : Üçgen üzerinde Arşimet parabollemesi .....                        | 9  |
| Şekil 4.1 : Eliptik tipi yaprakların modellenmesi .....                       | 24 |
| Şekil 4.2 : Yelpaze tipi yaprakların modellenmesi .....                       | 25 |
| Şekil 4.3 : Eliptik tipi yaprak üzerinde Arşimet Teoremi'nin uygulanması..... | 26 |
| Şekil 4.4 : Beş loblu yaprak üzerinde Arşimet Teoremi'nin uygulanması.....    | 29 |
| Şekil 4.5 : Modelleme ile ortaya çıkan yaprak .....                           | 31 |
| Şekil 4.6 : Eliptik tipi yaprağın zamana göre büyüme grafiği.....             | 35 |
| Şekil 4.7 : Yelpaze tipi yaprağın zamana göre büyüme grafiği.....             | 36 |



## TABLO LİSTESİ

### Sayfa

|                                                                                                                        |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Tablo 3.1 :</b> $\sigma(p_1 p_2 p_3) = \sigma(q)$ denklemin çözümleri .....                                         | 13 |
| <b>Tablo 3.2 :</b> $\sigma(n) = \sigma(n + 2k) = \sigma(q)$ denkleminin çözümleri .....                                | 14 |
| <b>Tablo 3.3 :</b> $\sigma(n) = \sigma(n + 2k)$ denklemini sağlayan $2k$ değerlerinin belli aralıklardaki sayısı ..... | 21 |
| <b>Tablo 3.4 :</b> $\sigma(n) = \sigma(n + 2k)$ denklemini sağlayan $2k$ değerlerinin alt sınır listesi.....           | 22 |
| <b>Tablo 3.5 :</b> $t_k$ listesi ( $1 \leq k \leq 42$ ) .....                                                          | 22 |
| <b>Tablo 4.1 :</b> $k = 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11$ için $h_1$ ve $h_2$ yüksekliklerinin değerleri.....                  | 28 |
| <b>Tablo 4.2 :</b> $A_n, K_n, H_n, N_n$ 'nin ilişkisel eşitlikleri .....                                               | 32 |
| <b>Tablo 4.3 :</b> $r$ 'ye göre değişen $S_3$ 'ün şekli ( $p_1 = 3, p_2 = 5, n = 10$ . adım) .....                     | 33 |
| <b>Tablo 4.4 :</b> $r$ 'ye göre değişen yaprağın şekilleri ( $p_1 = 3, p_2 = 5, n = 10$ . adım) .....                  | 33 |
| <b>Tablo 4.5 :</b> $p_1 / p_2$ oranının, altın orana en yakın olan değerleri .....                                     | 36 |

## SEMBOL LİSTESİ

|                                   |                                                                            |
|-----------------------------------|----------------------------------------------------------------------------|
| $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ | Doğal sayılar kümesi                                                       |
| $\mathbb{Z}$                      | Tam sayılar kümesi                                                         |
| $\mathbb{C}$                      | Karmaşık sayılar kümesi                                                    |
| $d n$                             | $d$ tamsayısı $n$ tamsayısını tam böler                                    |
| $d \nmid n$                       | $d$ tamsayısı $n$ tamsayısını tam bölmez                                   |
| $\sigma_k(n)$                     | $n$ tamsayısını tam bölen pozitif tamsayıların $k$ . kuvvetlerinin toplamı |
| $d(n)$                            | $n$ tamsayısının pozitif tamsayı bölenlerinin sayısı                       |
| $\sigma(n)$                       | $n$ tamsayısının pozitif tamsayı bölenlerinin toplamı                      |
| $\sum$                            | Toplam sembolü                                                             |
| $(m, n) = d$                      | $m$ ve $n$ tamsayılarının ortak bölenlerinin en büyüğü $d$ dir.            |

## ÖNSÖZ

Tez çalışmamda, beni yönlendiren, yardım ve desteğini esirgemeyen değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Nazlı YILDIZ İKİKARDEŞ'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca tüm öğrenim yaşantım boyunca bugünlere gelmemi sağlayan her zaman desteklerini yanımda hissettiğim aileme teşekkürlerimi ve sevgilerimi sunarım.



## 1. GİRİŞ

Bu çalışmada bölen fonksiyonları ve bölen fonksiyonları üzerine inşa edilmiş matematiksel modelleme incelenmiştir.

Modelleme, gerçeğe yakın görüntüler yapmaktır. Matematiksel modelleme ise gerçek hayat durumlarının matematiksel şekilde ifade edilmesidir. Uygulamalı matematik bağlamında modelleme ise gerçek hayatta kullanılan matematiğin pratik uygulamalarının yapılmasıdır [1,2]. Bu tezde, matematiksel modellemeye yola çıkarak, çeşitli yaprakların alanlarına ve büyüme durumlarına bölen fonksiyonları kullanılarak modelleme yapılmıştır.

Bölen fonksiyonları, bir tamsayının bölenleri ile ilişkili olan bir aritmetik fonksiyondur. Sayılar teorisinde, bölen fonksiyon,  $k$  karmaşık sayı olmak üzere,  $n$  tamsayısının  $d$  pozitif tamsayı bölenlerinin  $k$  kuvvetinin toplamı

$$\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$$

şeklinde tanımlanır.  $k=1$  alınarak  $\sigma(n) = \sigma_1(n)$  bölen fonksiyonu daha sade bir şekilde de gösterilebilir [3].

Bölen fonksiyonlarıyla ilk ilgilenenlerden olan Liouville, en verimli olduğu 1856-1857 yıllarında sayılar üzerine çeşitli formüller keşfetti. Liouville'nin formülleri 18 makalelik bir seriden oluşuyordu. Ayrıca bu formüllerin formlara uygulanmasını içeren 90 sayfalık makaleler serisi de literatürde yerini almıştı. Fakat sağlık sebepleri nedeniyle Liouville bu formüllerin ispatlarını asla yayınlamadı. Liouville'nin üzerinde durduğu birçok formül Jacobi, Kronecker ve daha birçok meslektaş tarafından temel aritmetik ilkelerle ispatlandı [3].

Aradan geçen zamandan sonra Glaisher, 1940 yılında  $d(n)$  fonksiyon tablosunun  $n \leq 10000$  için yayınladı [4]. Bu tabloyu kontrol ettiğimizde

$$d(n) = d(n+1) = d(n+2) = d(n+3) = 8$$

eşitliğini sağlayan  $n = 3655, 4503, 5943, 6853, 7256, 8393, 9367$  değerleri karşımıza çıkar.

Sonrasında J. Mycielski  $n = 40311$  için

$$d(n) = d(n+1) = d(n+2) = d(n+3) = d(n+4)$$

eşitliğinin sağlandığını bize göstermiştir [5].

Makowski 1960 yılında

$$\sigma(n) = \sigma(n+1)$$

denkleminin  $n < 10000$  için çözümlerini araştırmıştır. Sonuç olarak 9 tane çözümünü listelemiştir. Bu çözümler ise;  $n = 14, 206, 957, 1334, 1364, 1634, 2685, 2974, 4364$  dir [6].

Sierpinski ise 1964 yılında

$$\sigma(n) = \sigma(n+1)$$

eşitliğini sağlayan sonsuz çoklukta  $n$  doğal sayılarının var olup olmadığının bilinemediğini tespit etmiştir [5].

1970 yılında Mientka ve Vogt tarafından,

$$\sigma(n) = \sigma(n+1)$$

denklemine 15 yeni çözüm daha bulunmuştur. Bunlar  $n = 14841, 18873, 19358, 20145, 24957, 33998, 36566, 42818, 56564, 64665, 74918, 79826, 79833, 84134, 92685$  dir [7].

Devamında daha genel sonuçlara gidilmeye çalışılmış ve belli bir  $k$  değeri için  $\sigma(n) = \sigma(n+k)$  denkleminin çözümleri araştırılmaya başlanmıştır. Olası değerlerin neler olabileceği üzerine düşünülmüştür.

$n < 10000$  alınarak sırası ile  $k = 2, 3, 4, 5$  için çözüm sayıları bulunmuştur. Bu sayılar sırası ile 19, 2, 14 ve 6 dır [8,9].

Paul Erdős,

$$\sigma_2(n) = \sigma_2(n+2)$$

denkleminin çözümlerini incelemiş ve bu denklemin çok sayıda çözümü olduğunu söylemiştir. Yine  $\sigma_3(n) = \sigma_3(n+2)$  için ise hiçbir çözümün olmadığını belirtmiştir [10].

2002 yılında J. M. De Koninck,  $\ell$  sabit bir pozitif tamsayı olmak üzere  $\sigma_2(n) = \sigma_2(n+\ell)$  denkleminin çözümlerini araştırmıştır. Burada  $\ell$  tek iken sadece sonlu birkaç çözüm bulunurken,  $\ell$  çift iken sonsuz sayıda çözüm bulunmaktadır [11].

Ayrıca 2011 yılında Weingartner,  $k$  sabit bir çift tamsayı iken,  $\sigma(n) = \sigma(n+k)$  denkleminin sonsuz çoklukta çözümünün olduğunu Schinzel's Hipotezi H ile göstermiştir [9].

Bu tezde ise  $\sigma(n) = \sigma(n+2k)$  denkleminin çözümleri araştırılmıştır.  $0 \leq k \leq 100$  iken sabit bir  $k$  pozitif tamsayı değeri için  $\sigma(n) = \sigma(n+2k)$  denkleminin çözümleri hesaplanmıştır. Ayrıca  $l$  pozitif bir tam sayı ve  $q$  tek asal sayı olmak üzere  $\sigma_{2l}(n) = \sigma_{2l}(q)$  denkleminin çözüm sayıları ile ilgili teorem ve sonuçlar verilmiştir. Bölen fonksiyonlarına dair bulunan bu sonuçlar, eliptik, yelpaze ve beş loblu yaprak çeşitleri üzerine modellenmiştir. Yaprakların alanları, büyüme hızları ve şekilleri üzerindeki olası değişimler gösterilmiştir.

Çalışmanın birinci bölümü, bölen fonksiyonlarının tarihsel sürecinin bahsedildiği ve tezin bölümlerinin tanıtıldığı giriş bölümüdür.

İkinci bölümde, ilerleyen bölümlere temel oluşturacak bazı ön bilgiler yer almıştır. Bu bölümde bölen fonksiyonları ve matematiksel modellemelerden bahsedilmiştir.

Üçüncü ve dördüncü bölümde ise orijinal sonuçlara yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde,  $\sigma(n) = \sigma(n+2k)$  denkleminin sonuçlarına yer verilmiş olup  $n = p_1 p_2$  ve  $n = p_1 p_2 p_3$  için sonuçlar liste halinde gösterilmiştir. Bulunan asal sayılar değer aralıklarına göre ayrılmıştır.  $2k$  değerlerinin  $n = p_1 p_2 \dots p_r$  için alabileceği en küçük alt sınırlar tablolastırılmıştır.  $1 \leq k \leq 42$  için  $\sigma_{1,1}(n) = \sigma_{1,1}(n+1), \dots, \sigma_{1,1}(n) = \sigma_{1,1}(n+42)$  denklemlerinin sonuçlarının sayıları da tablo üzerinde gösterilmiştir. Ayrıca  $\sigma_{2l}(n) = \sigma_{2l}(q)$  eşitliğinin çözüm sayıları ile ilgili teorem ve sonuçlar da bu bölümde yer almaktadır.

Çalışmanın dördüncü bölümünde, bölen fonksiyonu yardımıyla eliptik, yelpaze ve beş loblu yapraklara modelleme yapılmıştır. Yapraklara uygulanan bu modelleme, yaprakların alanlarının hesaplanmasında bölen fonksiyonları kullanılarak yapılmıştır. Yaprakların alanı  $S_1, S_2, S_3$  alanlarına ayrılmış ve bu alanlar bir üçgenin alan formülü ve Arşimet teoremi kullanılarak hesaplanmıştır. Yaprak modellemelerinde  $S_3$  alanının şekli incelenip buna uygun genellemelere ulaşılmıştır. Bulunan sonuçlar görsellerle desteklenmiştir. Ayrıca zamana göre yaprakların büyümesi bölen fonksiyonları yardımıyla modellenmiş ve bir grafik oluşturulmuştur. Bu bölümde son olarak  $\sigma(n) = \sigma(n+2k)$  denkleminin çözümünden elde edilen farklı tek asal sayıların oranları incelenerek altın orana en yakın değerler bulunarak tablo ile gösterilmiştir.

Beşinci bölümde çalışmadan elde edilen sonuçlardan ve yapılabilecek daha farklı modellemeler üzerine olan önerilerden bahsedilmiştir.

## 2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde sayılar teorisinin temel tanımları, bölen fonksiyonları, matematiksel modelleme, Arşimet teoremi ve son olarak altın oran ile ilgili bilgiler yer almaktadır.

### 2.1 Bölen Fonksiyonları

**2.1.1 Tanım:**  $n$  bir tamsayı olsun.  $n = d.e$  olacak biçimde  $d$  ve  $e$  tamsayıları yazılabiliyorsa  $d$  ve  $e$  'ye  $n$  'nin bölenleri denir.  $d$  sayısı  $n$  'yi tam böler ve bu  $d \mid n$  şeklinde ifade edilir. Eğer  $d$  sayısı  $n$  'yi tam bölmüyorsa  $d \nmid n$  şeklinde gösterilir ve  $e$  sayısı içinde benzer şekilde ifade edilir [12].

Açıktır ki  $0 \nmid n$  ve  $1 \mid n$  'dir.

**2.1.2 Tanım:** 1 ve kendisinden başka pozitif böleni olmayan 1'den büyük tam sayılara asal sayı denir [12].

**2.1.3 Teorem (Aritmetiğin Temel Teoremi):** 1'den büyük her doğal sayı, çarpanların sırası hariç, sonlu sayıda asal sayının çarpımı olarak bir tek biçimde yazılabilir [12].

**2.1.4 Tanım:** Tanım kümesi doğal sayılar olan,  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  biçimindeki fonksiyonlara aritmetik fonksiyonlar denir [12].

Eğer  $f$  aritmetik fonksiyon ve  $n \notin \mathbb{N}$  ise  $f(n) = 0$  dır.

**2.1.5 Tanım:**  $a$  ve  $b$  aralarında asal sayılar olsun.  $f$  aritmetik fonksiyonu  $f(a.b) = f(a).f(b)$  koşulunu sağlıyorsa  $f$  fonksiyonuna çarpımsal fonksiyon denir [13].

Eğer  $f$  çarpımsal aritmetik fonksiyon ve  $n \in \mathbb{N}$  sayısı,  $n = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_r^{m_r}$  şeklinde asal çarpanlarına ayrılıyor ise

$$f(n) = f(p_1^{m_1}) f(p_2^{m_2}) \dots f(p_r^{m_r})$$

şeklinde gösterilir [13].

**2.1.6 Teorem:**  $h(n)$  çarpımsal aritmetik fonksiyon olsun. Bu durumda

$$f(n) = \sum_{d|n} h(d)$$

çarpımsal fonksiyondur [3].

**2.1.7 Teorem:**  $n \in \mathbb{N}$  olsun.  $d$ ,  $n$ 'in pozitif tam bölenleri olduğu için  $n|d$  de tersten  $n$ 'in pozitif bölenleridir.

Eğer  $f$  aritmetik fonksiyon ise,

$$\sum_{\substack{d \in \mathbb{N} \\ d|n}} f(d) = \sum_{\substack{d \in \mathbb{N} \\ d|n}} f\left(\frac{n}{d}\right)$$

şeklinde ifade edebiliriz [3].

**2.1.8 Teorem:**  $n \in \mathbb{N}$  olsun.  $f$  aritmetik fonksiyon ise,

$$\sum_{\substack{d \in \mathbb{N} \\ d|n \\ n/d \text{ çift}}} f(d) = \sum_{\substack{d \in \mathbb{N} \\ d|n \\ d|(n/2)}} f(d)$$

şeklinde gösterilir [3].

**2.1.9 Teorem:**  $n \in \mathbb{N}$  olsun.  $f$  aritmetik fonksiyon ise,

$$\sum_{\substack{d \in \mathbb{N} \\ d|n \\ n/d \text{ tek}}} f(d) = \sum_{\substack{d \in \mathbb{N} \\ d|n}} f(d) - \sum_{\substack{d \in \mathbb{N} \\ d|n \\ d|(n/2)}} f(d)$$

şeklinde gösterilir [3].

**2.1.10 Tanım:**  $k \in \mathbb{C}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  ve  $d$ ,  $n$ 'in pozitif tamsayı böleni olsun.

$$\sigma_k(n) = \sum_{\substack{d \in \mathbb{N} \\ d|n}} d^k$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona bölen fonksiyonu denir [3].

Özel olarak  $k = 0$  ve  $k = 1$  için tanımlamalar aşağıda verilmiştir.

$$d(n) = \sigma_0(n) = \sum_{\substack{d \in \mathbb{N} \\ d|n}} 1$$

$d(n)$  fonksiyonu, bir sayının pozitif tam bölenlerinin sayısını vermektedir.

$$\sigma(n) = \sigma_1(n) = \sum_{\substack{d \in \mathbb{N} \\ d|n}} d$$

$\sigma(n)$  fonksiyonu ise, bir sayının pozitif tam bölenlerinin toplamını ifade etmektedir.

**2.1.11 Teorem:** Bölen fonksiyonu çarpımsal aritmetik fonksiyondur [3].

**2.1.12 Teorem:**  $p$  asal bir sayı olsun.  $k, n \in \mathbb{N}$  olmak üzere

$$\sigma_k(pn) - (p^k + 1)\sigma_k(n) + p^k \sigma_k(n/p) = 0$$

eşitliği vardır [3].

**2.1.13 Teorem:** Eğer  $p$  asal sayı ve  $a$  negatif olmayan tamsayı ise;

$$\sigma_k(p^a) = 1 + p^k + p^{2k} + \dots + p^{ak} = \frac{p^{(a+1)k} - 1}{p^k - 1}$$

şeklindedir [3].

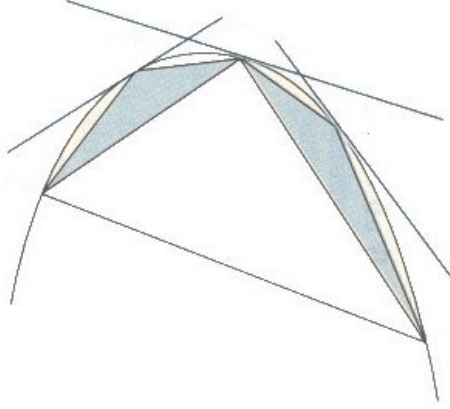
## 2.2 Matematiksel Modelleme

**2.2.1 Tanım:** Karmaşık sistemleri ve yapıları yorumlamak ve anlamak için zihinde var olan kavramsal yapılar ile bu yapıların dış temsillerinin bütününe model denir [1].

**2.2.2 Tanım:** Gerçeği matematiksel bir dille taklit etmeye yardım eden düşünce ve işlem şekline matematiksel modelleme denir [1].

Matematiksel modelleme gerçek yaşamda karşılaşılan durumların matematiksel olarak ifade edilmesidir. Matematiksel modelleme karmaşık bir matematiksel aktivitedir ve öğrenmenin birçok yönlerini içerir [1].

**2.2.3 Teorem (Arşimet teoremi):** Bir parabol ve onu kesen doğru ile aralarında kalan alan, aynı tabana ve yüksekliğe sahip bir üçgenin alanının 4/3'üne eşittir.



**Şekil 2.1:** Üçgen üzerinde Arşimet parabollemenmesi.

Üçgenin alanı 1 olarak alınırsa toplam alan

$$1 + 2\left(\frac{1}{8}\right) + 4\left(\frac{1}{8}\right)^2 + 8\left(\frac{1}{8}\right)^3 + \dots$$

serisiyle ifade edilebilir. Kesirler sadeleştirildiğinde

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots$$

sonucuna ulaşılır. Bu, ortak oranı 1/4 olan bir geometrik seridir. Kesirli bölüm 1/3'e eşittir.

$$\sum_{n=0}^{\infty} 4^{-n} = 1 + 4^{-1} + 4^{-2} + 4^{-3} + \dots = \frac{4}{3}$$

Bir parabol ile onu kesen doğru arasında kalan alan

$$\frac{1}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

olarak hesaplanır [14].

**2.2.4 Tanım:**  $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  sayısına altın oran denir.

Altın oran, uyum açısından en uygun olduğu düşünülen matematiksel orandır. Fibonacci dizisinde kendinden bir önce gelen sayıya bölünerek bulunan bu oran 1,618 sayısına sürekli yaklaşacak şekilde oluşmaktadır [15].



### 3. $\sigma(n) = \sigma(n+2k)$ DEKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİ

#### 3.1 Tek Bölen Fonksiyonu

**3.1.1 Tanım:**  $n$  bir doğal sayı ve  $m \in \mathbb{C}$  olsun.  $d$ ,  $n$ 'nin pozitif tek tamsayı bölenleri olmak üzere,

$$\sum_{\substack{d|n \\ d \text{ tek}}} d^m$$

fonksiyonuna tek bölen fonksiyonu denir.

**3.1.2 Örnek:**  $m=1$  için 12 sayısının tek bölenleri;

$$\sum_{\substack{d|12 \\ d \text{ tek}}} d^1 = 1^1 + 3^1 = 4$$

şeklinde gösterilebilir.

**3.1.3 Teorem:**  $k$  sabit bir pozitif tamsayı olsun.  $p$  ve  $q$  tek asal sayılar olmak üzere  $\sigma(p) = \sigma(q)$  denklemini sağlayan  $p$  ve  $q$  değerleri yoktur.

**İspat:** Tersine varsayalım ki  $\sigma(p) = \sigma(q)$  denklemini sağlayan  $p$  ve  $q$  farklı tek asal sayıları olsun.  $\sigma(p) = 1 + p$  ve  $\sigma(q) = 1 + q$  olduğundan  $p+1 = q+1$  yani  $p = q$  elde edilir. Varsayımla çeliştiğinden  $\sigma(p) = \sigma(q)$  denklemini sağlayan farklı tek  $p$  ve  $q$  asalları yoktur.

**3.1.4 Teorem:**  $k$  sabit bir pozitif tamsayı ( $1 \leq k \leq 100$ ) olsun.  $p_1, p_2, q$  farklı tek asal sayılar olmak üzere  $q = p_1 p_2 + 2k$  eşitliği verilsin. Bu durumda  $k = 1, 2, 3, 13, 14, 16, 19, 28, 29, 34, 37, 40, 43, 49, 52, 58, 61, 64, 67, 68, 70, 73, 79, 82, 85, 88, 89, 94, 97, 100$  değerleri için  $\sigma(p_1 p_2) = \sigma(q)$  denkleminin çözümü yoktur.

**İspat:**  $p_1, p_2, q$  farklı tek asal sayılar olsun. Bölen fonksiyonunu göz önüne alarak

$$\sigma(p_1 p_2) = \sigma(q)$$

$$(1 + p_1)(1 + p_2) = (1 + q)$$

biçiminde yazabiliriz. Hipotez gereği  $q = p_1 p_2 + 2k$  olduğundan

$$1 + p_1 + p_2 + p_1 p_2 = 1 + p_1 p_2 + 2k$$

$$p_1 + p_2 = 2k$$

eşitliği elde edilir.  $p_1$  ve  $p_2$  farklı tek asal sayılar olduğundan  $p_1 < p_2$  olmak üzere  $p_1 \geq 3, p_2 \geq 5$  dir. O halde yazılabilecek en küçük değerler  $p_1 = 3$  ve  $p_2 = 5$  dir. Buradan

$$p_1 + p_2 = 3 + 5 = 2k$$

$$8 = 2k$$

elde edilir. Yani  $2k$  'nın alabileceği en küçük değer 8 'dir. Dolayısıyla  $2k = 2, 4, 6$  değerlerine karşılık tek asal sayılar mevcut değildir.

Bu yüzden  $2k$  için  $2k \geq 8$  durumunu düşünmeliyiz.  $2k = 8$  için  $p_1 = 3, p_2 = 5$  ve  $q = 23$  çözümlerdir.  $2k > 8$  durumunu ise Mathematica 9.0 programı kullanarak hesapladığımızda

$k = 1, 2, 3, 13, 14, 16, 19, 28, 29, 34, 37, 40, 43, 49, 52, 58, 61, 64, 67, 68, 70, 73, 79, 82, 85, 88, 89, 94, 97, 100$

değerleri için  $\sigma(p_1 p_2) = \sigma(q)$  denkleminin çözümü yoktur.

**3.1.5 Teorem:**  $k$  sabit bir pozitif tamsayı ( $1 \leq k \leq 100$ ) olsun.  $p_1, p_2, p_3, q$  farklı tek asal sayılar olmak üzere  $q = p_1 p_2 p_3 + 2k$  eşitliği verilsin.  $\sigma(p_1 p_2 p_3) = \sigma(q)$  denkleminin tüm çözümleri aşağıdaki tabloda verilmiştir.

**Tablo 3.1:**  $\sigma(p_1 p_2 p_3) = \sigma(q)$  denkleminin çözümleri.

| $k$ | $2k$ | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | $p_1 p_2 p_3$ | $q$ | $(2k, p_1 p_2 p_3, q)$ |
|-----|------|-------|-------|-------|---------------|-----|------------------------|
| 43  | 86   | 3     | 5     | 7     | 3.5.7         | 191 | (86, 3.5.7, 191)       |
| 76  | 152  | 3     | 7     | 11    | 3.7.11        | 383 | (152, 3.7.11, 383)     |
| 88  | 176  | 3     | 5     | 17    | 3.5.17        | 431 | (176, 3.5.17, 431)     |
| 97  | 194  | 3     | 5     | 19    | 3.5.19        | 479 | (194, 3.5.19, 479)     |

**İspat:**  $p_1, p_2, p_3, q$  farklı tek asal sayılar olsun. Bölen fonksiyonu tanım gereği

$$\sigma(p_1 p_2 p_3) = \sigma(q)$$

$$(1 + p_1)(1 + p_2)(1 + p_3) = (1 + q)$$

biçiminde yazabiliriz. Hipotez gereği  $q = p_1 p_2 p_3 + 2k$  olduğundan

$$(1 + p_1)(1 + p_2)(1 + p_3) = 1 + p_1 p_2 p_3 + 2k$$

ve

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3 = 2k$$

eşitliği elde edilir.  $p_1, p_2, p_3$  farklı tek asal sayılar olduğundan  $p_1 < p_2 < p_3$  olmak üzere  $p_1 \geq 3$ ,  $p_2 \geq 5$  ve  $p_3 \geq 7$  dir. O halde yazılabilecek en küçük değerler  $p_1=3$ ,  $p_2=5$  ve  $p_3=7$  dir. Buradan

$$(1+3)(1+5)(1+7) = 1 + 3.5.7 + 2k$$

$$86 = 2k$$

elde edilir. Yani  $2k$  'nın alabileceği en küçük değer 86 dır. O halde  $2 \leq 2k \leq 86$  aralığında sonuç yoktur.

$2k = 86$  için,

$$p_1=3, p_2=5, p_3=7 \text{ ve } q=191$$

çözümlerdir. O halde  $2k > 86$  durumunu incelemeliyiz. Mathematica 9.0 programını hesapladığımızda  $\sigma(p_1 \cdot p_2 \cdot p_3) = \sigma(q)$  denkleminin

$$k = 43, 76, 88, 97$$

değerleri için çözümleri elde edilir.

**3.1.6 Teorem:**  $k$  sabit bir pozitif tamsayı ( $1 \leq k \leq 100$ ) olsun.  $n$  tam kare olmayan bir pozitif tamsayı ve  $q$  tek asal sayı olmak üzere  $\sigma(n) = \sigma(n+2k) = \sigma(q)$  denkleminin tüm sonuçları aşağıdaki tabloda verilmiştir.

**Tablo 3.2:**  $\sigma(n) = \sigma(n+2k) = \sigma(q)$  denkleminin çözümleri.

| $2k$ | $n (p_1 \cdot p_2 \dots p_r)$ | $q$ | $(2k, n, q)$      |
|------|-------------------------------|-----|-------------------|
| 8    | 3.5                           | 23  | (8, 3. 5, 23)     |
| 10   | 3.7                           | 31  | (10, 3. 7, 31)    |
| 12   | 5.7                           | 47  | (12, 5. 7, 47)    |
| 14   | 3.11                          | 47  | (14, 3. 11, 47)   |
| 16   | 5.11                          | 71  | (16, 5. 11, 71)   |
| 18   | 5.13                          | 83  | (18, 5. 13, 83)   |
| 20   | 3.17                          | 71  | (20, 3. 17, 71)   |
| 22   | 3.19                          | 79  | (22, 3. 19, 79)   |
| 22   | 5.17                          | 107 | (22, 5. 17, 107)  |
| 24   | 11.13                         | 167 | (24, 11. 13, 167) |
| 30   | 7.23                          | 191 | (30, 7. 23, 191)  |
| 30   | 11.19                         | 239 | (30, 11. 19, 239) |
| 30   | 13.17                         | 251 | (30, 13. 17, 251) |
| 34   | 3.31                          | 127 | (34, 3. 31, 127)  |
| 34   | 5.29                          | 179 | (34, 5. 29, 179)  |
| 36   | 5.31                          | 191 | (36, 5. 31, 191)  |
| 36   | 7.29                          | 239 | (36, 7. 29, 239)  |
| 36   | 17.19                         | 359 | (36, 17. 19, 359) |
| 40   | 3.37                          | 151 | (40, 3.37, 151)   |
| 40   | 11.29                         | 359 | (40, 11.29, 359)  |
| 40   | 17.23                         | 431 | (40, 17.23, 431)  |
| 42   | 5.37                          | 227 | (42, 5.37, 227)   |
| 42   | 11.31                         | 383 | (42, 11.31, 383)  |
| 42   | 13.29                         | 419 | (42, 13.29, 419)  |
| 42   | 19.23                         | 479 | (42, 19. 23, 479) |
| 44   | 3.41                          | 167 | (44, 3. 41, 167)  |

**Tablo 3.2:**  $\sigma(n) = \sigma(n+2k) = \sigma(q)$  denkleminin çözümleri. (devam)

| $2k$ | $n (p_1 \cdot p_2 \cdots p_r)$ | $q$  | $(2k, n, q)$       |
|------|--------------------------------|------|--------------------|
| 46   | 5.41                           | 251  | (46, 5. 41, 251)   |
| 48   | 5.43                           | 263  | (48, 5. 43, 263)   |
| 48   | 19.29                          | 599  | (48, 19. 29, 599)  |
| 50   | 3.47                           | 191  | (50, 3. 47, 191)   |
| 52   | 11.41                          | 503  | (52, 11.41, 503)   |
| 52   | 23.29                          | 719  | (52, 23.29, 719)   |
| 54   | 7.47                           | 383  | (54, 7.47, 383)    |
| 54   | 13.41                          | 587  | (54, 13.41, 587)   |
| 54   | 17.37                          | 683  | (54, 17.37, 683)   |
| 60   | 7.53                           | 431  | (60, 7.53, 431)    |
| 60   | 19.41                          | 839  | (60, 19.41, 839)   |
| 60   | 23.27                          | 911  | (60, 23.37, 911)   |
| 62   | 3.59                           | 239  | (62, 3.59, 239)    |
| 64   | 5.59                           | 359  | (64, 5.59, 359)    |
| 64   | 11.53                          | 647  | (64, 11.53, 647)   |
| 64   | 17.47                          | 863  | (64, 17.47, 863)   |
| 66   | 7.59                           | 479  | (66, 7.59, 479)    |
| 70   | 3.67                           | 271  | (70, 3.67, 271)    |
| 70   | 11.59                          | 719  | (70, 11.59, 719)   |
| 70   | 17.53                          | 971  | (70, 17.53, 971)   |
| 70   | 23.47                          | 1151 | (70, 23.47, 1151)  |
| 70   | 29.41                          | 1259 | (70, 29.41, 1259)  |
| 72   | 11.61                          | 743  | (72, 11.61, 743)   |
| 72   | 13.59                          | 839  | (72, 13.59, 839)   |
| 72   | 29.43                          | 1319 | (72, 29.43, 1319)  |
| 76   | 5.71                           | 431  | (76, 5.71, 431)    |
| 76   | 29.47                          | 1439 | (76, 29.47, 1439)  |
| 78   | 5.73                           | 443  | (78, 5.73, 443)    |
| 82   | 11.71                          | 863  | (82, 11. 71, 863)  |
| 82   | 23.59                          | 1439 | (82, 23. 59, 1439) |
| 82   | 29.53                          | 1619 | (82, 29. 53, 1619) |
| 84   | 5.79                           | 479  | (84, 5. 79, 479)   |
| 84   | 11.73                          | 887  | (84, 11. 73, 887)  |
| 84   | 17.67                          | 1223 | (84, 17. 67, 1223) |
| 84   | 23.61                          | 1487 | (84, 23. 61, 1487) |
| 84   | 37.47                          | 1823 | (84, 37. 47, 1823) |
| 84   | 41.43                          | 1847 | (84, 41. 43, 1847) |
| 86   | 3.5.7                          | 191  | (86, 3. 5. 7, 191) |
| 88   | 5.83                           | 503  | (88, 5. 83, 503)   |
| 90   | 19.71                          | 1439 | (90, 19. 71, 1439) |
| 90   | 43.47                          | 2111 | (90, 43. 47, 2111) |
| 92   | 3.89                           | 359  | (92, 3. 89, 359)   |
| 94   | 41.53                          | 2267 | (94, 41. 53, 2267) |
| 96   | 7.89                           | 719  | (96, 7. 89, 719)   |
| 96   | 17.79                          | 1439 | (96, 17. 79, 1439) |

**Tablo 3.2:**  $\sigma(n) = \sigma(n+2k) = \sigma(q)$  denkleminin çözümleri. (devam)

| $2k$ | $n (p_1 \cdot p_2 \cdots p_r)$ | $q$  | $(2k, n, q)$        |
|------|--------------------------------|------|---------------------|
| 96   | 29.67                          | 2039 | (96, 29. 67, 2039)  |
| 100  | 17.83                          | 1511 | (100, 17. 83, 1511) |
| 100  | 47.53                          | 2591 | (100, 47. 53, 2591) |
| 102  | 5.97                           | 587  | (102, 5. 97, 587)   |
| 102  | 13.89                          | 1259 | (102, 13. 89, 1259) |
| 106  | 47.59                          | 2879 | (106, 47. 59, 2879) |
| 106  | 17.89                          | 1619 | (106, 17. 89, 1619) |
| 108  | 29.79                          | 2399 | (108, 29. 79, 2399) |
| 110  | 3.107                          | 431  | (110, 3. 107, 431)  |
| 112  | 3.109                          | 439  | (112, 3. 109, 439)  |
| 112  | 5.107                          | 647  | (112, 5. 107, 647)  |
| 112  | 11.101                         | 1223 | (112,11. 101,1223)  |
| 112  | 41.71                          | 3023 | (112, 41. 71, 3023) |
| 114  | 5.109                          | 659  | (114, 5. 109, 659)  |
| 114  | 7.107                          | 863  | (114, 7. 107, 863)  |
| 114  | 13.101                         | 1427 | (114,13. 101,1427)  |
| 114  | 31.83                          | 2687 | (114, 31. 83, 2687) |
| 114  | 43.71                          | 3167 | (114, 43. 71, 3167) |
| 114  | 53.61                          | 3347 | (114, 53. 61, 3347) |
| 118  | 5.113                          | 683  | (118, 5. 113, 683)  |
| 118  | 29.89                          | 2699 | (118, 29. 89, 2699) |
| 120  | 7.113                          | 911  | (120, 7. 113, 911)  |
| 120  | 11.109                         | 1319 | (120,11. 109,1319)  |
| 120  | 13.107                         | 1511 | (120,13.107, 1511)  |
| 120  | 17.103                         | 1871 | (120,17.103, 1871)  |
| 120  | 19.101                         | 2039 | (120,19.101, 2039)  |
| 120  | 23.97                          | 2351 | (120, 23.97, 2351)  |
| 120  | 31.89                          | 2879 | (120, 31.89, 2879)  |
| 120  | 37.83                          | 3191 | (120, 37. 83, 3191) |
| 120  | 41.79                          | 3359 | (120, 41. 79, 3359) |
| 120  | 53.67                          | 3671 | (120, 53. 67, 3671) |
| 120  | 59.61                          | 3719 | (120, 59. 61, 3719) |
| 124  | 11.113                         | 1367 | (124,11. 113,1367)  |
| 124  | 23.101                         | 2447 | (124,23.101, 2447)  |
| 124  | 41.83                          | 3527 | (124, 41.83, 3527)  |
| 126  | 17.109                         | 1979 | (126, 17.109,1979)  |
| 126  | 29.97                          | 2939 | (126, 29.97, 2939)  |
| 126  | 59.67                          | 4079 | (126, 59.67, 4079)  |
| 130  | 23.107                         | 2591 | (130, 23.107,2591)  |
| 130  | 41.89                          | 3779 | (130, 41.89, 3779)  |
| 132  | 29.103                         | 3119 | (132, 29.103,3119)  |
| 132  | 61.71                          | 4463 | (132, 61.71, 4463)  |
| 138  | 29.109                         | 3299 | (138, 29.109,3299)  |
| 138  | 59.79                          | 4799 | (138, 59. 79, 4799) |
| 142  | 5.137                          | 827  | (142, 5. 137, 827)  |

**Tablo 3.2:**  $\sigma(n) = \sigma(n+2k) = \sigma(q)$  denkleminin çözümleri. (devam)

| $2k$ | $n (p_1 \cdot p_2 \cdots p_r)$ | $q$  | $(2k, n, q)$         |
|------|--------------------------------|------|----------------------|
| 142  | 11.131                         | 1583 | (142, 11. 131, 1583) |
| 142  | 41.101                         | 4283 | (142, 41. 101, 4283) |
| 142  | 59.83                          | 5039 | (142, 59. 83, 5039)  |
| 144  | 5.139                          | 839  | (144, 5. 139, 839)   |
| 144  | 7.137                          | 1103 | (144, 7. 137, 1103)  |
| 144  | 13.131                         | 1847 | (144, 13. 131, 1847) |
| 144  | 47.97                          | 4703 | (144, 47. 97, 4703)  |
| 148  | 59.89                          | 5399 | (148, 59. 89, 5399)  |
| 150  | 13.137                         | 1931 | (150, 13. 137, 1931) |
| 150  | 43.107                         | 4751 | (150, 43. 107, 4751) |
| 150  | 67.83                          | 5711 | (150, 67. 83, 5711)  |
| 152  | 3.149                          | 599  | (152, 3. 149, 599)   |
| 152  | 3.7.11                         | 383  | (152, 3. 7. 11, 383) |
| 154  | 3.151                          | 607  | (154, 3.151, 607)    |
| 154  | 23.131                         | 3167 | (154, 23.131, 3167)  |
| 154  | 41.113                         | 4787 | (154, 41.113, 4787)  |
| 154  | 53.101                         | 5507 | (154, 53.101, 5507)  |
| 154  | 71.83                          | 6047 | (154, 71.83, 6047)   |
| 156  | 5.151                          | 911  | (156, 5. 151, 911)   |
| 156  | 47.109                         | 5279 | (156, 47. 109, 5279) |
| 156  | 59.97                          | 5879 | (156, 59. 97, 5879)  |
| 160  | 3.157                          | 631  | (160, 3. 157, 631)   |
| 160  | 47.113                         | 5471 | (160, 47. 113, 5471) |
| 162  | 5.157                          | 947  | (162, 5.157, 947)    |
| 162  | 11.151                         | 1823 | (162, 11.151, 1823)  |
| 162  | 13.149                         | 2099 | (162, 13.149, 2099)  |
| 162  | 23.139                         | 3359 | (162, 23.139, 3359)  |
| 162  | 53.109                         | 5939 | (162, 53.109, 5939)  |
| 162  | 61.101                         | 6323 | (162, 61.101, 6323)  |
| 162  | 73.89                          | 6659 | (162, 73.89, 6659)   |
| 162  | 79.83                          | 6719 | (162, 79.83, 6719)   |
| 166  | 17.149                         | 2699 | (166, 17.149, 2699)  |
| 166  | 29.137                         | 4139 | (166, 29.137, 4139)  |
| 168  | 5.163                          | 983  | (168, 5.163, 983)    |
| 168  | 19.149                         | 2999 | (168, 19.149, 2999)  |
| 168  | 59.109                         | 6599 | (168, 59.109, 6599)  |
| 172  | 83.89                          | 7559 | (172, 83.89, 7559)   |
| 174  | 17.157                         | 2843 | (174, 17.157, 2843)  |
| 174  | 43.131                         | 5807 | (174, 43.131, 5807)  |
| 174  | 47.127                         | 6143 | (174, 47.127, 6143)  |
| 174  | 71.103                         | 7487 | (174, 71.103, 7487)  |
| 174  | 73.101                         | 7547 | (174, 73.101, 7547)  |
| 176  | 3.5.17                         | 431  | (176, 3.5.17, 431)   |
| 180  | 13.167                         | 2351 | (180, 13.167, 2351)  |
| 180  | 31.149                         | 4799 | (180, 31.149, 4799)  |

**Tablo 3.2:**  $\sigma(n) = \sigma(n+2k) = \sigma(q)$  denkleminin çözümleri. (devam)

| $2k$ | $n (p_1 \cdot p_2 \cdots p_r)$ | $q$  | $(2k, n, q)$         |
|------|--------------------------------|------|----------------------|
| 180  | 41.139                         | 5879 | (180, 41.139, 5879)  |
| 180  | 53.127                         | 6911 | (180, 53.127, 6911)  |
| 180  | 71.109                         | 7919 | (180, 71.109, 7919)  |
| 180  | 83.97                          | 8231 | (180, 83. 97, 8231)  |
| 182  | 3.179                          | 719  | (182, 3. 179, 719)   |
| 184  | 3.181                          | 727  | (184, 3. 181, 727)   |
| 184  | 11.173                         | 2087 | (184, 11. 173, 2087) |
| 184  | 17.167                         | 3023 | (184, 17. 167, 3023) |
| 184  | 53.131                         | 7127 | (184, 53.131, 7127)  |
| 186  | 5.181                          | 1091 | (186, 5.181, 1091)   |
| 186  | 7.179                          | 1439 | (186, 7.179, 1439)   |
| 186  | 19.167                         | 3359 | (186, 19.167, 3359)  |
| 186  | 47.139                         | 6719 | (186, 47.139, 6719)  |
| 186  | 89.97                          | 8819 | (186, 89.97, 8819)   |
| 190  | 41.149                         | 6299 | (190, 41.149, 6299)  |
| 190  | 53.137                         | 7451 | (190, 53.137, 7451)  |
| 190  | 59.131                         | 7919 | (190, 59.131, 7919)  |
| 192  | 29.163                         | 4919 | (192, 29.163, 4919)  |
| 192  | 43.149                         | 6599 | (192, 43.149, 6599)  |
| 192  | 53.139                         | 7559 | (192, 53.139, 7559)  |
| 192  | 83.109                         | 9239 | (192, 83.109, 9239)  |
| 194  | 3.5.19                         | 479  | (194, 3.5.19, 479)   |
| 196  | 5.191                          | 1151 | (196, 5.191, 1151)   |
| 196  | 29.167                         | 5039 | (196, 29. 167, 5039) |
| 196  | 89.107                         | 9719 | (196, 89. 107, 9719) |
| 198  | 5.193                          | 1163 | (198, 5. 193, 1163)  |

**İspat:**  $p_1, p_2, \dots, p_r$  farklı tek asal tamsayılar ve  $n$  tam kare olmayan pozitif tek tamsayı olmak üzere  $n = p_1 p_2 \dots p_r$  verilsin.  $r = 1$ ,  $r = 2$  ve  $r = 3$  için elde edilen sonuçlar 3.1.3 Teorem, 3.1.4 Teorem ve 3.1.5 Teorem ile verilmiştir.

$r = 4$  için  $n = p_1 p_2 p_3 p_4$  olur. Burada  $\sigma(n) = \sigma(n+2k) = \sigma(q)$  denklemini ele alırsak

$$\sigma(p_1 p_2 p_3 p_4) = \sigma(q)$$

$$(1+p_1)(1+p_2)(1+p_3)(1+p_4) = (1+q)$$

elde edilir.  $q = p_1 p_2 p_3 p_4 + 2k$  olarak tanımlandığından

$$(1+p_1)(1+p_2)(1+p_3)(1+p_4) = 1 + p_1 p_2 p_3 p_4 + 2k$$

$$(1+p_1)(1+p_2)(1+p_3)(1+p_4)-(1+p_1p_2p_3p_4)=2k$$

eşitliği bulunur.  $p_1, p_2, p_3$  ve  $p_4$  farklı tek asal sayılar olduğundan  $p_1 < p_2 < p_3 < p_4$  olmak üzere  $p_1 \geq 3, p_2 \geq 5, p_3 \geq 7, p_4 \geq 11$  dir. Buradan

$$(1+3)(1+5)(1+7)(1+11)-(1+3.5.7.11)=2k$$

$$1148=2k$$

elde edilir.  $2k$  'nın alacağı en küçük değer 1148 'dir.  $r=4$  için  $2k$  alt sınırı 200'den büyük olduğundan  $2k \leq 200$  ( $1 \leq k \leq 100$ ) için çözüm bulunamaz.  $r > 4$  için de incelediğimizde benzer şekilde sonuçlanır.

**3.1.7 Teorem :**  $n$  tam kare olmayan pozitif bir tamsayı ve  $l$  pozitif tamsayı iken  $q = n + 2k$  ( $k \geq 1$ ) olsun. O halde  $\sigma_{2l}(n) = \sigma_{2l}(q)$  denklemini sağlayan hiçbir sonuç bulunamaz. Ayrıca  $p_i$  ve  $q$  farklı tek asal sayılar iken  $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$  ( $1 \leq i \leq r$ ) olsun. Eğer

- i.  $\#\{i : \alpha_i \text{ tek}, 1 \leq i \leq r\} \geq 2$  veya
- ii.  $\alpha_1 \equiv 1 \pmod{4}$  ve  $\alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_r = 0$  veya
- iii.  $\alpha_1 \equiv 3 \pmod{4}$  ve tüm  $1 \leq j \leq r$  için,  $\alpha_j$  çift ( $i \neq j$ ) ise

$$\sigma_{2l}(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}) \neq \sigma_{2l}(q)$$

dır.

**İspat:**  $p_1, p_2, \dots, p_r$  ve  $q$  farklı tek asal sayılar ve  $n = p_1 p_2 \dots p_r$  olsun. O halde

$$\sigma_{2l}(p_1 p_2 \dots p_r) = (p_1^{2l} + 1)(p_2^{2l} + 1) \dots (p_r^{2l} + 1) \text{ ve } \sigma_{2l}(q) = 1 + q^{2l}$$

şeklindedir. Bilindiği üzere  $p^a | n$  ve  $p^{a+1} \nmid n$  iken  $p^a || n$  olduğundan

$$2^r | (p_1^{2l} + 1)(p_2^{2l} + 1) \dots (p_r^{2l} + 1) \text{ ve } 2 \nmid 1 + q^{2l}$$

olduğu açıkça gözüktür.

Eğer  $r \geq 2$  ise,

$$\sigma_{2l}(p_1 p_2 \dots p_r) \equiv 0 \pmod{4}$$

ve

$$\sigma_{2l}(q) \equiv 2 \pmod{4}$$

olur. Bunun sonucunda

$$\sigma_{2l}(p_1 p_2 \dots p_r) \neq \sigma_{2l}(q)$$

elde edilir. Eğer  $r = 1$  ise,

$$(p_1^{2l} + 1) = (q^{2l} + 1) \text{ ve } p_1 = q$$

olması gerekir. Bu ise  $l > 0$  olması ile çelişir. Bu yüzden  $\sigma_{2l}(p_1) \neq \sigma_{2l}(q)$  dir. Sonuç olarak,  $n$  tam kare olmayan tek tamsayı ise  $n \neq q$  olmak üzere  $\sigma_{2l}(n) \neq \sigma_{2l}(q)$  dir.

Diğer yandan varsayalım ki  $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$ ,  $\#\{i : \alpha_i \text{ tek}, 1 \leq i \leq r\} \geq 2$  ve  $\alpha_1 \equiv \alpha_2 \equiv 1 \pmod{2}$  olsun. O zaman

$$\sigma_{2l}(p_1^{\alpha_1}) = 1 + p_1^{2l} + \dots + p_1^{2l(\alpha_1)} \equiv 0 \pmod{2} \quad (i = 1)$$

ve

$$\sigma_{2l}(p_1^{\alpha_2}) = 1 + p_1^{2l} + \dots + p_1^{2l(\alpha_2)} \equiv 0 \pmod{2} \quad (i = 2)$$

olur.

$n = p_1 p_2$  için  $4 \mid \sigma_{2l}(n)$  ve  $\sigma_{2l}(q) \equiv 2 \pmod{4}$  olduğundan  $\sigma_{2l}(n) \neq \sigma_{2l}(q)$  gösterilmiş olur.

Eğer  $\alpha_1 \equiv 1 \pmod{4}$  ve  $\alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_r = 0$  ise,

$$\sigma_{2l}(p_1^{\alpha_1}) = \sigma_{2l}(p_1^{4m+1}) = 1 + p_1^{2l} + p_1^{2(2l)} + \dots + p_1^{(4m+1)(2l)}$$

ve

$$\sigma_{2l}(q) = 1 + q^{2l}$$

eşitlikleri sağlanır. Buradan

$$p_1^{2l} + p_1^{2(2l)} + \dots + p_1^{(4m+1)(2l)} = q^{2l}$$

elde edilir. Eşitliğin sol tarafını  $p_1^{2l}$  parantezine alalım.

$$p_1^{2l}(1 + p_1^{2l} + \dots + p_1^{8ml}) = q^{2l}$$

Hipotez gereği  $p_i$  ve  $q$  farklı tek asal sayılar olduğundan

$$p_1 \nmid q \text{ ve } \sigma(p_1^{\alpha_1}) \neq \sigma(q)$$

dır.

Eğer  $\alpha_i \equiv 3 \pmod{4}$  ve tüm  $1 \leq j \leq r$  için  $\alpha_j$  çift ( $i \neq j$ ) ise

$$\sigma_{2l}(p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}) = (1 + p_1^{2l} + \dots + p_1^{\alpha_1(2l)}) \dots (1 + p_r^{2l} + \dots + p_r^{\alpha_r(2l)}) \equiv 0 \pmod{4}$$

şeklinde ifade edilebilir.

$\sigma_{2l}(p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}) \equiv 0 \pmod{4}$  ve  $\sigma_{2l}(q) \equiv 2 \pmod{4}$  olduğundan  $\sigma_{2l}(n) \neq \sigma_{2l}(q)$  dur.

**3.1.8 Sonuç:** Bu tabloda  $2k$  değerlerinin aralıkları sırayla 2-100, 102-1000, 1002-10000, 10002-100000 şeklinde dört parçaya ayrılmış ve her bir parçadaki  $n = p_1 p_2$ ,  $n = p_1 p_2 p_3$  ve  $n = p_1 p_2 p_3 p_4$  için bulunan çözümlerin sayısı  $\#(2k, p_1 \cdot p_2, q)$ ,  $\#(2k, p_1 \cdot p_2 \cdot p_3, q)$  ve  $\#(2k, p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4, q)$  ile gösterilmiştir.

**Tablo 3.3:**  $\sigma(n) = \sigma(n + 2k)$  denklemini sağlayan  $2k$  değerlerinin belli aralıklardaki sayısı.

|                                                | $2 \leq 2k \leq 100$ | $102 \leq 2k \leq 1000$ | $1002 \leq 2k \leq 10000$ | $10002 \leq 2k \leq 100000$ |
|------------------------------------------------|----------------------|-------------------------|---------------------------|-----------------------------|
| $\#(2k, p_1 \cdot p_2, q)$                     | 73                   | 1808                    | 63906                     | 2911232                     |
| $\#(2k, p_1 \cdot p_2 \cdot p_3, q)$           | 1                    | 57                      | 1261                      | 18356                       |
| $\#(2k, p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4, q)$ | 0                    | 0                       | 53                        | 1571                        |

Görüldüğü üzere asal çarpanların sayısı arttıkça, elde edilen çözümlerin sayısı azalmaktadır.

**3.1.9 Sonuç:** Bu tabloda ise  $\sigma(p_1 \dots p_r) = \sigma(q)$  bölen fonksiyonlarında  $2k$  değerinin alt sınırları verilmiştir. Mathematica 9.0 programı kullanılarak on tane değer aşağıdaki tabloda verilmiştir:

**Tablo 3.4:**  $\sigma(n) = \sigma(n + 2k)$  denklemini sağlayan  $2k$  değerlerinin alt sınır listesi.

| $n$                       | Alt Sınır ( $2k$ ) | $n$                | Alt Sınır ( $2k$ )        |
|---------------------------|--------------------|--------------------|---------------------------|
| $p_1 \cdot p_2$           | 8                  | $p_1 \dots p_7$    | 10015844                  |
| $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3$ | 26                 | $p_1 \dots p_8$    | 3023391704                |
| $p_1 \dots p_4$           | 1322               | $p_1 \dots p_9$    | 7465944254                |
| $p_1 \dots p_5$           | 25178              | $p_1 \dots p_{10}$ | 249278458694              |
| $p_1 \dots p_6$           | 325352             | $p_1 \dots p_{18}$ | 8389624896636703538812454 |

**3.1.10 Sonuç:** Bu tabloda  $\sigma_{1,1}(n) = \sum_{\substack{d|n \\ d \text{ tek}}} d^k$  fonksiyonu için

$t_k = \#\{n \mid \sigma_{1,1}(n) = \sigma_{1,1}(n+k), 1 \leq n \leq 2^{31}\}$  tanımlanmıştır.  $k$ , 1 ile 42 arasında olup  $t_k$ ,  $\sigma_{1,1}(n) = \sigma_{1,1}(n+1), \dots, \sigma_{1,1}(n) = \sigma_{1,1}(n+42)$  denklemlerinin çözüm sayılarını göstermektedir.

Hesaplamalar Mathematica 9.0 programı kullanılarak yapılmıştır.

**Tablo 3.5:**  $t_k$  listesi ( $1 \leq k \leq 42$ ).

| $k$ | $t_k$ | $k$ | $t_k$ | $k$ | $t_k$ |
|-----|-------|-----|-------|-----|-------|
| 1   | 53    | 15  | 3     | 29  | 60    |
| 2   | 731   | 16  | 1877  | 30  | 4027  |
| 3   | 2     | 17  | 54    | 31  | 70    |
| 4   | 1394  | 18  | 2857  | 32  | 2973  |
| 5   | 3     | 19  | 77    | 33  | 2     |
| 6   | 1967  | 20  | 2340  | 34  | 999   |

**Tablo 3.5:**  $t_k$  listesi ( $1 \leq k \leq 42$ ). (devam)

|    |      |    |      |    |      |
|----|------|----|------|----|------|
| 7  | 32   | 21 | 3    | 35 | 4    |
| 8  | 1850 | 22 | 1050 | 36 | 5750 |
| 9  | 2    | 23 | 54   | 37 | 77   |
| 10 | 784  | 24 | 5684 | 38 | 1054 |
| 11 | 55   | 25 | 3    | 39 | 3    |
| 12 | 2767 | 26 | 1012 | 40 | 3422 |
| 13 | 60   | 27 | 2    | 41 | 69   |
| 14 | 251  | 28 | 2203 | 42 | 3563 |

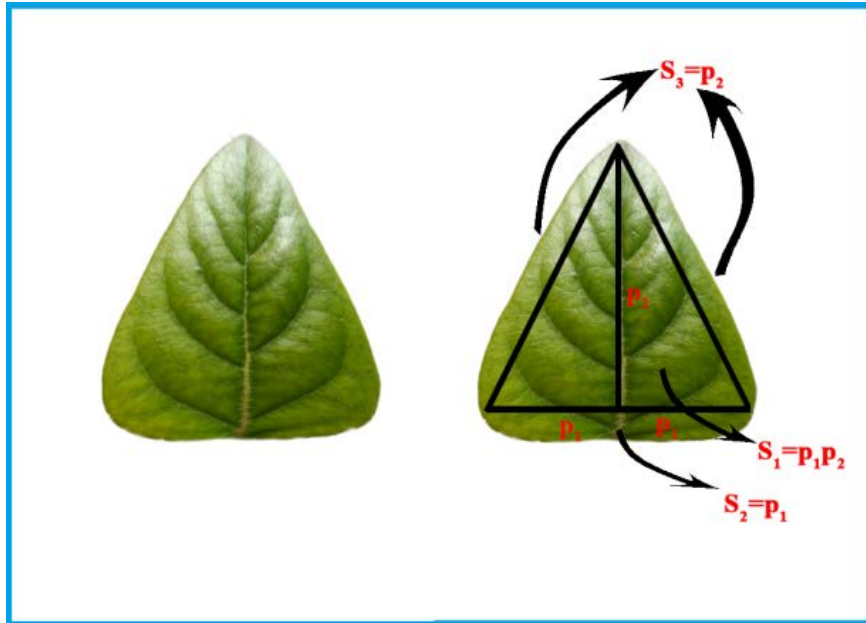
Tablo incelendiğinde  $k$  değeri çift seçildiğinde daha fazla sayıda çözüm elde edildiği görülmektedir.

## 4. YAPRAKLARIN MODELLENMESİ

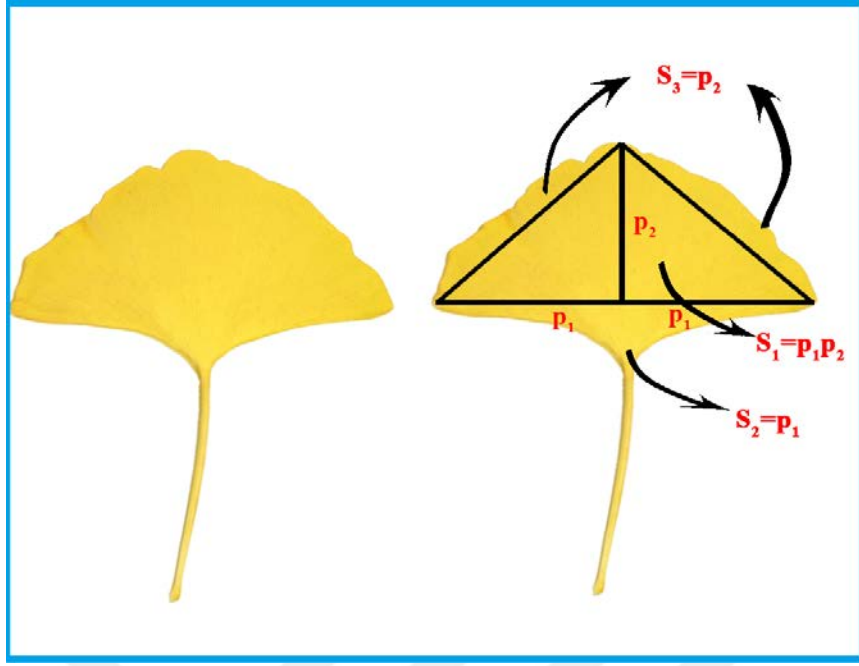
Bu çalışmada bölen fonksiyonlarının özellikleri, yaprakların alanlarını modellemede ve çeşitli yaprakların büyüme sürecini göstermede kullanılmıştır. Yapraklar bitkilerin önemli bir bölümünü oluşturmakta ve çeşitli yollarla bitkilere yardım eden bu kısımlar değişik şekillerde karşımıza çıkmaktadır. Örneğin kimi yapraklar birbirinin ardı sıra dizilmiş iken kimi yapraklar ise karşılıklı sıralanabilir. Özelliklerine göre çeşitlerine ayrılan bu yapraklardan eliptik, yelpaze ve beş loblu yaprak tiplerini bu çalışmada modelleme yapmakta kullanacağız. Modellemeyi, yaprakların alanını hesaplarken bölüm fonksiyonu yardımıyla yapacağız. Yaprakların yüzey alanı hesaplanırken üç ana bölüme ayrılmıştır.

### 4.1 Eliptik ve Yelpaze Şeklindeki Yaprakların Modellenmesi

Eliptik şeklindeki yaprakların modellenmesi için *Cotoneaster* sp. yaprağı ve yelpaze şeklindeki yaprakların modellenmesi için de *Ginkgo* yaprağı seçilmiştir. (Şekil 4.1 ve Şekil 4.2)



Şekil 4.1: Eliptik tipi yaprakların modellenmesi.



**Şekil 4.2:** Yelpaze tipi yaprakların modellenmesi.

Eliptik ve yelpaze şeklindeki yaprakların yüzeylerinin alanının hesaplanmasında bölen fonksiyonu kullanılarak modelleme yapılmıştır. Öncelikle yaprağın yüzey alanı  $S_1, S_2, S_3$  olarak adlandırılan üç bölüme ayrılmıştır. Şekil 4.1 ve Şekil 4.2 incelendiğinde alanı  $S_1$  olan üçgen bir ikizkenar üçgen olarak modellenmiştir. Bu durumda ikizkenar üçgenin yüksekliği  $p_2$ , tabanı  $2p_1$  dir.  $S_1$  'in alanı

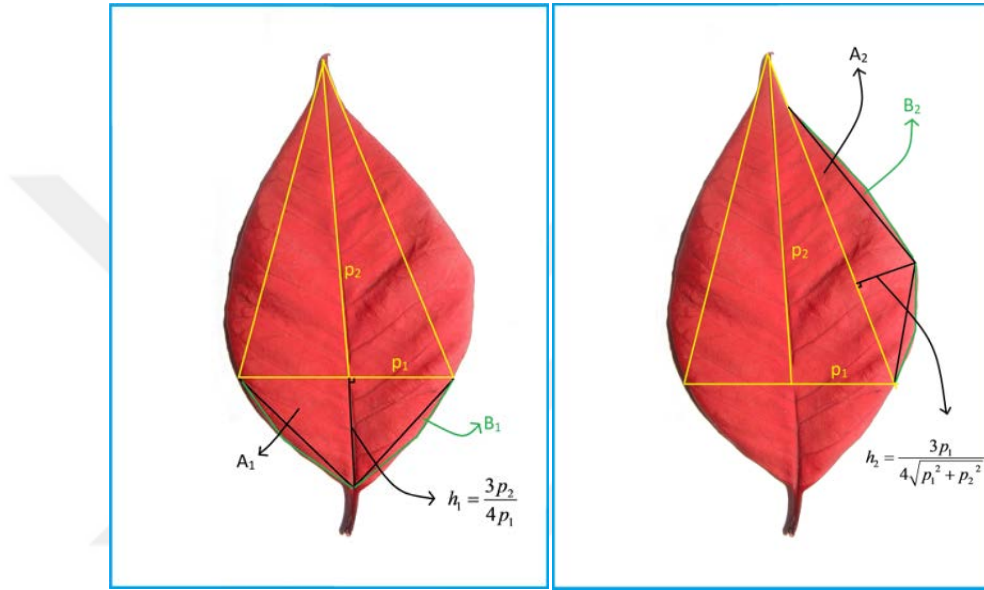
$$S_1 = (\text{taban} \times \text{yükseklik}) / 2 = p_1 p_2$$

olur.  $S_2$  ve  $S_3$  diye adlandırılan diğer alanlar için ise Arşimet Teoremi'nden faydalanılmıştır. Arşimet'in geometrik seriler toplamını, bir parabol ve onu kesen doğru ile aralarında kalan alanı hesaplamak için kullanabiliriz. Bu method bir üçgenin alanının sonsuz çoklukta parçalara ayrılması olarak tanımlanabilir. Şekil 4.3'te adlandırılan  $A_1$  ve  $B_1$  üçgenlerine dikkat edelim. Arşimet  $B_1$  üçgeninin alanının,  $A_1$

üçgeninin alanının  $\frac{1}{8}$  'i olduğunu ispatlamıştır. Bu bilgiyi uyguladığımızda  $S_2$  'nin alanı;

$$S_2 = A_1 + 2\left(\frac{A_1}{8}\right) + 4\left(\frac{A_1}{8^2}\right) + 8\left(\frac{A_1}{8^3}\right) + \dots$$

şeklinde ifade edebiliriz.



**Şekil 4.3:** Eliptik tipi yaprak üzerinde Arşimet Teoremi'nin uygulanması.

Ayrıca

$$A_1 = \frac{1}{2}(2p_1h_1) = p_1h_1$$

olduğundan  $S_2$  alanı

$$S_2 = \frac{4}{3}p_1h_1$$

olarak elde edilir. Benzer olarak bu uygulamayı diğer tarafta kalan üçgen alanı için uygulayalım.  $S_3$  alanı

$$S_3 = A_2 + 2\left(\frac{A_2}{8}\right) + 4\left(\frac{A_2}{8^2}\right) + 8\left(\frac{A_2}{8^3}\right) + \dots$$

biçiminde elde edilir. Diğer taraftan  $A_2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{p_1^2 + p_2^2}\right)h_2$  olduğundan  $S_3$  alanı

$$S_3 = \frac{4}{3}\left(\sqrt{p_1^2 + p_2^2}\right)h_2$$

biçiminde elde edilir.

Şimdi bölen fonksiyonları yardımıyla uygun modellemeyi yapmak için  $h_1$  ve  $h_2$  yerine

$$h_1 = \frac{3p_2}{4p_1} \text{ ve } h_2 = \frac{3p_1}{4\sqrt{p_1^2 + p_2^2}}$$

seçimi yapılırsa

$$S_2 = p_2 \text{ ve } S_3 = p_1$$

elde edilir. Böylece bu eliptik tipindeki yaprağın alanı

$$S = S_1 + S_2 + S_3$$

$$S = p_1 + p_2 + p_1p_2$$

olarak bulunur.

3.1.6 Teorem’de ifade edilen  $\sigma(n) = \sigma(n+2k) = \sigma(q)$  denklemini ele alalım.  $p_1$  ve  $p_2$  farklı tek asal sayılar olmak üzere  $n = p_1p_2$  olsun. Bu durumda

$$\sigma(p_1p_2) = \sigma(p_1).\sigma(p_2) = \sigma(q)$$

ve

$$p_1 + p_2 + p_1p_2 = q$$

elde edilir. Eliptik tipindeki yaprağın alanını bulurken yaptığımız modelleme sonucu elde ettiğimiz alan formülü ise

$$S = p_1 + p_2 + p_1 p_2$$

şeklindedir. Örneğin,  $p_1 = 3$ ,  $p_2 = 5$  ve  $k = 4$  seçtiğimizde

$$S = 3 + 5 + 3.5$$

$$S = 23$$

eliptik tipindeki yaprağın alanının 3 ve 5'ten farklı bir tek asal sayı olduğunu ve  $\sigma(n) = \sigma(n + 2k) = \sigma(q)$  denkleminin  $(8, 3.5, 23)$  şeklinde bir çözümü olduğunu göstermiş oluruz.

Aşağıdaki tabloda  $\sigma(n) = \sigma(n + 2k)$  eşitliğinde  $n = p_1 p_2$  için bulunan ilk 8 değer gösterilmiştir. Alan hesaplamalarına örnek olması açısından her bir  $p_1, p_2$  için yukarıda gösterilen  $h_1, h_2$  değerleri hesaplanmıştır.

**Tablo 4.1:**  $k = 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11$  için  $h_1$  ve  $h_2$  yüksekliklerinin değerleri.

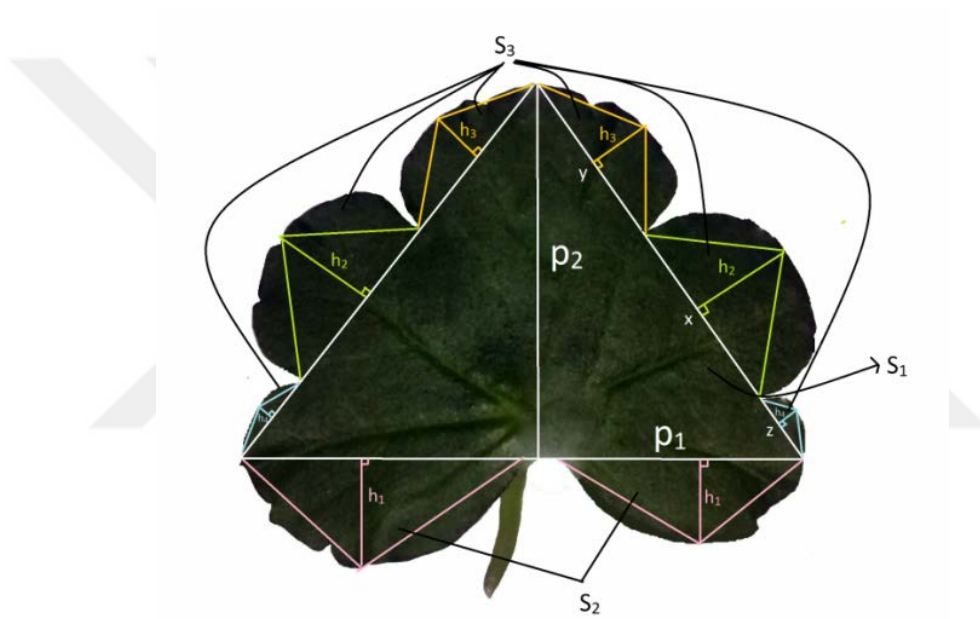
| $2k$ | $p_1$ | $p_2$ | $n$ | $q$ | $p_2 / p_1$ | $h_1$    | $h_2$    |
|------|-------|-------|-----|-----|-------------|----------|----------|
| 8    | 3     | 5     | 15  | 23  | 1,666667    | 1,250000 | 0,385872 |
| 10   | 3     | 7     | 21  | 31  | 2,333333    | 1,750000 | 0,295439 |
| 12   | 5     | 7     | 35  | 47  | 1,400000    | 1,050000 | 0,435929 |
| 14   | 3     | 11    | 33  | 47  | 3,666667    | 2,750000 | 0,197338 |
| 16   | 5     | 11    | 55  | 71  | 2,200000    | 1,650000 | 0,310352 |
| 18   | 5     | 13    | 65  | 83  | 2,600000    | 1,950000 | 0,269234 |
| 20   | 3     | 17    | 51  | 71  | 5,666667    | 4,250000 | 0,130339 |
| 22   | 5     | 17    | 85  | 107 | 3,400000    | 2,550000 | 0,211625 |

#### 4.2 Beş Loblu Yaprakların Modellenmesi

Yeni bir modelleme için beş loblu olan Sardunya (Pelargonium sp.) yaprağı seçilmiştir. Bu yaprağın modellenmesi, diğer yaprak modellerine benzer olarak yapılmış ve bölen fonksiyonları kullanılarak hesaplanmıştır. Beş loblu yaprağın alanı  $S$  diye adlandırılıp üç alana ayrılmıştır ve toplam alan

$$S = S_1 + S_2 + S_3$$

ile gösterilir.



**Şekil 4.4 :** Beş loblu yaprak üzerinde Arşimet Teoremi'nin uygulanması.

$S_1$ , bir ikizkenar üçgendir. İkizkenar üçgenin yüksekliği  $p_2$  ve taban uzunluğu  $2p_1$ 'dir. O halde  $S_1 = p_1 p_2$  olmak üzere  $A_1 = \frac{1}{2}(p_1 h_1)$  olur. Arşimet Teoremi kullanılarak  $S_2$ 'nin alanı

$$S_2 = 2 \left[ A_1 + 2 \left( \frac{A_1}{8} \right) + 4 \left( \frac{A_1}{8^2} \right) + 8 \left( \frac{A_1}{8^3} \right) + \dots \right]$$

olarak bulunur. Burada modelleme için  $h_1 = \frac{3p_2}{4p_1}$  olarak seçildiğinde

$$S_2 = p_2$$

elde edilir.  $S_3$  'ün alanını benzer şekilde hesapladığımızda

$$\begin{aligned} S_3 = 2 \left\{ 2 \left[ A_2 + 2 \left( \frac{A_2}{8} \right) + 4 \left( \frac{A_2}{8^2} \right) + 8 \left( \frac{A_2}{8^3} \right) + \dots \right] \right. \\ \left. + 2 \left[ A_3 + 2 \left( \frac{A_3}{8} \right) + 4 \left( \frac{A_3}{8^2} \right) + 8 \left( \frac{A_3}{8^3} \right) + \dots \right] \right. \\ \left. + 2 \left[ A_4 + 2 \left( \frac{A_4}{8} \right) + 4 \left( \frac{A_4}{8^2} \right) + 8 \left( \frac{A_4}{8^3} \right) + \dots \right] \right\} \end{aligned}$$

ve

$$S_3 = \frac{16}{3} [A_2 + A_3 + A_4]$$

şeklinde ifade edebiliriz.  $x + y + z = \sqrt{p_1^2 + p_2^2}$  olmak üzere  $A_2, A_3$  ve  $A_4$  alanlarını hesapladığımızda

$$A_2 = \frac{1}{2}(xh_2), A_3 = \frac{1}{2}(yh_3) \text{ ve } A_4 = \frac{1}{2}(zh_4)$$

elde edilir. Uygun olan modellemeyi yapmak için  $h_2 = \frac{p_1}{8x}$ ,  $h_3 = \frac{p_1}{8y}$  ve  $h_4 = \frac{p_1}{8z}$  değerlerini seçersek

$$S_3 = p_1$$

bulunur. Sonuç olarak beş loblu yaprağın alanı

$$S = p_1 + p_2 + p_1 p_2$$

olarak elde edilir.

3.1.6. Teorem'deki  $\sigma(n) = \sigma(n+2k) = \sigma(q)$  denklemi için  $p_1$  ve  $p_2$  farklı tek asal sayılar olmak üzere  $n = p_1 p_2$  alalım.  $p_1$  ve  $p_2$  asallarına göre denklemden

$$p_1 + p_2 + p_1 p_2 = q$$

eşitliğini elde ederiz ki modelleme sonucu bulduğumuz alan formülüdür. Örneğin;  
 $p_1 = 3$ ,  $p_2 = 7$  ve  $k = 5$  alırsak

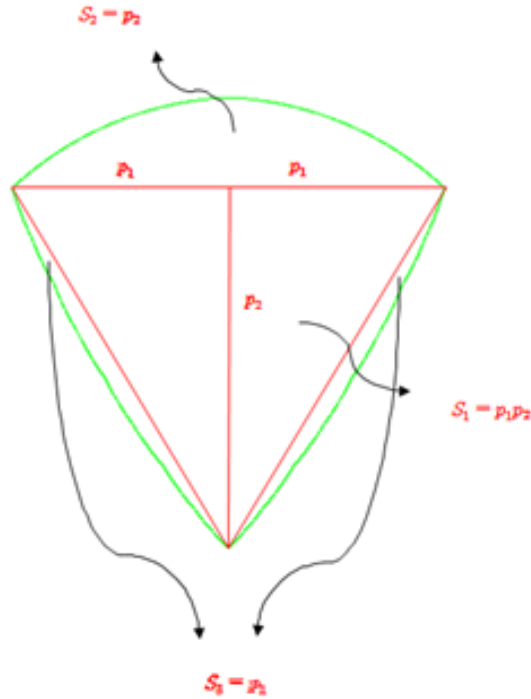
$$S = 3 + 7 + 3.7$$

$$S = 31$$

beş loblu sardunya yaprağının alanı 3 ve 7 den farklı bir tek asal sayı olan 31 asal sayısını elde ederiz. Yani 3.1.6. Teorem'deki denklemin  $(10, 3.7, 31)$  biçiminde bir çözümünün var olduğunu söylemiş oluruz.

### 4.3 Yaprakların Modellenmesinde $S_3$ Alanı

$p_1, p_2$  ve  $q$  farklı tek asal sayılar,  $n = p_1 p_2$  ve  $q = n + 2k$  olmak üzere  $\sigma(n) = \sigma(n + 2k) = \sigma(q)$  denkleminin  $(2k, p_1 p_2, n, q)$  çözümleri kullanılarak modelleme yoluyla bir yaprak elde edebiliriz. Şimdi Şekil 4.5'te verildiği gibi bir yaprağı somutlaştıralım.



**Şekil 4.5:** Modelleme ile ortaya çıkan yaprak.

Kırmızı çizgilerle gösterilen  $S_1$ , yüksekliği  $p_2$ , taban uzunluğu  $2p_1$  ve alanı  $p_1p_2$  olan bir ikizkenar üçgendir. Arşimet'in fikrini uygulayarak  $S_2$  ve  $S_3$  alanlarını hesaplayabiliriz. Buradan  $S_2$ 'nin alanı  $p_2$  olarak bulunur. Arşimet'in fikrini değiştirerek uyguladığımızda  $S_3$  alanını elde ederiz.  $S_3$  alanı için Arşimet Teoremi'ni uygularken her adımda üçgenlerin sayısı 2 kat artarken, üçgenlerin alanı da 8 kat azalmaktadır. Dolayısıyla buradaki ortak oran  $\frac{1}{4}$  olur.

$S_3$  alanını hesaplama sürecinde ortak orana  $r$  diyelim. Üçgenin alanı, taban uzunluğu ve yüksekliği ise sırasıyla  $A_n$ ,  $K_n$  ve  $H_n$  olsun. Tablo 4.2'de  $A_n$ ,  $K_n$  ve  $H_n$ 'nin her birinin ilişkisel eşitlikleri verilmiştir. Tablo 4.2'de görülen  $N_n$  ise geometrik serinin  $n$ 'inci adımındaki toplam üçgen sayısını vermektedir.

**Tablo 4.2:**  $A_n$ ,  $K_n$ ,  $H_n$ ,  $N_n$ 'nin ilişkisel eşitlikleri.

|       | $n = 1$                                   | Yineleme İlişkisi ( $n \geq 2$ )                                |
|-------|-------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|
| $A_n$ | $A_1 = \frac{1-r}{2} p_1$                 | $A_n = \frac{r}{2} A_{n-1}$                                     |
| $K_n$ | $K_1 = \sqrt{p_1^2 + p_2^2}$              | $K_n = \sqrt{\left(\frac{1}{2} K_{n-1}\right)^2 + (H_{n-1})^2}$ |
| $H_n$ | $H_1 = \frac{2A_1}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2}}$ | $H_n = \frac{rA_{n-1}}{K_n}$                                    |
| $N_n$ | 1                                         | $N_n = 2^{n-1}$                                                 |

Üçgenlerin sayısının artış oranı ile üçgenin alanının azalış oranını çarparak ortak oran  $r$ 'yi elde ederiz.

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} = \frac{r}{2} \text{ ve } \frac{N_{n+1}}{N_n} = 2$$

eşitliklerini

$$\left(\frac{A_{n+1}}{A_n}\right) \cdot \left(\frac{N_{n+1}}{N_n}\right) = \frac{r}{2} \cdot 2 = r$$

biçiminde çarparak elde ettiğimiz ortak oran  $r$ 'yi kullanarak  $S_3$ 'ü hesaplayabiliriz.

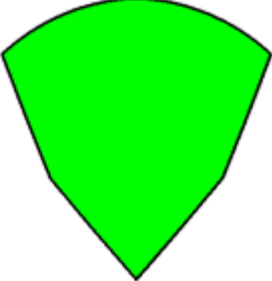
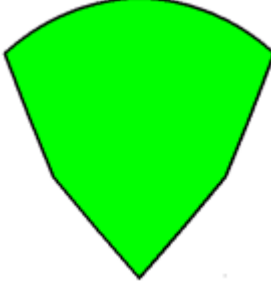
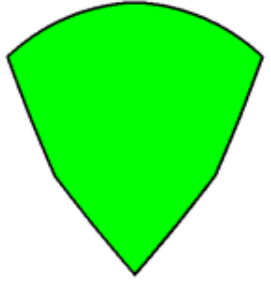
$S_3$  'ün şeklinin  $r$  'ye bağlı nasıl değiştiği Tablo 4.3'te gösterilmiştir.

**Tablo 4.3:**  $r$  'ye göre değişen  $S_3$  'ün şekli ( $p_1 = 3$ ,  $p_2 = 5$ ,  $n = 10$ . adım).

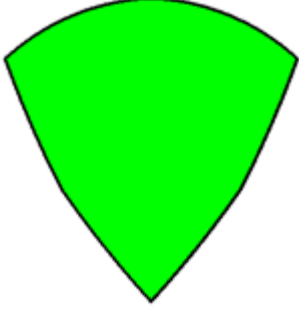
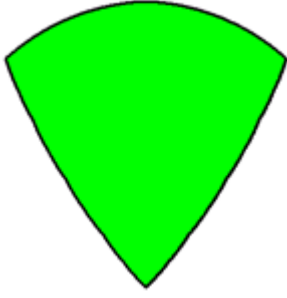
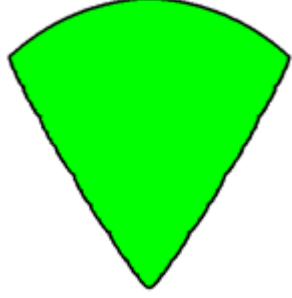
|                                                                                     |                                                                                     |                                                                                       |
|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
|    |    |    |
| $r = \frac{1}{21}$                                                                  | $r = \frac{1}{16}$                                                                  | $r = \frac{1}{8}$                                                                     |
|  |  |  |
| $r = \frac{1}{4}$                                                                   | $r = \frac{1}{2}$                                                                   | $r = \frac{3}{4}$                                                                     |

Aşağıdaki tabloda, geometrik serinin  $n$  'inci adımında ( $n = 10$ )  $S_3$  'ün şekli çizilmiştir. Burada  $r$  'nin farklı değerlerinde  $S_3$  'ün nasıl biçimde ortaya çıktığı gösterilmiştir.

**Tablo 4.4:**  $r$  'ye göre değişen yaprağın şekilleri ( $p_1 = 3$ ,  $p_2 = 5$ ,  $n = 10$ . adım).

|                                                                                     |                                                                                     |                                                                                       |
|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
|  |  |  |
| $r = \frac{1}{21}$                                                                  | $r = \frac{1}{16}$                                                                  | $r = \frac{1}{8}$                                                                     |

**Tablo 4.4:**  $r$  'ye göre değişen yaprağın şekilleri ( $p_1 = 3$ ,  $p_2 = 5$ ,  $n = 10$ . adım).  
(devam)

|                                                                                   |                                                                                   |                                                                                     |
|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
|  |  |  |
| $r = \frac{1}{4}$                                                                 | $r = \frac{1}{2}$                                                                 | $r = \frac{3}{4}$                                                                   |

Tablo 4.3 ve Tablo 4.4, Python 2.7.9 (Turtle Module) programı kullanılarak çizilmiştir.

#### 4.4 Yaprığın Büyümesinin Modellenmesi

Bu bölümde bölen fonksiyonları temel alınarak bir yaprağın büyüme modeli tasarlanmıştır. Bölen fonksiyonlarının matematiksel anlamı incelendiğinde, bölen fonksiyonlarını bir yaprak modeline uyguladığımızdaki avantajları ortaya çıkabilir. Büyüme modeli kurallı bir temele sahip olmalıdır. Basit ve sezgisel olmamalıdır. Bunun için bu modeli oluştururken karmaşık parametrelere ihtiyaç vardır.

Yaprığın gelişimine genel olarak bakarsak, ilk aşamada yavaşça büyür. İkinci olarak yaprağın büyüme hızı artar ve inanılmaz bir büyüme yaşar. Son olarak yetişkin bir hale geldiğinde, yaprağın büyüme hızı yavaşlar. Bu doğal gelişimi göz önüne alarak, aynı periyotlarda farklı büyüme hızlarına sahip dört aşama belirlenmiştir.

Bir yaprağın belli periyotlardaki büyüme modelini tasarlamak için zamanı  $t$  ile ve sabit periyodu  $I$  ile gösterelim. Burada zaman  $T_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) olmak üzere

$$I_0 = [0, T_1] \text{ ve } I_i = [T_i, T_{i+1}]$$

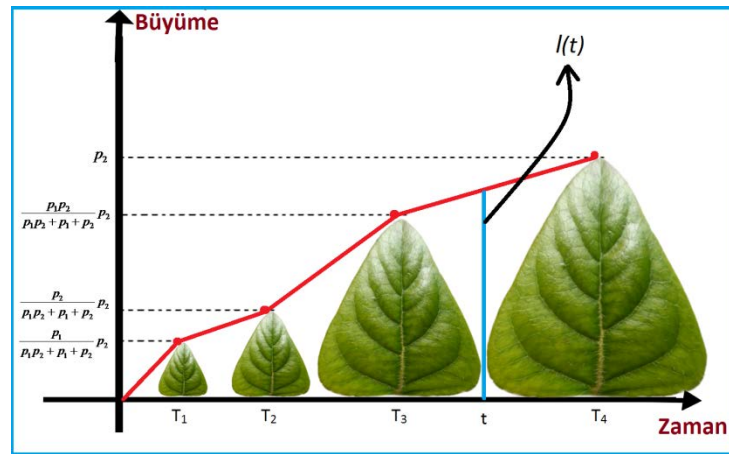
ve herhangi bir  $t$  zamanında yaprağın uzunluğu  $l(t)$  olsun. 3.1.6 Teorem'deki

$\sigma(n) = \sigma(n + 2k) = \sigma(q)$  denkleminin çözümlerine göre yapılan modelleme sonucu

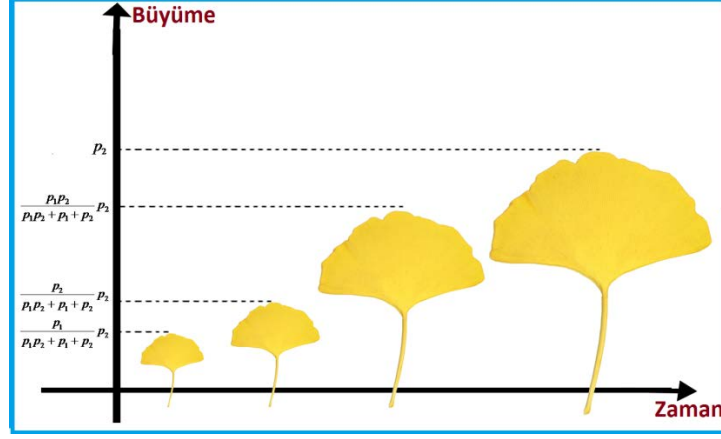
bir yaprağın belli periyotlardaki uzunluğu

$$l(t) = \begin{cases} \frac{p_1 p_2}{(p_1 p_2 + p_1 + p_2) T_1} t & , t \in I_0 \\ \frac{(p_2 - p_1) p_2}{(p_1 p_2 + p_1 + p_2) (T_2 - T_1)} t + \frac{(p_1 T_2 - p_2 T_1) p_2}{(p_1 p_2 + p_1 + p_2) (T_2 - T_1)} & , t \in I_1 \\ \frac{(p_2 - 1) p_1 p_2}{(p_1 p_2 + p_1 + p_2) (T_3 - T_2)} t + \frac{(T_3 - p_2 T_2) p_1 p_2}{(p_1 p_2 + p_1 + p_2) (T_3 - T_2)} & , t \in I_2 \\ \frac{(p_1 p_2 (1 - p_2) + p_1 + p_2)}{(p_1 p_2 + p_1 + p_2) (T_4 - T_3)} t + \frac{T_4 (p_2 (2 p_1 - 1) - p_1) - T_3 (p_2 (p_1 p_2 + p_1 + p_2))}{(p_1 p_2 + p_1 + p_2) (T_4 - T_3)} & , t \in I_3 \end{cases}$$

olur. Zamana bağlı büyüyen yaprak modeli animasyonla somutlaştırıldığında, bu formül bize yaprağın boyutunu vermektedir. Buradan yola çıkarak eliptik ve yelpaze tipindeki yaprakların zamana bağlı büyüme grafiği, dört aşamada olmak üzere Şekil 4.6 ve Şekil 4.7'de verilmiştir.



Şekil 4.6 : Eliptik tipi yaprağın zamana göre büyüme grafiği.



Şekil 4.7 : Yelpaze tipi yaprağın zamana göre büyüme grafiği.

#### 4.5 Yaprakların Modellenmesinde Ortaya Çıkan Altın Orana En Yakın Değerler

Evrende, doğada, yapraklarda, kısacası her yerde karşımıza altın oran çıkmaktadır. Altın oran, bir bütün ve parçaları arasında gözlenen uyum açısından en güzel boyutları verdiği düşünülen bir oran bağıntısıdır.

“Bölen fonksiyonları kullanılarak yapılan modelleme, yapraklara uygulanabildiğine göre, acaba elde edilen sonuçlarda altın orana rastlanabilir mi?” sorusuna yanıt aramak için  $p_1$  ve  $p_2$  farklı tek asal sayılar olmak üzere  $\sigma(p_1 p_2) = \sigma(p_1 p_2 + 2k) = \sigma(q)$  denkleminin  $0 < 2k < 199900$  aralığındaki çözümleri incelenmiştir.  $p_1 / p_2$  oranının, altın orana en yakın olan değerleri aşağıdaki tabloda verilmiştir:

**Tablo 4.5:**  $p_1 / p_2$  oranının, altın orana en yakın olan değerleri.

| $2k$  | $p_1$ | $p_2$ | $q$        | $p_1 / p_2$ |
|-------|-------|-------|------------|-------------|
| 13962 | 8629  | 5333  | 46032419   | 1,618039    |
| 41200 | 25463 | 15737 | 400752431  | 1,618034    |
| 60144 | 37171 | 22973 | 853989527  | 1,618030    |
| 63490 | 39239 | 24251 | 951648479  | 1,618036    |
| 68616 | 42407 | 26209 | 1111513679 | 1,618032    |

**Tablo 4.5:**  $p_1 / p_2$  oranının, altın orana en yakın olan değerleri. (devam)

| $2k$   | $p_1$ | $p_2$ | $q$        | $p_1 / p_2$ |
|--------|-------|-------|------------|-------------|
| 68878  | 42569 | 26309 | 1120016699 | 1,618039    |
| 75868  | 46889 | 28979 | 1358872199 | 1,618034    |
| 83052  | 51329 | 31723 | 1628392919 | 1,618037    |
| 85314  | 52727 | 32587 | 1718300063 | 1,618038    |
| 87780  | 54251 | 33529 | 1819069559 | 1,618032    |
| 92304  | 57047 | 35257 | 2011398383 | 1,618033    |
| 98488  | 60869 | 37619 | 2289929399 | 1,618039    |
| 113730 | 70289 | 43441 | 3053538179 | 1,618034    |
| 114636 | 70849 | 43787 | 3102379799 | 1,618037    |
| 117390 | 72551 | 44839 | 3253231679 | 1,618033    |
| 125904 | 77813 | 48091 | 3742230887 | 1,618037    |
| 130030 | 80363 | 49667 | 3991519151 | 1,618036    |
| 134664 | 83227 | 51437 | 4281081863 | 1,618038    |
| 137790 | 85159 | 52631 | 4482141119 | 1,618039    |

Mathematica 9.0 programı kullanılarak  $0 < 2k < 1000000$  aralığı incelendiğinde altın orana en yakın olan değer (842538, 321821.520717, 74783651) olarak bulunmuştur.  $p_1$  ve  $p_2$ , 100000'den küçük asal sayılar olmak üzere, (199440,99721.99719,9944277839) değeri ile en küçük  $p_1 / p_2$  oranının 1,000020056358367 ve (99974,99971.3,399887) değeri ile en büyük  $p_1 / p_2$  oranının 33323,666666666664 olduğu tespit edilmiştir.

## 5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, bölen fonksiyonları ve bölen fonksiyonları yardımıyla yaprakların modellenmesi çalışılmıştır.

İlk bölümde, bölen fonksiyonları ve ilgili çalışmalardan bahsedilmiştir.

İkinci bölümde gerekli tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde,  $1 \leq k \leq 100$  aralığında  $\sigma(n) = \sigma(n + 2k)$  denkleminin tüm çözümleri verilmiştir. Ayrıca  $\ell$  pozitif bir tamsayı ve  $q$  tek asal sayı olmak üzere  $\sigma_{2\ell}(n) = \sigma_{2\ell}(q)$  denklemini sağlayan hiçbir sonucun olmadığı gösterilmiştir.

Dördüncü bölümde, bölen fonksiyonları yardımıyla yaprakların alanlarına ve yaprakların büyüme süreçlerine modelleme yapılmıştır.

Üçüncü ve dördüncü bölüm özgündür.

Çalışmada temel alınan  $\sigma(n) = \sigma(n + 2k)$  denklemine benzer şekilde  $\sigma(n) = \sigma(n + 2k + 1)$  denklemi için de çözümler araştırılabilir. Ayrıca başka yaprak tiplerine, farklı modellemeler de yapılabilir.

## 6. KAYNAKLAR

- [1] Tutak, T., Güder, Y., “Matematiksel Modellemenin Tanımı,Kapsamı ve Önemi”, Turkish Journal of Educational Studies, 1 (1), (2014).
- [2] Blum, W., “Mathematical Modelling In Mathematics Education and Instruction”, (ed: T. Breiteig), *Teaching and learning mathematics in context* , Ellis Horwood Limited, Chichester, 3-14, (1993).
- [3] Williams, K.S., *Number Theory in the Spirit of Liouville*, London Mathematical Society Student Texts, Cambridge University Press, (2011).
- [4] Glaisher, J.W.L., *Mathematical Tables*, Vol III, Cambridge, 1940.
- [5] Sierpiński, W., *Elementary Theory of Numbers*, Trans. by A. Hulanicki, Polska Akademia Nauk, Monograf Matematyczne Tom, 42, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, Poland, 166, (1964).
- [6] Makowski, A., “On Some Equations Involving Functions  $\phi(n)$  and  $\sigma(n)$  ”, American Mathematical Monthly, 67, 668-670, (1960).
- [7] Mientka, W.E., Vogt R.L., “Computational Results Relating to Problems Concerning  $\sigma(n)$  ”, Matematykn Bechnk, 7(22), 35-36, (1970).
- [8] Hunsucker, J.L., Nebb, J., Stearns, R.E., “Computational Results Concerning Some Equations Involving  $\sigma(n)$  ”, Math. Student, 41, 285-289, (1973).
- [9] Weingartner, A., “On The Solutions of  $\sigma(n) = \sigma(n+k)$  ”, J. Integer Sequences, 14, 7, (2011).
- [10] Guy, R., Unsolved Problems in Number Theory, Unsolved Problems in Intuitive Mathematics, Volume I, Springer-Verlag New York, (1994).
- [11] De Koninck J.M. “On The Solutions of ”, Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp. 21, 127-133, (2002).
- [12] Gioia, A.A., The Theory of Numbers An Introduct., Dover Publications, New York, (2001).
- [13] Andrews, G.E., Number Theory, Dover Publications, New York, (1994).
- [14] Heath, T.L., The Works of Archimedes, Dover Publications, 233-235, 248- 252, (1953).

- [15] Burton, D.M., The History of Mathematics; An Introduction, McGraw Hill Companies, (2011).
- [16] Adam, J.A., Mathematics in Nature: Modeling Patterns in the Natural World, Princeton University Press, (2003).
- [17] Kim, J., Kim, D., Cho, H., “Procedural modeling of trees based on convolution sums of divisor functions for real-time virtual ecosystems”, Computer Animation Virtual Worlds, 24, (2013).
- [18] Burton, D.M., Elementary Number Theory, 5th ed. McGraw-Hill, (2002).
- [19] LeVeque, W.J., Fundamentals of Number Theory, Dover Publications, New York, (1996).
- [20] Tattersall J.J., Elemant. Number Theory in Nine Chapter, 2nd ed., Cambridge University Press, (2005).
- [21] Jones, G.A., Jones, J.M., Elementary Number Theory, Springer-Verlag New York, Inc., (1998).



# **EKLER**

## 7. EKLER

### EK A Mathematica 9.0 Programı Kullanılarak Elde Edilen $\sigma(n) = \sigma(n + 2k)$ Denklemine Kodlarının İlk Altı Örnek Listesi ( $1 \leq k \leq 100$ )

```
In[16]:= oddDivisorSigma[n_] := Sum[d, {d, Select[Divisors[n], OddQ]}}];  
Do[If[oddDivisorSigma[n] == oddDivisorSigma[n + 1], Print["n= ", n, "; ",  
FactorInteger[n], "; ", FactorInteger[n + 1]], null], {n, 1, 2^31}];  
Clear[oddDivisorSigma]
```

```
In[16]:= oddDivisorSigma[n_] := Sum[d, {d, Select[Divisors[n], OddQ]}}];  
Do[If[oddDivisorSigma[n] == oddDivisorSigma[n + 2], Print["n= ", n, "; ",  
FactorInteger[n], "; ", FactorInteger[n + 2]], null], {n, 1, 2^31}];  
Clear[oddDivisorSigma]
```



```
In[1]:= oddDivisorSigma[n_] := Sum[d, {d, Select[Divisors[n], OddQ]}}];  
Do[If[oddDivisorSigma[n] == oddDivisorSigma[n + 3], Print["n= ", n, "; ",  
FactorInteger[n], "; ", FactorInteger[n + 3]], null], {n, 1, 2^31}];  
Clear[oddDivisorSigma]
```

```
oddDivisorSigma[n_] := Sum[d, {d, Select[Divisors[n], OddQ]}}];  
Do[If[oddDivisorSigma[n] == oddDivisorSigma[n + 4],  
Print["n= ", n, "; ",  
FactorInteger[n], "; ", FactorInteger[n + 4]], null],  
{n, 1, 2^35}];  
Clear[oddDivisorSigma]
```

```
In[7]:= oddDivisorSigma[n_] := Sum[d, {d, Select[Divisors[n], OddQ]}}];  
Do[If[oddDivisorSigma[n] == oddDivisorSigma[n + 5], Print["n= ", n, "; ",  
FactorInteger[n], "; ", FactorInteger[n + 5]], null], {n, 1, 2^31}];  
Clear[oddDivisorSigma]
```

```
In[22]:= oddDivisorSigma[n_] := Sum[d, {d, Select[Divisors[n], OddQ]}}];  
Do[If[oddDivisorSigma[n] == oddDivisorSigma[n + 6],  
Print["n= ", n, "; ",  
FactorInteger[n], "; ", FactorInteger[n + 6]], null],  
{n, 1, 2^31}];  
Clear[oddDivisorSigma]
```

## EK B Mathematica 9.0 Programı Kullanılarak Elde Edilen İlk Yüz Asal Sayının Gösterimi

```
In[5]:=
```

```
Table[Prime[n], {n, 100}]
```

```
Out[5]= {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61,  
67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137,  
139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199,  
211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 277,  
281, 283, 293, 307, 311, 313, 317, 331, 337, 347, 349, 353, 359,  
367, 373, 379, 383, 389, 397, 401, 409, 419, 421, 431, 433, 439, 443,  
449, 457, 461, 463, 467, 479, 487, 491, 499, 503, 509, 521, 523, 541}
```

## EK C Mathematica 9.0 Programı Kullanılarak $n$ 'inci ( $n=10^9$ ) Asal Sayının Gösterimi

```
In[1]:= Prime[10^9]
```

```
Out[1]= 22801763489
```



## EK D Mathematica 9.0 Programı Kullanılarak Bir Sayının Asal Olup Olmadığının Gösterimi

```
In[1]:= PrimeQ[13]
```

```
Out[1]= True
```

```
In[2]:= PrimeQ[10^100 + 1]
```

```
Out[2]= False
```

